

Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie bei massiven Quark-Jets

Von der Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen zur Erlangung des
akademischen Grades eines Doktors der Naturwissenschaften genehmigte
Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Physiker Roland Heinesch

aus Luxemburg

Berichter: Universitätsprofessor Dr. Werner Bernreuther
 Universitätsprofessor Dr. Thomas Gehrmann

Tag der mündlichen Prüfung: 16. September 2005

Diese Dissertation ist auf den Internetseiten der Hochschulbibliothek online
verfügbar.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie	5
2.1	A_{FB} bezüglich der Quark-Richtung	5
2.2	A_{FB} auf Born-Niveau	9
2.3	Experimentelle Aspekte	11
3	Formfaktoren	15
3.1	Definitionen, Beiträge und Renormierung	15
3.1.1	Beiträge zur Z - Q - $\bar{Q}$ -Vertexfunktion	20
3.1.2	Renormierung	26
3.2	Berechnung der Formfaktoren	30
3.2.1	Analytische Fortsetzung	39
3.2.2	Asymptotische und Schwellen-Entwicklung	45
4	2-Parton-Beitrag zu A_{FB} und zu σ_S an der Schwelle	49
4.1	2-Parton-Beitrag zu A_{FB}	49
4.2	σ_S an der Schwelle	55
4.3	A_{FB} für b -Quarks auf der Z -Resonanz	58
4.4	A_{FB} für top-Quarks oberhalb der $t\bar{t}$ -Paarproduktionsschwelle	61
5	Zusammenfassung	67
A	Amplituden und Propagatoren	71
B	Normierung der Schleifen-Integrale	79
C	Resultate	83
C.1	Die analytisch fortgesetzten Formfaktoren	83
C.1.1	Typ-A-Beiträge	83
C.1.2	Typ-B-Beiträge	102
C.2	Asymptotische Entwicklung	106
C.2.1	Typ-A-Beiträge	106

C.2.2	Typ-B-Beiträge	112
C.3	Schwellenentwicklung	114
C.3.1	Typ-A-Beiträge	114
C.3.2	Typ-B-Beiträge	118
Literaturverzeichnis		119

Kapitel 1

Einleitung

The principle of such [precision] tests is very simple; one has to calculate a certain observable such as for example the forward-backward asymmetry [...] within the framework of the Standard Model and then confront it with the measured quantity. [JWW91]

Die derzeit beste Beschreibung der fundamentalen Bausteine der Materie sowie der zwischen ihnen wirkenden Kräfte ist - die Gravitation ausgenommen - das Standardmodell der Elementarteilchenphysik, welches aus der Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung und der Quantenchromodynamik (*QCD*) besteht. Es existieren derzeit unterschiedliche experimentelle Hinweise darauf, dass eine Erweiterung des Standardmodells benötigt wird. Bisher konnte jedoch noch kein Signal dafür gefunden werden, das anzeigt welcher Art diese Erweiterung (zum Beispiel supersymmetrische Modelle) sein sollte.

Ein wichtiger Prüfstein des Standardmodells besteht im Vergleich zwischen theoretischen Vorhersagen und experimentellen Messungen für sogenannte Präzisionsobservablen. Einerseits erhofft man sich daraus Hinweise auf neue Physik jenseits des Standardmodells, andererseits ermöglichen die Präzisionsobservablen Rückschlüsse auf die Parameter des Standardmodells, wie zum Beispiel die Masse des bisher nicht beobachteten Higgs-Bosons.

Wichtige Präzisionsobservablen sind unter anderen die verschiedenen Asymmetrien, welche an den Experimenten am Large Electron Positron Beschleuniger (LEP) und am Stanford Linear Collider (SLC) bestimmt wurden. Mit Hilfe der gemessenen Asymmetrien können die neutralen Strom-Kopplungen der Quarks und Leptonen an das *Z*-Boson bestimmt werden. Aus diesen lässt sich wiederum der effektive schwache Mischungswinkel $\sin^2 \vartheta_W^{\text{eff}}$ bestimmen.

Mittels radiativer Korrekturen ist $\sin^2 \vartheta_W^{\text{eff}}$ sensitiv auf die Higgs-Masse. Die präzise Messung des schwachen Mischungswinkels ermöglicht somit experimentelle Ein-

schränkungen auf die unbekannte Higgs-Masse.

Die beiden Messungen, welche für $\sin^2 \vartheta_W^{\text{eff}}$ die Werte mit den kleinsten experimentellen Fehlern liefern, sind die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie (A_{FB}) bezüglich der Thrust-Richtung für bottom-Quarks und die Links-Rechts-Asymmetrie [LEP04]. Die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie wurde von den vier Experimenten am LEP bestimmt; die Links-Rechts-Asymmetrie mit Hilfe der am SLC verfügbaren links- und rechts-händig polarisierten Elektronen, vom SLD-Experiment (Eine Definition der Links-Rechts-Asymmetrie ist zum Beispiel in [AS⁺01] gegeben). Unglücklicherweise unterscheiden sich diese beiden Messungen um nahezu 3 Standardabweichungen voneinander [LEP04]. Der Ursprung dieser Diskrepanz ist bisher nicht geklärt.

Die erreichte Genauigkeit bei der experimentellen Bestimmung der Präzisionsobservablen ist mittlerweile so hoch, dass Quark-Masseneffekte in den theoretischen Vorhersagen nicht mehr vernachlässigt werden können, da sie von vergleichbarer Größenordnung wie die experimentellen Fehler sind. Bislang wurde die Vernachlässigung der Quark-Massen in den *QCD*-Korrekturen der Ordnung α_s^2 als zusätzlicher systematischer Fehler berücksichtigt [LEP01].

Die vollständige Berechnung der *QCD*-Korrekturen in zweiter Ordnung der starken Kopplung unter Berücksichtigung der Masse eines schweren Quarks ist für zukünftige Präzisionsmessungen, welche kleinere experimentelle Fehler als bisherige vergleichbare Messungen besitzen werden, notwendig. Die Minimierung des Fehlers der Standardmodell-Vorhersage erleichtert die Diskriminierung zwischen Standardmodell und neuer, unbekannter Physik. Auch für die oben beschriebene Diskrepanz in der Bestimmung des schwachen Mischungswinkels erhofft man sich von genaueren theoretischen Vorhersagen ein besseres Verständnis der ihr zu Grunde liegenden Physik.

Ebenso wie für bottom-Quarks am LEP wird man an einem derzeit diskutierten zukünftigen e^+e^- -Linearbeschleuniger Präzisionsmessungen der Eigenschaften des top-Quarks oberhalb der $t\bar{t}$ -Produktionsschwelle durchführen können [AS⁺01]. Die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrien bezüglich der Top-Quark-Richtung und bezüglich der Thrust-Richtung werden hierbei sicherlich wichtige Observablen sein. Die top-Masse ist für die erreichbaren Schwerpunktsenergien eines solchen Linearbeschleunigers keinesfalls vernachlässigbar, so dass die Kenntnis der Masseneffekte in höheren Ordnungen der Störungsreihe zwingend erforderlich ist.

Ebenso bietet ein solcher Linearbeschleuniger die Möglichkeit, die Schwerpunktsenergie auf die Z -Resonanz zu senken (Giga- Z -Option) [AS⁺01]. Dies ermöglicht die erneute Bestimmung der bereits am LEP vermessenen Observablen am Z -Pol, unter anderem die bereits erwähnte Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie für b -Quarks, mit erheblich gesteigerter Präzision aufgrund der deutlich erhöhten Luminosität. Auch hier sind somit genauere theoretische Vorhersagen zum Vergleich mit den ex-

perimentellen Daten erforderlich.

Zur Verbesserung der theoretischen Vorhersagen zu A_{FB} werden in der hier vorliegenden Arbeit die Korrekturen in niedrigster Ordnung der elektroschwachen Kopplung und in zweiter Ordnung der starken Kopplung zum 2-Parton-Beitrag zur Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie im Prozess

$$e^+e^- \rightarrow \gamma^*, Z^* \rightarrow Q\bar{Q}X \quad (1.1)$$

berechnet. Dies erfordert die Berechnung der $\gamma^*Q\bar{Q}$ - und $Z^*Q\bar{Q}$ -Vertexfunktionen auf 2-Schleifen-Niveau, wobei die Masse m des schweren Quarks Q nicht vernachlässigt wird. Die Vertexfunktionen bilden weiterhin einen wichtigen Baustein zur vollständigen differentiellen Beschreibung der Reaktion (1.1) in der $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$, welche zur Berechnung verschiedenster Observablen, zum Beispiel Winkelverteilungen und Jet-raten, benötigt wird.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: In Kapitel 2 wird die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie (A_{FB}) bezüglich der Quark-Richtung definiert. Weiterhin werden die derzeit bekannten QCD -Korrekturen und der Zusammenhang zwischen theoretischer Vorhersage und experimenteller Bestimmung der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie kurz erläutert.

Die $Z^*Q\bar{Q}$ - und $\gamma^*Q\bar{Q}$ -Vertexfunktionen werden durch vier beziehungsweise zwei Formfaktoren parametrisiert, welche in Kapitel 3 definiert werden. Das verwendete Renormierungsschema zur Beseitigung der Ultraviolett-Divergenzen sowie die benötigten Renormierungskonstanten werden kurz vorgestellt. Weiterhin wird die Ward-Identität zum Axialvektorstrom angegeben, welche zur Überprüfung der paritätsverletzenden Formfaktoren benutzt wird.

Zunächst werden die Formfaktoren für raumartige Schwerpunktsenergien ($s < 0$) berechnet. Anschliessend folgt die analytische Fortsetzung in den physikalisch interessanten Bereich oberhalb der Paarproduktionsschwelle schwerer Quarks ($s > 4m^2$), in dem die Formfaktoren absorptive Anteile entwickeln. Nachdem die Konsistenz der Ergebnisse anhand der Ward-Identitäten überprüft wurde, werden die Formfaktoren für die Grenzfälle $\frac{m^2}{s} \rightarrow 0$ und $s \approx 4m^2$ entwickelt. In diesen Limites können weitere Konsistenztests der Formfaktoren untereinander sowie Vergleiche mit der Literatur durchgeführt werden.

Die Resultate für die Korrekturen in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ werden in Kapitel 3 angegeben; die für die Korrekturen zweiter Ordnung der QCD -Kopplung werden aufgrund ihrer Länge in Anhang C gegeben.

Mit Kenntnis der Formfaktoren wird in Kapitel 4 der 2-Parton-Beitrag zur Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie, bezogen auf die Richtung des schweren Quarks, ausgewertet. Dieser ist für 2-Teilchen-Endzustände identisch mit A_{FB} bezüglich der Thrust-

Richtung. Der 2-Parton-Beitrag zu A_{FB} wird für zwei Fälle numerisch ausgewertet: für bottom-Quarks bei Schwerpunktsenergien auf der Z -Resonanz und für top-Quarks für Schwerpunktsenergien oberhalb der top-Paar-Produktionsschwelle bis hin zu 500 GeV .

Weiterhin wird in Kapitel 4 der totale Wirkungsquerschnitt an der Produktionsschwelle eines schweren Quark-Antiquark-Paares diskutiert und mit der Literatur verglichen.

Die Arbeit schliesst in Kapitel 5 mit einer kurzen Zusammenfassung.

Kapitel 2

Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie

In diesem Kapitel wird die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie bezüglich der Richtung des gestreuten Quarks definiert. Anschließend wird A_{FB} auf Born-Niveau berechnet. In Kapitel 2.3 werden einige Aspekte im Zusammenhang zwischen theoretischen Korrekturen und experimenteller Auswertung diskutiert.

2.1 A_{FB} bezüglich der Quark-Richtung

Die theoretisch einfachste Definition einer Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie ist diejenige bezüglich der Richtung des schweren gestreuten Quarks Q , welches zum Beispiel in der Reaktion $e^+e^- \rightarrow Q\bar{Q} + X$ produziert wird (X ist dabei abhängig von der Ordnung der Störungsreihe). Experimentell wird normalerweise die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie bezogen auf die Thrust-Richtung bestimmt. Die Definition der Thrust-Richtung folgt anschließend an die Definition von A_{FB} bezüglich der Quark-Richtung.

Die Flugrichtung des Elektrons definiert die Symmetrieachse des Detektors. Das schwere Quark wird bezüglich dieser Achse unter dem Winkel ϑ entweder in den vorderen ($\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$) oder in den hinteren ($\vartheta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$) Halbraum des Detektors gestreut. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 2.1 dargestellt.

Kennt man den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\cos\vartheta}$ so kann man die Wirkungsquerschnitte für die Streuung des Quarks in den vorderen (σ_F) oder in den hinteren (σ_B) Halbraum des Detektors ausrechnen:

$$\sigma_F = \int_0^1 \frac{d\sigma}{d\cos\vartheta} d\cos\vartheta, \quad (2.1)$$

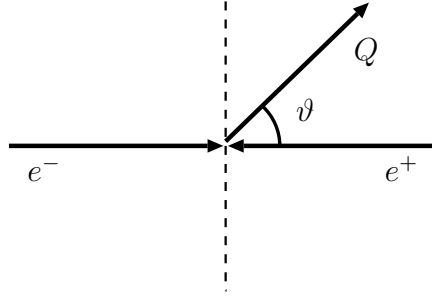


Abbildung 2.1: Kinematik: Das schwere Quark wird unter dem Winkel ϑ bezüglich der Flugrichtung des einlaufenden Elektrons gestreut.

$$\sigma_B = \int_{-1}^0 \frac{d\sigma}{d \cos \vartheta} d \cos \vartheta. \quad (2.2)$$

Die Differenz von σ_F und σ_B ergibt den sogenannten antisymmetrischen Wirkungsquerschnitt σ_A :

$$\sigma_A = \sigma_F - \sigma_B. \quad (2.3)$$

Dieser ist ein Maß für die Differenz der Anzahl schwerer Quarks, welche in den vorwärtigen beziehungsweise rückwärtigen Halbraum des Detektors gestreut werden. Der totale (symmetrische) Wirkungsquerschnitt ergibt sich aus der Summe von σ_F und σ_B :

$$\sigma_S = \sigma_F + \sigma_B. \quad (2.4)$$

Mit Hilfe dieser Definitionen lässt sich die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie definiert bezüglich der Richtung des schweren gestreuten Quarks angeben:

$$A_{FB} = \frac{\sigma_A}{\sigma_S}. \quad (2.5)$$

Die Definition (2.5) besitzt die wichtige Eigenschaft eine infrarot-sichere Observable zu sein. Infrarot-sicher bedeutet, dass sich der Wert einer Observablen zu einem gegebenen n -Teilchen-Endzustand nicht ändert, wenn man zusätzlich ein weiches oder zu einem der n Teilchen kollineares Teilchen im Endzustand betrachtet. Erfüllt die Observable, wie zum Beispiel die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie (2.5), dieses Kriterium, so kürzen sich die IR -Singularitäten, welche in den reellen und virtuellen radiativen Korrekturen auftreten, gegenseitig weg.

Nur solche Observablen haben in der experimentellen Bestimmung Sinn, da nicht zwischen einem n - und einem $n+1$ -Teilchen-Endzustand unterschieden werden kann, wenn das zusätzliche Teilchen entweder weich oder kollinear zu einem der n Teilchen ist. Dies ist auf die endliche Auflösung und die Granularität des Detektors zurück zu führen.

Wie bereits erwähnt kann auch eine Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie bezüglich der

Thrust-Richtung $\vec{T}$ definiert werden. Der Vektor $\vec{T} = T \vec{n}_T$ wird folgendermaßen bestimmt [Far77]:

$$T = \max_{\vec{n}} \frac{\sum_{i=1}^m |\vec{p}_i \vec{n}|}{\sum_{i=1}^m |\vec{p}_i|}, \quad (2.6)$$

wobei $\vec{p}_i$ die Dreier-Impulse aller Teilchen im Endzustand sind. Den Thrust T erhält man aus dem oben angegebenen Maximierungsprozess; der Vektor $\vec{n}_T$ zeigt in die Richtung $\vec{n}$, für die T maximal wird.

Im einfachsten Fall, in dem 2 Teilchen im Endzustand in entgegengesetzte Richtungen fliegen, wie zum Beispiel in der Reaktion $e^+e^- \rightarrow Q\bar{Q}$, ist der Thrust maximal und nimmt den Wert $T = 1$ an. Die Richtung des Thrust $\vec{n}_T$ entspricht in diesem Fall der Flugrichtung eines der beiden Teilchen.

Der Thrust wird minimal ($T = \frac{1}{2}$) für den Fall, dass $m \rightarrow \infty$ Teilchen im Endzustand homogen und isotrop im Raum verteilt sind. In diesem Fall ist keine Richtung im Ereignis explizit ausgezeichnet.

Im Experiment liefert die Approximation der bottom-Quark-Richtung mit der Richtung des nach Hadronisierung produzierten b -Hadrons nur für harte b -Quarks gute Resultate. Deswegen wird normalerweise die Thrust-Richtung des Jets, welcher das b -Hadron enthält, als Näherung der ursprünglichen b -Quark-Richtung verwendet. In diesem Fall wird zusätzlich gefordert, daß $\vec{n}_T \vec{k}_b > 0$, wobei $\vec{k}_b$ der Dreier-Impuls des b -Quarks ist.

Es existieren verschiedene Methoden, um experimentell zu bestimmen in welchen Halbraum des Detektors das bottom-Quark gestreut wurde. Dies wird benötigt, um die Orientierung der Thrust-Richtung eindeutig festzulegen, da man im Allgemeinen keine Kenntnis von $\vec{k}_b$ besitzt. Eine Beschreibung unterschiedlicher Techniken findet man zum Beispiel in [LEP96, Krä04].

Ebenso wie man in der Definition von A_{FB} in Gleichung (2.5) die Richtung des schweren Quarks benutzt hat, kann man die Richtung des Thrust verwenden, um eine Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie zu definieren. In dieser Arbeit wird allerdings nur die in Gleichung (2.5) angegebene Definition verwendet.

Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung der 2-Schleifen-Korrekturen zur Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie schwerer Quarks, welche in Elektron-Positron-Vernichtung erzeugt werden:

$$e^- e^+ \rightarrow \gamma^*, Z^* \rightarrow Q \bar{Q} + X. \quad (2.7)$$

In der Reaktionsgleichung (2.7) ist X abhängig von der betrachteten Ordnung in der QCD -Kopplung:

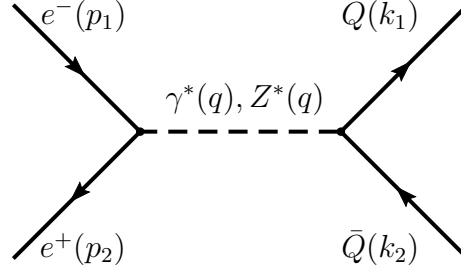


Abbildung 2.2: Born-Amplitude: Die auslaufenden Quarks sind massiv wohingegen Elektron und Positron als masselos angenommen werden.

- In nullter Ordnung der starken Kopplung existiert nur der in Abbildung 2.2 gezeigte 2-Parton-Born-Beitrag zur Reaktion $e^+e^- \rightarrow Q\bar{Q}$.
- Zur $\mathcal{O}(\alpha_s)$ erhält man Amplituden mit zwei und drei Teilchen im Endzustand:
 - $X = 0$. 1-Schleifen-Beiträge zu $e^+e^- \rightarrow Q\bar{Q}$ (vgl. Abbildung 2.3).
 - $X = g$. Es wird zusätzlich ein reelles Gluon g von einem der beiden Quarks abgestrahlt (vgl. Abbildung 2.3). Hierbei handelt es sich um einen 3-Parton-Endzustand.
- In zweiter Ordnung der QCD -Kopplung ergeben sich folgende Beiträge:
 - $X = 0$. 2-Schleifen-Beiträge zum 2-Parton-Endzustand, welche Gegenstand dieser Arbeit sind.
 - $X = g$. 1-Schleifen-Beiträge zum 3-Teilchen $Q\bar{Q}g$ -Endzustand.
 - $X = gg, Q\bar{Q}, q\bar{q}$: 4-Teilchen-Born-Beiträge, wobei Q weiterhin für ein massives und q für ein masseloses Quark steht.

Die Korrekturen zur $\mathcal{O}(\alpha_s)$ sind seit langem bekannt [JLZ81, JLZ82, ABL92, DLZ95, DZ97]. In [JLZ81, JLZ82] wird A_{FB} bezüglich der Richtung des schweren Quarks berechnet. In [DLZ95, DZ97] wird zusätzlich A_{FB} bezüglich der Thrust-Richtung bestimmt.

Für masselose Quarks im Endzustand sind die Korrekturen zur $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ zur Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie bezogen auf die Quark-Richtung in [AL93, RvN98, CS99] und bezogen auf die Thrust-Richtung in [CS99] ebenfalls bereits berechnet worden. Die Resultate aus diesen Arbeiten werden derzeit dazu benutzt, die QCD -Korrekturen zur gemessenen Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie für bottom- und charm-Quarks bei LEP zu bestimmen [A⁺98, LEP01].

Die in dieser Arbeit betrachteten 2-Schleifen-Korrekturen zu $e^+e^- \rightarrow Q\bar{Q}$ für massive Quarks sind ein wichtiger Baustein, um die vollständigen $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ -Korrekturen zu A_{FB} für massive Quarks im Endzustand zu bestimmen. Die Matrixelemente zu den

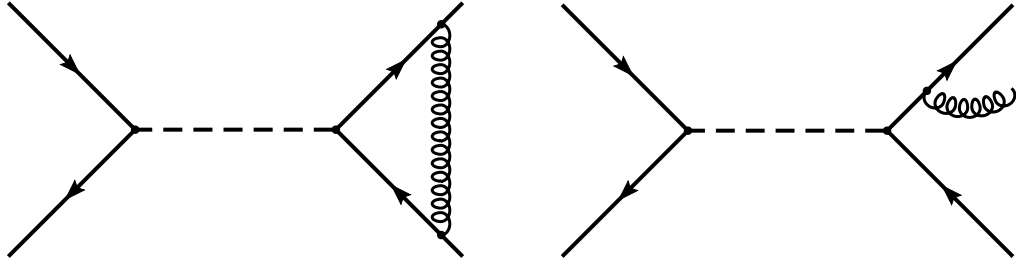


Abbildung 2.3: Beiträge zur $\mathcal{O}(\alpha_s)$: Analog zu Abbildung 2.2 bezeichnen die durchgezogenen einlaufenden und auslaufenden Fermion-Linien Elektron und Positron sowie Quark und Antiquark. Die gestrichelte Linie steht wiederum für ein ausgetauschtes virtuelles Photon oder Z -Boson. Die „Feder“ kennzeichnet ein Gluon.

3- und 4-Parton-Amplituden in zweiter Ordnung von α_s sind bereits in der Literatur bekannt [BBU97, NO98, BU98, RBS99, BBU00].

2.2 A_{FB} auf Born-Niveau

Im folgenden wird nur noch die Reaktion

$$e^-(p_1)e^+(p_2) \rightarrow \gamma^*(q), Z^*(q) \rightarrow Q(k_1)\bar{Q}(k_2) \quad (2.8)$$

betrachtet. Aus dem differentiellen Wirkungsquerschnitt zu (2.8) berechnet sich der der 2-Parton-Beitrag zu A_{FB} . Zunächst soll die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie auf Born-Niveau bezogen auf die Richtung des schweren Quarks ausgerechnet werden. Die Beiträge höherer Ordnung in der starken Kopplung werden in Kapitel 4 berechnet. Betrachtet man nur den reinen 2-Parton-Beitrag, so sind auf Parton-Niveau die Richtung des schweren gestreuten Quarks und die Thrust-Richtung identisch.

Zunächst werden σ_A und σ_S auf Born-Niveau berechnet. Die zu dieser Reaktion beitragenden Amplituden sind in Abbildung 2.2 gezeigt. Die Masse des ausgetauschten Z -Bosons ist m_Z , die Breite Γ_Z . Für Schwerpunktsenergien $\sqrt{s} \geq m_Z$ können Elektron- und Positron-Masse vernachlässigt werden: $p_1^2 = p_2^2 = 0$. Der Austausch eines virtuellen Higgs-Bosons ist aufgrund der Yukawa-Kopplung $\frac{m_e}{v}$, wobei m_e die Elektronmasse ist und $v = 246 \text{ GeV}$, vernachlässigbar und verschwindet für masselose Elektronen. Die schweren auslaufenden Quarks seien auf ihrer Massenschale, $k_1^2 = k_2^2 = m^2$.

In der Born-Approximation kann der differentielle Wirkungsquerschnitt zu diesem Prozess mit Hilfe von Standardmethoden berechnet werden. Ausgehend von den Gleichungen (2.1) und (2.2) erhält man σ_A und σ_S gemäß (2.3) und (2.4):

$$\sigma_A^0 = \frac{N_c}{8\pi} \frac{s}{D_Z} \beta^2 a_e^Z a_Q^Z \left[2 v_e^Z v_Q^Z + \left(1 - \frac{m_Z^2}{s} \right) v_e^\gamma v_Q^\gamma \right], \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_S^0 = & \frac{N_c}{24\pi} \frac{1}{s} \beta (3 - \beta^2) (v_e^\gamma v_Q^\gamma)^2 \\
& + \frac{N_c}{12\pi} \frac{s}{D_Z} \beta (3 - \beta^2) \left(1 - \frac{m_Z^2}{s}\right) v_e^\gamma v_Q^\gamma v_e^Z v_Q^Z \\
& + \frac{N_c}{24\pi} \frac{s}{D_Z} \beta \left[(a_e^Z)^2 + (v_e^Z)^2 \right] \left[2\beta^2 (a_Q^Z)^2 + (3 - \beta^2) (v_Q^Z)^2 \right], \quad (2.10)
\end{aligned}$$

wobei N_c die Anzahl der Quark-Farben, $D_Z = [(s - m_Z^2)^2 + m_Z^2 \Gamma_Z^2]$ der Breit-Wigner-Propagator des Z -Bosons und $\beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}$ die Geschwindigkeit des Q beziehungsweise $\bar{Q}$ im Schwerpunktsystem ist. Der Index „0“ kennzeichnet den Born-Beitrag. Die Kopplungen in den Gleichungen (2.9) und (2.10) sind für ein Fermion $f = e, Q$ gegeben zu

$$\begin{aligned}
v_f^Z &= \frac{e}{2 \sin \vartheta_W \cos \vartheta_W} (T_f^3 - 2 \sin^2 \vartheta_W Q_f), \\
a_f^Z &= \frac{e}{2 \sin \vartheta_W \cos \vartheta_W} (-T_f^3), \\
v_f^\gamma &= e Q_f.
\end{aligned}$$

wobei T_f^3 die dritte Komponente des schwachen Isospins, Q_f die Ladung in Einheiten der Positron-Ladung $e > 0$ und ϑ_W der schwache Mischungswinkel ist.

Der Axialvektoranteil der Kopplung des Z -Bosons ist verantwortlich für die nicht-verschwindende Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie. Der antisymmetrische Wirkungsquerschnitt erhält nur Beiträge aus dem reinen Z -Austausch ($\sim a_e^Z a_Q^Z v_e^Z v_Q^Z$) und aus der $\gamma - Z$ -Interferenz ($\sim a_e^Z a_Q^Z v_e^\gamma v_Q^\gamma$). Der reine Photon-Austausch trägt nicht zur Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie bei, da die Kopplung des Photons an Fermionen eine reine Vektor-Kopplung ist.

Um genau zu sein: es gibt durchaus einen Beitrag zur Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie in der reinen Quantenelektrodynamik. Es handelt sich hierbei um einen Interferenzterm zwischen den Feynman-Amplituden für 1γ - und 2γ -Austausch [BGG73, BKJW83, KR99], welcher für Schwerpunktsenergien im Bereich der Z -Resonanz oder höher jedoch vernachlässigbar klein ist. Im folgenden sollen hier nur Wechselwirkungen in der niedrigsten Ordnung der schwachen Kopplung betrachtet werden. Aus diesem Grund wird dieser Beitrag im weiteren Verlauf der Arbeit nicht diskutiert.

Der totale Wirkungsquerschnitt hingegen besitzt Beiträge aus dem reinen Photon-Austausch ($\sim (v_e^\gamma v_Q^\gamma)^2$), der $\gamma - Z$ -Interferenz ($\sim v_e^\gamma v_Q^\gamma v_e^Z v_Q^Z$) und dem reinen Z -Boson-Austausch (letzte Zeile in (2.10)).

Auf der Z -Resonanz ist die Schwerpunktsenergie $s = m_Z^2$. In diesem Fall verschwinden die aus $\gamma - Z$ -Interferenz stammenden Born-Beiträge zu σ_A und σ_S . Der Bei-

trag des γ -Austauschs im symmetrischen Wirkungsquerschnitt ist gegenüber dem Z -Austausch mit $\left(\frac{\Gamma_Z^2}{s}\right)$ unterdrückt und somit vernachlässigbar. Aus (2.9) und (2.10) folgt:

$$\sigma_A^0(s = m_Z^2) = \frac{N_c}{4\pi} \frac{s}{D_Z} \beta^2 a_e^Z a_Q^Z v_e^Z v_Q^Z, \quad (2.11)$$

$$\sigma_S^0(s = m_Z^2) = \frac{N_c}{24\pi} \frac{s}{D_Z} \beta \left[(a_e^Z)^2 + (v_e^Z)^2 \right] \left[2\beta^2 (a_Q^Z)^2 + (3 - \beta^2) (v_Q^Z)^2 \right]. \quad (2.12)$$

Für masselose auslaufende Quarks ($\beta \rightarrow 1$) erhält man:

$$\sigma_A^0(s = m_Z^2, m = 0) = \frac{N_c}{4\pi} \frac{s}{D_Z} a_e^Z a_Q^Z v_e^Z v_Q^Z, \quad (2.13)$$

$$\sigma_S^0(s = m_Z^2, m = 0) = \frac{N_c}{12\pi} \frac{s}{D_Z} \left[(a_e^Z)^2 + (v_e^Z)^2 \right] \left[(a_Q^Z)^2 + (v_Q^Z)^2 \right]. \quad (2.14)$$

Somit folgt aus Gleichung (2.5) die wohlbekannte Formel für die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie masseloser Quarks auf der Z -Resonanz:

$$A_{\text{FB}}^0(s = m_Z^2, m = 0) = \frac{3a_e^Z a_Q^Z v_e^Z v_Q^Z}{\left[(a_e^Z)^2 + (v_e^Z)^2 \right] \left[(a_Q^Z)^2 + (v_Q^Z)^2 \right]}. \quad (2.15)$$

Diese Formeln wurden hier in aller Ausführlichkeit wiederholt, da sie für das Verständnis der experimentellen Auswertung sowie für die Behandlung der elektroschwachen und QCD -Korrekturen zur Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie von grundlegender Bedeutung sind.

2.3 Experimentelle Aspekte

Gemessen wurde die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie bezüglich der Thrust-Richtung für bottom- und für charm-Quarks in einer ganzen Reihe unterschiedlicher Kanäle (unterschiedlicher Signaturen im Detektor) bei den 4 LEP-Experimenten (ALEPH, DELPHI, L3 und OPAL). Dabei wurde eine sehr hohe Präzision erreicht, so dass insbesondere die dort bestimmte Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie für b-Quarks derzeit eine der Messungen mit dem kleinsten experimentellen Fehler im Standardmodell darstellt [LEP04].

Eine Zusammenstellung aller derzeit verfügbaren experimentellen Werte mitsamt der zugehörigen Referenzen findet sich in [LEP04].

Die Mittelung aller Messwerte, welche man aus den bei den LEP-Experimenten durchgeführten Analysen erhält, führt zur sogenannten Pol-Asymmetrie. Die Mittelungsprozedur ist in [LEP96] beschrieben.

Die Pol-Asymmetrie erhält man ausgehend von der Born-Formel auf der Z -Resonanz für masselose Quarks (Gleichung (2.15)), wenn man die Kopplungen a_f^Z und v_f^Z durch effektive Kopplungen $a_{f,\text{eff}}^Z$ und $v_{f,\text{eff}}^Z$ ersetzt [BH89, CHJ89, KZD89]. Die Kenntnis der effektiven Kopplungen ermöglicht die Bestimmung des effektiven schwachen Mischungswinkels $\sin^2 \vartheta_W^{\text{eff}}$. Ausgehend von $A_{\text{FB}}^{0,b}$ (Pol-Asymmetrie für b -Quarks) erhält man derzeit einen der genauesten Werte für $\sin^2 \vartheta_W^{\text{eff}}$, allerdings auch den Wert mit $\sim 3\sigma$ Abweichung zum derzeitigen Weltmittelwert [LEP04].

Experimentell wird die Pol-Asymmetrie $A_{\text{FB}}^{0,q}$ für ein Quark q bestimmt, nachdem QCD - und elektroschwache Korrekturen auf die gemessenen Werte $A_{\text{FB},g}^{q\bar{q}}$ angewandt wurden.

Die in [LEP04] angegebenen Werte für $A_{\text{FB}}^{b\bar{b}}$ und $A_{\text{FB}}^{c\bar{c}}$, gemessen in den unterschiedlichen Kanälen, sind bereits QCD -korrigiert. Der Zusammenhang zwischen den ursprünglichen Meßwerten $A_{\text{FB},g}^{q\bar{q}}$ und den QCD -korrigierten Werten $A_{\text{FB},QCD}^{q\bar{q}}$ lautet [A⁺98, LEP96]:

$$A_{\text{FB},g}^{q\bar{q}} = (1 - C_{QCD}) A_{\text{FB},QCD}^{q\bar{q}}. \quad (2.16)$$

Der Faktor C_{QCD} beinhaltet sowohl die theoretisch ermittelten Korrekturen zur $\mathcal{O}(\alpha_s)$ [DLZ95, DZ97] und zur $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ [CS99] bezogen auf die Thrust-Richtung, als auch Korrekturen welche sich aufgrund der in den Analysen verwendeten experimentellen Methoden ergeben [A⁺98]. Genannt seien hier Korrekturen, welche berücksichtigen, dass in der theoretischen Rechnung die Thrust- oder die Quark-Richtung auf Parton-Niveau verwendet wird, im Experiment jedoch der Thrust auf Hadron-Niveau gemessen wird. Diese Korrekturen werden mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen ermittelt [A⁺98].

Andererseits beinhaltet C_{QCD} einen Faktor s_q [A⁺98], der den verwendeten experimentellen Methoden in den unterschiedlichen Analysen Rechnung trägt.

Ausgehend von $A_{\text{FB},QCD}^{q\bar{q}}$ wird die Pol-Asymmetrie $A_{\text{FB}}^{0,q}$ ermittelt. Zu diesem Zweck werden von $A_{\text{FB},QCD}^{q\bar{q}}$ noch die Korrekturen $\delta A_{\text{FB}}^{q\bar{q}}$, welche sich aus der elektroschwachen Wechselwirkung ergeben, abgezogen:

$$A_{\text{FB}}^{0,q} = A_{\text{FB},QCD}^{q\bar{q}} + \delta A_{\text{FB}}^{q\bar{q}}. \quad (2.17)$$

Die einzelnen Beiträge zu $\delta A_{\text{FB}}^{q\bar{q}}$ sind in [LEP96, FM04] aufgeschlüsselt. Die aktuellsten Werte für $\delta A_{\text{FB}}^{q\bar{q}}$ für b - und für c -Quarks, welche sich aus den derzeit bekannten elektroschwachen Korrekturen ergeben, sind in [FM04] gegeben und werden mit Hilfe von ZFITTER [B⁺01] ermittelt.

Die derzeit aktuellsten Werte für die Pol-Asymmetrie für bottom und für charm-Quarks wurden von der „LEP Electroweak Working Group“ ermittelt und sind auf

deren Internetseite <http://lepewwg.web.cern.ch/> angegeben:

$$A_{\text{FB}}^{0,b} = 0.0992 \pm 0.0016,$$

$$A_{\text{FB}}^{0,c} = 0.0707 \pm 0.0035.$$

Kapitel 3

Formfaktoren

In diesem Kapitel wird die Berechnung der 2-Schleifen-Korrekturen, das heisst die Berechnung der Amplituden für $e^+e^- \rightarrow Q\bar{Q}$ zur Ordnung α_s^2 durchgeführt. Im ersten Abschnitt erfolgen die Definitionen der Amplituden zu $e^+e^- \rightarrow Q\bar{Q}$, der Formfaktoren und der Ward-Identitäten sowie die Diskussion der verschiedenen Beiträge auf 1- und auf 2-Schleifen-Niveau. In Abschnitt 3.1.2 wird das in dieser Arbeit verwendete Renormierungsschema kurz besprochen und es werden die benötigten Renormierungskonstanten angegeben. Abschliessend werden in Unterkapitel 3.2 einige Details der Rechnung und die Ergebnisse für die Formfaktoren zur $\mathcal{O}(\alpha_s)$ angegeben. Mit Hilfe der gewonnenen Resultate können die Ward-Identitäten explizit bis zur zweiten Ordnung der Störungsreihe in α_s überprüft werden. Die analytischen Ausdrücke für die Formfaktoren zur $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ werden aufgrund ihrer Länge in Anhang C gegeben.

3.1 Definitionen, Beiträge und Renormierung

Zum Prozess

$$e^-(p_1)e^+(p_2) \rightarrow Q(k_1)\bar{Q}(k_2)X \quad (3.1)$$

tragen in gegebener Ordnung der perturbativen Entwicklung im Standardmodell eine Vielzahl unterschiedlicher Amplituden bei (Abbildung 3.1). Beschränkt man sich in Abbildung 3.1 auf elektroschwache Wechselwirkungen in niedrigster Ordnung der Störungsreihe, so können in der Reaktion (3.1) nur noch Amplituden mit s -Kanal-Austausch eines Photons, eines Z -Bosons oder eines Higgs-Bosons beitragen, wobei letzterer für masselose Elektronen verschwindet (Abbildung 3.2).

Weiterhin ist X nun auf Teilchen beschränkt, die an der starken Wechselwirkung

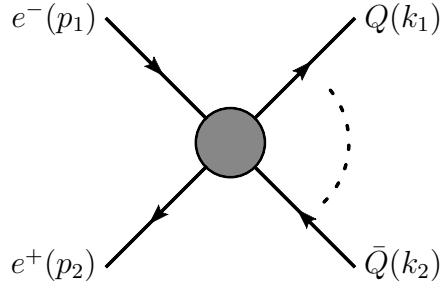


Abbildung 3.1: Der Kreis beinhaltet symbolisch alle möglichen Amplituden die in gegebener Ordnung der elektroschwachen und starken Kopplung in $e^+e^- \rightarrow Q\bar{Q}X$, wobei X für beliebige Standardmodell-Teilchen steht, beitragen können. Die gepunktete Linie deutet die Abstrahlung weiterer Teilchen an.

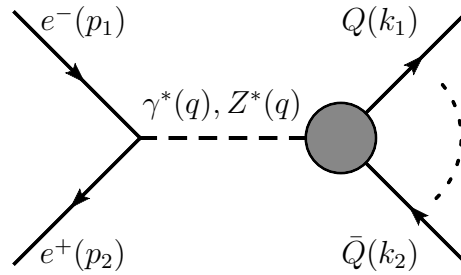


Abbildung 3.2: Im Gegensatz zu Abbildung 3.1 werden hier nur noch elektroschwache Wechselwirkungen in niedrigster Ordnung der perturbativen Entwicklung betrachtet. Der Kreis beinhaltet nun nur noch alle möglichen QCD -Korrekturen.

teilnehmen. Bis zur zweiten Ordnung in α_s wurde X in Kapitel 2 diskutiert.

Wie bereits in Kapitel 2 erwähnt werden in dieser Arbeit die QCD -Korrekturen erster und zweiter Ordnung in α_s in der Reaktion $e^+e^- \rightarrow \gamma^*, Z^* \rightarrow Q\bar{Q}$ berechnet. Mit anderen Worten: Es werden die $\gamma^*Q\bar{Q}$ - und die $Z^*Q\bar{Q}$ -Vertexfunktionen, symbolisch dargestellt in Abbildung 3.3, auf 2-Schleifen-Niveau bestimmt.

Die Berechnung der Vertexfunktionen erfolgt in der renormierten Störungstheorie. Das verwendete Renormierungsschema wird in Abschnitt 3.1.2 vorgestellt. Für folgende Diskussionen ist es wichtig bereits hier zu erwähnen, daß die Quarkmasse und die Quarkwellenfunktion im on-shell-Schema renormiert werden. Dies bedeutet insbesondere, daß die Quarkselbstenergie bei $k^2 = m^2$ verschwindet. Im folgenden bezeichnet m die on-shell-Masse der schweren Quarks. Ausgehend von der QCD -Lagrange-Dichte in Countertermform schreibt man sich mit den daraus folgenden Feynman-Regeln alle 1- und 2-Schleifen-Amplituden (1ℓ - und 2ℓ -Amplituden) sowie die zugehörigen Counterterme auf. Die Abbildung 3.3 beinhaltet alle diese Beiträge. Somit ist im weiteren Verlauf der Arbeit immer von bereits UV -renormierten Größen die Rede.

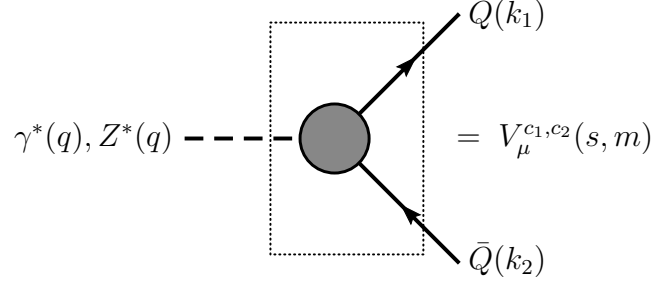


Abbildung 3.3: Allgemeine Definition des Vertex: Der Kreis beinhaltet sowohl die 1 ℓ - und 2 ℓ -Amplituden als auch die Counterterme.

Die Amplitude V_μ aus Abbildung 3.3 beschreibt den Zerfall eines virtuellen einlaufenden Z -Bosons oder Photons mit Impuls $q = k_1 + k_2$ ($q^2 = s$) in 2 schwere Quarks:

$$V_\mu^{c_1 c_2}(s, m) = \bar{u}_{c_1}(k_1) \Gamma_\mu^{c_1 c_2}(s, m) v_{c_2}(k_2), \quad (3.2)$$

wobei $\bar{u}_{c_1}(k_1)$ ($v_{c_2}(k_2)$) der Dirac-Spinor zum schweren (Anti-)Quark mit Impuls k_1 (k_2) und Farbe c_1 (c_2) ist. Die $Z^* Q \bar{Q}$ -Vertexfunktion $\Gamma_{\mu, Z}$ für den Zerfall eines Z -Bosons in $Q \bar{Q}$, kann aufgrund der Lorentz-Kovarianz durch 4 dimensionslose, von der Schwerpunktsenergie s und der Masse m des schweren Quarks abhängige, Formfaktoren parametrisiert werden:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu, Z}^{c_1 c_2}(s, m) = & (-i) \left(v_Q^Z F_1(s, m) \gamma_\mu + i v_Q^Z \frac{1}{2m} F_2(s, m) \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right. \\ & \left. + a_Q^Z G_1(s, m) \gamma_\mu \gamma_5 + a_Q^Z \frac{1}{2m} G_2(s, m) q_\mu \gamma_5 \right) \delta_{c_1 c_2}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

wobei $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$, F_1 , F_2 die Vektor-Formfaktoren und G_1 , G_2 die Axialvektor-Formfaktoren sind. Die allgemeinste Parametrisierung von $\Gamma_{\mu, Z}$ besitzt 6 Formfaktoren, von denen 2 ungerade unter CP -Transformationen sind. Da hier nur QCD -Korrekturen und elektroschwache Wechselwirkungen in der niedrigsten Ordnung der Störungstheorie betrachtet werden, gilt CP -Invarianz und die beiden CP -ungeraden Formfaktoren sind identisch Null.

Außer von s und m sind die Formfaktoren aus (3.3) zusätzlich noch von der Renormierungsskala μ und dem Parameter $\varepsilon = \frac{4-D}{2}$ der verwendeten dimensionellen Regularisierung abhängig. Diese Abhängigkeiten werden jedoch im weiteren Verlauf immer unterdrückt.

Betrachtet man den Zerfall eines virtuellen Photons, so gilt:

$$\Gamma_{\mu, \gamma}^{c_1 c_2}(s, m) = (-i) \left(v_Q^\gamma F_1(s, m) \gamma_\mu + i v_Q^\gamma \frac{1}{2m} F_2(s, m) \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right) \delta_{c_1 c_2}. \quad (3.4)$$

Da die Kopplung des Photons nur einen Vektoranteil besitzt, beinhaltet die Formfaktor-Zerlegung von $\Gamma_{\mu, \gamma}$ keine Axialvektor-Formfaktoren. Die Vektor-Formfaktoren

F_1 und F_2 in $\Gamma_{\mu,Z}$ und $\Gamma_{\mu,\gamma}$ sind identisch. Somit genügt es im folgenden nur noch die Vertexfunktion $\Gamma_{\mu,Z}$ zu betrachten.

Unter Benutzung der Gordon-Identität

$$\bar{u}_{c_1}(k_1)\sigma_{\mu\nu}q^\nu v_{c_2}(k_2) = -i\bar{u}_{c_1}(k_1)(t_\mu + 2m\gamma_\mu)v_{c_2}(k_2),$$

wobei $t_\mu = (k_2 - k_1)_\mu$, folgt für $\Gamma_{\mu,Z}$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu,Z}^{c_1 c_2}(s, m) = & (-i) \left(v_Q^Z \tilde{F}_1(s, m) \gamma_\mu + v_Q^Z \frac{1}{2m} F_2(s, m) t_\mu \right. \\ & \left. + a_Q^Z G_1(s, m) \gamma_\mu \gamma_5 + a_Q^Z \frac{1}{2m} G_2(s, m) q_\mu \gamma_5 \right) \delta_{c_1 c_2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

mit

$$\tilde{F}_1(s, m) = F_1(s, m) + F_2(s, m).$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird immer von Gleichung (3.5) als Parametrisierung der Vertexfunktion des Z -Bosons ausgegangen und die Schlange über $\tilde{F}_1$ wird vernachlässigt. Die Farbindizes c_1 und c_2 werden im folgenden unterdrückt.

Die Vertexfunktion $\Gamma_{\mu,Z}$ läßt sich aufgrund der Natur der Z - Q - $\bar{Q}$ -Kopplung in einen Vektor- ($\Lambda_{\mu,Z}$) und in einen Axialvektoranteil ($\Lambda_{\mu 5,Z}$) zerlegen:

$$\Gamma_{\mu,Z} = \Lambda_{\mu,Z}(F_1, F_2) + \Lambda_{\mu 5,Z}(G_1, G_2). \quad (3.6)$$

Der Vektoranteil $\Lambda_{\mu,Z}$ ist proportional zu v_Q^Z , dementsprechend ist $\Lambda_{\mu 5,Z}$ proportional zu a_Q^Z . Durch Anpassen der Kopplungen ($-iv_Q^Z = -ia_Q^Z \rightarrow 1$) erhält man aus (3.5) und (3.6) die Vertexfunktionen zugehörig zum Vektor- und zum Axialvektorstrom eines schweren Quarks Q :

$$\Lambda_\mu(s, m) = F_1(s, m) \gamma_\mu + \frac{1}{2m} F_2(s, m) t_\mu \quad \text{zu} \quad J_\mu = \bar{Q} \gamma_\mu Q, \quad (3.7)$$

$$\Lambda_{\mu 5}(s, m) = G_1(s, m) \gamma_\mu \gamma_5 + \frac{1}{2m} G_2(s, m) q_\mu \gamma_5 \quad \text{zu} \quad J_{\mu 5} = \bar{Q} \gamma_\mu \gamma_5 Q. \quad (3.8)$$

Für die Vektor- und die Axialvektor-Vertexfunktion gelten Ward-Identitäten, die zur Überprüfung der Rechnung benutzt werden.

Für die renormierte Vertexfunktion zum Vektorstrom lautet die Ward-Identität:

$$q^\mu \Lambda_\mu(s, m) = 0. \quad (3.9)$$

Diese Gleichung ist für Quarks auf der Massenschale trivial erfüllt (Λ_μ ist zwischen den Spinoren $\bar{u}(k_1)$ und $v(k_2)$ eingeklemmt). Man erhält deshalb aus Gleichung (3.9) keinen Test zur Berechnung der Vektor-Formfaktoren. Die Ward-Identität zum Axialvektorstrom ist in Gleichung (3.12) gegeben. Diese bildet die Grundlage für wichtige Konsistenztests der Berechnung der Axialvektor-Formfaktoren G_1 und G_2 .

Die Regularisierung der UV - und IR -Divergenzen, welche in den 1ℓ - und 2ℓ -Beiträgen enthalten sind, erfolgt in $D = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen. Das heißt, daß sowohl die Berechnung der Schleifenintegrale als auch die der γ -Algebra in D Dimensionen durchgeführt wird. In der γ -Algebra tauchen Spuren auf, welche mehrere γ_μ und bis zu zwei γ_5 enthalten.

Die Behandlung von γ_5 in D Dimensionen stellt ein Problem dar, da γ_5 ein generisch 4-dimensionales Objekt ist. Für die Behandlung von γ_5 in D Dimensionen gibt es keine universell anwendbare Vorschrift [tHV72, BM77, CFH79].

In dieser Arbeit kommen zu diesem Zweck im Rahmen der dimensionellen Regularisierung zwei Vorschriften zur Anwendung [AD73, Lar93]:

- γ_5^{ac} : In dieser Vorschrift antikommutiert γ_5 mit γ_μ und $\gamma_5^2 = 1$. Die chirale Invarianz der QCD für masselose Quarks wird von γ_5^{ac} in D Dimensionen bewahrt.
- γ_5^{la} : In diesem Fall benutzt man in den Spuren die folgenden Ersetzungen für γ_5 und $\gamma_\mu\gamma_5$ ($\varepsilon_{0123} = -\varepsilon^{0123} = +1$):

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta, \quad (3.10)$$

$$\gamma_\mu \gamma_5 = \frac{i}{3!} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma. \quad (3.11)$$

Diese Vorschrift besitzt keine der bei γ_5^{ac} aufgezählten Eigenschaften mehr.

In den Vertexfunktionen, in denen $\gamma_\mu\gamma_5$ beziehungsweise γ_5 Teil einer offenen Fermionlinie ist, wird γ_5^{ac} in D Dimensionen verwendet. In den Anomalie-Amplituden wird, um die Adler-Bell-Jackiw-Anomalie korrekt zu reproduzieren, γ_5^{la} benutzt. Hierauf wird später noch im Detail eingegangen.

Ein wichtiger Test für die mit γ_5^{ac} und γ_5^{la} erhaltenen Ergebnisse besteht in der Erfüllung der Ward-Identität zugehörig zum Axialvektorstrom $J_{\mu 5}$. Die renormierte chirale Ward-Identität zu $J_{\mu 5}$ aus (3.8) lautet ($a_s = \frac{\alpha_s}{2\pi}$) [Adl69, BJ69]:

$$q^\mu \Lambda_{\mu 5}(s, m) = 2m \Lambda_5(s, m) - \frac{i}{2} a_s T_F F_R(s, m). \quad (3.12)$$

In (3.12) ist $\Lambda_{\mu 5}$ der renormierte Axialvektoranteil von $\Gamma_{\mu, Z}$ aus Gleichung (3.6). Die renormierte pseudoskalare Vertexfunktion Λ_5 lautet:

$$\Lambda_5(s, m) = Z_m^{\text{OS}} \tilde{\Lambda}_5(s, m), \quad (3.13)$$

wobei $\tilde{\Lambda}_5 = Z_2^{\text{OS}} \Lambda_5^0$ eingeführt wurde und Λ_5^0 die unrenormierte pseudoskalare Vertexfunktion bezeichnet. Im folgenden Abschnitt werden die zu $\Lambda_{\mu 5}$ und $\tilde{\Lambda}_5$ beitragenden Feynman-Amplituden diskutiert. Die Massen-Renormierungskonstante Z_m^{OS} im on-shell-Schema ist in Gleichung (3.24) gegeben. Der Term $\sim F_R$ stellt die renormierte Adler-Bell-Jackiw-Anomalie dar, welche ebenfalls im nächsten Abschnitt besprochen wird; $T_F = 1/2$ ist durch die Normierung der Generatoren der $SU(N_C)$ in der Fundamentaldarstellung gegeben.

Ausgehend vom Axialvektorstrom und von (3.12) kann man den $SU(N_F)$ -Flavour-Singlett- und verschiedene $SU(N_F)$ -Flavour-Nicht-Singlettströme, wobei N_F die Anzahl der Quark-Flavours ist, sowie die zugehörigen Ward-Identitäten konstruieren. Dies wird zu einem späteren Zeitpunkt diskutiert.

Für $\tilde{\Lambda}_5$ und F_R lassen sich analog zu (3.7) und (3.8) Zerlegungen in Formfaktoren angeben. Sowohl die pseudoskalare Vertexfunktion als auch der Anomalieterm werden jeweils mit Hilfe eines Formfaktors parametrisiert:

$$\tilde{\Lambda}_5(s, m) = A(s, m) \gamma_5, \quad (3.14)$$

$$F_R(s, m) = 2i m \hat{F}(s, m) \gamma_5. \quad (3.15)$$

Hier sind A und $\hat{F}$ analog zu F_i und G_i ($i = 1, 2$) dimensionslos und von s , m , ε und der Renormierungsskala μ abhängig, wobei die Abhängigkeiten von μ und ε wieder unterdrückt wurden.

3.1.1 Beiträge zur Z - Q - $\bar{Q}$ -Vertexfunktion

Folgende Feynman-Amplituden tragen zur Vertexfunktion $\Gamma_{\mu, Z}$ und somit auch zu $\Lambda_{\mu 5}$ bei:

- zur $\mathcal{O}(\alpha_s)$ die 1ℓ -Amplitude aus Abbildung 2.3 und der $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Term des Counterterms X_7 aus Abbildung 3.5,
- zur $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ die 2ℓ -Amplituden aus den Abbildungen 3.4 und 3.6 sowie
- die Counterterme aus den Abbildungen 3.5 und 3.7.

Die Feynman-Amplituden zu allen in diesem Kapitel diskutierten Beiträgen finden sich in Anhang A.

In den in Abbildung 3.4 dargestellten 2ℓ -Amplituden koppelt das externe, massive Quark stets direkt an das einlaufende Z-Boson. Diese Amplituden heissen nicht-

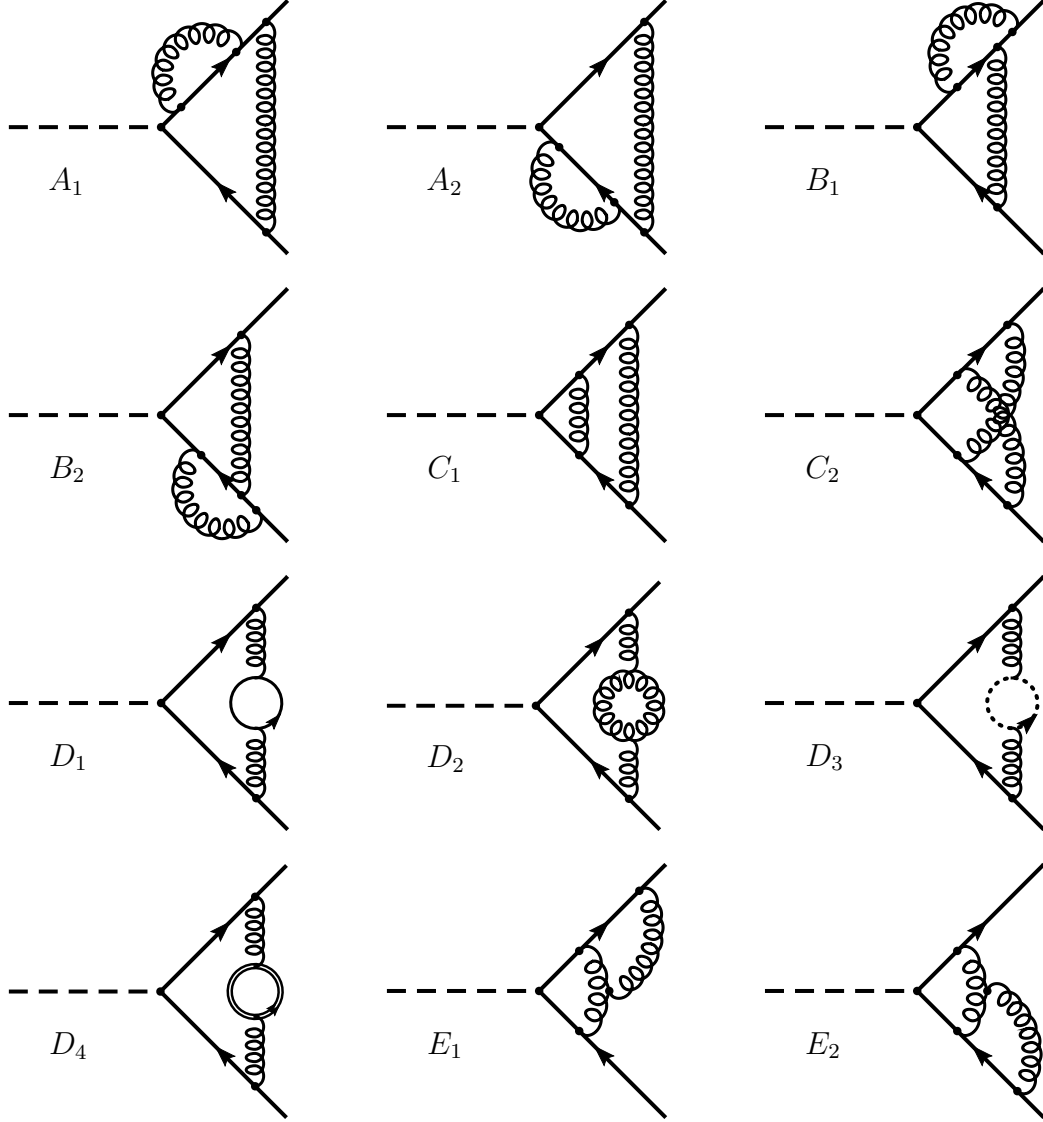


Abbildung 3.4: 2ℓ -Amplituden vom Typ A: Die Bezeichnung der Linien ist analog zu Abbildung 2.3. Im Gluonselbstenergiebeitrag D_1 kennzeichnet die dünne durchgezogene Linie ein leichtes Quark, in D_3 die gepunktete Linie ein Geistfeld und in D_4 die doppelte Linie ein massives Quark.

anomale Amplituden oder Typ-A-Amplituden [Adl69] und tragen sowohl zu den Vektor- als auch zu den Axialvektor-Formfaktoren bei.

Im Gegensatz hierzu heissen die in Abbildung 3.6 gezeigten Amplituden anomal oder vom Typ B [Adl69]. In diesen Beiträgen koppelt das Z-Boson an eine interne Quarkschleife (vgl. Abbildung 3.6). Das Z-Boson koppelt an den Flavour-Nicht-Singlettstrom (3.81), so dass in der Quark-Schleife alle Quarks beitragen. Diese

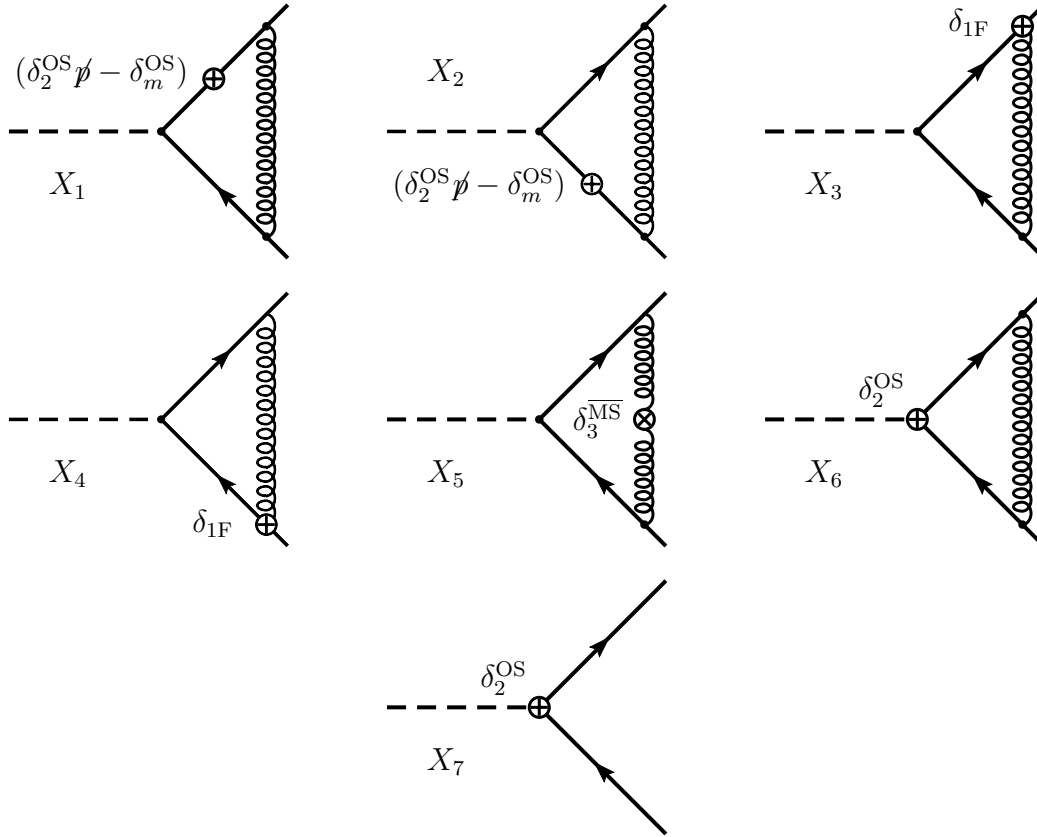


Abbildung 3.5: Countertermbeiträge zu den Typ-A-Amplituden: Die Bedeutung der Linien ist analog zu Abbildung 2.3. Die Renormierungskonstanten δ_2^{OS} , δ_m^{OS} , δ_3^{MS} und δ_{1F} sind in den Gleichungen (3.31) und (3.32) gegeben.

Beiträge sind für das Auftreten der Adler-Bell-Jackiw-Anomalie in (3.12) verantwortlich. Die Typ-B-Amplituden tragen nur zu G_1 und G_2 bei. Der Vektoranteil verschwindet nach Addition der beiden Beiträge (Furry-Theorem).

Die Unterscheidung zwischen Amplituden vom Typ A und vom Typ B äussert sich auch in der Ward-Identität (3.12), die in 2 Teile zerfällt:

$$q^\mu \Lambda_{\mu 5}^{(A)}(s, m) = 2m \Lambda_5^{(A)}(s, m), \quad (3.16)$$

$$q^\mu \Lambda_{\mu 5}^{(B)}(s, m) = 2m \Lambda_5^{(B)}(s, m) - \frac{i}{2} a_s T_F F_R(s, m). \quad (3.17)$$

Gleichung (3.16) ist die renormierte Ward-Identität zu den Axialvektoramplituden vom Typ A, dementsprechend ist (3.17) die Ward-Identität zu den Amplituden vom Typ B. Man erkennt, daß die Adler-Bell-Jackiw-Anomalie einzig und allein in der Typ-B-Ward-Identität auftaucht. Die Anomaliefreiheit von (3.16) erlaubt in der Berechnung der Typ-A-Amplituden die Verwendung von γ_5^{ac} .

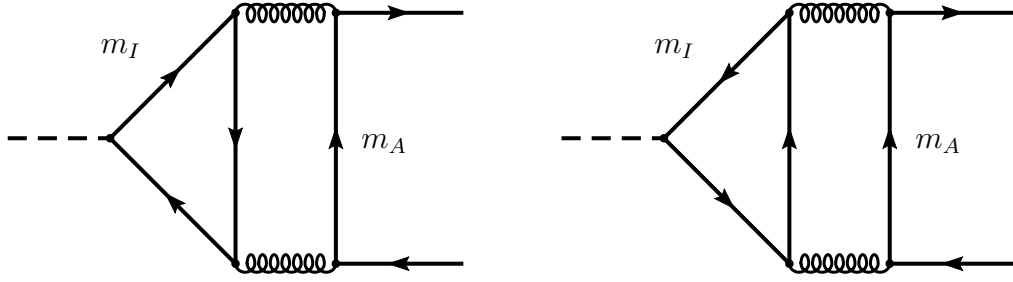


Abbildung 3.6: Anomaliebeiträge oder Typ-B-Beiträge: Die Bedeutung der Linien ist analog zu der in Abbildung 2.3. Diese Beiträge werden berechnet für Werte 0 und m (Masse des schweren Quarks) der Massen m_I und m_A . Es ergeben sich also insgesamt 4 verschiedene Massenkombinationen.

Die Vertexfunktion (3.6) läßt sich als Summe der verschiedenen Beiträge vom Typ A und B bis zur zweiten Ordnung der starken Kopplung darstellen:

$$\Gamma_{\mu,Z} = \Gamma_{\mu,Z}^{(1\ell)} + \Gamma_{\mu,Z}^{(2\ell,A)} + \Gamma_{\mu,Z}^{(2\ell,B)}. \quad (3.18)$$

Die renormierte Vertexfunktion zur $\mathcal{O}(\alpha_s)$ $\Gamma_{\mu,Z}^{(1\ell)}$ erhält man durch die Addition des Counterterms X_7 und der 1-Schleifen-Amplitude aus Abbildung 2.3 (vgl. Anhang A). Der Axialvektoranteil von $\Gamma_{\mu,Z}^{(1\ell)}$ ist vom Typ A und trägt somit zu $\Lambda_{\mu 5}^{(A)}$ bei.

Die Addition aller 2ℓ -Amplituden aus Abbildung 3.4 und der Counterterme aus Abbildung 3.5 ergibt die renormierte Vertexfunktion $\Gamma_{\mu,Z}^{(2\ell,A)}$ auf 2-Schleifen-Niveau. Der Index „A“ erinnert daran, daß hier nur über die Typ-A-Amplituden summiert wurde. Eine formale Darstellung von $\Gamma_{\mu,Z}^{(2\ell,A)}$ findet sich in Anhang A.

Die Amplituden D_1 bis D_4 aus Abbildung 3.4 zeigen die Gluonselbstenergie-Einschübe, wobei hier explizit zwischen massiven und masselosen Quarks in der Schleife unterschieden wird. Jedes der N_F Quarkflavours trägt zur Gluonselbstenergie bei. Die Kopplung eines Gluons an Quarks unterscheidet nicht zwischen den verschiedenen Quark-Flavours, so dass alle N_L leichten Quarks, deren Masse vernachlässigt wird, einen identischen Beitrag liefern. Aus diesem Grund wird der Beitrag D_1 mit $N_L = N_F - 1$ multipliziert. Nur die Masse des schwersten Quarks wird nicht vernachlässigt.

Neben den hier gezeigten 2-Schleifen-Beiträgen ergeben sich weitere nicht dargestellte Amplituden. Hierbei handelt es sich einerseits um einen Gluonselbstenergiebeitrag der den $4g$ -Vertex beinhaltet. In diesem Beitrag steckt jedoch ein skalenloses 1-Schleifen-Integral, welches in dimensioneller Regularisierung verschwindet (z.B. [Smi05]). Hier auch nicht gezeigt sind 1ℓ -Amplituden wie in Abbildung 2.3, die zusätzlich noch einen Quarkselbstenergiebeitrag auf der äusseren auslaufenden Quarklinie beinhalten. Diese Beiträge verschwinden aufgrund der gewählten on-shell-Renormierung für die Quarkmasse.

Zur Überprüfung, ob im folgenden die Typ-A-Ward-Identität (3.16) erfüllt ist, benötigt man neben $\Lambda_{\mu 5}^{(A)}$ auch die pseudoskalare nicht-anomale Vertexfunktion auf 1ℓ - und 2ℓ -Niveau. Die pseudoskalare Vertexfunktion $\tilde{\Lambda}_5$ aus Gleichung (3.13) lässt sich analog zu $\Gamma_{\mu, Z}$ in (3.18) aufteilen:

$$\tilde{\Lambda}_5 = \tilde{\Lambda}_5^{(1\ell)} + \tilde{\Lambda}_5^{(2\ell, A)} + \tilde{\Lambda}_5^{(2\ell, B)}. \quad (3.19)$$

Zu $\tilde{\Lambda}_5^{(1\ell)}$ und $\tilde{\Lambda}_5^{(2\ell, A)}$ tragen die gleichen Feynman-Diagramme (Abbildung 2.3, 3.4 und 3.5) wie zu $\Gamma_{\mu, Z}^{(1\ell)}$ und $\Gamma_{\mu, Z}^{(2\ell, A)}$ bei. In den zugehörigen Feynman-Amplituden muss lediglich die Z - Q - $\bar{Q}$ -Kopplung durch die Kopplung des pseudoskalaren Stroms ersetzt werden:

$$-i(v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) \rightarrow \gamma_5.$$

Als nächstes werden die einzelnen Bestandteile der Typ-B-Ward-Identität (3.17) diskutiert. Da die Dreiecksamplituden aus Abbildung 3.6 nicht zu den Vektor-Formfaktoren beitragen, gilt:

$$\Gamma_{\mu, Z}^{(2\ell, B)} = -i a_Q^Z \Lambda_{\mu 5}^{(2\ell, B)}.$$

Die anomalen Amplituden bilden für sich genommen eine eichinvariante Klasse von Diagrammen. Dies ermöglicht die getrennte Berechnung von den Typ-A-Beiträgen. In dieser Arbeit werden 4 verschiedene Massenkombinationen für die innere Masse m_I der Quarkschleife und die äussere Masse m_A der auslaufenden Quarks berechnet: $m_I, m_A = 0, m$. Dies ist für eine Reihe von Anwendungen, insbesondere für die hier betrachteten Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrien, ausreichend.

Die Spuren, die bei der Berechnung von $\Lambda_{\mu 5}^{(B)}$ auftreten, werden mit γ_5^{la} berechnet [Lar93]. Die UV -Divergenz der Dreiecksamplituden und die Verwendung von γ_5^{la} erfordern die folgende Renormierung des Axialvektorstromes $J_{\mu 5}$ [Lar93, Ber05c]:

$$J_{\mu 5}^R = Z_J Z_5 J_{\mu 5},$$

wobei Z_J die ultraviolett-divergenten Terme kürzt und Z_5 die Eigenschaften eines naiv anti-kommutierenden γ_5 wiederherstellt. In der Berechnung von $\Lambda_{\mu 5}^{(B)}$ führt diese Renormierung des Stroms zur Addition der beiden Counterterme X_J und X_{la} aus Abbildung 3.7 zu den anomalen Amplituden. Die zusätzliche Renormierung Z_5 sorgt dafür, daß $\Lambda_{\mu 5}^{(B)}$ die chirale Typ-B-Ward-Identität erfüllt. Die Renormierungskonstanten Z_J und Z_5 werden im folgenden Abschnitt gegeben.

Für das in den Countertermen X_J und X_{la} auftretende γ_5 wird γ_5^{la} verwendet. Die konsistente Behandlung von γ_5 in allen zu einer Vertexfunktion beitragenden Amplituden ist für die Erfüllung der Ward-Identität wesentlich.

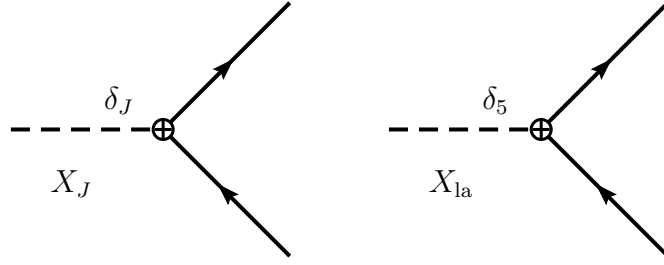


Abbildung 3.7: Counterterme zu den Typ-B-Amplituden aus Abbildung 3.6. Die Renormierungskonstanten werden in Abschnitt 3.1.2 angegeben.

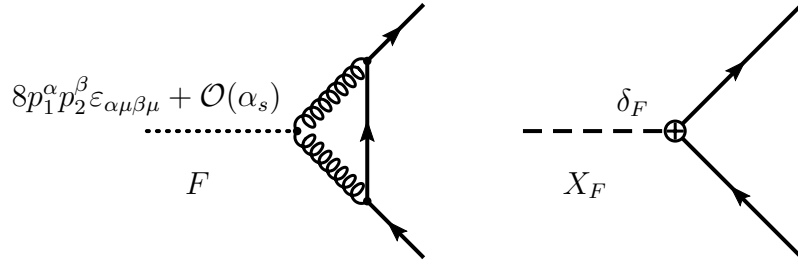


Abbildung 3.8: Anomalieterm: Die Bedeutung der Linien ist analog zu Abbildung 2.3. Der Vertex ist angegeben; p_1 und p_2 sind die Gluonimpulse, wobei p_1 in den Vertex hinein und p_2 hinaus fließt. Die Renormierungskonstante wird in Abschnitt 3.1.2 angegeben.

Zur Überprüfung der berechneten Axialvektor-Vertexfunktion werden neben $\Lambda_{\mu 5}^{(2\ell, B)}$ auch $\tilde{\Lambda}_5^{(2\ell, B)}$ und F_R in Gleichung (3.17) benötigt. Die zu $\tilde{\Lambda}_5^{(2\ell, B)}$ beitragenden Amplituden erhält man analog zu $\tilde{\Lambda}_5^{(1\ell)}$ und $\tilde{\Lambda}_5^{(2\ell, A)}$ durch Anpassen der Kopplung in den beiden Dreiecksamplituden aus Abbildung 3.6. Im Gegensatz zu $\Lambda_{\mu 5}^{(2\ell, B)}$ ist die pseudoskalare Typ-B-Vertexfunktion UV -endlich. Das bedeutet, daß für den pseudoskalaren Strom keine zusätzliche Renormierung erforderlich ist. Es wird insbesondere keine endliche Renormierung vom Typ X_{la} benötigt.

Der renormierte Anomalieterm F_R ist durch die in Abbildung 3.8 gezeigten Amplituden bestimmt. Die Amplitude F berechnet sich aus:

$$S(k_2)F(k_1, k_2)S(k_1) = - \int d^4x d^4y e^{-i(k_1x + k_2y)} \langle 0 | T \{ Q(x) G(0) \tilde{G}(0) \bar{Q}(y) \} | 0 \rangle$$

wobei $S(k_1)$ ($S(k_2)$) der volle (Anti-)Quark-Propagator ist. Der gluonische Operator $G\tilde{G}$ ist folgendermaßen definiert:

$$G(x) \tilde{G}(x) = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} G^{A, \mu\nu}(x) G^{A, \alpha\beta}(x),$$

wobei G der Gluon-Feldstärketensor ist [Adl69, Ber05c]. Der Operator $G\tilde{G}$ mischt unter Renormierung mit der Divergenz des Singlett-Axialvektorstroms [ET82]:

$$G\tilde{G} = Z_{GG}(G\tilde{G})_0 + \delta_F (\partial^\mu J_{\mu 5}^S)_0.$$

Der Singlettstrom wird in Gleichung (3.80) definiert; der Index „0“ kennzeichnet den unrenormierten Operator. Diese Mischung ist der Ursprung des Counterterms X_F aus Abbildung 3.8. Die Renormierungskonstanten δ_F und Z_{GG} werden im nächsten Abschnitt gegeben. Explizite Ausdrücke für die Amplitude F und die zugehörige Countertermamplitude X_F finden sich wiederum in Anhang A. Der renormierte Anomalieterm F_R ist durch die Summe aus F und X_F gegeben. Die Berechnung von F_R wird mit Hilfe von γ_5^{la} ausgeführt.

3.1.2 Renormierung

Bis zu diesem Zeitpunkt wurde noch keine Aussage zum gewählten Renormierungsschema gemacht. Die Renormierungskonstanten δ_i ($i = 2, 3, m, 1F$) aus Abb. 3.5 werden gemäß einem vorgegebenen Renormierungsschema berechnet und können der Literatur entnommen werden.

Im folgenden wird immer von $N_L = N_F - 1$ masselosen und einem massiven Quark ausgegangen. Weiterhin wird die Feynman-Eichung $\xi = 1$ benutzt.

Das für diese Arbeit gewählte Renormierungsschema ist ein „Hybrid“-Schema, das heisst, nicht alle Konstanten werden in demselben Schema berechnet. Die Quarkmasse und die Quarkwellenfunktion werden im OS -Schema renormiert, die starke Kopplung und die Gluonwellenfunktion im $\overline{\text{MS}}$ -Schema.

Die Renormierungskonstante der starken Kopplung Z_g im $\overline{\text{MS}}$ -Schema erhält man zum Beispiel aus der Betrachtung des Geist-Gluon-Vertex in der renormierten Lagrange-Dichte. Es gilt:

$$g_{s,0} = \frac{\tilde{Z}_1^{\overline{\text{MS}}}}{\sqrt{Z_3^{\overline{\text{MS}}} \tilde{Z}_3^{\overline{\text{MS}}}}} g_s = Z_g^{\overline{\text{MS}}} g_s, \quad (3.20)$$

wobei $g_{s,0}$ die nackte Kopplung, $\tilde{Z}_1$ die Renormierungskonstante des Geist-Gluon-Vertex, Z_3 die der Gluonwellenfunktion und $\tilde{Z}_3$ die des Geistfeldes ist. Sowohl die nackte als auch die renormierte Kopplung werden in D Dimensionen dimensionslos gehalten. Eine Anmerkung hierzu findet sich in Anhang B. Die Konstanten $\tilde{Z}_1$, Z_3 und $\tilde{Z}_3$ erhält man zum Beispiel aus [Mut87]. Hier werden nur Z_3 und Z_g benötigt und explizit genannt. Die Gluonwellenfunktionsrenormierungskonstante in

der Feynman-Eichung lautet:

$$Z_3^{\overline{\text{MS}}} = 1 + C(\varepsilon) a_s \frac{1}{2\varepsilon} \left(\frac{5}{3} N_C - \frac{4}{3} T_F (N_L + 1) \right) + \mathcal{O}(a_s^2). \quad (3.21)$$

Aus (3.20) und [Mut87] folgt für die eichunabhängige Renormierungskonstante Z_g :

$$Z_g^{\overline{\text{MS}}} = 1 - C(\varepsilon) a_s \frac{1}{4\varepsilon} \left(\frac{11}{3} N_C - \frac{4}{3} T_F (N_L + 1) \right) + \mathcal{O}(a_s^2), \quad (3.22)$$

wobei $C_F = \frac{N_C^2 - 1}{2N_C}$ ist. Der Faktor

$$C(\varepsilon) = (4\pi)^\varepsilon \Gamma(1 + \varepsilon), \quad (3.23)$$

wird aus den Renormierungskonstanten ausgeklammert. Derselbe Faktor wird auch aus den 2-Schleifen-Integralen ausgeklammert.

Die Renormierungskonstanten Z_2^{OS} für die Quarkwellenfunktion und Z_m^{OS} für die Quarkmasse im on-shell-Schema sind ebenfalls in der Literatur bekannt [BGS91, MvR00]. Hier werden die Konstanten aus [MvR00] verwendet, wobei die dort angegebenen Resultate in der unrenormierten und in D Dimensionen dimensionsbehafteten QCD -Kopplung gegeben sind. Die nackte Kopplung in [MvR00] muss gemäß Gleichung (3.22) renormiert werden (vgl. Anhang B) und man erhält:

$$Z_m^{\text{OS}} = 1 + C(\varepsilon) \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^{-\varepsilon} a_s Z_m^{(1)} + C^2(\varepsilon) \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^{-2\varepsilon} a_s^2 Z_m^{(2)} + \mathcal{O}(a_s^3), \quad (3.24)$$

mit

$$Z_m^{(1)} = C_F \frac{1}{2\varepsilon} \frac{2\varepsilon - 3}{1 - 2\varepsilon}, \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} Z_m^{(2)} = & C_F^2 \left\{ \frac{9}{8\varepsilon^2} + \frac{45}{16\varepsilon} + \frac{199}{32} - \frac{15}{2} \zeta_2 + 12 \zeta_2 \ln_2 - 3 \zeta_3 \right\} \\ & + C_F N_C \left\{ \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^\varepsilon \left[\frac{11}{12} \left(\frac{3}{\varepsilon^2} + \frac{4}{\varepsilon} + 8 \right) \right] + \left[-\frac{11}{8\varepsilon^2} - \frac{91}{16\varepsilon} + 2 \zeta_2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{605}{32} - 6 \zeta_2 \ln_2 + \frac{3}{2} \zeta_3 \right] \right\} \\ & + C_F T_F N_L \left\{ \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^\varepsilon \left[-\frac{1}{3} \left(\frac{3}{\varepsilon^2} + \frac{4}{\varepsilon} + 8 \right) \right] + \left[\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{7}{4\varepsilon} + 2 \zeta_2 + \frac{45}{8} \right] \right\} \\ & + C_F T_F \left\{ \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^\varepsilon \left[-\frac{1}{3} \left(\frac{3}{\varepsilon^2} + \frac{4}{\varepsilon} + 8 \right) \right] + \left[\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{7}{4\varepsilon} + \frac{69}{8} - 4 \zeta_2 \right] \right\}. \quad (3.26) \end{aligned}$$

und $\ln_2 = \ln(2)$; $\zeta_2 = \zeta(2)$ und $\zeta_3 = \zeta(3)$ sind die Riemannschen $\zeta(n)$ -Funktionen. Analog folgt für Z_2^{OS} [MvR00]:

$$Z_2^{\text{OS}} = 1 + C(\varepsilon) \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^{-\varepsilon} a_s Z_m^{(1)} + C^2(\varepsilon) \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^{-2\varepsilon} a_s^2 Z_2^{(2)} + \mathcal{O}(a_s^3) \quad (3.27)$$

mit

$$\begin{aligned} Z_2^{(2)} = & C_F^2 \left\{ \frac{9}{8\varepsilon^2} + \frac{51}{16\varepsilon} + \frac{433}{32} - \frac{39}{2} \zeta(2) + 24 \zeta_2 \ln_2 - 6 \zeta_3 \right\} \\ & + C_F N_C \left\{ \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^\varepsilon \left[\frac{11}{12} \left(\frac{3}{\varepsilon^2} + \frac{4}{\varepsilon} + 8 \right) \right] + \left[-\frac{11}{8\varepsilon^2} - \frac{101}{16\varepsilon} + \frac{15}{2} \zeta_2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{803}{32} - 12 \zeta_2 \ln_2 + 3 \zeta_3 \right] \right\} \\ & + C_F T_F N_L \left\{ \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^\varepsilon \left[-\frac{1}{3} \left(\frac{3}{\varepsilon^2} + \frac{4}{\varepsilon} + 8 \right) \right] + \left[\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{9}{4\varepsilon} + 2 \zeta_2 + \frac{59}{8} \right] \right\} \\ & + C_F T_F \left\{ \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^\varepsilon \left[-\frac{1}{3} \left(\frac{3}{\varepsilon^2} + \frac{4}{\varepsilon} + 8 \right) \right] + \left[\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{19}{12\varepsilon} + \frac{1139}{72} - 8 \zeta_2 \right] \right\}. \quad (3.28) \end{aligned}$$

Die Renormierung der starken Kopplung im $\overline{\text{MS}}$ -Schema führt zu einer expliziten Abhängigkeit der on-shell-Renormierungskonstanten (3.24) und (3.27) von der Renormierungsskala μ . Entwickelt man die Faktoren $(\frac{m^2}{\mu^2})^\varepsilon$, so erkennt man, daß die Renormierungsskalenabhängigkeit vollständig durch die β -Funktion der QCD bestimmt ist. Dies ist unmittelbar klar, da die μ -Abhängigkeit in Z_2^{OS} und Z_m^{OS} durch die Renormierung der starken Kopplung eingeführt wird.

Bis zur $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ sind die Renormierungskonstanten Z_2^{OS} und Z_m^{OS} eichunabhängig [BGS91, MvR00]. Erst in dritter Ordnung der starken Kopplung α_s zeigt sich die Eichabhängigkeit explizit [MvR00].

Mit Hilfe der Slavnov-Taylor-Identität

$$Z_{1F} = \frac{\tilde{Z}_1^{\overline{\text{MS}}} Z_2^{\text{OS}}}{\tilde{Z}_3^{\overline{\text{MS}}}} = Z_g^{\overline{\text{MS}}} Z_2^{\text{OS}} \sqrt{Z_3^{\overline{\text{MS}}}} \quad (3.29)$$

und den Gleichungen (3.21), (3.22) und (3.27) berechnet man die Renormierungskonstante des Quark-Gluon-Vertex, welche keinem Renormierungsschema explizit zugeordnet werden kann:

$$Z_{1F} = 1 - C(\varepsilon) a_s \frac{1}{2\varepsilon} \left(N_C - C_F \frac{2\varepsilon - 3}{1 - 2\varepsilon} \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right)^\varepsilon \right) + \mathcal{O}(a_s^2). \quad (3.30)$$

Zu den verschiedenen Renormierungskonstanten sind höhere Ordnungen in α_s bekannt. Diese wurden nicht angegeben, da sie für die hier durchzuführende Renormierung nicht benötigt werden. Die in Abbildung 3.5 auftretenden Renormierungskonstanten δ_i sind folgendermaßen definiert:

$$\delta_i = Z_i - 1 \quad \text{für} \quad i = 3, 2, 1F, \quad (3.31)$$

$$\delta_m^{\text{OS}} = (Z_2^{\text{OS}} Z_m^{\text{OS}} - 1)m. \quad (3.32)$$

Sowohl δ_2^{OS} als auch $(Z_m^{\text{OS}} - 1)$ lassen sich in einen $\mathcal{O}(\alpha_s)$ - und einen $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ -Term aufteilen, welche man aus den Gleichungen (3.24) und (3.27) ablesen kann:

$$Z_m^{\text{OS}} - 1 = Z_m^{(1\ell),\text{OS}} + Z_m^{(2\ell),\text{OS}}$$

und analog für δ_2^{OS} :

$$\delta_2^{\text{OS}} = \delta_2^{(1\ell),\text{OS}} + \delta_2^{(2\ell),\text{OS}}.$$

Schlussendlich werden noch die Renormierungskonstanten Z_{GG} , δ_J , δ_5 und δ_F der Counterterme X_J , X_{1a} und X_F benötigt. Diese Konstanten sind im $\overline{\text{MS}}$ -Schema berechnet und lauten in der hier benötigten Ordnung der starken Kopplung:

$$Z_{GG} = 1, \quad (3.33)$$

$$Z_J^{\overline{\text{MS}}} - 1 = \delta_J^{\overline{\text{MS}}} = a_s^2 C^2(\varepsilon) \frac{3C_F T_F}{2\varepsilon}, \quad (3.34)$$

$$Z_5^{\overline{\text{MS}}} - 1 = \delta_5^{\overline{\text{MS}}} = a_s^2 C^2(\varepsilon) \frac{3C_F T_F}{4}, \quad (3.35)$$

$$\delta_F^{\overline{\text{MS}}} = a_s C(\varepsilon) \frac{6C_F}{\varepsilon}. \quad (3.36)$$

Gleichung (3.36) kann der Arbeit [Lar93] entnommen werden. Die Renormierungskonstanten δ_J und δ_5 folgen unmittelbar aus der hier vorgenommenen Rechnung, wenn man fordert, daß die Ward-Identität (3.17) erfüllt ist. Andererseits sind (3.34) und (3.35) auch in den Formeln von [Lar93] verborgen. Man muss die in [Lar93] angegebenen Renormierungskonstanten für den Singlett- und den Nichtsinglettstrom voneinander abziehen und $N_F = 1$ setzen.

In [Lar93] werden zusätzlich noch Renormierungskonstanten für den pseudoskalaren Strom angegeben. Anhand der hier durchgeführten Rechnung auf 2-Schleifen-Niveau wird jedoch klar, daß der pseudoskalare Strom in dieser Ordnung der Störungsreihe nicht renormiert werden muss. Dies erkennt man explizit am Beweis der Ward-Identität.

3.2 Berechnung der Formfaktoren

Die Berechnung aller Formfaktoren erfolgt mit Hilfe von Projektoren. Diese lauten für die Vektor- und Axialvektor-Formfaktoren:

$$P_1 = \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{k}_1 + m) \Gamma_{\mu,Z}(s, m) (\not{k}_2 - m)], \quad (3.37)$$

$$P_2 = \text{Tr}[\not{t}^\mu (\not{k}_1 + m) \Gamma_{\mu,Z}(s, m) (\not{k}_2 - m)], \quad (3.38)$$

$$P_3 = \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma_5 (\not{k}_1 + m) \Gamma_{\mu,Z}(s, m) (\not{k}_2 - m)], \quad (3.39)$$

$$P_4 = \text{Tr}[q^\mu \gamma_5 (\not{k}_1 + m) \Gamma_{\mu,Z}(s, m) (\not{k}_2 - m)]. \quad (3.40)$$

Für den pseudoskalaren Formfaktor wird der Projektor

$$P_A = -\frac{1}{2s} \text{Tr}[\gamma_5 (\not{k}_1 + m) \tilde{\Lambda}_5(s, m) (\not{k}_2 - m)] \quad (3.41)$$

benutzt und für den Anomalieterm

$$P_F = \frac{i}{4ms} \text{Tr}[\gamma_5 (\not{k}_1 + m) F_R (\not{k}_2 - m)]. \quad (3.42)$$

Einsetzen der Formfaktorzerlegung (3.5) in (3.37) - (3.40) liefert ein Gleichungssystem, welches nach den 4 Formfaktoren F_1 , F_2 , G_1 und G_2 gelöst werden kann. Die Spuren in den Projektoren werden in $D = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen berechnet, wobei γ_5^{ac} und die Konvention $\text{Tr} \mathbb{1} = 4$ verwendet wird. Dies führt, nachdem das auftretende Gleichungssystem gelöst wurde, zu

$$F_1(s, m) = \frac{i}{v_Q^Z} \frac{1}{[(D-2)s(s-4m^2)]} \left[mP_2 + \frac{1}{2}(4m^2 - s)P_1 \right], \quad (3.43)$$

$$F_2(s, m) = \frac{i}{v_Q^Z} \frac{1}{[(D-2)s(s-4m^2)]} \left[2m^2 P_1 - \frac{m[(2-D)s - 4m^2]}{4m^2 - s} P_2 \right], \quad (3.44)$$

$$G_1(s, m) = -\frac{i}{a_Q^Z} \frac{1}{[(D-2)s(s-4m^2)]} \left[mP_4 + \frac{s}{2} P_3 \right], \quad (3.45)$$

$$G_2(s, m) = -\frac{i}{a_Q^Z} \frac{1}{[(D-2)s(s-4m^2)]} \left[-2m^2 P_3 - \frac{m}{s} [(2-D)s + 4(D-1)m^2] P_4 \right]. \quad (3.46)$$

Die Berechnung der Vektor-Formfaktoren und der Axialvektor-Formfaktoren entkoppelt voneinander. Die Formfaktoren F_1 und F_2 sind durch die Projektoren P_1 und P_2 bestimmt und analog G_1 und G_2 durch P_3 und P_4 . Setzt man die Feynman-Amplituden aus Anhang A in die Projektoren ein, so zeigt die konkrete Rechnung, daß in den Projektoren P_1 und P_2 nur der Vektoranteil ($\sim v_Q^Z$) einer Amplitude beiträgt. Dies ist auch unmittelbar klar, da der Axialvektoranteil einer Amplitude nicht zu den Vektor-Formfaktoren beitragen kann. Analog werden P_3 und P_4 nur

durch den Axialvektoranteil einer Amplitude bestimmt.

Für den pseudoskalaren Formfaktor A und für den Anomalie-Formfaktor $\hat{F}$ sind die Vorfaktoren in den Projektoren gerade so gewählt, daß sich nach Einsetzen von (3.14) und (3.15) in (3.41) und (3.42) ein trivialer Zusammenhang ergibt:

$$A(s, m) = P_A, \quad (3.47)$$

$$\hat{F}(s, m) = P_F. \quad (3.48)$$

Zum Herstellen der Beziehungen (3.47) und (3.48) wurde ebenfalls γ_5^{ac} und $\text{Tr } 1 = 4$ benutzt.

Die Berechnung der Formfaktoren erfolgt nun, indem man $\Gamma_{\mu, Z}$, $\tilde{\Lambda}_5$ und F_R aus Anhang A in die Projektoren einsetzt. Allerdings muss man nun wiederum zwischen nicht-anomalen und anomalen Amplituden unterscheiden.

Die Vektor-Formfaktoren F_1 und F_2 erhalten nur Beiträge aus den Typ-A-Amplituden, da nur diese einen Vektoranteil besitzen. Setzt man die Feynman-Amplituden in P_1 und P_2 ein, so müssen erneut die Projektorspuren berechnet werden. Für die Vektor-Formfaktoren werden diese Spuren in D Dimensionen ebenfalls mit γ_5^{ac} berechnet.

Die Axialvektor-Formfaktoren hingegen erhalten Beiträge vom Typ A und vom Typ B. Für die Projektorspuren der nicht anomalen Beiträge wird analog zu den Vektor-Formfaktoren ebenfalls γ_5^{ac} verwendet.

In den Typ-B-Beiträgen wird jedes auftretende γ_5 durch γ_5^{la} ersetzt. Dies betrifft einerseits das γ_5 aus der Spur über das Quarkdreieck und andererseits das γ_5 , das in der Definition der Projektoren P_3 und P_4 steckt.

Auf den ersten Blick scheinen sich nun die Vorschriften zu vermischen: Für die anomalen Amplituden werden die Projektoren mit Hilfe von γ_5^{la} berechnet und anschließend in (3.45) und (3.46) eingesetzt, welche mit γ_5^{ac} bestimmt wurden. Durch diese Vorgehensweise entstehen allerdings keine Inkonsistenzen in den Resultaten, da die UV -renormierten Dreiecksamplituden IR -endlich sind. Unterschiedliche Vorschriften für γ_5 führen in der Herleitung von (3.45) und (3.46) zu Unterschieden der $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Bildet man am Ende der Rechnung den physikalischen Übergang von $D \rightarrow 4$ Dimensionen so verschwinden alle Terme der $\mathcal{O}(\varepsilon)$ und somit auch alle Unterschiede. In der Berechnung der Axialvektor-Formfaktoren zu den Amplituden vom Typ A trifft dies nicht mehr zu. Hier treten in den Projektoren und somit auch in den Formfaktoren IR -Divergenzen als Pole in $\frac{1}{\varepsilon}$ auf. Diese Pole, multipliziert mit $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -Termen aus (3.45) und (3.46) führen zu endlichen Termen und somit schlussendlich zu einer Abhängigkeit der Formfaktoren von der verwendeten Vorschrift. Da in (3.16) keine zusätzliche Renormierung der Typ-A-Beiträge durchgeführt wird, wird in der Be-

rechnung der nicht-anomalen Amplituden überall γ_5^{ac} verwendet.

Die Konsistenz der beschriebenen Vorgehensweise wird anhand der Ward-Identitäten überprüft.

Die Aufteilung in Typ A und Typ B ist auch für die pseudoskalaren Beiträge sinnvoll. Somit wird auch in diesen γ_5^{ac} für Typ A und γ_5^{la} für Typ B verwendet. Der Formfaktor $\hat{F}$ wird zur Überprüfung der Typ-B-Ward-Identität benötigt und somit mit γ_5^{la} berechnet.

Zu den unterschiedlichen Vertexfunktionen werden die 1ℓ - und die 2ℓ -Beiträge bestimmt. Die Formfaktoren sind also ihrerseits als Reihe in der starken Kopplung α_s darstellbar. Die Entwicklung erfolgt in $a_s = (\frac{\alpha_s}{2\pi})$:

$$F_1(s, m) = 1 + a_s F_1^{(1\ell)}(s, m) + a_s^2 F_1^{(2\ell)}(s, m) + \mathcal{O}(\alpha_s^3), \quad (3.49)$$

$$F_2(s, m) = a_s F_2^{(1\ell)}(s, m) + a_s^2 F_2^{(2\ell)}(s, m) + \mathcal{O}(\alpha_s^3), \quad (3.50)$$

$$G_1(s, m) = 1 + a_s G_1^{(1\ell)}(s, m) + a_s^2 G_1^{(2\ell)}(s, m) + \mathcal{O}(\alpha_s^3), \quad (3.51)$$

$$G_2(s, m) = a_s G_2^{(1\ell)}(s, m) + a_s^2 G_2^{(2\ell)}(s, m) + \mathcal{O}(\alpha_s^3), \quad (3.52)$$

$$A(s, m) = 1 + a_s A^{(1\ell)}(s, m) + a_s^2 A^{(2\ell)}(s, m) + \mathcal{O}(\alpha_s^3), \quad (3.53)$$

Explizit dargestellt ist nur die Abhängigkeit von s und m . Die Abhängigkeit von ε und μ wurde wiederum unterdrückt.

Die Unterscheidung in Typ-A- und Typ-B-Amplituden setzt sich auch in den Formfaktoren fort. Sie betrifft klarerweise nur die Axialvektor-Formfaktoren und den pseudoskalaren Formfaktor zur $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$:

$$G_1^{(2\ell)}(s, m) = G_1^{(2\ell,A)}(s, m) + G_1^{(2\ell,B)}(s, m), \quad (3.54)$$

$$G_2^{(2\ell)}(s, m) = G_2^{(2\ell,A)}(s, m) + G_2^{(2\ell,B)}(s, m), \quad (3.55)$$

$$A^{(2\ell)}(s, m) = A^{(2\ell,A)}(s, m) + A^{(2\ell,B)}(s, m). \quad (3.56)$$

Die Typ-B-Beiträge sind als eine von der physikalischen Problemstellung abhängige Massenkombination der berechneten anomalen Axialvektor-Formfaktoren gegeben. Wie $G_i^{(2\ell,B)}(s, m)$ konkret aussieht wird bei den physikalischen Anwendungen der Formfaktoren im anschliessenden Kapitel diskutiert.

Zum Anomalie-Formfaktor $\hat{F}$ wird nur der 1-Schleifen-Beitrag aus Abbildung 3.8 benötigt, so daß hier eine Darstellung als Reihenentwicklung nicht notwendig ist.

An den Gleichungen (3.49) - (3.52) erkennt man, dass die Born-Amplitude (darge-

stellt in Abbildung 2.2) zu den Formfaktoren die Beiträge

$$F_1^{\text{Born}} = G_1^{\text{Born}} = 1 \quad (3.57)$$

und

$$F_2^{\text{Born}} = G_2^{\text{Born}} = 0 \quad (3.58)$$

liefert. Dieses Ergebnis erhält man sofort durch Vergleich der Parametrisierung (3.5) und der Feynman-Regel für die Kopplung eines Z -Bosons an $Q\bar{Q}$. Analog erhält man

$$A^{\text{Born}} = 1. \quad (3.59)$$

Die 1-Schleifen-Beiträge ($\mathcal{O}(\alpha_s)$) zu den Vektor- und Axialvektor-Formfaktoren sind seit langem bekannt [JLZ81, JLZ82] und werden in dieser Arbeit zur Kontrolle der verwendeten Programme und Formeln noch einmal berechnet und mit den bekannten Ergebnissen verglichen.

Die Amplituden zu den bisher beschriebenen Feynman-Diagrammen sind in Anhang A gegeben. Man erkennt sofort, dass

$$M_{\mu,Z}^{X_3} = M_{\mu,Z}^{X_4}$$

gilt (vgl. Gleichung (A.15)). Demzufolge ergeben diese beiden Counterterme identische Beiträge zu den Formfaktoren.

Weiterhin liefern die zueinander gespiegelten Diagramme (zum Beispiel A_1 und A_2) identische Beiträge zu den Formfaktoren. Dies ist anhand der Amplituden nicht direkt ersichtlich. Der Beweis dieser Behauptung wird im folgenden anhand der Amplituden zu A_1 und A_2 gezeigt und trifft ebenso auf B_i, E_i und X_i ($i = 1, 2$) zu.

Jede dieser Amplituden lässt sich in einen Vektor- (M_μ^V) und einen Axialvektoranteil ($M_{\mu 5}^A$) zerlegen. Schematisch bedeutet dies für A_1 (analog für A_2):

$$M_{\mu,Z}^{A_1} = M_\mu^{V,A_1} + M_{\mu 5}^{A,A_1}.$$

Betrachte nun $M_{\mu,Z}^{A_2}$ und nehme in der Amplitude die Vertauschung $k_1 \leftrightarrow k_2$ vor. Anhand der Definitionen der Propagatoren in Anhang A erkennt man, dass die Propagatoren von $M_{\mu,Z}^{A_2}$ in die der Amplitude A_1 übergehen. Man erhält:

$$\begin{aligned} M_{\mu,Z}^{A_2}(k_1 \leftrightarrow k_2) &\sim \gamma^\rho (\not{k}_2 - \not{l}_1 + m) (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) (-\not{k}_1 - \not{l}_1 + m) \gamma^\nu \\ &\quad (-\not{k}_1 - \not{l}_1 - \not{l}_2 + m) \gamma_\nu (-\not{k}_1 - \not{l}_1 + m) \gamma_\rho. \end{aligned}$$

Durch Einschieben der $\mathbb{1} = C C^{-1}$, C ist die Ladungskonjugationsmatrix, und unter Benutzung von $C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T$ sowie $C^{-1}\gamma_\mu\gamma_5 C = (\gamma_\mu\gamma_5)^T$ folgt:

$$M_{\mu,Z}^{A_2}(k_1 \leftrightarrow k_2) \sim C \left[\gamma^\rho (\not{k}_1 + \not{l}_1 + m) \gamma^\nu (\not{k}_1 + \not{l}_1 + \not{l}_2 + m) \gamma_\nu \right. \\ \left. (\not{k}_1 + \not{l}_1 + m) (-v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) (\not{l}_1 - \not{k}_2 + m) \gamma_\rho \right]^T C^{-1}.$$

Insgesamt erhält man für A_2 :

$$M_{\mu,Z}^{A_2}(k_1 \leftrightarrow k_2) = C \left[-M_\mu^{V,A_1} + M_{\mu 5}^{A,A_1} \right]^T C^{-1}.$$

Zur Berechnung der Formfaktoren werden die Amplituden in die Projektoren (3.37)-(3.40) eingesetzt. Der Vektoranteil einer gegebenen Amplitude trägt nur in den Projektoren P_1 und P_2 bei. Ebenso ergibt nur der Axialvektoranteil in P_3 und P_4 einen nicht-verschwindenden Beitrag. Für A_1 folgt:

$$\begin{aligned} P_1(A_1) &= \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{k}_1 + m) M_\mu^{V,A_1} (\not{k}_2 - m) \right], \\ P_2(A_1) &= \text{Tr} \left[\not{t}^\mu (\not{k}_1 + m) M_\mu^{V,A_1} (\not{k}_2 - m) \right], \\ P_3(A_1) &= \text{Tr} \left[\gamma^\mu \gamma_5 (\not{k}_1 + m) M_{\mu 5}^{A,A_1} (\not{k}_2 - m) \right], \\ P_4(A_1) &= \text{Tr} \left[\not{q}^\mu \gamma_5 (\not{k}_1 + m) M_{\mu 5}^{A,A_1} (\not{k}_2 - m) \right]. \end{aligned}$$

Betrachte zunächst nur den Projektor $P_1(A_2)$. Vertauscht man wiederum $k_1 \leftrightarrow k_2$ so folgt:

$$P_1(A_2)(k_1 \leftrightarrow k_2) = \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{k}_2 + m) C [-M_\mu^{V,A_1}]^T C^{-1} (\not{k}_1 - m) \right].$$

Benutzt man nun wieder $C C^{-1} = \mathbb{1}$ so erhält man:

$$P_1(A_2)(k_1 \leftrightarrow k_2) = P_1(A_1).$$

Genauso lässt sich für die restlichen Projektoren zu A_2 die Äquivalenz zu $P_i(A_1)$, $i = 2 \dots 4$, zeigen.

Die Amplituden A_1 und A_2 ergeben identische Projektoren und somit auch die gleichen Beiträge zu den Formfaktoren. Analog folgt für B_2 , E_2 und X_2 , daß diese identische Formfaktoren zu B_1 , E_1 und X_1 liefern. Ebenso lässt sich zeigen, daß die pseudoskalaren Amplituden der genannten Diagramme gleiche Beiträge zu $A^{(2\ell,A)}$ ergeben.

Zur Berechnung der Formfaktoren würde es also ausreichen, jeweils nur eine der paarweise gleichen Amplituden auszuwerten. Hier wurde allerdings nicht von dieser Möglichkeit Gebrauch gemacht. Vielmehr wurde die Gleichheit der Amplituden als Test für die Berechnung der jeweiligen Formfaktoren benutzt. Da die paarweise

Gleichheit der Formfaktoren bereits auf Amplitudenniveau vorhanden ist, ermöglicht dies eine laufende Überprüfung der Rechnung, insbesondere der γ -Algebra und der Reduktion der 2-Schleifenintegrale auf Master-Integrale (vgl. Anhang B). Da nicht jedes Diagramm ein gespiegeltes Ebenbild besitzt, lässt sich diese Kontrolle leider nicht auf alle Formfaktoren gleichermaßen anwenden. Weitere Konsistenztests werden im Rahmen der Diskussion der Ergebnisse besprochen.

In den Typ-B-Amplituden werden auch solche mit äusseren masselosen Quarks ($m_A = 0$) betrachtet. Für diese Fälle muss man die Projektoren anpassen, indem die Masse $m = 0$ gesetzt wird. Daraus folgt, daß in diesem Fall der Formfaktor G_1 nur noch durch den Projektor P_3 bestimmt wird. Gleichung (3.45) geht über in:

$$G_1^{(2\ell,B)}(m_A = 0) = -\frac{i}{a_Q^Z} \frac{P_3(m_A = 0)}{2(D-2)s}, \quad (3.60)$$

mit

$$P_3(m_A = 0) = \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma_5 \not{k}_1 \Gamma_{\mu,Z}^{(B),m_I m_A=0} \not{k}_2]. \quad (3.61)$$

Aufgrund der Helizitätserhaltung an den Quark-Eichbosonvertizes verschwindet der Formfaktor G_2 für masselose externe Quarks. Dies kann man auch unmittelbar an (3.46) erkennen. Dasselbe Argument trifft auch auf den pseudoskalaren Formfaktor und den Anomalieterm zu:

$$A^{(2\ell,B),\text{mo}} = A^{(2\ell,B),\text{oo}} = \hat{F}^o = G_2^{(2\ell,B),\text{mo}} = G_2^{(2\ell,B),\text{oo}} = 0.$$

Der Index „mo“ heisst: $m_I = m$, $m_A = 0$. Näheres zur Notation findet sich in Anhang A.

Der Formfaktor $A^{(2\ell,B),\text{om}}$ verschwindet ebenfalls, da die Spur über die masselosen Quarkdreiecke in der pseudoskalaren Amplitude verschwindet.

In folgenden werden weitere Details zur Berechnung der Formfaktoren besprochen. Für den $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Beitrag werden die Resultate für die Formfaktoren angegeben. Dies soll in erster Linie der Veranschaulichung und der Nachvollziehbarkeit dienen. Die Ergebnisse der Formfaktoren zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ sind zu lang, um Resultate im Text anzugeben. Zwischenergebnisse zu den 1ℓ - und den 2ℓ -Amplituden finden sich in [Ber05c, Ber05a, Ber05b]. Die Resultate zu den renormierten analytisch fortgesetzten Formfaktoren, die in die Berechnung der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie eingehen, finden sich in Anhang C.

Wertet man die γ -Spuren in den Projektoren aus, so erhält man je nach Amplitude einen Projektor als eine Linearkombination von mehreren hundert 2-Schleifen-

integralen. Diese Integrale müssen bestimmt werden. Klarerweise will man nicht jedes Integral einzeln berechnen. Die Grundlage zur Berechnung der Integrale bilden die sogenannten Integration-by-parts-Identitäten (IBP) [Tka81, CT81], die Lorentz-Invarianz-Identitäten (LI) [GR00] sowie der Laporta-Algorithmus [LR96, Lap00]. Mit Hilfe der IBP und LI lässt sich ein gegebenes 2-Schleifenintegral als Linearkombination von mehreren anderen 2-Schleifenintegralen darstellen. Diese Identitäten bilden die Basis für ein Gleichungssystem, in welchem die verschiedenen Integrale die Unbekannten sind. Löst man dieses Gleichungssystem so erhält man einen vergleichsweise kleinen Satz von Master-Integralen. Die Master-Integrale müssen ihrerseits anschliessend explizit bestimmt werden. Zu diesem Zweck existieren in der Literatur mehrere Methoden. Die in dieser Arbeit verwendeten Master-Integrale wurden mit Hilfe der Methode der „differential equations“ berechnet [Kot91a, Kot91b, Kot91c, Rem97, CCLR98a, CCLR98b].

Es soll betont werden, dass die Reduktion aller auftretenden 2-Schleifenintegrale auf Master-Integrale den Grundstein für die vorliegende Arbeit bildet. Die Reduktion muss für jede Amplitude einzelnen durchgeführt werden, da in jeder Amplitude unterschiedliche Propagatoren auftreten. Dies führt zu unterschiedlichen 2-Schleifenintegralen.

Je nach Amplitude treten bis zu 6 verschiedene Propagatoren in den 2-Schleifen-Integralen auf. Aus den Schleifen-Impulsen l_1 und l_2 und den Impulsen der auslaufenden massiven Quarks k_1 und k_2 lassen sich 7 verschiedene Skalarprodukte konstruieren.

In der Reduktion der 2-Schleifen-Integrale einer Amplitude auf Master-Integrale werden Lösungen für alle Integrale, welche sich aus bis zu 6 Propagatoren und bis zu 3 Skalarprodukten (also zum Beispiel Integrale mit den Integranden $(P_1 \dots P_6 S_1^3)$ oder $(P_1^3 P_2 P_3 S_1 S_2)$, $P_i, (S_j)$ bezeichnen Propagatoren (Skalarprodukte)) ergeben, bestimmt. Dies sind erheblich mehr Lösungen, beziehungsweise gelöste 2-Schleifen-Integrale, als später tatsächlich in den Projektoren Eingang finden. In den Projektoren tauchen längst nicht alle Integrale auf, die sich aus allen möglichen Kombinationen der Propagatoren und der Skalarprodukte ergeben.

Die durchgeführte Reduktion ist somit auf ein breiteres Spektrum physikalischer Problemstellungen anwendbar und beschränkt sich nicht nur auf diese Arbeit.

Die Lösungen der Master-Integrale sind bereits in der Literatur bekannt [BMR03, BMR04] und können direkt übernommen werden.

Die Reduktion der 2-Schleifen-Integrale auf eine gemeinsame Basis von Master-Integralen, die Auswertung der γ -Algebra, sowie die sonstigen in dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen wurden unter umfangreichem Einsatz des Formelmanipulationsprogramm FORM [Ver00] sowie des Computeralgebrasystems MAPLE, durchgeführt.

Eine detaillierte Beschreibung der hier durchgeführten Reduktion auf Master-Integrale findet sich in [Lei05].

Die Rechnung erfolgt zunächst für raumartige Schwerpunktsenergien: $s \leq 0$. Die Master-Integrale, und somit auch die Formfaktoren sind gegeben als Linearkombination von Harmonischen Polylogarithmen (HPL) [RV00, GR01] bis zur 4ten Stufe abhängig von der Variablen

$$x = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} = \frac{\sqrt{-s + 4m^2} - \sqrt{-s}}{\sqrt{-s + 4m^2} + \sqrt{-s}}. \quad (3.62)$$

Für $s \leq 0$ gilt $0 \leq x \leq 1$. In diesem Fall sind die HPL und somit auch die Formfaktoren reell. Die UV -renormierten Formfaktoren erster Ordnung in α_s , $F_i^{(1\ell)}$, $G_i^{(1\ell)}$, ($i = 1, 2$) und $A^{(1\ell)}$ (vgl. Gleichungen (3.49)-(3.53)) lassen sich als Taylor-Reihe in Abhängigkeit des Parameters ε der dimensionellen Regularisierung darstellen:

$$F_1^{(1\ell)} = \frac{C_F C(\varepsilon)}{x^2 - 1} \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^{-\varepsilon} \left[\frac{1}{\varepsilon} a_1^{(1\ell)} + a_2^{(1\ell)} + \varepsilon a_3^{(1\ell)} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.63)$$

$$F_2^{(1\ell)} = \frac{C_F C(\varepsilon)}{x^2 - 1} \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^{-\varepsilon} \left[b_1^{(1\ell)} + \varepsilon b_2^{(1\ell)} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.64)$$

$$G_1^{(1\ell)} = \frac{C_F C(\varepsilon)}{x^2 - 1} \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^{-\varepsilon} \left[\frac{1}{\varepsilon} c_1^{(1\ell)} + c_2^{(1\ell)} + \varepsilon c_3^{(1\ell)} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.65)$$

$$G_2^{(1\ell)} = \frac{C_F C(\varepsilon)}{x^2 - 1} \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^{-\varepsilon} \left[d_1^{(1\ell)} + \varepsilon d_2^{(1\ell)} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.66)$$

$$A^{(1\ell)} = \frac{C_F C(\varepsilon)}{x^2 - 1} \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^{-\varepsilon} \left[\frac{1}{\varepsilon} e_1^{(1\ell)} + e_2^{(1\ell)} + \varepsilon e_3^{(1\ell)} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.67)$$

Da die angegebenen Formfaktoren bereits renormiert sind, handelt es sich bei den Polen in ε um IR -Divergenzen. Es werden auch die Terme zur $\mathcal{O}(\varepsilon)$ angegeben, da diese zum Beispiel bei der Bestimmung der $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ -Beiträge zur Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie benötigt werden. Die Formfaktoren $F_2^{(1\ell)}$ und $G_2^{(1\ell)}$ sind im Gegensatz zu $F_1^{(1\ell)}$, $G_1^{(1\ell)}$ und $A^{(1\ell)}$ IR -endlich. Der Faktor $C(\varepsilon)$ wird bei der Berechnung der Master-Integrale in [BMR03, BMR04] aus dem Integrationsmaß ausgeklammert (vgl. Anhang B). Es bietet sich somit an, diesen Faktor komplett aus den Formfaktoren auszuklammern.

Die Koeffizienten in (3.63)-(3.67) sind gegeben zu:

$$\begin{aligned} a_1^{(1\ell)} &= (x^2 + 1)H(0; x) + 1 - x^2, \\ a_2^{(1\ell)} &= 3(1 + x)^2 H(0; x)/2 - 2(x^2 + 1)H(-1, 0; x) + (x^2 + 1)H(0, 0; x) \\ &\quad - \zeta_2 - \zeta_2 x^2 + 2 - 2x^2, \\ a_3^{(1\ell)} &= (4x^2 + 8x - \zeta_2 x^2 + 4 - \zeta_2)H(0; x) - 2(x^2 + 1)H(-1, 0, 0; x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3(1+x)^2 H(0, 0; x)/2 + 4(x^2 + 1)H(-1, -1, 0; x) - 3(1+x)^2 H(-1, 0; x) \\
& - 2(x^2 + 1)H(0, -1, 0; x) + (x^2 + 1)H(0, 0, 0; x) + 2\zeta_2(x^2 + 1)H(-1, x) \\
& + 4 - 3\zeta_2 x^2/2 - 4x^2 - 3\zeta_2/2 - 2\zeta_3 x^2 - 3\zeta_2 x - 2\zeta_3, \\
b_1^{(1\ell)} &= 2H(0; x)x, \\
b_2^{(1\ell)} &= 8H(0; x)x - 4H(-1, 0; x)x + 2H(0, 0; x)x - 2\zeta_2 x, \\
c_1^{(1\ell)} &= a_1^{(1\ell)}, \\
c_2^{(1\ell)} &= a_2^{(1\ell)} - 4H(0; x)x, \\
c_3^{(1\ell)} &= a_3^{(1\ell)} + 4\zeta_2 x - 8H(0; x)x + 8H(-1, 0; x)x - 4H(0, 0; x)x, \\
d_1^{(1\ell)} &= 2x(3 - 2x + 3x^2)H(0; x)/(x - 1)^2 - 4x(1 + x)/(x - 1), \\
d_2^{(1\ell)} &= 4x(3 - 2x + 3x^2)H(0; x)/(x - 1)^2 + 2x(3 - 2x + 3x^2)H(0, 0; x)/(x - 1)^2 \\
& - 4x(-2x + 3 + 3x^2)H(-1, 0; x)/(x - 1)^2 \\
& - 2x(-4 + 4x^2 - 2\zeta_2 x + 3\zeta_2 + 3\zeta_2 x^2)/(x - 1)^2, \\
e_1^{(1\ell)} &= (x^2 + 1)H(0; x) + 2x^2 - 2, \\
e_2^{(1\ell)} &= -2(x^2 + 1)H(-1, 0; x) + (x^2 + 1)H(0, 0; x) + 3x^2 - \zeta_2 - \zeta_2 x^2 - 3, \\
e_3^{(1\ell)} &= -(-x^2 - 2x - 1 + \zeta_2 x^2 + \zeta_2)H(0; x) + 2\zeta_2(x^2 + 1)H(-1, x) \\
& - 2(x^2 + 1)H(-1, 0, 0; x) - 2(x^2 + 1)H(0, -1, 0; x) + (x^2 + 1)H(0, 0, 0; x) \\
& + 4(x^2 + 1)H(-1, -1, 0; x) + 6x^2 - 2\zeta_3 - 6 - 2\zeta_3 x^2.
\end{aligned}$$

Die Formfaktoren $F_1^{(1\ell)}$ und $G_1^{(1\ell)}$ besitzen eine recht grosse Ähnlichkeit, die es ermöglicht, die Koeffizienten $c_i^{(1\ell)}$ durch die $a_i^{(1\ell)}$ in folgender Form darzustellen:

$$c_i^{(1\ell)} = a_i^{(1\ell)} + \text{Differenz}.$$

Diese Ähnlichkeit ist kein Zufall und auf die Universalität der IR -Divergenzen in Amplituden mit massiven Partonen im Endzustand zurück zu führen [CDT01].

Diese verkürzende Schreibweise ist auf die Koeffizienten zu $F_2^{(1\ell)}$ und $G_2^{(1\ell)}$ nicht anwendbar, wohl aber später bei der Behandlung der asymptotischen und der Schwellen-Entwicklung.

Die Resultate für die Formfaktoren in zweiter Ordnung der starken Kopplung für raumartige s wurden in [Ber05b, Ber05a, Ber05c] publiziert. Dort finden sich die Summe der Beiträge aus Abbildung 3.4 sowie Einzelresultate zu den Countertermen aus Abbildung 3.5 und den renormierten Typ-B-Amplituden.

3.2.1 Analytische Fortsetzung

Der nächste Schritt ist die analytische Fortsetzung der Formfaktoren. Die Schwerpunktsenergie geht hierbei von $s \leq 0$ in den zeitartigen, physikalisch relevanten Bereich oberhalb der Produktionsschwelle zweier schwerer Quarks $s \geq 4m^2$ über. Die bisher rein reellen HPL entwickeln in diesem Fall Imaginärteile. Somit erhalten die Formfaktoren absorptive Anteile. Für die analytische Fortsetzung wird die bekannte $i\delta$ -Vorschrift für die Schwerpunktsenergie benutzt:

$$s \rightarrow s + i\delta.$$

Dies übersetzt sich in die Variablen-Transformation

$$x \rightarrow -y + i\delta$$

mit

$$y = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \quad (3.68)$$

wobei $0 \leq y \leq 1$ für $s \geq 4m^2$.

Die oben beschriebene Darstellung der Formfaktoren bleibt von der analytischen Fortsetzung unbeeinflusst. Lediglich im ausgeklammerten Vorfaktor in (3.63)-(3.66) wird der Übergang $x \rightarrow -y$ vollzogen. Die Koeffizienten $a_i^{(1\ell)}, \dots$ werden aufgeteilt in einen Real- und in einen Imaginärteil:

$$a_i^{(1\ell)} = \text{Re } a_i^{(1\ell)} + i \pi \text{Im } a_i^{(1\ell)} \quad (3.69)$$

wobei aus dem Imaginärteil ein Faktor π ausgeklammert wurde. Gleichung (3.63) geht also nach der analytischen Fortsetzung über in

$$F_1^{(1\ell)} = \frac{C_F C(\varepsilon)}{y_- y_+} \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^{-\varepsilon} \left[\frac{1}{\varepsilon} (\text{Re } a_1^{(1\ell)} + i\pi \text{Im } a_1^{(1\ell)}) + (\text{Re } a_2^{(1\ell)} + i\pi \text{Im } a_2^{(1\ell)}) \right. \\ \left. + \varepsilon (\text{Re } a_3^{(1\ell)} + i\pi \text{Im } a_3^{(1\ell)}) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

mit

$$y_- = y - 1, \\ y_+ = y + 1.$$

Für die restlichen Formfaktoren ergeben sich analoge Gleichungen. Man erhält für die Koeffizienten der $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Formfaktoren:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} a_1^{(1\ell)} &= + (y^2 + 1)H(0; y) + 1 - y^2, \\
\operatorname{Im} a_1^{(1\ell)} &= + y^2 + 1, \\
\operatorname{Re} a_2^{(1\ell)} &= + 3y_-^2 H(0; y)/2 + 2(y^2 + 1)H(1, 0; y) + (y^2 + 1)H(0, 0; y) \\
&\quad + 2 - 2y^2 - 4\zeta_2 - 4\zeta_2 y^2, \\
\operatorname{Im} a_2^{(1\ell)} &= + (y^2 + 1)H(0; y) + 2(y^2 + 1)H(1; y) + 3/2 + 3y^2/2 - 3y, \\
\operatorname{Re} a_3^{(1\ell)} &= + 2(y^2 + 1)H(0, 1, 0; y) + 2(y^2 + 1)H(1, 0, 0; y) + 3y_-^2 H(1, 0; y) \\
&\quad - 4(\zeta_2 y^2 - 1 - y^2 + \zeta_2 + 2y)H(0; y) + (y^2 + 1)H(0, 0, 0; y) \\
&\quad + 4(y^2 + 1)H(1, 1, 0; y) - 8\zeta_2(y^2 + 1)H(1, y) + 3y_-^2 H(0, 0; y)/2 \\
&\quad + 4 + 12\zeta_2 y - 6\zeta_2 y^2 - 6\zeta_2 - 2\zeta_3 - 2\zeta_3 y^2 - 4y^2, \\
\operatorname{Im} a_3^{(1\ell)} &= + 3y_-^2 H(0; y)/2 + 2(y^2 + 1)H(1, 0; y) + 3y_-^2 H(1; y) \\
&\quad + (y^2 + 1)H(0, 0; y) + 4(y^2 + 1)H(1, 1; y) + 2(y^2 + 1)H(0, 1; y) \\
&\quad - 8y - 2\zeta_2 - 2\zeta_2 y^2 + 4y^2 + 4, \\
\operatorname{Re} b_1^{(1\ell)} &= - 2H(0; y)y, \\
\operatorname{Im} b_1^{(1\ell)} &= - 2y, \\
\operatorname{Re} b_2^{(1\ell)} &= - 8H(0; y)y - 4H(1, 0; y)y - 2yH(0, 0; y) + 8\zeta_2 y, \\
\operatorname{Im} b_2^{(1\ell)} &= - 2H(0; y)y - 4H(1; y)y - 8y, \\
\operatorname{Re} c_1^{(1\ell)} &= \operatorname{Re} a_1^{(1\ell)}, \\
\operatorname{Im} c_1^{(1\ell)} &= \operatorname{Im} a_1^{(1\ell)}, \\
\operatorname{Re} c_2^{(1\ell)} &= \operatorname{Re} a_2^{(1\ell)} + 4H(0; y)y, \\
\operatorname{Im} c_2^{(1\ell)} &= \operatorname{Im} a_2^{(1\ell)} + 4y, \\
\operatorname{Re} c_3^{(1\ell)} &= \operatorname{Re} a_3^{(1\ell)} + 8H(0; y)y + 4yH(0, 0; y) + 8H(1, 0; y)y - 16\zeta_2 y, \\
\operatorname{Im} c_3^{(1\ell)} &= \operatorname{Im} a_3^{(1\ell)} + 8H(1; y)y + 8y + 4H(0; y)y, \\
\operatorname{Re} d_1^{(1\ell)} &= - 2y(2y + 3 + 3y^2)H(0; y)/[y_+^2] + 4yy_-/[y_+], \\
\operatorname{Im} d_1^{(1\ell)} &= - 2y(2y + 3 + 3y^2)/[y_+^2], \\
\operatorname{Re} d_2^{(1\ell)} &= - 4y(2y + 3 + 3y^2)H(0; y)/[y_+^2] + 8y(2\zeta_2 y + 3\zeta_2 + 3\zeta_2 y^2 + y^2 - 1)/[y_+^2] \\
&\quad - 4y(2y + 3 + 3y^2)H(1, 0; y)/[y_+^2] - 2y(2y + 3 + 3y^2)H(0, 0; y)/[y_+^2], \\
\operatorname{Im} d_2^{(1\ell)} &= - 2y(2y + 3 + 3y^2)H(0; y)/[y_+^2] - 4y(2y + 3 + 3y^2)H(1; y)/[y_+^2] \\
&\quad - 4y(2y + 3 + 3y^2)/[y_+^2], \\
\operatorname{Re} e_1^{(1\ell)} &= + (y^2 + 1)H(0; y) - 1/2 + y^2/2, \\
\operatorname{Im} e_1^{(1\ell)} &= + y^2 + 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} e_2^{(1\ell)} &= +2(y^2 + 1)H(1, 0; y) + (y^2 + 1)H(0, 0; y) - 4\zeta_2 - 4\zeta_2 y^2 + y^2 - 1, \\
\operatorname{Im} e_2^{(1\ell)} &= + (y^2 + 1)H(0; y) + 2(y^2 + 1)H(1; y), \\
\operatorname{Re} e_3^{(1\ell)} &= -(-1 + 4\zeta_2 y^2 - y^2 + 4\zeta_2 + 2y)H(0; y) + 2(y^2 + 1)H(0, 1, 0; y) \\
&\quad + 4(y^2 + 1)H(1, 1, 0; y) + 2(y^2 + 1)H(1, 0, 0; y) + (y^2 + 1)H(0, 0, 0; y) \\
&\quad - 8\zeta_2(y^2 + 1)H(1, y) + 2y^2 - 2 - 2\zeta_3 y^2 - 2\zeta_3, \\
\operatorname{Im} e_3^{(1\ell)} &= +2(y^2 + 1)H(1, 0; y) + (y^2 + 1)H(0, 0; y) + 2(y^2 + 1)H(0, 1; y) \\
&\quad + 4(y^2 + 1)H(1, 1; y) - 2y - 2\zeta_2 - 2\zeta_2 y^2 + y^2 + 1.
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten der renormierten 1-Schleifen-Beiträge besitzen keine Abhängigkeit von der Renormierungsskala. Die komplette μ -Abhängigkeit lässt sich in dem Faktor $\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)^{-\varepsilon}$ ausklammern. Dieser Faktor steckt einerseits in dem Integrationsmaß des 1-Schleifenintegrals und andererseits im Counterterm im $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Anteil von δ_2^{OS} (3.27).

Die renormierten analytisch fortgesetzten Formfaktoren $F_1^{(2\ell)}$, $F_2^{(2\ell)}$, $G_1^{(2\ell, A)}$, $G_2^{(2\ell, A)}$ und $A^{(2\ell, A)}$ werden analog zu den 1-Schleifen-Beiträgen als Reihe in ε dargestellt. Zusätzlich werden die Formfaktoren gemäß der auftretenden Farbstrukturen zerlegt. Welche Farbstrukturen auftreten, kann man leicht an den Amplituden in Anhang A ablesen. Man erhält folgende Zerlegung:

$$\begin{aligned}
F_1^{(2\ell)} &= \frac{C^2(\varepsilon)}{y_- y_+} \left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)^{-2\varepsilon} \left\{ \right. \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon^2} \left[C_F T_F N_F a_1^{(2\ell)} + C_F T_F a_2^{(2\ell)} + C_F N_C a_3^{(2\ell)} + C_F^2 a_4^{(2\ell)} \right] \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon} \left[C_F T_F N_F a_5^{(2\ell)} + C_F T_F a_6^{(2\ell)} + C_F N_C a_7^{(2\ell)} + C_F^2 a_8^{(2\ell)} \right] \\
&\quad + \left. C_F T_F N_F a_9^{(2\ell)} + C_F T_F a_{10}^{(2\ell)} + C_F N_C a_{11}^{(2\ell)} + C_F^2 a_{12}^{(2\ell)} \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{3.70}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2^{(2\ell)} &= \frac{C^2(\varepsilon)}{y_- y_+} \left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)^{-2\varepsilon} \left\{ \right. \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon} \left[C_F T_F N_F b_1^{(2\ell)} + C_F T_F b_2^{(2\ell)} + C_F N_C b_3^{(2\ell)} + C_F^2 b_4^{(2\ell)} \right] \\
&\quad + \left. C_F T_F N_F b_5^{(2\ell)} + C_F T_F b_6^{(2\ell)} + C_F N_C b_7^{(2\ell)} + C_F^2 b_8^{(2\ell)} \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{3.71}
\end{aligned}$$

$$G_1^{(2\ell), (A)} = F_1^{(2\ell)}(a_i^{(2\ell)} \leftrightarrow c_i^{(2\ell)}), \tag{3.72}$$

$$G_2^{(2\ell), (A)} = F_2^{(2\ell)}(b_j^{(2\ell)} \leftrightarrow d_j^{(2\ell)}), \tag{3.73}$$

$$A^{(2\ell), (A)} = F_1^{(2\ell)}(a_i^{(2\ell)} \leftrightarrow e_i^{(2\ell)}). \tag{3.74}$$

Ähnlich zu den 1-Schleifen-Beiträgen enthalten die Formfaktoren $F_2^{(2\ell)}$ und $G_2^{(2\ell,A)}$ IR -Pole, die eine Ordnung niedriger sind als die von $F_1^{(2\ell)}$ und $G_1^{(2\ell,A)}$. Für die Koeffizienten in (3.70)-(3.74) gilt die gleiche Aufteilung in Real- und Imaginärteil wie in Gleichung (3.69) beschrieben. In Anhang C finden sich die Resultate für die Real- und Imaginärteile von $a_i^{(2\ell)}$, $b_j^{(2\ell)}$, $c_i^{(2\ell)}$, $d_j^{(2\ell)}$ und $e_i^{(2\ell)}$, $i = 1 \dots 12$, $j = 1 \dots 8$. Analog zu $G_1^{(1\ell)}$ lassen sich die Koeffizienten $c_i^{(2\ell)}$ aufgrund ihrer Ähnlichkeit zu den $a_i^{(2\ell)}$ durch diese verkürzt darstellen.

Die Koeffizienten in Anhang C gelten für $\mu = m$. Für die $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ -Koeffizienten erhält man für $\mu \neq m$ eine nicht-triviale Renormierungsskalen-Abhängigkeit dahingehend, dass sie sich im Gegensatz zur $\mathcal{O}(\alpha_s)$ nicht mehr einfach ausklammern lässt. Hier besitzen die 2-Schleifen-Amplituden und die Counterterme unterschiedliche μ -Abhängigkeiten. Klammert man den Faktor $\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)^{-2\varepsilon}$ doch komplett aus, wie in den Gleichungen (3.70)-(3.74) geschehen, muss man dies berücksichtigen. Dies führt im Endeffekt zu den in Anhang C gegebenen Termen.

Die Renormierungsskalenabhängigkeit der Typ-A-Formfaktoren wird genau wie in den on-shell-Renormierungskonstanten komplett durch die QCD - β -Funktion bestimmt [Ber05a, Ber05b].

Die genaue Kenntnis der Renormierungsskalen-Abhängigkeit ist wichtig für die Bestimmung des theoretischen Fehlers von Observablen, zu denen diese Formfaktoren beitragen. Dieser berechnet sich durch die Variation der Renormierungsskala in einem frei wählbaren Bereich; typischerweise benutzt man $\frac{1}{2}\sqrt{s} < \mu < 2\sqrt{s}$.

Die Resultate zu den Typ-B-Beiträgen zu G_1 und G_2 sind ebenfalls im Anhang C gegeben. Für spätere Anwendungen dieser Formfaktoren in der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie oder im totalen Wirkungsquerschnitt wurden insgesamt 4 verschiedene Massenkombinationen von m_I und m_A berechnet:

$$\begin{aligned} m_I = m, m_A = m & : G_i^{(2\ell,B),\text{mm}} \quad \text{für } i = 1, 2, \\ m_I = 0, m_A = m & : G_i^{(2\ell,B),\text{om}} \quad \text{für } i = 1, 2, \\ m_I = m, m_A = 0 & : G_1^{(2\ell,B),\text{mo}}, \\ m_I = 0, m_A = 0 & : G_1^{(2\ell,B),\text{oo}}. \end{aligned}$$

Dort werden auch $A^{(2\ell,B),\text{mm}}$ und $\hat{F}^{\text{m}}$ gegeben. Im Gegensatz zu den nicht-anomalen Formfaktoren wird hier die vollständige μ -Abhängigkeit direkt in den Formfaktoren angegeben.

Setzt man die Formfaktorzerlegungen der Vertexfunktionen in die Ward-Identitäten

ein, so erhält man für Typ A (3.16):

$$\text{zur } \mathcal{O}(\alpha_s) : G_1^{(1\ell,A)} + \frac{s}{4m^2} G_2^{(1\ell,A)} = A^{(1\ell,A)} + Z_m^{\text{OS},(1\ell)}, \quad (3.75)$$

$$\text{zur } \mathcal{O}(\alpha_s^2) : G_1^{(2\ell,A)} + \frac{s}{4m^2} G_2^{(2\ell,A)} = A^{(2\ell,A)} + Z_m^{\text{OS},(2\ell)} + A^{(1\ell,A)} Z_m^{\text{OS},(1\ell)}. \quad (3.76)$$

Diese Gleichungen werden von den hier bestimmten Formfaktoren in allen angegebenen Ordnungen von ε exakt erfüllt. Dies belegt die Konsistenz der hier durchgeführten Rechnung, insbesondere der Verwendung von γ_5^{ac} in den Typ-A-Beiträgen.

Die Typ-B-Ward-Identität (3.17) besitzt nur einen Anteil der $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$. Dieser lautet, sofern noch keine bestimmte Massenkombination betrachtet wird:

$$\begin{aligned} q^\mu \left(G_1^{(2\ell,B),m_I,m_A} \gamma_\mu \gamma_5 + \frac{1}{2m} G_2^{(2\ell),(B),m_I,m_A} q_\mu \gamma_5 \right) \\ = 2m \left(A^{(2\ell),(B),m_I,m_A} + \frac{1}{2} a_s T_F \hat{F}^{m_A} \right) \gamma_5. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Für $m_I = m_A = m$ folgt:

$$G_1^{(2\ell,B),\text{mm}} + \frac{s}{4m^2} G_2^{(2\ell,B),\text{mm}} = A^{(2\ell,B),\text{mm}} + \frac{1}{2} a_s T_F \hat{F}^{\text{m}}. \quad (3.78)$$

Diese Gleichung ist ebenso wie die Typ-A-Ward-Identitäten erfüllt. Die Verwendung von γ_5^{la} sowie die zugehörige endliche Renormierung und die Renormierung des Axialvektorstroms liefern mit der Ward-Identität konsistente Ergebnisse.

Die benutzten Renormierungskonstanten in [Lar93] wurden ursprünglich in der masselosen QCD bestimmt, so daß die hier durchgeführte Rechnung explizit die Massenunabhängigkeit des UV -endlichen Counterterms für den Axialvektorstrom zeigt. Außerdem wird keine Renormierung für die Typ-B-Beiträge des pseudoskalaren Stroms benötigt.

Ist die innere Masse $m_I = 0$ so wird aus (3.77)

$$G_1^{(2\ell,B),\text{om}} + \frac{s}{4m^2} G_2^{(2\ell,B),\text{om}} = \frac{1}{2} a_s T_F \hat{F}^{\text{m}}. \quad (3.79)$$

Gleichung (3.79) ist wie erwartet erfüllt. Für masselose externe Quarks ($m_A = 0$) ist (3.77) trivial, da G_2 , A und $\hat{F}$ identisch null sind und $\not{q} \gamma_5 G_1$ aufgrund der Dirac-Gleichung verschwindet. In diesem Fall erhält man aus der Typ-B-Ward-Identität keinen Test für den Formfaktor $G_1^{(2\ell,B),m_I,m_A=0}$.

Die Kombination $G_1^{(2\ell,B),\text{mo}} - G_1^{(2\ell,B),\text{oo}}$ ist jedoch in [KK90] mit Hilfe von Cutkosky-Regeln und Dispersionsrelationen berechnet worden. Der Vergleich mit [KK90] ergibt übereinstimmende Resultate [Ber05c].

Weiterhin kann man sich im Rahmen der folgenden asymptotischen und Schwellen-Entwicklungen die Formfaktoren erneut ansehen. Für $(m_I = m_A \rightarrow 0)$ müssen die Formfaktoren $G_2^{(2\ell, B), m_I, m_A}$ verschwinden und $G_1^{(2\ell, B), m_I, m_A}$ in $G_1^{(2\ell, B), 00}$ übergehen. Dies wird im folgenden Abschnitt überprüft.

Bisher wurde nur die Ward-Identität, welche sich aus der Ankopplung eines Axialvektorstroms an schwere Quarks ergibt, betrachtet. In Gleichung (3.79) ist dies der Axialvektorstrom für masselose Quarks:

$$J_{\mu 5}^0 = \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 q,$$

wobei q ein masseloses Quarkfeld bezeichnet. In diesem Fall ist (3.79) der einzige Anteil der Ward-Identität, weil nur in den Anomalie-Beiträgen das Quark aus dem Nicht-Singlettstrom, an welches das Z -Boson koppelt, nicht identisch mit dem externen schweren Quark sein muss. Es existieren keine Typ-A-Beiträge. Die Gleichungen (3.75), (3.76) und (3.78) stellen in ihrer Summe die Ward-Identität für den Axialvektorstrom zu schweren Quarks aus Gleichung (3.8) dar.

Auf $J_{\mu 5}$ und $J_{\mu 5}^0$ aufbauend kann man den Singlett- und den hier relevanten Nicht-singlettstrom und die zugehörigen Ward-Identitäten für die Ankopplung dieser Ströme an $Q\bar{Q}$ konstruieren. Der $SU(N_F)$ -Flavour-Singlettstrom ist gegeben zu

$$J_{\mu 5}^S = \sum_{i=1}^{N_L} \bar{q}_i \gamma_\mu \gamma_5 q_i + \bar{Q} \gamma_\mu \gamma_5 Q, \quad (3.80)$$

der Flavour-Nicht-Singlettstrom, der an das Z -Boson koppelt, lautet

$$J_{\mu 5}^{NS} = \sum_{j=1}^3 \bar{\Psi}_j \gamma_\mu \gamma_5 \tau_3 \Psi_j, \quad (3.81)$$

mit $\Psi_j = (u, d)_j$ und τ_3 die dritte Paulimatrix. Der Index „ j “ läuft über die drei Quarkgenerationen. Es werden alle Quarks ausser dem Top-Quark als masselos betrachtet.

Da zu $J_{\mu 5}^0$ keine Typ-A-Amplituden existieren, sieht man sofort, daß sich aus dem Singlett- und dem Nichtsinglettstrom die gleichen Typ-A-Ward-Identitäten (3.75) und (3.76) wie zum Axialvektorstrom ergeben.

Die Ward-Identität zum Singlettstrom ausgedrückt durch die bereits berechneten Typ-B-Formfaktoren lautet:

$$\begin{aligned} N_L \left(G_1^{(2\ell, B), \text{om}} + \frac{S}{4m^2} G_2^{(2\ell, B), \text{om}} \right) + G_1^{(2\ell, B), \text{mm}} + \frac{S}{4m^2} G_2^{(2\ell, B), \text{mm}} \\ = A^{(2\ell, B), \text{mm}} + \frac{N_L + 1}{2} a_s T_F \hat{F}^m. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Durch entsprechende Addition von (3.79) und (3.78) sieht man sofort, daß (3.82) erfüllt ist. Die Typ-B-Ward-Identität zum Nichtsinglettstrom lautet:

$$G_1^{(2\ell,B),\text{mm}} + \frac{s}{4m^2} G_2^{(2\ell,B),\text{mm}} - G_1^{(2\ell,B),\text{om}} - \frac{s}{4m^2} G_2^{(2\ell,B),\text{om}} = A^{(2\ell,B),\text{mm}}. \quad (3.83)$$

Da die Quarks aus den ersten beiden Generationen massendegeneriert sind, heben sich diese Beiträge komplett heraus. Nur das (t, b) -Dublett liefert einen nicht verschwindenden Anteil. Dieser ergibt sich wiederum in Analogie zur Singlett-Ward-Identität aus der Summe von (3.78) und (3.79) und ist somit erfüllt. Dieser Strom ist im Gegensatz zum reinen Axialvektorstrom und zum Singlettstrom nicht-anomal.

3.2.2 Asymptotische und Schwellen-Entwicklung

Schlussendlich sollen die Formfaktoren für physikalisch interessante Bereiche der Schwerpunktsenergie entwickelt werden. Einerseits ist dies die Entwicklung an der Produktionsschwelle, also $s \rightarrow 4m^2$ ($y \rightarrow 1$) und andererseits die asymptotische Entwicklung für $s \rightarrow \infty$ oder äquivalent hierzu ist $m \rightarrow 0$ ($y \rightarrow 0$).

Die Entwicklung der Formfaktoren folgt aus der Entwicklung der Koeffizienten, beziehungsweise aus der Entwicklung der HPL in den Koeffizienten. Die Entwicklung der harmonischen Polylogarithmen für Argumente ≈ 0 findet sich in [RV00, GR01]. Mit Hilfe der Transformationsregeln für die HPL in [RV00, GR01] lässt sich für jeden hier betrachteten Limes eine Variablentransformation durchführen, so dass die neue Variable für den entsprechenden Limes gegen Null geht. Für die asymptotische Entwicklung $s \rightarrow \infty$ ist dies die Variable $\frac{1}{r} = \frac{m^2}{s}$, für die Schwellenentwicklung wird als Entwicklungsparameter $\beta \approx 0$ benutzt.

Die Entwicklungen lassen sich mit den exakten Resultaten numerisch vergleichen. Aus diesem Vergleich können Rückschlüsse auf die Qualität und auf den Gültigkeitsbereich des entwickelten Resultats, in Bezug auf die exakten Ausdrücke, gezogen werden. Dies ermöglicht eine Aussage zu den in der Literatur verbreiteten Entwicklungstechniken, in denen ein gegebener Prozess direkt in einem bestimmten Limes gerechnet wird, ohne vorherige Kenntnis des exakten Resultats [HS99, Smi02]. Für die nicht-anomalen Formfaktoren kann dieser Vergleich hier aufgrund der Infrarot-Singularitäten nicht direkt durchgeführt werden. Für die Anomalieamplituden wurde dies in [Ber05c] gemacht.

Für die asymptotische Entwicklung ist es zweckmäßig, y durch die dimensionslose

Variable $r = \frac{s}{m^2}$ auszudrücken:

$$y = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{r}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{r}}}.$$

Für $s \rightarrow \infty$ folgt $r \rightarrow \infty$. In der Entwicklung der Formfaktoren wird kein kinematischer Faktor $\frac{1}{y_- y_+}$ aus den Formfaktoren mehr ausgeklammert, da dieser nicht-triviale Beiträge, insbesondere in der Schwellen-Entwicklung, liefern kann. Für (3.63) folgt

$$F_1^{(1\ell, \infty)} = C_F C(\varepsilon) \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^{-\varepsilon} \left[\frac{1}{\varepsilon} (\text{Re} a_1^{(1\ell, \infty)} + i\pi \text{Im} a_1^{(1\ell, \infty)}) + \text{Re} a_2^{(1\ell, \infty)} + i\pi \text{Im} a_2^{(1\ell, \infty)} + \varepsilon (\text{Re} a_3^{(1\ell, \infty)} + i\pi \text{Im} a_3^{(1\ell, \infty)}) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.84)$$

Der zusätzliche Index „ ∞ “ kennzeichnet die Koeffizienten zugehörig zur asymptotischen Entwicklung. Die Koeffizienten werden angegeben bis zu Termen der $\mathcal{O}(\frac{1}{r^2})$. Diese lauten im 1-Schleifen-Fall (Hier bietet es sich nun an, die $d_i^{(1\ell)}$ durch die $b_i^{(1\ell)}$ auszudrücken.):

$$\begin{aligned} \text{Re} a_1^{(1\ell, \infty)} &= \text{Re} c_1^{(1\ell, \infty)} = \frac{2L-3}{r^2} + \frac{-2}{r} + L-1, \\ \text{Im} a_1^{(1\ell, \infty)} &= \text{Im} c_1^{(1\ell, \infty)} = \frac{-2}{r^2} + L-1, \\ \text{Re} a_2^{(1\ell, \infty)} &= \frac{8\zeta_2 - L^2 + 5L}{r^2} + \frac{L-1}{r} - 2 - L^2/2 + 3L/2 + 4\zeta_2, \\ \text{Im} a_2^{(1\ell, \infty)} &= \frac{2L-5}{r^2} - \frac{1}{r} - 3/2 + L, \\ \text{Re} b_1^{(1\ell, \infty)} &= \frac{4-4L}{r^2} - \frac{2L}{r}, \\ \text{Im} b_1^{(1\ell, \infty)} &= \frac{4}{r^2} + \frac{2}{r}, \\ \text{Re} c_2^{(1\ell, \infty)} &= \text{Re} a_2^{(1\ell, \infty)} + \frac{8L-8}{r^2} + \frac{4L}{r}, \\ \text{Im} c_2^{(1\ell, \infty)} &= \text{Im} a_2^{(1\ell, \infty)} - \frac{8}{r^2} - \frac{4}{r}, \\ \text{Re} d_1^{(1\ell, \infty)} &= \text{Re} b_1^{(1\ell, \infty)} + \frac{8}{r^2} + \frac{4-4L}{r}, \\ \text{Im} d_1^{(1\ell, \infty)} &= \text{Im} b_1^{(1\ell, \infty)} + \frac{4}{r}, \\ \text{Re} e_1^{(1\ell, \infty)} &= \frac{2L-3}{r^2} - \frac{2}{r} + \frac{1}{2} + L, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} e_1^{(1\ell, \infty)} &= \frac{-2}{r^2} + \frac{1}{2} + L, \\
\operatorname{Re} e_2^{(1\ell, \infty)} &= \frac{8\zeta_2 - 3/2 + 8L - L^2}{r^2} + \frac{4L + 2}{r} + 1 + 4\zeta_2 - \frac{L^2}{2}, \\
\operatorname{Im} e_2^{(1\ell, \infty)} &= \frac{2L - 8}{r^2} - \frac{4}{r} + L.
\end{aligned}$$

mit $L = \ln(r)$. Geht $s \rightarrow \infty$, so müssen die Formfaktoren $F_2^{(1\ell, \infty)}$ und $G_2^{(1\ell, \infty)}$ verschwinden. Dies kann man anhand der Koeffizienten $b_i^{(1\ell, \infty)}$ und $d_i^{(1\ell, \infty)}$ erkennen. Diese sind in führender Ordnung proportional zu $\frac{1}{r}$ und verschwinden somit für $r \rightarrow \infty$.

Weiterhin werden die Formfaktoren F_1 und G_1 identisch zueinander für $s \rightarrow \infty$. Dies kann man auch wiederum an den entwickelten Koeffizienten ablesen. Die $c_i^{(1\ell, \infty)}$ werden wiederum durch die $a_i^{(1\ell, \infty)}$ ausgedrückt. Die Differenz $c_i^{(1\ell, \infty)} - a_i^{(1\ell, \infty)}$ ist proportional zu $\frac{1}{r}$ und verschwindet im asymptotischen Limes.

Die Koeffizienten der $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ -Beiträge zu den Formfaktoren in entwickelter Form finden sich in Anhang C. Man beachte, dass auch hier kein kinematischer Faktor mehr aus den Formfaktoren ausgeklammert ist. Die Notation ist analog zu der im 1-Schleifen-Fall gewählt. Obige Bemerkungen zu den Formfaktoren gelten gleichermaßen für $F_i^{(2\ell, \infty)}$ und $G_i^{(2\ell, \infty), (A)}$ ($i = 1, 2$). Im Anhang wird an entsprechender Stelle explizit darauf verwiesen.

Die Schwellenentwicklung der Formfaktoren wird in der Variablen β durchgeführt. An der Schwelle $s \approx 4m^2$ ist $\beta \approx 0$. Analog zu (3.84) wird hier aus den Formfaktoren kein kinematischer Faktor mehr ausgeklammert. Die entwickelten Koeffizienten tragen zur Unterscheidung zusätzlich den Index „ $4m^2$ “. Für die Koeffizienten folgt, wobei Terme bis zur Ordnung in β^0 angegeben werden:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} a_1^{(1\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Re} c_1^{(1\ell, 4m^2)} &= 0, \\
\operatorname{Im} a_1^{(1\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Im} c_1^{(1\ell, 4m^2)} &= -\frac{1}{2\beta}, \\
\operatorname{Re} a_2^{(1\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Re} c_2^{(1\ell, 4m^2)} - 2 &= \frac{3\zeta_2}{\beta} - 4, \\
\operatorname{Im} a_2^{(1\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Im} c_2^{(1\ell, 4m^2)} + \frac{1}{\beta} &= \frac{\ln_2 + \ln_b}{\beta}, \\
\operatorname{Re} b_1^{(1\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Re} d_1^{(1\ell, 4m^2)} &= -1, \\
\operatorname{Im} b_1^{(1\ell, 4m^2)} &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} d_1^{(1\ell, 4m^2)} &= \frac{1}{2\beta}, \\
\operatorname{Re} e_1^{(1\ell, 4m^2)} &= \frac{3}{2}, \\
\operatorname{Im} e_1^{(1\ell, 4m^2)} &= -\frac{1}{2\beta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} e_2^{(1\ell, 4m^2)} &= \frac{3\zeta_2}{\beta} - 1, \\ \operatorname{Im} e_2^{(1\ell, 4m^2)} &= \frac{\ln_2 + \ln_b}{\beta},\end{aligned}$$

mit

$$\ln_b = \ln(\beta).$$

Die Schwellenentwicklungen der Koeffizienten für die Formfaktoren auf 2-Schleifen-Niveau sowie Kommentare zu diesen finden sich wiederum im Anhang C.

Mehrere Konsistenzchecks können für die hier berechneten Formfaktoren durchgeführt werden. Für $F_i^{(1\ell)}$ ($i = 1, 2$) und $G_1^{(1\ell)}$ sei hier in erster Linie der Vergleich mit [JLZ82] erwähnt. Nachdem man die HPL auf Logarithmen und Dilogarithmen zurückgeführt hat, erhält man Übereinstimmung mit [JLZ82]. Der Formfaktor $G_2^{(1\ell)}$ kann nicht mit [JLZ82] verglichen werden, da dieser dort nicht berechnet wurde. Die Berechnung der exakten Formfaktoren in zweiter Ordnung der starken Kopplung wurde erstmals im Rahmen dieser Dissertation durchgeführt (siehe auch [Lei05]).

Alle Formfaktoren zeigen das erwartete Verhalten in der asymptotischen Entwicklung. Dies spricht für konsistente Ergebnisse. In Kapitel 4 wird man sehen, dass sich die IR -Divergenzen der Formfaktoren wie erwartet kürzen, wenn man den 2-Parton-Beitrag der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie für massive bottom- oder top-Quarks im Endzustand zur $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ berechnet.

Kapitel 4

2-Parton-Beitrag zu A_{FB} und zu σ_S an der Schwelle

Die Formfaktoren aus dem vorigen Kapitel werden nun in der Berechnung der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie für bottom-Quarks bei $\sqrt{s} = m_Z$ und für top-Quarks bei $360 \text{ GeV} < \sqrt{s} < 500 \text{ GeV}$, sowie des totalen Wirkungsquerschnitts an der Produktionsschwelle eines schweren Quark-Antiquark-Paares zur Anwendung gebracht. Hier wird nur der 2-Parton-Beitrag, das heißt der $Q\bar{Q}$ -Endzustand, zu den entsprechenden Observablen betrachtet und berechnet.

4.1 2-Parton-Beitrag zu A_{FB}

Zur $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ in der Störungstheorie tragen in der Reaktion $e^+e^- \rightarrow \gamma^*, Z^* \rightarrow Q\bar{Q}X$ nicht nur die im vorigen Abschnitt betrachteten 2-Schleifen-Amplituden mit 2 Partonen im Endzustand bei ($X = 0$), sondern auch 3-Parton-Amplituden ($X = g$) auf 1-Schleifen-Niveau und 4-Parton-Born-Beiträge ($X = gg, Q\bar{Q}, q\bar{q}$). Insgesamt setzen sich der antisymmetrische (2.3) und der symmetrische (2.4) Wirkungsquerschnitt folgendermassen zusammen:

$$\sigma_{A,S} = \sigma_{A,S}^{(2,0)} + \sigma_{A,S}^{(2,1)} + \sigma_{A,S}^{(2,2)} + \sigma_{A,S}^{(3,1)} + \sigma_{A,S}^{(3,2)} + \sigma_{A,S}^{(4,2)} + \mathcal{O}(\alpha_s^3). \quad (4.1)$$

Die Notation ist wie folgt: Im Index „ (i, j) “ kennzeichnet i die Anzahl der Partonen im Endzustand und j die Ordnung in der starken Kopplung $\mathcal{O}(\alpha_s^j)$. Die Amplituden der 3- und 4-Parton-Endzustände sind in der Literatur bekannt [BBU97, NO98, BU98, RBS99, BBU00].

Der symmetrische Wirkungsquerschnitt und der totale Wirkungsquerschnitt sind

identisch. Aus Gleichung (4.1) erhält man die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie bezogen auf die Richtung des schweren Quarks zur $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ (vgl. Kapitel 2):

$$A_{\text{FB}}(\alpha_s^2) = \frac{\sigma_A^{(2,0)} + \sigma_A^{(2,1)} + \sigma_A^{(2,2)} + \sigma_A^{(3,1)} + \sigma_A^{(3,2)} + \sigma_A^{(4,2)}}{\sigma_S^{(2,0)} + \sigma_S^{(2,1)} + \sigma_S^{(2,2)} + \sigma_S^{(3,1)} + \sigma_S^{(3,2)} + \sigma_S^{(4,2)}}. \quad (4.2)$$

Entwickelt man diese Gleichung nach α_s so folgt:

$$A_{\text{FB}}(\alpha_s^2) = A_{\text{FB},0} \left[1 + A_{\text{FB},1} + A_{\text{FB},2} \right] \quad (4.3)$$

wobei $A_{\text{FB},0}$ die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie auf Born-Niveau ist. Entsprechend bezeichnen $A_{\text{FB},1}$ und $A_{\text{FB},2}$ die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie zur $\mathcal{O}(\alpha_s)$ und zur $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$, normiert auf $A_{\text{FB},0}$. Die einzelnen Anteile aus Gleichung (4.3) lauten:

$$A_{\text{FB},0} = \frac{\sigma_A^{(2,0)}}{\sigma_S^{(2,0)}}, \quad (4.4)$$

$$A_{\text{FB},1} = \frac{\sigma_A^{(2,1)}}{\sigma_A^{(2,0)}} - \frac{\sigma_S^{(2,1)}}{\sigma_S^{(2,0)}} + \frac{\sigma_A^{(3,1)}}{\sigma_A^{(2,0)}} - \frac{\sigma_S^{(3,1)}}{\sigma_S^{(2,0)}}, \quad (4.5)$$

$$A_{\text{FB},2} = \frac{\sigma_A^{(2,2)}}{\sigma_A^{(2,0)}} - \frac{\sigma_S^{(2,2)}}{\sigma_S^{(2,0)}} + \frac{\sigma_A^{(3,2)}}{\sigma_A^{(2,0)}} - \frac{\sigma_S^{(3,2)}}{\sigma_S^{(2,0)}} + \frac{\sigma_A^{(4,2)}}{\sigma_A^{(2,0)}} - \frac{\sigma_S^{(4,2)}}{\sigma_S^{(2,0)}} - \frac{\sigma_S^{(2,1)} + \sigma_S^{(3,1)}}{\sigma_S^{(2,0)}} \left[\frac{\sigma_A^{(2,1)}}{\sigma_A^{(2,0)}} - \frac{\sigma_S^{(2,1)}}{\sigma_S^{(2,0)}} + \frac{\sigma_A^{(3,1)}}{\sigma_A^{(2,0)}} - \frac{\sigma_S^{(3,1)}}{\sigma_S^{(2,0)}} \right]. \quad (4.6)$$

In der Folge wird nur noch der 2-Parton-Beitrag ($2p$) zur Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie in der jeweiligen Ordnung der Störungstheorie betrachtet. Auf Born-Niveau ist der $2p$ -Beitrag in Gleichung (4.4) gegeben. In den höheren Ordnungen erhält man aus (4.5) und (4.6):

$$A_{\text{FB},1}^{(2p)} = \frac{\sigma_A^{(2,1)}}{\sigma_A^{(2,0)}} - \frac{\sigma_S^{(2,1)}}{\sigma_S^{(2,0)}}, \quad (4.7)$$

$$A_{\text{FB},2}^{(2p)} = \frac{\sigma_A^{(2,2)}}{\sigma_A^{(2,0)}} - \frac{\sigma_S^{(2,2)}}{\sigma_S^{(2,0)}} - \frac{\sigma_S^{(2,1)}}{\sigma_S^{(2,0)}} \left[\frac{\sigma_A^{(2,1)}}{\sigma_A^{(2,0)}} - \frac{\sigma_S^{(2,1)}}{\sigma_S^{(2,0)}} \right]. \quad (4.8)$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit stellt sich heraus, daß $A_{\text{FB},2}^{(2p)}$ infrarot-endlich ist und somit numerisch ausgewertet kann. Dies ist nicht von vorne herein klar.

Allgemein ist die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie eine IR -sichere Observable und somit in jeder Ordnung der Störungsreihe endlich. Gleichung (4.5) ist divergenz-

frei [JLZ82]. Insbesondere sind $A_{\text{FB},1}^{(2p)}$ (4.7) und die Kombination

$$\frac{\sigma_A^{(3,1)}}{\sigma_A^{(2,0)}} - \frac{\sigma_S^{(3,1)}}{\sigma_S^{(2,0)}}$$

jeweils bereits einzeln betrachtet endlich und nicht erst nach Addition [CS99].

Die zweite Zeile in Gleichung (4.6) besteht aus der Multiplikation des totalen Wirkungsquerschnitts zur $\mathcal{O}(\alpha_s)$, welcher IR -endlich ist (Kinoshita-Lee-Nauenberg-Theorem) und $A_{\text{FB},1}$ (ebenfalls IR -endlich).

Somit folgt, daß auch die erste Zeile in (4.6) keine $\frac{1}{\epsilon}$ -Pole besitzt, da die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie eine infrarot-sichere Observable ist. Es ist allerdings derzeit nicht klar, ob man diese Behauptung analytisch zeigen kann. Zu diesem Zweck müsste man die Phasenraumintegrationen in den 3- und 4-Partonbeiträgen analytisch ausführen und anschließend die Pole explizit identifizieren.

Es stellt sich jedoch heraus, daß die Kombination aus Gleichung (4.8) endlich ist. Nach Umgruppierung der unterschiedlichen Beiträge in (4.6) muss die Differenz

$$A_{\text{FB},2} - A_{\text{FB},2}^{(2p)},$$

welche im Wesentlichen von den 3- und 4-Parton-Beiträgen abhängig ist, ebenfalls IR -endlich sein.

In [GGG05] wird die Kürzung der Infrarot-Divergenzen in Observablen zwischen den Beiträgen führender (LO), nächst-führender (NLO) und nächst-nächst-führender (NNLO) Ordnung der Störungsreihe im Rahmen des Dipol-Subtraktionsformalismus [CS97, CDST02] besprochen. Der Dipol-Subtraktionsformalismus liefert eine eindeutige Vorschrift zum Kürzen der Infrarot-Divergenzen in NLO. Hier müssen nun LO-Amplituden nicht nur mit NLO-, sondern auch mit NNLO-Beiträgen kombiniert werden. Dies führt zu einer Übersubtraktion der IR -divergenten Terme [GGG05]. Die Lösung dieses Problems ist ein wichtiger Baustein in der Berechnung von Observablen, wie zum Beispiel der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie, auf NNLO-Niveau.

Der $2p$ -Beitrag zu A_{FB} bezogen auf die Quark-Richtung, welcher hier berechnet wird, ist ebenso zur Berechnung von QCD -Korrekturen zu Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie bezüglich der Thrust-Richtung zu verwenden. Für 2-Teilchen-Endzustände sind die Quark- und die Thrust-Richtung auf Parton-Niveau identisch.

Die Gleichungen (4.7) und (4.8) sowie der reine 2-Parton-Beitrag zum totalen und zum antisymmetrischen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_A^{(2p)} = \sigma_A^{(2,0)} + \sigma_A^{(2,1)} + \sigma_A^{(2,2)}, \quad (4.9)$$

$$\sigma_S^{(2p)} = \sigma_S^{(2,0)} + \sigma_S^{(2,1)} + \sigma_S^{(2,2)} \quad (4.10)$$

werden nun mit Hilfe der Formfaktoren näher untersucht.

In der Born-Amplitude aus Abbildung 2.2 werden der Z - Q - $\bar{Q}$ - sowie der γ - Q - $\bar{Q}$ -Vertex durch die Formfaktor-Parametrisierungen aus (3.4) und (3.5) ersetzt. Die anschließende Rechnung verläuft komplett analog zu der im Born-Fall.

Die sich ergebenden Kontraktionen zwischen den Lorentz-Indizes der Elektron-Positron-Spur und der $Q\bar{Q}$ -Spur sowie die Spuren selbst werden in $D = 4$ Dimensionen ausgeführt. Die Behandlung des einzelnen γ_5 , welches in der Interferenz der Vektor- und Axialvektoranteile der Spuren auftritt, ist somit problemlos.

Aufgrund der Dirac-Gleichung für masselose Elektronen im Anfangszustand fällt der Beitrag proportional zu G_2 in der Bestimmung des differentiellen Wirkungsquerschnitts heraus. Nach der Phasenraumintegration über den 2-Parton-Endzustand erhält man für den antisymmetrischen Wirkungsquerschnitt:

$$\begin{aligned} \sigma_A^{(2p)} = & \frac{N_c}{8\pi} \frac{s}{D_Z} \beta^2 a_e^Z a_Q^Z \left\{ \left[v_e^Z v_Q^Z + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m_Z^2}{s} \right) v_e^\gamma v_Q^\gamma \right] (F_1^* G_1 + F_1 G_1^*) \right. \\ & \left. + i \frac{m_Z \Gamma_Z}{2s} v_Q^\gamma v_e^\gamma (F_1 G_1^* - F_1^* G_1) \right\}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

Da $\Gamma_Z \sim \mathcal{O}(e^2)$ ist der letzte Term in (4.11) formal von der Ordnung e^6 und somit von höherer Ordnung in der elektroschwachen Kopplung. Dieser Term stellt eine gemischte Korrektur in α_s und e dar. Da hier nur reine QCD -Korrekturen betrachtet werden, wird er im folgenden vernachlässigt. Setzt man die Born-Resultate für die Formfaktoren ein ($F_1^{\text{Born}} = G_1^{\text{Born}} = 1$), so geht (4.11) direkt in Gleichung (2.9) über. Der symmetrische Wirkungsquerschnitt lautet in Abhängigkeit von den Formfaktoren:

$$\begin{aligned} \sigma_S^{(2p)} = & \frac{N_c}{24\pi} \frac{1}{s} \beta (v_e^\gamma v_Q^\gamma)^2 \mathcal{W} + \frac{N_c}{12\pi} \frac{s}{D_Z} \beta \left(1 - \frac{m_Z^2}{s} \right) v_e^\gamma v_Q^\gamma v_e^Z v_Q^Z \mathcal{W} \\ & + \frac{N_c}{24\pi} \frac{s}{D_Z} \beta \left[(a_e^Z)^2 + (v_e^Z)^2 \right] \left[(v_Q^Z)^2 \mathcal{W} + 2\beta^2 (a_Q^Z)^2 (G_1 G_1^*) \right], \end{aligned} \quad (4.12)$$

wobei

$$\mathcal{W} = (3 - \beta^2) (F_1 F_1^*) + \beta^2 (F_1 F_2^* + F_1^* F_2) + \frac{\beta^4}{1 - \beta^2} (F_2 F_2^*).$$

Analog zu (4.11) kann man in Gleichung (4.12) den totalen Wirkungsquerschnitt auf Born-Niveau ablesen. Sowohl in (4.11) als auch in (4.12) kann jeder Term eindeutig entweder der quadrierten Photonamplitude, der quadrierten Z -Amplitude oder der γ - Z -Interferenz zugeordnet werden (vgl. Kapitel 2).

Setzt man die Entwicklung der Formfaktoren aus den Gleichungen (3.49)-(3.51) in obige Formeln ein, so erhält man $\sigma_A^{(2p)}$ und $\sigma_S^{(2p)}$ als Reihe in der starken Kopplung. Eine Darstellung des totalen Wirkungsquerschnitts in der Form

$$\begin{aligned} \sigma_S^{(2p)} = & \sigma_S^{(2,0,\gamma)} \left[1 + \sigma_S^{(2,1,\gamma)} + \sigma_S^{(2,2,\gamma)} \right] + \sigma_S^{(2,0,Z)} \left[1 + \sigma_S^{(2,1,Z)} + \sigma_S^{(2,2,Z)} \right] \\ & + \sigma_S^{(2,0,\gamma Z)} \left[1 + \sigma_S^{(2,1,\gamma Z)} + \sigma_S^{(2,2,\gamma Z)} \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

bietet sich an. Der Index „ γ “ kennzeichnet die Terme, welche aus der quadrierten Photon-Amplitude stammen, entsprechend „ Z “ die aus der quadrierten Z -Amplitude und „ γZ “ die aus der Photon- Z -Interferenz. Die Terme der $\mathcal{O}(\alpha_s)$ und $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ sind analog zur Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie auf die Born-Anteile normiert. Der Vergleich von Gleichung (4.13) mit (4.10) liefert:

$$\sigma_S^{(2,0)} = \sigma_S^{(2,0,\gamma)} + \sigma_S^{(2,0,Z)} + \sigma_S^{(2,0,\gamma Z)}, \quad (4.14)$$

$$\sigma_S^{(2,1)} = \sigma_S^{(2,0,\gamma)} \sigma_S^{(2,1,\gamma)} + \sigma_S^{(2,0,Z)} \sigma_S^{(2,1,Z)} + \sigma_S^{(2,0,\gamma Z)} \sigma_S^{(2,1,\gamma Z)}, \quad (4.15)$$

$$\sigma_S^{(2,2)} = \sigma_S^{(2,0,\gamma)} \sigma_S^{(2,2,\gamma)} + \sigma_S^{(2,0,Z)} \sigma_S^{(2,2,Z)} + \sigma_S^{(2,0,\gamma Z)} \sigma_S^{(2,2,\gamma Z)}. \quad (4.16)$$

Ausgedrückt durch die Formfaktoren lauten die $\sigma_S^{(2,i,j)}$, $i = 0, 1, 2$, $j = \gamma, Z, \gamma Z$:

$$\sigma_S^{(2,0,\gamma)} = \frac{N_c}{24\pi} \frac{1}{s} \beta (v_e^\gamma v_Q^\gamma)^2 (3 - \beta^2), \quad (4.17)$$

$$\sigma_S^{(2,1,\gamma)} = a_s \left\{ 2\text{Re} F_1^{(1\ell)} + \frac{2\beta^2}{3 - \beta^2} \text{Re} F_2^{(1\ell)} \right\}, \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_S^{(2,2,\gamma)} = & a_s^2 \left\{ \frac{2\beta^2}{3 - \beta^2} \left[\text{Re} F_2^{(2\ell)} + \text{Re} F_1^{(1\ell)} \text{Re} F_2^{(1\ell)} + \pi^2 \text{Im} F_1^{(1\ell)} \text{Im} F_2^{(1\ell)} \right] \right. \\ & + \frac{\beta^4}{(3 - \beta^2)(1 - \beta^2)} \left[\text{Re}^2 F_2^{(1\ell)} + \pi^2 \text{Im}^2 F_2^{(1\ell)} \right] \\ & \left. + \text{Re}^2 F_1^{(1\ell)} + \pi^2 \text{Im}^2 F_1^{(1\ell)} + 2\text{Re} F_1^{(2\ell)} \right\}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\sigma_S^{(2,0,Z)} = \frac{N_c}{24\pi} \frac{s}{D_Z} \beta \left[(a_e^Z)^2 + (v_e^Z)^2 \right] \left[2 (a_Q^Z)^2 \beta^2 + (v_Q^Z)^2 (3 - \beta^2) \right], \quad (4.20)$$

$$\sigma_S^{(2,1,Z)} = \frac{(v_Q^Z)^2 (3 - \beta^2) \sigma_S^{(2,1,\gamma)} + 4a_s (a_Q^Z)^2 \beta^2 \text{Re} G_1^{(1\ell)}}{2 (a_Q^Z)^2 \beta^2 + (3 - \beta^2) (v_Q^Z)^2}, \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \sigma_S^{(2,2,Z)} = & \frac{1}{2 (a_Q^Z)^2 \beta^2 + (3 - \beta^2) (v_Q^Z)^2} \left\{ (v_Q^Z)^2 (3 - \beta^2) \sigma_S^{(2,2,\gamma)} \right. \\ & \left. + 4a_s^2 (a_Q^Z)^2 \beta^2 \text{Re} G_1^{(2\ell)} + 2a_s^2 (a_Q^Z)^2 \beta^2 \left[\text{Re}^2 G_1^{(1\ell)} + \pi^2 \text{Im}^2 G_1^{(1\ell)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\sigma_S^{(2,0,\gamma Z)} = \frac{N_c}{12\pi} \frac{s}{D_Z} \beta \left(1 - \frac{m_Z^2}{s} \right) v_e^\gamma v_Q^\gamma v_e^Z v_Q^Z (3 - \beta^2), \quad (4.23)$$

$$\sigma_S^{(2,1,\gamma Z)} = \sigma_S^{(2,1,\gamma)}, \quad (4.24)$$

$$\sigma_S^{(2,2,\gamma Z)} = \sigma_S^{(2,2,\gamma)}. \quad (4.25)$$

In die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie geht ausser dem totalen auch der antisymmetrische Wirkungsquerschnitt ein. Die einzelnen Terme aus Gleichung (4.9) in Formfaktoren lauten:

$$\sigma_A^{(2,0)} = \frac{N_c}{4\pi} \frac{s}{D_Z} \beta^2 a_e^Z a_Q^Z \left[v_e^Z v_Q^Z + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m_Z^2}{s} \right) v_e^\gamma v_Q^\gamma \right]. \quad (4.26)$$

$$\sigma_A^{(2,1)} = \sigma_A^{(2,0)} a_s \left[\text{Re} F_1^{(1\ell)} + \text{Re} G_1^{(1\ell)} \right], \quad (4.27)$$

$$\sigma_A^{(2,2)} = \sigma_A^{(2,0)} a_s^2 \left[\text{Re} F_1^{(2\ell)} + \text{Re} G_1^{(2\ell)} + \text{Re} F_1^{(1\ell)} \text{Re} G_1^{(1\ell)} + \pi^2 \text{Im} F_1^{(1\ell)} \text{Im} G_1^{(1\ell)} \right]. \quad (4.28)$$

Auf 2-Schleifen-Niveau setzt sich der Axialvektor-Formfaktor $G_1^{(2\ell)}$ aus Typ-A- und Typ-B-Beiträgen zusammen (vgl. Gleichung (3.54)). Diese Unterscheidung macht sich nur in $\sigma_A^{(2,2)}$ und $\sigma_S^{(2,2,Z)}$ bemerkbar; alle restlichen Beiträge sind davon unbeeinflusst.

Es ist sinnvoll, die Typ-B-Beiträge aus den verschiedenen, oben definierten Wirkungsquerschnitten abzuspalten und im weiteren Verlauf immer getrennt zu diskutieren. Die Notation ist analog zu der bei den Formfaktoren gewählt: In den mit dem Index „A“ versehenen Grössen tragen nur nicht-anomale Amplituden bei, entsprechend kennzeichnet der Index „B“ die von den Anomalieamplituden stammenden Terme. Man erhält für $\sigma_A^{(2,2)}$:

$$\sigma_A^{(2,2)} = \sigma_A^{(2,2,A)} + \sigma_A^{(2,2,B)} \quad (4.29)$$

mit

$$\sigma_A^{(2,2,A)} = \sigma_A^{(2,2)} (G_1^{(2\ell)} \rightarrow G_1^{(2\ell,A)}), \quad (4.30)$$

$$\sigma_A^{(2,2,B)} = \sigma_A^{(2,0)} a_s^2 \text{Re} G_1^{(2\ell,B)} \quad (4.31)$$

und $G_1^{(2\ell,A)}$, $G_1^{(2\ell,B)}$ wie in Kapitel 3.2 definiert. Entsprechend erhält man für $\sigma_S^{(2,2,Z)}$:

$$\sigma_S^{(2,2,Z)} = \sigma_S^{(2,2,Z,A)} + \sigma_S^{(2,2,Z,B)} \quad (4.32)$$

wobei

$$\sigma_S^{(2,2,Z,A)} = \sigma_S^{(2,2,Z)} (G_1^{(2\ell)} \rightarrow G_1^{(2\ell,A)}), \quad (4.33)$$

$$\sigma_S^{(2,2,Z,B)} = \frac{4 a_s^2 (a_Q^Z)^2 \beta^2 \text{Re} G_1^{(2\ell,B)}}{2 (a_Q^Z)^2 \beta^2 + (3 - \beta^2) (v_Q^Z)^2}. \quad (4.34)$$

Die Aufteilung in Typ A und Typ B setzt sich auch in der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie fort. Der Vollständigkeit halber wird hier der Typ-B-Beitrag, welcher sich aus Gleichung (4.8) ergibt, angegeben:

$$A_{\text{FB},2}^{(2p,B)} = \frac{\sigma_A^{(2,2,B)}}{\sigma_A^{(2,0)}} - \frac{\sigma_S^{(2,0,Z)} \sigma_S^{(2,2,Z,B)}}{\sigma_S^{(2,0)}}. \quad (4.35)$$

Einsetzen von Gleichung (4.31) und (4.34) in (4.35) liefert:

$$A_{\text{FB},2}^{(2p,B)} = a_s^2 \text{Re} G_1^{(2\ell,B)} \left[\frac{(3 - \beta^2) (v_Q^Z)^2 - 2 (a_Q^Z)^2 \beta^2}{(3 - \beta^2) (v_Q^Z)^2 + 2 (a_Q^Z)^2 \beta^2} \right]. \quad (4.36)$$

Für masselose Quarks im Endzustand ($\beta = 1$) gilt (siehe später):

$$G_1^{(2\ell,B)} = G_1^{(2\ell,B),\text{oo}} - G_1^{(2\ell,B),\text{mo}}.$$

Der Beitrag in (4.36) wurde bereits in [AL93] berechnet. Dort wurde das Ergebnis aus [KK90] für $G_1^{(2\ell,B),\text{mo}} - G_1^{(2\ell,B),\text{oo}}$ verwendet, für das auch in dieser Arbeit Übereinstimmung mit [KK90] gefunden wurde (vgl. Kapitel 3). Das Resultat für $A_{\text{FB},2}^{(2p,B)}$ aus [AL93] wird somit hier reproduziert.

Den Typ-A-Anteil zur Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie erhält man analog zu den Wirkungsquerschnitten durch die Ersetzung $G_1^{(2\ell)} \rightarrow G_1^{(2\ell,A)}$ in Gleichung (4.8).

4.2 σ_S an der Schwelle

Der totale Wirkungsquerschnitt in gegebener Ordnung der Störungstheorie ist gemäß dem Kinoshita-Lee-Nauenberg-Theorem infrarot-endlich, wenn man die virtuellen und die reellen Korrekturen addiert. Der hier betrachtete reine 2-Parton-Beitrag zu σ_S ist demzufolge nicht endlich. Durch Einsetzen der analytisch fortgesetzten Formfaktoren, welche noch IR -Divergenzen beinhalten, zeigt sich dieses Verhalten explizit. Lediglich der Typ-B-Beitrag zu $\sigma_S^{(2p)}$ (4.34) ist infrarot-endlich.

Nähert man sich der Schwelle ($s \sim 4m^2$, $\beta \rightarrow 0$) für die Paarproduktion schwerer Quarks an, so steht der Abstrahlung eines reellen Gluons immer weniger Phasenraum zur Verfügung („Reelles Gluon“ steht hier stellvertretend für ein oder mehrere von den schweren Quarks reell abgestrahlten Partonen). Aus diesem Grund erwartet man eine Unterdrückung der IR -Singularitäten im reinen $2p$ -Beitrag zum totalen

Wirkungsquerschnitt. Einsetzen der Schwellenentwicklungen der Formfaktoren in die einzelnen Beiträge zum totalen Wirkungsquerschnitt ergibt in der $\mathcal{O}(\alpha_s)$:

$$\begin{aligned}\sigma_S^{(2,1,\gamma)} &= \sigma_S^{(2,1,\gamma Z)} \\ &= a_s \left[\frac{C_F \pi^2}{\beta} - 8 C_F + C_F \pi^2 \beta + \beta^2 \left(\frac{8 C_F}{3 \varepsilon} - \frac{4 C_F}{9} \right) \right] + \mathcal{O}(\beta^3),\end{aligned}\quad (4.37)$$

$$\sigma_S^{(2,1,Z)} = \sigma_S^{(2,1,\gamma)} + \beta^2 \frac{8 a_s C_F (a_Q^Z)^2}{3 (v_Q^Z)^2} + \mathcal{O}(\beta^3) \quad (4.38)$$

und in der $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$:

$$\begin{aligned}\sigma_S^{(2,2,\gamma)} &= \frac{a_s^2 C_F \pi^2}{3} \left\{ \frac{C_F \pi^2}{\beta^2} + \frac{1}{6 \beta} \left[4 T_F N_L [6(\ln_2 + \ln_b) - 5] - 144 C_F \right. \right. \\ &\quad + N_C [31 - 66(\ln_2 + \ln_b)] \left. \right] + \frac{1}{6 \pi^2} [88 T_F N_L + 32 T_F (11 - \pi^2) \\ &\quad + N_C (-72 \pi^2 \ln_b - 192 \pi^2 \ln_2 - 468 \zeta_3 + 179 \pi^2 - 302) \\ &\quad + C_F (-48 \pi^2 \ln_b + 96 \pi^2 \ln_2 + 702 - 72 \zeta_3 - 140 \pi^2 + 12 \pi^4)] \\ &\quad + \frac{\beta}{3} \left[\frac{6}{\varepsilon} (4 C_F - N_C) - T_F N_L (20 - 12 \ln_b - 12 \ln_2) \right. \\ &\quad \left. - C_F (48 \ln_2 + 48 \ln_b + 22) + N_C (34 + 63 \ln_2 + 27 \ln_b) \right] \\ &\quad \left. + \ln \left(\frac{m}{\mu} \right) \left[4 T_F (N_L + 1) - 11 N_C \right] \left(\frac{1}{\beta} - \frac{8}{\pi^2} + \beta \right) \right\} + \mathcal{O}(\beta^2),\end{aligned}\quad (4.39)$$

$$\sigma_S^{(2,2,Z,A)} = \sigma_S^{(2,2,\gamma)} + \frac{2 C_F \pi^2 a_s^2 (a_Q^Z)^2}{3 (v_Q^Z)^2} \left[C_F + \frac{\beta}{3} (11 N_C - 12 C_F - 4 T_F N_L) \right] + \mathcal{O}(\beta^2), \quad (4.40)$$

$$\sigma_S^{(2,2,\gamma Z)} = \sigma_S^{(2,2,\gamma)}. \quad (4.41)$$

Die $\frac{1}{\varepsilon}$ -Pole sind in der ersten Ordnung der starken Kopplung mit β^2 unterdrückt. In der $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ treten $\frac{1}{\varepsilon}$ - ($\frac{1}{\varepsilon^2}$ -) Pole erstmals in den Termen der Ordnung β (β^2) auf. Vernachlässigen aller Terme der $\mathcal{O}(\beta^n)$, $n > 0$, führt zum Verschwinden aller IR -Singularitäten. Jedoch wird eine numerische Auswertung des totalen Wirkungsquerschnitts an der Paarproduktionsschwelle schwerer Quarks durch den Austausch der Coulomb-Gluonen verhindert. Die Coulomb-Gluonen führen zum Auftreten der $\frac{1}{\beta^2}$ - und $\frac{1}{\beta}$ -Terme (Coulomb-Singularitäten) in den Gleichungen (4.37) und (4.39), welche für $\beta \rightarrow 0$ divergieren (z.B. [Hoa97]). Dies deutet an, dass an der Schwelle die Berechnung des Wirkungsquerschnitts als Potenzreihenentwicklung in der starken Kopplung nicht mehr funktioniert. Wird $\beta < \alpha_s$ so ist α_s kein geeigneter Entwicklungsparameter mehr.

Erst die Aufsummierung der Coulomb-Terme liefert analytisch sinnvolle (divergenzfreie) Resultate, welche numerisch ausgewertet werden können [Hoa97].

Einschränkung der obigen Resultate auf den reinen Photonaustausch ($\sigma_S^{(2,2,\gamma)}$ und $\sigma_S^{(2,1,\gamma)}$) liefert übereinstimmende Resultate mit [Hoa97, CM98]. In [Hoa97] wird die auftretende IR -Divergenz mit einer fiktiven Photonmasse regularisiert. Die Ersetzung

$$\ln\left(\frac{\lambda}{M}\right) \rightarrow \frac{1}{2\varepsilon} \quad (4.42)$$

führt zu voller Übereinstimmung der angegebenen $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Terme [Ber05b].

In Gleichung (4.40) wurde nur der nicht-anomale Beitrag zu $\sigma_S^{(2,2,Z)}$ angegeben. Der anomale Anteil $\sigma_S^{(2,2,Z,B)}$ ist in Gleichung (4.34) gegeben.

Der Axialvektor-Formfaktor $G_1^{(2\ell,B)}$ ist eine von der physikalischen Problemstellung abhängige Linearkombination der Formfaktoren $G_1^{(2\ell,B),m_I m_A}$ ($m_I, m_A = 0, m$). Hier soll das massive Quark im Endzustand das top-Quark sein. Für Schwerpunktsenergien $\sqrt{s} \approx 2m_t$ wird die b-Quark-Masse ebenso wie die Masse der u, d, s und c -Quarks vernachlässigt.

Das Z -Boson koppelt an den Vektor- und Axialvektor-Flavour-Nicht-Singlettstrom (vgl. Gleichung (3.81)). Aufgrund des Furry-Theorems tragen die Vektoranteile der anomalen Amplituden nicht bei. Die Beiträge der masselosen u, d - und c, s -Quarks kürzen sich aufgrund der entgegengesetzten Axialvektorkopplungen in der Summation in (3.81) gegenseitig weg. Nur das (t, b) -Dublett liefert einen nicht-verschwindenden Beitrag zu $\sigma_S^{(2,2,Z,B)}$ (vgl. Gleichung (3.83)).

Der Formfaktor $G_1^{(2\ell,B)}$ in (4.34) ist somit gegeben zu:

$$G_1^{(2\ell,B)} = G_1^{(2\ell,B),\text{mm}} - G_1^{(2\ell,B),\text{om}}. \quad (4.43)$$

Explizite Ausdrücke für $G_1^{(2\ell,B),\text{mm}}$ und $G_1^{(2\ell,B),\text{om}}$, entwickelt an der Schwelle, finden sich in Anhang C. Der anomale Beitrag zum symmetrischen Wirkungsquerschnitt lautet:

$$\sigma_S^{(2,2,Z,B)} = a_s^2 C_F T_F \left[\frac{8}{3} (\pi^2 \ln_2 + \ln_2^2 - 3 \ln_2) - \frac{23}{18} \pi^2 \right] + \mathcal{O}(\beta^2). \quad (4.44)$$

Gleichung (4.44) ist infrarot-endlich.

μ in [GeV]	$\frac{m_Z}{2}$	m_Z	$2m_Z$	360	400	450	500
$N_F = N_L + 1$	5	5	5	6	6	6	6
$\alpha_s(\mu)$	0.1326	0.1187	0.1074	0.0990	0.0979	0.0966	0.0955

Tabelle 4.1: α_s ausgewertet an verschiedenen Energieskalen ausgehend von $\alpha_s(m_Z) = 0.1187$.

4.3 A_{FB} für b -Quarks auf der Z -Resonanz

Im Gegensatz zum totalen Wirkungsquerschnitt ist der 2-Parton-Beitrag zur Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie eines schweren Quarks (Gleichung (4.7) und (4.8)) für beliebige Schwerpunktsenergien infrarot-endlich und es kann eine numerische Auswertung durchgeführt werden.

In der folgenden Auswertung werden die $2p$ -Beiträge zu A_{FB} in den verschiedenen Ordnungen der Störungsreihe ($A_{\text{FB},0}^{(2p)}$, $A_{\text{FB},1}^{(2p)}$ und $A_{\text{FB},2}^{(2p)}$) jeweils einzeln berechnet. Aus diesen lässt sich der volle 2-Parton-Beitrag zur Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie in den Ordnungen α_s und α_s^2 angeben:

$$A_{\text{FB}}^{(2p)}(\alpha_s) = A_{\text{FB},0} \left(1 + A_{\text{FB},1}^{(2p)} \right),$$

$$A_{\text{FB}}^{(2p)}(\alpha_s^2) = A_{\text{FB},0} \left(1 + A_{\text{FB},1}^{(2p)} + A_{\text{FB},2}^{(2p,A)} + A_{\text{FB},2}^{(2p,B)} \right).$$

Im folgenden werden zwei unterschiedliche Fälle betrachtet:

- $A_{\text{FB}}^{b\bar{b}}$: Zum Prozess $e^+e^- \rightarrow b\bar{b}X$, ausgewertet auf der Z -Resonanz für massive b -Quarks wird der $2p$ -Beitrag zu A_{FB} bestimmt. Die Anomalie-Diagramme bilden in der Auswertung eine Ausnahme: Hier wird die Masse des bottom-Quarks null gesetzt (vgl. später).
- $A_{\text{FB}}^{t\bar{t}}$: Der 2-Parton-Beitrag zur Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie in der Reaktion $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}X$, ausgewertet für Schwerpunktsenergien im kinematischen Bereich $4m_t^2 < s \leq (500 \text{ GeV})^2$. Hier werden alle Massen außer der top-Masse null gesetzt.

Weiterhin soll in beiden Fällen die Abhängigkeit von der Renormierungsskala untersucht werden. Zu diesem Zweck benötigt man die starke Kopplungskonstante an unterschiedlichen Energieskalen. Tabelle 4.1 zeigt die verwendeten Werte auf der Z -Resonanz sowie einige Werte oberhalb der top-Paarproduktionsschwelle. Diese ergeben sich aus der Evolution von α_s ausgehend von $\alpha_s(m_Z) = 0.1187$ mit Hilfe der QCD - β -Funktion im $\overline{\text{MS}}$ -Schema auf 2-Schleifen-Niveau [ESW96]:

$$\beta(\alpha_s) = -b\alpha_s^2(1 + b'\alpha_s), \quad (4.45)$$

mit

$$b = \frac{1}{12\pi} (33 - 2N_F), \quad (4.46)$$

$$b' = \frac{1}{2\pi} \frac{153 - 19N_F}{33 - 2N_F}. \quad (4.47)$$

Ausgehend von der Renormierungsgruppengleichung

$$\mu^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu^2} = \beta(\alpha_s)$$

erhält man [ESW96]:

$$\frac{1}{\alpha_s(\mu_1)} - \frac{1}{\alpha_s(\mu_2)} + b' \ln \left(\frac{\alpha_s(\mu_1)}{1 + b' \alpha_s(\mu_1)} \right) - b' \ln \left(\frac{\alpha_s(\mu_2)}{1 + b' \alpha_s(\mu_2)} \right) = 2b \ln \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right). \quad (4.48)$$

Diese Gleichung setzt die Kopplungskonstante α_s an verschiedenen Skalen μ_1 und μ_2 in Bezug zueinander.

Kennt man die QCD -Kopplung an einer Skala, zum Beispiel $\alpha_s(m_Z) = 0.1187$, so erhält man aus (4.48) α_s an der gesuchten Skala (zum Beispiel $\mu_2 = 2m_Z$). In (4.48) ist N_F gegeben durch die Anzahl der Quarks, welche bei betrachteter Schwerpunktsenergie (nicht Skala μ) reel produziert werden können: Für $\sqrt{s} = m_Z$ ist $N_F = 5$, für $\sqrt{s} > m_t$ ist $N_F = 6$.

In Tabelle 4.1 sind Werte für α_s oberhalb der $t\bar{t}$ -Produktionsschwelle ($N_F = 6$) ausgehend von $\alpha_s(m_Z)$ ($N_F = 5$) angegeben. In diesem Fall wird die starke Kopplung an der Skala $\mu = m_t$ mit Hilfe der folgenden Bedingung aneinander angepasst [BW82]:

$$\alpha_s(\mu = m_t, N_F = 5) = \alpha_s(\mu = m_t, N_F = 6). \quad (4.49)$$

Korrekturen höherer Ordnung in α_s in Gleichung (4.49) können hier vernachlässigt werden.

Neben der starken Kopplungskonstante an den unterschiedlichen Skalen werden folgende numerischen Werte im weiteren Verlauf der Auswertung benutzt:

starke Kopplung :	$\alpha_s(m_Z) = 0.1187$,
schwacher Mischungswinkel :	$\sin^2 \vartheta_W = 0.2315$,
Z -Masse :	$m_Z = 91.187 \text{ GeV}$,
Z -Breite :	$\Gamma_Z = 2.495 \text{ GeV}$,
bottom-Quarkmasse :	$m_b = 5 \text{ GeV}$,
top-Quarkmasse :	$m_t = 178 \text{ GeV}$.

	$A_{\text{FB},0}^{b\bar{b}}$	$A_{\text{FB},1}^{b\bar{b}}$	$A_{\text{FB},2}^{b\bar{b},A}$	$A_{\text{FB},2}^{b\bar{b},B}$	$A_{\text{FB}}^{b\bar{b}}(\alpha_s)$	$A_{\text{FB}}^{b\bar{b}}(\alpha_s^2)$
$\mu = \frac{m_Z}{2}$	0.10329	-0.00036	-0.00008	0.00114	0.10325	0.10336
$\mu = m_Z$	0.10329	-0.00032	-0.00010	0.00091	0.10326	0.10334
$\mu = 2m_Z$	0.10329	-0.00029	-0.00010	0.00074	0.10326	0.10333

Tabelle 4.2: 2-Partonbeiträge der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie für bottom-Quarks auf der Z -Resonanz. Es zeigt sich eine nur schwache Abhängigkeit von der Renormierungsskala μ . Der Born-Beitrag stimmt für $\mu = m_Z$ mit dem numerischen Wert in [RvN98] überein (unter Verwendung der gleichen numerischen Werte für die eingehenden Parameter).

In der numerischen Auswertung der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie $A_{\text{FB}}^{b\bar{b}}$ auf der Z -Resonanz werden der reine Photonaustausch und die γ - Z -Interferenz vernachlässigt (vgl. Kapitel 2).

Wie bereits gesagt wird in den Anomalie-Beiträgen die b -Masse vernachlässigt. Der Formfaktor $G_1^{(2\ell,B)}$, welcher in die numerische Auswertung von Gleichung (4.36) eingeht, lautet nach Summation über die beiden Komponenten des Isospindubletts:

$$G_1^{(2\ell,B)} = G_1^{(2\ell,B),\text{oo}} - G_1^{(2\ell,B),\text{mo}},$$

wobei $G_1^{(2\ell,B),\text{mo}}$ mit $m = m_t$ ausgewertet wird. Da die Schwerpunktsenergie $s = m_Z^2$ kleiner ist als die top-Paarproduktionsschwelle, muss für den Formfaktor $G_1^{(2\ell,B),\text{mo}}$ die in Anhang C gegebene rein reelle Darstellung für $0 < s < 4m^2$ benutzt werden. In Gleichung (4.36) wird $\beta = \sqrt{1 - \frac{4m_b^2}{s}}$ benutzt. Dies führt im numerischen Vergleich mit [AL93] zu kleinen, vernachlässigbaren Abweichungen.

Die Ungleichbehandlung der bottom-Quarkmasse in den anomalen und nicht-anomalen Amplituden ist möglich, weil die Typ-B-Beiträge eine eichinvariante Subklasse von Diagrammen bilden. Insgesamt führt dies zu einem vernachlässigbaren Fehler der $\mathcal{O}(\frac{m_b^2}{s})$ in der Berechnung der anomalen Anteile.

Tabelle 4.2 zeigt die numerischen Werte für die verschiedenen Beiträge zur Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie sowie $A_{\text{FB}}^{b\bar{b}}(\alpha_s)$ und $A_{\text{FB}}^{b\bar{b}}(\alpha_s^2)$ für $\sqrt{s} = m_Z$. Für die Renormierungsskala wurden die Werte $\mu = \frac{1}{2}m_Z, m_Z$ und $2m_Z$ benutzt. Man erkennt, daß die 1- und 2-Schleifenkorrekturen nahezu vernachlässigbar sind. Die Hauptkorrekturen zu A_{FB} auf der Z -Resonanz stammen aus den hier nicht betrachteten 3- und 4-Partonbeiträgen.

Entgegen der naiven Erwartung liefern die Anomaliebeiträge einen grösseren numerischen Wert zur gesamten Korrektur als die nicht-anomalen Beiträge, welche im Limes masseloser Quarks im Endzustand verschwinden. Die kleinen numerischen

Werte lassen sich somit durch die vergleichsweise kleine bottom-Masse gegenüber der Z -Masse erklären (Man befindet sich bereits nahe am Limes masseloser Quarks). Lediglich die anomalen Beiträge liefern für masselose auslaufende Quarks einen nicht-verschwindenden Beitrag, welcher in Tabelle 4.2 angegeben ist.

Das Verschwinden von $A_{\text{FB}}^{(2p)}(\alpha_s)(m \rightarrow 0)$ und der Typ-A-Anteile von $A_{\text{FB}}^{(2p)}(\alpha_s^2)(m \rightarrow 0)$ ist seit langem bekannt (zum Beispiel [JLZ82], [AL93]). Im Limes masseloser Quarks werden die Formfaktoren F_1 und G_1 identisch zueinander und F_2 verschwindet. Dies ist durch die Helizitätserhaltung der Eichboson-Wechselwirkungen für masselose Quarks zu verstehen. Diese wichtige Eigenschaft wird durch die verwendete Vorschrift für γ_5 respektiert. Bereits ohne explizites Einsetzen der Resultate für die Formfaktoren aus Anhang C lässt sich aus den Formeln für die Wirkungsquerschnitte das erwartete Verhalten ableiten.

4.4 A_{FB} für top-Quarks oberhalb der $t\bar{t}$ -Paarproduktionsschwelle

Als nächstes folgt die Auswertung der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie für top-Quarks im Endzustand für Schwerpunktsenergien zwischen 360 GeV (knapp oberhalb der top-Paarproduktionsschwelle) und 500 GeV . (Dies sind mögliche Schwerpunktsenergien eines zukünftigen e^+e^- -Linearbeschleunigers.) Hier werden der reine Photon-Austausch und die γ - Z -Interferenz nicht vernachlässigt. Der Anomaliefaktor $G_1^{(2\ell,B)}$ lautet (vgl. hierzu die Diskussion für die Auswertung des anomalen Beitrags zum symmetrischen Wirkungsquerschnitt an der Schwelle):

$$G_1^{(2\ell,B)} = G_1^{(2\ell,B),\text{mm}} - G_1^{(2\ell,B),\text{om}}.$$

Für $\sqrt{s} > 360 \text{ GeV}$ ist die b -Masse vernachlässigbar.

Abbildung 4.1 zeigt den Born-Beitrag zur Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie für top-Quarks für unterschiedliche top-Massen. Mit steigender Schwerpunktsenergie ist ein deutlicher Anstieg (des Absolutwerts) der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie zu erkennen.

Die Abbildungen 4.2-4.4 zeigen die unterschiedlichen im Vorfeld definierten Beiträge der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie $A_{\text{FB}}^{t\bar{t}}$. Neben der Kurve für $\mu = \sqrt{s}$ werden jeweils zusätzlich jene für $\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}$ und für $\mu = 2\sqrt{s}$ dargestellt. In der numerischen Auswertung wird eine laufende Kopplung $\alpha_s(\mu)$ benutzt. Die verschiedenen Beiträge sind jeweils auf $A_{\text{FB},0}^{t\bar{t}}$ normiert. Somit liefert zum Beispiel $A_{\text{FB},1}^{t\bar{t}}$ eine Korrektur zwischen 1% und 4% zum Born-Beitrag und nicht zur gesamten Vorwärts-Rückwärts-

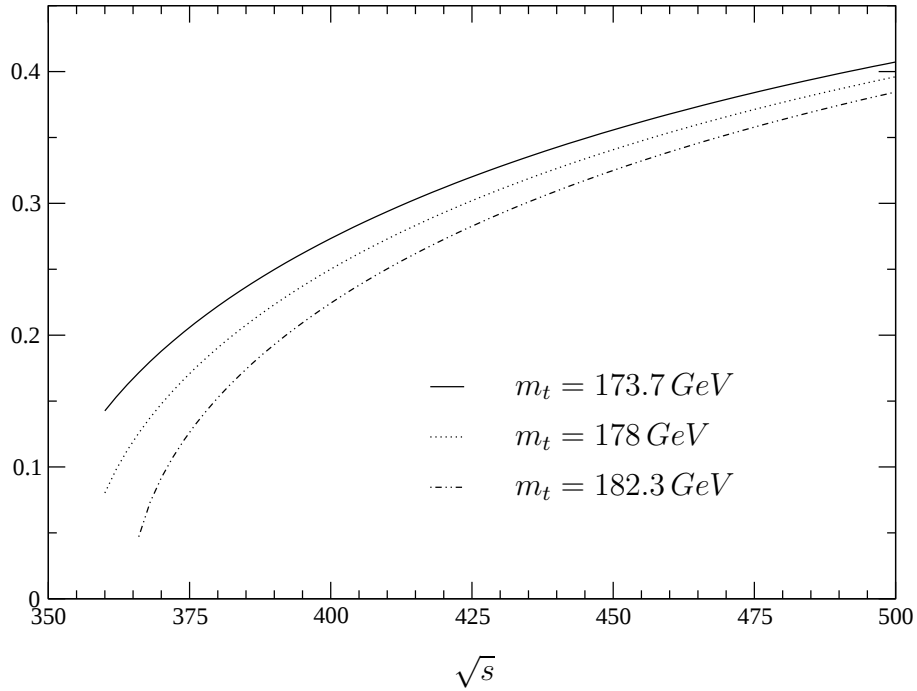


Abbildung 4.1: $A_{\text{FB},0}^{t\bar{t}}$ für $360\text{GeV} \leq \sqrt{s} \leq 500\text{GeV}$. $\mu = \sqrt{s}$. Für $\sqrt{s} = 500\text{GeV}$ wird hier Übereinstimmung mit dem numerischen Wert aus [RvN98] gefunden.

Asymmetrie. Dies gilt analog für die 2-Schleifenbeiträge.

Die einzelnen Beiträge zeigen eine unterschiedlich starke Abhängigkeit von der Renormierungsskala μ . Zur $\mathcal{O}(\alpha_s)$ wird diese komplett durch die Abhängigkeit der QCD -Kopplung bestimmt und ist durchaus erkennbar. In zweiter Ordnung der starken Kopplung existieren zusätzlich μ -abhängige Logarithmen. Hier ist die Abhängigkeit weit weniger stark ausgeprägt.

Die Anomalie-Beiträge sind nun numerisch klein gegenüber den nicht-anomalen Termen. Dies bestätigt die in der Literatur häufig gemachte Annahme und rechtfertigt die Vernachlässigung dieser Beiträge im Falle der $t\bar{t}$ -Produktion. Der Axialvektor-Formfaktor für top-Quarks im Endzustand wird für die numerische Auswertung wie in Gleichung (4.43) gegeben benutzt.

In Abb. 4.5 ist $A_{\text{FB}}^{(2p)}(\alpha_s^2)$ für die unterschiedlichen verwendeten Renormierungsskalen dargestellt. Die μ -Abhängigkeit ist numerisch extrem klein und auf der Figur nicht mehr zu erkennen.

Letztendlich ist in Abb. 4.6 der 2-Parton-Beitrag zur Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie auf Born-Niveau, auf 1- und auf 2-Schleifen-Niveau gezeigt. Die unterschiedlichen Beiträge haben einen sichtbaren Einfluß auf A_{FB} . Ob die hier bestimmten Schleifenkorrekturen gegenüber denen aus den 3- und 4-Parton-Endzuständen numerisch relevant sind oder nicht lässt sich an dieser Stelle nicht endgültig beantworten.

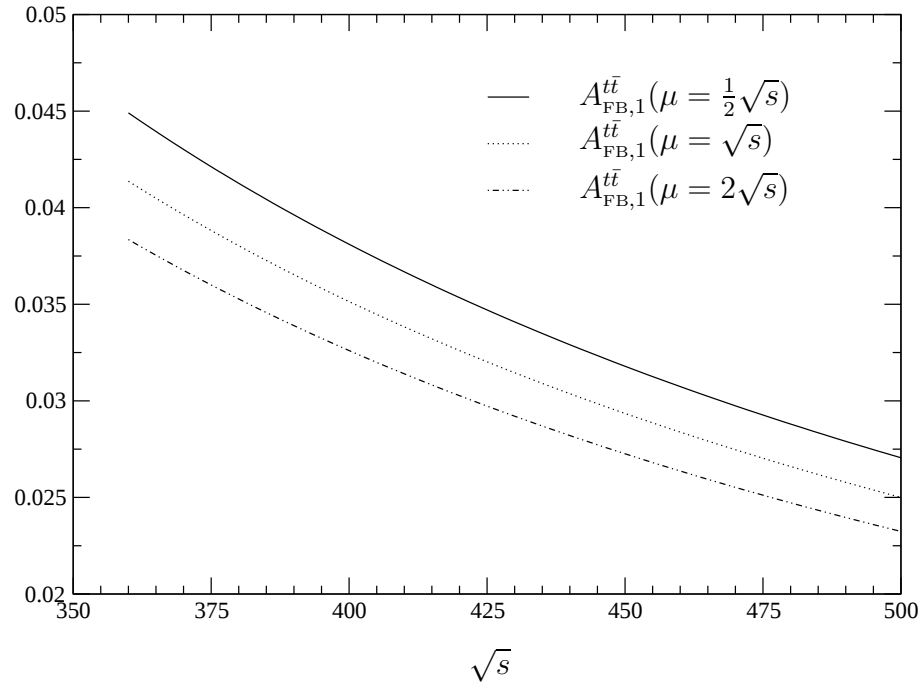


Abbildung 4.2: Vergleich von $A_{\text{FB},1}^{t\bar{t}}$ an unterschiedlichen Renormierungsskalen. $m_t = 178 \text{ GeV}$.

In den Abbildungen 4.2 und 4.3 ist ein deutlicher Anstieg der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie für Schwerpunktsenergien nahe der top-Paarproduktionsschwelle zu erkennen. Dieser ist auf die bereits diskutierten Coulomb-Terme im totalen Wirkungsquerschnitt zurück zu führen, die für $\beta \rightarrow 0$ singulär werden.

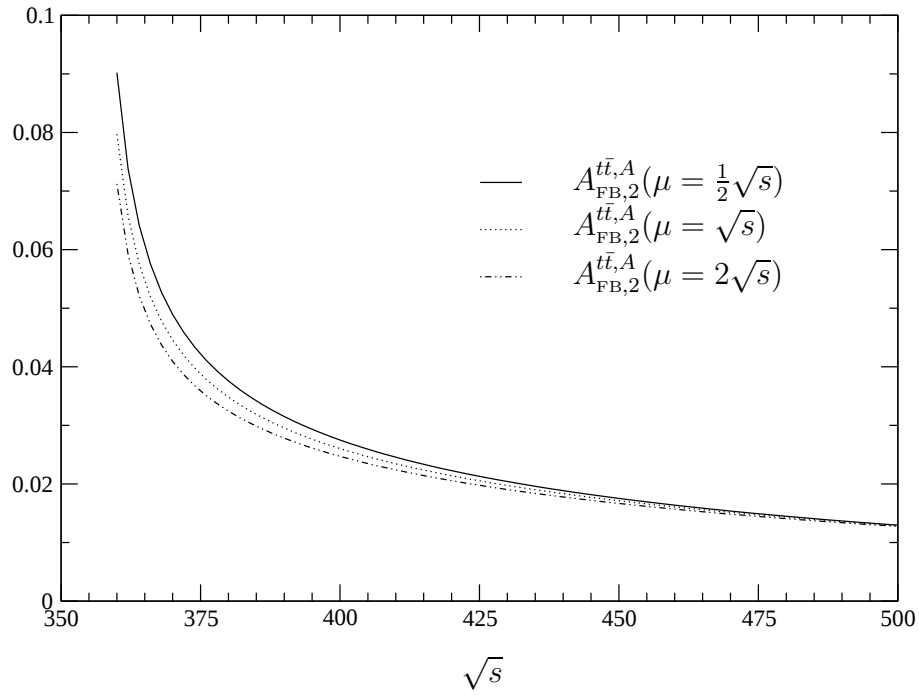


Abbildung 4.3: Vergleich von $A_{\text{FB},2}^{t\bar{t},A}$ an unterschiedlichen Renormierungsskalen.
 $m_t = 178 \text{ GeV}$

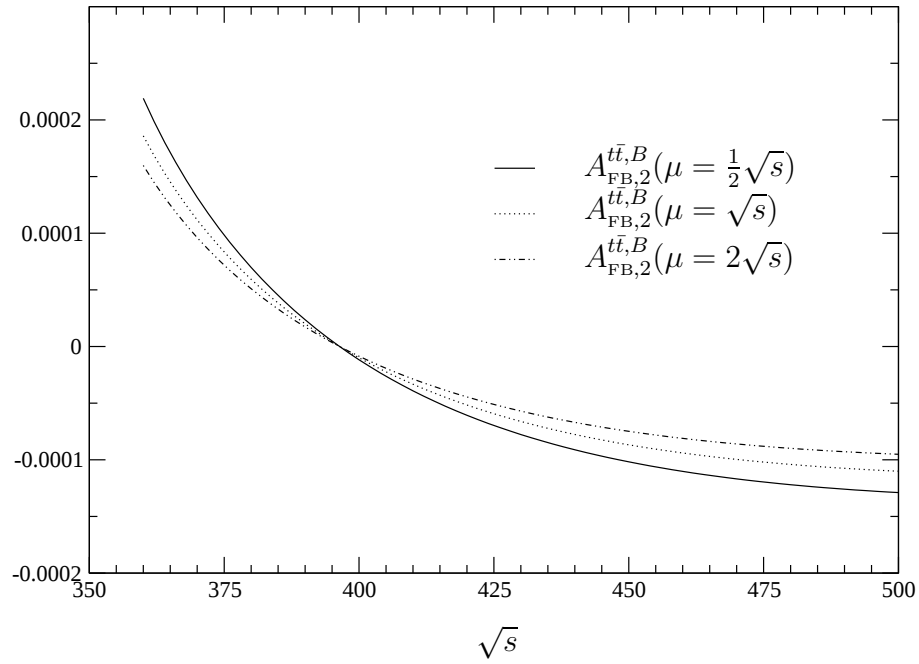


Abbildung 4.4: Vergleich von $A_{\text{FB},2}^{t\bar{t},B}$ an unterschiedlichen Renormierungsskalen.
 $m_t = 178 \text{ GeV}$.

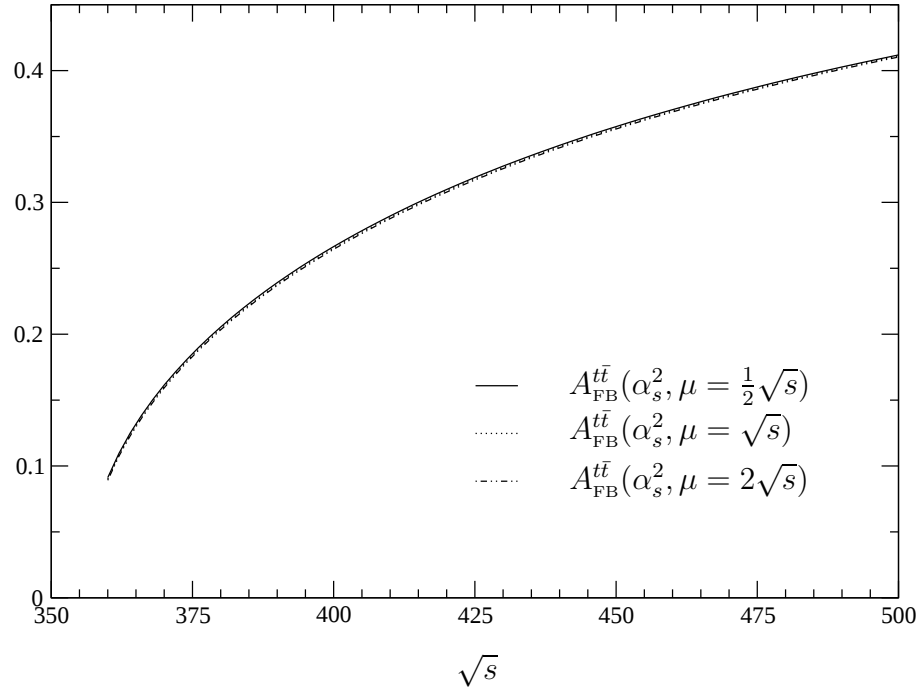


Abbildung 4.5: Vergleich von $A_{\text{FB}}^{t\bar{t}}(\alpha_s^2)$ an unterschiedlichen Renormierungsskalen ($m_t = 178 \text{ GeV}$). Die Renormierungsskalenabhängigkeit ist vernachlässigbar klein.

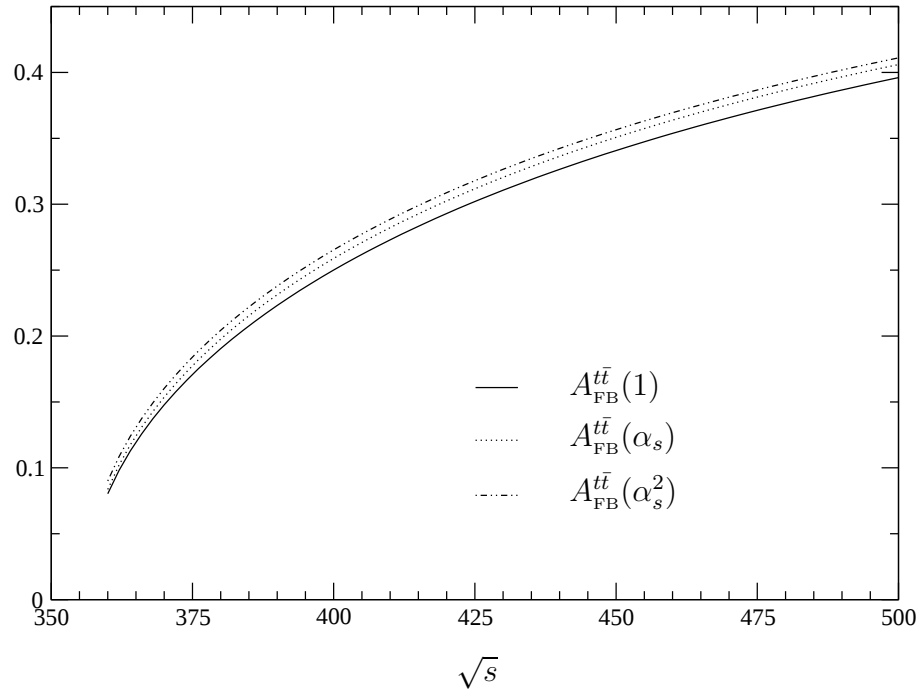


Abbildung 4.6: Vergleich von $A_{\text{FB}}^{t\bar{t}}$ in unterschiedlichen Ordnungen von α_s ($\mu = \sqrt{s}$, $m_t = 178 \text{ GeV}$).

Kapitel 5

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde die Streuamplitude des Prozesses

$$e^+e^- \rightarrow \gamma^*, Z^* \rightarrow Q\bar{Q} \quad (5.1)$$

bis zur Ordnung α_s^2 in der QCD -Kopplungskonstanten berechnet. Diese Amplitude ist in der niedrigsten Ordnung in den elektroschwachen Kopplungen durch die $\gamma^*Q\bar{Q}$ - und $Z^*Q\bar{Q}$ -Vertexfunktionen bestimmt. Diese Vertexfunktionen können mit Hilfe von zwei beziehungsweise vier dimensionslosen, CP -erhaltenden Formfaktoren parametrisiert werden. Diese Formfaktoren waren bisher nur in der Ordnung α_s bekannt und wurden zum Vergleich erneut bestimmt. Die exakten Beiträge in zweiter Ordnung der QCD -Kopplung wurden hier erstmalig vollständig berechnet.

Die Berechnung der Formfaktoren der 2-Schleifen-Vertexfunktionen mit einer internen Masse erfolgte in dimensioneller Regularisierung in $D = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen. Die auftretenden 2-Schleifen-Integrale wurden mit Hilfe der Integration-by-Parts-Identitäten, der Lorentz-Invarianz-Identitäten und des darauf aufbauenden Laporta-Algorithmus gelöst. Für die Renormierung der Ultraviolett-Divergenzen wurde ein Hybrid-Renormierungsschema benutzt: die Renormierung der starken Kopplung und der Gluon-Wellenfunktion erfolgte im $\overline{\text{MS}}$ -Schema, die Renormierung der Quarkmasse und der Quark-Wellenfunktion im on-shell-Schema.

Nach Renormierung der UV -Divergenzen enthalten die Formfaktoren noch IR -Divergenzen. Diese äußern sich als Pole in ε , dem Parameter der dimensionellen Regularisierung.

In der $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ tragen 2 Arten von Amplituden zur Vertexfunktion bei, in deren Berechnung unterschiedliche Vorschriften für die Matrix γ_5 in D Dimensionen verwendet wurden: die nicht-anomalen und die anomalen Amplituden. In der Berechnung der nicht-anomalen Amplituden wurde ein γ_5 verwendet, welches mit den γ_μ antikommutiert und für das $\gamma_5^2 = 1$ gilt. Für die anomalen Amplituden, welche ge-

geschlossene Quark-Schleifen beinhalten, wurde die Ersetzung $\gamma_\mu \gamma_5 \rightarrow \frac{i}{6} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma$ verwendet.

Die Konsistenz der Resultate wurde mit Hilfe der Ward-Identität zum Axialvektorstrom überprüft. Aufgrund der anomalen Amplituden tritt in der Ward-Identität die Adler-Bell-Jackiw-Anomalie auf. Die Verwendung eines nicht-antikommütierenden γ_5 in der Berechnung der anomalen Amplituden erforderte neben der Renormierung der UV -Divergenzen eine zusätzliche Renormierung dieser Beiträge, die die Eigenschaften eines anti-kommütierenden γ_5 in 4 Dimensionen wiederherstellt.

Die Überprüfung der Ward-Identität erforderte zusätzlich die Berechnung der Vertexfunktion zum pseudoskalaren Strom auf 2-Schleifen-Niveau sowie die Berechnung der mit der Adler-Bell-Jackiw-Anomalie assoziierten Vertexfunktion des pseudoskalaren Gluon-Operators $G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu}$. Der renormierte Formfaktor zum pseudoskalaren Strom findet über den Test der Ward-Identität hinaus weitere Anwendungen, zum Beispiel in der differentiellen Beschreibung der Ankopplung eines pseudoskalaren Higgs-Bosons an ein schweres Quark-Antiquark-Paar.

Weiterhin wurden die Formfaktoren in den physikalisch interessanten Grenzfällen $\frac{m^2}{s} \rightarrow 0$ und $s \approx 4m^2$ ausgewertet (s ist die Schwerpunktsenergie und m die Masse des schweren Quarks Q).

In der asymptotischen Entwicklung ($s \rightarrow \infty$) zeigen die Formfaktoren das erwartete Verhalten: die Axialvektor-Formfaktoren und die Vektor-Formfaktoren werden aufgrund der Helizitätserhaltung an den Eichboson-Vertizes identisch zueinander.

Die Ergebnisse für die Schwellen-Entwicklung ($s = 4m^2$) konnten mit Resultaten aus der Literatur verglichen werden und es wurde Übereinstimmung gefunden.

Die Kenntnis der Amplitude des Prozesses (5.1) ist ein wichtiger Baustein zur vollständigen differentiellen Beschreibung der Produktion eines schweren $Q\bar{Q}$ -Paares ($Q = c, b, t$) in der Reaktion

$$e^+ e^- \rightarrow \gamma^*, Z^* \rightarrow Q\bar{Q} + X \quad (5.2)$$

zur Ordnung α_s^2 . Er wird zur Berechnung von physikalischen Observablen, zum Beispiel Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrien, benötigt.

Hier wurde der 2-Parton-Beitrag zur Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie, definiert bezüglich der Richtung des schweren Quarks, näher untersucht. Der 2-Parton-Beitrag zu A_{FB} zeichnet sich dadurch aus, dass er bereits für sich alleine genommen jeweils in erster und zweiter Ordnung der Störungsreihe infrarot-endlich ist. Numerisch wurde eine Auswertung für bottom-Quarks auf der Z -Resonanz und für top-Quarks für Schwerpunktsenergien knapp oberhalb der top-Paarproduktionsschwelle bis zu 500 GeV durchgeführt.

Für bottom-Quarks auf der Z -Resonanz zeigt sich, daß die anomalen 2-Schleifen-Amplituden einen nicht vernachlässigbaren Beitrag zur Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie liefern. Der Beitrag der nicht-anomalen 2-Schleifen-Amplituden verschwindet im Limes masseloser externer Quarks und ist somit auch für $m_b \neq 0$ vernachlässigbar klein, da $m_b \ll m_Z$.

Im Hinblick auf die $t\bar{t}$ -Produktion an einem in der Diskussion befindlichen e^+e^- -Linearbeschleuniger sind bei der Berechnung der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie für top-Quarks auch die nicht-anomalen 2-Parton-Beiträge wichtig, da $\frac{m_t}{\sqrt{s}}$ nicht mehr vernachlässigbar ist. Im Gegensatz zu A_{FB} für b -Quarks auf der Z -Resonanz liefern die nicht-anomalen Amplituden den numerisch grössten Beitrag zum 2-Parton-Beitrag der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie für t -Quarks. Der Anomalie-Beitrag hingegen ist in diesem Fall vernachlässigbar klein.

Zur vollständigen Bestimmung der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie in der Ordnung α_s^2 müssen noch die 3- und 4-Parton-Beiträge für massive externe Quarks berechnet werden.

Der hier berechnete 2-Parton-Beitrag zur Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie bezüglich der Richtung des schweren Quarks ist auch auf die Berechnung von A_{FB} bezüglich der Thrust-Richtung anwendbar, da für 2-Teilchen-Endzustände auf Parton-Niveau die Thrust-Richtung und die Richtung des schweren Quarks identisch sind. Dies liefert also auch einen wichtigen Teil der vollständigen $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ -Korrektur für die experimentell bevorzugte Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie bezüglich der Thrust-Richtung.

Anhang A

Amplituden und Propagatoren

Mit Hilfe der bekannten Feynman-Regeln (z.B. [Nac86, PS95]) erhält man die folgenden 2ℓ -Amplituden in der Feynman-Eichung zugehörig zu den in Abbildung 3.4 gezeigten Feynman-Diagrammen (Jeder Propagator N_i , $i = 1 \dots 21$, wird bei seinem erstmaligen Auftreten definiert.):

$$M_{\mu,Z}^{A_1} = i \int \frac{d^D l_1 d^D l_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{16 \pi^2 \alpha_s^2 C_F^2}{N_1 N_2 N_3 N_4^2 N_5} \times \left[\gamma^\rho (\not{k}_1 + \not{l}_1 + m) \gamma^\nu (\not{k}_1 + \not{l}_1 + \not{l}_2 + m) \gamma_\nu \right. \\ \left. (\not{k}_1 + \not{l}_1 + m) (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) (\not{l}_1 - \not{k}_2 + m) \gamma_\rho \right] \quad (\text{A.1})$$

mit

$$\begin{aligned} N_1 &= l_1^2, \\ N_2 &= l_2^2, \\ N_3 &= (k_1 + l_1 + l_2)^2 - m^2, \\ N_4 &= (k_1 + l_1)^2 - m^2, \\ N_5 &= (k_2 - l_1)^2 - m^2; \end{aligned}$$

$$M_{\mu,Z}^{A_2} = i \int \frac{d^D l_1 d^D l_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{16 \pi^2 \alpha_s^2 C_F^2}{N_1 N_2 N_6 N_7 N_8^2} \times \left[\gamma^\rho (\not{k}_1 - \not{l}_1 + m) (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) \right. \\ \left. (-\not{k}_2 - \not{l}_1 + m) \gamma^\nu (-\not{k}_2 - \not{l}_1 - \not{l}_2 + m) \gamma_\nu (-\not{k}_2 - \not{l}_1 + m) \gamma_\rho \right] \quad (\text{A.2})$$

mit

$$\begin{aligned} N_6 &= (k_2 + l_1 + l_2)^2 - m^2, \\ N_7 &= (k_1 - l_1)^2 - m^2, \\ N_8 &= (k_2 + l_1)^2 - m^2; \end{aligned}$$

$$M_{\mu,Z}^{B_1} = i \int \frac{d^D l_1 d^D l_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{16 \pi^2 \alpha_s^2 (C_F^2 - \frac{1}{2} N_C C_F)}{N_1 N_2 N_3 N_4 N_5 N_9} \times \left[\gamma^\rho (\not{k}_1 + \not{l}_2 + m) \gamma^\nu \right. \\ \left. (\not{k}_1 + \not{l}_1 + \not{l}_2 + m) \gamma_\rho (\not{k}_1 + \not{l}_1 + m) (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) (\not{l}_1 - \not{k}_2 + m) \gamma_\nu \right] \quad (\text{A.3})$$

mit

$$N_9 = (k_1 + l_2)^2 - m^2;$$

$$M_{\mu,Z}^{B_2} = i \int \frac{d^D l_1 d^D l_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{16 \pi^2 \alpha_s^2 (C_F^2 - \frac{1}{2} N_C C_F)}{N_1 N_2 N_6 N_7 N_8 N_{10}} \times \left[\gamma^\rho (\not{k}_1 - \not{l}_1 + m) (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) \right. \\ \left. (-\not{k}_2 - \not{l}_1 + m) \gamma_\nu (-\not{k}_2 - \not{l}_1 - \not{l}_2 + m) \gamma_\rho (-\not{k}_2 - \not{l}_2 + m) \gamma_\nu \right] \quad (\text{A.4})$$

mit

$$N_{10} = (k_2 + l_2)^2 - m^2;$$

$$M_{\mu,Z}^{C_1} = i \int \frac{d^D l_1 d^D l_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{16 \pi^2 \alpha_s^2 C_F^2}{N_1 N_2 N_3 N_9 N_{11} N_{12}} \times \left[\gamma^\rho (\not{k}_1 + \not{l}_2 + m) \gamma^\nu (\not{k}_1 + \not{l}_1 + \not{l}_2 + m) \right. \\ \left. (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) (\not{l}_1 + \not{l}_1 - \not{k}_2 + m) \gamma_\nu (\not{l}_2 - \not{k}_2 + m) \gamma_\rho \right] \quad (\text{A.5})$$

mit

$$N_{11} = (k_2 - l_1 - l_2)^2 - m^2,$$

$$N_{12} = (k_2 - l_2)^2 - m^2;$$

$$M_{\mu,Z}^{C_2} = i \int \frac{d^D l_1 d^D l_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{16 \pi^2 \alpha_s^2 (C_F^2 - \frac{1}{2} N_C C_F)}{N_1 N_2 N_3 N_4 N_{11} N_{12}} \times \left[\gamma^\rho (\not{k}_1 + \not{l}_1 + m) \gamma^\nu (\not{k}_1 + \not{l}_1 + \not{l}_2 + m) \right. \\ \left. (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) (\not{l}_1 + \not{l}_1 - \not{k}_2 + m) \gamma_\nu (\not{l}_2 - \not{k}_2 + m) \gamma_\rho \right]; \quad (\text{A.6})$$

$$M_{\mu,Z}^{E_1} = -i \int \frac{d^D l_1 d^D l_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{16 \pi^2 \alpha_s^2 \frac{1}{2} N_C C_F}{N_1 N_2 N_4 N_5 N_{13} N_{14}} \\ \times \left[\gamma_\sigma (\not{k}_1 - \not{l}_2 + m) \gamma_\nu (\not{k}_1 + \not{l}_1 + m) (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) (\not{l}_1 - \not{k}_2 + m) \gamma_\rho \right] \\ \times \left[(l_2 - l_1)^\nu g^{\rho\sigma} - (l_1 + 2l_2)^\rho g^{\sigma\nu} + (2l_1 + l_2)^\sigma g^{\nu\rho} \right] \quad (\text{A.7})$$

mit

$$N_{13} = (k_1 - l_2)^2 - m^2,$$

$$N_{14} = (l_1 + l_2)^2;$$

$$\begin{aligned}
M_{\mu,Z}^{E_2} = & -i \int \frac{d^D l_1 d^D l_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{16 \pi^2 \alpha_s^2 \frac{1}{2} N_C C_F}{N_1 N_2 N_7 N_8 N_{12} N_{14}} \\
& \times \left[\gamma_\sigma (\not{k}_1 - \not{l}_1 + m) (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) (-\not{k}_2 - \not{l}_1 + m) \gamma_\nu (\not{l}_2 - \not{k}_2 + m) \gamma_\rho \right] \\
& \times \left[(l_1 + 2l_2)^\sigma g^{\nu\rho} + (l_1 - l_2)^\nu g^{\rho\sigma} - (2l_1 + l_2)^\rho g^{\sigma\nu} \right]; \tag{A.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{\mu,Z}^{D_1} = & -i \int \frac{d^D l_1 d^D l_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{16 \pi^2 \alpha_s^2 T_F C_F}{N_1^2 N_2 N_4 N_5 N_{14}} \times \left[\gamma^\rho (\not{k}_1 + \not{l}_1 + m) (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) \right. \\
& \left. (\not{l}_1 - \not{k}_2 + m) \gamma^\nu \gamma_\rho \not{l}_2 \gamma_\nu (\not{l}_1 + \not{l}_2) \right]; \tag{A.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{\mu,Z}^{D_2} = & i \int \frac{d^D l_1 d^D l_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{16 \pi^2 \alpha_s^2 \frac{1}{2} N_C C_F}{N_1^2 N_2 N_4 N_5 N_{14}} \\
& \times \left[\gamma_\sigma (\not{k}_1 + \not{l}_1 + m) (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) (\not{l}_1 - \not{k}_2 + m) \gamma^\nu \right] \\
& \times \left[(l_2 - l_1)^\kappa g^{\tau\sigma} - (l_1 + 2l_2)^\sigma g^{\kappa\tau} + (2l_1 + l_2)^\tau g^{\sigma\kappa} \right] \\
& \times \left[(l_2 - l_1)_\kappa g_{\tau\nu} - (l_1 + 2l_2)_\nu g_{\kappa\tau} + (2l_1 + l_2)_\tau g_{\nu\kappa} \right]; \tag{A.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{\mu,Z}^{D_3} = & -i \int \frac{d^D l_1 d^D l_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{16 \pi^2 \alpha_s^2 N_C C_F}{N_1^2 N_2 N_4 N_5 N_{14}} \\
& \times \left[(\not{l}_1 + \not{l}_2) (\not{k}_1 + \not{l}_1 + m) (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) (\not{l}_1 - \not{k}_2 + m) \not{l}_2 \right]; \tag{A.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{\mu,Z}^{D_4} = & -i \int \frac{d^D l_1 d^D l_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{16 \pi^2 \alpha_s^2 T_F C_F}{N_1^2 N_4 N_5 N_{15} N_{16}} \times \left[\gamma^\rho (\not{k}_1 + \not{l}_1 + m) (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) \right. \\
& \left. (\not{l}_1 - \not{k}_2 + m) \gamma^\nu \gamma_\rho (\not{l}_2 + m) \gamma_\nu (\not{l}_1 + \not{l}_2 + m) \right] \tag{A.12}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
N_{15} &= l_2^2 - m^2, \\
N_{16} &= (l_1 + l_2)^2 - m^2.
\end{aligned}$$

Abbildung 3.5 zeigt die Counterterme welche die in den 2ℓ -Amplituden enthaltenen UV -Divergenzen kürzen. Bei den Countertermen handelt es sich im Wesentlichen um 1ℓ -Amplituden. Der Schleifenimpuls wird l_2 genannt, so daß die gleichen Propagatoren wie in den 2ℓ -Amplituden verwendet werden können. Die auftretenden

1-Schleifenintegrale werden ihrerseits aus den zugehörigen 2-Schleifenintegralen berechnet (vgl. hierzu Anhang B). Man erhält:

$$M_{\mu,Z}^{X_1} = \int \frac{d^D l_2}{(2\pi)^D} \frac{4\pi\alpha_s C_F}{N_2 N_9^2 N_{12}} \times \left[\gamma^\rho (\not{k}_1 + \not{l}_2 + m) (\delta_2^{(1\ell),\text{OS}} (\not{k}_1 + \not{l}_2) - \delta_m^{\text{OS}}) \right. \\ \left. (\not{k}_1 + \not{l}_2 + m) (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) (\not{l}_2 - \not{k}_2 + m) \gamma_\rho \right], \quad (\text{A.13})$$

$$M_{\mu,Z}^{X_2} = \int \frac{d^D l_2}{(2\pi)^D} \frac{4\pi\alpha_s C_F}{N_2 N_9 N_{12}^2} \times \left[\gamma^\rho (\not{k}_1 + \not{l}_2 + m) (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) \right. \\ \left. (\not{l}_2 - \not{k}_2 + m) (\delta_2^{(1\ell),\text{OS}} (\not{l}_2 - \not{k}_2) - \delta_m^{\text{OS}}) (\not{l}_2 - \not{k}_2 + m) \gamma_\rho \right], \quad (\text{A.14})$$

$$M_{\mu,Z}^{X_3} = \Gamma_\mu^{X_4} = - \int \frac{d^D l_2}{(2\pi)^D} \frac{4\pi\alpha_s C_F}{N_2 N_9 N_{12}} \times \delta_{1F} \\ \times \left[\gamma^\rho (\not{k}_1 + \not{l}_2 + m) (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) (\not{l}_2 - \not{k}_2 + m) \gamma_\rho \right], \quad (\text{A.15})$$

$$M_{\mu,Z}^{X_5} = \int \frac{d^D l_2}{(2\pi)^D} \frac{4\pi\alpha_s C_F}{N_2^2 N_9 N_{12}} \times \delta_3^{\overline{\text{MS}}} \\ \times \left[\gamma^\rho (\not{k}_1 + \not{l}_2 + m) (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) (\not{l}_2 - \not{k}_2 + m) \gamma_\rho N_2 \right. \\ \left. + \not{l}_2 (\not{k}_1 + \not{l}_2 + m) (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) (\not{l}_2 - \not{k}_2 + m) \not{l}_2 \right], \quad (\text{A.16})$$

$$M_{\mu,Z}^{X_6} = - \int \frac{d^D l_2}{(2\pi)^D} \frac{4\pi\alpha_s C_F}{N_2 N_9 N_{12}} \times \delta_2^{(1\ell),\text{OS}} \\ \times \left[\gamma^\rho (\not{k}_1 + \not{l}_2 + m) (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) (\not{l}_2 - \not{k}_2 + m) \gamma_\rho \right]. \quad (\text{A.17})$$

Der Countertermbeitrag X_7 beinhaltet kein Schleifen-Integral:

$$M_{\mu,Z}^{X_7} = -i (\delta_2^{(1\ell),\text{OS}} + \delta_2^{(2\ell),\text{OS}}) (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5). \quad (\text{A.18})$$

Die Feynman-Amplitude des 1ℓ -Beitrages aus Abbildung 2.3 lautet:

$$M_{\mu,Z}^{(1\ell)} = - \int \frac{d^D l_2}{(2\pi)^D} \frac{4\pi\alpha_s C_F}{N_2 N_9 N_{12}} \\ \times \left[\gamma^\rho (\not{k}_1 + \not{l}_2 + m) (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) (\not{l}_2 - \not{k}_2 + m) \gamma_\rho \right]. \quad (\text{A.19})$$

Analog zu den Countertermen wurde der Schleifenimpuls l_2 genannt und es wurden die bereits definierten Propagatoren benutzt.

Die renormierte Vertexfunktion zur Ordnung α_s erhält man durch die Summe aus (A.19) und dem 1ℓ -Anteil aus (A.18):

$$\Gamma_{\mu,Z}^{(1\ell)} = M_{\mu,Z}^{(1\ell)} - i \delta_2^{(1\ell),\text{OS}} (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5). \quad (\text{A.20})$$

Zur $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ folgt die renormierte Vertexfunktion des Typs A aus (A.1)-(A.18):

$$\Gamma_{\mu,Z}^{(2\ell,A)} = \sum_i M_{\mu,Z}^i + N_L M_{\mu,Z}^{D_1} - i \delta_2^{(2\ell),\text{OS}} (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) \quad (\text{A.21})$$

mit $i = A_j, B_j, C_j, E_j, D_k, X_l$ wobei $j = 1, 2$, $k = 2, 3, 4$ und $l = 1 \dots 6$.

Die pseudoskalaren Vertexfunktionen $\tilde{\Lambda}_5^{(1\ell)}$ und $\tilde{\Lambda}_5^{(2\ell,A)}$ folgen wie in Abschnitt 3.1.1 beschrieben aus (A.20) und (A.21) durch Anpassen des $\mathcal{Z}\text{-}\bar{Q}\text{-}Q$ -Vertex in (A.20) und (A.21):

$$-i(v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) \rightarrow \gamma_5.$$

Die Amplituden zu den Diagrammen aus Abbildung 3.6 folgen in (A.22)-(A.25). Es werden 4 verschiedene Massenkombinationen für m_I und m_A betrachtet. Die Summe der beiden Anomaliediagramme wird mit $M_{\mu,Z}^{\text{ano},m_I m_A}$ bezeichnet. Die Notation ist wie folgt:

$$\begin{aligned} m_I = m, m_A = m &\rightarrow M_{\mu,Z}^{\text{ano},\text{mm}}, \\ m_I = 0, m_A = m &\rightarrow M_{\mu,Z}^{\text{ano},\text{om}}, \\ m_I = m, m_A = 0 &\rightarrow M_{\mu,Z}^{\text{ano},\text{mo}}, \\ m_I = 0, m_A = 0 &\rightarrow M_{\mu,Z}^{\text{ano},\text{oo}}. \end{aligned}$$

Aus den Feynmanregeln folgt für $M_{\mu,Z}^{\text{ano},\text{mm}}$:

$$\begin{aligned} M_{\mu,Z}^{\text{ano},\text{mm}} = & -i \int \frac{d^D l_1 d^D l_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{16 \pi^2 \alpha_s^2 T_F C_F}{N_2 N_3 N_4 N_{11} N_{13} N_{17}} \gamma^\rho (\not{k}_1 - \not{l}_2 + m) \gamma^\nu \\ & \times \left\{ \text{Tr} \left[\gamma_\rho (\not{k}_1 + \not{l}_1 + \not{l}_2 + m) (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) (\not{l}_1 + \not{l}_2 - \not{k}_2 + m) \gamma_\nu (\not{k}_1 + \not{l}_1 + m) \right] \right. \\ & \left. + \text{Tr} \left[\gamma_\rho (\not{k}_1 + \not{l}_1 - m) \gamma_\nu (\not{k}_2 - \not{l}_1 - \not{l}_2 + m) (v_Q^Z \gamma_\mu + a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5) (\not{k}_1 + \not{l}_1 + \not{l}_2 - m) \right] \right\} \end{aligned}$$

mit

$$N_{17} = (k_1 + k_2 - l_2)^2;$$

Betrachtet man nun zum Beispiel die zweite Fermionspur, schiebt die $\mathbb{1} = C C^{-1}$ ein und benutzt $C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T$ und $C^{-1}\gamma_\mu\gamma_5 C = (\gamma_\mu\gamma_5)^T$ so erhält man:

$$M_{\mu,Z}^{\text{ano,mm}} = -i \int \frac{d^D l_1 d^D l_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{16 \pi^2 \alpha_s^2 T_F C_F}{N_2 N_3 N_4 N_{11} N_{13} N_{17}} \gamma^\rho (\not{k}_1 - \not{l}_2 + m) \gamma^\nu \\ \times 2 a_Q^Z \text{Tr} \left[\gamma_\rho (\not{k}_1 + \not{l}_1 + \not{l}_2 + m) \gamma_\mu \gamma_5 (\not{l}_1 + \not{l}_2 - \not{k}_2 + m) \gamma_\nu (\not{k}_1 + \not{l}_1 + m) \right] \quad (\text{A.22})$$

Wie aus dem Furry-Theorem bereits erwartet hebt sich der Vektoranteil der beiden Dreieckspuren raus. Die beiden Axialvektoranteile ergeben identische Resultate. Die Anomaliediagramme liefern also nur einen Beitrag zu den Axialvektorformfaktoren G_1 und G_2 . Die verbleibenden 3 Massenkombinationen erhält man bequem aus (A.22):

$$M_{\mu,Z}^{\text{ano,om}} = -i \int \frac{d^D l_1 d^D l_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{16 \pi^2 \alpha_s^2 T_F C_F}{N_2 N_{13} N_{17} N_{18} N_{19} N_{20}} \gamma^\rho (\not{k}_1 - \not{l}_2 + m) \gamma^\nu \\ \times 2 a_Q^Z \text{Tr} \left[\gamma_\rho (\not{k}_1 + \not{l}_1 + \not{l}_2) \gamma_\mu \gamma_5 (\not{l}_1 + \not{l}_2 - \not{k}_2) \gamma_\nu (\not{k}_1 + \not{l}_1) \right] \quad (\text{A.23})$$

mit

$$N_{18} = (k_1 + l_1)^2, \\ N_{19} = (k_2 - l_1 - l_2)^2, \\ N_{20} = (k_1 + l_1 + l_2)^2;$$

$$M_{\mu,Z}^{\text{ano,mo}} = -i \int \frac{d^D l_1 d^D l_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{16 \pi^2 \alpha_s^2 T_F C_F}{N_2 N_3 N_4 N_{11} N_{17} N_{21}} \gamma^\rho (\not{k}_1 - \not{l}_2) \gamma^\nu \\ \times 2 a_Q^Z \text{Tr} \left[\gamma_\rho (\not{k}_1 + \not{l}_1 + \not{l}_2 + m) \gamma_\mu \gamma_5 (\not{l}_1 + \not{l}_2 - \not{k}_2 + m) \gamma_\nu (\not{k}_1 + \not{l}_1 + m) \right] \quad (\text{A.24})$$

mit

$$N_{21} = (k_1 - l_2)^2;$$

$$M_{\mu,Z}^{\text{ano,om}} = -i \int \frac{d^D l_1 d^D l_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{16 \pi^2 \alpha_s^2 T_F C_F}{N_2 N_{17} N_{18} N_{19} N_{20} N_{21}} \gamma^\rho (\not{k}_1 - \not{l}_2) \gamma^\nu \\ \times 2 a_Q^Z \text{Tr} \left[\gamma_\rho (\not{k}_1 + \not{l}_1 + \not{l}_2) \gamma_\mu \gamma_5 (\not{l}_1 + \not{l}_2 - \not{k}_2) \gamma_\nu (\not{k}_1 + \not{l}_1) \right]. \quad (\text{A.25})$$

Die Typ-B-Countertermamplituden aus Abb. 3.7 lauten:

$$M_{\mu,Z}^{X_J} = -i a_Q^Z \delta_J \gamma_\mu \gamma_5, \quad (\text{A.26})$$

$$M_{\mu,Z}^{X_{\text{la}}} = -i a_Q^Z \delta_5 \gamma_\mu \gamma_5. \quad (\text{A.27})$$

Die Addition der Amplituden (A.22)-(A.25) mit den Countertermen (A.26) und (A.27) ergeben die Typ-B-Beiträge aus der Ward-Identität (3.17):

$$\Gamma_{\mu,Z}^{(2\ell,B),m_I,m_A} = M_{\mu,Z}^{\text{ano},m_I,m_A} - i a_Q^Z (\delta_J + \delta_5) \gamma_\mu \gamma_5. \quad (\text{A.28})$$

Jede der 4 Massenkombinationen wird gleich renormiert und erfüllt eine anomale Ward-Identität für sich alleine. Den benötigten Axialvektorbeitrag $\tilde{\Lambda}_{\mu 5}^{(B),m_I m_A}$ erhält man wiederum aus $\Gamma_{\mu,Z}^{(B),m_I m_A}(-i a_Q^Z \rightarrow 1)$.

Zum Beweis der Ward-Identitäten benötigt man wiederum die pseudoskalaren Typ-B-Amplituden. Diese ergeben sich wie die Typ-A-Beiträge durch Anpassen der Axialvektor-Kopplung an die pseudoskalare Kopplung:

$$\tilde{\Lambda}_5^{(2\ell,B),m_I,m_A} = M_{\mu,Z}^{\text{ano},m_I m_A}(-i a_Q^Z \gamma_\mu \gamma_5 \rightarrow \gamma_5), \quad (\text{A.29})$$

wobei die pseudoskalaren Typ-B-Beiträge nicht renormiert werden. Weiterhin sind $\tilde{\Lambda}_5^{(2\ell,B),\text{om}} = \tilde{\Lambda}_5^{(2\ell,B),\text{oo}} = 0$ da für masselose interne Quarks bereits die Spur über das Quarkdreieck verschwindet.

Schlussendlich benötigt man zum Beweis von (3.17) für alle 4 Massenkombinationen den Anomalieterm F_R für ein externes massives und für ein externes masseloses Quark. Hier wird nur die Amplitude $M^{F,m}$ für ein schweres auslaufendes Quark gegeben ($M^{F,o} = M^{F,m}(m \rightarrow 0)$):

$$M^{F,m} = i \int \frac{d^D l_2}{(2\pi)^D} \frac{32 \pi \alpha_s C_F}{N_2 N_{13} N_{14}} \left[\gamma^\mu (\not{k}_1 - \not{l}_2 + m) \gamma^\nu q^\rho l_2^\sigma \varepsilon_{\rho\sigma\nu\mu} \right]. \quad (\text{A.30})$$

Der zugehörige Counterterm aus Abbildung 3.8 lautet:

$$M^{X_F} = i \delta_F q^\mu \gamma_\mu \gamma_5. \quad (\text{A.31})$$

Der renormierte Anomaliebeitrag F_R^m folgt aus der Summe von (A.30) und (A.31):

$$F_R^m = M^{F,m} + i \delta_F q^\mu \gamma_\mu \gamma_5. \quad (\text{A.32})$$

Anhang B

Normierung der Schleifen-Integrale

Die auftretenden 2-Schleifenintegrale werden auf einen gemeinsamen Satz von Master-Integralen zurück geführt. Die Master-Integrale sind bekannt [BMR03, BMR04]. Hier folgt eine kurze Bemerkung zur verwendeten Normierung der Schleifen-Integrale.

Betrachte zunächst ein einfaches massives 1-Schleifen-Integral (im folgenden Tadpole genannt) in 4 Dimensionen. Der masselose Tadpole - hier tritt keine Masse im Propagator auf - ist identisch null. Zusammen mit dem Tadpole tritt in der Feynman-Amplitude immer ein $g_{s,0}^2$ auf. Die Kopplungskonstante sei hier vorerst die nackte unrenormierte Kopplung und trägt zur Verdeutlichung einen Index „0“:

$$T = g_{s,0}^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 - m^2}. \quad (\text{B.1})$$

Die Massendimension des Tadpoles ist $[T] = 2$. Wie bereits erwähnt erfolgt die Berechnung der Feynman-Amplitude (und somit auch die Berechnung der Schleifen-Integrale, beziehungsweise die Reduktion auf Master-Integrale) in dimensioneller Regularisierung. Macht man den Übergang von $4 \rightarrow D$ Dimensionen, so ist die Kopplungskonstante in D Dimensionen nicht mehr dimensionslos. Genauso ändert sich auch die Massendimension des Integrationsmaßes. Die Änderung der Massendimension der Kopplungskonstante und des Integrationsmaßes kann durch die Einführung einer frei wählbaren Massenskala μ_0 kompensiert werden. Man erhält:

$$T = g_{s,0}^2 \underbrace{\mu_0^{(D-4)} \mu_0^{(4-D)}}_1 \frac{d^D l}{(2\pi^4)} \frac{1}{l^2 - m^2}$$

Anschließend folgt eine Umdefinition der Kopplungskonstante:

$$g_{s,0}^2 \rightarrow \tilde{g}_{s,0}^2 = g_{s,0}^2 \mu_0^{(D-4)},$$

wobei die „ $\sim$ “ im weiteren Verlauf wieder vernachlässigt wird. Somit ist $g_{s,0}^2$ dimensionlos in D Dimensionen. Der Faktor $\mu_0^{(4-D)}$ kompensiert die geänderte Massendimension des Integrationsmaßes, so dass die Massendimension des gesamten Tadpoles ($[T] = 2$) in D Dimensionen unverändert bleibt.

Die Berechnung des Tadpoles liefert:

$$T = -i g_{s,0}^2 \left(\frac{m^2}{\mu_0^2} \right)^{\frac{(D-4)}{2}} \frac{4}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma(3 - D/2) \underbrace{\frac{m^2}{(D-2)(D-4)}}_{T_B}.$$

Benutzt man $\alpha_{s,0} = \frac{g_{s,0}^2}{4\pi}$ und Gleichung (3.23) ($C(D) = C\left(\varepsilon = \frac{(4-D)}{2}\right)$), so folgt

$$T = -i \frac{\alpha_{s,0}}{\pi} \left(\frac{m^2}{\mu_0^2} \right)^{\frac{(D-4)}{2}} C(D) T_B, \quad (\text{B.2})$$

wobei T_B das Resultat für den Tadpole aus [BMR04] ist. Beachte, dass in [BMR04] eine euklidische Metrik verwendet wird. Dies erklärt den Faktor $(-i)$ in (B.2). Die Schleifenintegrale (und somit auch die Master-Integrale) in [BMR04] wurden mit einem Integrationsmaß berechnet, in dem der Faktor

$$\left(\frac{m^2}{\mu_0^2} \right)^{\frac{(D-4)}{2}} C(D)$$

ausgeklammert ist. Weiterhin ist das Integrationsmaß in [BMR03, BMR04] so gewählt, dass die Entwicklung der Formfaktoren in $\frac{\alpha_s}{\pi}$ erfolgt. Dies muss man beachten, wenn man die Master-Integrale aus [BMR03, BMR04] verwendet. Aus diesem Grunde bietet es sich an, wie in dieser Arbeit geschehen, je Schleifenintegral den Faktor $[(m^2/\mu^2)^{(D-4)/2} C(D)]$ aus den Formfaktoren auszuklammern.

Die Renormierung der Kopplung erfolgt wie in Gleichung (3.20) beschrieben. Ebenso wie für die nackte Kopplung führt man für die renormierte Kopplung eine Massenskala μ ein, die dafür Sorge trägt, dass auch die renormierte Kopplung dimensionslos in D Dimensionen ist. Somit tritt in Zusammenhang mit der dimensionslosen Kopplungskonstanten der Faktor $\mu^{(4-D)}$ auf, der (wie oben bereits beschrieben) die

geänderte Massendimension des Integrationsmaßes kompensiert. Man erhält:

$$g_{s,0}^2 \mu_0^{(4-D)} = \left(Z_g^{\overline{\text{MS}}}\right)^2 g_s^2 \mu^{(4-D)}. \quad (\text{B.3})$$

Anhang C

Resultate

C.1 Die analytisch fortgesetzten Formfaktoren

C.1.1 Typ-A-Beiträge

Die Koeffizienten $a_i^{(2\ell)}$, $b_j^{(2\ell)}$, $c_i^{(2\ell)}$, $d_j^{(2\ell)}$ und $e_i^{(2\ell)}$ ($i = 1 \dots 12, j = 1 \dots 8$) zum pseudoskalaren Formfaktor $A^{(2\ell,A)}$ und zu den Vektor- und Axialvektor-Formfaktoren $F_1^{(2\ell)}$, $F_2^{(2\ell)}$, $G_1^{(2\ell,A)}$ und $G_2^{(2\ell,A)}$ werden im folgenden angegeben. Die Definition der Koeffizienten sowie die Zerlegung in Real- und Imaginärteil sind in Kapitel 3 beschrieben.

Für den Formfaktor $F_1^{(2\ell)}$ erhält man folgende Real- und Imaginärteile:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} a_1^{(2\ell)} &= -\frac{4}{11} \operatorname{Re} a_3^{(2\ell)} = -\frac{3}{5} \operatorname{Re} a_5^{(2\ell)} = +\frac{(y^2+1)\operatorname{H}(0;y)}{3} - \frac{y-y_+}{3}, \\
 \operatorname{Im} a_1^{(2\ell)} &= -\frac{4}{11} \operatorname{Im} a_3^{(2\ell)} = -\frac{3}{5} \operatorname{Im} a_5^{(2\ell)} = +\frac{y^2}{3} + \frac{1}{3}, \\
 \operatorname{Re} a_2^{(2\ell)} &= \operatorname{Re} a_6^{(2\ell)} = 0, \\
 \operatorname{Im} a_2^{(2\ell)} &= \operatorname{Im} a_6^{(2\ell)} = 0, \\
 \operatorname{Re} a_4^{(2\ell)} &= + (y^2+1)^2 \operatorname{H}(0,0;y)/[y_-y_+] - (y^2+1)\operatorname{H}(0;y) \\
 &\quad + (y^4 - 6\zeta_2 y^4 - 12\zeta_2 y^2 - 2y^2 + 1 - 6\zeta_2)/[2y_-y_+], \\
 \operatorname{Im} a_4^{(2\ell)} &= + (y^2+1)^2 \operatorname{H}(0;y)/[y_-y_+] - y^2 - 1, \\
 \operatorname{Re} a_7^{(2\ell)} &= - (y^2+1)\operatorname{H}(-1,0;y) + 2y^2 \operatorname{H}(0,0;y) \\
 &\quad + (y^2+1)(67y^2 + 162\zeta_2 y^2 - 67 + 18\zeta_2)\operatorname{H}(0,y)/[36y_-y_+] \\
 &\quad + (y^2+1)^2 \operatorname{H}(0,-1,0;y)/[y_-y_+] - (y^2+1)^2 \operatorname{H}(0,1,0;y)/[y_-y_+] \\
 &\quad - 2y^2(y^2+1)\operatorname{H}(0,0,0;y)/[y_-y_+] + (y^2+1)\operatorname{H}(1,0;y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-162\zeta_2 y^4 - 18\zeta_3 y^4 - 49y^4 + 144\zeta_2 y^2 - 36\zeta_3 y^2 + 98y^2 \\
& \quad - 49 - 18\zeta_3 + 18\zeta_2)/[36y_- y_+], \\
\text{Im } a_7^{(2\ell)} &= - (y^2 + 1)^2 H(0, 1; y)/[y_- y_+] - 2y^2(y^2 + 1)H(0, 0; y)/[y_- y_+] \\
& \quad - (y^2 + 1)H(-1; y) + (y^2 + 1)H(1; y) + (y^2 + 1)^2 H(0, -1; y)/[y_- y_+] \\
& \quad + 2H(0; y)y^2 + (y^2 + 1)(67y^2 + 18\zeta_2 y^2 - 67 + 18\zeta_2)/[36y_- y_+], \\
\text{Re } a_8^{(2\ell)} &= - 12\zeta_2(y^2 + 1)^2 H(1, y)/[y_- y_+] - 2(y^2 + 1)H(1, 0; y) \\
& \quad - (20\zeta_2 y^4 + 7y^4 - 6y^3 + 40\zeta_2 y^2 + 6y + 20\zeta_2 - 7)H(0; y)/[2y_- y_+] \\
& \quad + 4(y^2 + 1)^2 H(1, 0, 0; y)/[y_- y_+] + 2(y^2 + 1)^2 H(0, 1, 0; y)/[y_- y_+] \\
& \quad + 3(y^2 + 1)^2 H(0, 0, 0; y)/[y_- y_+] + 2(y - 2)(y^2 + 1)H(0, 0, y)/[y_+] \\
& \quad + (-5\zeta_2 y^3 + 2y^3 + 13\zeta_2 y^2 + 2y^2 - 5\zeta_2 y - 2y - 2 + 13\zeta_2)/[y_+], \\
\text{Im } a_8^{(2\ell)} &= + 2(y^2 + 1)^2 H(0, 1; y)/[y_- y_+] - 2(y^2 + 1)H(1; y) \\
& \quad + 3(y^2 + 1)^2 H(0, 0; y)/[y_- y_+] + 2(y - 2)(y^2 + 1)H(0; y)/[y_+] \\
& \quad + 4(y^2 + 1)^2 H(1, 0; y)/[y_- y_+] + (-7y^4 - 8\zeta_2 y^4 + 6y^3 \\
& \quad - 16\zeta_2 y^2 - 6y + 7 - 8\zeta_2)/[2y_- y_+], \\
\text{Re } a_9^{(2\ell)} &= + 16\zeta_2(y^2 + 1)H(1, y)/3 - (19y^2 - 18y + 19)H(0, 0; y)/9 \\
& \quad + (72\zeta_2 y^2 - 209y^2 + 306y + 72\zeta_2 - 209)H(0; y)/54 \\
& \quad - 4(y^2 + 1)H(1, 0, 0; y)/3 - 4(y^2 + 1)H(0, 1, 0; y)/3 \\
& \quad - 2(y^2 + 1)H(0, 0, 0; y)/3 - 2(19y^2 - 18y + 19)H(1, 0; y)/9 \\
& \quad - 8(y^2 + 1)H(1, 1, 0; y)/3 + 106y^2/27 + 88\zeta_2 y^2/9 + 4\zeta_3 y^2/3 \\
& \quad - 8\zeta_2 y - 106/27 + 4\zeta_3/3 + 64\zeta_2/9, \\
\text{Im } a_9^{(2\ell)} &= - 4(y^2 + 1)H(0, 1; y)/3 - 8(y^2 + 1)H(1, 1; y)/3 - 2(y^2 + 1)H(0, 0; y)/3 \\
& \quad - 2(19y^2 - 18y + 19)H(1; y)/9 - (19y^2 - 18y + 19)H(0; y)/9 \\
& \quad - 4(y^2 + 1)H(1, 0; y)/3 - 209y^2/54 + 17y/3 - 209/54, \\
\text{Re } a_{10}^{(2\ell)} &= + H(0, 0; y)y_+(19y^4 - 10y^3 - 34y^2 - 10y + 19)/[9y_-^3] \\
& \quad + (72\zeta_2 y^4 - 265y^4 - 144\zeta_2 y^3 + 176y^3 + 370y^2 - 288\zeta_2 y^2 \\
& \quad - 144\zeta_2 y + 176y + 72\zeta_2 - 265)H(0; y)/[54y_-^2] \\
& \quad - 2(y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 2y + 1)H(0, 0, 0; y)/[3y_-^2] \\
& \quad - y_+(198\zeta_2 y^2 - 383y^2 + 790y - 504\zeta_2 y - 383 + 198\zeta_2)/[27y_-], \\
\text{Im } a_{10}^{(2\ell)} &= - 2(y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 2y + 1)H(0, 0, y)/[3y_-^2] \\
& \quad + H(0; y)y_+(19y^4 - 10y^3 - 34y^2 - 10y + 19)/[9y_-^3] \\
& \quad + (-265y^4 + 176y^3 + 370y^2 + 176y - 265)/[54y_-^2], \\
\text{Re } a_{11}^{(2\ell)} &= + H(0, 1; y)(35y^6 + 48y^5 + 131y^4 + 168y^3 + 85y^2 + 48y - 11)\zeta_2/[y_-^2 y_+^2] \\
& \quad + 4(y^2 + 1)^2 H(-1, 0, 1, 0; y)/[y_- y_+] - 6(y^2 + 1)H(1, -1, 0; y) \\
& \quad + (2\zeta_2 y^5 + 3y^5 - y^4 + 38\zeta_2 y^4 + 52\zeta_2 y^3 - 2y^3 + 92\zeta_2 y^2 - 2y^2 - y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 18\zeta_2 y + 22\zeta_2 + 3)H(-1, 0, y)/[y_-^2 y_+] + 2(y^2 + 1)H(-1, -1, 0; y) \\
& - (11\zeta_2 y^4 - 2\zeta_3 y^4 + 6\zeta_2 y^3 - 4\zeta_3 y^2 - 36\zeta_2 y^2 + 6\zeta_2 y - 2\zeta_3 \\
& + 37\zeta_2)H(-1; y)/[y_- y_+] - 6(y^2 + 1)H(-1, 1, 0; y) \\
& - 8y(y^2 + 1)H(0, -1, 0; y)/[y_-] + 52(y^2 + 1)H(1, 1, 0; y)/3 \\
& - \zeta_2(7y^5 + 11y^4 + 20y^3 - 32y^2 + 37y - 19)H(0, -1; y)/[y_-^2 y_+] \\
& - (149\zeta_2 y^4 + 6\zeta_3 y^4 + 198\zeta_2 y^3 + 12\zeta_3 y^2 + 288\zeta_2 y^2 + 198\zeta_2 y - 77\zeta_2 \\
& + 6\zeta_3)H(1; y)/[3y_- y_+] - 2(y^2 + 3)(y^2 + 1)H(1, 0, 0, 0; y)/[y_- y_+] \\
& + H(0, 0; y)(1332\zeta_2 y^6 - 217y^6 + 36\zeta_2 y^5 - 270y^5 + 540\zeta_2 y^4 \\
& + 739y^4 + 792\zeta_2 y^3 + 180y^3 - 828\zeta_2 y^2 - 755y^2 + 36\zeta_2 y \\
& + 90y + 233 - 36\zeta_2)/[36y_-^2 y_+^2] \\
& - H(0; y)(8568\zeta_2 y^6 + 1620\zeta_3 y^6 - 2545y^6 + 3888\zeta_3 y^5 + 792\zeta_2 \\
& + 21816\zeta_2 y^5 + 3798y^5 + 2545y^4 + 10260\zeta_3 y^4 + 19944\zeta_2 y^4 \\
& + 18576\zeta_2 y^3 + 15552y^3 \zeta_3 - 7596y^3 + 10044\zeta_3 y^2 + 2545y^2 - 2545 \\
& + 2664\zeta_2 y^2 + 3888\zeta_3 y + 3798y + 1944\zeta_2 y + 1404\zeta_3)/[216y_-^2 y_+^2] \\
& + (54\zeta_2 y^4 + 31y^4 - 27y^3 + 180\zeta_2 y^2 + 27y - 31 + 126\zeta_2) \\
& H(1, 0; y)/[9y_- y_+] + 2(2y^3 - y^2 - 5y + 6)H(-1, 0, 0, y)/[y_-] \\
& + (7975 + 1701\zeta_2^2 - 1890\zeta_2^2 y + 4725\zeta_2^2 y^2 - 3240\zeta_2 \ln_2 - 1890\zeta_2^2 y^5 \\
& - 13257\zeta_2^2 y^6 - 10233\zeta_2^2 y^4 - 23652\zeta_2^2 y^3 - 6480\zeta_2 \ln_2 y \\
& + 3240\zeta_2 \ln_2 y^6 + 6480\zeta_2 \ln_2 y^5 - 3240\zeta_2 \ln_2 y^2 + 3240\zeta_2 \ln_2 y^4 \\
& - 10380\zeta_2 - 6030\zeta_3 - 16200\zeta_3 y + 53400\zeta_2 y^2 - 47580\zeta_2 y^4 \\
& - 3780\zeta_2 y^5 - 7560\zeta_2 y^3 + 4560\zeta_2 y^6 + 11340\zeta_2 y - 7975y^6 \\
& + 25470\zeta_3 y^4 - 23925y^2 + 450\zeta_3 y^6 + 16200\zeta_3 y^5 + 23925y^4 \\
& - 19890\zeta_3 y^2)/[540y_-^2 y_+^2] + 4(y^2 + 1)^2 H(1, 0, -1, 0; y)/[y_- y_+] \\
& - 4(y^2 + 1)^2 H(-1, 0, -1, 0; y)/[y_- y_+] - 10(y^2 + 1)^2 H(0, 1, 1, 0; y)/[y_- y_+] \\
& + (53y^4 + 81y^3 + 132y^2 + 81y - 17)H(1, 0, 0; y)/[3y_- y_+] \\
& + 2(y^5 + 2y^4 + 3y^3 - 5y^2 + 6y - 3)H(0, -1, 0, 0; y)/[y_-^2 y_+] \\
& + 6(y^2 + 1)^2 H(0, 1, -1, 0; y)/[y_- y_+] - 2(y^2 + 1)^2 H(0, -1, -1, 0; y)/[y_- y_+] \\
& - H(0, 0, 0, 0; y)(12y^5 - y^4 + 2y^3 - 10y - 1)y/[y_-^2 y_+^2] \\
& + 2(7y^5 - 7y^4 + 12y^3 - 4y^2 + y - 1)H(0, 0, -1, 0; y)/[y_-^2 y_+] \\
& - 4(y^2 + 1)^2 H(1, 0, 1, 0; y)/[y_- y_+] + 6(y^2 + 1)^2 H(0, -1, 1, 0; y)/[y_- y_+] \\
& - 2(y^5 + 9y^4 + 14y^3 + 22y^2 + 5y + 5)H(-1, 0, 0, 0; y)/[y_-^2 y_+] \\
& - 2H(0, 0, 1, 0; y)(11y^6 - 3y^5 + y^4 + 2y^3 - 11y^2 - 3y - 1)/[y_-^2 y_+^2] \\
& - 2H(0, 1, 0, 0; y)(7y^6 + 9y^5 + 25y^4 + 28y^3 + 17y^2 + 9y - 1)/[y_-^2 y_+^2] \\
& + 2(34y^4 + 9y^3 - 9y^2 + 9y - 1)H(0, 1, 0; y)/[3y_- y_+]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + H(0, 0, 0; y)(89y^6 + 282y^5 + 307y^4 + 258y^3 \\
& \quad + 37y^2 + 48y + 11)/[6y_-^2 y_+^2], \\
\text{Im } a_{11}^{(2\ell)} = & + 6(y^2 + 1)^2 H(0, 1, -1; y)/[y_- y_+] - 6(y^2 + 1) H(-1, 1; y) \\
& + 4(y^2 + 1)^2 H(1, 0, -1; y)/[y_- y_+] - 4(y^2 + 1)^2 H(-1, 0, -1; y)/[y_- y_+] \\
& - 2(y^2 + 1)^2 H(0, -1, -1; y)/[y_- y_+] - 6(y^2 + 1) H(1, -1; y) \\
& - 2H(0, 0, 1; y)(11y^6 - 3y^5 + y^4 + 2y^3 - 11y^2 - 3y - 1)/[y_-^2 y_+^2] \\
& - 2(y^5 + 9y^4 + 14y^3 + 22y^2 + 5y + 5) H(-1, 0, 0; y)/[y_-^2 y_+] \\
& + 2(34y^4 + 9y^3 - 9y^2 + 9y - 1) H(0, 1; y)/[3y_- y_+] \\
& - (-3y^4 + 2\zeta_2 y^4 - 2y^3 + 4\zeta_2 y^2 + 2y + 3 + 2\zeta_2) H(-1; y)/[y_- y_+] \\
& + 2(2y^3 - y^2 - 5y + 6) H(-1, 0; y)/[y_-] - 8y(y^2 + 1) H(0, -1; y)/[y_-] \\
& + (18\zeta_2 y^4 + 31y^4 - 27y^3 + 36\zeta_2 y^2 + 27y + 18\zeta_2 - 31) H(1; y)/[9y_- y_+] \\
& + H(0; y)(-217y^6 + 468\zeta_2 y^6 + 108\zeta_2 y^5 - 270y^5 + 396\zeta_2 y^4 + 233 \\
& \quad + 739y^4 + 180y^3 + 792\zeta_2 y^3 - 755y^2 - 108\zeta_2 y^2 + 90y + 108\zeta_2 y \\
& \quad - 36\zeta_2)/[36y_-^2 y_+^2] + 4(y^2 + 1)^2 H(-1, 0, 1; y)/[y_- y_+] \\
& + 2(y^5 + 2y^4 + 3y^3 - 5y^2 + 6y - 3) H(0, -1, 0; y)/[y_-^2 y_+] \\
& - 2(y^2 + 3)(y^2 + 1) H(1, 0, 0; y)/[y_- y_+] + 52(y^2 + 1) H(1, 1; y)/3 \\
& - 2H(0, 1, 0; y)(7y^6 + 9y^5 + 25y^4 + 28y^3 + 17y^2 + 9y - 1)/[y_-^2 y_+^2] \\
& + 6(y^2 + 1)^2 H(0, -1, 1; y)/[y_- y_+] + 2(y^2 + 1) H(-1, -1; y) \\
& - H(0, 0, 0; y)(12y^5 - y^4 + 2y^3 - 10y - 1)y/[y_-^2 y_+^2] \\
& + (53y^4 + 81y^3 + 132y^2 + 81y - 17) H(1, 0; y)/[3y_- y_+] \\
& + (2545y^5 - 2160\zeta_2 y^5 - 1620\zeta_3 y^5 + 648\zeta_2 y^4 - 6343y^4 - 1404\zeta_3 \\
& \quad - 2268\zeta_3 y^4 - 7992y^3 \zeta_3 + 1512\zeta_2 y^3 + 3798y^3 - 6343y + 2545 \\
& \quad - 7560\zeta_3 y^2 - 1512\zeta_2 y^2 + 3798y^2 - 2484\zeta_3 y + 1512\zeta_2 y)/[216y_-^2 y_+] \\
& + 2(7y^5 - 7y^4 + 12y^3 - 4y^2 + y - 1) H(0, 0, -1; y)/[y_-^2 y_+] \\
& + H(0, 0; y)(89y^6 + 282y^5 + 307y^4 + 258y^3 + 37y^2 + 48y + 11)/[6y_-^2 y_+^2] \\
& - 4(y^2 + 1)^2 H(1, 0, 1; y)/[y_- y_+] - 10(y^2 + 1)^2 H(0, 1, 1; y)/[y_- y_+], \\
\text{Re } a_{12}^{(2\ell)} = & + 12(y^2 + 1)^2 H(1, 0, 0, 0; y)/[y_- y_+] - 8(y^2 + 1)^2 H(-1, 0, 1, 0; y)/[y_- y_+] \\
& - 8(y^5 + 4y^3 + 2y - 1) H(-1, 0, 0, 0; y)/[y_-^2 y_+] \\
& + 2H(0, 0, 1, 0; y)(11y^6 + 6y^5 + 33y^4 + 48y^3 + 23y^2 + 6y + 1)/[y_-^2 y_+^2] \\
& - 2(5y^5 + y^4 - 5y^3 - 10y^2 - 6y + 5) H(0, 0, 0; y)/[y_-^2 y_+] \\
& - (80\zeta_2 y^4 - 55y^4 - 2y^3 + 160\zeta_2 y^2 + 2y + 80\zeta_2 + 55) H(1, 0; y)/[2y_- y_+] \\
& + (-115 - 136\zeta_2^2 - 86\zeta_2^2 y - 322\zeta_2^2 y^2 + 120\zeta_2 \ln_2 - 86\zeta_2^2 y^5 + 196\zeta_2^2 y^6 \\
& \quad + 10\zeta_2^2 y^4 + 304\zeta_2^2 y^3 + 240\zeta_2 \ln_2 y - 120\zeta_2 \ln_2 y^6 - 240\zeta_2 \ln_2 y^5 \\
& \quad + 120\zeta_2 \ln_2 y^2 - 120\zeta_2 \ln_2 y^4 + 320\zeta_2 + 110\zeta_3 - 220\zeta_3 y - 40\zeta_2 y^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 220\zeta_2 y^2 + 1040\zeta_2 y^4 - 120\zeta_2 y^5 - 1580\zeta_2 y^6 + 160\zeta_2 y + 115y^6 \\
& + 130\zeta_3 y^4 + 345y^2 - 70\zeta_3 y^6 + 220\zeta_3 y^5 - 345y^4 \\
& - 170\zeta_3 y^2)/[10y_-^2 y_+^2] + 16(y^2 + 1)^2 H(1, 1, 0, 0; y)/[y_- y_+] \\
& + 2H(0, 1, 0, 0; y)(7y^6 - 6y^5 - 17y^4 - 32y^3 - 27y^2 - 6y - 3)/[y_-^2 y_+^2] \\
& + H(0, 0, 0, 0; y)(27y^6 - 2y^5 + 11y^4 - 23y^2 - 2y - 7)/[y_-^2 y_+^2] \\
& - 8H(0, 1; y)(4y^6 - 6y^5 - 17y^4 - 24y^3 - 25y^2 - 6y - 4)\zeta_2/[y_-^2 y_+^2] \\
& - 4(y^2 + 1)H(1, 1, 0; y) - 48\zeta_2(y^2 + 1)^2 H(1, 1; y)/[y_- y_+] \\
& + 4(5\zeta_2 y^5 - 4y^5 - \zeta_2 y^4 + 6y^4 + 18\zeta_2 y^3 - 2y^3 - 2\zeta_2 y^2 \\
& - 2y^2 + 6y + 9\zeta_2 y - 5\zeta_2 - 4)H(-1, 0, y)/[y_-^2 y_+] \\
& + 2(-2\zeta_3 y^4 + 24\zeta_2 y^4 + 63\zeta_2 y^3 - 4\zeta_3 y^2 + 54\zeta_2 y^2 + 63\zeta_2 y - 2\zeta_3 \\
& + 24\zeta_2)H(-1; y)/[y_- y_+] + 8(y^2 + 1)^2 H(-1, 0, -1, 0; y)/[y_- y_+] \\
& - 2(8y^4 + 21y^3 + 18y^2 + 21y + 8)H(-1, 0, 0; y)/[y_- y_+] \\
& - 4\zeta_2(7y^4 + 6y^3 + 48y^2 + 6y + 11)H(1; y)/[y_- y_+] \\
& + 4(y^2 + 1)^2 H(0, 1, 1, 0; y)/[y_- y_+] + 8(y^2 + 1)^2 H(1, 0, 1, 0; y)/[y_- y_+] \\
& - H(0, 0; y)(272\zeta_2 y^6 - 229y^6 - 10y^5 - 40\zeta_2 y^5 + 72\zeta_2 y^4 + 177y^4 \\
& - 28y^3 - 296\zeta_2 y^2 - 3y^2 + 38y - 40\zeta_2 y - 96\zeta_2 + 55)/[4y_-^2 y_+^2] \\
& + (104\zeta_2 y^5 - 85y^5 + 64\zeta_3 y^5 - 160\zeta_3 y^4 + 191y^4 + 192\zeta_2 y^4 - 85 \\
& - 488\zeta_2 y^3 - 106y^3 - 128y^3 \zeta_3 + 8\zeta_2 y^2 - 106y^2 + 248\zeta_2 \\
& - 128\zeta_3 y^2 - 384\zeta_2 y - 160\zeta_3 y + 191y + 64\zeta_3)H(0; y)/[8y_-^2 y_+] \\
& + 2(5y^4 + 2y^3 + 18y^2 + 2y + 5)H(0, -1, 0; y)/[y_- y_+] \\
& + 2(3y^4 - y^3 + 20y^2 - y + 5)H(1, 0, 0, y)/[y_- y_+] \\
& + 4(y^4 + y^3 + 11y^2 + y + 1)H(0, -1, 0, 0, y)/[y_-^2] \\
& - 12\zeta_2(y^4 + y^3 + 11y^2 + y + 1)H(0, -1; y)/[y_-^2] \\
& - 2(8y^4 + 25y^3 + 32y^2 + 25y + 6)H(0, 1, 0; y)/[y_- y_+] \\
& - 4(3y^5 - 3y^4 + 6y^3 + 2y^2 - y + 1)H(0, 0, -1, 0; y)/[y_-^2 y_+], \\
\text{Im } a_{12}^{(2\ell)} = & + 8(y^2 + 1)^2 H(-1, 0, -1; y)/[y_- y_+] - 4(y^2 + 1)H(1, 1; y) \\
& - 4(3y^5 - 3y^4 + 6y^3 + 2y^2 - y + 1)H(0, 0, -1; y)/[y_-^2 y_+] \\
& + 2H(0, 0, 1; y)(11y^6 + 6y^5 + 33y^4 + 48y^3 + 23y^2 + 6y + 1)/[y_-^2 y_+^2] \\
& + 8(y^2 + 1)^2 H(1, 0, 1; y)/[y_- y_+] + 4(y^2 + 1)^2 H(0, 1, 1; y)/[y_- y_+] \\
& - 8(y^2 + 1)^2 H(-1, 0, 1; y)/[y_- y_+] + 12(y^2 + 1)^2 H(1, 0, 0; y)/[y_- y_+] \\
& - 8(y^5 + 4y^3 + 2y - 1)H(-1, 0, 0, y)/[y_-^2 y_+] \\
& - 2(8y^4 + 25y^3 + 32y^2 + 25y + 6)H(0, 1; y)/[y_- y_+] \\
& - 2(8y^4 + 21y^3 + 18y^2 + 21y + 8)H(-1, 0; y)/[y_- y_+] \\
& + 4(\zeta_2 y^4 - 4y^4 + 2y^3 + 2\zeta_2 y^2 - 2y + \zeta_2 + 4)H(-1; y)/[y_- y_+]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (32\zeta_2 y^4 - 55y^4 - 2y^3 + 64\zeta_2 y^2 + 2y + 32\zeta_2 + 55)H(1; y)/[2y_- y_+] \\
& - 2(5y^5 + y^4 - 5y^3 - 10y^2 - 6y + 5)H(0, 0; y)/[y_-^2 y_+] \\
& - H(0; y)(56\zeta_2 y^6 - 229y^6 - 10y^5 - 24\zeta_2 y^5 + 177y^4 - 16\zeta_2 y^4 \\
& \quad - 28y^3 - 112\zeta_2 y^2 - 3y^2 - 24\zeta_2 y + 38y - 40\zeta_2 + 55)/[4y_-^2 y_+^2] \\
& + 4(y^4 + y^3 + 11y^2 + y + 1)H(0, -1, 0, y)/[y_-^2] \\
& + 2(5y^4 + 2y^3 + 18y^2 + 2y + 5)H(0, -1; y)/[y_- y_+] \\
& + 2H(0, 1, 0; y)(7y^6 - 6y^5 - 17y^4 - 32y^3 - 27y^2 - 6y - 3)/[y_-^2 y_+^2] \\
& + H(0, 0, 0; y)(27y^6 - 2y^5 + 11y^4 - 23y^2 - 2y - 7)/[y_-^2 y_+^2] \\
& + 2(3y^4 - y^3 + 20y^2 - y + 5)H(1, 0, y)/[y_- y_+] \\
& + 16(y^2 + 1)^2 H(1, 1, 0; y)/[y_- y_+] \\
& + (-85y^5 - 56\zeta_2 y^5 + 64\zeta_3 y^5 - 160\zeta_3 y^4 + 191y^4 + 160\zeta_2 y^4 \\
& \quad - 128y^3 \zeta_3 - 106y^3 - 328\zeta_2 y^3 + 328\zeta_2 y^2 - 128\zeta_3 y^2 - 106y^2 \\
& \quad - 160\zeta_3 y - 192\zeta_2 y + 191y - 85 + 88\zeta_2 + 64\zeta_3)/[8y_-^2 y_+].
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten des Formfaktors $F_2^{(2\ell)}$ lauten:

$$\begin{aligned}
\text{Re } b_1^{(2\ell)} &= \text{Re } b_2^{(2\ell)} = \text{Re } b_3^{(2\ell)} = 0, \\
\text{Im } b_1^{(2\ell)} &= \text{Im } b_2^{(2\ell)} = \text{Im } b_3^{(2\ell)} = 0, \\
\text{Re } b_4^{(2\ell)} &= -4(y^2 + 1)yH(0, 0; y)/[y_- y_+] + 2H(0; y)y + 12\zeta_2 y(y^2 + 1)/[y_- y_+], \\
\text{Im } b_4^{(2\ell)} &= -4(y^2 + 1)H(0; y)y/[y_- y_+] + 2y, \\
\text{Re } b_5^{(2\ell)} &= +4yH(0, 0; y)/3 + 50H(0; y)y/9 + 8H(1, 0; y)y/3 - 16\zeta_2 y/3, \\
\text{Im } b_5^{(2\ell)} &= +8H(1; y)y/3 + 4H(0; y)y/3 + 50y/9, \\
\text{Re } b_6^{(2\ell)} &= -4y_+(y^2 + 20y + 1)yH(0, 0, y)/[3y_-^3] - 48y^3 H(0, 0, 0; y)/[y_-^4] \\
& \quad + 2H(0; y)y(25y^4 + 272y^3 + 432\zeta_2 y^2 - 594y^2 + 272y + 25)/[9y_-^4] \\
& \quad + 4y_+(6\zeta_2 y^2 - 17y^2 - 48\zeta_2 y + 34y + 6\zeta_2 - 17)y/[3y_-^3], \\
\text{Im } b_6^{(2\ell)} &= -48y^3 H(0, 0; y)/[y_-^4] + 2(25y^2 + 322y + 25)y/[9y_-^2] \\
& \quad - 4y_+(y^2 + 20y + 1)H(0, y)y/[3y_-^3], \\
\text{Re } b_7^{(2\ell)} &= +8y_+(2y^2 - y + 2)yH(-1, 0, 0; y)/[y_-^3] \\
& \quad - 4y^2(y^2 + y + 1)(y^2 - 4y + 1)H(0, 0, 0, 0; y)/[y_+^2 y_-^4] \\
& \quad + 48H(-1, 0, 0, 0; y)(3y^2 + 8y + 3)y^2/[y_-^4] \\
& \quad + 8y^2(17y^4 + 71y^3 + 106y^2 + 71y + 17)H(0, 1, 0, 0; y)/[y_+^2 y_-^4] \\
& \quad - 48\zeta_2 y^2(8y^4 + 31y^3 + 31y + 48y^2 + 8)H(0, 1; y)/[y_+^2 y_-^4] \\
& \quad - 12H(-1, 0; y)y(y^4 + 24\zeta_2 y^3 + 64\zeta_2 y^2 - 2y^2 + 24\zeta_2 y + 1)/[y_-^4] \\
& \quad - 24\zeta_2 y_+(2y^2 - y + 2)yH(-1; y)/[y_-^3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 12\zeta_2(5y^4 + 64y^3 + 114y^2 + 64y + 5)H(1; y)y/[y_-^3 y_+] \\
& + (25y^6 - 8y^5 - 480\zeta_2 y^2 - 265y^4 + 239y^2 + 1 - 60\zeta_2 y^5 - 480\zeta_2 y^4 \\
& \quad - 792\zeta_2 y^3 + 64y - 56y^3 - 60\zeta_2 y)yH(0, 0, y)/[3y_+^2 y_-^4] \\
& + (18432y^3 \zeta_3 + 11664\zeta_3 y^4 - 792\zeta_2 y + 29952\zeta_2 y^4 + 14040\zeta_2 y^5 \\
& \quad + 11664\zeta_3 y^2 + 2448\zeta_3 y + 2448\zeta_3 y^5 - 173 + 1368\zeta_2 y^6 \\
& \quad + 4104\zeta_2 y^2 + 173y^4 + 670y + 25632\zeta_2 y^3 + 670y^5 - 173y^6 \\
& \quad - 1340y^3 + 173y^2)yH(0; y)/[18y_+^2 y_-^4] \\
& + 48y^2 y_+ H(0, -1, 0; y)/[y_-^3] - 8H(0, -1, 0, 0; y)(7y^2 - 8y + 7)y^2/[y_-^4] \\
& - 2(15y^4 + 140y^3 + 254y^2 + 140y + 15)yH(1, 0, 0; y)/[y_-^3 y_+] \\
& + 24H(0, -1; y)(7y^2 - 8y + 7)\zeta_2 y^2/[y_-^4] \\
& + 8(y^4 + 2y^3 + 2y + 1)yH(0, 1, 0, y)/[y_-^3 y_+] \\
& - 96H(0, 0, -1, 0; y)y^3/[y_-^4] - 2(5y^2 + 8y + 5)yH(1, 0; y)/[3y_-^2] \\
& - 2y^2(356y^2 + 91y + 382y^3 + 176y^4 + 19y^5 + 8)H(0, 0, 0; y)/[y_+^2 y_-^4] \\
& - 8y^2(7y^4 + 2y^3 - 6y^2 + 2y + 7)H(0, 0, 1, 0; y)/[y_+^2 y_-^4] \\
& - (-45 - 522\zeta_2^2 y - 3420\zeta_2^2 y^2 - 360\zeta_2 \ln_2 - 522\zeta_2^2 y^5 - 3420\zeta_2^2 y^4 \\
& \quad - 6948\zeta_2^2 y^3 + 360\zeta_2 \ln_2 y^6 + 300\zeta_3 y^6 - 40\zeta_2 y^3 - 340\zeta_2 y^6 \\
& \quad + 1080\zeta_2 \ln_2 y^2 - 1080\zeta_2 \ln_2 y^4 + 320\zeta_2 - 300\zeta_3 + 45y^6 \\
& \quad - 4860\zeta_3 y + 6940\zeta_2 y^2 - 6920\zeta_2 y^4 - 3220\zeta_2 y^5 + 135y^2 - 135y^4 \\
& \quad + 3260\zeta_2 y + 8820\zeta_3 y^4 + 4860\zeta_3 y^5 - 8820\zeta_3 y^2)y/[15y_+^2 y_-^4], \\
\text{Im } b_7^{(2\ell)} = & - 96H(0, 0, -1; y)y^3/[y_-^4] + 8(y^4 + 2y^3 + 2y + 1)H(0, 1; y)y/[y_-^3 y_+] \\
& - 8y^2(7y^4 + 2y^3 - 6y^2 + 2y + 7)H(0, 0, 1; y)/[y_+^2 y_-^4] \\
& + 48H(-1, 0, 0; y)(3y^2 + 8y + 3)y^2/[y_-^4] - 12y_+^2 yH(-1; y)/[y_-^2] \\
& + 8y_+(2y^2 - y + 2)yH(-1, 0, y)/[y_-^3] - 2(5y^2 + 8y + 5)H(1; y)y/[3y_-^2] \\
& - 2y^2(356y^2 + 91y + 382y^3 + 176y^4 + 19y^5 + 8)H(0, 0; y)/[y_+^2 y_-^4] \\
& + (-84\zeta_2 y - 408\zeta_2 y^4 - 265y^4 - 56y^3 - 84\zeta_2 y^5 - 744\zeta_2 y^3 + 1 \\
& \quad - 408\zeta_2 y^2 + 64y + 239y^2 - 8y^5 + 25y^6)yH(0, y)/[3y_+^2 y_-^4] \\
& - 8H(0, -1, 0; y)(7y^2 - 8y + 7)y^2/[y_-^4] + 48y^2 y_+ H(0, -1; y)/[y_-^3] \\
& + 8y^2(17y^4 + 71y^3 + 106y^2 + 71y + 17)H(0, 1, 0; y)/[y_+^2 y_-^4] \\
& - 4y^2(y^2 + y + 1)(y^2 - 4y + 1)H(0, 0, 0; y)/[y_+^2 y_-^4] \\
& - 2(15y^4 + 140y^3 + 254y^2 + 140y + 15)yH(1, 0; y)/[y_-^3 y_+] \\
& - y(173y^5 - 1368\zeta_2 y^4 - 2448\zeta_3 y^4 - 843y^4 - 1080\zeta_2 y^3 + 173 \\
& \quad - 9216y^3 \zeta_3 + 670y^3 - 9216\zeta_3 y^2 + 670y^2 + 1080\zeta_2 y^2 \\
& \quad + 1368\zeta_2 y - 2448\zeta_3 y - 843y)/[18y_-^4 y_+], \\
\text{Re } b_8^{(2\ell)} = & - 8(y^4 - 47y^3 - 88y^2 - 47y + 1)yH(-1, 0, 0; y)/[y_-^3 y_+]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8y^2(y^2 + y + 1)(y^2 - 4y + 1)H(0, 0, 0, 0; y)/[y_+^2 y_-^4] \\
& + 96H(-1, 0, 0, 0; y)(y^2 + y + 1)y^2/[y_-^4] \\
& + 16y^2(31y + 7y^4 + 7 + 50y^2 + 31y^3)H(0, 1, 0, 0; y)/[y_+^2 y_-^4] \\
& - 192\zeta_2 y^2(2y^4 + 2 + 10y + 15y^2 + 10y^3)H(0, 1; y)/[y_+^2 y_-^4] \\
& + 32H(-1, 0; y)y(y^2 + y + 1)(y^2 - 6\zeta_2 y - 2y + 1)/[y_-^4] \\
& + 24\zeta_2(y^4 - 47y^3 - 88y^2 - 47y + 1)yH(-1; y)/[y_-^3 y_+] \\
& + 24\zeta_2(3y^4 + 38y^3 + 74y^2 + 38y + 3)H(1; y)y/[y_-^3 y_+] \\
& - (56\zeta_2 y + 56\zeta_2 y^5 - 260y^3 + 127y^6 + 88\zeta_2 y^4 + 96\zeta_2 y^3 + 314y^5 \\
& \quad + 88\zeta_2 y^2 - 239y^2 - 54y - 17 + 129y^4)yH(0, 0, y)/[y_+^2 y_-^4] \\
& - H(0; y)y(80\zeta_2 y^5 - 31y^5 + 93y^4 - 224\zeta_3 y^4 - 760\zeta_2 y^4 - 448y^3 \zeta_3 \\
& \quad - 536\zeta_2 y^3 - 62y^3 - 62y^2 - 448\zeta_3 y^2 + 152\zeta_2 y^2 + 93y \\
& \quad - 224\zeta_3 y + 8\zeta_2 y - 31 + 96\zeta_2)/[2y_-^4 y_+] \\
& - 8(y^2 + 6y + 1)(y^2 + 4y + 1)H(0, -1, 0; y)y/[y_-^3 y_+] \\
& - 4(y^4 + 64y^3 + 122y^2 + 64y + 1)yH(1, 0, 0; y)/[y_-^3 y_+] \\
& - 80H(0, -1, 0, 0; y)(y^2 + 7y + 1)y^2/[y_-^4] \\
& + 240H(0, -1; y)(y^2 + 7y + 1)\zeta_2 y^2/[y_-^4] \\
& + 8(y^4 + 49y^3 + 92y^2 + 49y + 1)H(0, 1, 0; y)y/[y_-^3 y_+] \\
& + 192H(0, 0, -1, 0; y)y^3/[y_-^4] - 6(13y^2 + 38y + 13)yH(1, 0; y)/[y_-^2] \\
& + 4H(0, 0, 0; y)y(8y^5 - 46y^4 - 23y^3 - y^2 - y + 3)/[y_-^4 y_+] \\
& - 16y^2(49y^3 + 49y + 84y^2 + 5 + 5y^4)H(0, 0, 1, 0; y)/[y_+^2 y_-^4] \\
& + 4(60\zeta_2 \ln_2 y^6 + 180\zeta_2 \ln_2 y^2 - 180\zeta_2 \ln_2 y^4 - 60\zeta_2 \ln_2 - 1535\zeta_2 y^2 \\
& \quad + 69\zeta_2^2 y + 93\zeta_2^2 y^2 + 475\zeta_2 y^6 + 93\zeta_2^2 y^4 - 45\zeta_2 + 1580\zeta_2 y^5 + 5\zeta_3 \\
& \quad - 144\zeta_2^2 y^3 - 1180\zeta_2 y^3 - 260\zeta_3 y^5 + 260\zeta_3 y - 305\zeta_3 y^4 - 5\zeta_3 y^6 \\
& \quad + 1105\zeta_2 y^4 + 305\zeta_3 y^2 - 400\zeta_2 y + 69\zeta_2^2 y^5)y/[5y_+^2 y_-^4], \\
\text{Im } b_8^{(2\ell)} = & + 192H(0, 0, -1; y)y^3/[y_-^4] + 32(y^2 + y + 1)yH(-1; y)/[y_-^2] \\
& - 16y^2(49y^3 + 49y + 84y^2 + 5 + 5y^4)H(0, 0, 1; y)/[y_+^2 y_-^4] \\
& + 96H(-1, 0, 0; y)(y^2 + y + 1)y^2/[y_-^4] \\
& + 8(y^4 + 49y^3 + 92y^2 + 49y + 1)H(0, 1; y)y/[y_-^3 y_+] \\
& - 8(y^4 - 47y^3 - 88y^2 - 47y + 1)yH(-1, 0; y)/[y_-^3 y_+] \\
& - 6(13y^2 + 38y + 13)H(1; y)y/[y_-^2] \\
& + 4H(0, 0; y)y(8y^5 - 46y^4 - 23y^3 - y^2 - y + 3)/[y_-^4 y_+] \\
& - (40\zeta_2 y + 129y^4 + 136\zeta_2 y^4 + 40\zeta_2 y^5 + 128\zeta_2 y^3 + 136\zeta_2 y^2 - 17 \\
& \quad - 54y - 239y^2 + 314y^5 + 127y^6 - 260y^3)yH(0, y)/[y_+^2 y_-^4] \\
& - 80H(0, -1, 0; y)(y^2 + 7y + 1)y^2/[y_-^4]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -8(y^2 + 4y + 1)(y^2 + 6y + 1)H(0, -1; y)y/[y_-^3 y_+] \\
& + 16y^2(31y + 7y^4 + 7 + 50y^2 + 31y^3)H(0, 1, 0; y)/[y_+^2 y_-^4] \\
& + 8y^2(y^2 + y + 1)(y^2 - 4y + 1)H(0, 0, 0; y)/[y_+^2 y_-^4] \\
& - 4(y^4 + 64y^3 + 122y^2 + 64y + 1)yH(1, 0; y)/[y_-^3 y_+] \\
& + y(31y^5 + 48\zeta_2 y^5 + 224\zeta_3 y^4 + 24\zeta_2 y^4 - 93y^4 + 168\zeta_2 y^3 \\
& \quad + 62y^3 + 448y^3 \zeta_3 + 62y^2 + 448\zeta_3 y^2 - 168\zeta_2 y^2 - 93y \\
& \quad + 224\zeta_3 y - 24\zeta_2 y + 31 - 48\zeta_2)/[2y_-^4 y_+].
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten des Axialvektorformfaktors $G_1^{(2\ell, A)}$ besitzen eine bemerkenswerte Ähnlichkeit zu denen des Vektorformfaktors $F_1^{(2\ell)}$. Dies ist die Motivation die Koeffizienten $c_i^{(2\ell)}$ ($i = 1 \dots 12$) in der Form

$$c_1^{(2\ell)} = a_1^{(2\ell)} + \text{Differenz}$$

darzustellen. Man erhält:

$$\begin{aligned}
\text{Re } c_i^{(2\ell)} &= \text{Re } a_i^{(2\ell)} \quad \text{und} \\
\text{Im } c_i^{(2\ell)} &= \text{Im } a_i^{(2\ell)} \quad \text{für } i = 1 \dots 7, \\
\text{Re } c_8^{(2\ell)} &= \text{Re } a_8^{(2\ell)} - 4H(0; y)y + 8y(y^2 + 1)H(0, 0; y)/[y_- y_+] - 24y\zeta_2(y^2 + 1)/[y_- y_+], \\
\text{Im } c_8^{(2\ell)} &= \text{Im } a_8^{(2\ell)} + 8y(y^2 + 1)H(0; y)/[y_- y_+] - 4y, \\
\text{Re } c_9^{(2\ell)} &= \text{Re } a_9^{(2\ell)} - 64H(0; y)y/9 - 8yH(0, 0; y)/3 - 16H(1, 0; y)y/3 + 32\zeta_2 y/3, \\
\text{Im } c_9^{(2\ell)} &= \text{Im } a_9^{(2\ell)} - 16H(1; y)y/3 - 8H(0; y)y/3 - 64y/9, \\
\text{Re } c_{10}^{(2\ell)} &= \text{Re } a_{10}^{(2\ell)} - 64y(y^2 + y + 1)H(0; y)/[9y_-^2] + 16yy_+ / [-3 + 3y] \\
& \quad + 8yy_+^3 H(0, 0; y)/[3y_-^3], \\
\text{Im } c_{10}^{(2\ell)} &= \text{Im } a_{10}^{(2\ell)} + 8yy_+^3 H(0; y)/[3y_-^3] - 64y(y^2 + y + 1)/[9y_-^2], \\
\text{Re } c_{11}^{(2\ell)} &= \text{Re } a_{11}^{(2\ell)} - 16yH(-1, 0; y)\zeta_2 - 12y\zeta_2(y^2 + 4y + 1)^2 H(0, -1; y)/[y_-^2 y_+^2] \\
& \quad + 96H(0, 1; y)\zeta_2 y^2/[y_-^2] + 4y(5y^2 + 8y + 5)H(1, 0, 0; y)/[y_- y_+] \\
& \quad - 48y\zeta_2 y_+ H(1; y)/[-1 + y] + 4y(y^2 + 4y + 1)^2 H(0, -1, 0, 0; y)/[y_-^2 y_+^2] \\
& \quad - 8y_+ H(0, 1, 0; y)y/[-1 + y] - 4y(3y^2 + 4y + 3)H(-1, 0, 0; y)/[y_- y_+] \\
& \quad + 12y\zeta_2(3y^2 + 4y + 3)H(-1; y)/[y_- y_+] + 44H(1, 0; y)y/3 \\
& \quad + 2y(-182y^2 - 144\zeta_2 y^2 + 45\zeta_2 + 91 + 18\zeta_3 + 18\zeta_3 y^4 - 72y^3 \zeta_3 + 91y^4 \\
& \quad - 216\zeta_3 y^2 - 324\zeta_2 y^3 - 72\zeta_3 y + 36\zeta_2 y - 189\zeta_2 y^4)H(0; y)/[9y_-^2 y_+^2] \\
& \quad + 2y(-22y^2 + 12y - 1 + 48\zeta_2 y^3 + 48\zeta_2 y + 114\zeta_2 y^2 + 9\zeta_2 + 9\zeta_2 y^4 \\
& \quad + 23y^4 - 12y^3)H(0, 0; y)/[3y_-^2 y_+^2] + 4H(0, 0, 1, 0; y)(y^2 + 6y + 1)y/[y_-^2] \\
& \quad + 8yH(-1, 0, 0, 0; y) + 4H(0, 0, 0; y)(5y^3 + 3y^2 + y - 1)y/[y_+ y_-^2] \\
& \quad + 4y(1 + y^4 - 4y^3 - 14y^2 - 4y)H(0, 1, 0, 0; y)/[y_-^2 y_+^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2y(4y+1+14y^2+y^4+4y^3)H(0,0,0,0;y)/[y_-^2y_+^2] \\
& +y(420\zeta_2y+880\zeta_2y^2+300y^3\zeta_3+180\zeta_3y^4-360\zeta_2\ln_2 \\
& \quad -222\zeta_2^2y^2-51\zeta_2^2y^4-360\zeta_2^2y-360\zeta_2^2y^3-180\zeta_3 \\
& \quad +360\zeta_2\ln_2y^4-720\zeta_2\ln_2y-300\zeta_3y-51\zeta_2^2+310\zeta_2 \\
& \quad +720\zeta_2\ln_2y^3-1190\zeta_2y^4-420\zeta_2y^3)/[15y_-^2y_+^2], \\
\text{Im } c_{11}^{(2\ell)} = & \text{Im } a_{11}^{(2\ell)} -4y(3y^2+4y+3)H(-1,0;y)/[y_-y_+] +44H(1;y)y/3 \\
& -8yy_+H(0,1;y)/[y_-] +4H(0,0,1;y)(y^2+6y+1)y/[y_-^2] \\
& +2y(-1+24\zeta_2y^3+3\zeta_2y^4+24\zeta_2y+30\zeta_2y^2+3\zeta_2-22y^2+23y^4 \\
& \quad +12y-12y^3)H(0;y)/[3y_-^2y_+^2] +4y(5y^2+8y+5)H(1,0;y)/[y_-y_+] \\
& +4H(0,0;y)(5y^3+3y^2+y-1)y/[y_-^2y_+] \\
& +4y(1-14y^2-4y+y^4-4y^3)H(0,1,0;y)/[y_-^2y_+^2] \\
& +8yH(-1,0,0;y)+4y(y^2+4y+1)^2H(0,-1,0;y)/[y_-^2y_+^2] \\
& -2y(1+4y+y^4+4y^3+14y^2)H(0,0,0;y)/[y_-^2y_+^2] \\
& +2y(91+91y^4+36\zeta_2y-182y^2-72y^3\zeta_3+9\zeta_2+18\zeta_3y^4 \\
& \quad -216\zeta_3y^2-72\zeta_3y+18\zeta_3-9\zeta_2y^4-36\zeta_2y^3)/[9y_-^2y_+^2], \\
\text{Re } c_{12}^{(2\ell)} = & \text{Re } a_{12}^{(2\ell)} +192H(0,1;y)\zeta_2y^2/[y_-^2] -12y\zeta_2(y^2-14y+1)H(-1;y)/[y_-y_+] \\
& +16H(-1,0;y)(2\zeta_2y^2-y^2+12\zeta_2y+2y+2\zeta_2-1)y/[y_-^2] \\
& -24y\zeta_2(5y^2+14y+5)H(1;y)/[y_-y_+] -8H(0,0,1,0;y)y \\
& -2y(7y^4-14y^2-31\zeta_2+4\zeta_3+7+48\zeta_3y-14\zeta_2y+88\zeta_2y^2 \\
& \quad +80\zeta_3y^2+126\zeta_2y^3+48y^3\zeta_3+4\zeta_3y^4+7\zeta_2y^4)H(0;y)/[y_-^2y_+^2] \\
& -4y(-16y^4-12y^3+14y^2+12y+3\zeta_2+2+8\zeta_2y+22\zeta_2y^2+3\zeta_2y^4 \\
& \quad +8\zeta_2y^3)H(0,0;y)/[y_-^2y_+^2] +24y\zeta_2(y^2+1)^2H(0,-1;y)/[y_-^2y_+^2] \\
& +40H(1,0;y)y-4y(y^2+14y+1)H(0,1,0;y)/[y_-y_+] \\
& +4y(y^2-14y+1)H(-1,0,0;y)/[y_-y_+] \\
& +16y(y^2+1)H(0,-1,0;y)/[y_-y_+] -8y(y^2+1)^2H(0,-1,0,0;y)/[y_-^2y_+^2] \\
& -16H(-1,0,0,0;y)(y^2+6y+1)y/[y_-^2] \\
& -8y(y^4+12y^3+18y^2+12y+1)H(0,1,0,0;y)/[y_-^2y_+^2] \\
& +4y(y^4+4y^3+14y^2+4y+1)H(0,0,0,0;y)/[y_-^2y_+^2] \\
& +16y(2y^2+7y+2)H(1,0,0;y)/[y_-y_+] \\
& -8y(y^4-14y^3-11y^2+2)H(0,0,0,y)/[y_-^2y_+^2] \\
& +2y(120\zeta_2\ln_2-134\zeta_2^2y^2+17\zeta_2^2y^4+16\zeta_2^2y+16\zeta_2^2y^3+240\zeta_2\ln_2y \\
& \quad -440\zeta_2y^4-120\zeta_2\ln_2y^4-320\zeta_2y^3-240\zeta_2\ln_2y^3+17\zeta_2^2+20\zeta_3y^4 \\
& \quad +320\zeta_2y+440\zeta_2y^2+340y^3\zeta_3-340\zeta_3y-20\zeta_3)/[5y_-^2y_+^2], \\
\text{Im } c_{12}^{(2\ell)} = & \text{Im } a_{12}^{(2\ell)} +4y(y^2-14y+1)H(-1,0;y)/[y_-y_+] -8H(0,0,1;y)y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4y(y^2 + 14y + 1)H(0, 1; y)/[y_- y_+] + 40H(1; y)y \\
& -4y(2 + \zeta_2 y^4 - 6\zeta_2 y^2 - 16y^4 - 12y^3 + 14y^2 + 12y + \zeta_2)H(0; y)/[y_-^2 y_+^2] \\
& -16H(-1; y)y - 8y(2 + y^4 - 14y^3 - 11y^2)H(0, 0, y)/[y_-^2 y_+^2] \\
& + 16y(2y^2 + 7y + 2)H(1, 0; y)/[y_- y_+] \\
& -8y(1 + y^4 + 12y^3 + 18y^2 + 12y)H(0, 1, 0; y)/[y_-^2 y_+^2] \\
& -16H(-1, 0, 0; y)(y^2 + 6y + 1)y/[y_-^2] \\
& -8y(y^2 + 1)^2 H(0, -1, 0; y)/[y_-^2 y_+^2] + 16y(y^2 + 1)H(0, -1; y)/[y_- y_+] \\
& + 4y(1 + y^4 + 4y^3 + 14y^2 + 4y)H(0, 0, 0; y)/[y_-^2 y_+^2] \\
& -2y(7 + 7y^4 - 14\zeta_2 y + 80\zeta_3 y^2 + 48\zeta_3 y + 48y^3 \zeta_3 + 4\zeta_3 y^4 \\
& + 15\zeta_2 y^4 + 14\zeta_2 y^3 + 4\zeta_3 - 15\zeta_2 - 14y^2)/[y_-^2 y_+^2].
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten zu $G_2^{(2\ell, A)}$ lassen sich nicht durch die Koeffizienten von $F_2^{(2\ell)}$ vereinfacht darstellen. Man erhält für die $d_i^{(2\ell)}$, $i = 1 \dots 8$:

$$\begin{aligned}
\text{Re } d_i^{(2\ell)} &= \text{Im } d_i^{(2\ell)} = 0 \quad \text{für } i = 1 \dots 3, \\
\text{Re } d_4^{(2\ell)} &= +4(-y^4 + 9\zeta_2 y^4 + 6\zeta_2 y^3 + 18\zeta_2 y^2 + 2y^2 + 6\zeta_2 y - 1 + 9\zeta_2)y/[y_- y_+^3] \\
&\quad -4(y^2 + 1)(3y^2 + 2y + 3)yH(0, 0; y)/[y_- y_+^3] \\
&\quad +2(5y^2 + 2y + 5)H(0; y)y/[y_+^2], \\
\text{Im } d_4^{(2\ell)} &= -4(y^2 + 1)(3y^2 + 2y + 3)H(0; y)y/[y_- y_+^3] + 2(5y^2 + 2y + 5)y/[y_+^2], \\
\text{Re } d_5^{(2\ell)} &= -4(19y^2 + 36\zeta_2 y^2 + 24\zeta_2 y - 19 + 36\zeta_2)y/[9y_+^2] \\
&\quad +4(3y^2 + 2y + 3)yH(0, 0; y)/[3y_+^2] + 8(3y^2 + 2y + 3)yH(1, 0; y)/[3y_+^2] \\
&\quad +2(51y^2 + 26y + 51)H(0; y)y/[9y_+^2], \\
\text{Im } d_5^{(2\ell)} &= +8(3y^2 + 2y + 3)H(1; y)y/[3y_+^2] + 2(51y^2 + 26y + 51)y/[9y_+^2] \\
&\quad +4(3y^2 + 2y + 3)H(0; y)y/[3y_+^2], \\
\text{Re } d_6^{(2\ell)} &= -16y^3 H(0, 0, 0; y)/[y_-^2 y_+^2] - 8(-4y^2 + 9\zeta_2 y^2 + 32y - 4 + 9\zeta_2)y/[9y_- y_+] \\
&\quad +2(51y^4 + 176y^3 + 144\zeta_2 y^2 - 70y^2 + 176y + 51)H(0; y)y/[9y_-^2 y_+^2] \\
&\quad -4H(0, 0; y)y(3y^4 + 14y^3 - 2y^2 + 14y + 3)/[3y_-^3 y_+], \\
\text{Im } d_6^{(2\ell)} &= -16y^3 H(0, 0; y)/[y_-^2 y_+^2] + 2(51y^4 + 176y^3 - 70y^2 + 176y + 51)y/[9y_-^2 y_+^2] \\
&\quad -4H(0; y)y(3y^4 + 14y^3 - 2y^2 + 14y + 3)/[3y_-^3 y_+], \\
\text{Re } d_7^{(2\ell)} &= +24y^2(3y^2 + 2y + 3)H(-1, 0, 0, y)/[y_- y_+^3] + 16H(0, -1, 0; y)y^2/[y_- y_+] \\
&\quad +4H(0, 0, 0, 0; y)(y^4 + 5y^3 + 38y^2 + 5y + 1)y^2/[y_-^2 y_+^4] \\
&\quad +16y^2(3y^2 + 8y + 3)H(-1, 0, 0, 0, y)/[y_-^2 y_+^2] \\
&\quad +8H(0, 1, 0, 0; y)(7y^4 + 29y^3 + 62y^2 + 29y + 7)y^2/[y_-^2 y_+^4] \\
&\quad -48H(0, 1; y)(4y^4 + 17y^3 + 32y^2 + 17y + 4)\zeta_2 y^2/[y_-^2 y_+^4] \\
&\quad -4(y^4 + 24\zeta_2 y^3 + 64\zeta_2 y^2 - 2y^2 + 24\zeta_2 y + 1)yH(-1, 0; y)/[y_-^2 y_+^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -72y^2\zeta_2(3y^2+2y+3)H(-1;y)/[y-y_+^3] \\
& +12\zeta_2(3y^4+40y^3+62y^2+40y+3)H(1;y)y/[y-y_+^3] \\
& +H(0,0;y)y(39y^6-184y^5-84\zeta_2y^5-432\zeta_2y^4-87y^4-1416\zeta_2y^3 \\
& \quad +152y^3-432\zeta_2y^2+81y^2+32y-84\zeta_2y-33)/[3y_-^2y_+^4] \\
& +H(0;y)y(-687y^6+648\zeta_2y^6+26y^5+1008\zeta_3y^5+8712\zeta_2y^5-648\zeta_2y \\
& \quad +11808\zeta_2y^4+4752\zeta_3y^4+687y^4-52y^3+9216y^3\zeta_3+26y-687 \\
& \quad +14112\zeta_2y^3+687y^2-648\zeta_2y^2+4752\zeta_3y^2+1008\zeta_3y)/[18y_-^2y_+^4] \\
& -2(9y^4+92y^3+130y^2+92y+9)yH(1,0,0;y)/[y-y_+^3] \\
& -8H(0,-1,0,0;y)(5y^4+14y^3+42y^2+14y+5)y^2/[y_-^2y_+^4] \\
& +24H(0,-1;y)(5y^4+14y^3+42y^2+14y+5)\zeta_2y^2/[y_-^2y_+^4] \\
& +48y^2(y^2+y+1)H(0,1,0;y)/[y-y_+^3]-32H(0,0,-1,0;y)y^3/[y_-^2y_+^2] \\
& -2H(0,0,0;y)(9y^4+112y^3+146y^2+196y+9)y^3/[y_-^2y_+^4] \\
& -8H(0,0,1,0;y)(5y^4+14y^3+30y^2+14y+5)y^2/[y_-^2y_+^4] \\
& -2(3y^2+88y+3)yH(1,0;y)/[3y_+^2] \\
& -2y(605-621\zeta_2^2y-3906\zeta_2^2y^2-540\zeta_2\ln_2-621\zeta_2^2y^5-1815y^2 \\
& \quad -3906\zeta_2^2y^4-4626\zeta_2^2y^3-2160\zeta_2\ln_2y+540\zeta_2\ln_2y^6 \\
& \quad +2160\zeta_2\ln_2y^5-2700\zeta_2\ln_2y^2+2700\zeta_2\ln_2y^4-270\zeta_2 \\
& \quad -270\zeta_3-3690\zeta_3y+5760\zeta_2y^2-5670\zeta_2y^4-9390\zeta_2y^5 \\
& \quad +5100\zeta_2y^3+180\zeta_2y^6+4290\zeta_2y-605y^6+5490\zeta_3y^4 \\
& \quad +270\zeta_3y^6+3690\zeta_3y^5+1815y^4-5490\zeta_3y^2)/[45y_-^2y_+^4], \\
\text{Im } d_7^{(2\ell)} = & -32H(0,0,-1;y)y^3/[y_-^2y_+^2]+16y^2(3y^2+8y+3)H(-1,0,0;y)/[y_-^2y_+^2] \\
& +16H(0,-1;y)y^2/[y-y_+]+24y^2(3y^2+2y+3)H(-1,0;y)/[y-y_+^3] \\
& -8H(0,0,1;y)(5y^4+14y^3+30y^2+14y+5)y^2/[y_-^2y_+^4] \\
& -4yH(-1;y)-2(3y^2+88y+3)H(1;y)y/[3y_+^2] \\
& -2H(0,0;y)(9y^4+112y^3+146y^2+196y+9)y^3/[y_-^2y_+^4] \\
& +(39y^5-223y^4-60\zeta_2y^4-252\zeta_2y^3+136y^3+16y^2-252\zeta_2y^2+65y \\
& \quad -60\zeta_2y-33)H(0;y)y/[3y_-^2y_+^3]+48y^2(y^2+y+1)H(0,1;y)/[y-y_+^3] \\
& -8H(0,-1,0;y)(5y^4+14y^3+42y^2+14y+5)y^2/[y_-^2y_+^4] \\
& +8H(0,1,0;y)(7y^4+29y^3+62y^2+29y+7)y^2/[y_-^2y_+^4] \\
& +4H(0,0,0;y)(y^4+5y^3+38y^2+5y+1)y^2/[y_-^2y_+^4] \\
& -2(9y^4+92y^3+130y^2+92y+9)yH(1,0;y)/[y-y_+^3] \\
& -y(687y^6-1008\zeta_3y^5-26y^5-648\zeta_2y^5-1296\zeta_2y^4-687y^4-26y \\
& \quad -4752\zeta_3y^4-9216y^3\zeta_3+52y^3-687y^2+1296\zeta_2y^2+687 \\
& \quad -4752\zeta_3y^2-1008\zeta_3y+648\zeta_2y)/[18y_-^2y_+^4],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Re } d_8^{(2\ell)} = & + 8(3y^4 + 7y^3 + 64y^2 + 7y + 3)yH(-1, 0, 0; y)/[y_- y_+^3] \\
& - 8H(0, 0, 0, 0; y)(y^4 + 5y^3 + 38y^2 + 5y + 1)y^2/[y_-^2 y_+^4] \\
& + 32y^2(y^2 + 17y + 1)H(-1, 0, 0, 0, y)/[y_-^2 y_+^2] \\
& + 16H(0, 1, 0, 0; y)(y^4 + 37y^3 + 54y^2 + 37y + 1)y^2/[y_-^2 y_+^4] \\
& - 192H(0, 1; y)(8y^2 + 13y + 8)\zeta_2 y^3/[y_-^2 y_+^4] \\
& + 32(y^4 - 2\zeta_2 y^3 - y^3 - 34\zeta_2 y^2 - 2\zeta_2 y - y + 1)yH(-1, 0; y)/[y_-^2 y_+^2] \\
& - 24\zeta_2(3y^4 + 7y^3 + 64y^2 + 7y + 3)yH(-1; y)/[y_- y_+^3] \\
& + 24\zeta_2(9y^4 + 14y^3 + 102y^2 + 14y + 9)H(1; y)y/[y_- y_+^3] \\
& - H(0, 0; y)y(125y^6 - 24\zeta_2 y^5 + 230y^5 + 187y^4 - 24\zeta_2 y^4 \\
& \quad - 204y^3 - 480\zeta_2 y^3 - 269y^2 - 24\zeta_2 y^2 - 26y - 24\zeta_2 y - 43)/[y_-^2 y_+^4] \\
& + H(0; y)y(96\zeta_2 y^6 + 61y^6 + 32\zeta_3 y^5 + 22y^5 - 120\zeta_2 y^5 + 1056\zeta_3 y^4 \\
& \quad - 61y^4 + 3168\zeta_2 y^4 + 896\zeta_2 y^3 + 1664y^3 \zeta_3 - 44y^3 - 144\zeta_2 y^2 \\
& \quad + 1056\zeta_3 y^2 - 61y^2 + 32\zeta_3 y + 22y - 200\zeta_2 y + 61 - 240\zeta_2)/[2y_-^2 y_+^4] \\
& - 8(3y^4 + 6y^3 + 14y^2 + 6y + 3)H(0, -1, 0; y)y/[y_- y_+^3] \\
& - 4(15y^4 + 16y^3 + 198y^2 + 16y + 15)yH(1, 0, 0; y)/[y_- y_+^3] \\
& + 16H(0, -1, 0, 0; y)(y^4 - 19y^3 - 16y^2 - 19y + 1)y^2/[y_-^2 y_+^4] \\
& - 48H(0, -1; y)(y^4 - 19y^3 - 16y^2 - 19y + 1)\zeta_2 y^2/[y_-^2 y_+^4] \\
& + 8(3y^4 + 13y^3 + 64y^2 + 13y + 3)yH(0, 1, 0; y)/[y_- y_+^3] \\
& + 64H(0, 0, -1, 0; y)y^3/[y_-^2 y_+^2] - 2(25y^2 + 86y + 25)yH(1, 0; y)/[y_+^2] \\
& + 4H(0, 0, 0; y)y(14y^5 - 175y^4 - 56y^3 - 14y^2 + 6y + 9)/[y_-^2 y_+^4] \\
& + 16H(0, 0, 1, 0; y)(y^4 - 19y^3 - 28y^2 - 19y + 1)y^2/[y_-^2 y_+^4] \\
& + y(85 - 68\zeta_2^2 y - 20\zeta_2^2 y^2 - 240\zeta_2 \ln_2 - 68\zeta_2^2 y^5 - 60\zeta_3 y^6 - 320\zeta_3 y^5 \\
& \quad - 20\zeta_2^2 y^4 + 960\zeta_2^2 y^3 - 960\zeta_2 \ln_2 y + 240\zeta_2 \ln_2 y^6 + 255y^4 \\
& \quad + 960\zeta_2 \ln_2 y^5 - 1200\zeta_2 \ln_2 y^2 + 1200\zeta_2 \ln_2 y^4 - 480\zeta_2 + 3340\zeta_3 y^2 \\
& \quad + 60\zeta_3 + 320\zeta_3 y - 5560\zeta_2 y^2 + 4400\zeta_2 y^4 + 3480\zeta_2 y^5 - 3600\zeta_2 y^3 \\
& \quad + 1640\zeta_2 y^6 + 120\zeta_2 y - 85y^6 - 3340\zeta_3 y^4 - 255y^2)/[5y_-^2 y_+^4], \\
\text{Im } d_8^{(2\ell)} = & + 64H(0, 0, -1; y)y^3/[y_-^2 y_+^2] + 32y^2(y^2 + 17y + 1)H(-1, 0, 0; y)/[y_-^2 y_+^2] \\
& + 16H(0, 0, 1; y)(y^4 - 19y^3 - 28y^2 - 19y + 1)y^2/[y_-^2 y_+^4] \\
& + 8(3y^4 + 13y^3 + 64y^2 + 13y + 3)H(0, 1; y)y/[y_- y_+^3] \\
& + 8(3y^4 + 7y^3 + 64y^2 + 7y + 3)yH(-1, 0; y)/[y_- y_+^3] \\
& + 32(y^2 + y + 1)yH(-1; y)/[y_+^2] - 2(25y^2 + 86y + 25)H(1; y)y/[y_+^2] \\
& + 4H(0, 0; y)y(14y^5 - 175y^4 - 56y^3 - 14y^2 + 6y + 9)/[y_-^2 y_+^4] \\
& - (125y^5 + 105y^4 - 8\zeta_2 y^4 + 64\zeta_2 y^3 + 82y^3 - 286y^2 + 64\zeta_2 y^2 \\
& \quad - 8\zeta_2 y + 17y - 43)H(0; y)y/[y_-^2 y_+^3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 16H(0, -1, 0; y)(y^4 - 19y^3 - 16y^2 - 19y + 1)y^2/[y_-^2 y_+^4] \\
& - 8(3y^4 + 6y^3 + 14y^2 + 6y + 3)H(0, -1; y)y/[y_- y_+^3] \\
& + 16H(0, 1, 0; y)(y^4 + 37y^3 + 54y^2 + 37y + 1)y^2/[y_-^2 y_+^4] \\
& - 8H(0, 0, 0; y)(y^4 + 5y^3 + 38y^2 + 5y + 1)y^2/[y_-^2 y_+^4] \\
& - 4(15y^4 + 16y^3 + 198y^2 + 16y + 15)yH(1, 0; y)/[y_- y_+^3] \\
& + y(96\zeta_2 y^6 + 61y^6 + 32\zeta_3 y^5 + 22y^5 + 104\zeta_2 y^5 + 1056\zeta_3 y^4 + 22y \\
& \quad - 61y^4 + 368\zeta_2 y^4 + 1664y^3 \zeta_3 - 44y^3 - 61y^2 + 61 + 1056\zeta_3 y^2 \\
& \quad - 368\zeta_2 y^2 + 32\zeta_3 y - 104\zeta_2 y - 96\zeta_2)/[2y_-^2 y_+^4].
\end{aligned}$$

Für den pseudoskalaren Formfaktor $A^{(2\ell, A)}$ findet man:

$$\begin{aligned}
\text{Re } e_1^{(2\ell)} &= -\frac{4}{11}\text{Re } e_3^{(2\ell)} = +\frac{(y^2 + 1)H(0; y)}{3} + \frac{y_- y_+}{6}, \\
\text{Im } e_1^{(2\ell)} &= -\frac{4}{11}\text{Im } e_3^{(2\ell)} = +\frac{y^2}{3} + \frac{1}{3}, \\
\text{Re } e_2^{(2\ell)} &= -\frac{6}{5}\text{Re } e_6^{(2\ell)} = +\frac{y_- y_+}{2}, \\
\text{Im } e_2^{(2\ell)} &= \text{Re } e_6^{(2\ell)} = 0, \\
\text{Re } e_4^{(2\ell)} &= + (y^2 + 1)H(0; y)/2 + (y^2 + 1)^2 H(0, 0; y)/[y_- y_+] \\
& \quad + (y^4 - 24y^4 \zeta_2 - 2y^2 - 48\zeta_2 y^2 + 1 - 24\zeta_2)/[8y_- y_+], \\
\text{Im } e_4^{(2\ell)} &= + \frac{(y^2 + 1)^2 H(0; y)}{[y_- y_+]} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}, \\
\text{Re } e_5^{(2\ell)} &= -\frac{5(y^2 + 1)H(0; y)}{9} + \frac{5y_- y_+}{36}, \\
\text{Im } e_5^{(2\ell)} &= -\frac{5y^2}{9} - \frac{5}{9}, \\
\text{Re } e_7^{(2\ell)} &= + (y^2 + 1)(67y^2 + 162\zeta_2 y^2 - 67 + 18\zeta_2)H(0, y)/[36y_- y_+] + 2y^2 H(0, 0; y) \\
& \quad - (y^2 + 1)H(-1, 0; y) - (y^2 + 1)^2 H(0, 1, 0; y)/[y_- y_+] + (y^2 + 1)H(1, 0; y) \\
& \quad + (y^2 + 1)^2 H(0, -1, 0; y)/[y_- y_+] - 2y^2 (y^2 + 1)H(0, 0, 0; y)/[y_- y_+] \\
& \quad + (-72\zeta_3 y^4 - 648y^4 \zeta_2 + 95y^4 - 144\zeta_3 y^2 - 190y^2 \\
& \quad + 576\zeta_2 y^2 + 95 + 72\zeta_2 - 72\zeta_3)/[144y_- y_+], \\
\text{Im } e_7^{(2\ell)} &= + 2H(0; y)y^2 + (y^2 + 1)H(1; y) - 2y^2 (y^2 + 1)H(0, 0; y)/[y_- y_+] \\
& \quad - (y^2 + 1)^2 H(0, 1; y)/[y_- y_+] + (y^2 + 1)^2 H(0, -1; y)/[y_- y_+] \\
& \quad + (y^2 + 1)(67y^2 + 18\zeta_2 y^2 - 67 + 18\zeta_2)/[36y_- y_+] - (y^2 + 1)H(-1; y), \\
\text{Re } e_8^{(2\ell)} &= - (y^2 + 1)(10\zeta_2 y^2 - y^2 + 1 + 10\zeta_2)H(0; y)/[y_- y_+] \\
& \quad - 12\zeta_2 (y^2 + 1)^2 H(1, y)/[y_- y_+] + 2(y^2 + 1)^2 H(0, 1, 0; y)/[y_- y_+] \\
& \quad + (y^2 + 1)H(1, 0; y) + (y^2 + 1)H(0, 0; y)/2 + 3(y^2 + 1)^2 H(0, 0, 0; y)/[y_- y_+]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4(y^2 + 1)^2 H(1, 0, 0; y) / [y_- y_+] + 11y^2/16 - 2\zeta_2 y^2 - 11/16 - 2\zeta_2, \\
\text{Im } e_8^{(2\ell)} = & + (y^2 + 1)H(0; y)/2 + (y^2 + 1)H(1; y) + 4(y^2 + 1)^2 H(1, 0; y) / [y_- y_+] \\
& + 3(y^2 + 1)^2 H(0, 0; y) / [y_- y_+] + 2(y^2 + 1)^2 H(0, 1; y) / [y_- y_+] \\
& - (y^2 + 1)(-y^2 + 4\zeta_2 y^2 + 4\zeta_2 + 1) / [y_- y_+], \\
\text{Re } e_9^{(2\ell)} = & + 4(y^2 + 1)(-7 + 9\zeta_2)H(0; y)/27 + 16\zeta_2(y^2 + 1)H(1, y)/3 \\
& - 4(y^2 + 1)H(0, 1, 0; y)/3 - 10(y^2 + 1)H(0, 0; y)/9 \\
& - 2(y^2 + 1)H(0, 0, 0; y)/3 - 4(y^2 + 1)H(1, 0, 0; y)/3 \\
& - 4\zeta_3 y^2/3 - 247y^2/216 + 8\zeta_3 y^2/3 + 34\zeta_2 y^2/9 - 20(y^2 + 1)H(1, 0; y)/9 \\
& + 46\zeta_2/9 + 247/216 + 8\zeta_3/3 - 4\zeta_3/3 - 8(y^2 + 1)H(1, 1, 0; y)/3, \\
\text{Im } e_9^{(2\ell)} = & - 10(y^2 + 1)H(0; y)/9 - 20(y^2 + 1)H(1; y)/9 - 4(y^2 + 1)H(1, 0; y)/3 \\
& - 2(y^2 + 1)H(0, 0; y)/3 - 4(y^2 + 1)H(0, 1; y)/3 - 8(y^2 + 1)H(1, 1; y)/3 \\
& - 28y^2/27 - 28/27, \\
\text{Re } e_{10}^{(2\ell)} = & + 4(y^2 + 1)(9\zeta_2 y^2 - 14y^2 - 18y\zeta_2 + 40y + 9\zeta_2 - 14)H(0; y) / [27y_-^2] \\
& + 2H(0, 0; y)y_+(y^2 + 1)(5y^2 - 14y + 5) / [9y_-^3] - 2(y^2 + 1)H(0, 0, 0; y)/3 \\
& + (-288\zeta_3 y^3 + 1969y^3 + 288\zeta_3 y^3 - 1152\zeta_2 y^3 + 288\zeta_3 y^2 \\
& + 1152\zeta_2 y^2 - 288\zeta_3 y^2 - 2161y^2 + 1152y\zeta_2 - 2161y + 288\zeta_3 y \\
& - 288\zeta_3 y + 1969 + 288\zeta_3 - 1152\zeta_2 - 288\zeta_3) / [216y_-], \\
\text{Im } e_{10}^{(2\ell)} = & + 2H(0; y)y_+(y^2 + 1)(5y^2 - 14y + 5) / [9y_-^3] - 2(y^2 + 1)H(0, 0; y)/3 \\
& - 8(y^2 + 1)(7y^2 - 20y + 7) / [27y_-^2], \\
\text{Re } e_{11}^{(2\ell)} = & + 4(y^4 + 2y^3 - 4y^2 + 2y + 3)H(-1, 0, 0; y) / [y_- y_+] \\
& + H(0, 0; y)(-50y^5 + 666y^5\zeta_2 - 185y^4 + 666y^4\zeta_2 + 864\zeta_2 y^3 \\
& - 90y^3 + 504\zeta_2 y^2 - 36y^2 - 148y + 18y\zeta_2 + 18\zeta_2 - 67) / [18y_- y_+^2] \\
& + 2(7y^2 + 1)(y^2 + 1)H(0, 0, -1, 0; y) / [y_- y_+] \\
& - 2(y^2 + 3)(y^2 + 1)H(1, 0, 0, 0; y) / [y_- y_+] - 6(y^2 + 1)H(-1, 1, 0; y) \\
& + 2H(0, -1, 0, 0; y)(y^5 + y^4 + 8y^3 + 3y + 3) / [y_- y_+^2] \\
& + (79y^4 + 6y^3 + 66y^2 + 6y - 61)H(1, 0, 0; y) / [6y_- y_+] \\
& - 2(y^2 - 5)(y^2 + 1)H(-1, 0, 0, 0; y) / [y_- y_+] \\
& - H(0, -1; y)(7y^5 + 7y^4 + 50y^3 + 2y^2 + 19y + 19)\zeta_2 / [y_- y_+^2] \\
& + 52(y^2 + 1)H(1, 1, 0; y)/3 + 2(y^2 + 1)H(-1, -1, 0; y) \\
& - H(0, 0, 0, 0; y)(2y + 1)(6y^2 + 3y + 7)y^2 / [y_- y_+^2] \\
& - 2H(0, 1, 0, 0; y)(7y^5 + 7y^4 + 11y^3 + 5y^2 + y + 1) / [y_- y_+^2] \\
& + (15235 + 15235y - 30470y^3 + 15235y^5 + 15235y^4 - 13608\zeta_2^2 \\
& + 103680\zeta_2 \ln_2 y^2 - 13608y\zeta_2^2 + 77760\zeta_2 \ln_2 y + 77760\zeta_2 \ln_2 y^4 \\
& - 135216\zeta_2^2 y^2 - 104112y^3\zeta_2^2 + 103680\zeta_2 \ln_2 y^3 + 28800\zeta_3 y^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2880\zeta_3 y + 28800\zeta_3 y^4 - 25920\zeta_3 y^2 - 25920\zeta_3 y^3 + 25920\zeta_2 \ln_2 \\
& - 106056y^4 \zeta_2^2 - 106056y^5 \zeta_2^2 + 61440\zeta_2 - 2880\zeta_3 - 30470y^2 \\
& + 31680\zeta_3 + 87360y\zeta_2 + 60480\zeta_3 y^2 + 36000\zeta_3 y - 40320\zeta_3 y^4 \\
& - 44640\zeta_3 y^5 - 106560\zeta_2 y^3 + 19200y^5 \zeta_2 + 60480\zeta_3 y^3 \\
& - 158400\zeta_2 y^2 + 96960y^4 \zeta_2 + 25920y^5 \zeta_2 \ln_2)/[4320y_- y_+^2] \\
& - 6(y^2 + 1)H(1, -1, 0; y) - 4(y^2 + 1)^2 H(1, 0, 1, 0; y)/[y_- y_+] \\
& - 2(y^2 + 1)^2 H(0, -1, -1, 0; y)/[y_- y_+] - 4(y^2 + 1)^2 H(-1, 0, -1, 0; y)/[y_- y_+] \\
& - 2(y^2 + 1)(61\zeta_2 y^2 + 3\zeta_3 y^2 - 9y\zeta_2 - 52\zeta_2 + 3\zeta_3)H(1; y)/[3y_- y_+] \\
& + 4(y^2 + 1)^2 H(1, 0, -1, 0; y)/[y_- y_+] + 6(y^2 + 1)^2 H(0, 1, -1, 0; y)/[y_- y_+] \\
& + 6(y^2 + 1)^2 H(0, -1, 1, 0; y)/[y_- y_+] + 4(y^2 + 1)^2 H(-1, 0, 1, 0; y)/[y_- y_+] \\
& + 2(y^2 + 1)(y^2 + \zeta_2 y^2 - 11\zeta_2 - 1)H(-1, 0; y)/[y_- y_+] \\
& + H(0, 1; y)(35y^5 + 35y^4 + 58y^3 + 34y^2 + 11y + 11)\zeta_2/[y_- y_+^2] \\
& + 2(34y^4 + 15y^3 - 15y^2 + 15y - 1)H(0, 1, 0; y)/[3y_- y_+] \\
& + (53y^4 + 108y^4 \zeta_2 - 54y^3 + 360\zeta_2 y^2 + 54y - 53 \\
& + 252\zeta_2)H(1, 0; y)/[18y_- y_+] - 10(y^2 + 1)^2 H(0, 1, 1, 0; y)/[y_- y_+] \\
& - (11y^4 \zeta_2 - 2\zeta_3 y^4 + 24\zeta_2 y^3 - 4\zeta_3 y^2 - 48\zeta_2 y^2 + 37\zeta_2 + 24y\zeta_2 \\
& - 2\zeta_3)H(-1; y)/[y_- y_+] - 4y(2y^2 - y + 1)H(0, -1, 0; y)/[y_-] \\
& - 2H(0, 0, 1, 0; y)(11y^5 + 11y^4 + 10y^3 + 14y^2 + y + 1)/[y_- y_+^2] \\
& - H(0; y)(405\zeta_3 y^5 - 121y^5 + 1656y^5 \zeta_2 + 2844y^4 \zeta_2 - 283y^4 + 405\zeta_3 y^4 \\
& + 2862\zeta_2 y^3 - 162y^3 + 270\zeta_3 y^3 + 162y^2 - 162\zeta_3 y^2 - 1350\zeta_2 y^2 \\
& - 351\zeta_3 y - 630y\zeta_2 + 283y - 351\zeta_3 - 198\zeta_2 + 121)/[54y_- y_+^2] \\
& + H(0, 0, 0; y)(62y^5 + 128y^4 + 189y^3 - 45y^2 - 35y - 11)/[6y_- y_+^2], \\
\text{Im } e_{11}^{(2\ell)} = & -4(y^2 + 1)^2 H(1, 0, 1; y)/[y_- y_+] + 2(y^2 + 1)H(-1, -1; y) \\
& - 2(y^2 + 1)(-y^2 + \zeta_2 y^2 + \zeta_2 + 1)H(-1; y)/[y_- y_+] \\
& - 2(y^2 - 5)(y^2 + 1)H(-1, 0, 0; y)/[y_- y_+] \\
& + 2(34y^4 + 15y^3 - 15y^2 + 15y - 1)H(0, 1; y)/[3y_- y_+] \\
& - 4y(2y^2 - y + 1)H(0, -1; y)/[y_-] + 52(y^2 + 1)H(1, 1; y)/3 \\
& + (-540y^5 \zeta_2 + 121y^5 - 405\zeta_3 y^5 + 283y^4 - 540y^4 \zeta_2 \\
& - 405\zeta_3 y^4 + 162y^3 + 540\zeta_2 y^3 - 270\zeta_3 y^3 + 162\zeta_3 y^2 \\
& - 162y^2 + 540\zeta_2 y^2 + 351\zeta_3 y - 283y - 121 + 351\zeta_3)/[54y_- y_+^2] \\
& - 2(y^2 + 3)(y^2 + 1)H(1, 0, 0; y)/[y_- y_+] + 4(y^2 + 1)^2 H(1, 0, -1; y)/[y_- y_+] \\
& - 2(y^2 + 1)^2 H(0, -1, -1; y)/[y_- y_+] - 6(y^2 + 1)H(-1, 1; y) \\
& + 6(y^2 + 1)^2 H(0, 1, -1; y)/[y_- y_+] - 4(y^2 + 1)^2 H(-1, 0, -1; y)/[y_- y_+] \\
& + (234y^4 \zeta_2 - 50y^4 - 135y^3 + 45y^2 + 252\zeta_2 y^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -81y - 67 + 18\zeta_2)H(0; y)/[18y - y_+] \\
& + (36y^4\zeta_2 + 53y^4 - 54y^3 + 72\zeta_2y^2 + 54y - 53 \\
& \quad + 36\zeta_2)H(1; y)/[18y - y_+] - 10(y^2 + 1)^2H(0, 1, 1; y)/[y - y_+] \\
& - 2H(0, 1, 0; y)(7y^5 + 7y^4 + 11y^3 + 5y^2 + y + 1)/[y - y_+]^2 \\
& + 4(y^4 + 2y^3 - 4y^2 + 2y + 3)H(-1, 0, y)/[y - y_+] \\
& + (79y^4 + 6y^3 + 66y^2 + 6y - 61)H(1, 0; y)/[6y - y_+] \\
& + 2H(0, -1, 0; y)(y^5 + y^4 + 8y^3 + 3y + 3)/[y - y_+]^2 \\
& + 4(y^2 + 1)^2H(-1, 0, 1; y)/[y - y_+] + 6(y^2 + 1)^2H(0, -1, 1; y)/[y - y_+] \\
& - 2H(0, 0, 1; y)(11y^5 + 11y^4 + 10y^3 + 14y^2 + y + 1)/[y - y_+]^2 \\
& + H(0, 0; y)(62y^5 + 128y^4 + 189y^3 - 45y^2 - 35y - 11)/[6y - y_+]^2 \\
& + 2(7y^2 + 1)(y^2 + 1)H(0, 0, -1; y)/[y - y_+] - 6(y^2 + 1)H(1, -1; y) \\
& - H(0, 0, 0; y)(2y + 1)(6y^2 + 3y + 7)y^2/[y - y_+]^2, \\
\text{Re } e_{12}^{(2\ell)} = & -8(y^4 + 2y^3 + 2y^2 - 2y + 1)H(-1, 0, 0, 0; y)/[y - y_+] \\
& - 2(3y^4 - 7y^3 + 23y^2 - 7y + 4)H(1, 0, 0; y)/[y - y_+] \\
& - 4(3y^2 - 1)(y^2 + 1)H(0, 0, -1, 0; y)/[y - y_+] \\
& - 48\zeta_2(y^2 + 1)^2H(1, 1; y)/[y - y_+] \\
& - 12H(0, -1; y)(y^2 + 4y + 1)(y^2 + 1)\zeta_2/[y_+]^2 \\
& + H(0, 0, 0, 0; y)(27y^5 + 27y^4 + 44y^3 + 24y^2 + 7y + 7)/[y - y_+]^2 \\
& + (1285 + 1285y - 2570y^3 + 1285y^5 + 1285y^4 + 2176\zeta_2^2 - 1920y^5\zeta_2 \ln_2 \\
& \quad - 7680\zeta_2 \ln_2 y^2 + 3008y\zeta_2^2 - 5760\zeta_2 \ln_2 y - 5760\zeta_2 \ln_2 y^4 \\
& \quad + 7296\zeta_2^2 y^2 + 3328y^3\zeta_2^2 - 7680\zeta_2 \ln_2 y^3 - 480\zeta_3 y^5 \\
& \quad - 480\zeta_3 y - 1440\zeta_3 y^4 + 2880\zeta_3 y^2 + 960\zeta_3 y^3 - 1920\zeta_2 \ln_2 \\
& \quad + 2304y^4\zeta_2^2 + 3136y^5\zeta_2^2 + 1200\zeta_2 - 1440\zeta_3 - 2570y^2 \\
& \quad + 160\zeta_3 - 2320y\zeta_2 - 6080\zeta_3 y^2 + 1440\zeta_3 y + 2080\zeta_3 y^4 \\
& \quad - 1120\zeta_3 y^5 + 14560\zeta_2 y^3 - 12240y^5\zeta_2 - 4160\zeta_3 y^3 \\
& \quad + 13280\zeta_2 y^2 - 14480y^4\zeta_2)/[160y - y_+]^2 \\
& + 2H(0, 1, 0, 0; y)(7y^5 - y^4 + 8y^3 + 12y^2 + 11y + 3)/[y - y_+]^2 \\
& + 2\zeta_2(7y^3 - 23y^2 + 19y - 11)H(1; y)/[y_+] \\
& + H(0; y)(16\zeta_3 y^5 + 5y^5 + 38y^5\zeta_2 + 54y^4\zeta_2 + 3y^4 + 32\zeta_2 y^2 \\
& \quad - 16\zeta_3 y^4 + 280\zeta_2 y^3 - 2y^3 - 16\zeta_3 y^3 + 16\zeta_3 y^2 + 2y^2 \\
& \quad - 30y\zeta_2 - 3y + 16\zeta_3 y - 16\zeta_3 + 10\zeta_2 - 5)/[2y - y_+]^2 \\
& + 4(-2y^4 + 5y^4\zeta_2 + 8\zeta_2 y^3 + 10\zeta_2 y^2 \\
& \quad - 8y\zeta_2 + 5\zeta_2 + 2)H(-1, 0, y)/[y - y_+] \\
& - (40y^4\zeta_2 - 19y^4 + 2y^3 + 80\zeta_2 y^2 - 2y + 19 + 40\zeta_2)H(1, 0; y)/[y - y_+]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4y_+(y^2 + 1)H(0, -1, 0, y)/[y_-] + 2(y^2 + 1)H(1, 1, 0; y) \\
& - (7y^4 + 28y^3 - 8y^2 + 28y + 9)H(0, 1, 0; y)/[y_-y_+] \\
& - H(0, 0; y)(-28y^5 + 68y^5\zeta_2 + 64y^4\zeta_2 - 37y^4 + 8y^3 + 108\zeta_2y^3 \\
& \quad + 76\zeta_2y^2 + 6y^2 + 28y\zeta_2 - 12y + 24\zeta_2 - 1)/[y_-y_+^2] \\
& + 8(y^2 + 1)^2H(-1, 0, -1, 0; y)/[y_-y_+] + 12(y^2 + 1)^2H(1, 0, 0, 0; y)/[y_-y_+] \\
& - H(0, 0, 0; y)(17y^5 + 29y^4 + 142y^3 + 18y^2 - 15y + 1)/[2y_-y_+^2] \\
& - 8H(0, 1; y)(4y^5 - 2y^4 + 5y^3 + 11y^2 + 10y + 4)\zeta_2/[y_-y_+^2] \\
& + 16(y^2 + 1)^2H(1, 1, 0, 0; y)/[y_-y_+] - 8(y^2 + 1)^2H(-1, 0, 1, 0; y)/[y_-y_+] \\
& + 2(-2\zeta_3y^4 + 15y^4\zeta_2 + 36\zeta_2y^3 - 54\zeta_2y^2 - 4\zeta_3y^2 + 36y\zeta_2 - 2\zeta_3 \\
& \quad + 15\zeta_2)H(-1; y)/[y_-y_+] + 8(y^2 + 1)^2H(1, 0, 1, 0; y)/[y_-y_+] \\
& + 2H(0, 0, 1, 0; y)(11y^5 + 15y^4 + 10y^3 + 10y^2 - 5y - 1)/[y_-y_+^2] \\
& + 4(y^2 + 1)^2H(0, 1, 1, 0; y)/[y_-y_+] \\
& + 4H(0, -1, 0, 0; y)(y^2 + 4y + 1)(y^2 + 1)/[y_+^2] \\
& - 2(5y^4 + 12y^3 - 18y^2 + 12y + 5)H(-1, 0, 0; y)/[y_-y_+], \\
\text{Im } e_{12}^{(2\ell)} = & + 4(y^2 + 1)^2H(0, 1, 1; y)/[y_-y_+] - 4(3y^2 - 1)(y^2 + 1)H(0, 0, -1; y)/[y_-y_+] \\
& + 2H(0, 0, 1; y)(11y^5 + 15y^4 + 10y^3 + 10y^2 - 5y - 1)/[y_-y_+^2] \\
& - 8(y^2 + 1)^2H(-1, 0, 1; y)/[y_-y_+] + 8(y^2 + 1)^2H(-1, 0, -1; y)/[y_-y_+] \\
& + 8(y^2 + 1)^2H(1, 0, 1; y)/[y_-y_+] + 16(y^2 + 1)^2H(1, 1, 0; y)/[y_-y_+] \\
& - (-28y^4 + 14y^4\zeta_2 - 4\zeta_2y^3 - 9y^3 + 17y^2 + 24\zeta_2y^2 + 4y\zeta_2 \\
& \quad - 11y - 1 + 10\zeta_2)H(0; y)/[y_-y_+] + 4y_+(y^2 + 1)H(0, -1, y)/[y_-] \\
& - (16y^4\zeta_2 - 19y^4 + 2y^3 + 32\zeta_2y^2 - 2y + 16\zeta_2 + 19)H(1; y)/[y_-y_+] \\
& - 2(5y^4 + 12y^3 - 18y^2 + 12y + 5)H(-1, 0; y)/[y_-y_+] \\
& + 2H(0, 1, 0; y)(7y^5 - y^4 + 8y^3 + 12y^2 + 11y + 3)/[y_-y_+^2] \\
& - 2(3y^4 - 7y^3 + 23y^2 - 7y + 4)H(1, 0; y)/[y_-y_+] \\
& + 4H(0, -1, 0; y)(y^2 + 1)(y^2 + 4y + 1)/[y_+^2] \\
& - H(0, 0; y)(17y^5 + 29y^4 + 142y^3 + 18y^2 - 15y + 1)/[2y_-y_+^2] \\
& + H(0, 0, 0; y)(27y^5 + 27y^4 + 44y^3 + 24y^2 + 7y + 7)/[y_-y_+^2] \\
& - (7y^4 + 28y^3 - 8y^2 + 28y + 9)H(0, 1; y)/[y_-y_+] \\
& + 4(y^2 + 1)(-2y^2 + \zeta_2y^2 + \zeta_2 + 2)H(-1, y)/[y_-y_+] \\
& - 8(y^4 + 2y^3 + 2y^2 - 2y + 1)H(-1, 0, 0; y)/[y_-y_+] \\
& + 12(y^2 + 1)^2H(1, 0, 0; y)/[y_-y_+] + 2(y^2 + 1)H(1, 1; y) \\
& + 5y^4 + 16\zeta_3y^4 + 4y^4\zeta_2 + 8y^3 + 6y^2 - 16\zeta_3y^2 - 4\zeta_2y^2 \\
& \quad + 8y - 8y\zeta_2 - 8\zeta_2 + 16\zeta_3 + 5/[2y_+^2].
\end{aligned}$$

Renormierungsskalen-Abhängigkeit

Die Abhängigkeit der Formfaktoren von der Renormierungsskala μ ergibt sich durch die Renormierung der starken Kopplungskonstanten. Somit sind die sich ergebenden μ -abhängigen Terme direkt proportional zum ersten Koeffizienten (4.46)

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{12\pi} (33 - 2N_F) \\ &= \frac{1}{3\pi} \left[\frac{11}{4}N_C - T_F(N_L + 1) \right] \end{aligned}$$

der QCD β -Funktion (4.45) [ESW96]. Wählt man die Renormierungsskala $\mu \neq m$, so erhält man folgende Terme, die zu den in den Gleichungen (3.70)-(3.74) definierten Formfaktoren hinzuaddiert werden müssen. Der Index „RS“ an den Formfaktoren steht für „Renormierungsskala“. Man erhält ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} F_{i,RS}^{(2\ell)} &= C^2(\varepsilon) \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^{-2\varepsilon} C_F \left(T_F(N_L + 1) - \frac{11}{4}N_C \right) \left(\frac{1}{y_+ y_-} \right) \\ &\quad \times \left[M_i^{(2\ell)} \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) + N_i^{2\ell} \ln^2 \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right], \quad (C.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{i,RS}^{(2\ell,A)} &= C^2(\varepsilon) \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^{-2\varepsilon} C_F \left(T_F(N_L + 1) - \frac{11}{4}N_C \right) \left(\frac{1}{y_+ y_-} \right) \\ &\quad \times \left[O_i^{(2\ell)} \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) + P_i^{2\ell} \ln^2 \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right], \quad (C.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{RS}^{(2\ell,A)} &= C^2(\varepsilon) \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^{-2\varepsilon} C_F \left(T_F(N_L + 1) - \frac{11}{4}N_C \right) \left(\frac{1}{y_+ y_-} \right) \\ &\quad \times \left[R^{(2\ell)} \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) + S^{2\ell} \ln^2 \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right], \quad (C.3) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} M_1^{(2\ell)} &= \frac{2}{3\varepsilon} \left[(1 + y^2)H(0; y) - y_+ y_- \right] + H(0; y)y_-^2 + \frac{2}{3}(1 + y^2)H(0, 0; y) \\ &\quad + \frac{4}{3}(1 + y^2)H(1, 0; y) - \frac{4}{3}(2\zeta_2 y^2 - 1 + y^2 + 2\zeta_2) \\ &\quad + i\pi \left\{ \frac{2}{3\varepsilon}(1 + y^2) + \frac{2}{3}(1 + y^2)H(0; y) + \frac{4}{3}(1 + y^2)H(1; y) + y_-^2 \right\}, \end{aligned}$$

$$N_1^{(2\ell)} = \frac{1}{3}(1 + y^2)H(0; y) - \frac{y_+ y_-}{3} + i\pi \left[\frac{1}{3}(1 + y^2) \right],$$

$$M_2^{(2\ell)} = -\frac{4}{3}H(0; y)y - i\pi \frac{4}{3}y,$$

$$N_2^{(2\ell)} = 0,$$

$$\begin{aligned}
O_1^{(2\ell)} &= \frac{2}{3\varepsilon} [(1+y^2)H(0;y) - y_+y_-] + \frac{1}{3}(3+2y+3y^2)H(0;y) \\
&\quad + \frac{2}{3}(1+y^2)H(0,0;y) + \frac{4}{3}(1+y^2)H(1,0;y) - \frac{4}{3}(-1+2\zeta_2y^2+y^2+2\zeta_2) \\
&\quad + i\pi \left\{ \frac{2}{3\varepsilon}(1+y^2) + \frac{2}{3}(1+y^2)H(0;y) + \frac{4}{3}(1+y^2)H(1;y) + \frac{1}{3}(3+2y+3y^2) \right\}, \\
P_1^{(2\ell)} &= \frac{1}{3}(1+y^2)H(0;y) - \frac{y_+y_-}{3} + i\pi \left[\frac{1+y^2}{3} \right], \\
O_2^{(2\ell)} &= -\frac{4}{3} \frac{(3+2y+3y^2)yH(0;y)}{y_+^2} + \frac{8yy_-}{(y_+)} - i\pi \left[\frac{4(3+2y+3y^2)y}{3(y_+)^2} \right], \\
P_2^{(2\ell)} &= 0, \\
R^{(2\ell)} &= \frac{2}{3\varepsilon} \left[(1+y^2)H(0;y) + \frac{y_+y_-}{2} \right] + \frac{2}{3}(1+y^2)H(0,0;y) + \frac{4}{3}(1+y^2)H(1,0;y) \\
&\quad - \frac{2}{3}(4\zeta_2y^2+1+4\zeta_2-y^2) \\
&\quad + i\pi \left\{ \frac{2}{3\varepsilon}(1+y^2) + \frac{2}{3}(1+y^2)H(0;y) + \frac{4}{3}(1+y^2)H(1;y) \right\}, \\
S^{(2\ell)} &= \frac{1}{3}(1+y^2)H(0;y) + \frac{y_+y_-}{6} + i\pi \frac{(1+y^2)}{3}.
\end{aligned}$$

Die Formfaktoren mit voller Renormierungsskalen-Abhängigkeit lauten somit:

$$F_1^{(2\ell)}(\mu \neq m) = F_1^{(2\ell)}(\mu = m) + F_{1,\text{RS}}^{(2\ell)}.$$

Für die Formfaktoren $F_2^{(2\ell)}(\mu \neq m)$, $G_1^{(2\ell)}(\mu \neq m)$, $G_2^{(2\ell)}(\mu \neq m)$ und $A^{(2\ell)}(\mu \neq m)$ sehen die Gleichungen völlig analog aus. In den Gleichungen (3.70)-(3.74) sind die Formfaktoren für $\mu = m$ gegeben.

C.1.2 Typ-B-Beiträge

Die UV -renormierten Formfaktoren zu den verschiedenen berechneten Typ-B-Beiträgen werden mit kompletter Renormierungsskalen-Abhängigkeit angegeben. Diese besitzen nur eine Farbstruktur und sind allesamt IR -endlich. Jeweils nur der Realteil des Formfaktors G_1 in den verschiedenen Massenkombinationen ist abhängig von der Renormierungsskala. Man erhält für den Fall massiver Quarks in der Dreieckschleife und massiver auslaufender Quarks:

$$\begin{aligned}
\text{Re} G_1^{(2\ell,B),\text{mm}} &= \frac{C_F T_F}{y_+^3 y_-^3} \left[+ 3y_-^3 y_+^3 \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + 9 + 27y^4 - 27y^2 + 32\zeta_3 y^2 \right. \\
&\quad \left. - 9y^6 - 32y^4 \zeta_3 - 16y^5 \zeta_3 + 16y \zeta_3 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -32y^2y_+^2H(0,0,-1,0;y) + 16yy_-y_+^3H(0,-1,0,y) \\
& + 64y^2y_+^2H(0,-1,0,0;y) + 32y^2y_+^2H(-1,0,0,0;y) \\
& - 4y_+^2(y^4 - 2y^2 + 16y^2\zeta_2 + 1)H(-1,0;y) \\
& + 64y^2y_+^2H(0,0,1,0;y) - 32yy_-y_+^3H(-1,0,0,y) \\
& + 256y^2y_+^2\zeta_2^2/5 - 192y^2y_+^2\zeta_2H(0,-1;y) \\
& + 8y_-^2y_+^4H(1,0,y) - 8y^2(-1 + 2y^3 + 4y + 3y^2)H(0,0,0;y) \\
& + 96yy_-y_+^3\zeta_2H(-1;y) - 32yy_-y_+^3H(0,1,0,y) \\
& + (2y + 32\zeta_3y^2 + 3y^6 + 32y^4\zeta_3 + 2y^5 - 3y^2 - 4y^3 - 8y\zeta_2 \\
& + 64y^4\zeta_2 + 64y^3\zeta_3 + 64y^3\zeta_2 + 3 - 32y^2\zeta_2 + 40y^5\zeta_2 \\
& - 3y^4)H(0;y) - 2y_-y_+(17y^4 + 24y^3 + 4y^2 - 12y - 1)\zeta_2 \\
& + 4yy_+^2(3y^3 - y^2 - 3y - 4y\zeta_2 + 1)H(0,0;y) \Big], \\
\text{Im } G_1^{(2\ell,B),\text{mm}} &= \frac{C_F T_F}{y_+^3 y_-^3} \Big[+ 4yy_+^2(3y^3 - y^2 - 3y - 4y\zeta_2 + 1)H(0;y) \\
& - 32yy_-y_+^3H(-1,0,y) + 32y^2y_+^2H(-1,0,0;y) \\
& + 64y^2y_+^2H(0,-1,0;y) - 8y^2(-1 + 2y^3 + 4y + 3y^2)H(0,0,y) \\
& - 4y_-^2y_+^4H(-1,y) + 8y_-^2y_+^4H(1,y) + 16yy_-y_+^3H(0,-1,y) \\
& - 32yy_-y_+^3H(0,1,y) + 64y^2y_+^2H(0,0,1;y) \\
& - 32y^2y_+^2H(0,0,-1;y) + 8yy_-y_+^3\zeta_2 + 2y + 32\zeta_3y^2 + 3y^6 \\
& + 32y^4\zeta_3 + 2y^5 - 3y^2 - 4y^3 + 3 + 64y^3\zeta_3 - 3y^4 \Big], \\
\text{Re } G_2^{(2\ell,B),\text{mm}} &= \frac{C_F T_F}{y_+^5 y_-^3} \Big[- 4y(3 + 12y\zeta_3 + 12y^5\zeta_3 + 40y^5\zeta_2 - 64y^2\zeta_2 - 8y\zeta_2 \\
& + 32y^4\zeta_2 + 40y^3\zeta_3 + 32y^4\zeta_3 - 3y^4 + 32\zeta_3y^2 - 3y^2 \\
& + 128y^3\zeta_2 + 3y^6 - 4y^3 + 2y^5 + 2y)H(0;y) \\
& + 16yy_+^4(y^2 + 4y\zeta_2 - 2y + 1)H(-1,0;y) - 32yy_-y_+^4H(1,0,y) \\
& + 32y^3(y^2 + 2y^3 + 8y - 3)H(0,0,0;y) \\
& - 32y^2(y^2 + 6y + 1)y_+^2H(0,-1,0,0;y) \\
& + 128y^2y_-y_+^3H(-1,0,0;y) + 32y^2y_+^4H(0,0,-1,0;y) \\
& - 64y^2y_-y_+^3H(0,-1,0;y) + 128y^2y_-y_+^3H(0,1,0;y) \\
& - 256y^3y_+^2H(0,0,1,0;y) - 32y^2y_+^4H(-1,0,0,0;y) \\
& - 4yy_+(13y^5 - 2y^4\zeta_2 + 13y^4 - 14y^3\zeta_2 - 30y^3 + 2y^2 \\
& - 14y^2\zeta_2 - 2y\zeta_2 + y + 1)H(0,0;y) \\
& + 8yy_+^2(y^4 + 12y^3\zeta_2 + 72y^2\zeta_2 - 2y^2 + 12y\zeta_2 + 1)H(0,-1;y) \\
& - 384y^2y_-y_+^3\zeta_2H(-1;y) + 48y^2y_-y_+^2H(0,0,0,-1;y) \\
& - 8y^2y_-y_+^2H(0,0,0,0;y) + 8yy_-y_+^3(y^2 + 8y\zeta_3 - 2y + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4y^2(29y^2 - 314y + 29)y_+^2\zeta_2^2/5 + 4yy_-(33y^2 - 16y - 1)y_+^3\zeta_2 \Big], \\
\text{Im } G_2^{(2\ell, B), \text{mm}} &= \frac{C_F T_F}{y_+^5 y_-^3} \Big[- 4yy_+(13y^5 + 2y^4\zeta_2 + 13y^4 - 18y^3\zeta_2 - 30y^3 - 18y^2\zeta_2 \\
& + 2y^2 + 2y\zeta_2 + y + 1)\text{H}(0; y) + 128y^2y_-y_+^3\text{H}(-1, 0; y) \\
& - 8y^2y_-^2y_+^2\text{H}(0, 0, 0; y) - 32y^2y_+^4\text{H}(-1, 0, 0; y) \\
& - 32y^2(y^2 + 6y + 1)y_+^2\text{H}(0, -1, 0; y) \\
& + 32y^3(y^2 + 2y^3 + 8y - 3)\text{H}(0, 0, y) \\
& - 64y^2y_-y_+^3\text{H}(0, -1; y) + 16yy_-^2y_+^4\text{H}(-1, y) \\
& - 32yy_-^2y_+^4\text{H}(1, y) + 128y^2y_-y_+^3\text{H}(0, 1, y) \\
& - 256y^3y_+^2\text{H}(0, 0, 1; y) + 32y^2y_+^4\text{H}(0, 0, -1; y) \\
& - 32y^2y_-y_+^3\zeta_2 - 4y(3y^2 + 2y + 3)y_+^2(y^2 + 4y\zeta_3 - 2y + 1) \Big],
\end{aligned}$$

Für die Massenkombination $m_I = 0$ und $m_A = m$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\text{Re } G_1^{(2\ell, B), \text{om}} &= \frac{C_F T_F}{y_+ y_-^3} \Big[+ 3y_+y_-^3 \ln\left(\frac{m_-^2}{\mu^2}\right) - (4y^2\zeta_2 - 3 + 2y^3 - 2y + 3y^4)\text{H}(0; y) \\
& + 2y_-y_+(y^2 + 1)\text{H}(-1, 0; y) + 4y^2\text{H}(0, 0, 0; y) \\
& - 8\text{H}(0, -1, 0; y)y^2 - 2yy_+(y^2 - 3y - 2)\text{H}(0, 0, y) \\
& + 2y_-y_+(3y^2 + 2y + 3)\text{H}(-1; y) \\
& - 8\text{H}(0, 0, -1; y)y^2 - 4y_-y_+(y^2 + 1)\text{H}(-1, -1; y) \\
& + 16\text{H}(0, -1, -1; y)y^2 + 4yy_+(y^2 - 3y - 2)\text{H}(0, -1, y) \\
& + 2y_+(2y^2 + 3y - 1)\zeta_2 + 9 - 8\zeta_3y^2 + 18y^3 - 18y - 9y^4 \Big], \\
\text{Im } G_1^{(2\ell, B), \text{om}} &= \frac{C_F T_F}{y_+ y_-^3} \Big[- 2yy_+(y^2 - 3y - 2)\text{H}(0, y) + 4y^2\text{H}(0, 0; y) - 8\text{H}(0, -1; y)y^2 \\
& + 2y_-y_+(y^2 + 1)\text{H}(-1; y) + 3 - 3y^4 + 4y^2\zeta_2 + 2y - 2y^3 \Big], \\
\text{Re } G_2^{(2\ell, B), \text{om}} &= \frac{C_F T_F}{y_+^3 y_-^3} \Big[+ 4(4y^2\zeta_2 - 3 + 2y^3 - 2y + 3y^4)y\text{H}(0; y) \\
& - 8y_-y_+(y^2 + 1)y\text{H}(-1, 0; y) - 4y_+(y^3 + 3y^2 + 5y - 1)y\zeta_2 \\
& + 32\text{H}(0, -1, 0; y)y^3 + 4y_+(y^3 - 5y^2 - 3y - 1)y\text{H}(0, 0; y) \\
& - 8y_+(y^3 - 5y^2 - 3y - 1)y\text{H}(0, -1; y) - 16y^3\text{H}(0, 0, 0; y) \\
& - 8y_-y_+(3y^2 + 2y + 3)y\text{H}(-1; y) + 32y^3\text{H}(0, 0, -1; y) \\
& + 16y_-y_+(y^2 + 1)y\text{H}(-1, -1; y) - 64y^3\text{H}(0, -1, -1; y) \\
& + 8(-1 + y^4 + 2y + 4\zeta_3y^2 - 2y^3)y \Big], \\
\text{Im } G_2^{(2\ell, B), \text{om}} &= \frac{C_F T_F}{y_+^3 y_-^3} \Big[+ 4y_+(y^3 - 5y^2 - 3y - 1)y\text{H}(0; y) - 16y^3\text{H}(0, 0; y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 32y^3 H(0, -1; y) - 8y_- y_+ (y^2 + 1) y H(-1; y) \\
& - 16y^3 \zeta_2 + 4y_- y_+ (3y^2 + 2y + 3) y \Big],
\end{aligned}$$

Für masselose externe Quarks ($m_A = 0$) ist der Formfaktor G_2 identisch null aufgrund der Helizitätserhaltung. Quarks der Masse 0 werden bereits für $0 < s < 4m^2$ on-shell produziert. In diesem Bereich ist die Variable x aus (3.62) als komplexe Phase darstellbar:

$$x = e^{2i\phi},$$

mit $\phi = \arctan(w)$ und $w = \sqrt{\frac{s}{4m^2 - s}}$. Der Formfaktor $G_1^{(2\ell, B), \text{mo}}$ ist für $0 < s < 4m^2$ rein reell und lautet:

$$\begin{aligned}
G_1^{(2\ell, B), \text{mo}} = C_F T_F \Big[& 3 \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) + \left(\frac{16\phi}{r^2} + \frac{4}{wr} + \frac{6}{w}\right) \text{Cl}_2(2\phi) + \frac{8}{r} \text{Cl}_3(4\phi) \\
& + \left(\frac{16}{r^2} - \frac{16}{r}\right) \text{Cl}_3(2\phi) + \left(\frac{4\phi}{rw} + \frac{16\phi^2}{r} - \frac{2\phi}{w} - 3\right) \ln(r) \\
& - \frac{8\phi}{w} \ln(4 - r) + \left(\frac{8}{r} - \frac{16}{r^2}\right) \zeta(3) + \left(\frac{16\phi}{r} - \frac{4}{w}\right) \text{Cl}_2(4\phi) \\
& + \frac{6\phi}{w} - 9 - 10\phi^2 - \frac{16\phi^2}{r^2} + \frac{24\phi^2}{r} \Big],
\end{aligned}$$

mit $r = \frac{s}{m^2}$; Cl_2 und Cl_3 sind die Clausen-Funktion zweiter und dritter Ordnung [Lew84].

Für Schwerpunktsenergien oberhalb der Paarproduktionsschwelle ($s > 4m^2$) erhält $G_1^{(2\ell, B), \text{mo}}$ absorptive Anteile:

$$\begin{aligned}
\text{Re } G_1^{(2\ell, B), \text{mo}} = \frac{C_F T_F}{y_+^4} \Big[& + 3 y_+^4 \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) - 2(-4y + 28y^3 - 1 + 21y^2 + 16y^4) \zeta_2 \\
& + 2y(9y + 4y^2 \zeta_2 + 4\zeta_2 + 3y^3 + 9y^2 + 3 + 10y \zeta_2) H(0; y) \\
& - 2y_- y_+ (y^2 + 1) H(-1, 0; y) + 8y_- y_+^3 H(1, 0; y) \\
& - 4y^2 H(0, 0, 0; y) - 16yy_+^2 H(-1, 0, 0; y) + 8H(0, -1, 0; y) y^2 \\
& + 2y^2(7 + 5y^2 + 8y) H(0, 0; y) - 16yy_+^2 H(0, 1, 0; y) \\
& - 6y_+^2(y^2 + 2y - 8y \zeta_2 + 1) H(-1; y) \\
& - 9 - 54y^2 - 36y^3 + 8y^3 \zeta_3 - 9y^4 - 36y + 8y \zeta_3 \Big], \\
\text{Im } G_1^{(2\ell, B), \text{mo}} = \frac{C_F T_F}{y_+^4} \Big[& + 2y^2(7 + 5y^2 + 8y) H(0; y) - 16yy_+^2 H(-1, 0; y) \\
& - 4y^2 H(0, 0; y) + 8H(0, -1; y) y^2 - 2y_- y_+ (y^2 + 1) H(-1; y) \\
& + 8y_- y_+^3 H(1; y) - 16yy_+^2 H(0, 1; y) + 4y(2 + 3y + 2y^2) \zeta_2
\end{aligned}$$

$$-3 + 6y^3 - 6y + 3y^4],$$

Der Axialvektorformfaktor für interne und externe masselose Quarks ist bereits für $s > 0$ komplex:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} G_1^{(2\ell, B), \text{oo}} &= C_F T_F \left[-9 + 2\zeta_2 + 3 \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right], \\ \operatorname{Im} G_1^{(2\ell, B), \text{oo}} &= C_F T_F (-3).\end{aligned}$$

Der pseudoskalare Formfaktor ist μ -unabhängig. Man erhält für die einzige nicht verschwindende Massenkombination:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} A^{(2\ell, B), \text{mm}} &= \frac{a_s^2 C_F T_F y}{y_- y_+^3} \left[-4(3\zeta_3 + 3\zeta_3 y^2 - 8y\zeta_2 + 6y\zeta_3)H(0; y) - 16yH(0, 0, 0; y) \right. \\ &\quad + 2y_+(y\zeta_2 - 2y + 2 + \zeta_2)H(0, 0; y) - 2y_+^2 H(0, 0, 0, 0; y) \\ &\quad + 12y_+^2 H(0, 0, 0, -1; y) + 8y_+^2 H(0, 0, -1, 0; y) + 24\zeta_2 y_+^2 H(0, -1, y) \\ &\quad - 8y_+^2 H(0, -1, 0, 0; y) + 16\zeta_2 y_+^2 H(-1, 0, y) - 8y_+^2 H(-1, 0, 0, 0; y) \\ &\quad \left. + 29\zeta_2^2/5 + 58y\zeta_2^2/5 - 4\zeta_2 + 29\zeta_2^2 y^2/5 + 4y^2\zeta_2 \right], \\ \operatorname{Im} A^{(2\ell, B), \text{mm}} &= \frac{a_s^2 C_F T_F y}{y_- y_+^3} \left[-2y_+(2y + y\zeta_2 + \zeta_2 - 2)H(0; y) - 16yH(0, 0; y) \right. \\ &\quad - 2y_+^2 H(0, 0, 0; y) + 8y_+^2 H(0, 0, -1; y) - 8y_+^2 H(0, -1, 0; y) \\ &\quad \left. - 8y_+^2 H(-1, 0, 0; y) - 24y\zeta_3 - 12\zeta_3 - 12\zeta_3 y^2 \right].\end{aligned}$$

Der Formfaktor zur Adler-Bell-Jackiw-Anomalie lautet:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \hat{F}^{\text{m}} &= \frac{2C_F}{y_-} \left[2H(0, -1; y)y_+ - 7y_- - \zeta_2 y_+ - H(0, 0; y)y_+ + 3 \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)y_- \right], \\ \operatorname{Im} \hat{F}^{\text{m}} &= \frac{2C_F}{y_-} \left[-H(0; y)y_+ \right].\end{aligned}$$

C.2 Asymptotische Entwicklung

C.2.1 Typ-A-Beiträge

In diesem Abschnitt werden die asymptotischen Entwicklungen ($y \rightarrow 0$) der Koeffizienten aufgeschrieben. Zunächst folgen die Koeffizienten des Formfaktors $F_1^{(2\ell)}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} a_1^{(2\ell, \infty)} &= -\frac{4}{11} \operatorname{Re} a_3^{(2\ell, \infty)} = -\frac{3}{5} \operatorname{Re} a_5^{(2\ell, \infty)} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{2L}{3} - 1 \right] - \frac{2}{3r} - \frac{1}{3} + \frac{L}{3}, \\ \operatorname{Im} a_1^{(2\ell, \infty)} &= -\frac{4}{11} \operatorname{Im} a_3^{(2\ell, \infty)} = -\frac{3}{5} \operatorname{Im} a_5^{(2\ell, \infty)} = -\frac{2}{3r^2} - \frac{1}{3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} a_2^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Re} a_6^{(2\ell, \infty)} = 0, \\
\operatorname{Im} a_2^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Im} a_6^{(2\ell, \infty)} = 0, \\
\operatorname{Re} a_4^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[5 - 5L - 12\zeta_2 + 2L^2 \right] + \frac{1}{r} \left[2 - 2L \right] - L + \frac{L^2}{2} + \frac{1}{2} - 3\zeta_2, \\
\operatorname{Im} a_4^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[5 - 4L \right] + \frac{2}{r} + 1 - L, \\
\operatorname{Re} a_7^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[13\zeta_2/2 + L^3/3 - 55/12 - 2\zeta_3 + 47L/9 - 6L\zeta_2 - L^2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[\zeta_2 - 67/18 \right] - 49/36 + 67L/36 + \zeta_2/2 - L\zeta_2/2 - \zeta_3/2, \\
\operatorname{Im} a_7^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[-L^2 + 2\zeta_2 - 47/9 + 2L \right] - 67/36 + \zeta_2/2, \\
\operatorname{Re} a_8^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[+40L\zeta_2 + 21L^2/2 - 68\zeta_2 + 8 - 2L^3 - 31L/2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[-14\zeta_2 - 5L + 5 + 2L^2 \right] \\
&\quad + 2 - L^3/2 - 7L/2 - 13\zeta_2 + 2L^2 + 10L\zeta_2, \\
\operatorname{Im} a_8^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[31/2 - 16\zeta_2 - 21L + 6L^2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[5 - 4L \right] - 4L - 4\zeta_2 + 7/2 + 3L^2/2, \\
\operatorname{Re} a_9^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[47/18 - 287L/27 + 8L\zeta_2/3 + 25L^2/9 - 164\zeta_2/9 - 2L^3/9 - 8\zeta_3/3 \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[59/27 + L^2/3 - 25L/9 \right] \\
&\quad + 4L\zeta_2/3 - 4\zeta_3/3 - 64\zeta_2/9 - L^3/9 + 106/27 + 19L^2/18 - 209L/54, \\
\operatorname{Im} a_9^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[287/27 + 2L^2/3 - 50L/9 \right] + \frac{1}{r} \left[-2L/3 + 25/9 \right] \\
&\quad + 209/54 + L^2/3 - 19L/9, \\
\operatorname{Re} a_{10}^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[57/2 - 1126L/27 - 16L\zeta_2/3 + 4L^3/9 + 133L^2/9 + 12\zeta_2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[241/27 + 13L^2/3 + 4\zeta_2/3 - 97L/9 \right] \\
&\quad - 22\zeta_2/3 + 4L\zeta_2/3 - L^3/9 + 19L^2/18 - 265L/54 + 383/27, \\
\operatorname{Im} a_{10}^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[1126/27 - 4L^2/3 - 266L/9 \right] + \frac{1}{r} \left[97/9 - 26L/3 \right] \\
&\quad + 265/54 + L^2/3 - 19L/9, \\
\operatorname{Re} a_{11}^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[2377/36 - 2215\zeta_2/18 + 1103\zeta_3/6 + 12\zeta_2L^2 + 8515L/108 - L^4/2 \right. \\
&\quad \left. + 48\zeta_2 \ln_2 - 56\zeta_2^2/5 + 89L^2/18 + 29L^3/18 - 13L\zeta_2/3 - 102L\zeta_3 \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[-\zeta_2L^2/2 - 18L\zeta_3 - 25\zeta_2 + 7\zeta_2^2/2 - 157/108 + L^2/12 + 461L/36 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 43\zeta_3 + 2L^3/3 - 3L\zeta_2 + 12\zeta_2 \ln_2 - L^4/24 \Big] \\
& + 67\zeta_3/6 + 2545L/216 - 11L\zeta_2/3 - 13L\zeta_3/2 + 173\zeta_2/9 - 233L^2/72 \\
& - 63\zeta_2^2/20 - 1595/108 + 11L^3/36 + \zeta_2 L^2/2 + 6\zeta_2 \ln_2, \\
\text{Im } a_{11}^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \Big[- 8515/108 - 29L^2/6 + 2L^3 + 102\zeta_3 - 15\zeta_2 - 89L/9 \Big] \\
& + \frac{1}{r} \Big[- 5\zeta_2 + 3L\zeta_2 - 461/36 - 2L^2 - L/6 + 18\zeta_3 + L^3/6 \Big] \\
& - 2545/216 + 13\zeta_3/2 - 11L^2/12 - L\zeta_2 + 233L/36, \\
\text{Re } a_{12}^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \Big[+ 553/4 - 249\zeta_2 + 22\zeta_3 - 36L\zeta_3 + 13L/2 + 190L\zeta_2 + 451\zeta_2^2/5 \\
& + 2L^4 + 29L^2 - 83\zeta_2 L^2 - 15L^3/2 - 96\zeta_2 \ln_2 \Big] \\
& + \frac{1}{r} \Big[- 24\zeta_2 \ln_2 - 35L/4 + 51L\zeta_2 + 107/4 + 2\zeta_3 - 74\zeta_2 - 12L\zeta_3 + \\
& 43\zeta_2^2/5 + L^4/12 + 43L^2/4 - 5\zeta_2 L^2 - 8L^3/3 \Big] \\
& - 11\zeta_3 + 8L\zeta_3 + 31L\zeta_2 - 85L/8 + 68\zeta_2^2/5 + 55L^2/8 - 32\zeta_2 + 23/2 \\
& - 5L^3/3 + 7L^4/24 - 12\zeta_2 L^2 - 12\zeta_2 \ln_2, \\
\text{Im } a_{12}^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \Big[45L^2/2 - 100\zeta_2 - 8L^3 + 70L\zeta_2 - 13/2 + 36\zeta_3 - 58L \Big] \\
& + \frac{1}{r} \Big[- L^3/3 + 8L^2 + 12\zeta_3 - 19\zeta_2 + 35/4 + 6L\zeta_2 - 43L/2 \Big] \\
& - 7L^3/6 - 55L/4 + 5L^2 - 8\zeta_3 - 11\zeta_2 + 10L\zeta_2 + 85/8. \tag{C.4}
\end{aligned}$$

Die asymptotisch entwickelten Koeffizienten des Formfaktors $F_2^{(2\ell)}$ lauten:

$$\begin{aligned}
\text{Re } b_i^{(2\ell, \infty)} &= \text{Im } b_i^{(2\ell, \infty)} = 0 \quad \text{für } i = 1 \dots 3, \\
\text{Re } b_4^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \Big[- 4 + 24\zeta_2 - 4L^2 + 12L \Big] + \frac{1}{r} \Big[12\zeta_2 + 2L - 2L^2 \Big], \\
\text{Im } b_4^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \Big[- 12 + 8L \Big] + \frac{1}{r} \Big[- 2 + 4L \Big], \\
\text{Re } b_5^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \Big[- 4L^2/3 - 76/9 + 148L/9 + 32\zeta_2/3 \Big] \\
& + \frac{1}{r} \Big[- 2L^2/3 + 16\zeta_2/3 + 50L/9 \Big], \\
\text{Im } b_5^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \Big[- 148/9 + 8L/3 \Big] + \frac{1}{r} \Big[4L/3 - 50/9 \Big], \\
\text{Re } b_6^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \Big[- 52L^2/3 + 868L/9 - 16\zeta_2 - 916/9 \Big] \\
& + \frac{1}{r} \Big[8\zeta_2 - 2L^2/3 - 68/3 + 50L/9 \Big], \\
\text{Im } b_6^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \Big[- 868/9 + 104L/3 \Big] + \frac{1}{r} \Big[4L/3 - 50/9 \Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} b_7^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[-96\zeta_2 \ln_2 + L^4/6 - 343/9 - 341L/9 - 174\zeta_2^2/5 - 404\zeta_3 + 944\zeta_2/3 \right. \\
&\quad \left. - 44L\zeta_2 - 55L^2/3 - 8L^3/3 + 136L\zeta_3 + 10\zeta_2 L^2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[64\zeta_2/3 - 24\zeta_2 \ln_2 - L^2/6 - 20\zeta_3 - 173L/18 - 3 \right], \\
\operatorname{Im} b_7^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[341/9 + 110L/3 + 8L^2 - 136\zeta_3 + 76\zeta_2 - 28L\zeta_2 - 2L^3/3 \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[173/18 + L/3 \right], \\
\operatorname{Re} b_8^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[112L\zeta_3 - 89 - 244L\zeta_2 + 28\zeta_2 L^2 - 276\zeta_2^2/5 + 192\zeta_2 \ln_2 \right. \\
&\quad \left. + 656\zeta_2 + 28L^3/3 - 79L^2 - 224\zeta_3 - L^4/3 + 7L \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[-17L^2/2 - 48L\zeta_2 + 36\zeta_2 - 4\zeta_3 + 48\zeta_2 \ln_2 + 2L^3 + 31L/2 \right], \\
\operatorname{Im} b_8^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[132\zeta_2 - 7 + 158L + 4L^3/3 - 28L^2 - 40L\zeta_2 - 112\zeta_3 \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[-6L^2 + 24\zeta_2 - 31/2 + 17L \right]. \tag{C.5}
\end{aligned}$$

Für $G_1^{(2\ell, A)}$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} c_i^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Re} a_i^{(2\ell, \infty)} \quad \text{und} \\
\operatorname{Im} c_i^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Im} a_i^{(2\ell, \infty)} \quad \text{für } i = 1 \dots 7, \\
\operatorname{Re} c_8^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Re} a_8^{(2\ell, \infty)} + \frac{1}{r^2} \left[8 - 48\zeta_2 - 24L + 8L^2 \right] + \frac{1}{r} \left[4L^2 - 24\zeta_2 - 4L \right], \\
\operatorname{Im} c_8^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Im} a_8^{(2\ell, \infty)} + \frac{1}{r^2} \left[24 - 16L \right] + \frac{1}{r} \left[4 - 8L \right], \\
\operatorname{Re} c_9^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Re} a_9^{(2\ell, \infty)} + \frac{1}{r^2} \left[8L^2/3 - 224L/9 - 64\zeta_2/3 + 80/9 \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[-64L/9 + 4L^2/3 - 32\zeta_2/3 \right], \\
\operatorname{Im} c_9^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Im} a_9^{(2\ell, \infty)} + \frac{1}{r^2} \left[-16L/3 + 224/9 \right] + \frac{1}{r} \left[64/9 - 8L/3 \right], \\
\operatorname{Re} c_{10}^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Re} a_{10}^{(2\ell, \infty)} + \frac{1}{r^2} \left[16(3L - 4)(2L - 5)/9 \right] + \frac{1}{r} \left[16/3 - 64L/9 + 4L^2/3 \right], \\
\operatorname{Im} c_{10}^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Im} a_{10}^{(2\ell, \infty)} + \frac{1}{r^2} \left[-64L/3 + 368/9 \right] + \frac{1}{r} \left[-8L/3 + 64/9 \right], \\
\operatorname{Re} c_{11}^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Re} a_{11}^{(2\ell, \infty)} + \frac{1}{r^2} \left[-52/9 - 316\zeta_2/3 + 24L\zeta_2 + 14L^2/3 - 22\zeta_2 L^2 - 2L^3/3 \right. \\
&\quad \left. + 96\zeta_2 \ln_2 + 592L/9 - 8L\zeta_3 + 154\zeta_2^2/5 + 36\zeta_3 + L^4/2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[+4L\zeta_3 + 182L/9 - 62\zeta_2/3 + 24\zeta_2 \ln_2 + L^4/12 + 17\zeta_2^2/5 \right. \\
&\quad \left. + L^2/3 - 3\zeta_2 L^2 + 12\zeta_3 + 10L\zeta_2 - 2L^3/3 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} c_{11}^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Im} a_{11}^{(2\ell, \infty)} + \frac{1}{r^2} \left[8\zeta_3 + 20L\zeta_2 + 2L^2 - 592/9 - 28L/3 - 16\zeta_2 - 2L^3 \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[2L^2 - 182/9 - 4\zeta_3 - 2\zeta_2 - 2L/3 + 2L\zeta_2 - L^3/3 \right], \\
\operatorname{Re} c_{12}^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Re} a_{12}^{(2\ell, \infty)} + \frac{1}{r^2} \left[72 - 376\zeta_2 + 160L\zeta_2 - 192\zeta_2 \ln_2 + 12L - L^4 - 20\zeta_2^2 \right. \\
&\quad \left. + 66L^2 + 168\zeta_3 + 28\zeta_2 L^2 - 112L\zeta_3 - 20L^3/3 \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[6\zeta_2 L^2 - 14L - 8L^3/3 - 34\zeta_2^2/5 + 4L^2 - 48\zeta_2 \ln_2 \right. \\
&\quad \left. - L^4/6 - 8L\zeta_3 + 8\zeta_3 + 62L\zeta_2 \right], \\
\operatorname{Im} c_{12}^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Im} a_{12}^{(2\ell, \infty)} + \frac{1}{r^2} \left[-12 - 8L\zeta_2 + 20L^2 - 132L - 80\zeta_2 + 112\zeta_3 + 4L^3 \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[-4L\zeta_2 + 8\zeta_3 + 8L^2 - 8L + 14 + 2L^3/3 - 30\zeta_2 \right]. \quad (\text{C.6})
\end{aligned}$$

Zu $G_2^{(2\ell, A)}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} d_i^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Im} d_i^{(2\ell, \infty)} = 0 \quad \text{für } i = 1 \dots 3, \\
\operatorname{Re} d_4^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Re} b_4^{(2\ell, \infty)} + \frac{16(L-1)}{r^2} + \frac{1}{r} \left[8L + 24\zeta_2 - 4 - 4L^2 \right], \\
\operatorname{Im} d_4^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Im} b_4^{(2\ell, \infty)} - \frac{16}{r^2} + \frac{8(L-1)}{r}, \\
\operatorname{Re} d_5^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Re} b_5^{(2\ell, \infty)} + \frac{1}{r^2} \left[16L/3 - 56/9 \right] + \frac{1}{r} \left[52L/9 + 32\zeta_2/3 - 76/9 - 4L^2/3 \right], \\
\operatorname{Im} d_5^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Im} b_5^{(2\ell, \infty)} - \frac{16}{3r^2} + \frac{1}{r} \left[8L/3 - 52/9 \right], \\
\operatorname{Re} d_6^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Re} b_6^{(2\ell, \infty)} + \frac{1}{r^2} \left[520/9 - 80L/3 \right] + \frac{1}{r} \left[52L/9 + 236/9 - 4L^2/3 - 16\zeta_2 \right], \\
\operatorname{Im} d_6^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Im} b_6^{(2\ell, \infty)} + \frac{80}{3r^2} + \frac{1}{r} \left[8L/3 - 52/9 \right], \\
\operatorname{Re} d_7^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Re} b_7^{(2\ell, \infty)} + \frac{1}{r^2} \left[36\zeta_2^2/5 - 80L\zeta_3 - 20L/3 + 4L^2 + 814/9 - L^4/3 + 8L\zeta_2 \right. \\
&\quad \left. + 240\zeta_3 - 88\zeta_2 + 4\zeta_2 L^2 + 8L^3/3 \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[-257L/9 + 8\zeta_3 - 100\zeta_2/3 + 269/9 + 17L^2/3 \right], \\
\operatorname{Im} d_7^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Im} b_7^{(2\ell, \infty)} + \frac{1}{r^2} \left[8L\zeta_2 - 8L + 4L^3/3 + 20/3 + 80\zeta_3 - 40\zeta_2 - 8L^2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[257/9 - 34L/3 \right], \\
\operatorname{Re} d_8^{(2\ell, \infty)} &= \operatorname{Re} b_8^{(2\ell, \infty)} + \frac{1}{r^2} \left[12L^2 + 36L + 144L\zeta_2 - 16L^3/3 + 2L^4/3 - 296\zeta_2 \right. \\
&\quad \left. + 344\zeta_2^2/5 - 40\zeta_2 L^2 - 26 + 160\zeta_3 - 96L\zeta_3 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r} \left[-8\zeta_3 - 17 + 60\zeta_2 + 4L^3 + 15L - 13L^2 - 72L\zeta_2 \right], \\
\text{Im } d_8^{(2\ell, \infty)} = & \text{Im } b_8^{(2\ell, \infty)} + \frac{1}{r^2} \left[96\zeta_3 + 48L\zeta_2 - 24L - 8L^3/3 - 36 - 80\zeta_2 + 16L^2 \right] \\
& + \frac{1}{r} \left[24\zeta_2 - 15 + 26L - 12L^2 \right]. \tag{C.7}
\end{aligned}$$

Abschliessend die asymptotisch entwickelten Formfaktoren zu $A^{(2\ell, A)}$:

$$\begin{aligned}
\text{Re } e_1^{(2\ell, \infty)} &= -\frac{4}{11} \text{Re } e_3^{(2\ell, \infty)} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{2L}{3} - 1 \right] - \frac{2}{3r} + 1/6 + L/3, \\
\text{Im } e_1^{(2\ell, \infty)} &= -\frac{4}{11} \text{Im } e_3^{(2\ell, \infty)} = -\frac{2}{3r^2} - \frac{1}{3}, \\
\text{Re } e_2^{(2\ell, \infty)} &= -\frac{6}{5} \text{Re } e_6^{(2\ell, \infty)} = +\frac{1}{2}, \\
\text{Im } e_2^{(2\ell, \infty)} &= \text{Re } e_6^{(2\ell, \infty)} = 0, \\
\text{Re } e_4^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{2} - 12\zeta_2 - 2L + 2L^2 \right] + \frac{1}{r} \left[-1 - 2L \right] + \frac{1}{8} + \frac{L + L^2}{2} - 3\zeta_2, \\
\text{Im } e_4^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[2 - 4L \right] + \frac{2}{r} - L - \frac{1}{2}, \\
\text{Re } e_5^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{5}{3} - \frac{10L}{9} \right] + \frac{10}{9r} + \frac{5}{36} - \frac{5L}{9}, \\
\text{Im } e_5^{(2\ell, \infty)} &= \frac{10}{9r^2} + \frac{5}{9}, \\
\text{Re } e_7^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[-55/12 - L^2 - 2\zeta_3 + 13\zeta_2/2 + 47L/9 - 6L\zeta_2 + L^3/3 \right] \\
& + \frac{1}{r} \left[+\zeta_2 - 67/18 \right] + 67L/36 - \zeta_3/2 + \zeta_2/2 - L\zeta_2/2 + 95/144, \\
\text{Im } e_7^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[+2L + 2\zeta_2 - 47/9 - L^2 \right] + \zeta_2/2 - 67/36, \\
\text{Re } e_8^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[-2L^3 - 31/4 + 40L\zeta_2 - 56\zeta_2 - 7L/2 + 9L^2 \right] \\
& + \frac{1}{r} \left[4L - 1 - 32\zeta_2 + 5L^2 \right] + 10L\zeta_2 + L - L^3/2 + 2\zeta_2 - L^2/4 + 11/16, \\
\text{Im } e_8^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[+7/2 - 18L + 6L^2 - 16\zeta_2 \right] + \frac{1}{r} \left[-4 - 10L \right] \\
& - 1 + L/2 - 4\zeta_2 + 3L^2/2, \\
\text{Re } e_9^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[-440L/27 - 1/18 + 34L^2/9 - 16\zeta_3/3 - 2L^3/9 + 8\zeta_3/3 \right. \\
& \quad \left. + 8L\zeta_2/3 - 236\zeta_2/9 \right] + \frac{1}{r} \left[-40/27 - 40L/9 - 8\zeta_2 + 4L^2/3 \right] \\
& \quad - L^3/9 - 8\zeta_3/3 + 4L\zeta_2/3 - 247/216 - 28L/27 \\
& \quad + 4\zeta_3/3 + 5L^2/9 - 46\zeta_2/9, \\
\text{Im } e_9^{(2\ell, \infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[2L^2/3 + 440/27 - 68L/9 \right] + \frac{1}{r} \left[40/9 - 8L/3 \right] + L^2/3 - 10L/9 + 28/27,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} e_{10}^{(2\ell,\infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[8L\zeta_2/3 - 8\zeta_3/3 + 8\zeta_3/3 - 4\zeta_2 - 118L/27 - 2L^3/9 + 4/3 + 25L^2/9 \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[-8\zeta_2/3 + 88/27 - 4L/9 + 4L^2/3 \right] \\
&\quad + 5L^2/9 + 1969/216 - L^3/9 - 4\zeta_3/3 - 16\zeta_2/3 + 4\zeta_3/3 + 4L\zeta_2/3 - 56L/27, \\
\operatorname{Im} e_{10}^{(2\ell,\infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[2L^2/3 + 118/27 - 50L/9 \right] + \frac{1}{r} \left[4/9 - 8L/3 \right] + L^2/3 + 56/27 - 10L/9, \\
\operatorname{Re} e_{11}^{(2\ell,\infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[48\zeta_2 \ln_2 - 1937/144 - 571L^2/72 + 91L^3/36 - 188\zeta_2^2/5 + 11405L/216 \right. \\
&\quad \left. - 16L\zeta_3 + 15\zeta_2 L^2 - 22\zeta_3/3 - 7L^4/24 - 136L\zeta_2/3 + 283\zeta_3/6 + 202\zeta_2/9 \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[+14\zeta_3 + 11\zeta_2 + 314/27 + 197L/9 - 2L\zeta_2 - 19L^2/6 + 12\zeta_2 \ln_2 \right] \\
&\quad - 11L\zeta_2/3 + 11L^3/36 + 128\zeta_2/9 - 67L^2/36 - 2\zeta_3/3 + 22\zeta_3/3 \\
&\quad + 121L/54 + \zeta_2 L^2/2 + 6\zeta_2 \ln_2 - 13L\zeta_3/2 + 3047/864 - 63\zeta_2^2/20, \\
\operatorname{Im} e_{11}^{(2\ell,\infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[-11405/216 - 91L^2/12 + 7L^3/6 + 571L/36 + 15\zeta_2 + 16\zeta_3 - 16L\zeta_2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[+19L/3 - 197/9 + 2\zeta_2 \right] + 67L/18 - L\zeta_2 + 13\zeta_3/2 - 11L^2/12 - 121/54, \\
\operatorname{Re} e_{12}^{(2\ell,\infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[+78 + 6\zeta_3 - 8L\zeta_3 + 63\zeta_2 + 53L + 78\zeta_2^2 + 176L\zeta_2 - 64\zeta_2 L^2 - 53L^3/6 \right. \\
&\quad \left. - 26\zeta_3 - 96\zeta_2 \ln_2 - 4L^2 + 19L^4/12 \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[88L\zeta_2 + 6\zeta_3 - 6 - 7L + 26\zeta_2^2/5 + 40\zeta_2 - 5L^2 - 13L^3/3 - 12\zeta_3 \right. \\
&\quad \left. - 24\zeta_2 \ln_2 - 2\zeta_2 L^2 - 16L\zeta_3 \right] + 7L^4/24 + 5L/2 + L^2/2 + \zeta_3 + 8L\zeta_3 \\
&\quad - 5L\zeta_2 - 12\zeta_2 L^2 - 12\zeta_2 \ln_2 + L^3/12 + 15\zeta_2/2 + 68\zeta_2^2/5 + 257/32 - 9\zeta_3, \\
\operatorname{Im} e_{12}^{(2\ell,\infty)} &= \frac{1}{r^2} \left[-19L^3/3 + 53L^2/2 + 8\zeta_3 - 70\zeta_2 + 8L - 53 + 52L\zeta_2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[+4L\zeta_2 - 36\zeta_2 + 10L + 13L^2 + 16\zeta_3 + 7 \right] \\
&\quad - 8\zeta_3 - L - 5/2 + 10L\zeta_2 - L^2/4 - 7L^3/6 + 4\zeta_2.
\end{aligned}$$

C.2.2 Typ-B-Beiträge

Für Schwerpunktsenergien $s \gg 4m^2$ ist die Quarkmasse vernachlässigbar. Die Formfaktoren für die unterschiedlichen Massenkombinationen müssen im Limes masseloser Quarks identisch zu denen für $m_I = m_A = 0$ werden. Das bedeutet, daß

$$\begin{aligned}
G_1^{(2\ell,B),\text{mm},\infty} &= G_1^{(2\ell,B),\text{om},\infty} = G_1^{(2\ell,B),\text{mo},\infty} \\
&\rightarrow G_1^{(2\ell,B),\text{oo}} = C_F T_F \left[-9 + 2\zeta_2 + 3 \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right]
\end{aligned}$$

und

$$G_2^{(2\ell,B),\text{mm},\infty} = G_2^{(2\ell,B),\text{om},\infty} \rightarrow 0$$

gelten muss. Für die Formfaktoren zu den Typ-B-Beiträgen mit mindestens einem massiven Quark findet man:

$$\begin{aligned} \text{Re } G_1^{(2\ell,B),\text{mm},\infty} &= C_F T_F \left[3 \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + 3L - 9 + 2\zeta_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r}(6L - 8(-3 + L)\zeta_2 - 2 - 16\zeta_3 - 2L^2) \right], \\ \text{Im } G_1^{(2\ell,B),\text{mm},\infty} &= C_F T_F \left[-3 + \frac{1}{r}(-6 + 4L + 8\zeta_2) \right], \\ \text{Re } G_2^{(2\ell,B),\text{mm},\infty} &= C_F T_F \left[\frac{1}{r}(8 - 4\zeta_2 + 2L^2 - 12L) \right], \\ \text{Im } G_2^{(2\ell,B),\text{mm},\infty} &= C_F T_F \left[\frac{1}{r}(12 - 4L) \right], \\ \text{Re } G_1^{(2\ell,B),\text{om},\infty} &= C_F T_F \left[3 \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + 3L - 9 + 2\zeta_2 + \frac{1}{r}(6L - 2 - 2L^2) \right], \\ \text{Im } G_1^{(2\ell,B),\text{om},\infty} &= C_F T_F \left[-3 + \frac{1}{r}(4L - 6) \right], \\ \text{Re } G_2^{(2\ell,B),\text{om},\infty} &= C_F T_F \left[\frac{1}{r}(8 - 4\zeta_2 + 2L^2 - 12L) \right], \\ \text{Im } G_2^{(2\ell,B),\text{om},\infty} &= C_F T_F \left[\frac{1}{r}(12 - 4L) \right], \\ \text{Re } G_1^{(2\ell,B),\text{mo},\infty} &= C_F T_F \left[3 \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) - 9 + 2\zeta_2 + \frac{1}{r}(8\zeta_3 - 8L\zeta_2) \right], \\ \text{Im } G_1^{(2\ell,B),\text{mo},\infty} &= C_F T_F \left[-3 + \frac{8\zeta_2}{r} \right], \end{aligned}$$

Man erkennt, daß $G_2^{(2\ell,B),\text{mm},\infty}$ und $G_2^{(2\ell,B),\text{om},\infty}$ proportional zu $\frac{1}{r}$ sind. Für $r \rightarrow \infty$ verschwinden diese Beiträge. Vernachlässigt man in $G_1^{(2\ell,B),\text{mm},\infty}$, $G_1^{(2\ell,B),\text{mo},\infty}$ und $G_1^{(2\ell,B),\text{om},\infty}$ ebenfalls die $\frac{1}{r}$ -Terme, so wird das erwartete Verhalten reproduziert. Beachte, dass $L = \ln \frac{s}{m^2}$ und somit die Summe aus $(\ln \frac{m^2}{\mu^2} + L)$ jeweils den erwarteten Logarithmus reproduziert. Der Faktor L in den asymptotischen entwickelten Formfaktoren stammt aus dem Integrationsmas, aus dem $\frac{m^2}{\mu^2}$ ausgeklammert wurde. Für $m \rightarrow 0$ „verschwindet“ die Massenskala m aus den physikalischen Resultaten. Dies kann man an den Formeln deutlich sehen.

Der pseudoskalare Formfaktor muss im asymptotischen Limes verschwinden. Real- und Imaginärteil lauten:

$$\text{Re } A^{(2\ell,B),\text{mm},\infty} = C_F T_F \left[\frac{1}{r^2}(-8\zeta_2 - 58\zeta_2^2/5 - 2\zeta_2 L^2 - 24L\zeta_3 + L^4/6 + 28 \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 24\zeta_3 + 24L - 14L^3/3 + 52L\zeta_2) \\
& + \frac{1}{r}(4\zeta_2 - 29\zeta_2^2/5 - \zeta_2L^2 - 12L\zeta_3 - 2L^2 + L^4/12) \Big], \\
\text{Im } A^{(2\ell,B),\text{mm},\infty} = & C_F T_F \left[\frac{1}{r^2}(4\zeta_2 - 2L^3/3 + 24\zeta_3 - 4L\zeta_2 - 24 + 14L^2) \right. \\
& \left. + \frac{1}{r}(4L - L^3/3 + 12\zeta_3 - 2L\zeta_2) \right],
\end{aligned}$$

und besitzen keinen Term der Ordnung r^0 , welcher im Limes $r \rightarrow \infty$ nicht verschwinden würde.

Für den Anomalie-Formfaktor erhält man:

$$\begin{aligned}
\text{Re } \hat{F}^{\text{m},\infty} = & 2 C_F \left[\frac{1}{r^2}(6\zeta_2 - 11/2 - 7L + 3L^2) + \frac{1}{r}(2\zeta_2 + L^2 - 2 - 2L) \right. \\
& \left. 3 \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) - 7 + \zeta_2 + L^2/2 \right] \\
\text{Im } \hat{F}^{\text{m},\infty} = & 2 C_F \left[\frac{1}{r^2}(7 - 6L) + \frac{1}{r}(2 - 2L) - L \right]
\end{aligned}$$

C.3 Schwellenentwicklung

C.3.1 Typ-A-Beiträge

In diesem Abschnitt wird die Schwellen-Entwicklung ($y \rightarrow 1$) der Koeffizienten angegeben. Zunächst wiederum die Koeffizienten des Formfaktors $F_1^{(2\ell)}$, dann die von $F_2^{(2\ell)}$, $G_1^{(2\ell,A)}$ und $G_2^{(2\ell,A)}$ und abschliessend die zu $A^{(2\ell,A)}$:

$$\begin{aligned}
\text{Re } a_1^{(2\ell,4m^2)} = & \text{Re } a_3^{(2\ell,4m^2)} = \text{Re } a_5^{(2\ell,4m^2)} = 0, \\
\text{Im } a_1^{(2\ell,4m^2)} = & -\frac{4}{11} \text{Im } a_3^{(2\ell,4m^2)} = -\frac{3}{5} \text{Im } a_5^{(2\ell,4m^2)} = -\frac{1}{6\beta}, \\
\text{Re } a_2^{(2\ell,4m^2)} = & \text{Re } a_6^{(2\ell,4m^2)} = 0, \\
\text{Im } a_2^{(2\ell,4m^2)} = & \text{Im } a_6^{(2\ell,4m^2)} = 0, \\
\text{Re } a_4^{(2\ell,4m^2)} = & -\frac{3\zeta_2}{4\beta^2} - \frac{3\zeta_2}{2}, \\
\text{Im } a_4^{(2\ell,4m^2)} = & 0, \\
\text{Re } a_7^{(2\ell,4m^2)} = & 0, \\
\text{Im } a_7^{(2\ell,4m^2)} = & -\frac{31}{72\beta}, \\
\text{Re } a_8^{(2\ell,4m^2)} = & \frac{1}{\beta^2} \left[3\zeta_2(\ln_2 + \ln_b) \right] + 3\zeta_2(2\ln_2 + 2\ln_b - 1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} a_8^{(2\ell, 4m^2)} &= -\frac{3\zeta_2}{2\beta^2} + \frac{2}{\beta} - 3\zeta_2, \\
\operatorname{Re} a_9^{(2\ell, 4m^2)} &= \frac{1}{\beta} \left[+2\zeta_2(-5 + 6\ln_2 + 6\ln_b)/3 \right] + 22/9, \\
\operatorname{Im} a_9^{(2\ell, 4m^2)} &= \frac{1}{\beta} \left[-10\ln_2/9 + 2\ln_b^2/3 + 4\ln_b\ln_2/3 + 14/27 - 10\ln_b/9 + 2(\ln_2)^2/3 \right], \\
\operatorname{Re} a_{10}^{(2\ell, 4m^2)} &= \frac{88}{9} - \frac{16\zeta_2}{3}, \\
\operatorname{Im} a_{10}^{(2\ell, 4m^2)} &= 0, \\
\operatorname{Re} a_{11}^{(2\ell, 4m^2)} &= \frac{1}{\beta} \left[-\zeta_2(66\ln_2 - 31 + 66\ln_b)/6 \right] \\
&\quad + 179\zeta_2/6 - 151/18 - 32\zeta_2\ln_2 - 13\zeta_3 - 12\zeta_2\ln_b, \\
\operatorname{Im} a_{11}^{(2\ell, 4m^2)} &= \frac{1}{\beta} \left[-47/54 - 11\ln_b^2/6 - 11(\ln_2)^2/6 + 31\ln_b/18 \right. \\
&\quad \left. - 11\ln_b\ln_2/3 + 31\ln_2/18 \right] + 6\zeta_2, \\
\operatorname{Re} a_{12}^{(2\ell, 4m^2)} &= \frac{1}{\beta^2} \left[-3\zeta_2(-3\zeta_2 + 4\ln_b^2 + 4\ln_2^2 + 8\ln_b\ln_2)/2 \right] - \frac{12\zeta_2}{\beta} \\
&\quad + 23/2 + 9\zeta_2^2 - 12\zeta_2(\ln_2)^2 + 28\zeta_2\ln_2 - 107\zeta_2/3 - 12\zeta_2\ln_b^2 \\
&\quad - 24\zeta_2\ln_b\ln_2 - 2\zeta_3 + 4\zeta_2\ln_b, \\
\operatorname{Im} a_{12}^{(2\ell, 4m^2)} &= \frac{6\zeta_2(\ln_2 + \ln_b)}{\beta^2} - \frac{4(\ln_b + \ln_2)}{\beta} + 2\zeta_2(6\ln_b - 1 + 6\ln_2),
\end{aligned}$$

Die Schwellenentwicklung der $b_i^{(2\ell)}$ lautet:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} b_i^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Im} b_i^{(2\ell, 4m^2)} = 0 \quad \text{für } i = 1 \dots 3, \\
\operatorname{Re} b_4^{(2\ell, 4m^2)} &= +\frac{3\zeta_2}{2\beta^2}, \\
\operatorname{Im} b_4^{(2\ell, 4m^2)} &= +\frac{1}{2\beta}, \\
\operatorname{Re} b_5^{(2\ell, 4m^2)} &= +\frac{2\zeta_2}{\beta}, \\
\operatorname{Im} b_5^{(2\ell, 4m^2)} &= \frac{1}{\beta} \left[-25/18 + 2\ln_2/3 + 2\ln_b/3 \right], \\
\operatorname{Re} b_6^{(2\ell, 4m^2)} &= 0, \\
\operatorname{Im} b_6^{(2\ell, 4m^2)} &= 0, \\
\operatorname{Re} b_7^{(2\ell, 4m^2)} &= -\frac{7\zeta_2}{\beta}, \\
\operatorname{Im} b_7^{(2\ell, 4m^2)} &= \frac{1}{\beta} \left[25/9 - 7\ln_2/3 - 7\ln_b/3 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} b_8^{(2\ell, 4m^2)} &= \frac{1}{\beta^2} \left[-\zeta_2(-7 + 6 \ln_b + 6 \ln_2) \right] - \frac{3\zeta_2}{\beta}, \\ \operatorname{Im} b_8^{(2\ell, 4m^2)} &= + \frac{3\zeta_2}{\beta^2} - \frac{\ln_b + \ln_2}{\beta},\end{aligned}$$

Die Koeffizienten $c_i^{(2\ell)}$ werden auch hier durch die $a_i^{(2\ell)}$ dargestellt:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} c_i^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Re} a_i^{(2\ell, 4m^2)} \quad \text{und} \\ \operatorname{Im} c_i^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Im} a_i^{(2\ell, 4m^2)} \quad \text{für } i = 1 \dots 7, \\ \operatorname{Re} c_8^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Re} a_8^{(2\ell, 4m^2)} - \frac{3\zeta_2}{\beta^2}, \\ \operatorname{Im} c_8^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Im} a_8^{(2\ell, 4m^2)} - \frac{1}{\beta}, \\ \operatorname{Re} c_9^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Re} a_9^{(2\ell, 4m^2)} - \frac{4\zeta_2}{\beta} - \frac{8}{9}, \\ \operatorname{Im} c_9^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Im} a_9^{(2\ell, 4m^2)} + \frac{1}{\beta} \left[16/9 - \frac{4}{3}(\ln_b + \ln_2) \right], \\ \operatorname{Re} c_{10}^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Re} a_{10}^{(2\ell, 4m^2)} - \frac{8}{9}, \\ \operatorname{Im} c_{10}^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Im} a_{10}^{(2\ell, 4m^2)}, \\ \operatorname{Re} c_{11}^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Re} a_{11}^{(2\ell, 4m^2)} + \frac{11\zeta_2}{\beta} + 14\zeta_2 \ln_2 + 8\zeta_2 \ln_b - 15\zeta_2 + 17\zeta_3/2 + 25/9, \\ \operatorname{Im} c_{11}^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Im} a_{11}^{(2\ell, 4m^2)} + \frac{1}{\beta} \left[-32/9 + 11 \ln_b / 3 + 11 \ln_2 / 3 \right] - 4\zeta_2, \\ \operatorname{Re} c_{12}^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Re} a_{12}^{(2\ell, 4m^2)} + \frac{1}{\beta^2} \left[6\zeta_2(-1 + 2 \ln_b + 2 \ln_2) \right] + \frac{6\zeta_2}{\beta} \\ &\quad - 19\zeta_3/4 - 23/3 + 83\zeta_2/3 - 7\zeta_2 \ln_2 - 2\zeta_2 \ln_b, \\ \operatorname{Im} c_{12}^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Im} a_{12}^{(2\ell, 4m^2)} - \frac{6\zeta_2}{\beta^2} + \frac{1}{\beta} \left[2(\ln_b + \ln_2 + 1) \right] + \zeta_2,\end{aligned}$$

Analog zu den 1ℓ -Resultaten lässt sich für die $d_i^{(2\ell)}$ eine verkürzte Form mittels der $b_i^{2\ell}$ angeben:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} d_i^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Im} d_i^{(2\ell, 4m^2)} = 0 \quad \text{für } i = 1 \dots 3, \\ \operatorname{Re} d_4^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Re} b_4^{(2\ell, 4m^2)} + \frac{3\zeta_2}{2\beta^2} + \frac{3\zeta_2}{2}, \\ \operatorname{Im} d_4^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Im} b_4^{(2\ell, 4m^2)}, \\ \operatorname{Re} d_5^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Re} b_5^{(2\ell, 4m^2)} + \frac{2\zeta_2}{\beta} - \frac{11}{9}, \\ \operatorname{Im} d_5^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Im} b_5^{(2\ell, 4m^2)} + \frac{1}{\beta} \left[-7/18 + \frac{2}{3}(\ln_2 + \ln_b) \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} d_6^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Re} b_6^{(2\ell, 4m^2)} - \frac{8\zeta_2}{3} + \frac{49}{9}, \\
\operatorname{Im} d_6^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Im} b_6^{(2\ell, 4m^2)}, \\
\operatorname{Re} d_7^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Re} b_7^{(2\ell, 4m^2)} - \frac{4\zeta_2}{\beta} + 26\zeta_2/3 - 15\zeta_3/2 + 151/36 - 18\zeta_2 \ln_2 - 8\zeta_2 \ln_b, \\
\operatorname{Im} d_7^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Im} b_7^{(2\ell, 4m^2)} + \frac{1}{\beta} \left[7/9 - \frac{4}{3}(\ln_2 + \ln_b) \right] + 4\zeta_2, \\
\operatorname{Re} d_8^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Re} b_8^{(2\ell, 4m^2)} + \frac{1}{\beta^2} \left[-\zeta_2(1 + 6 \ln_b + 6 \ln_2) \right] \\
&\quad - 9\zeta_2/2 - 20\zeta_2 \ln_b - 15\zeta_2 \ln_2 + 41/12 - 45\zeta_3/4, \\
\operatorname{Im} d_8^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Im} b_8^{(2\ell, 4m^2)} + \frac{3\zeta_2}{\beta^2} - \frac{3}{\beta} + 10\zeta_2,
\end{aligned}$$

Für die Schwellenentwicklung des pseudoskalaren Formfaktors findet man die folgenden Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} e_1^{(2\ell, 4m^2)} &= \frac{1}{2} = \operatorname{Re} e_2^{(2\ell, 4m^2)} = -\frac{4}{11} \operatorname{Re} e_3^{(2\ell, 4m^2)} \\
&= -\frac{6}{5} \operatorname{Re} e_5^{(2\ell, 4m^2)} = -\frac{6}{5} \operatorname{Re} e_6^{(2\ell, 4m^2)} = \frac{24}{97} \operatorname{Re} e_7^{(2\ell, 4m^2)} \\
\operatorname{Im} e_1^{(2\ell, 4m^2)} &= -\frac{1}{6\beta} \\
&= -\frac{4}{11} \operatorname{Im} e_3^{(2\ell, 4m^2)} = -\frac{6}{5} \operatorname{Im} e_5^{(2\ell, 4m^2)} = \frac{12}{31} \operatorname{Im} e_7^{(2\ell, 4m^2)} \\
\operatorname{Im} e_2^{(2\ell, 4m^2)} &= \operatorname{Im} e_6^{(2\ell, 4m^2)} = 0, \\
\operatorname{Re} e_4^{(2\ell, 4m^2)} &= -\frac{3\zeta_2}{4\beta^2} + 9/8 - 3\zeta_2/2, \\
\operatorname{Im} e_4^{(2\ell, 4m^2)} &= -\frac{3}{4\beta}, \\
\operatorname{Re} e_8^{(2\ell, 4m^2)} &= \frac{1}{\beta^2} \left[+3\zeta_2(\ln_2 + \ln_b) \right] + \frac{1}{\beta} \left[+9\zeta_2/2 \right] - 21/16 + 3\zeta_2/2 + 6\zeta_2(\ln_2 + \ln_b), \\
\operatorname{Im} e_8^{(2\ell, 4m^2)} &= \frac{1}{\beta^2} \left[-3\zeta_2/2 \right] + \frac{1}{\beta} \left[+3 \ln_b/2 + 1/2 + 3 \ln_2/2 \right] - 3\zeta_2, \\
\operatorname{Re} e_9^{(2\ell, 4m^2)} &= \frac{1}{\beta} \left[+2\zeta_2(6 \ln_b - 5 + 6 \ln_2)/3 \right] - 21/8 - 2\zeta_2, \\
\operatorname{Im} e_9^{(2\ell, 4m^2)} &= \frac{1}{\beta} \left[+14/27 - 10 \ln_b/9 + \frac{2}{3}(\ln_2^2 + \ln_b^2) - 10 \ln_2/9 + 4 \ln_b \ln_2/3 \right], \\
\operatorname{Re} e_{10}^{(2\ell, 4m^2)} &= -4\zeta_2 + 67/8, \\
\operatorname{Im} e_{10}^{(2\ell, 4m^2)} &= 0, \\
\operatorname{Re} e_{11}^{(2\ell, 4m^2)} &= \frac{1}{\beta} \left[-\zeta_2(66 \ln_b - 31 + 66 \ln_2)/6 \right] \\
&\quad - 27\zeta_3/2 + 43\zeta_2/2 - 12\zeta_2 \ln_b - 30\zeta_2 \ln_2 + 325/32,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Im } e_{11}^{(2\ell, 4m^2)} &= \frac{1}{\beta} \left[+ \frac{31}{18} (\ln_2 + \ln_b) - \frac{11}{6} (\ln_b^2 + \ln_2^2) - 47/54 - 11 \ln_b \ln_2 / 3 \right] + 6\zeta_2, \\
\text{Re } e_{12}^{(2\ell, 4m^2)} &= \frac{1}{\beta^2} \left[+ 3\zeta_2 (-4 \ln_b^2 - 8 \ln_b \ln_2 + 3\zeta_2 - 4 \ln_2^2) / 2 \right] + \frac{1}{\beta} \left[- 3\zeta_2 (3 \ln_2 + 3 \ln_b + 1) \right] \\
&\quad + 449/32 - 12\zeta_2 (\ln_b + \ln_2)^2 + \zeta_2 - 18\zeta_2 \ln_2 - 15\zeta_3 + 9\zeta_2^2 - 30\zeta_2 \ln_b, \\
\text{Im } e_{12}^{(2\ell, 4m^2)} &= \frac{1}{\beta^2} \left[+ 6\zeta_2 (\ln_2 + \ln_b) \right] + \frac{1}{\beta} \left[- \frac{3}{2} (\ln_2 + \ln_b)^2 + 3\zeta_2 / 2 - 3 - \ln_b - \ln_2 \right] \\
&\quad + 3\zeta_2 (4 \ln_2 + 5 + 4 \ln_b).
\end{aligned}$$

C.3.2 Typ-B-Beiträge

Abschliessend die an der Schwelle entwickelten anomalen Formfaktoren:

$$\begin{aligned}
\text{Re } G_1^{(2\ell, B), \text{mm}, 4m^2} &= C_F T_F \left[3 \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + (48 \ln_2 - 19)\zeta_2 / 3 - 23/3 \right], \\
\text{Im } G_1^{(2\ell, B), \text{mm}, 4m^2} &= 0 \\
\text{Re } G_2^{(2\ell, B), \text{mm}, 4m^2} &= C_F T_F \left[- 2(-17 + 6 \ln_2)\zeta_2 / 3 + 4 \ln_2 - 21\zeta_3 / 2 + 2/3 \right], \\
\text{Im } G_2^{(2\ell, B), \text{mm}, 4m^2} &= C_F T_F \left[- 2 + 3\zeta_2 \right], \\
\text{Re } G_1^{(2\ell, B), \text{om}, 4m^2} &= C_F T_F \left[8 \ln_2 - 8 \ln_2^2 / 3 - 23/3 + 4\zeta_2 / 3 + 3 \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \right], \\
\text{Im } G_1^{(2\ell, B), \text{om}, 4m^2} &= C_F T_F \left[- 4 + 8 \ln_2 / 3 \right], \\
\text{Re } G_2^{(2\ell, B), \text{om}, 4m^2} &= C_F T_F \left[2/3 - 4 \ln_2 + 8 \ln_2^2 / 3 - 4\zeta_2 / 3 \right], \\
\text{Im } G_2^{(2\ell, B), \text{om}, 4m^2} &= C_F T_F \left[+ 2 - 8 \ln_2 / 3 \right],
\end{aligned}$$

Für masselose Quarks kann man keine Schwellen-Entwicklung bei $s \approx 4m^2$ durchführen, weswegen der Formfaktor $G_1^{(2\ell, B), \text{oo}}$ hier nicht nochmal angegeben wird.

Der pseudoskalare Typ-B-Formfaktor lautet:

$$\begin{aligned}
\text{Re } A^{(2\ell, B), \text{mm}, 4m^2} &= C_F T_F \left[5\zeta_2 - 21/2\zeta_3 + 12\zeta_2 \ln_2 \right], \\
\text{Im } A^{(2\ell, B), \text{mm}, 4m^2} &= C_F T_F 3\zeta_2.
\end{aligned}$$

Die Schwellenentwicklung des Anomalie-Terms liefert:

$$\begin{aligned}
\text{Re } \hat{F}^{\text{m}, 4m^2} &= 2 C_F \left[4 \ln(2) - 7 + 3 \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \right], \\
\text{Im } \hat{F}^{\text{m}, 4m^2} &= - 4 C_F.
\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [A⁺98] D. Abbaneo et al. QCD corrections to the forward-backward asymmetries of c and b quarks at the Z pole. *Eur. Phys. J.*, C4:185–191, 1998.
- [ABL92] A. B. Arbuzov, D. Yu. Bardin, und A. Leike. Analytic final state corrections with cut for $e^+e^- \rightarrow$ massive fermions. *Mod. Phys. Lett.*, A7:2029–2038, 1992. Erratum-ibid. A9:1515, 1994.
- [AD73] D. A. Akyeampong und R. Delbourgo. Dimensional regularization, abnormal amplitudes and anomalies. *Nuovo Cim.*, A17:578–586, 1973.
- [Adl69] S. L. Adler. Axial vector vertex in spinor electrodynamics. *Phys. Rev.*, 177:2426–2438, 1969.
- [AL93] G. Altarelli und B. Lampe. Second order QCD corrections to heavy quark forward - backward asymmetries. *Nucl. Phys.*, B391:3–22, 1993.
- [AS⁺01] J. A. Aguilar-Saavedra et al. TESLA Technical Design Report Part III: Physics at an e^+e^- linear collider. 2001. hep-ph/0106315.
- [B⁺01] D.Y. Bardin et al. ZFITTER v.6.21: A semi-analytical program for fermion pair production in e^+e^- annihilation. *Comput. Phys. Commun.*, 133:229–395, 2001.
- [BBU97] W. Bernreuther, A. Brandenburg, und P. Uwer. Next-to-leading order QCD corrections to three-jet cross sections with massive quarks. *Phys. Rev. Lett.*, 79:189–192, 1997.
- [BBU00] W. Bernreuther, A. Brandenburg, und P. Uwer. Next-to-leading order QCD corrections to parity-violating 3-jet observables for massive quarks in e^+e^- annihilation. 2000. hep-ph/0008291.
- [Ber05a] W. Bernreuther, R. Bonciani, T. Gehrmann, R. Heinesch, T. Leineweber, P. Mastrolia und E. Remiddi. Two-loop QCD corrections to the heavy quark form factors: Axial vector contributions. *Nucl. Phys.*, B712:229–286, 2005.

- [Ber05b] W. Bernreuther, R. Bonciani, T. Gehrmann, R. Heinesch, T. Leineweber, P. Mastrolia und E. Remiddi. Two-loop QCD corrections to the heavy quark form factors: The vector contributions. *Nucl. Phys.*, B706:245–324, 2005.
- [Ber05c] W. Bernreuther, R. Bonciani, T. Gehrmann, R. Heinesch, T. Leineweber und E. Remiddi. Two-loop QCD corrections to the heavy quark form factors: Anomaly contributions. *Nucl. Phys.*, B723:91–116, 2005.
- [BGG73] Frits A. Berends, K. J. F. Gaemers, und R. Gastmans. α^3 contribution to the angular asymmetry in $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$. *Nucl. Phys.*, B63:381–397, 1973.
- [BGS91] D. J. Broadhurst, N. Gray, und K. Schilcher. Gauge invariant on-shell $Z(2)$ in QED, QCD and the effective field theory of a static quark. *Z. Phys.*, C52:111–122, 1991.
- [BH89] M. Böhm und W. Hollik. Forward - backward asymmetries. 1989. Presented at Workshop on Z Physics at LEP. CERN-89-08-v1.
- [BJ69] J. S. Bell und R. Jackiw. A PCAC puzzle: $\pi_0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the sigma model. *Nuovo Cim.*, A60:47–61, 1969.
- [BKJW83] Frits A. Berends, R. Kleiss, S. Jadach, und Z. Was. QED radiative corrections to electron - positron annihilation into heavy fermions. *Acta Phys. Polon.*, B14:413, 1983.
- [BM77] P. Breitenlohner und D. Maison. Dimensional renormalization and the action principle. *Commun. Math. Phys.*, 52:11–38, 1977.
- [BMR03] R. Bonciani, P. Mastrolia, und E. Remiddi. Vertex diagrams for the QED form factors at the 2-loop level. *Nucl. Phys.*, B661:289–343, 2003. Erratum-ibid. B702:359, 2004.
- [BMR04] R. Bonciani, P. Mastrolia, und E. Remiddi. Master integrals for the 2-loop QCD virtual corrections to the forward-backward asymmetry. *Nucl. Phys.*, B690:138–176, 2004.
- [BU98] A. Brandenburg und P. Uwer. Next-to-leading order QCD corrections and massive quarks in $e^+ e^- \rightarrow 3$ jets. *Nucl. Phys.*, B515:279–320, 1998.
- [BW82] W. Bernreuther und W. Wetzel. Decoupling of heavy quarks in the minimal subtraction scheme. *Nucl. Phys.*, B197:228, 1982. Erratum-ibid. B513:758, 1998.

- [CCLR98a] M. Caffo, H. Czyz, S. Laporta, und E. Remiddi. The master differential equations for the 2-loop sunrise selfmass amplitudes. *Nuovo Cim.*, A111:365–389, 1998.
- [CCLR98b] M. Caffo, H. Czyz, S. Laporta, und E. Remiddi. Master equations for master amplitudes. *Acta Phys. Polon.*, B29:2627–2635, 1998.
- [CDST02] S. Catani, S. Dittmaier, M. H. Seymour, und Z. Trocsanyi. The dipole formalism for next-to-leading order QCD calculations with massive partons. *Nucl. Phys.*, B627:189–265, 2002.
- [CDT01] S. Catani, S. Dittmaier, und Z. Trocsanyi. One-loop singular behaviour of QCD and SUSY QCD amplitudes with massive partons. *Phys. Lett.*, B500:149–160, 2001.
- [CFH79] M. S. Chanowitz, M. Furman, und I. Hinchliffe. The axial current in dimensional regularization. *Nucl. Phys.*, B159:225, 1979.
- [CHJ89] M. Consoli, W. Hollik, und F. Jegerlehner. Electroweak radiative corrections for Z physics. 1989. Presented at Workshop on Z Physics at LEP. CERN-89-08-v1.
- [CM98] A. Czarnecki und K. Melnikov. Two-loop QCD corrections to the heavy quark pair production cross section in e^+e^- annihilation near the threshold. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2531–2534, 1998.
- [CS97] S. Catani und M. H. Seymour. A general algorithm for calculating jet cross sections in NLO QCD. *Nucl. Phys.*, B485:291–419, 1997. Erratum-ibid. B510:503, 1997.
- [CS99] S. Catani und M. H. Seymour. Corrections of $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ to the forward-backward asymmetry. *JHEP*, 07:023, 1999.
- [CT81] K. G. Chetyrkin und F. V. Tkachov. Integration by parts: The algorithm to calculate beta functions in 4 loops. *Nucl. Phys.*, B192:159–204, 1981.
- [DLZ95] A. Djouadi, B. Lampe, und P. M. Zerwas. A note on the QCD corrections to forward - backward asymmetries of heavy quark jets in z decays. *Z. Phys.*, C67:123–128, 1995.
- [DZ97] A. Djouadi und P. M. Zerwas. Memorandum: QCD corrections to $A_{FB}(b)$. 1997. DESY-T-97-04.
- [ESW96] R.K. Ellis, W.J. Stirling, und B.R. Webber. *QCD and collider physics*. Cambridge University Press, 1996.

- [ET82] D. Espriu und R. Tarrach. Renormalization of the axial anomaly operators. *Z. Phys.*, C16:77, 1982.
- [Far77] E. Farhi. A QCD test for jets. *Phys. Rev. Lett.*, 39:1587–1588, 1977.
- [FM04] A. Freitas und K. Mönig. Corrections to quark asymmetries at LEP. 2004. hep-ph/0411304.
- [GGG05] A. Gehrmann-De Ridder, T. Gehrmann, und E. W. N. Glover. Antenna subtraction at NNLO. 2005. hep-ph/0505111.
- [GR00] T. Gehrmann und E. Remiddi. Differential equations for two-loop four-point functions. *Nucl. Phys.*, B580:485–518, 2000.
- [GR01] T. Gehrmann und E. Remiddi. Numerical evaluation of harmonic polylogarithms. *Comput. Phys. Commun.*, 141:296–312, 2001.
- [Hoa97] A. H. Hoang. Two-loop corrections to the electromagnetic vertex for energies close to threshold. *Phys. Rev.*, D56:7276–7283, 1997.
- [HS99] R. Harlander und M. Steinhauser. Automatic computation of feynman diagrams. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 43:167–228, 1999.
- [JLZ81] J. Jersak, E. Laermann, und P. M. Zerwas. QCD corrected forward backward asymmetry of quark jets in e^+e^- annihilation. *Phys. Lett.*, B98:363–366, 1981.
- [JLZ82] J. Jersak, E. Laermann, und P. M. Zerwas. Electroweak production of heavy quarks in e^+e^- annihilation. *Phys. Rev.*, D25:1218, 1982. Erratum-ibid. D36:310, 1987.
- [JWW91] S. Jadach, B. F. L. Ward, und Z. Was. Complete standard model predictions for the muon forward - backward asymmetry at LEP. *Phys. Lett.*, B257:213–218, 1991.
- [KK90] B. A. Kniehl und J. H. Kühn. QCD corrections to the Z decay rate. *Nucl. Phys.*, B329:547, 1990.
- [Kot91a] A. V. Kotikov. Differential equation method: The calculation of n point feynman diagrams. *Phys. Lett.*, B267:123–127, 1991.
- [Kot91b] A. V. Kotikov. Differential equations method: New technique for massive feynman diagrams calculation. *Phys. Lett.*, B254:158–164, 1991.
- [Kot91c] A. V. Kotikov. Differential equations method: The calculation of vertex type feynman diagrams. *Phys. Lett.*, B259:314–322, 1991.

- [KR99] J. H. Kühn und G. Rodrigo. Charge asymmetry of heavy quarks at hadron colliders. *Phys. Rev.*, D59:054017, 1999.
- [Krä04] T. Krämer. *Measurement of heavy quark forward-backward-asymmetries and the B mixing parameter using Z decays recorded with the OPAL detector at LEP*. Dissertation, Universität Hamburg, 2004.
- [KZD89] Johann H. Kühn, P.M. Zerwas, und A. Djouadi. Heavy flavors. 1989. Presented at Workshop on Z Physics at LEP. CERN-89-08-v1.
- [Lap00] S. Laporta. High-precision calculation of multi-loop feynman integrals by difference equations. *Int. J. Mod. Phys.*, A15:5087–5159, 2000.
- [Lar93] S. A. Larin. The renormalization of the axial anomaly in dimensional regularization. *Phys. Lett.*, B303:113–118, 1993.
- [Lei05] T. Leineweber. *Paarproduktion schwerer Quarks in e^+e^- -Kollisionen: QCD-Strahlungskorrekturen für die Quark-Antiquark-Beiträge zur Ordnung α_s^2* . Dissertation, RWTH Aachen, 2005.
- [LEP96] The LEP Experiments: ALEPH, DELPHI, L3 and OPAL. Combining heavy flavour electroweak measurements at LEP. *Nucl. Instrum. Meth.*, A378:101–115, 1996.
- [LEP01] The LEP/SLD Heavy Flavour Working Group. Final input parameters for the LEP/SLD heavy flavour analyses. 2001. LEPHF/2001-01.
- [LEP04] The LEP Collaborations ALEPH, DELPHI, L3, OPAL, the LEP Electroweak Working Group, the SLD Electroweak and Heavy Flavour Groups. A combination of preliminary electroweak measurements and constraints on the standard model. 2004. hep-ex/0412015.
- [Lew84] L. Lewin. *Polylogarithms and associated functions*. North Holland, 1984.
- [LR96] S. Laporta und E. Remiddi. The analytical value of the electron ($g-2$) at order α^3 in QED. *Phys. Lett.*, B379:283–291, 1996.
- [Mut87] T. Muta. *Foundations of quantum chromodynamics: An introduction to perturbative methods in gauge theories*. World Scientific Publications, 1987.
- [MvR00] K. Melnikov und T. van Ritbergen. The three-loop on-shell renormalization of QCD and QED. *Nucl. Phys.*, B591:515–546, 2000.
- [Nac86] O. Nachtmann. *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*. Vieweg Verlag, 1986.

- [NO98] P. Nason und C. Oleari. Next-to-leading-order corrections to the production of heavy-flavour jets in e^+e^- collisions. *Nucl. Phys.*, B521:237–273, 1998.
- [PS95] M.E. Peskin und D.V. Schroeder. *An introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, 1995.
- [RBS99] G. Rodrigo, M. S. Bilenky, und A. Santamaria. Quark-mass effects for jet production in e^+e^- collisions at the next-to-leading order: Results and applications. *Nucl. Phys.*, B554:257–297, 1999.
- [Rem97] E. Remiddi. Differential equations for feynman graph amplitudes. *Nuovo Cim.*, A110:1435–1452, 1997.
- [RV00] E. Remiddi und J. A. M. Vermaseren. Harmonic polylogarithms. *Int. J. Mod. Phys.*, A15:725–754, 2000.
- [RvN98] V. Ravindran und W. L. van Neerven. Second order QCD corrections to the forward-backward asymmetry in e^+e^- collisions. *Phys. Lett.*, B445:214–222, 1998.
- [Smi02] V.A. Smirnov. *Applied asymptotic expansions in momenta and masses*. Springer Verlag, 2002.
- [Smi05] V.A. Smirnov. *Evaluating Feynman integrals*. Springer Verlag, 2005.
- [tHV72] G. 't Hooft und M. J. G. Veltman. Regularization and renormalization of gauge fields. *Nucl. Phys.*, B44:189–213, 1972.
- [Tka81] F. V. Tkachov. A theorem on analytical calculability of four loop renormalization group functions. *Phys. Lett.*, B100:65–68, 1981.
- [Ver00] J. A. M. Vermaseren. New features of FORM. 2000. math-ph/0010025.

Danksagung

Allen, die mich beim Anfertigen dieser Arbeit unterstützt und motiviert haben, möchte an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aussprechen. Besonders hervorheben möchte ich Prof. Dr. W. Bernreuther und Prof. Dr. T. Gehrman, die mir das Thema bereit gestellt, mich in den letzten Jahren intensiv betreut und mir geduldig alle Fragen beantwortet haben. Dem Graduiertenkolleg „Physik an der TeV-Skala“ danke ich für die finanzielle Förderung. Dr. G. Schwering, A. Bachtankirch, Dr. U. Kahlert und C. Rosenbleck möchte ich für die Unterstützung in allen Fragen der Bürokratie und der Rechnerei danken. Allen Arbeitskollegen der dritten Etage danke ich für eine tolle Atmosphäre über all die Jahre hinweg. Dort wo man sich wohl fühlt, macht es auch Spaß zu arbeiten. J. Ziethe und M. Holtschneider danke ich für alle möglichen Diskussionen über Physik und was sonst noch wichtig ist im Leben. Auch ich werde irgendwann die Geheimnisse des Sports und der Quanten-Monte-Carlo-Simulationen verstehen. Dr. T. Leineweber möchte ich für unsere gemeinsame Zeit in Aachen und für unzählige Fragen, die wir gemeinsam beantworten konnten, danken. Liebe Nadja, deine Unterstützung und deine Geduld, besonders im letzten Jahr, sind mir unschätzbar wertvoll gewesen. Danke.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Roland Heinesch
Geburtsdatum	20. Mai 1976
Geburtsort	Luxemburg
Familienstand	ledig
Staatsangehörigkeit	luxemburgisch
Eltern	Léonie Heinesch-Letsch Jean Heinesch

Schulbildung

September 1982 - Juli 1988	École primaire Bous (Luxemburg)
September 1988 - Juli 1995	Lycée technique des Arts et Métiers Luxembourg
Juli 1995	Diplôme de fin d'études secondaire technique, Section: technique générale

Universitätsbildung

Oktober 1995 - Dezember 2001	RWTH Aachen, Studiengang Physik
September 1998	Vordiplom
Februar 2001 - Oktober 2001	Diplomarbeit bei Prof. Dr. Bernreuther
Dezember 2001	Diplom
Januar 2002	Beginn der Promotion bei Prof. Dr. Bernreuther
16. September 2005	mündliche Prüfung