

Baumrekursionen und Rekursionen mit unregelmäßigem Abstieg

Von der Fakultät für Mathematik, Informatik
und Naturwissenschaften der Rheinisch-Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen
zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der
Naturwissenschaften genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Mathematiker

Ferdinand Wolfgang Bomble

aus Aachen

Berichter:

Universitätsprofessor em. Dr. rer. nat. Walter Oberschelp
Universitätsprofessor Dr. rer. nat. Herbert Pahlings

Tag der mündlichen Prüfung: 31. Mai 2002

Diese Dissertation ist auf den Internetseiten der
Hochschulbibliothek online verfügbar.

*„Darum gibt es im Grunde nur ein Streben,
nämlich das Streben nach dem eigenen Wesen.“*

C.G. Jung, Erinnerungen

Dank

Herrn Prof. Dr. Walter Oberschelp danke ich herzlich für die stete Betreuung und Unterstützung, besonders für die Bereitschaft, verschiedenste Wege mitzugehen. Weiterhin möchte ich ihm für seine Förderung, vielfältige Anregungen und viele interessante Diskussionen sowie die Begleitung der Arbeit auch außerhalb der engeren Thematik danken.

Herrn Prof. Dr. Herbert Pahlings danke ich für die Bereitschaft zur Übernahme des Koreferats und für Hilfe und konstruktive Kritik, insbesondere für wertvolle Hinweise, die mein eigenes Verständnis und die Gestalt der Arbeit wesentlich verbessert haben.

Herrn Prof. Dr. Wolfgang Thomas möchte ich für sein förderndes Interesse und für die Möglichkeit, die Arbeit am Lehrstuhl für Informatik VII erstellen zu können, danken.

Der wesentliche Teil dieser Arbeit wurde im Rahmen eines Stipendiums nach dem Graduiertenförderungsgesetz Nordrhein-Westfalen gefördert, wofür ich mich hiermit bedanken möchte. Den Mitarbeitern beim Studentensekretariat der RWTH Aachen, Frau Hannelore Nigbur und Herrn Torsten Dickmeis, danke ich für freundliche und entgegenkommende Behandlung bei der Bewältigung der notwendigen Schritte.

Meinen Kollegen danke ich für eine angenehme Arbeitsumgebung und vielfältige Unterstützung und Hilfestellung. Speziell möchte ich mich für technische Hilfen bei Rolf Eschmann, Helwig Hassenpflug, Colin Hirsch, Stefan Kreutzer, Marianne Kuckertz und Jens Vöge bedanken. Vielfachen Dank schulde ich meiner Kollegin Irmgard Dittrich für Ihre Hilfe beim Korrekturlesen und für viele interessante Diskussionen.

Mein herzlicher Dank gilt meinen Eltern Elisabeth und Wilhelm Bomble für stete Unterstützung und Hilfestellung in vielfältiger Weise.

Meiner Lebensgefährtin Stefanie Ax danke ich für Ihre ununterbrochene Unterstützung und Begleitung. Ihr, meinen Eltern, meinen Geschwistern Birgit und Michael, sowie meinen Freund(inn)en Gudula Entz, Götz H. Loos, Helmut Kreusch, Josef Mattar, Prof. Dr. Erwin Patzke, Nathalie Plum, Bruno Schmitz, Astrid Tiemann, Maria und Wolfgang Umlauf danke ich für Unterstützung meines Wohls und für Ausgleich im privaten Umfeld.

Kurzzusammenfassung

Untypische Rekursionen, die nicht dem Schema der linearen Differenzengleichungen entsprechen, erzeugen Folgen mit ungleichmäßigem Wachstum. Ein gutes Beispiel ist die Heapfolge, die die Anzahl der Heaps mit n Knoten abzählt. Ein wichtiges Ergebnis ist eine neue Darstellung der Heapfolge.

Um das Wachstum zu analysieren, wird die Folge der Quotienten betrachtet. Diese Folge zeigt als asymptotische Eigenschaft ein Schwingungsverhalten innerhalb eines Konvergenzkegels.

Die Schwingungen erscheinen etwas periodisch und zeigen selbstähnliche Phänomene. Die Analyse von Berührungspunkten, Selbstähnlichkeit und anderen Eigenschaften der Quotientenfolge ist eng verknüpft mit unendlichen gelabelten Graphen, speziell binären Bäumen. Die strukturellen Eigenschaften dieser Graphen lösen viele hier untersuchte Probleme. Ein Beispiel einer Eigenschaft, die von Teilgraphen induziert wird, ist die Menge der Berührungspunkte. Überabzählbare Berührungspunktmengen hängen mit unendlichen Wegen in unendlichen binären Bäumen zusammen. Andererseits führen unendliche Teilbäume und ähnliche Unterstrukturen (nicht notwendigerweise Teilgraphen) zur Selbstähnlichkeit der Quotientenfolge.

Abstract

Non-regular recursions, which do not satisfy the schema of linear difference equations, define sequences with non-uniform growth. A good example is the heap sequence, which counts the number of heaps with n nodes. An important result is a new representation of the heap sequence.

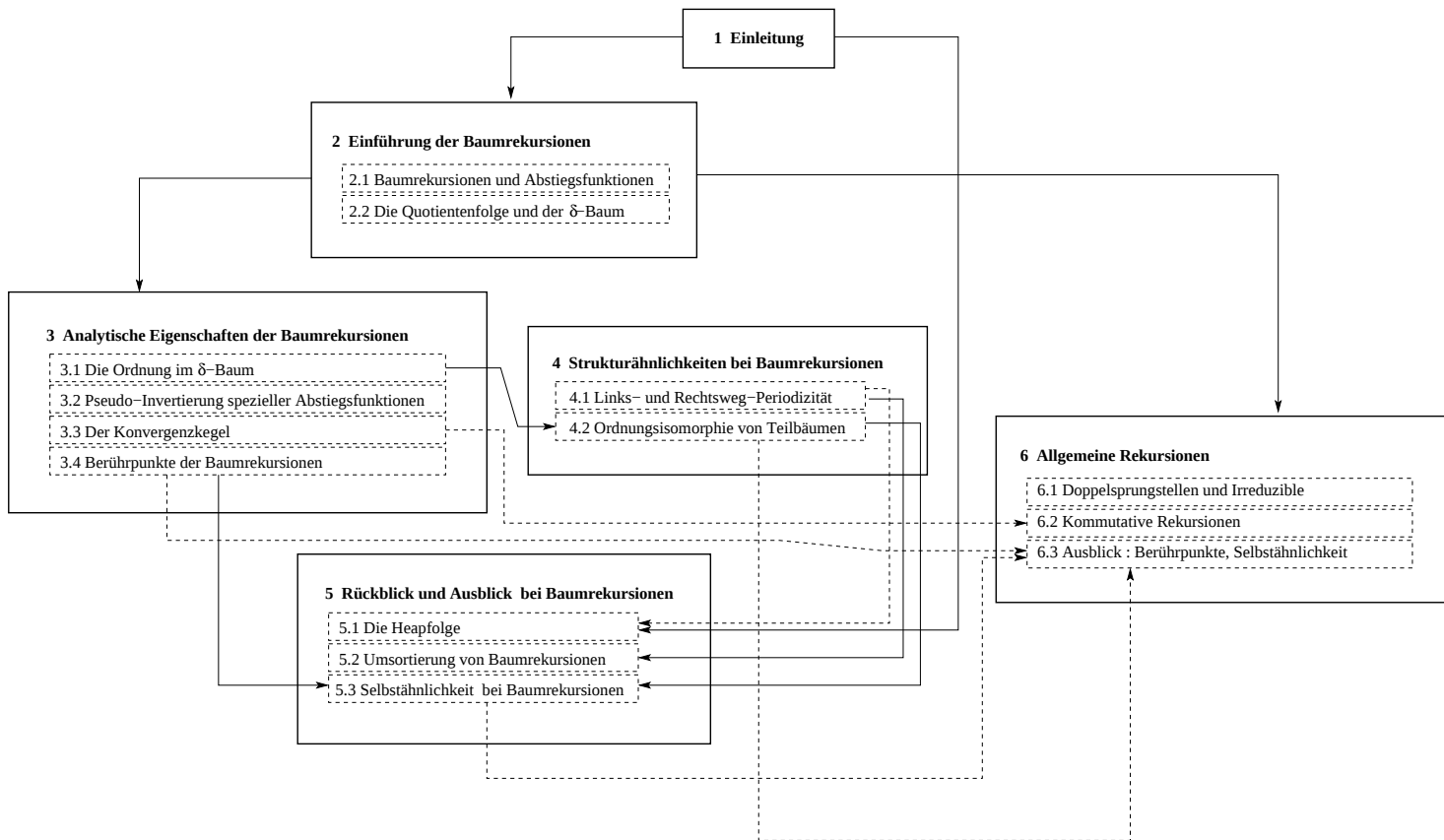
In order to analyse the growth, the sequence of quotients is considered. This sequence shows as asymptotic feature an oscillating behavior inside a convergence cone.

The oscillation looks somewhat periodical and shows self-similarity phenomena. The analysis of cluster points, self-similarity etc. of the sequence of quotients is deeply connected with infinite labeled graphs, in particular binary trees. The structural properties of these graphs give answers to many problems which are involved here. An example of a property of the sequence of quotients, which is induced by subgraphs, is the set of cluster points. Uncountable sets of cluster points are connected with infinite paths in infinite binary trees. On the other hand infinite subtrees and similar substructures (not necessarily subgraphs) lead to the self-similarity of the sequence of quotients.

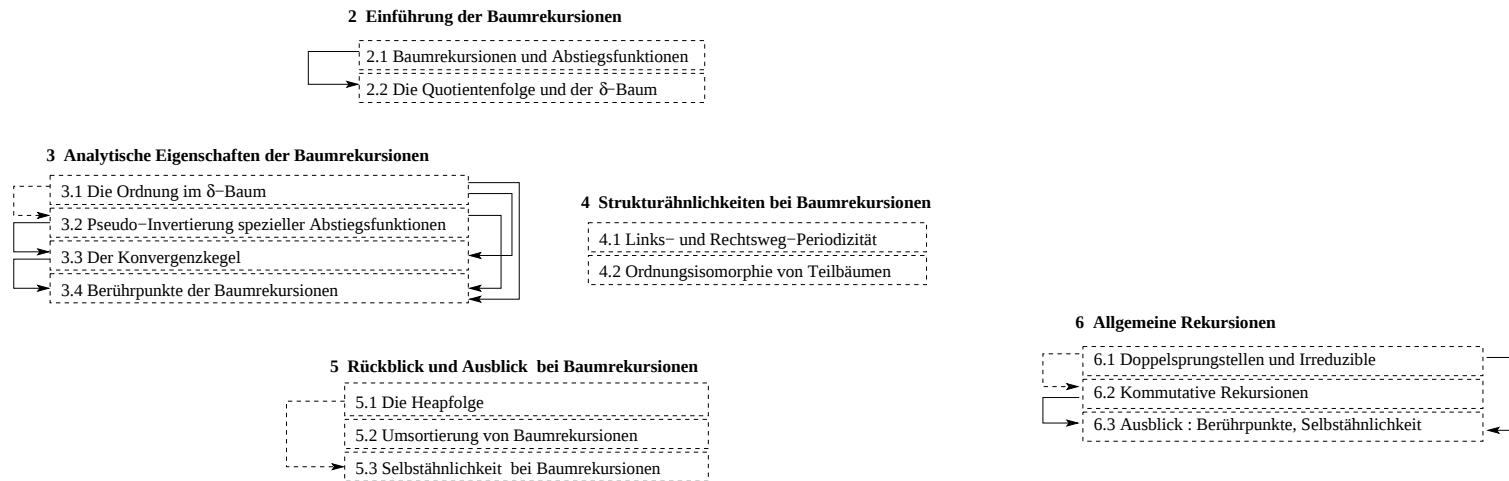
Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Einführung der Baumrekursionen	13
2.1	Baumrekursionen und Abstiegsfunktionen	13
2.2	Die Quotientenfolge und der δ -Baum	25
3	Analytische Eigenschaften	49
3.1	Die Ordnung im δ -Baum	49
3.2	Pseudo-Invertierung	70
3.2.1	nicht ausgeartete, periodische Abstiegsfunktionen	70
3.2.2	stufentreue Abstiegsfunktionen	80
3.3	Der Konvergenzkegel	86
3.4	Berührungspunkte von Baumrekursionen	100
4	Strukturähnlichkeiten	121
4.1	Links- und Rechtsweg-Periodizität	121
4.2	Ordnungsisomorphie von Teilbäumen	133
5	Baumrekursionen: Rückblick / Ausblick	153
5.1	Die Heapfolge	153
5.2	Umsortierung von Baumrekursionen	166
5.3	Selbstähnlichkeit bei Baumrekursionen	173
6	Allgemeine Rekursionen	189
6.1	Doppelsprungstellen und Irreduzible	189
6.2	Kommutative Rekursionen	206
6.3	Ausblick: Berührungspunkte, Selbstähnlichkeit	226
7	Zusammenfassung	243
	Literaturverzeichnis	247
	Index	253

Abhängigkeitsdiagramm – Teil 1: Kapitel-externe Abhängigkeiten



Abhängigkeitsdiagramm – Teil 2: Kapitel-interne Abhängigkeiten



Abbildungsverzeichnis

1.1	Heapstrukturen mit n Knoten für $1 \leq n \leq 10$	2
1.2	Benennung von Knoten in einem Baum.	2
1.3	Eine Auswahl von Heaps mit 10 Knoten.	3
1.4	Ein paar Schritte bei Heapsort.	4
1.5	Zerlegung eines Heaps zum Beweis der Rekursion.	5
1.6	Umlabelung von Teilbäumen eines Heaps.	6
1.7	Abstiegsfunktionen der Heaprekursion.	7
1.8	Quotientenfolge $\hat{Q}_n$ zur Heaprekursion.	11
2.1	Entstehung der Baumstruktur über die beiden Pseudoinversen. . .	34
2.2	Rekursionsgraph der Originalfolge (links) und der Quotientenfolge (rechts) [= δ -Baum] derselben Baumrekursion.	36
2.3	Anfang des δ -Baumes in Beispiel 2.7.	37
2.4	Vater-Söhne-Beziehungen im δ -Baum bei Normiertheit.	38
2.5	Die benutzten Klassen von normierten Abstiegsfunktionen.	48
3.1	Triviale Ordnungsstruktur durch echte Rekursion.	52
3.2	Bezeichnung der Stufen des δ -Baumes.	52
3.3	Triviale Stufen-Ordnung durch die Konvention der Definition. . .	53
3.4	Bildliche Darstellung der Situation in Lemma 3.2. Es folgt $x < y$. .	54
3.5	Relationen zwischen den Teilvektoren bei der Hypercube-Ordnung.	56
3.6	Bezeichnung der Labels der 4. Stufe	58
3.7	Hypercube-Ordnung der 4. Stufe	59
3.8	Beispiel einer linearen Ordnung der dritten Stufe	62
3.9	Entwicklung aus der Situation in Abbildung 3.8 durch A-Abschnitt	63
3.10	Entwicklung aus der Situation in Abbildung 3.8 durch B-Abschnitt	64
3.11	Schablone zur speziellen Hebungsregel.	65
3.12	Schablone zur allgemeinen Senkungsregel.	66
3.13	Anlegen der Schablone zur allgemeinen Senkungsregel an einen Teilbaum.	67
3.14	δ -Baum einer periodischen Baumrekursion.	72
3.15	Zwei δ -Bäume von stufentreuen Baumrekursionen.	81
3.16	Rand des Konvergenzkegels.	87
3.17	(Un-)beschränkte Quotientenfolgen bei Baumrekursionen.	101

3.18	Gliederung des Beweises von Satz 3.12.	103
3.19	Ursprungsfolge und konstruierte Folge haben keine gemeinsamen Indices.	112
3.20	Gliederung des Beweises von Satz 3.13.	113
3.21	Relative Lage der Berührungspunkt-Intervalle.	115
3.22	Darstellung der Wege durch Punkte aus der Menge M	116
3.23	Wege durch Punkte aus der Menge M ohne Zwischenpunkte. . . .	116
3.24	Berührungspunktzahl der Quotientenfolgen bei Baumrekursionen. . . .	118
4.1	Quotientenfolge mit Wiederholung ähnlich aussehender Stücke. . .	122
4.2	Bildung neuer und Wiederholung alter Linkswege.	123
4.3	Links- und Rechts-Intervalle einer Quotientenfolge.	125
4.4	Scheinbar periodisches Verhalten im unfairen Fall.	126
4.5	Scheinbar noch periodischeres Verhalten bei $\alpha(n) = \lfloor \log_2(n) \rfloor$. .	127
4.6	Ähnlich aufgebaute, größer werdende Abschnitte im fair - periodischen Fall.	128
4.7	δ -Baum-Anfang zu $\alpha = period[0, 0, 1, 1]$	129
4.8	Quotientenfolge der stufentreuen Baumrekursion aus Beispiel 4.2. .	132
4.9	Rechts- und Links-Intervalle bei verschiedenen Klassen von Baumrekursionen.	133
4.10	Bildung einer Teilbaum-Teilfolge.	134
4.11	Quotientenfolge mit zwei Teilbaumteilfolgen.	135
4.12	Abbildung eines beispielhaften Teilbaumes unter Ψ	137
4.13	Abbildung eines beliebigen Teilbaumes aus Beispiel 4.5 unter Ψ . .	138
4.14	Teilbäume $T_s^{(\rho(s))}$ und $T_{s+1}^{(\rho(s))}$	140
4.15	Situation zu zwei Stellen in verschiedenen Teilbäumen.	143
4.16	Erhaltung der B -Stufenordnung bei Teilbäumen.	150
4.17	Erhaltung der A -Stufenordnung bei Teilbäumen.	151
4.18	(Un-)endlich viele Ordnungsisomorphieklassen bei Baumrekursionen. .	152
5.1	Anfang des δ -Baumes des Heaprekursion	154
5.2	Anfang der Heap-Quotientenfolge (Q_n)	158
5.3	Rekursiver Prozeß bei der Generierung der Heap-Quotientenfolge. .	158
5.4	Lokal-rekursive Strukturersetzung bei der Heap-Quotientenfolge. .	159
5.5	Drei Teilbäume des Heap- δ -Baumes.	165
5.6	Umsortierung von zwei Folgen aus Beispiel 5.1	168
5.7	Gleiche Abschnitte verschiedener Teilfolgen aus Beispiel 5.3	177
5.8	δ -Baum zu $\alpha := period[0, 0, 1, 1]$	180
5.9	Konstruktion eines linken Sohnbaumes im Beispiel	181
5.10	Gleiche Abschnitte der Quotientenfolge und der linken bzw. rechten Sohnbaum-Teilfolge von zwei Baumrekursionen.	186
5.11	Konstruktion der Berührungpunktmenge.	187

6.1	Quotientenfolge einer Nicht-Baumrekursion aus Beispiel 6.1. . . .	191
6.2	Wege durch unendlich viele Doppelsprungstellen.	198
6.3	Erster Typ von Zusammenhangskomponenten in Beispiel 6.5. . . .	205
6.4	Zweiter Typ von Zusammenhangskomponenten in Beispiel 6.5. . .	205
6.5	Netz-Rekursion zu $\alpha(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ und $\beta(n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ für $n = 360$	211
6.6	Zusammenhangskomponente teilerfremder Netz-Rekursionen. . . .	212
6.7	Rekursion zu $\alpha(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ und $\beta(n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ ohne Identifizierung. . .	213
6.8	Netz-Rekursion zu für $n = 360$ mit Exponenten $e_{n,r}$	215
6.9	Zusammenhangskomponente der 1-Helix-Rekursion	218
6.10	Zusammenhangskomponente der 2-Helix-Rekursion	218
6.11	Zusammenhangskomponente der 3-Helix-Rekursion	219
6.12	Rekursionsgraph zu $\alpha(n) = \lfloor \frac{n}{x^2} \rfloor$ und $\beta(n) = \lfloor \frac{n}{x^3} \rfloor$ mit Exponenten $e_{n,k}$	220
6.13	Teilnetz des Rekursionsgraphen einer teilerfremden Netzrekursion. .	234
6.14	Entsprechende Teilnetz-Teilfolgen der Quotientenfolge verschiede- ner Zusammenhangskomponenten.	236
6.15	Teilnetz-Teilfolgen der Zusammenhangskomponente des Rekursi- onsgraphen einer Netzrekursion.	238

Tabellenverzeichnis

1.1	Erste Werte der Heapfolge $\hat{H}_n$	6
2.1	Berechnung der Funktion δ in Beispiel 2.7	37
5.1	Matrix der Exponenten von k in der Darstellung von $\hat{H}_n$ nach (5.2) [ergänzt für $k = 1$].	161
5.2	Quotientenfolge und zwei Teilfolgen zu $\alpha := period[0, 0, 1, 1]$	180
6.1	Erste Werte der Quotientenfolge aus Beispiel 6.11.	217
6.2	Erste Werte der Folgen $(g_n^{(k)})$	219
6.3	Tableau von $\binom{i+j}{i}$	240

Kapitel 1

Einleitung

Die Entwicklung der Idee dieser Arbeit beginnt an einer ganz anderen Stelle als wo sie hinführt. Einstiegsrahmen ist das Sortierprogramm **Heapsort** aus der Informatik. Es war lange sehr beliebt, weil es einerseits einfach zu vermitteln ist und andererseits eine gute Schranke in sogenannten worst-case liefert. Unter dem worst-case wird die langsamste Laufzeit (in definierten Arbeitsschritten) bei vorgegebener Eingabelänge verstanden. Im hiesigen Fall werden diese schlimmsten Fälle annähernd so schnell ermöglicht, wie es überhaupt möglich ist, d.h. nahe der unteren Schranke, die von Knuth [Knut3, p. 183] als „information theoretic lower bound“ bezeichnet wird und auch als Shannon-Argument bekannt ist.

Lange Zeit war sehr wenig über das durchschnittliche Verhalten, den sogenannten average-case, von Heapsort bekannt (vgl. z.B. bei Knuth in der ersten Auflage von [Knut3] aus dem Jahre 1973). Erst in neuerer Zeit wurde das average-case-Verhalten von Heapsort z.B. durch Doberkat [Dob81, Dob82, Dob84] und Schaffer und Sedgewick [SchSe] aufgedeckt. Dazu mußte die Anzahl der Heaps, einer im folgenden näher erklärten Struktur von Heapsort, bestimmt werden. Dieses Ergebnis lieferte jedoch schon Knuth in der ersten Auflage von [Knut3].

Nachfolgend wird partiell die Arbeitsweise von Heapsort vorgestellt. Das Verfahren kann vielfach in der Literatur nachvollzogen werden, z.B. bei Mehlhorn [Mehlh], bei Ottmann und Widmayer [OttWi], bei Knuth [Knut3] oder bei Aho und Ullman [AhoUl]. Für über die folgende Darstellung hinausgehende Angaben sei auf die diese Arbeiten verweisen.

Ein **Heap**¹ ist ein gelabelter binärer Baum mit n Knoten, der einige spezielle Einschränkungen besitzt. Zum ersten hat er eine feste Struktur, die hier als

¹Zu allgemeinen graphentheoretischen Begriffen vgl. Seiten 30f..

Heapstruktur bezeichnet wird. Die Heapstruktur ist ein binärer Wurzelbaum mit n Knoten, in dem die ersten Stufen vollständig gefüllt sind und die letzte Stufe linksbündig gefüllt ist. Dies ist in Abbildung 1.1 dargestellt.

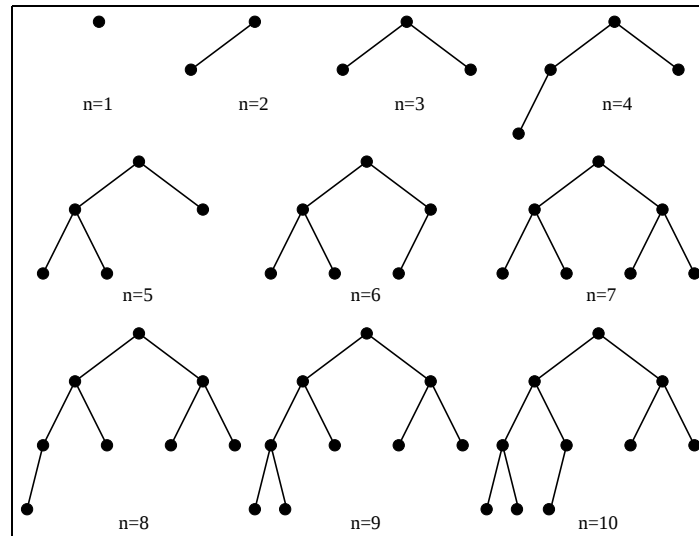


Abbildung 1.1: Heapstrukturen mit n Knoten für $1 \leq n \leq 10$.

Ein Heap mit n Knoten ist eine mit $1, 2, \dots, n$ folgendermaßen gelabelte Heapstruktur mit n Knoten:

Wenn man einen Knoten herausnimmt („Vaterknoten“) und die „daranhängenden“, tiefer liegenden Knoten als seine „Söhne“ bezeichnet (vgl. Abbildung 1.2), so ist stets das Label des Vaterknotens kleiner als das seiner Söhne.

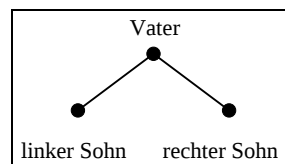


Abbildung 1.2: Benennung von Knoten in einem Baum.

Man kann eine Auswahl von Heaps mit $n = 10$ Knoten in Abbildung 1.3 betrachten, wobei dort der Einfachheit halber die Knoten fortgelassen wurden, d.h. die Labels auch als Knoten fungieren.

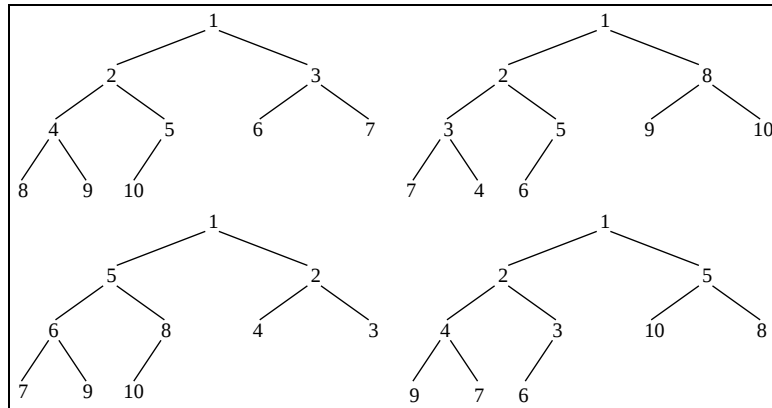


Abbildung 1.3: Eine Auswahl von Heaps mit 10 Knoten.

Heaps werden im Sortierprogramm Heapsort verwendet, da sie leicht zu generieren und wiederherzustellen sind, und andererseits schon eine gewisse Vorsortierung liefern. Man weiß immer, daß die Wurzel (der Knoten ohne Vater) das kleinste Label trägt. Zum Reorganisieren wird das Wurzellabel durch das Label des rechts-untersten Knotens ersetzt, wobei der zuletzt genannte Knoten entfernt wird. Dieses Element („Prügelknabe“) wird nun solange „heruntergeprügelt“, bis es in die Heapordnung paßt [die bildlich sehr passenden Begriffe entstammen einer Vorlesung von W. Oberschelp]. Das Ergebnis ist ein Heap mit einem Knoten weniger. Ein solcher Schritt kann an einem Beispiel in Abbildung 1.4 betrachtet werden.

Um die Anzahl der Heaps mit n Knoten, die als $\hat{H}_n$ bezeichnet werden soll, zu bestimmen, kann man eine Rekursion der Folge $(\hat{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, **Heapfolge** genannt, herleiten:

Man beginnt hierzu bei $\hat{H}_1 = 1$ (bzw. $\hat{H}_0 := 1$), denn es gibt nur einen Heap mit einem Knoten. Nun wird vorausgesetzt, daß die Folgenglieder $(\hat{H}_0)$, $\hat{H}_1$, $\hat{H}_2$, ..., $\hat{H}_{n-1}$ schon bekannt sind, und es soll daraus $\hat{H}_n$ berechnet werden. Dazu wird ein beliebiger Heap mit n Knoten (hier als Beispiel $n = 10$) betrachtet, der gemäß dem in Abbildung 1.5 vorgestellten Verfahren zerlegt wird.

Man stellt zuerst fest, daß bei jedem Heap mit n Knoten beide Teilbäume wieder die Heapstruktur haben und eine feste Anzahl von Knoten besitzen. Dazu wird definiert:

$\alpha(n) :=$ Anzahl der Knoten des linken Teilbaums eines Heaps mit n Knoten

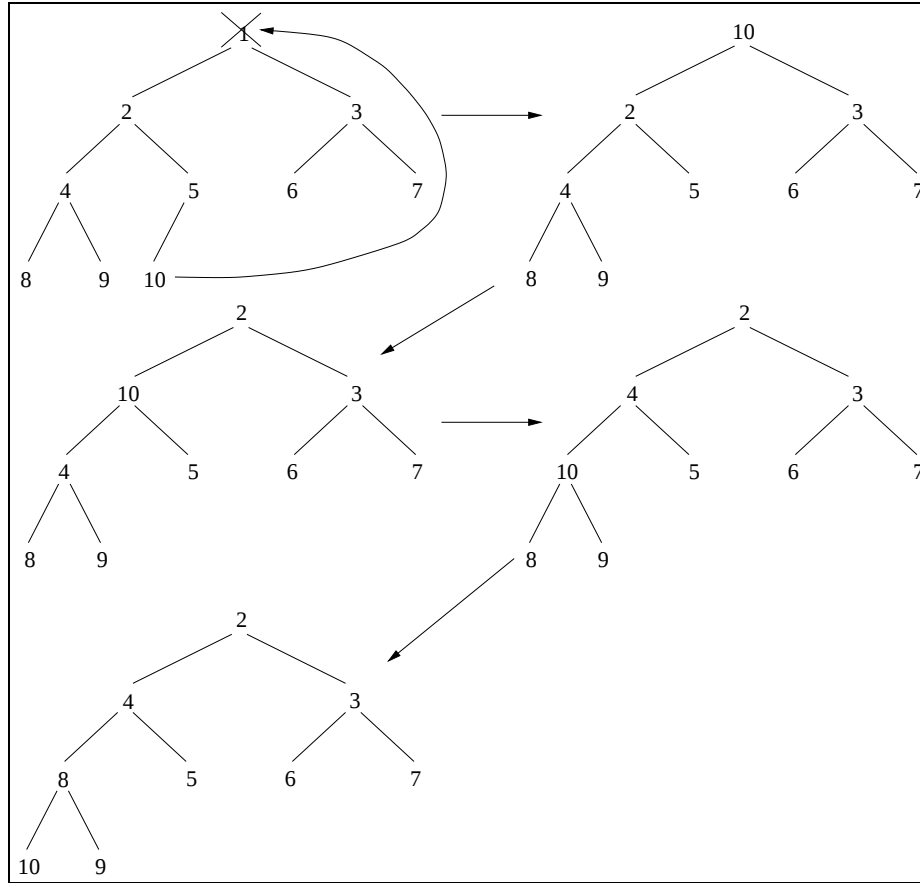


Abbildung 1.4: Ein paar Schritte bei Heapsort.

$\beta(n) :=$ Anzahl der Knoten des rechten Teilbaums eines Heaps mit n Knoten

Auf die hier definierten Funktionen $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$, $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$ wird später noch genauer eingegangen.

Nun läßt sich feststellen, daß der linke Teilbaum im Beispiel die Labels $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ und der rechte Teilbaum die Labels $\{2, 3, 4\}$ hat (die Wurzel hat immer das Label 1). Schaut man sich Abbildung 1.3 an, so sieht man, daß bei den linken Teilbäumen auch andere Labelmengen vorkommen. Es können im Beispiel genauer gesagt alle sechselementigen Teilmengen von $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ sein. Im allgemeinen sind es alle $\alpha(n)$ -elementigen Teilmengen von $\{2, 3, \dots, n\}$. Die zuletzt genannte Menge enthält genau $n - 1$ Elemente. Da die Labelmenge des rechten Teilbaumes sich automatisch aus der des linken Teilbaumes ergibt, erhält man für die Auswahl der Labelverteilung auf die beiden Teilbäume genau $\binom{n-1}{\alpha(n)}$ Möglichkeiten.

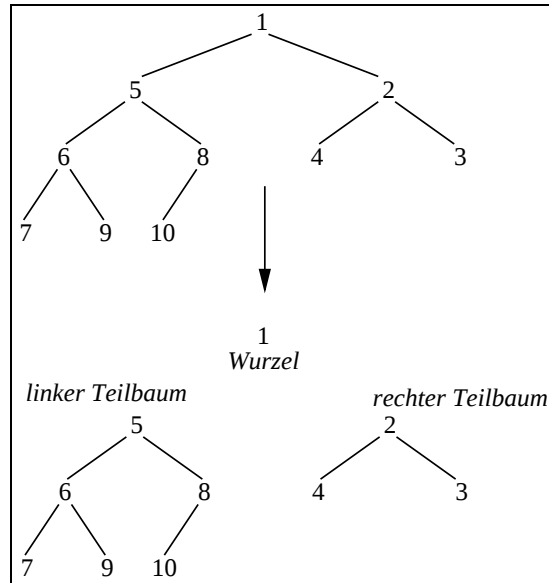


Abbildung 1.5: Zerlegung eines Heaps zum Beweis der Rekursion.

Nun werden wieder jeweils die Teilbäume im Beispiel betrachtet. Sie sind wie ein Heap geordnet, haben nur eine andere Labelmenge. Man kann aber alle solchen z.B. linken Teilbäume mit gleicher Labelmenge, die oben fest ausgewählt wurde, bijektiv auf einen mit $\{1, \dots, \alpha(n)\}$ gelabelten Heap abbilden, z.B. wird dies mit dem obigen Beispiel in Abbildung 1.6 vorgeführt.

Dabei wird das kleinste Label auf die 1, das zweitkleinste Label auf die 2, abgebildet.

Es hat sich ergeben, daß die Anzahl der linken Teilbäume mit $\alpha(n)$ Knoten zu einer festen Labelmenge gleich der Anzahl der Heaps mit $\alpha(n)$ Knoten ist. Da dies ebenso für die rechten Teilbäume gilt, erhält man die folgende Rekursion:

$$\hat{H}_1 = 1; \quad \hat{H}_n = \binom{n-1}{\alpha(n)} \hat{H}_{\alpha(n)} \hat{H}_{\beta(n)} \quad n > 1$$

Diese Rekursion, kurz Heaprekursion genannt, wurde schon von Schaffer und Sedgewick [SchSe] entdeckt.

Man kann mit dieser Rekursion von Hand leicht die ersten Werte der Heapfolge berechnen (vgl. Tabelle 1.1).

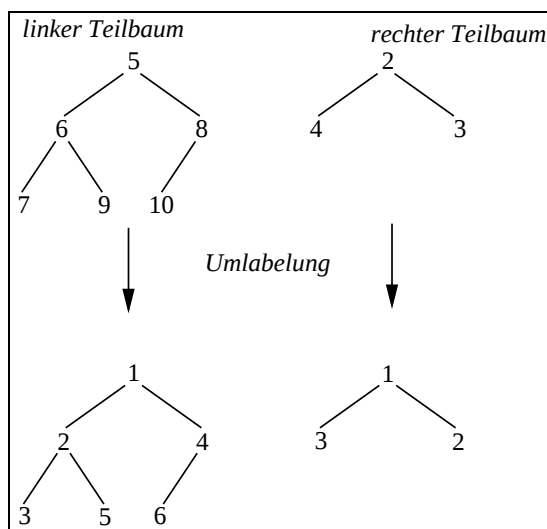


Abbildung 1.6: Umlabelung von Teilbäumen eines Heaps.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{H}_n$	1	1	1	2	3	8	20	80	210	896	3360

Tabelle 1.1: Erste Werte der Heapfolge $\hat{H}_n$.

Nun soll die Heaprekursion einmal genauer betrachtet werden, da sie den wesentlichen Einstieg zu dieser Arbeit liefert.

Aus der Definition von α und β erkennt man, daß für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\alpha(n) + \beta(n) = n - 1 \quad , \text{ was äquivalent ist mit } \beta(n) = n - 1 - \alpha(n)$$

Es liegt hier eine Rekursion mit Rückgriff auf zwei vorhergehende Terme unter Zuhilfenahme zweier zuerst intuitiv als Abstiegsfunktionen bezeichneter Abbildungen α und β vor, die aber voneinander abhängen. Die hier gemachte Beobachtung führt zur fundamentalen Definition von **Baumrekursionen**.

Eine noch tiefer liegende Erkenntnis erhält man, wenn man die Abstiegsfunktionen α und β in Abhängigkeit von n - wie in Abbildung 1.7 - graphisch darstellt.

Es ist zu erkennen, daß die Abstiegsfunktionen nicht immer ansteigen, sondern zeitweise ansteigen und zeitweise gleichbleiben. Ebenfalls sieht man, daß α und

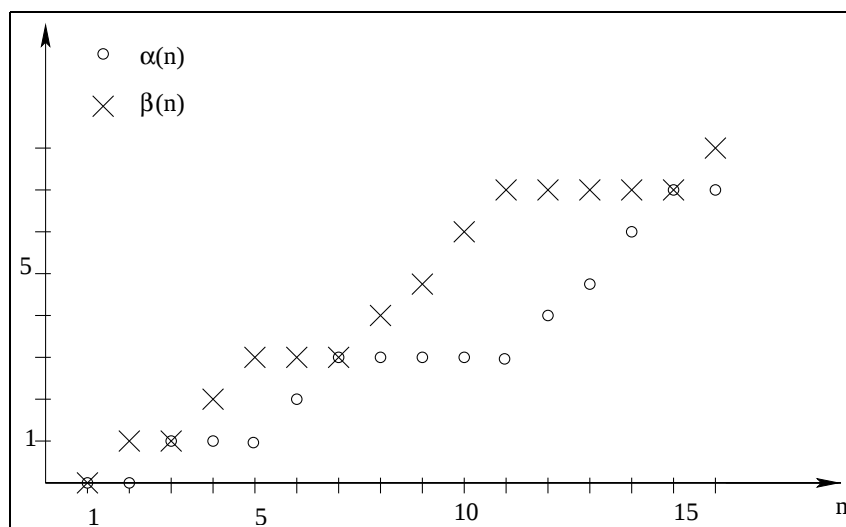


Abbildung 1.7: Abstiegsfunktionen der Heaprekursion.

β nicht dem „gewöhnlichen Typ“ von Abstiegsfunktionen entsprechen, die die Form $\gamma(n) = n - c$, $c = \text{const} \in \mathbb{N}$ besitzen. Solche Abstiegsfunktionen finden vielfach Anwendung in der Theorie der Differenzengleichungen z.B. bei Meschkowski [Mesch], bei Milne-Thomson [Milne] oder in neuerer Form bei Petkovšek, Wilf und Zeilberger [PeWiZ].

Die hier betrachteten Abstiegsfunktionen sind nicht von diesem „linearen“ Typ. Solche abweichenden Abstiegsfunktionen tauchen relativ selten in der Literatur auf. Neben dem oben angegebenen Zitat über die Heaprekursion werden weitere damit zusammenhängende Literaturstellen in den Abschnitten 2.1 über Baumrekursionen und Abstiegsfunktionen und 5.1 über die Heapfolge genannt. Eine Analyse der über solche Rekursionen gebildeten Folgen bzw. die Folgen ihrer Differenzen oder Quotienten (s.u.) findet hierbei jedoch nicht statt. Dies gilt auch bei fast allen im folgenden genannten Fällen von anderen Rekursionen mit untypischen Abstiegsfunktionen.

Einen besonderen Typ stellen Rekursionen dar, bei denen die durch die Rekursion gebildete Folge selbst Teil der Abstiegsfunktion ist. Ein Beispiel ist die Folge M0276 bei Sloane und Plouffe [SloPl] mit dem Anfang

1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 10, 11, 12, 12, 13, 14, 14, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 21, 22, 23, 24, 24, 25, 26, 26, 27, 27, 27, 28, 29, 29, 30, 30, 30, 31, 31, 31, 31

mit der Rekursion (in der in dieser Arbeit verwandten Schreibweise)

$$A_n = A_{A_{n-1}} + A_{n-A_{n-1}}$$

Diese Rekursion und ähnliche Fälle enthalten zwei Abstiegsfunktionen, die in einer ähnlichen Weise wie die der Heaprekursion voneinander abhängen. Es ist deswegen durchaus möglich, daß sich hierdurch Ansätze und Methoden dieser Arbeit auf solche Folgen übertragen lassen. Dies wurde jedoch nicht untersucht, da hier ausschließlich Rekursionen betrachtet werden, bei denen die Folge selbst nicht in der Abstiegsfunktion auftaucht. Beispiele weiterer Literaturzitate zu Rekursionen des nicht betrachteten Typs sind Barbeau und Tanny [BarTa], Barbeau, Chew und Tanny [BaChT] und Fraenkel [Fraen], die auch ausführliche Untersuchungen beinhalten.

Es gibt aber in der Literatur auch Beispiele von Rekursionen mit untypischen Abstiegsfunktionen, die nicht die Folge selbst enthalten. Häufig werden diese Abstiegsfunktionen mit Hilfe der oberen/unteren Gaussklammern bzw. der floor/ceiling functions $\lfloor \cdot \rfloor / \lceil \cdot \rceil$ definiert, die einer reellen Zahl die nächst kleinere/größere ganze Zahl zuordnen, z.B. ist $\lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$ und $\lceil \sqrt{3} \rceil = 2$.

Rekursionen, die über Gaussklammern gebildet werden, widmen Graham, Knuth und Patashnik [GrKnP, p. 78 ff.] einen kurzen Abschnitt, da solche Rekursionen in der Informatik häufig auftreten. Es werden zwar Beispielfolgen berechnet, aber eine ausführliche Analyse von Folgen, die über solche Rekursionen gebildet werden, wird nicht durchgeführt. Ein weiteres Beispiel für das Auftreten einer Gaussklammer-Rekursion liefern Alonso, Reingold und Schott [AlReS], die die Folge zur Rekursion

$$f_0 = 0, \quad f_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + f_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \quad n \geq 1$$

mit dem Anfang

0, 0, 1, 1, 3, 3, 4, 4, 7, 7, 8, 8, 10, 10, 11, 11, 15, 15, 16, 16, 18, 18, 19, 19, 22, 22, 23, 23, 25, 25, 26, 26, 31, 31, 32, 32, 34, 34, 35, 35, 38, 38, 39, 39, 41, 41, 42, 42, 46, 46, 47

untersuchen.

Vielfach wird die Verwendung der Gaussklammern in den Rekursionen jedoch auch umgangen, z.B. indem man bei einer eigentlich vorhandenen $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ -Abstiegsfunktion nur $n = 2^k$, $k \geq 0$ betrachtet (vgl. z.B. Aho und Ullman [AhoUl] oder auch Biggs [Biggs, p. 253 ff.]).

In der mathematischen Literatur sind Gaussklammer-Rekursionen die Ausnahme. Sloane und Plouffe [SloPl] nennen wenige Folgen mit der Rekursion

$$A_n = 1 + A_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + A_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

und verschiedenen Anfangswerten, z.B. M0649, M2842, M3536. Zum Beispiel lautet der Anfang der Folge M0649:

1, 2, 3, 5, 7, 10, 16, 26, 36, 50, 71, 101, 161, 257, 417, 677, 937, 1297, 1801, 2501, 3551, 5042, 7172, 10202, 16262, 25922, 41378, 66050, 107170, 173890, 282310, 458330

Auch eine Suche bei Sloane [Sloane] brachte keine wesentlichen Ergänzungen. Als Ursprung dieser Folgen wird jeweils eine persönliche Korrespondenz mit C.L.Mallows angegeben. Ein Hinweis auf Publikationen dazu konnte jedoch nicht gefunden werden. Die Rekursion hat große Gemeinsamkeiten mit den in dieser Arbeit untersuchten!

Sehr ähnlich sehen rekursive Ausdrücke aus, die im Lösungsrepertoire des Formelmanipulationsprogramms MAPLE unter dem Stichwort Differenzengleichungen enthalten sind, z.B.:

$$f(n) = f\left(\frac{n}{2}\right) + c$$

Hier handelt es sich jedoch um vollkommen andere Ansätze, da $n \in \mathbb{R}$ gewählt wird ($\frac{n}{2}$ ist i.a. nicht aus $\mathbb{N}$), während in dieser Arbeit **immer** $\mathbb{N}$ als Definitionsbereich und $\mathbb{N}_0$ als Wertebereich der Abstiegsfunktionen gewählt werden, d.h. **echte** Folgen betrachtet werden.

Eine große Auffälligkeit der Heapfolge H_n ist deren unregelmäßiges Wachstum, d.h. die unregelmäßige Größenzunahme von $\hat{H}_n$ in Relation zu $\hat{H}_{n-1}$. Um dies zu verdeutlichen, wird die Quotientenfolge der Heaprekursion betrachtet, die folgendermaßen definiert wird:

$$\hat{Q}_n := \frac{\hat{H}_n}{\hat{H}_{n-1}} \quad n \geq 1; \quad \hat{Q}_0 = \hat{H}_0$$

Die Quotientenfolge der Heaprekursion wird in einer Graphik in Abbildung 1.8 dargestellt. Dabei werden zur besseren Veranschaulichung aufeinanderfolgende Paare von (n, Q_n) mit einer Linie verbunden. Dies wird auch im weiteren Verlauf der Arbeit fortgeführt.

Man sieht ein schwer beschreibbares, aber doch regelmäßiges, Schwingungsverhalten innerhalb eines nach Unendlich breiter werdenden Kegels. Innerhalb dieses

Kegels erkennt man Geraden, auf denen immer wieder - anscheinend periodisch regelmäßig - Punkte liegen. Es macht den Anschein, auf ein leicht verständliches und gut beschreibbares Phänomen gestoßen zu sein. Daß dem nicht so ist, wird später dargelegt.

Das Ziel dieser Arbeit ist im wesentlichen, dieses Verhalten der Quotientenfolgen von rekursiv gebildeten Folgen, deren Rekursion der Heaprekursion ähnelt, näher zu untersuchen. Zuerst werden dazu Folgen betrachtet, die nähere Beziehungen zur Heapfolge besitzen. Die zugehörigen Rekursionen werden Baumrekursionen genannt werden, denn man hat hier vielfach Berührung mit der graphentheoretischen Struktur des binären Baumes.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden die Rekursionsstrukturen noch einmal verallgemeinert in dem Sinne, daß die beiden Abstiegsfunktionen voneinander unabhängig gewählt werden können. Diese Rekursionen hängen mit anderen Graphen zusammen, was ganz neue Probleme aufwirft.

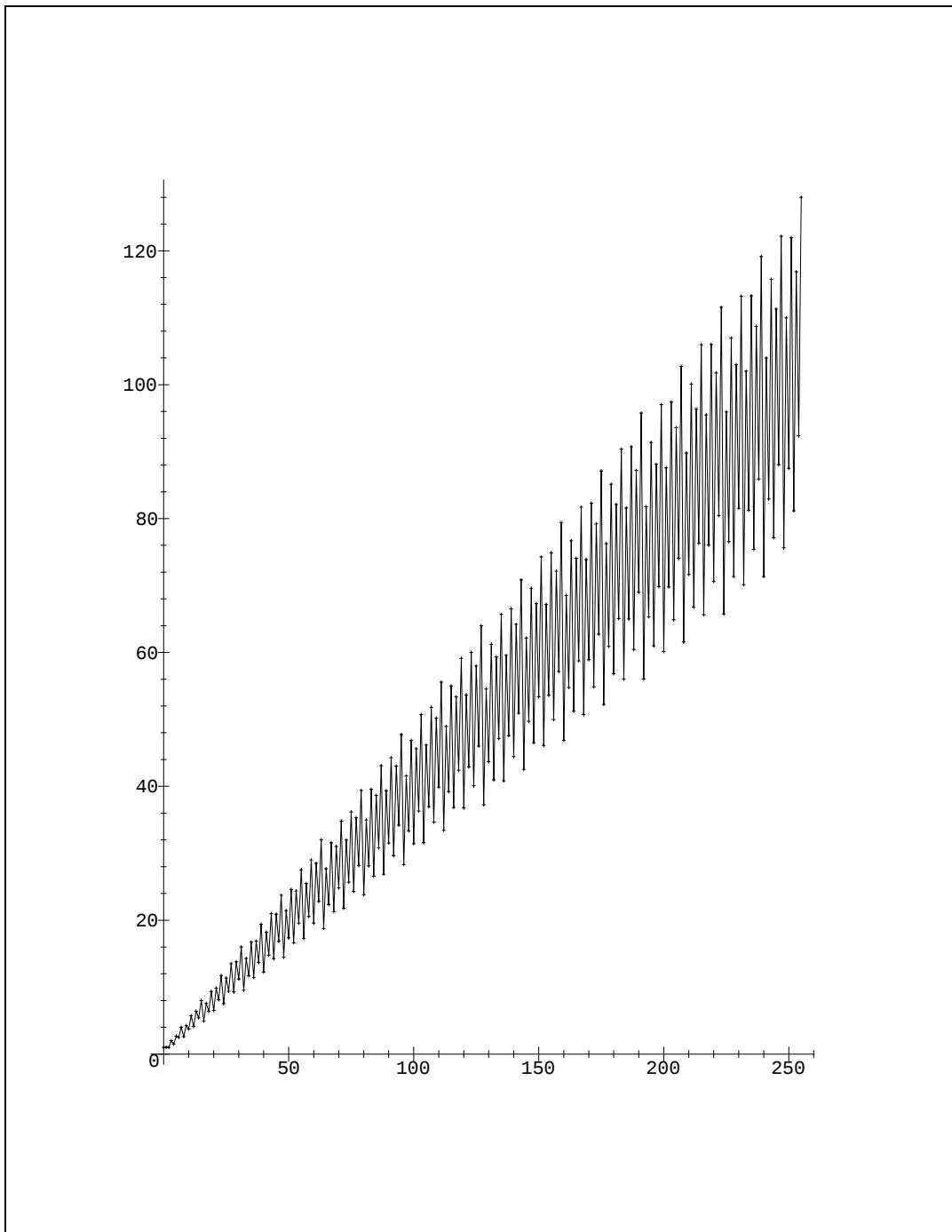


Abbildung 1.8: Quotientenfolge $\hat{Q}_n$ zur Heaprekursion.

Kapitel 2

Einführung der Baumrekursionen

Dieses Kapitel dient der Einführung der in dieser Arbeit wesentlichen Baumrekursionen, die eine erste Möglichkeit darstellen, die in der Einleitung vorgestellte Heaprekursion zu verallgemeinern. Bei dieser Verallgemeinerung wird insbesondere darauf geachtet, daß die Betrachtungen die Heaprekursion nicht ausschließen.

Mit der Einführung der Baumrekursionen werden für den Umgang mit Rekursionen mit unregelmäßigem Abstieg grundlegende Konzepte behandelt. Es werden dabei u.a. schwach wachsende Abstiegsfunktionen, ihre 0-1-Codes und ihre Pseudo-Inversen definiert und analysiert.

Anschließend wird die Quotientenfolge eingeführt. Dabei wird die für den Umgang mit Baumrekursionen fundamentale Quotientenfolgen-Rekursion mit dem δ -Baum als Rekursionsgraphen hergeleitet.

2.1 Baumrekursionen und Abstiegsfunktionen

In diesem Abschnitt wird die Heaprekursion, wie schon gesagt, verallgemeinert in dem Sinne, daß Rekursionen betrachtet werden, bei denen beide Abstiegsfunktionen in der bei der Heaprekursion beobachteten Weise voneinander abhängen. Derartige Rekursionen sollen Baumrekursionen genannt werden. Als erste Bedingung für eine Baumrekursion wird die folgende Rekursionsstruktur vorausgesetzt:

$$A_0; \quad A_n = c_n \cdot A_{\alpha(n)} \cdot A_{\beta(n)}, \quad n \geq 1$$

Dabei soll stets $\beta(n) = n - 1 - \alpha(n)$ gelten¹ und A_0 ein vorgegebener **Anfangswert** sowie $(c_n)_{n \geq 1}$ eine vorgegebene Folge von **Randwerten** sein. Aus vereinfachenden Gründen wird oft A_0 mit c_0 identifiziert, d.h. $(c_n)_{n \geq 0}$ als Randwertfolge betrachtet mit Anfangswert $A_0 := c_0$. Allgemein kann man (über A_0 und (c_n)) (A_n) als reelle Folge betrachten, wobei in dieser Arbeit $A_n \in \mathbb{N}$ für alle $n \geq 0$ ist.

Bevor nun Baumrekursionen definiert werden können, muß noch ein Blick auf die Abstiegsfunktionen geworfen werden. Es hat sich schon ergeben, daß die zweite Abstiegsfunktion β auf eindeutige Weise aus der ersten Abstiegsfunktion α hervorgeht. Nun muß zuerst einmal der bisher nur intuitiv gebrauchte Begriff der Abstiegsfunktion exakt gefaßt werden. Dazu werden die Bedingungen an die Abstiegsfunktionen so festgesetzt, daß ein Abstieg gewährleistet ist, d.h. eine vernünftige Rekursion zustande kommt:

Definition 2.1 (Abstiegsfunktion)

Eine Abbildung $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$ heißt **Abstiegsfunktion**, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$0 \leq \alpha(n) \leq n - 1$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist durch die Definition gesichert, daß $\alpha(n)$ ein sinnvoller, echt kleinerer Parameter ist. Es ist leicht zu sehen, daß β mit $\beta(n) := n - 1 - \alpha(n)$ eine Abstiegsfunktion ist, wenn α eine Abstiegsfunktion ist.

Mit der Definition einer Abstiegsfunktion stehen noch sehr viele Möglichkeiten offen, darunter unangenehme Fälle wie extreme „Abwärts“-Sprünge mit z.B. $\alpha(n_0) = n_0 - 1$, $\alpha(n_0 + 1) = 0$ und ähnliche, kaum handhabbare Unregelmäßigkeiten. Eine Einschränkung auf monoton steigende Abstiegsfunktionen ist sicher sinnvoll. In dieser Arbeit sollen aber noch speziellere Abstiegsfunktionen betrachtet werden, genauer gesagt **ausschließlich** Abstiegsfunktionen, die eine geringe Sprunghöhe aufweisen. Auch dann treten noch sehr viele Probleme auf, die nicht leicht zu lösen sind.

Definition 2.2 (schwach wachsend, Sprungstelle)

Eine Abstiegsfunktion α heißt **schwach wachsend**, falls für alle $n \geq 2$ gilt:

¹Nur bei Baumrekursionen! Im späteren Verlauf der Arbeit wird β auch unabhängig von α definiert.

$$\alpha(n) = \alpha(n-1) + 1 \quad \text{oder} \quad \alpha(n) = \alpha(n-1)$$

Ein $n \geq 2$ heißt **Sprungstelle** einer schwach wachsenden Abstiegsfunktion α , falls $\alpha(n) = \alpha(n-1) + 1$ gilt.

Sowohl die „gewöhnlichen“ Abstiegsfunktionen vom Typ $\alpha(n) = n - c$, $c \in \mathbb{N}$, die bei Differenzengleichungen auftreten, als auch die Heap-Abstiegsfunktion sind schwach wachsend.

Beispiel 2.1

Durch die folgenden Definitionen sind Abstiegsfunktionen gegeben, deren Sprungstellen angegeben werden:

- $\alpha(n) := \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$, $n \geq 1$, Sprungstellen: $3n$, $n \in \mathbb{N}$
- $\alpha(n) := \lfloor \log_2(n) \rfloor$, $n \geq 1$, Sprungstellen: 2^n , $n \in \mathbb{N}$

Schwach wachsende Abstiegsfunktionen sind, wie sogleich gezeigt wird, leicht allgemein darzustellen.

Mit der Definition des schwachen Wachstums von Abstiegsfunktionen sind nun endlich alle Bausteine beisammen, um den Begriff der Baumrekursion formal zu definieren.

Definition 2.3 (Baumrekursion)

Eine Folge $(A_n)_{n \geq 0}$ genügt einer **Baumrekursion**, falls gilt:

Zu einem vorgegebenem Anfangswert A_0 und einer vorgegebenen Folge von Randwerten $(c_n)_{n \geq 1}$ genügt die Folge für $n \geq 1$ der Rekursion:

$$A_n = c_n \cdot A_{\alpha(n)} \cdot A_{\beta(n)}$$

Dabei sei α eine schwach wachsende Abstiegsfunktion und β durch $\beta(n) = n - 1 - \alpha(n)$, $n \geq 1$ definiert.

Bemerkung:

β ist durch diese Setzung stets schwach wachsend, falls α schwach wachsend ist, was leicht zu sehen ist.

Bemerkung:

Der hier gewählte Begriff einer Baumrekursion meint einen speziellen Fall von Rekursionen **auf** binären Bäumen, wie sie z.B. Aho und Ullman [AhoUl, p. 256] allgemeiner einführen. Der entsprechende Begriff „tree recursion“ wird auch von Kao und Horng [KaoHo] benutzt für Rekursionen des hier betrachteten Typs. In der zuletzt genannten Arbeit wird die algorithmische Behandlung von tree recursions auf einem Parallelrechner behandelt.

Rekursionen auf binären Bäumen im allgemeinen Sinne betrachten die Wurzel eines gegebenen Baumes und rekursiv die beiden Teilbäume. In dieser Arbeit werden $\alpha(n)$ und $\beta(n) = n - 1 - \alpha(n)$ zu jedem $n \in \mathbb{N}$ betrachtet. Wenn man sich einen binären Baum mit n Knoten vorstellt, dessen einer Teilbaum $\alpha(n)$ Knoten hat, so hat der andere Teilbaum $n - 1 - \alpha(n)$ Knoten. Daß dieser Zusammenhang mehr als nur numerisch ist, kann in Lemma 5.1 auf Seite 160 und der dazugehörigen Vorbereitung nachvollzogen werden. Diese Zusammenhänge sind die Motivation zur Wahl der Bezeichnung Baumrekursionen für die betrachteten Rekursionen.

Um Mißverständnisse auszuschließen, sollen jetzt noch zwei Themenkreise angesprochen werden, die man unter dem Begriff Baumrekursionen betrachten könnte, die hier aber definitiv **nicht** gemeint sind.

Auf der einen Seite kann man **unendliche** Bäume rekursiv definieren, wie dies z.B. in dieser Arbeit unter dem Stichwort Rekursionsbäume im Zusammenhang mit Satz 5.1 auf Seite 160 vorgestellt wird. Derartige rekursive Definitionen von Bäumen sind jedoch vollkommen unabhängig von den hier betrachteten Baumrekursionen vorstellbar. Ein Beispiel sind die Fibonacci-Bäume, die bei Knuth [Knut3, p. 417] eingeführt werden.

Ebenfalls nicht gemeint sind baumförmig verzweigende Prozesse verschiedener Art, bei denen sich aus einem „Zustand“ in jedem Schritt **mehrere** Folgezustände ergeben können. Ein Beispiel wären „branching time temporal logics“, wo bei Emerson [Emers] von einer „branching tree-like nature“ gesprochen wird.

Die Definition einer schwach wachsenden Abstiegsfunktion läßt es sinnvoll erscheinen, die Folge der Differenzen von α zu betrachten. Es soll hier aber nicht von Differenzenfolgen gesprochen werden, da zwischen Abstiegsfunktionen auf der einen Seite und den betrachteten Folgen auf der anderen Seiten deutlich unterschieden werden soll. Stattdessen wird der 0-1-Code einer schwach wachsenden Abstiegsfunktion definiert. Der Begriff verrät, daß der 0-1-Code benutzt werden soll, um schwach wachsende Abstiegsfunktionen zu codieren.

Definition 2.4 (0-1-Code)

Zu einer schwach wachsenden Abstiegsfunktion α wird ihr **0-1-Code** $\bar{\alpha} : \mathbb{N}_{\geq 2} \rightarrow \{0, 1\}$ definiert durch:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(n) := \alpha(n) - \alpha(n-1) &= \begin{cases} 1 & \alpha(n) = \alpha(n-1) + 1 \\ 0 & \alpha(n) = \alpha(n-1) (+0) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & n \text{ Sprungstelle von } \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Beispiel 2.2

Man kann leicht den 0-1-Code der im letzten Beispiel vorgestellten Abstiegsfunktionen über die angegebenen Sprungstellen bestimmen (s.u.). Anschließend wird $\bar{\alpha}$ als $\{0, 1\}$ -Folge $(\bar{\alpha}(n))_{n \geq 2}$ dargestellt. Beide Darstellung werden im weiteren Verlauf der Arbeit immer wieder alternativ verwendet.

- Zu $\alpha(n) := \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$, $n \geq 1$ ist der 0-1-Code $\bar{\alpha}(n) = \begin{cases} 1 & n = 3k, k \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$(\bar{\alpha}(n))_{n \geq 2} = [0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, \dots]$$

- $\alpha(n) := \lfloor \log_2(n) \rfloor$, $n \geq 1$, $\bar{\alpha}(n) = \begin{cases} 1 & n = 2^k, k \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$(\bar{\alpha}(n))_{n \geq 2} = [1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots]$$

Nun kann jeder schwach wachsenden Abstiegsfunktion ein 0-1-Code zugewiesen werden. Diese Zuordnung ist eindeutig, wie aus dem folgenden Lemma folgt.

Lemma 2.1

Ist $\bar{\alpha} : \mathbb{N}_{\geq 2} \rightarrow \{0, 1\}$ eine gegebene Abbildung (in 0-1-Code-Form), so wird durch

$$\alpha(n) := \sum_{k=2}^n \bar{\alpha}(k) \quad n \geq 1$$

eine schwach wachsende Abstiegsfunktion α definiert, die $\bar{\alpha}$ als 0-1-Code besitzt.

Beweis:

Der Beweis ist offensichtlich und wird nicht vorgeführt. ■

Mit Hilfe des Lemmas wird die Charakterisierungsmöglichkeit schwach wachsender Abstiegsfunktionen über den 0-1-Code gefolgert.

Folgerung 2.1 (Bijektion zwischen 0-1-Code und Abstiegsfunktionen)

Es besteht eine Bijektion zwischen schwach wachsenden Abstiegsfunktionen und $\{0, 1\}$ -Folgen.

Beweis:

Die Bijektion läuft in der einen Richtung über den 0-1-Code und in der anderen Richtung über die Definition im Lemma 2.1. Die Bijektivität ist leicht zu sehen und wird hier nicht gezeigt. ■

Bemerkung:

Für die Bijektion ist es egal, ob die $\{0, 1\}$ -Folgen bei $n = 2$ wie hier oder bei $n = 0$ wie üblich starten. Wer Folgen immer bei $n = 0$ starten lassen möchte, kann gerne eine Indexverschiebung vornehmen.

Bemerkung:

Unter der Bezeichnung „characteristic word“ bringt Komatsu [Komat] Differenzen von Beatty-Folgen des Typs $\lfloor n \cdot \theta + \phi \rfloor$ in Zusammenhang mit $\{0, 1\}$ -Folgen. Wenn solche Beatty-Folgen die Anforderung $0 \leq \lfloor n \cdot \theta + \phi \rfloor < n$ für alle $n \geq 1$ erfüllen, spricht nichts dagegen, sie als Abstiegsfunktionen aufzufassen und das (ein wenig anders definierte) characteristic word als Entsprechung zum hier betrachteten 0-1-Code anzusehen. Jedoch ist der 0-1-Code allgemeiner, denn z.B. kann der 0-1-Code der Abstiegsfunktion $n \mapsto \lfloor \log_2(n) \rfloor$ niemals ein characteristic word einer Beatty-Folge sein.

Aufgrund dieser Bijektion besteht jetzt die Möglichkeit, Bedingungen entweder an die Abstiegsfunktion direkt oder an den 0-1-Code zu stellen. Dies wird z.T. parallel, z.T. alternativ geschehen.

Es bietet sich jetzt an, den Begriff Normiertheit von Abstiegsfunktionspaaren (α, β) einzuführen, der aber erst später motiviert wird. Es sei hier darauf hingewiesen, daß bei Baumrekursionen **immer** die zweite Abstiegsfunktion β von der ersten α abhängt, weswegen es ausreicht, i.a. nur **einen** 0-1-Code $\bar{\alpha}$ zu betrachten. Um die Normiertheit sinnvoll einzuführen, benötigt man ein Lemma über den Zusammenhang der beiden Abstiegsfunktionen α und β mit $\beta(n) = n - 1 - \alpha(n)$.

Lemma 2.2

Sei α eine schwach wachsende Abstiegsfunktion und β definiert durch $\beta(n) = n - 1 - \alpha(n)$, $n \geq 1$. Dann gilt:

1. Bei jedem $n \geq 2$ steigt nur eine der beiden Abstiegsfunktionen an, die andere behält den gleichen Wert, d.h.:

$$\alpha(n) = \alpha(n-1) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \beta(n) = \beta(n-1)$$

$$\alpha(n) = \alpha(n-1) \quad \Leftrightarrow \quad \beta(n) = \beta(n-1) + 1$$

2. Für alle $n \geq 2$ gilt:

$$n \text{ ist Sprungstelle von } \alpha \quad \Leftrightarrow \quad n \text{ ist keine Sprungstelle von } \beta$$

3. Für alle $n \geq 2$ gilt:

$$\bar{\alpha}(n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\beta}(n) = 1$$

$$\bar{\alpha}(n) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\beta}(n) = 0$$

4. Die 0-1-Code-Folge von β , $(\bar{\beta}(n))_{n \geq 2}$, ergibt sich aus der 0-1-Code-Folge von α , $(\bar{\alpha}(n))_{n \geq 2}$, durch Austauschen jeder 0 durch eine 1 und umgekehrt.

Beweis:

Ist sofort ersichtlich und wird nicht vorgeführt. ■

Es handelt sich bei den vier Aussagen des Lemmas also nur um unterschiedliche Schreibweisen **einer** Tatsache. Hieran kann man aber gut mit den verschiedenen Sichtweisen vertraut werden.

Um die Normiertheit von Abstiegsfunktions-Paaren zu motivieren, wird noch einmal die Rekursionsgleichung betrachtet:

$$A_n = c_n \cdot A_{\alpha(n)} \cdot A_{n-1-\alpha(n)}$$

An dem Wert von A_n ändert sich nichts, wenn man die Rollen („Werte“) von α und β vertauscht, falls gilt (Voraussetzung SYMM):

(1) c_n hängt nicht von α und β ab, wie z.B. bei $c_n = 2^n, n, \text{const}, \dots$

oder

(2) c_n ist symmetrisch in α und β , wie bei $c_n = \binom{n-1}{\alpha(n)}$ im Falle der Heapfolge².

Im Zusammenhang mit der Tatsache, daß in dieser Arbeit Randwertfolgen der Typen (1) oder (2) betrachtet werden, macht die folgende Definition Sinn:

Definition 2.5 (normiert)

1. Ein Paar von Abstiegsfunktionen einer Baumrekursion (α, β) mit $\beta(n) = n - 1 - \alpha(n)$ heißt **normiert**, falls $a(n) \leq \beta(n)$ für alle $n \geq 1$ gilt.
2. Ein 0-1-Code $(\bar{\alpha}(n))_{n \geq 2}$ heißt **normiert**, wenn bis zu jeder Stelle $n \geq 2$ einschließlich mindestens so viele Nullen wie Einsen stehen.

Beispiel 2.3

Der 0-1-Code $[0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots]$ ist hiernach normiert, während der 0-1-Code $[0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, \dots]$ nicht normiert ist, da bis zur Stelle 7 (5. Stelle der Folge) drei Einsen und nur zwei Nullen stehen.

Man sieht jetzt sofort, daß beide Definitionsteile einander entsprechen:

Lemma 2.3

1. Ist das Paar (α, β) von Abstiegsfunktionen einer Baumrekursion normiert, so ist der 0-1-Code von α normiert.

²wegen $\binom{n-1}{\alpha(n)} = \binom{n-1}{\beta(n)}$, da $\alpha(n) + \beta(n) = n - 1$

2. Ist der 0-1-Code $\bar{\alpha}$ einer schwach wachsenden Abstiegsfunktion α normiert, so ist das Paar (α, β) mit $\beta(n) = n - 1 - \alpha(n)$ von Abstiegsfunktionen normiert.

Beweis:

Klar nach Lemma 2.2 und Lemma 2.1. ■

Bemerkung:

Unter der Voraussetzung SYMM findet sich zu jeder Baumrekursion eine normierte Baumrekursion, die bei gleichen Anfangs- und Randwerten die gleiche Folge ergibt! Dies beweist man durch Vertauschen der Rollen der Abstiegsfunktionen auf Stücken zwischen Stellen mit identischem Wert, d.h. $\alpha(m) = \beta(m)$. Wenn auf einem solchen Abschnitt für jedes n vorher $\alpha(n) \geq \beta(n)$ galt, gilt nach Durchführung dieser Operation $\alpha(n) \leq \beta(n)$. Bei der Voraussetzung SYMM ändert sich durch diese Operation der Wert des zugehörigen Randwertes c_n nicht, und wegen der Kommutativität der Terme $A_{\alpha(n)}$ und $A_{\beta(n)}$ in der multiplikativen Rekursionsvorschrift ändert sich auch der entsprechende Wert der Folge (A_n) nicht.

In dieser Arbeit werden aus diesem Grund im Prinzip **immer normierte Abstiegsfunktionen vorausgesetzt**.

Die Normiertheit von Abstiegsfunktionen wird später einige Vereinfachungen bringen, z.B. Eindeutigkeit von Strukturen und Relationen, u.ä..

Nun wird noch die Lösung einer wichtigen Fragestellung nötig:

Wenn ein $k \in \mathbb{N}_0$ und eine Abstiegsfunktion $\alpha(\cdot)$ gegeben sind, gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha(n) = k$? Welche Eigenschaften hat es? Ist $n = \alpha^{-1}(k)$ sinnvoll definierbar?

Es stellt sich hier also die Frage nach der **Invertierung** einer Abstiegsfunktion. Das erste Problem ergibt sich dabei folgendermaßen: Ist α surjektiv, d.h. gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}_0$ überhaupt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha(n) = k$?

Die Antwort dazu lautet: Bei schwach wachsenden Abstiegsfunktionen im allgemeinen Ja! Dazu muß man jedoch zuerst eine spezielle Gruppe von Abstiegsfunktionen ausschließen.

Definition 2.6 (ausgeartet, nicht ausgeartet)

1. Eine schwach wachsende Abstiegsfunktion α heißt **ausgeartet**, falls sie einen 0-1-Code der Form $[w, 0^\omega] = [w, 0, 0, 0, 0, \dots]$ hat³, wobei w eine endliche 0-1-Folge ist (bzw. analog: α schließlich konstant wird). Anderenfalls heißt α **nicht ausgeartet**.
2. Eine normierte Baumrekursion (d.h. eine mit einem normierten Paar von Abstiegsfunktionen) heißt **ausgeartet**, falls die kleinere Abstiegsfunktion α ausgeartet ist. Anderenfalls heißt eine normierte Baumrekursion **nicht ausgeartet**.

Bemerkung:

Die folgenden Anmerkungen und Aussagen gelten auch für ausgeartete Baumrekursionen bis zu ihrer maximalen Sprungstelle (bzw. deren Bild) einschließlich!

Mit Hilfe der Charakterisierung der Abstiegsfunktionen als ausgeartet und nicht ausgeartet kann eine Aussage zur Surjektivität getroffen werden.

Lemma 2.4

Eine schwach wachsende, nicht ausgeartete Abstiegsfunktion $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$ ist surjektiv.

Beweis:

Nach der Definition hat der 0-1-Code (als Folge betrachtet) einer nicht ausgearteten, schwach wachsenden Abstiegsfunktion unendlich viele Einsen. Damit hat die Abstiegsfunktion unendlich viele Sprungstellen und strebt damit gegen unendlich. Da sie schwach wächst, wird kein Bild ausgelassen. Man findet die folgenden Urbildmengen:

$$\alpha^{-1}(0) = \{1, \dots, (1. \text{ Sprungstelle} - 1)\}$$

$$\alpha^{-1}(k) = \{(k. \text{ Sprungstelle}), \dots, ((k+1). \text{ Sprungstelle} - 1)\}$$

Dies folgt direkt aus der Definition einer schwach wachsenden Abstiegsfunktion unter Zuhilfenahme von Lemma 2.1. ■

Bemerkung:

Im folgenden wird wegen $\alpha(1) = 0 = \beta(1)$ meist der Fall $k = 0$ nicht erwähnt. Er

³Zur Schreibweise 0^ω vgl. Fußnote auf Seite 44.

ist für viele Überlegungen immer gleich geartet und wird nicht speziell betrachtet.

Nun hat sich ergeben, daß nicht ausgeartete, schwach wachsende Abstiegsfunktionen surjektiv sind und zu jedem $k \in \mathbb{N}_0$ ist die Urbildmenge bekannt. Diese Aussage im Beweis des vorigen Lemmas zeigt eigentlich schon, daß α auch unter diesen Voraussetzungen i.a. nicht injektiv ist, wie auch im folgenden Beispiel zu sehen ist.

Beispiel 2.4

Ist $\alpha(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ für alle $n \geq 1$, so gilt für alle $k \geq 1$ $\alpha(2k+1) = k = \alpha(2k)$, d.h. man hat stets zwei Urbilder und die Abstiegsfunktion ist nicht injektiv.

Zu einer sinnvollen Invertierung ist aber Injektivität unerläßlich. Folglich kann man i.a. Abstiegsfunktionen nicht invertieren. Besonders bei Grenzbetrachtungen ist aber eine inverse Abbildung sehr wichtig, wie in den folgenden Abschnitten zu sehen sein wird.

Die Lösung dieses Problems ist die ausschließliche Betrachtung von Sprungstellen, d.h. es wird die Abstiegsfunktion auf ihre Sprungstellen eingeschränkt und untersucht, ob diese Abbildung invertierbar ist, was sich als möglich erweisen wird. Dazu wird gesetzt:

$$M_\alpha := \text{Menge der Sprungstellen der Abstiegsfunktion } \alpha$$

Man sieht, daß $M_\alpha \subseteq \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $\alpha(M_\alpha) \subseteq \mathbb{N}$ nach Definition von α gilt. Es ergibt sich der folgende Satz:

Satz 2.1 (Existenz der Pseudoinversen)

*Ist α eine schwach wachsende, nicht ausgeartete Abstiegsfunktion mit Sprungstellenmenge M_α , so ist $\alpha|_{M_\alpha} : M_\alpha \rightarrow \mathbb{N}$ surjektiv und **injektiv**, d.h. invertierbar.*

Definition 2.7 (Pseudoinverse)

Ist α eine schwach wachsende, nicht ausgeartete Abstiegsfunktion, so soll

$$\alpha^{-1} := (\alpha|_{M_\alpha})^{-1}$$

die **Pseudoinverse** von α genannt werden.

Damit dies eine sinnvolle Definition wird, muß noch der Satz bewiesen werden. Vorher werden jedoch noch zwei Beispiele vorgestellt.

Beispiel 2.5

1. $\alpha(n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ für $n \geq 1$ ist eine schwach wachsende Abstiegsfunktion. In Beispiel 2.1 war zu sehen, daß $M_\alpha = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist und folglich erhält man $\alpha|_{M_\alpha} : 3n \mapsto n \quad n \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt $\alpha^{-1} : n \mapsto 3n \quad (n \in \mathbb{N})$.
2. $\alpha(n) = \lfloor \log_2(n) \rfloor \Rightarrow \alpha^{-1} : n \mapsto 2^n \quad (n \geq 1)$.

Beweis:

Nach dem Beweis des vorigen Lemmas ist bekannt, daß die Urbildmenge $\alpha^{-1}(k)$ von $k \geq 1$ bzgl. α genau eine Sprungstelle enthält. Damit ist $\alpha|_{M_\alpha}$ injektiv und surjektiv, da jedes $k \in \mathbb{N}$ Bild einer Sprungstelle ist. Somit ist eine Invertierung möglich und die Definition der Pseudoinversen sinnvoll. ■

Zum Abschluß dieses Abschnitts werden nun einige Eigenschaften der Pseudoinversen zusammengestellt, wobei auch sehr leicht verständliche Tatsachen aufgenommen sind, um einen Überblick zu gestatten.

Lemma 2.5 (Eigenschaften der Pseudo-Inversen)

Sei $\alpha(\cdot)$ eine nicht ausgeartete, schwach wachsende Abstiegsfunktion mit Pseudoinverser α^{-1} . Dann gilt:

1. Für alle $k \geq 1$ ist $\alpha^{-1}(k)$ eine Sprungstelle von α .
2. $\alpha(\alpha^{-1}(k)) = k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
3. $\alpha^{-1}(\alpha(n)) \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die mindestens so groß wie die kleinste Sprungstelle von α sind.
4. $\alpha^{-1}(\alpha(n)) = n$, falls n Sprungstelle von α ist.
5. α^{-1} ist streng isoton.

Beweis:

Der Beweis der Punkte 1), 2), und 4) ist offensichtlich aufgrund der Definition der Pseudo-Inversen. Es werden nur die Punkte 3) und 5) kurz vorgeführt:

zu 5):

Sei $k > l$ gegeben. Angenommen, es würde $\alpha^{-1}(k) \leq \alpha^{-1}(l)$ gelten. Da nach Punkt 1) $\alpha^{-1}(k)$ und $\alpha^{-1}(l)$ Sprungstellen von α sind, ist $\alpha|_{M_\alpha}$ an beiden Stellen definiert. Nach Voraussetzung ist α schwach wachsend, also insbesondere isoton. Folglich ist $\alpha|_{M_\alpha}$ isoton. Damit gilt:

$$k = \alpha|_{M_\alpha}(\alpha^{-1}(k)) \leq \alpha|_{M_\alpha}(\alpha^{-1}(l)) = l$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Zu 3):

Sei $n_0 :=$ größte Sprungstelle m von α mit $m \leq n$. Dann ist $\alpha(n) = \alpha(n_0)$ und wegen (4) folgt:

$$\alpha^{-1}(\alpha(n)) = \alpha^{-1}(\alpha(n_0)) = n_0 \leq n$$

■

2.2 Die Quotientenfolge und der δ -Baum

Im letzten Abschnitt ist die Grundlagen für eine nähere Beschäftigung mit den Baumrekursionen gelegt worden. Insbesondere kann jetzt die Quotientenfolge, die in dieser Arbeit das Schwerpunktojekt der Untersuchungen bildet, eingeführt und betrachtet werden.

Definition 2.8 (Quotientenfolge)

Die **Quotientenfolge** zu einer Folge $(A_n)_{n \geq 0}$, die nirgendwo den Wert Null annimmt, ist definiert durch:

$$Q_0 := A_0; \quad Q_n := \frac{A_n}{A_{n-1}} \quad n \geq 1$$

Bemerkung:

Unter der in der Definition genannten Voraussetzung ist die Bildung der Quotientenfolge grundsätzlich möglich. Oft wird die Quotientenfolge bei Folgen zu gewöhnlichen Differenzengleichungen (additive Rekursion) benutzt, um eine Orientierung über das Wachstum zu erhalten (vgl. z.B. bei Elaydi [Elaydi]). Sinnvoll ist sie auch bei multiplikativ gebildeten Folgen, insbesondere bei Vorliegen multiplikativer Rekursionen wie in diesem Fall, was in dieser Arbeit ausführlich gezeigt werden wird.

Es soll nun betrachtet werden, wie sich die Baumrekursion bei der Quotientenfolge auswirkt. Sei dazu $n \geq 2$:

$$Q_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{c_n}{c_{n-1}} \cdot \frac{A_{\alpha(n)}}{A_{\alpha(n-1)}} \cdot \frac{A_{\beta(n)}}{A_{\beta(n-1)}}$$

Auf den ersten Blick besagt diese Darstellung noch sehr wenig. Es ist nicht sofort ersichtlich, wie die Terme $\frac{A_{\alpha(n)}}{A_{\alpha(n-1)}}$ bzw. $\frac{A_{\beta(n)}}{A_{\beta(n-1)}}$ mit $Q_{\alpha(n)}$ bzw. $Q_{\beta(n)}$ zusammenhängen. Unter ganz allgemeinen Voraussetzungen wäre dies auch nicht so klar anzugeben. In diesem Fall liegt jedoch eine Baumrekursion vor, bei der jeweils nur die eine Abstiegsfunktion ansteigt, die andere jedoch gleichbleibt. Zusätzlich wurde bei Baumrekursionen schwaches Wachstum der Abstiegsfunktionen vorausgesetzt, was ausschließlich Anstiege um 0 oder 1 zur Folge hat. Es sind also zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $\alpha(n) = \alpha(n-1) + 1$, $\beta(n) = \beta(n-1)$:

$$Q_n = \frac{c_n}{c_{n-1}} \frac{A_{\alpha(n)}}{A_{\alpha(n-1)}} \frac{A_{\beta(n)}}{A_{\beta(n-1)}} = \frac{c_n}{c_{n-1}} \frac{A_{\alpha(n)}}{A_{\alpha(n)-1}} \frac{A_{\beta(n)}}{A_{\beta(n)}} = \frac{c_n}{c_{n-1}} Q_{\alpha(n)}$$

2. Fall: $\alpha(n) = \alpha(n-1)$, $\beta(n) = \beta(n-1) + 1$. Es gilt analog:

$$Q_n = \frac{c_n}{c_{n-1}} Q_{\beta(n)}$$

Da für jedes $n \in \mathbb{N}$ nur einer der beiden Fälle auftritt, kann man eine Rekursion von (Q_n) angeben, die als Satz formuliert wird:

Satz 2.2 (Rekursion der Quotientenfolge bei Baumrekursionen)

Die Quotientenfolge (Q_n) zur Baumrekursion $A_n = c_n \cdot A_{\alpha(n)} \cdot A_{\beta(n)}$, A_0 genügt einer Rekursion, die in der folgenden Definition eingeführte Abbildung δ benutzt:

$$Q_0 = A_0, \quad Q_1 = c_1 \cdot Q_0 = \Delta c_1 \cdot (Q_0)^2; \quad Q_n = \Delta c_n \cdot Q_{\delta(n)} \quad n \geq 2$$

Dabei ist $\Delta c_n := \frac{c_n}{c_{n-1}} \quad n \geq 1$ ($c_0 := A_0 = Q_0$).

Definition 2.9 (Abbildung δ)

Die Abbildung $\delta : \mathbb{N}_{\geq 2} \rightarrow \mathbb{N}_0$ wird definiert durch:

$$\delta(n) := \begin{cases} \alpha(n) & n \text{ Sprungstelle von } \alpha \\ \beta(n) & n \text{ Sprungstelle von } \beta \end{cases}$$

Bis auf die fehlende Definition bei $n = 1$ ist δ eine Abstiegsfunktion, jedoch i.a. nicht schwach wachsend, noch nicht einmal monoton!

Bemerkung:

Da bei den in dieser Arbeit im allgemeinen betrachteten Randwerten (s.u.) Q_1 immer den Wert 1 besitzt, wird der Anfang der Rekursion für $n = 1$ oft nicht betrachtet und dann δ trotz eines Beginns bei $n = 2$ als Abstiegsfunktion bezeichnet.

Beispiel 2.6

Zur Baumrekursion

$$A_n = c_n A_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} A_{n-1-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}, \quad A_0$$

genügt die Quotientenfolge (Q_n) der o.a. Rekursion mit

$$\delta(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{2} & n \text{ gerade} \end{cases}$$

(Es ist $\frac{n}{2} = n - 1 - \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ für gerades n .)

Bevor die Rekursion der Quotientenfolge und die Abstiegsfunktion δ einmal genauer betrachtet werden, ist hier der Zeitpunkt gekommen, sich Gedanken über die Randwerte (c_n) bzw. deren Quotienten (Δc_n) zu machen. Um explizite Aussagen, insbesondere Konvergenzaussagen u.ä. zu machen, sind **speziell gewählte Randwertfolgen sinnvoll und notwendig**. Diese sollen eine recht einfach zugängliche Form haben, aber zugleich relativ allgemein in den Quotienten sein, damit die Quotientenfolglieder ausreichend unterscheidbar sind. Zum Beispiel ist die Randwertfolge $c_n = 2^n$ zwar gut handhabbar, aber die Quotienten haben alle den Wert $\Delta c_n = 2$, wodurch mehrere Folglieder der Quotientenfolge den gleichen Wert besitzen.

Die Heapfolge benötigt die Randwertfolge $c_n = \binom{n-1}{\alpha(n)}$. Um das Verhalten der Heapfolge mit in die Betrachtungen einzubeziehen, wäre diese Randwertfolge passend, aber man sieht an Abbildung 1.8, daß die Quotientenfolge der Heapfolge strikt divergiert. Man kann in diesem Funktionsdiagramm zwar verschiedene, anscheinend durch Geraden approximierbare Wege unterscheiden, die aber alle strikt divergent sind. Damit entfällt die Betrachtung von Berührungspunkten, d.h. von Grenzwerten konvergenter Teilfolgen, da es hier nur einen einzigen uneigentlichen Berührungspunkt ∞ gäbe. Dies verhindert aber differenzierende Betrachtungen. Um dem Abhilfe zu schaffen, wäre es naheliegend, eine Folge $\frac{Q_n}{n}$ zu betrachten und durch dadurch Konvergenz zu erzeugen. Dies wird im Prinzip in dieser Arbeit gemacht, aber auf einem ganz anderen Weg.

Fast alle konkret betrachteten Punkte dieser Arbeit beschäftigen sich nämlich mit der Randwertfolge $c_n = n$. Die Quotienten $\Delta c_n = \frac{n}{n-1}$ sind recht einfach und die Folge der Quotienten ist streng monoton fallend, sodaß neben der Monotonie auch niemals zwei Randwerte identisch sind.

Nun stellt sich die Frage, was diese Folge von Randwerten und die damit generierte Quotientenfolge (bei gleichen Abstiegsfunktionen) mit der Heap-Quotientenfolge zu tun hat. Dies beantwortet der folgende Satz.

Satz 2.3 (Randwerte n und $\binom{n-1}{\alpha(n)}$)

Gegeben sei eine formale Baumrekursion zu festen Abstiegsfunktionen α , β (die nach Definition der Baumrekursionen schwach wachsend sind).

Sei $(\tilde{Q}_n)$ die Quotientenfolge dieser Rekursion zu $A_0 = 1$ und $c_n = \binom{n-1}{\alpha(n)}$ für $n \geq 1$.

Sei (Q_n) die Quotientenfolge zur selben Rekursion, zum selben Anfangswert und zur Randwertfolge $c_n = n$ für $n \geq 1$. Dann gilt:

$$\frac{\tilde{Q}_n}{n} = \frac{1}{Q_n}$$

Beweis:

Nach Satz 2.2 auf Seite 27 gibt es Rekursionen der beiden Quotientenfolgen gegeben durch:

$$(1) \quad \tilde{Q}_0 = \tilde{Q}_1 = 1, \quad \tilde{Q}_n = \frac{\binom{n-1}{\alpha(n)}}{\binom{n-2}{\alpha(n-1)}} \tilde{Q}_{\delta(n)} \quad n \geq 2$$

$$(2) \quad Q_0 = Q_1 = 1, \quad Q_n = \frac{n}{n-1} Q_{\delta(n)} \quad n \geq 2$$

Es handelt sich dabei natürlich um verschiedene Folgen, die aber eine identische Abstiegsfunktion δ besitzen. Zuerst soll versucht werden, den Term Δ_{c_n} bei $\tilde{Q}_n$ zu vereinfachen. Dazu werden wieder einmal die zwei wohlbekannten Fälle unterschieden:

1. Fall: $\alpha(n) = \alpha(n-1) + 1, \beta(n) = \beta(n-1) \Rightarrow \delta(n) = \alpha(n)$:

$$\begin{aligned} \frac{\binom{n-1}{\alpha(n)}}{\binom{n-2}{\alpha(n-1)}} &= \frac{(n-1)! \alpha(n-1)! \beta(n-1)!}{\alpha(n)! \beta(n)! (n-2)!} = (n-1) \frac{(\alpha(n)-1)! \beta(n)!}{\alpha(n)! \beta(n)!} \\ &= \frac{n-1}{\alpha(n)} = \frac{n-1}{\delta(n)} \end{aligned}$$

2. Fall: $\alpha(n) = \alpha(n-1), \beta(n) = \beta(n-1) + 1 \Rightarrow \delta(n) = \beta(n)$. Hier ergibt sich analog:

$$\frac{\binom{n-1}{\alpha(n)}}{\binom{n-2}{\alpha(n-1)}} = \frac{n-1}{\beta(n)} = \frac{n-1}{\delta(n)}$$

Ergebnis ist eine vereinfachte Rekursion, die weitergeführt wird.

$$\tilde{Q}_n = \frac{n-1}{\delta(n)} \tilde{Q}_{\delta(n)} = \frac{n-1}{\delta(n)} \frac{\delta(n)-1}{\delta^2(n)} \tilde{Q}_{\delta^2(n)} = \dots$$

Wenn man so fortfährt, so wird schließlich⁴ $\delta^k(n) = 1$ und $\tilde{Q}_{\delta^k(n)} = 1$. Damit kann man schreiben:

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_n &= \frac{n-1}{\delta(n)} \frac{\delta(n)-1}{\delta^2(n)} \cdots \frac{\delta^{k-1}(n)-1}{\delta^k(n)} \tilde{Q}_{\delta^k(n)} \\ &= (n-1) \frac{\delta(n)-1}{\delta(n)} \frac{\delta(n)^2-1}{\delta^2(n)} \cdots \frac{\delta^{k-1}(n)-1}{\delta^{k-1}(n)}\end{aligned}$$

Ebenso kann man mit der Rekursion zu (Q_n) verfahren. Auch hier ist schließlich für dasselbe $k \in \mathbb{N}$ der Quotientenfolgenwert $Q_{\delta^k(n)} = 1$ und es ergibt sich analog:

$$Q_n = \frac{n}{n-1} \frac{\delta(n)}{\delta(n)-1} \cdots \frac{\delta^{k-1}(n)}{\delta^{k-1}(n)-1}$$

Aus den Darstellungen beider Quotientenfolgen folgt direkt die Behauptung des Satzes. ■

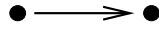
Der Satz besagt, daß bei Betrachtung der Randwertfolge $c_n = n$ die Ergebnisse der Quotientenfolge gleich für die Randwertfolge $\binom{n-1}{\alpha(n)}$ mit verwertet werden können und damit auch die Heap-Quotientenfolge eingeschlossen ist. Darum werden in dieser Arbeit im wesentlichen die Randwerte $c_n = n$ und der Anfangswert $A_0 = 1$ betrachtet.

Einschub über graphentheoretische Begriffe: (bis Seite 32)

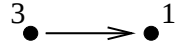
Bevor nun weiter mit dieser Thematik fortgefahren wird, sollen kurz ein paar grundlegende, wohlbekannte Begriffe der Graphentheorie eingeführt werden bzw. deren hier gebrauchte Form beschrieben werden. Die meisten Begriffe lassen sich z.B. bei Christofides [Chris] nachlesen.

Ein **gelabelter, gerichteter Graph** besteht aus **Knoten**, die ein **Label**, d.h. im hier betrachteten Fall eine Bewertung, besitzen, und aus **gerichteten Kanten („Pfeilen“)**, die geordneten Paaren von Knoten entsprechen. Oft werden die Knoten graphisch durch Punkte und die gerichteten Kanten durch Pfeile zwischen zwei Knoten dargestellt.

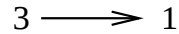
⁴vgl. auch Betrachtungen zum δ -Baum auf den Seiten 34 ff.. δ^k bezeichnet die k -te Iterierte von δ und nicht die k -te Potenz!



In dieser Arbeit sind die Labels i.A. eineindeutig den Knoten zugeordnet. Deswegen werden die Knoten oft mit ihren Labels identifiziert und z.B. anstatt von

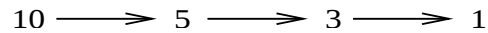


nur

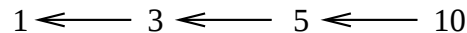


angegeben. Die hier betrachteten Graphen sind Paaren von Abstiegsfunktionen bzw. ihren Pseudo-Inversen zugeordnet. Oft wird deswegen anstatt eines Pfeiles die entsprechende funktionale Darstellung gewählt.

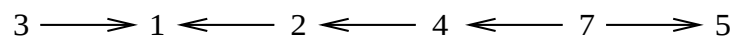
Unter **Wegen** (bzw. **Pfaden**) werden in dieser Arbeit **gerichtete** Wege verstanden. Das sind Folgen von Knoten und Pfeilen in der gleichen Richtung, z.B. ist im gelabelten Fall



ein endlicher Weg. Da in dieser Arbeit stets klar ist, in welche Richtung der Weg orientiert ist, wird meist nicht zwischen einem Weg und dessen „Umkehrweg“



unterschieden, d.h. beide Richtungen werden als Wege bezeichnet. *Nicht* erlaubt sind jedoch Wechsel der Pfeilrichtung, d.h. z.B. ist



kein Weg.

Unendliche Wege sind Wege unendlicher Länge. Ihre Orientierung ist

in dieser Arbeit immer eindeutig bestimmt, da es von jedem Anfangsknoten aus nur in einer Richtung die Möglichkeit unendlicher Fortsetzung gibt, in der anderen jedoch nicht!

Oft werden bei Wegen die Pfeile fortgelassen und anstatt

$$1 \longleftarrow 3 \longleftarrow 7 \longleftarrow 15 \longleftarrow 31 \longleftarrow 63$$

nur 1, 3, 7, 15, 31, 63 bzw. 63, 31, 15, 7, 3, 1 geschrieben.

Spezielle Graphen sind binäre (Wurzel-)Bäume. Einige Begriffe aus diesem Zusammenhang wurden schon in der Einleitung benutzt und dort an Bildern verständlich gemacht. Darauf sei hier verwiesen, da vieles nicht noch einmal erläutert wird bzw. aus der Kombination der Einleitung mit den folgenden Ausführungen verständlicher wird.

Hier soll nur kurz erklärt werden, was ein binärer (Wurzel-)Baum ist. Zu allgemeineren Definitionen und Notationen von binären Bäumen erhält man z.B. bei Aho und Ullman [AhoUl, p. 253 ff.] Informationen.

Ein **binärer (Wurzel-)Baum**⁵ ist ein Graph mit einem ausgezeichneten Knoten, der **Wurzel**, mit dem jeder Knoten in einer eindeutigen Weise (über Kanten) verbunden ist. Durch die Auszeichnung der Wurzel und die Eindeutigkeit der Verbindungen zu dieser erhält ein binärer Baum schon von selbst eine Orientierung, nämlich zur Wurzel hin bzw. von der Wurzel weg. In dieser Arbeit verlaufen die Pfeile der hier betrachteten gerichteten binären Bäume **zur Wurzel hin**. Bei Ausnahmen wird extra darauf hingewiesen.

Betrachtet man einen festen Knoten, so kann man unter den mit diesem mit einem Weg verbundenen Knoten unterscheiden zwischen denen, die in Richtung auf die Wurzel hin liegen und Vorgänger genannt werden, und denen, die in Richtung von der Wurzel weg liegen und als Nachfolger bezeichnet werden. Bei einem binären Baum hat jeder Knoten maximal zwei direkte, hier immer **unterscheidbare** Nachfolger, linker und rechter Sohn genannt, und (bis auf die Wurzel) genau einen Vorgänger, Vater genannt (vgl. Abbildung 1.2). Die Wurzel hat keinen Vorgänger.

Eine sehr schöne Eigenschaft von binären Bäumen ist die Teilbaum-Eigenschaft: Wählt man einen beliebigen Knoten eines binären Baumes als Wur-

⁵Da nur Wurzel-Bäume betrachtet werden, wird im folgenden nur von Bäumen gesprochen.

zel eines Teilbaumes, der neben diesem Knoten alle Nachfolger dieses Knotens (jeweils incl. ihrer Labels) enthält, so ist dieser Teilgraph wieder ein binärer Baum. Dies wurde schon in der Einleitung benutzt und bildlich dargestellt.

Nun ist der Zeitpunkt gekommen, an dem die Rekursion der Quotientenfolge visualisiert werden kann.

Es wird der Rekursionsgraph der Quotientenfolge einer Baumrekursion definiert: Darunter wird ein (unendlicher) gerichteter, gelabelter Graph mit den Labels $n \in \mathbb{N}$ verstanden⁶, wobei jedes $n \in \mathbb{N}$ genau einmal als Label auftaucht. Man verbindet nun stets den Knoten mit Label n mit dem Knoten mit Label $\delta(n)$ durch eine gerichtete Kante, falls $n > 1$ ist. Was für ein Graph entsteht dann?

Bei der Definition von δ hat man gesehen, daß jedes $n > 1$ stets Sprungstelle von α oder von β , aber niemals von beiden Abstiegsfunktionen ist. Das bedingt, daß im **Rekursionsgraph** von jedem Knoten $n > 1$ **genau eine** Kante ausgeht!

Nun stellt sich noch die Frage, wieviele Kanten in einen Knoten eingehen. Dazu werden zwei Fälle betrachtet.

1. Ist im ersten Fall die Baumrekursion nicht ausgeartet, so sind beide Abstiegsfunktionen nicht ausgeartet und folglich surjektiv, d.h. zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es Sprungstellen $\alpha^{-1}(k)$ von α und $\beta^{-1}(k)$ von β , die $\alpha(\alpha^{-1}(k)) = \delta(\alpha^{-1}(k)) = k$ und $\beta(\beta^{-1}(k)) = \delta(\beta^{-1}(k)) = k$ erfüllen. Nach Satz 2.1 sind unter den gegebenen Voraussetzungen die pseudoinversen Werte eindeutig und es gibt zu jedem Knoten (mit Label $k \in \mathbb{N}$) genau zwei einlaufende Pfeile. Man erhält damit die in Abbildung 2.1 dargestellte Konstruktion, die schließlich zu einem unendlichen binären Baum führt.⁷

Bemerkung:

Man sieht leicht, daß sich kein nicht zusammenhängender Wald⁸ ergeben kann, da das Label 1 das einzige Element ist, von dem keine Pfeile ausgehen.

2. Nun wird als zweiter Fall der einer ausgearteten Baumrekursion betrachtet. Diese sei o.B.d.A. normiert. In diesem Fall wird die kleinere Abstiegsfunktion α schließlich konstant, während β unbeschränkt und surjektiv ist. Also gibt es ab einem $k_0 \in \mathbb{N}$ zu jedem $k \geq k_0$ nur einen eingehenden Pfeil. Es entsteht somit ebenfalls eine Baumstruktur, aber kein vollständiger binärer Baum.

⁶ $n = 0$ wird fortgelassen.

⁷Da die Pfeile nach Art der Konstruktion in den Bäumen immer von unten nach oben gehen, wird die Pfeilspitze meist weggelassen!

⁸Ein Wald ist ein Graph, dessen Zusammenhangskomponenten Bäume sind.

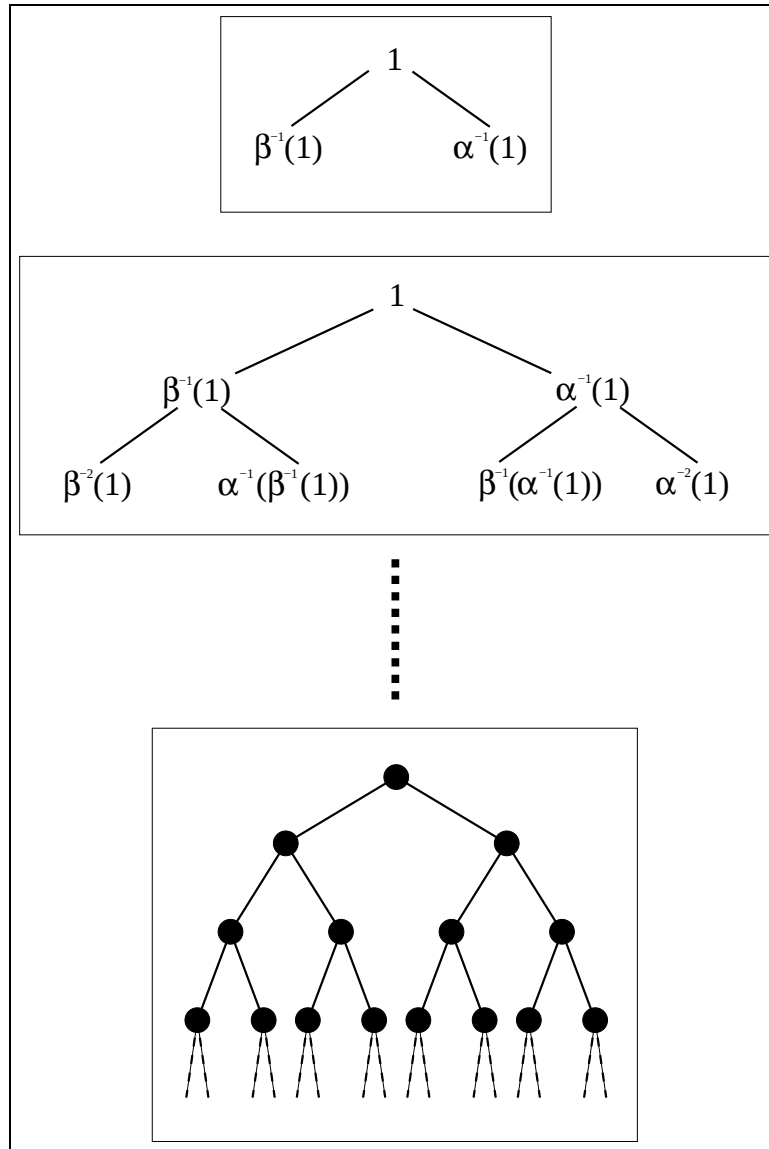


Abbildung 2.1: Entstehung der Baumstruktur über die beiden Pseudoinversen.

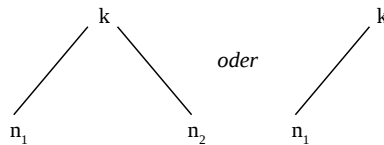
Bevor dies an Beispielen genauer betrachtet wird, soll die Rekursionsstruktur in ihrer Anordnung soweit festgelegt werden, daß sie im normierten Fall in einer eindeutigen Beziehung zur Baumrekursion steht.

Definition 2.10 (δ -Baum)

Die Rekursionsstruktur der Quotientenfolge einer Baumrekursion wird folgender-

maßen festgelegt und dann als δ -**Baum** bezeichnet.

- Jedes Label $n \in \mathbb{N}$ kommt genau einmal vor.
- Von jedem Knoten mit Label $n > 1$ geht genau ein Pfeil aus zu dem eindeutigen Label $\delta(n)$.
- Gehen in ein Label (d.h. in einen Knoten mit dem Label) k zwei Pfeile von Labels n_1 und n_2 ein, so ist für $n_1 < n_2$ immer n_1 der linke Sohn von k (d.h. n_1 steht links unter k) und n_2 der rechte Sohn von k (d.h. n_2 steht rechts unter k). Geht nur ein Pfeil von einem Label n_1 in ein Label k ein, so wird n_1 als linker Sohn von k eingeführt. Dies sieht im Bild so aus:



Wesentlich für diese Definition ist neben dem Aufbau des Baumes von oben nach unten (die Pfeile verlaufen umgekehrt, aber der unendliche Teil verläuft nach unten) die **Konvention**, daß stets der linke Sohn **kleiner** als der rechte Sohn ist.⁹ Dadurch wird dem gelabelten Baum eine feste Struktur gegeben, die für viele folgende Aussagen von fundamentaler Wichtigkeit ist.

Bemerkung:

Es sei hier ausdrücklich darauf hingewiesen, daß das Verständnis des δ -Baumes eine Schlüsselstelle für diese Arbeit ist. Dies gilt besonders für die Tatsache, daß es sich um den Rekursionsgraphen der **Quotientenfolge** Q_n und **nicht** der Originalfolge A_n handelt. Der wesentliche Unterschied liegt in der Beachtung der Sprungstellen-Eigenschaft: Es geht nur dann ein Pfeil vom Argument einer Abstiegsfunktion zum entsprechenden Bild, wenn das Argument eine Sprungstelle dieser Abstiegsfunktion ist.

Zur Verdeutlichung des Unterschieds wird in Abbildung 2.2 links der hypothetische Rekursionsgraph der Originalfolge und rechts der Rekursionsgraph der Quotientenfolge (d.h. der δ -Baum) zur Baumrekursion zu $\alpha(n) := \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ abgebildet. Der

⁹Gleichheit ist ausgeschlossen, da sonst dieser Wert Sprungstelle beider Abstiegsfunktionen wäre.

Graph der Originalfolge ist deutlich weniger anschaulich als der δ -Baum und hat keine Baum-Struktur.

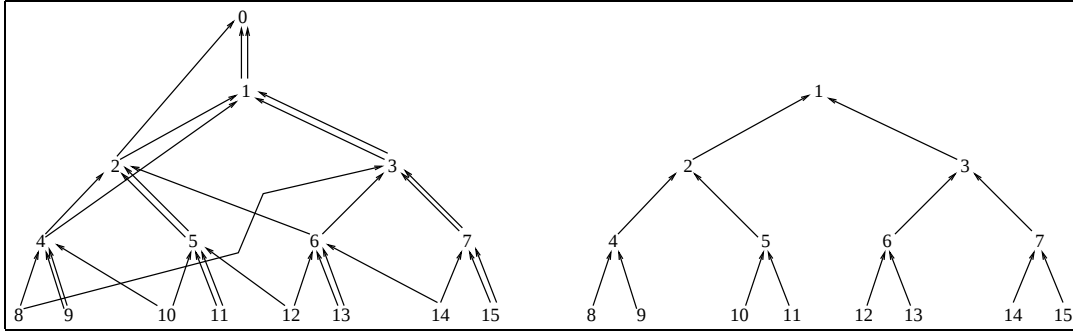


Abbildung 2.2: Rekursionsgraph der Originalfolge (links) und der Quotientenfolge (rechts) [= δ -Baum] derselben Baumrekursion.

Um sich mit dieser Thematik einmal näher vertraut zu machen, wird der Anfang eines δ -Baumes in einem Beispiel hergeleitet. Dieses Beispiel ist vollkommen willkürlich gewählt.

Beispiel 2.7

Es sei eine Baumrekursion über den vorgegebenen 0-1-Code $\bar{\alpha}$ der Abstiegsfunktion α definiert:

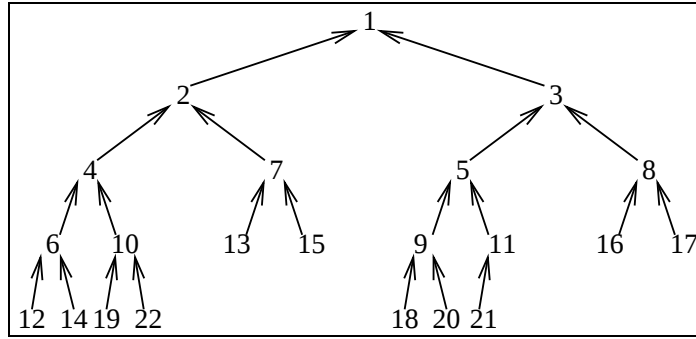
$$(\bar{\alpha}(n))_{n \geq 2} = 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, \dots$$

Man berechnet nun hieraus die Abstiegsfunktionen α und β (mit $\alpha(n) = \alpha(n-1) + \bar{\alpha}(n)$ und $\beta(n) = \beta(n-1) + 1 - \bar{\alpha}(n)$), bestimmt zu jedem $n \in \mathbb{N}_{>1}$, ob es eine Sprungstelle von α oder β ist ($\bar{\alpha}(n) = 0 \Rightarrow n$ Sprungstelle von β , $\bar{\alpha}(n) = 1 \Rightarrow n$ Sprungstelle von α) und berechnet daraus die Abstiegsfunktion δ . Das Ergebnis wird in Tabelle 2.1 dargestellt.¹⁰

Nun wird der Beginn des δ -Baumes gezeichnet, indem zuerst die Wurzel 1 eingetragen wird. Anschließend muß man die beiden Labels eintragen, von denen aus Pfeile zum Label 1 führen, d.h. n_1, n_2 suchen mit $\delta(n_1) = \delta(n_2) = 1$. Man findet in der Tabelle, daß 2 und 3 die Söhne des Labels 1 sein müssen. Da $2 < 3$ ist, setzt man 2 als linken, 3 als rechten Sohn der 1 ein. Wenn so fortgefahren wird, erhält man schließlich das in Abbildung 2.3 dargestellte Ergebnis.

¹⁰Hervorgehobene Werte sind Bilder von Sprungstellen der jeweiligen Abstiegsfunktion.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$\bar{\alpha}(n)$	–	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
$\alpha(n)$	0	0	1	1	1	1	2	3	3	4	5	5	5	6	7	7	8	8	8	9	9	10
$\beta(n)$	0	1	1	2	3	4	4	4	5	5	5	6	7	7	7	8	8	9	10	10	11	11
$\delta(n)$	–	1	1	2	3	4	2	3	5	4	5	6	7	6	7	8	8	9	10	9	11	10

Tabelle 2.1: Berechnung der Funktion δ in Beispiel 2.7Abbildung 2.3: Anfang des δ -Baumes in Beispiel 2.7.

Wenn man den Anfang dieses δ -Baumes näher ansieht, ist der linke Sohn eines Labels k stets $\beta^{-1}(k)$, d.h. der linke Sohn n_1 erfüllt stets: $\beta(n_1) = k$ und n_1 ist Sprungstelle von β , während der rechte Sohn stets $\alpha^{-1}(k)$ ist. Es stellt sich natürlich die Frage, woran das liegt. Die Antwort ist: an der Normierung! Dies sagt das folgende Lemma. Davor sollen aber noch zwei Bezeichnungen eingeführt werden.

Definition 2.11 (Linksfunktion, Rechtsfunktion)

In jedem δ -Baum werden zwei Abbildungen eingeführt, die **Linksfunktion** λ und **Rechtsfunktion** ρ genannt werden. Sie werden folgendermaßen definiert:

$\lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 2}$
 $k \mapsto \text{Label des linken Sohnes von } k \text{ im } \delta\text{-Baum}$

$\rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_{>2}$
 $k \mapsto \text{Label des rechten Sohnes von } k \text{ im } \delta\text{-Baum}$

Zusammenfassend werden beide Funktionen auch als **Aufstiegsfunktionen** bezeichnet. Diese Definition rechtfertigt sich durch das folgende Lemma.

Lemma 2.6

Für eine normierte Baumrekursion gelten im δ -Baum die folgenden Beziehungen für alle $k \in \mathbb{N}$.

$$\lambda(k) = \beta^{-1}(k)$$

$$\rho(k) = \alpha^{-1}(k)$$

Bildlich dargestellt sind diese Beziehungen in Abbildung 2.4.

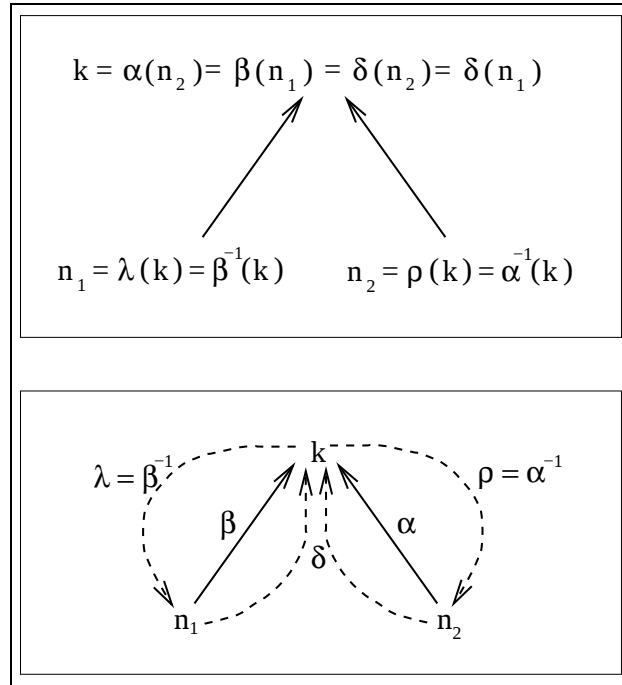


Abbildung 2.4: Vater-Söhne-Beziehungen im δ -Baum bei Normiertheit.

Beweis:

Es reicht aus, zu zeigen, daß eine normierte Baumrekursion stets $\beta^{-1}(k) < \alpha^{-1}(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Nach Definition 2.5 ist die Normierung einer Baumrekursion gleichbedeutend mit $\alpha(n) \leq \beta(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (*).

Angenommen es wäre $\beta^{-1}(k) \geq \alpha^{-1}(k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es zwei Fälle:

1. Fall: $\beta^{-1}(k) > \alpha^{-1}(k)$. Dann gilt wegen der strengen Isotonie auf Sprungstellen¹¹ von β ($\beta^{-1}(k)$ ist Sprungstelle von β):

$$k = \beta(\beta^{-1}(k)) > \beta(\alpha^{-1}(k)) \stackrel{(*)}{\geq} \alpha(\alpha^{-1}(k)) = k$$

Dies ist ein klarer Widerspruch.

2. Fall: $\beta^{-1}(k) = \alpha^{-1}(k)$. Dann ist dieser Wert Sprungstelle beider Abstiegsfunktionen, was aber bei Baumrekursionen zu einem Widerspruch führt, denn hier ist jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ Sprungstelle genau einer der beiden Abstiegsfunktionen.

Damit folgt die Behauptung. ■

Hieraus kann man leicht eine Folgerung ziehen.

Folgerung 2.2 (Eindeutigkeit des δ -Baumes bei Baumrekursionen)

1. Jede normierte Baumrekursion hat einen eindeutigen δ -Baum.
2. Haben zwei normierte Baumrekursionen denselben δ -Baum, so haben sie die gleichen Abstiegsfunktionen.

Beweis:

Der erste Teil folgt aus der Definition des δ -Baumes, da der linke Sohn stets kleiner als der rechte Sohn sein soll.

Die zweite Behauptung folgt aus dem vorigen Lemma, denn der δ -Baum legt mit dieser Aussage eindeutig das normierte Abstiegsfunktionenpaar (α, β) fest. ■

Nun kann man sich fragen, ob man zu einem gegebenen 0-1-Code $\bar{\alpha}$ stets beide Abstiegsfunktionen (und damit auch δ) berechnen muß, um den δ -Baum zu

¹¹Ist n Sprungstelle von β und $m < n$, so gilt $\beta(m) < \beta(n)$.

der entsprechenden Baumrekursion zu bestimmen. Im normierten Fall heißt die Antwort: Nein! Dies zeigt der folgende rekursive Algorithmus zur Konstruktion des δ -Baumes direkt aus einem normierten 0-1-Code.

Satz 2.4 (Rekursive Konstruktion des δ -Baumes aus dem 0-1-Code)

Wenn ein normierter 0-1-Code gegeben ist, kann man den δ -Baum rekursiv mit folgender Konstruktionsvorschrift erzeugen:

1. Schritt: *Zeichne 1 als Wurzel des δ -Baumes.*

Für $n \geq 2$ wird folgendermaßen der Reihe nach verfahren:

2. Schritt:

Ist $\bar{\alpha}(n) = 0$, so füge n als linken Sohn an das Label an, das unter allen Labels ohne linken Sohn das kleinste Label ist.

Ist $\bar{\alpha}(n) = 1$, so füge n als rechten Sohn an das Label an, das unter allen Labels ohne rechten Sohn das kleinste Label ist.

Es soll nun, bevor die Korrektheit der Konstruktion bewiesen wird, der Anfang des obigen Beispiel- δ -Baumes mit der Konstruktionsvorschrift hergeleitet werden.

Beispiel 2.8

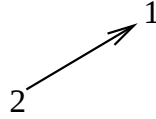
Es wird der Anfang des in Beispiel 2.7 gegebenen 0-1-Codes betrachtet

n	2	3	4	5	6	7	8	
$\bar{\alpha}(n)$	0	1	0	0	0	1	1	

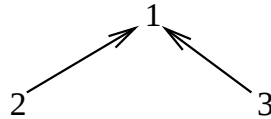
und die rekursive Konstruktion für diesen Fall ausgeführt.

- $n = 1$: 1 als Wurzel einsetzen ist klar:

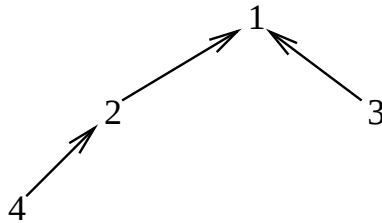
- $n = 2$: $\bar{\alpha}(2) = 0$. Füge 2 an das einzige Label 1 als linken Sohn an:



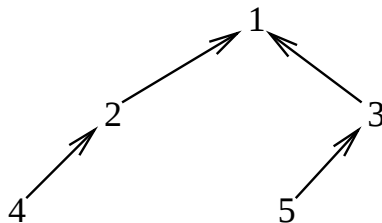
- $n = 3$: $\bar{\alpha}(3) = 1$. Die Labels 1 und 2 haben keinen rechten Sohn. Da 1 unter diesen das kleinste Label ist, füge 3 als rechten Sohn an die 1.



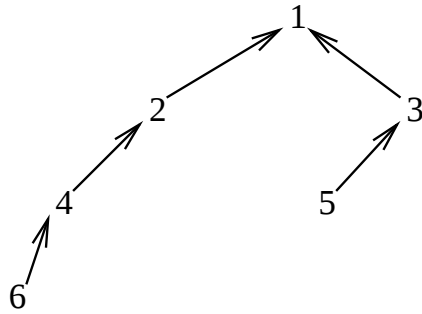
- $n = 4$: $\bar{\alpha}(4) = 0$. Die Labels 2 und 3 haben keinen linken Sohn. Da $2 < 3$, füge 4 als linken Sohn an die 2.



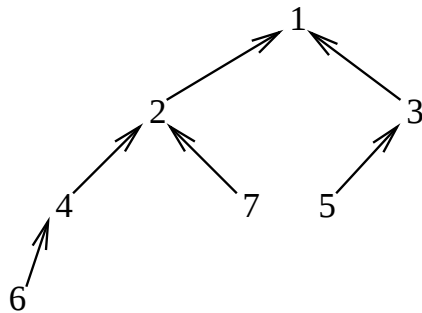
- $n = 5$: $\bar{\alpha}(5) = 0$.



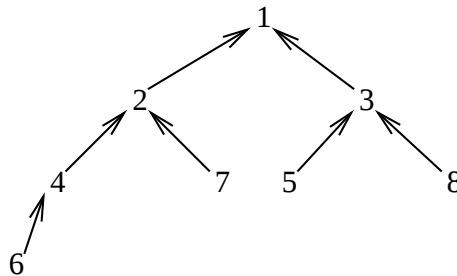
- $n = 6$: $\bar{\alpha}(6) = 0$.



- $n = 7$: $\bar{\alpha}(7) = 1$.



- $n = 8$: $\bar{\alpha}(8) = 1$.



Dieses Ergebnis stimmt mit dem weiter oben über die Abstiegsfunktion δ bestimmten Anfang des δ -Baumes überein (vgl. Abbildung 2.3).

Nachdem das Beispiel motiviert hat, daß die Konstruktion funktionieren könnte, muß dies noch bewiesen werden.

Beweis:

Der Anfang der Konstruktion (1. Schritt) ist trivialerweise richtig. Nun wird vorausgesetzt, daß die Konstruktion bis n den korrekten Anfang des δ -Baumes

liefert. Es wird nun die Korrektheit für $n + 1$ überprüft:

$\bar{\alpha}(n+1) = 0 \xrightarrow{s.g.} (n+1)$ ist Sprungstelle von $\beta \xrightarrow{\text{Lemma 2.6}} (n+1)$ ist linker Sohn

$\bar{\alpha}(n+1) = 1 \xrightarrow{s.g.} (n+1)$ ist Sprungstelle von $\alpha \xrightarrow{\text{Lemma 2.6}} (n+1)$ ist rechter Sohn

1. Fall: $\bar{\alpha}(n+1) = 0$:

$\beta(n+1) = \beta(n)+1 = \beta(n_0)+1$, wobei n_0 die größte Sprungstelle von β sein soll, die kleiner als $(n+1)$ ist. Nach Induktionsvoraussetzung (Konstruktion bis n korrekt) ist n_0 als linker Sohn an das Label $\beta(n_0)$ gesetzt worden. Da $\beta(n+1) = \beta(n_0) + 1$ ist, ist $\beta(n+1)$ das kleinste Label ohne linken Sohn (alle kleineren Labels haben nach der Konstruktion schon einen linken Sohn). Da $(n+1)$ Sprungstelle von β ist, wird $n+1$ korrekt als linker Sohn von $\beta(n+1)$ eingesetzt.¹²

2. Fall: $\bar{\alpha}(n+1) = 1$: analog! ■

Für Grenzbetrachtungen sehr wichtig sind die jetzt eingeführten unendlichen Wege im δ -Baum, die bei den hier betrachteten Randwerten monotone, also im Falle der Beschränktheit konvergente Teilfolgen definieren. Diese Definition baut auf der Definition von unendlichen Wegen in Graphen (vgl. Seite 31) auf.

Definition 2.12 (unendlicher Weg im δ -Baum)

Ein **unendlicher Weg im δ -Baum** ist eine Folge $f_1, f_2, f_3, \dots$ von Labels, wobei $f_1 = 1$ und für $i > 1$ stets $\delta(f_i) = f_{i-1}$ gilt.

Bemerkung:

Ein unendlicher Weg, der irgendwo im δ -Baum beginnen würde, ist durch den jeweils eindeutigen Weg von der Wurzel zu jedem Knoten leicht zu einem unendlichen Weg im Sinne der Definition ergänzbar.

Ein unendlicher Weg ist also eine vollständige Folge von Knotenlabels im δ -Baum, die jeweils entgegen der Pfeilrichtung durchlaufen werden.

¹²Ein Spezialfall, der dadurch nicht abgedeckt wird, ist noch $n = 2$. Dieses Label muß immer (Normiertheit!) linker Sohn der 1 sein. Analog ist im folgenden Fall immer das kleinste Label $m \geq 3$ mit $\bar{\alpha}(m) = 1$ rechter Sohn der Wurzel 1. Beides garantiert auch die Konstruktion.

Nun sollen zum Abschluß dieses Kapitels noch zwei Typen von Baumrekursionen über die Abstiegsfunktion (bzw. deren 0-1-Code) definiert werden: stufentreue und periodische Baumrekursionen.

Definition 2.13 (periodisch, fair, unfair, stufentreu)

1. Eine (normierte) Baumrekursion heißt **periodisch**, wenn der 0-1-Code ihrer kleineren Abstiegsfunktion periodisch ist, d.h.

$$(\bar{\alpha}(n))_{n \in \mathbb{N}} = w, w, w, w, w, \dots =: w^\omega$$

ist, wobei w ein endliches $\{0, 1\}$ -Wort ist¹³.

Eine periodische Baumrekursion heißt **fair**, falls w genauso viele Nullen wie Einsen enthält. Ansonsten heißt sie **unfair**.

2. Eine Baumrekursion heißt **stufentreu**, falls für die Abstiegsfunktionen gilt:

$$\alpha(2^k - 1) = \beta(2^k - 1) \quad \text{für alle } k \geq 1$$

Es läßt sich die folgende analoge Charakterisierung der stufentreuen Rekursionen finden:

Lemma 2.7 (Äquivalente Charakterisierung der Stufentreue)

Für eine Baumrekursion sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Sie ist stufentreu.

¹³Es werden hier (in abgewandelter Form) die Notationen regulärer Sprachen (z.T. mit unendlichen Wörtern) benutzt, die man z.B. bei Thomas [Thoma] nachlesen kann. Abweichend zum üblichen Gebrauch sollen die Nullen und Einsen durch Kommata getrennt werden, um zu zeigen, daß es sich um Folgen handelt. Dies soll grundsätzlich so sein und wird deshalb in den Definitionen oft abkürzend gebraucht. So wird für $0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots$ kurz $(0, 0, 1)^\omega$ geschrieben. Um den Notationen der regulären Sprachen voll gerecht zu werden, müßte ein (unsichtbares) Klammerpaar eingeführt werden, das verschiedene Zeichen zu einem Buchstaben zusammenfaßt. Dann würde der gerade abkürzend dargestellte Ausdruck korrekt $(\{0, \} \{0, \} \{1, \})^\omega$ geschrieben werden. Dies wird hier vermieden, da keine Doppeldeutigkeiten vorkommen können. Endliche Ausdrücke werden analog behandelt.

2. Der 0-1-Code der kleineren Abstiegsfunktion α hat die Form

$$(\bar{\alpha}(n))_{n \in N} = w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, \dots$$

wobei w_i für alle i ein faires $\{0, 1\}$ -Wort der Länge 2^i ist, d.h. 2^{i-1} Nullen und 2^{i-1} Einsen enthält.

Beweis:

Es wird nur kurz die Beweisidee vorgestellt.

Ausgangspunkt ist die mit Lemma 2.1 und Folgerung 2.1 geltende Aussage:

$$\alpha(n) = \sum_{j=2}^n \bar{\alpha}(j)$$

Damit kann man dann die folgenden rekursiven Charakterisierungen zeigen:

$$\begin{aligned} \alpha(1) &= \beta(1) = 0 \\ \alpha(2^k - 1) &= \alpha(2^{k-1} - 1) + \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \bar{\alpha}(j) \\ \beta(2^k - 1) &= \beta(2^{k-1} - 1) + \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \bar{\beta}(j) \end{aligned}$$

Hiermit kann man sich bezüglich der Gleichheit an den Stellen $2^k - 1$ hochhangeln, wenn man beachtet, daß der Wert der Summe $\sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \bar{\alpha}(j)$ genau die Anzahl der Einsen im Wort w_{k-1} ist. Diese Anzahl der Einsen ist aber gleich der Anzahl der Nullen in w_{k-1} und damit auch wegen $\bar{\beta}(n) = 1 - \bar{\alpha}(n)$ gleich der Summe $\sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \bar{\beta}(j)$. Die Äquivalenz folgt dann per Induktion. ■

Bemerkung:

Soll eine periodische oder stufentreue Rekursion normiert sein, so muß

- *im periodischen Fall w normiert sein.*
- *im stufentreuen Fall w_i für alle $i \geq 1$ normiert sein.*

Nun kann man spezielle periodische oder stufentreue Baumrekursionen in einem

Beispiel betrachten:

Beispiel 2.9

1. Die Baumrekursion zu $\alpha(n) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ ist periodisch und hat den folgenden 0-1-Code:

$$(\bar{\alpha}(n))_{n \in \mathbb{N}} = (0, 1)^\omega = 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

[Dies wird auch abkürzend mit $\alpha := \text{period}[0, 1]$ geschrieben.]

Diese Abstiegsfunktion (und die entsprechende Baumrekursion) ist fair, während die durch $\alpha := \text{period}[0, 0, 1, 1, 0, 0, 1]$ definierte Baumrekursion unfair ist. Sie ist aber normiert, da bis zu jeder Stelle in $[0, 0, 1, 1, 0, 0, 1]$ mindestens genauso viele Nullen wie Einsen stehen. Dagegen ist $\alpha := \text{period}[0, 0, 1, 1, 1]$ nicht normiert.

2. Stufentreue Abstiegsfunktionen sind viel schwerer zu umschreiben. Die oben vorgestellte Abstiegsfunktion $\alpha(n) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ ist auch stufentreu, wie man leicht nachrechnen kann. Man sieht es aber auch an dem 0-1-Code, denn die in Lemma 2.7 geforderten fairen Wörter w_i der Länge 2^i haben die Form $(0, 1)^{2^{i-1}} = \underbrace{(0, 1), \dots, (0, 1)}_{2^{i-1}}$.

Eine andere einfache stufentreue Rekursion könnte man über $w_i := [0^{2^{i-1}}, 1^{2^{i-1}}] = \underbrace{[0, \dots, 0]}_{2^{i-1}}, \underbrace{[1, \dots, 1]}_{2^{i-1}}$ definieren, d.h.

$$(\bar{\alpha}(n))_{n \in \mathbb{N}} = 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0^8, 1^8, 0^{16}, 1^{16}, \dots$$

Diese Abstiegsfunktion ist schon bekannt. Es ist die in der Einführung mit β bezeichnete Abstiegsfunktion der Heaprekursion. Die hier vorgenommene Definition als α stellt jedoch im Gegensatz dazu die Normierung sicher!

Bemerkung:

Man kann sich hier die Frage stellen, warum stufentreue Baumrekursionen diesen Namen tragen. Die Antwort auf diese Frage wird später noch vielfach gesehen werden. Hier sei nur kurz gesagt, daß die stufentreuen Baumrekursionen **eng** an die Stufen (d.h. die horizontalen Ebenen) des δ -Baumes gebunden sind. So wird der δ -Baum stufenweise aufgebaut, d.h. bei der rekursiven Konstruktion wird die $(k+1)$ -te Stufe erst begonnen, wenn die k -te Stufe vollständig gefüllt ist. Dies ist, wie man an dem schon gesehenen δ -Baum erkennen kann, keineswegs immer

der Fall!

Bemerkung:

In einer Bemerkung auf Seite 18 wurde schon auf den engen Zusammenhang zwischen bestimmten Abstiegsfunktionen und Beatty-Folgen hingewiesen. So hätte man anstelle periodischer Abstiegsfunktionen auch allgemeiner über Beatty-Folgen definierte Abstiegsfunktionen betrachten können. Diese Möglichkeit wurde hier nicht verfolgt und es bietet sich an, Ergebnisse dieser Arbeit auf diesem Wege zu verallgemeinern.

Auch bei Beschränkung auf periodische Abstiegsfunktionen wäre eine Definition mit Folgen vom Beatty-Typ möglich gewesen, da sich periodische Abstiegsfunktionen als endliche Summen (mit wechselndem Vorzeichen) von Folgen $\left[\frac{n}{a} - b\right]$ mit rationalen a, b darstellen lassen.

Eine solche Betrachtung hätte zwar manchmal Vorteile gegenüber der Definition über 0-1-Codes gehabt, aber auch Nachteile. Ein gewichtiger Grund ist die dann notwendige unterschiedliche Behandlung stufentreuer und periodischer Abstiegsfunktionen. Insbesondere deswegen bietet sich die hier vorgestellte Darstellung an.

Zum Abschluß dieses Abschnitts soll noch einmal ein Überblick über die bei Baumrekursionen benötigten Klassen von Abstiegsfunktionen gegeben werden. Dabei wird stets eine **normierte** Situation vorausgesetzt und stets nur die **kleinere** Abstiegsfunktion α betrachtet werden, die dann ebenfalls normiert ist und natürlich, wie bei Baumrekursionen definiert, immer schwach wachsend ist. Die betrachteten Klassen von Abstiegsfunktionen lassen sich unter diesen Voraussetzungen wie in Abbildung 2.5 darstellen.

Das in der Abbildung mit 1 markierte Schnittfeld stellt dabei die ausgearteten periodischen Abstiegsfunktionen dar, von denen nur eine einzige existiert, nämlich die zu $period[0]$. Dagegen gibt es von den in der Abbildung mit 2 markierten stufentreuen periodischen Abstiegsfunktionen nicht nur einen Fall. Zwei Beispiele sind hier $period[0, 1]$ und $period[0, 1, 0, 0, 1, 1]$.

Dieses Diagramm wird an einigen Stellen als „Verbreitungskarte“ von Eigenschaften benutzt, wobei verschiedene Eigenschaften durch unterschiedliche Muster bzw. unterschiedlich dunkle Füllungen dargestellt sind. Ist ein Feld des Diagramms ganz gefärbt bzw. schraffiert, so soll damit eine $\forall$ -Aussage bezeichnet werden, d.h. unter den hier üblichen Randwerten haben alle Baumrekursionen mit den im Diagramm dargestellten Abstiegsfunktionen die betrachtete Eigenschaft. Dagegen ist eine $\exists$ -Aussage mit einem in der entsprechenden Farbe bzw. Schraffur unterlegten Kreis dargestellt, d.h. es gibt mindestens einen Fall einer

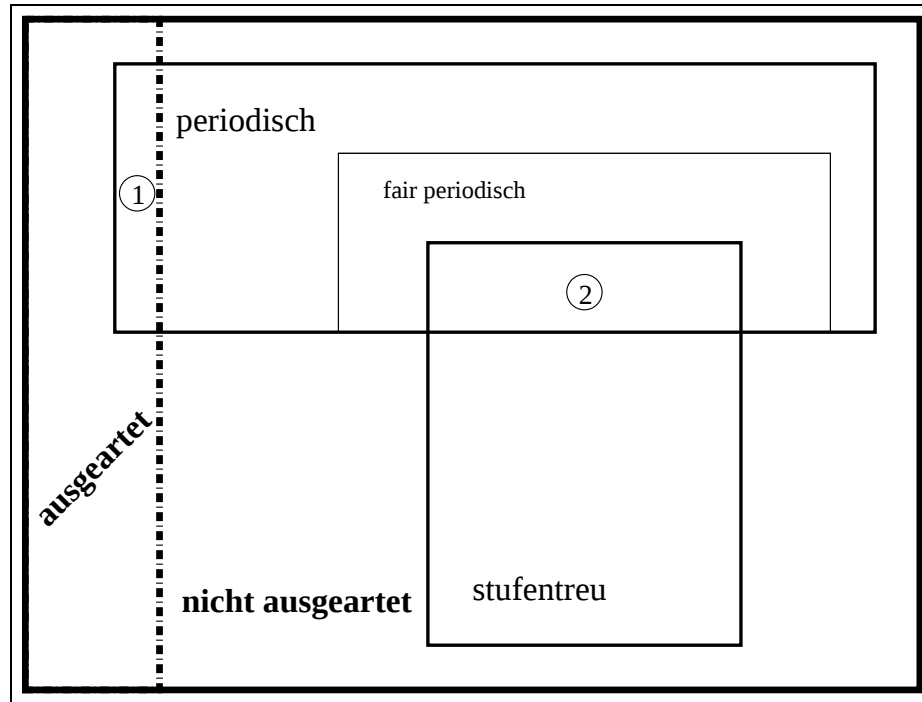


Abbildung 2.5: Die benutzten Klassen von normierten Abstiegsfunktionen.

Baumrekursion mit einer im Diagramm dargestellten Abstiegsfunktion, die die betrachtete Eigenschaft besitzt.

Um zusätzlich dazu bei den einzelnen Sätzen schnell anzuzeigen, welche Voraussetzungen existieren, wird der folgende Code entwickelt:

a =ausgeartet
 $\bar{a}$ = nicht ausgeartet
 s =stufentreu
 p =periodisch
 fp = fair periodisch

Diese Kürzel werden jeweils über den Aussagen angegeben. Soll ein Satz z.B. für nicht ausgeartete periodische und für stufentreue Abstiegsfunktionen gelten, so würde dabei stehen: $\bar{a}p \cup s$. Mit diesem Beispiel wird auch klar, wie Eigenschaften kombiniert werden und wie zwei Klassen „vereinigt“ werden.

Kapitel 3

Analytische Eigenschaften von Baumrekursionen

Dieses Kapitel soll grundlegende analytische Eigenschaften von Baumrekursionen klären. Zuerst wird die Frage der Beschränktheit der Quotientenfolge bei bestimmten Klassen von Baumrekursionen behandelt. Bei zwei beschränkten Klassen, den stufentreuen und nicht ausgearteten, periodischen Baumrekursionen, wird die Mächtigkeit der Berührungsmenge näher untersucht. Für all diese Betrachtungen müssen vorher die Größenrelationen der Labels auf den Stufen des δ -Baumes geklärt werden und die Pseudo-Invertierung periodischer und stufentreuer Abstiegsfunktionen gelöst werden bzw. Abschätzungen dazu gegeben werden. Das Untersuchungsgebiet dieses Kapitels wird oft abkürzend mit dem Begriff „**Werte**“ umschrieben.

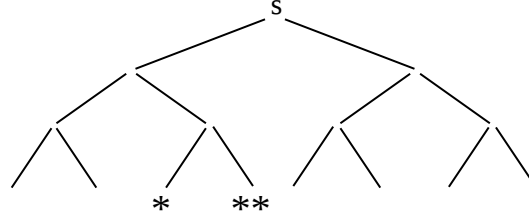
3.1 Die Ordnung im δ -Baum

In diesem Abschnitt sollen Aussagen über die Größenrelation der Labels verschiedener „Stellen“ im δ -Baum hergeleitet werden. Der Schwerpunkt liegt dabei auf dem Größenvergleich von Labels der gleichen Stufe, d.h. der gleichen horizontalen Ebene im δ -Baum.

Wenn man den δ -Baum T einer (nicht ausgearteten) Baumrekursion mit Hilfe der Rechts- und Linksfunktionen λ und ρ betrachtet, kann man jede Stelle im

δ -Baum durch eine endliche Verkettung beider Funktionen beschreiben. Ist T_s ein Teilbaum von T mit Wurzel s (d.h. mit Wurzellabel s), so geht dies auch hier.

Beispiel 3.1



An der mit $*$ bezeichneten Stelle steht das Label $\lambda(\rho(\lambda(s)))$, während $**$ die Stelle mit dem Label $\rho(\rho(\lambda(s)))$ bezeichnet.

Es wird nun für $\zeta_i \in \{\lambda, \rho\}$, $0 \leq i \leq n$ bezeichnet:

$$[\zeta_n, \zeta_{n-1}, \dots, \zeta_1](s) := \zeta_n(\zeta_{n-1}(\dots(\zeta_1(s))\dots))$$

$$[\zeta_0, \dots, \zeta_1](s) := s$$

Der letzten Notation entspricht auch $\lambda^0(s) = \rho^0(s) = s$.

Bemerkung:

Entsprechend wird in der gesamten Arbeit die k -fache Iterierte einer (Abstiegs- oder Aufstiegs-) Funktion ζ mit ζ^k abgekürzt, d.h.

$$\zeta^k(s) := \underbrace{[\zeta, \zeta, \dots, \zeta]}_k(s) = \underbrace{\zeta(\zeta(\dots(\zeta(s))\dots))}_k$$

Diese Notation ist nicht unüblich und wird z.B. auch bei Elaydi [Elaydi] benutzt. Es soll hier aber auf die abweichende Verwendung im Vergleich zur gebräuchlicheren Darstellung der echten Potenz einer Funktion, z.B. bei $\sin^2(x) = \sin(x) \cdot \sin(x)$, hingewiesen werden.

Jede Stelle von T_s ist nun durch einen eindeutigen endlichen $\{\lambda, \rho\}$ -Vektor charakterisiert.

Wie schon gesagt, soll in diesem Abschnitt untersucht werden, ob es Regelmäßigkeiten bei den Größenordnungen der Labels gibt, d.h. ob für bestimmte $\zeta :=$

$[\zeta_n, \dots, \zeta_1]$, $\xi := [\xi_m, \dots, \xi_1]$ stets die Beziehung $\zeta(s) < \xi(s)$ gilt in Unabhängigkeit von s . Dazu müssen aber zuerst ein paar Voruntersuchungen gemacht werden:

Lemma 3.1 ($\bar{a}$)

Bei jeder normierten, nicht ausgearteten Baumrekursion sind λ und ρ streng isoton.

Bemerkung:

Zur Notation der in Klammern hinter der Lemma-Bezeichnung stehenden Abkürzung der geltenden Voraussetzungen vgl. Seite 48.

Beweis:

Wegen der Normierungsbedingung ist nach Lemma 2.6 $\lambda = \beta^{-1}$ und $\rho = \alpha^{-1}$. Mit Lemma 2.5 folgt dann direkt die Behauptung. ■

Hieraus kann man per Induktion leicht die folgende Aussage folgern, die hier nicht bewiesen wird.

Folgerung 3.1 (Isotonie verketteter Aufstiegsfunktionen : $\bar{a}$)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\zeta_i \in \{\lambda, \rho\}$, $1 \leq i \leq n$ gilt:

$[\zeta_n, \dots, \zeta_1] : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ist streng isoton.

Nun soll die Ordnung im δ -Baum betrachtet werden. Die trivialste Ordnung ist die von oben nach unten, d.h. beide Söhne sind stets größer als ihr Vater. Setzt man einen unterbrochen Pfeil im Sinne, daß $a \rightarrow b$ als $a < b$ gedeutet wird, so entsteht das in Abbildung 3.1 gezeigte Bild.

Bemerkung:

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß in diesem (und nur in diesem) Abschnitt Pfeile nicht Rekursionsrückgriffe, sondern Ordnungsrelationen ($<$ -Beziehungen) darstellen.

Dies ist eine triviale Ordnungsstruktur, die auf die Rekursion als **echten** Abstieg zurückgeht.

Wesentlicher ist jedoch die Größenordnung der Labels auf den Stufen! Die Stufen

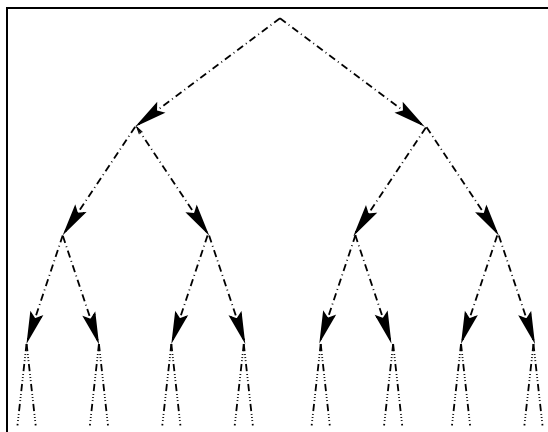
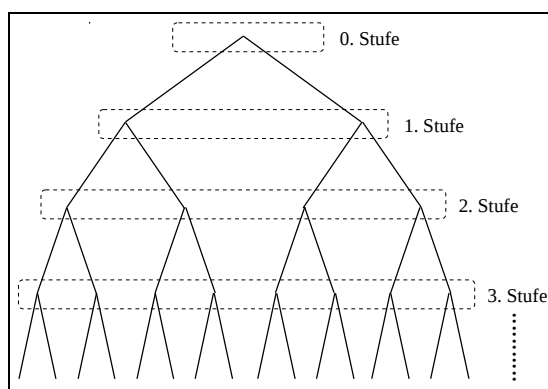


Abbildung 3.1: Triviale Ordnungsstruktur durch echte Rekursion.

des δ -Baumes seien wie in Abbildung 3.2 bezeichnet.

Abbildung 3.2: Bezeichnung der Stufen des δ -Baumes.

Eine einfachste Aussage der Stufenordnung ist durch die Definition gegeben, daß im δ -Baum stets der linke Sohn kleiner als der rechte sein soll. Übersetzt in die Notation der Rechts- und Linksfunktionen bedeutet dies:

$$\lambda(s) < \rho(s) \quad s \in \mathbb{N}$$

Da man $s \in \mathbb{N}$ beliebig wählen kann, erhält man eine erste Ordnung auf den Stufen, die sich wie in Abbildung 3.3 illustrieren läßt.

Bemerkung:

Wie gerade geschehen, wird die Ordnung der Stufen besonders an der vierten

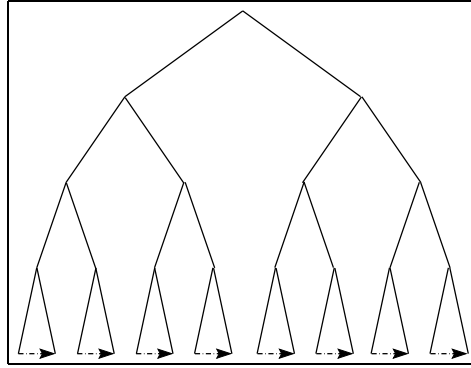


Abbildung 3.3: Triviale Stufen-Ordnung durch die Konvention der Definition.

Stufe veranschaulicht.

Die gerade erhaltene **Stufenordnung** hat nur einen **geringen** Wert, da nur sehr wenige Elemente einer Stufe verglichen werden können. Aus den schon gemachten Vorarbeiten kann man nun leicht die folgende Aussage herleiten, die fundamental für die Ordnung auf den Stufen ist.

Lemma 3.2 ($\bar{a}$)

Sei T_s der Teilbaum mit Wurzel s des δ -Baumes einer normierten, nicht ausgearteten Baumrekursion und seien $T_{\lambda(s)}$ und $T_{\rho(s)}$ der linke bzw. rechte Teilbaum von T_s . Ist x ein Label von $T_{\lambda(s)}$ und y das Label von $T_{\rho(s)}$ an der zur Stelle von x in $T_{\lambda(s)}$ entsprechenden Stelle in $T_{\rho(s)}$, so gilt $x < y$. Diese Situation wird in Abbildung 3.4 visualisiert.

Formal kann man dies ausdrücken durch:

Für alle $s \in \mathbb{N}$ gilt für alle Verkettungen von Rechts- und Linksfunktionen $[\zeta_n, \dots, \zeta_1]$ (mit $n \in \mathbb{N}$, $\zeta_i \in \{\lambda, \rho\}$):

$$[\zeta_n, \dots, \zeta_1, \lambda](s) = [\zeta_n, \dots, \zeta_1](\lambda(s)) < [\zeta_n, \dots, \zeta_1](\rho(s)) = [\zeta_n, \dots, \zeta_1, \rho](s)$$

Beweis:

Folgt direkt aus Folgerung 3.1 und der Aussage $\lambda(s) < \rho(s)$ für alle $s \in \mathbb{N}$ ■

Mit Hilfe dieses Lemmas kann direkt die fundamentale Stufenordnung hergeleitet werden, die aber zuerst begrifflich gefaßt werden soll.

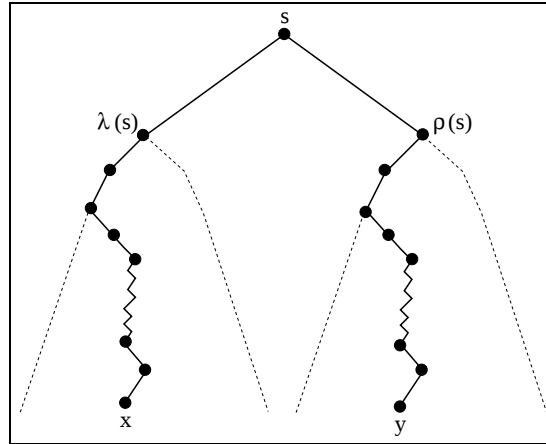


Abbildung 3.4: Bildliche Darstellung der Situation in Lemma 3.2. Es folgt $x < y$.

Bemerkung:

Bei der Untersuchung der Ordnung auf den Stufen ist das Ziel, sich ein wenig von der Gestalt des δ -Baumes zu lösen. Wenn man die Labels der k -ten Stufe irgendeines Teilbaumes eines beliebigen δ -Baumes einer nicht ausgearteten, normierten Baumrekursion von links nach rechts mit $h(0), \dots, h(2^k - 1)$ bezeichnet, wird den entsprechenden Stellen damit über die Indices eine Nummer von $0, \dots, 2^k - 1$ zugeordnet. Ziel ist nun, eine **Ordnung auf den Indices** (kurz als „Indexordnung“ bezeichnet) zu finden, die sich allgemein auf alle k -ten Stufe oben beschriebener δ -Baum-Teilbäume übertragen läßt. Man will also eine Ordnung $<<$ auf $\{0, \dots, 2^k - 1\}$ finden, sodaß für die natürliche Ordnung $<$ von $\mathbb{N}$ für $x \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$ und jeden „Stufenvektor“ $[h(0), \dots, h(2^k - 1)]$ stets gilt:

$$x << y \quad \Rightarrow \quad h(x) < h(y)$$

Dabei soll die gesuchte „Index-Ordnung“ $<<$ möglichst so viele Beziehungen enthalten, daß sie nicht mehr erweiterbar ist. Die beiden folgenden Sätze sagen aus, daß die jetzt definierte Hypercube-Ordnung diese gesuchte „Index-Ordnung“ ist.

Definition 3.1 (Hypercube-Ordnung)

1. Ein Vektor $[h(0), h(1), \dots, h(2^k - 1)]$ der Länge 2^k genügt der **k-Hypercube-Ordnung** bzgl. einer totalen Ordnung¹ $<$ zwischen den Komponenten, falls er die folgende rekursive Konstruktion erfüllt:

¹Hier ist es immer die natürliche Ordnung von $\mathbb{N}$.

- Im Falle $k = 0$ genügt ein Vektor $[h(0)]$ der 0-Hypercube-Ordnung.
- Im Falle $k > 0$:
Die Vektoren $[h(0), \dots, h(2^{k-1} - 1)]$ und $[h(2^{k-1}), \dots, h(2^k - 1)]$ der Länge 2^{k-1} genügen der $(k-1)$ -Hypercube-Ordnung und für alle $s \in \{0, \dots, 2^{k-1} - 1\}$ gilt $h(s) < h(2^{k-1} + s)$.

Im Prinzip wird der ursprüngliche Vektor halbiert und von den beiden Hälften verlangt, daß sie einerseits Hypercube-sortiert sind (induktiver Teil) und andererseits eine gegenseitige Größenordnungsrelation erfüllen, die in Abbildung 3.5 dargestellt ist. Dabei stellt in der Abbildung $x \longrightarrow y$ die Beziehung $x < y$ dar.

2. Sei für $k \geq 0$ die Menge $M_k := \{0, \dots, 2^k - 1\}$ definiert. Dann wird die k -**Hypercube-Ordnung** $<_{(k)}$ mit Hilfe der Dualdarstellung definiert durch:

- $k=0$: Die Menge M_0 ist einelementig und gilt als $<_{(k)}$ -geordnet.
- $k \geq 1$: Für $a_j, b_j \in \{0, 1\}$ $0 \leq j \leq (k-2)$ gilt:
 - Es gelten $(0, a_{k-2}, \dots, a_0)_2 <_{(k)} (0, b_{k-2}, \dots, b_0)_2$ und $(1, a_{k-2}, \dots, a_0)_2 <_{(k)} (1, b_{k-2}, \dots, b_0)_2$ genau dann, wenn $(a_{k-2}, \dots, a_0)_2 <_{(k-1)} (b_{k-2}, \dots, b_0)_2$ gilt.
 - $(0, a_{k-2}, \dots, a_0)_2 <_{(k)} (1, a_{k-2}, \dots, a_0)_2$.

3. Mit der vorigen Definition der k -Hypercube-Ordnung kann noch eine äquivalente Definition für den ersten Punkt dieser Definition gegeben werden:

Ein Vektor $[h(0), h(1), \dots, h(2^k - 1)]$ der Länge 2^k genügt der k -Hypercube-Ordnung bzgl. einer totalen Ordnung $<$, wenn für alle $x, y \in M_k$ gilt:

$$x <_{(k)} y \quad \Rightarrow \quad h(x) < h(y)$$

Bevor der Satz über die Stufenordnung im δ -Baum formuliert und bewiesen wird, soll zuerst bildlich vor Augen geführt werden, was eine Hypercube-Ordnung ist. Daran kann man sehen, wie der Name zustande kommt.

Man stelle sich die Ordnungen graphisch vor, indem die Knoten als Elemente und Pfeile als Ordnungsrelationen aufgefaßt werden.

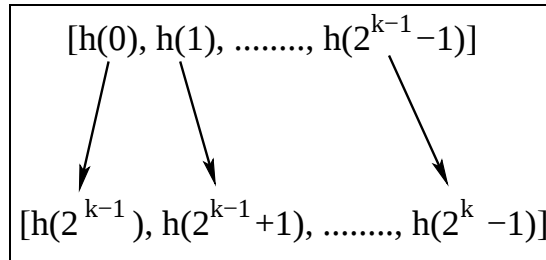


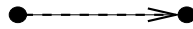
Abbildung 3.5: Relationen zwischen den Teilvektoren bei der Hypercube-Ordnung.

$k=0$:



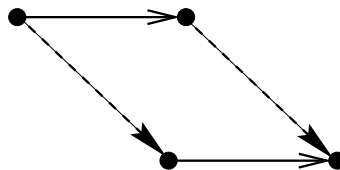
$k=1$:

Man nimmt zwei 0-Hypercube-Ordnungen und verbindet die Elemente an den entsprechenden Stellen durch einen Ordnungspfeil:



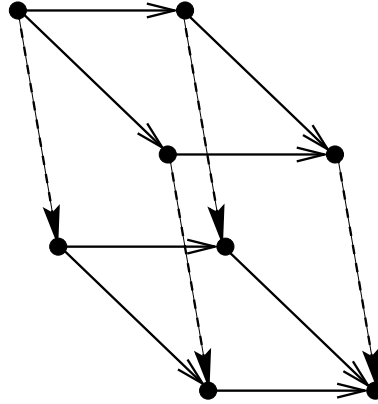
$k=2$:

Wieder nimmt man zwei 1-Hypercube-Ordnungen und verbindet die entsprechenden Stellen mit einem Ordnungspfeil (wobei die „neuen“ Pfeile gestrichelt gezeichnet sind), jedoch so, daß alle Pfeile von der einen 2-Hypercube-Ordnung ausgehen und in die andere hineinführen:



$k=3$:

Analoge Vorgehensweise wie bei $k=2$:



Für den Fall $k = 4$ wird dies in gelabelter Form weiter unten vorgeführt.

Bemerkung:

Man sieht an den schon vorgestellten Ordnungen für $k = 0, \dots, 3$, daß die Hypercube-Ordnung auf den Kanten eines k -dimensionalen Würfels - in der Informatik als Hypercube vom Grad k bezeichnet - entlang läuft. Die Richtung der Pfeile verläuft dabei grob über die Hauptdiagonale zwischen zwei gegenüberliegenden Punkten und überträgt sich auf die Diagonalen der enthaltenen kleinerdimensionalen Hypercubes.

Zur genaueren Definition und Verwendung des Hypercubes in der Informatik vgl. bei Leighton [Leigh]. U.a. sei auch auf die dort dargestellte, zwar andersartige, aber ähnliche rekursive Konstruktion des k -dimensionalen Hypercubes aus zwei $(k - 1)$ -dimensionalen Hypercubes hingewiesen.

Aus der Definition der Hypercube-Ordnung und Lemma 3.2 ahnt man schon längst den folgenden Satz:

Satz 3.1 (δ -Baum-Teilbaum-Stufen sind Hypercube-geordnet : $\bar{a}$)

Gegeben sei der δ -Baum T einer normierten, nicht ausgearteten Baumrekursion und ein beliebiger Teilbaum T_s mit Wurzel $s \in \mathbb{N}$. Numeriert man die Stellen der k -ten Stufe von T_s von links nach rechts mit 0 bis $2^k - 1$ durch und bezeichnet die Labels an diesen Stellen mit $h(0)$ bis $h(2^k - 1)$, so genügt $[h(0), \dots, h(2^k - 1)]$ der k -Hypercube-Ordnung.

Für $s := 1$ bezieht sich diese Aussage natürlich auch auf den ganzen δ -Baum.

Bemerkung:

Vgl. Leighton [Leigh]: Dort wird analog zur hier gewählten Methode die Einbettung der k -ten Stufe eines binären Baumes in einen k -dimensionalen Hypercube beschrieben. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß die Einbettung zur hier gewählten nur ähnlich ist, da die Eckenzuordnungen beider Definitionen abweichen.

Beweis:

Folgt direkt aus Lemma 3.2. ■

Nun soll dies einmal bildlich für die vierte Stufe vor Augen geführt werden. Dies wird in den Abbildungen 3.6 und 3.7 vorgestellt. Dabei wird die in Abbildung 3.6 dargestellte vierte Stufe in Abbildung 3.7 gewissermaßen in die 4-Hypercube-Ordnung eingebettet. Wenn man nur die Indices stehen ließe (also den $h(\dots)$ -Teil jeweils wegläßt), erhält man die 4-Hypercube-Ordnung „in reiner Form“.

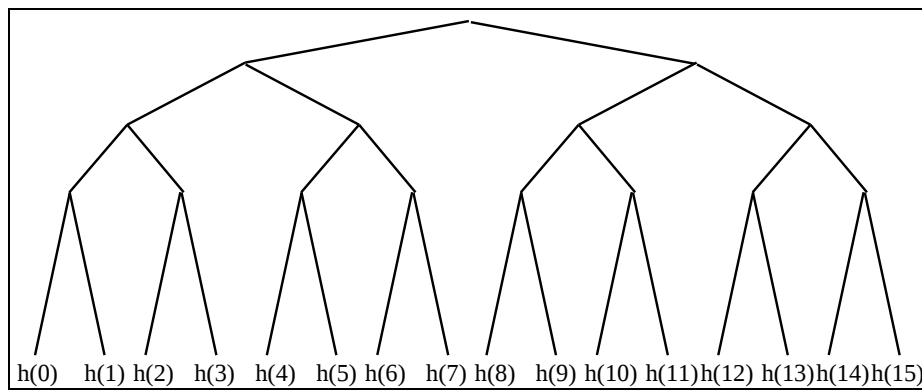


Abbildung 3.6: Bezeichnung der Labels der 4. Stufe

Wenn man sich Teil-Hypercubes in Abbildung 3.7 ansieht, kann man diese bestimmten Unterstrukturen der vierten Stufe in Abbildung 3.6 zuordnen. Ebenso kann man natürlich Teile der Baumstruktur in dem Hypercube wiederfinden. Es ist für das Verständnis der Ordnung hilfreich, dies z.B. bei einigen „Rautenstrukturen“ bzw. Teilbäumen zu versuchen.

Es ist nun bewiesen worden, daß in allen δ -Bäumen normierter, nicht ausgearbeiteter Baumrekursionen die Stufen einer Hypercube-Ordnung genügen. Das heißt natürlich **nicht**, daß in jedem Einzelfall (d.h. jeder speziellen Stufe) nicht noch weitere Ordnungsrelationen auftreten, denn in jeder Stufe eines einzelnen δ -Baumes sind die Stufen natürlich vollständig geordnet, d.h. zwischen je zwei Labels besteht eine $<$ - oder eine $>$ -Beziehung, während die Hypercube-Ordnung nur Relationen zwischen speziellen Stellen (über die Indices) zuläßt. Der Satz sagt

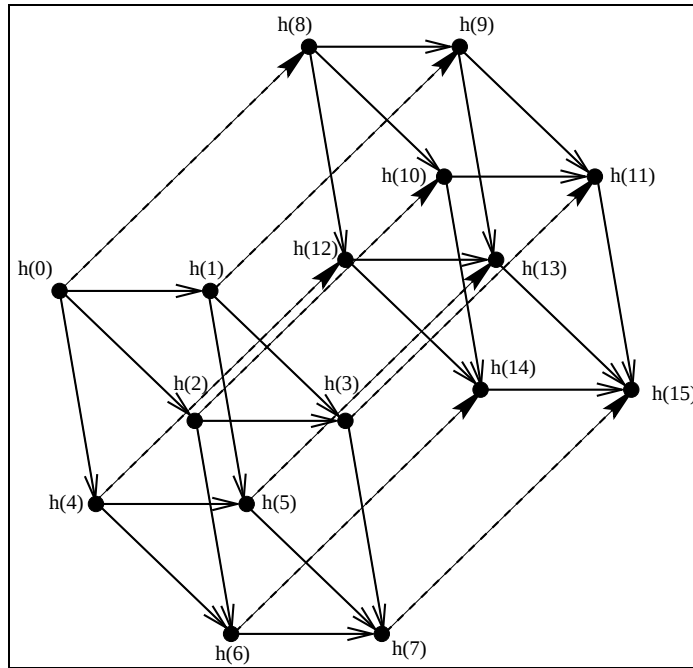


Abbildung 3.7: Hypercube-Ordnung der 4. Stufe

nur, daß dabei in jedem Fall die übertragenen Hypercube-Relationen auftreten.

Man stellt sich natürlich die Frage, ob die Hypercube-Ordnung die allgemeinste „Index“-Ordnung der Stufen von δ -Bäumen ist, d.h. ob es noch weitere, nicht in der Hypercube-Ordnung enthaltene Index-Ordnungsrelationen gibt, die sich „global“ auf beliebige Stufen von δ -Baum-Teilbäumen übertragen. Diese Frage beantwortet der folgende Satz.

Satz 3.2 (Hypercube-Ordnung ist allgemeinste Stufenordnung : $\bar{a}$)

Die Hypercube-Ordnung ist die allgemeinste „Index“-Ordnung der Stufen des δ -Baumes normierter, nicht ausgearteter Baumrekursionen, d.h. es gibt unter diesen Voraussetzungen keine zusätzlichen Ordnungsbeziehungen auf den Indices, die die entsprechenden Ordnungsbeziehungen global für alle Stufen von δ -Bäumen normierter, nicht ausgearteter Baumrekursionen nach sich ziehen.

Mit anderen Worten: Wenn man annimmt, es gäbe Indices $x, y \in M_j$, die Ordnungsbeziehungen $h(x) < h(y)$ für alle j -ten Stufen normierter, nicht ausgearteter nach sich ziehen, so gilt entweder die j -Hypercube-Ordnungs-Beziehung $x <_{(j)} y$ oder es gibt einen Teilbaum eines δ -Baumes einer normierten, nicht ausgearteten Baumrekursion, in dessen j -ter Stufe die Relation $h(x) < h(y)$ nicht gilt.

Kurz gesagt: Eine potentielle allgemeine Ordnungsbeziehung der Stufen genügt entweder der Hypercube-Ordnung oder sie ist falsch in dem Sinne, daß ein Gegenbeispiel existiert.

Beweis:

(bis Seite 68) Der Beweis dieses Satzes ist recht kompliziert, da jede mögliche zusätzliche Ordnungsrelation ausgeschlossen werden muß. Er wird in vier Schritten geführt:

1. Für Indices wird in Dualdarstellung eine Charakterisierung gegeben, die für zwei Indices sofort erkennen läßt, ob zwischen ihnen eine Hypercube-Ordnungsbeziehung besteht oder nicht.
2. Es wird eine Klasse von nicht ausgearteten Baumrekursionen betrachtet, die für einen Widerspruchs-Beweis ausreicht. Hierfür wird zuerst gezeigt, daß sich jede spezielle $(k-1)$ -Ordnungsbeziehung zu vier speziellen, damit zusammenhängenden k -Ordnungsbeziehungen „heben“ läßt. (**„Spezielle Hebungsregel“**)
3. In dieser Klasse wird damit gezeigt, daß sich jede global übertragbare Indexbeziehung von allen k -ten Stufen global auf alle $(k-1)$ -ten Stufen „senken“ läßt. (**„Allgemeine Senkungsregel“**)
4. Eine potentiell global übertragbare Nicht-Hypercube-Indexbeziehung gilt natürlich auch für die betrachtete Klasse. Hier wird sie (mehrfach) „abgesenkt“ und zu einem Widerspruch geführt.

1.) Behauptung 1:

Seien M_k und $<_{(k)}$ wie in der Definition der k -Hypercube-Ordnung eingeführt. Dann gilt für $a_i, b_i \in \{0, 1\}$, $0 \leq i \leq k-1$:

$$(a_{k-1}, \dots, a_0) <_{(k)} (b_{k-1}, \dots, b_0) \Leftrightarrow (\forall i \ a_i \leq b_i, \exists i \ a_i < b_i)$$

Beweis:

Beweis über Induktion nach k :

$k=1$:

Es gibt nur eine Ordnungsbeziehung: $(0) <_{(1)} (1)$. Mit $0 < 1$ folgt die Behauptung.

$k \rightarrow k+1$:

„ $\Rightarrow$ “:

Sei $(a_k, \dots, a_0) <_{(k+1)} (b_k, \dots, b_0)$.

Es werden hier nur die Ordnungsbeziehungen untersucht, die direkt aus der Definition 3.1 hervorgehen. Die Aussagen für die anderen Beziehungen ergeben sich aus Transitivitätsgründen. Dies gilt auch für die Existenzforderung.

Wenn man dies berücksichtigt, bleiben bei der $(k+1)$ -ten Hypercube-Ordnung genau zwei Möglichkeiten, wie $(a_k, \dots, a_0) <_{(k+1)} (b_k, \dots, b_0)$ zustande kommen kann (vgl. Definition 3.1, Teil 2):

1. $a_k = 0, b_k = 1, a_i = b_i \quad 0 \leq i \leq k-1$. Damit folgt die Behauptung.
2. $a_k = b_k$ und $(a_{k-1}, \dots, a_0) <_{(k)} (b_{k-1}, \dots, b_0)$. Nach Induktion gilt für diese k -Hypercube-Ordnungsbeziehung: $a_i \leq b_i \quad 0 \leq i \leq k-1, \exists i \ a_i < b_i$. Mit $a_k = b_k$ (s.o.) folgt die Behauptung.

„ $\Leftarrow$ “:

Sei $a_i \leq b_i \quad 0 \leq i \leq k, \exists i \ a_i < b_i$. Es gibt zwei Fälle:

Im ersten Fall (a) ist $\forall i < k \ a_i = b_i$ und $a_k < b_k$. Dann gilt nach Definition 3.1, Teil 2 $(a_k, \dots, a_0) <_{(k+1)} (b_k, \dots, b_0)$.

Im anderen Fall (b) gibt es ein $i < k$ mit $a_i < b_i$. Dann gilt nach Induktion die Beziehung $(a_{k-1}, \dots, a_0) <_{(k)} (b_{k-1}, \dots, b_0)$. Nun müssen noch zwei Fälle unterschieden werden:

- (b.1) Ist $a_k = b_k$, so folgt die Behauptung direkt aus der Definition 3.1.
- (b.2) Ist $a_k < b_k$, so gilt nach (a) $(a_k, b_{k-1}, b_{k-2}, \dots, b_0) <_{(k+1)} (b_k, b_{k-1}, b_{k-2}, \dots, b_0)$ und nach (b.1) gilt $(a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_0) <_{(k+1)} (a_k, b_{k-1}, b_{k-2}, \dots, b_0)$. Zusammengenommen folgt die Behauptung (Transitivität!). ■

2.) Nun wird vor der Fortführung des Beweises die benötigte Klasse von nicht ausgearteten Baumrekursionen eingeführt. Es handelt sich um stufentreue Abstiegsfunktionen, die aber in ihrer Gesamtheit noch zu allgemein sind. Es wird eine Teilklasse der Baumrekursionen mit stufentreuen Abstiegsfunktionen betrachtet, die als (A, B) -stufentreue Baumrekursionen bezeichnet werden sollen.

Stufentreue, normierte Baumrekursionen können nach Lemma 2.7 äquivalent zur Definition der Stufentreue definiert werden über den 0-1-Code, der aus einer Hintereinandersetzung fairer, normierter Abschnitte der Länge 2^n besteht. Es werden aber nicht alle stufentreuen Baumrekursionen betrachtet, sondern nur solche, die durch Abschnitte zweier Typen definiert werden. Der erste Typ ist der A -Typ, der die Form $[(0, 1)^{2^{n-1}}]$ hat, während der sogenannte B -Typ Abschnitte der Form $[0^{2^{n-1}}, 1^{2^{n-1}}]$ besitzt. Durch den 0-1-Code $0, 1, A, A, A, A, A, A, A, A, \dots$ wird die Abstiegsfunktion aus den Teilen 1 und 2 in Beispiel 2.9 definiert, d.h. die einfachste periodische, nicht ausgeartete Abstiegsfunktion mit 0-1-Code $0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$. Dagegen definiert der 0-1-Code $0, 1, B, B, B, B, B, B, \dots$ die Abstiegsfunktion der Heaprekursion (vgl. Beispiel 2.9, Teil 2).

Zuerst soll nun an einem **Beispiel** verständlich gemacht werden, wie solche Baumrekursionen zu vollständigen Ordnungen der Stellen der Stufe ihres δ -Baumes führen. Dazu nimmt man eine beliebige Labelung einer dritten Stufe eines (A, B) -stufentreuen δ -Baumes her, nummeriert die Stellen von links nach rechts von 0 bis $2^3 - 1$ durch und schaut sich an, was die beiden Abschnitte für eine Ordnung der vierten Stufe aus der Ordnung der dritten Stufe generieren.

Dazu überlegt man sich zuerst, wie die A - und B -Abschnitte aus der dritten Stufe die vierte Stufe erzeugen. Dies liefert die rekursive Konstruktion des δ -Baumes (Satz 2.4). Der A -Abschnitt setzt -nach der Größe der Labels der dritten Stufe geordnet- nacheinander an jedes Label einen linken Sohn und sofort danach einen rechten Sohn, während der B -Abschnitt erst alle linken Labels einsetzt und dann erst die rechten Labels.

Bevor dies benutzt wird, wird zuerst die in Abbildung 3.8 als Beispiel vorgestellte dritte Stufe $[h_0(0), \dots, h_0(7)]$ eines stufentreuen δ -Baumes betrachtet. Dort wird auch die sich dadurch ergebende vollständige Ordnung erzeugt, die sich als lineare Liste (Anordnung untereinander nach wachsender Größe) darstellen läßt. Dabei wird für die Indices ($(h = h_0)$ -Argumente) auch hier die Dualzahldarstellung gewählt, wobei das zweite Klammerpaar und die Basiszahl fortgelassen werden, d.h. z.B. anstatt $h((0, 0, 1)_2)$ kurz $h(0, 0, 1)$ geschrieben wird.

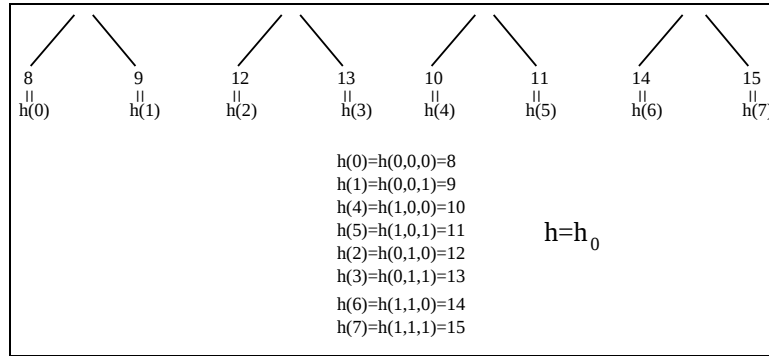


Abbildung 3.8: Beispiel einer linearen Ordnung der dritten Stufe

Nun wird in Abbildung 3.9 die Reihenfolge der vierten Stufe $[h_A(0), \dots, h_A(15)]$ betrachtet, die aus dieser Stufe durch Anwenden des passenden **A-Abschnitts** gebildet wird.

Diese Ordnung entsteht, wenn man die Ordnung der dritten Stufe betrachtet und nacheinander in der Dualdarstellung jedes Indexes (Argument von h_0) dieser

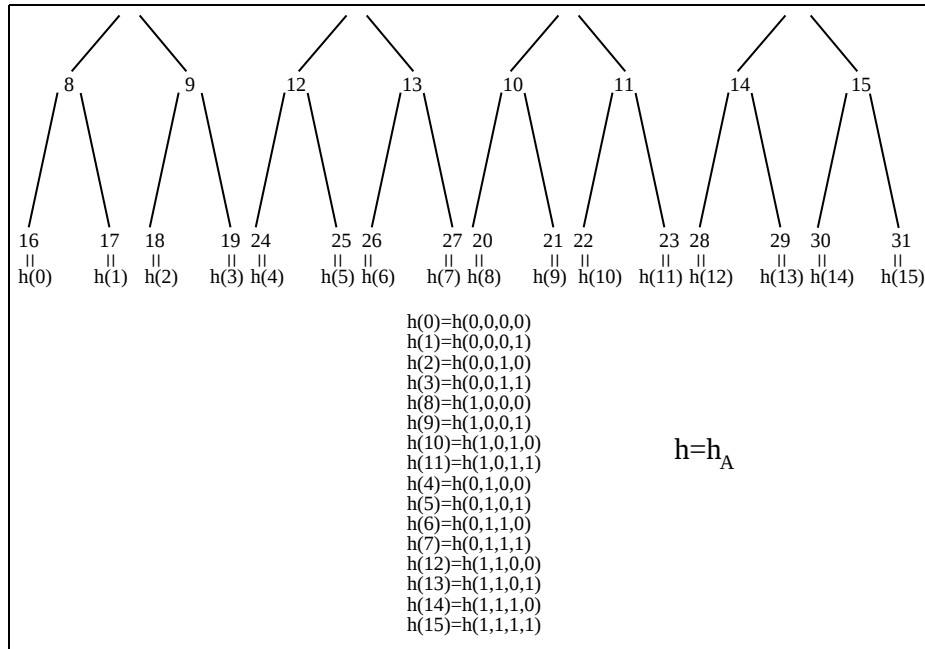


Abbildung 3.9: Entwicklung aus der Situation in Abbildung 3.8 durch A-Abschnitt

Ordnung eine 0 und sofort danach eine 1 als letzte Stelle hinzufügt. Man kann sich leicht überlegen, daß diese Tatsache unabhängig vom konkreten Beispiel und von der gewählten Stufe ist. Nun macht man noch die selben Betrachtungen für den Fall, daß die vierte Stufe $[h_B(0), \dots, h_B(15)]$ über den **B-Abschnitt** gebildet wird, gezeigt in Abbildung 3.10.

In diesem Fall erzeugt man die Ordnung der vierten Stufe, in dem man alle Argumente der h_0 -Terme der dritten Stufe zuerst erweitert um eine 0 in der letzten Dualstelle nimmt und anschließend diesen Vorgang mit den um eine 1 als neue letzte Dualstelle erweiterten h_0 -Termen der dritten Stufe wiederholt. Auch dies ist unabhängig von dem gewählten Beispiel und der betrachteten Stufe.

Nun kann die k -te Stufe zu einem festen $k \geq 1$ betrachtet werden. Dabei bildet auf diese Weise jeder δ -Baum, der über eine (A, B) -Folge gebildet wurde, eine vollständige Ordnung der Dualzahlen von 0 bis $2^k - 1$, die mit jeweils k Dual-Stellen geschrieben werden.

Nun soll eine Hilfsaussage gezeigt werden, die auf den weiteren Weg des Beweises fortführt.

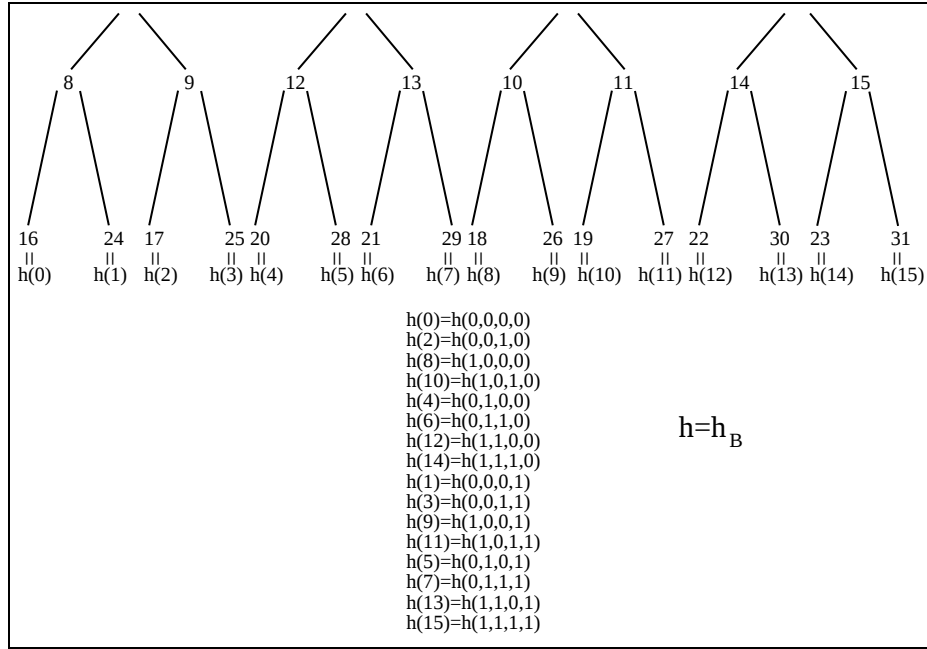


Abbildung 3.10: Entwicklung aus der Situation in Abbildung 3.8 durch B-Abschnitt

Behauptung 2: „Spezielle Hebungsregel“

Gilt für eine $(k-1)$ -te Stufe $[h_1(0), \dots, h_1(2^{k-1}-1)]$ eines Teilbaumes des δ -Baumes einer (A,B) -stufentreuen Baumrekursion $h_1(a_{k-1}, \dots, a_1) > h_1(b_{k-1}, \dots, b_1)$, so gibt es jeweils für beliebige, aber feste Kombinationen $a_0, b_0 \in \{0, 1\}$ einen Teilbaum des δ -Baumes einer (A,B) -stufentreuen Baumrekursion, in dessen k -ter Stufe $[h_2(0), \dots, h_2(2^k-1)]$ gilt: $h_2(a_{k-1}, \dots, a_0) > h_2(b_{k-1}, \dots, b_0)$.

Man kann diese Aussage mit einer Schablonen-/Template-Technik leicht visualisieren. Benutzt wird dazu die in Abbildung 3.11 dargestellte Schablone. Diese kann auf alle Teilbäume von δ -Bäumen (A,B) -stufentreuer Baumrekursionen gelegt werden, wobei dann die dahinterliegenden Labels sichtbar werden. Die Aussage lautet dann: Kann man die Schablone an **irgendeinen** der o.g. Teilbäume so anlegen, daß die auf der Schablone als Voraussetzung bezeichnete (beispielhafte!) Ordnungsbeziehung (für die sichtbar werdenden Labels) gilt, so gibt es **irgendeinen** (o.B.d.A. auch identischen) der o.g. Teilbäume, der die als Behauptung gekennzeichneten Beziehungen erfüllt (d.h. die sichtbar werdenden Labels erfüllen die geforderten Beziehungen). Eine irgendwo geltende Beziehung zwischen zwei Knoten überträgt sich also irgendwo (entsprechend) auf alle jeweiligen Söhne.

Beweis:

Sei $h_1(a_{k-1}, \dots, a_1) > h_1(b_{k-1}, \dots, b_1)$ in einer $(k-1)$ -ten Stufe $[h_1(0), \dots,$

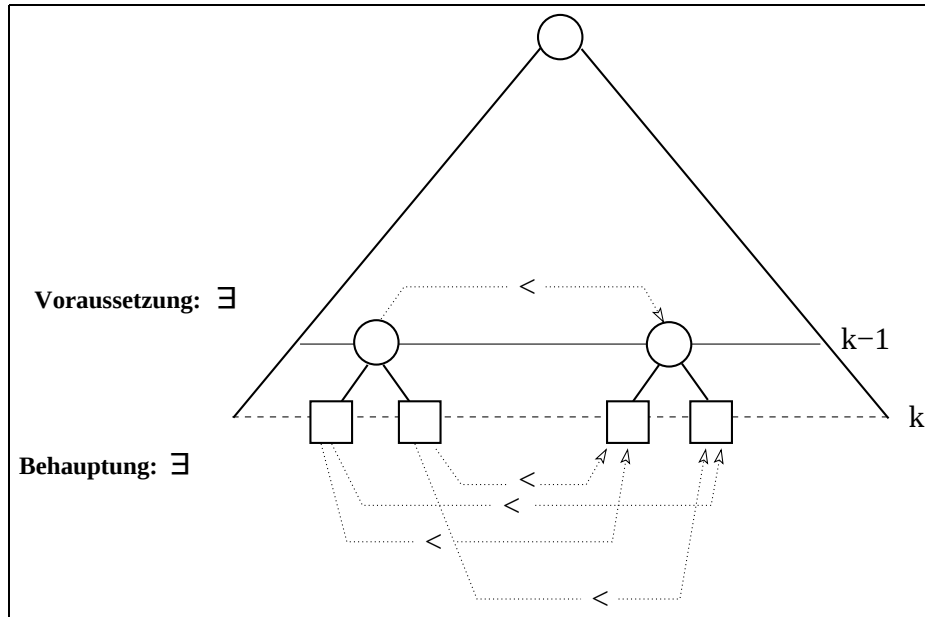


Abbildung 3.11: Schablone zur speziellen Hebungsregel.

$h_1(2^{k-1} - 1)]$ eines Teilbaumes des δ -Baumes mit Wurzel in der l -ten Stufe des δ -Baumes, wobei der δ -Baum gemäß einer (A,B)-stufentreuen Baumrekursion gebildet wurde.

Bilde einen neuen δ -Baum durch den 0-1-Code einer stufentreuen Abstiegsfunktion, die bis zum $(k + l - 1)$ -ten Abschnitt mit dem 0-1-Code zu $<$ übereinstimmt (d.h. an den entsprechenden Stellen die gleichen A- und B-Abschnitte besitzt) und als $(k + l)$ -ten Abschnitt ein **A** besitzt. Wie vorhin gezeigt wurde, kann man die vollständige Ordnung für die neue k -te Stufe $[h_2(0), \dots, h_2(2^{k-1} - 1)]$ des entsprechenden Teilbaumes aus der Ordnung der $(k - 1)$ -ten Stufe $[h_1(0), \dots, h_1(2^{k-1} - 1)]$ des betrachteten Teilbaumes bilden.² Unter den gegebenen Voraussetzungen erhält man:

$$h_2(a_{k-1}, \dots, a_1, 1) > h_2(a_{k-1}, \dots, a_1, 0) > h_2(b_{k-1}, \dots, b_1, 1) > h_2(b_{k-1}, \dots, b_1, 0)$$

Dann sind alle in der Behauptung geforderten Ordnungsbeziehungen vorhanden. ■

3.) Diese Behauptung wird sogleich zum Beweis einer weiteren benutzt, die ein wesentliches Stück weiterführt.

²Dies gilt deswegen, weil die k -te Stufe des entsprechenden Teilbaumes enthalten ist in der $(k + l)$ -ten Stufe des δ -Baumes.

Behauptung 3: „(A,B)-allgemeine Senkungsregel“

Gilt zu fest gewählten $a_j, b_j \in \{0, 1\}$ $0 \leq j \leq (k-1)$ mit $\exists j \ 1 \leq j \leq k-1 \ a_j \neq b_j$ die Ordnungsbeziehung $h(a_{k-1}, \dots, a_0) < h(b_{k-1}, \dots, b_0)$ für alle k -ten Stufen von Teilbäumen von beliebigen δ -Bäumen von (A,B)-stufentreuen Baumrekursionen, so folgt $h(a_{k-1}, \dots, a_1) < h(b_{k-1}, \dots, b_1)$ für alle $(k-1)$ -ten Stufen von Teilbäumen von beliebigen δ -Bäumen von (A,B)-stufentreuen Baumrekursionen.

Auch diese Aussage läßt sich (beispielhaft!) mit einer Schablonen-Technik visualisieren. Benutzt wird diesmal die in Abbildung 3.12 dargestellte Schablone, die sich wie in Abbildung 3.13 an jeden Teilbaum eines δ -Baumes einer (A,B)-stufentreuer Baumrekursionen anlegen läßt. Die Aussage besagt nun, daß in dem Fall, daß für **alle** o.g. Teilbäume die als Voraussetzung bezeichnete Ordnungsbeziehung gilt, die als Behauptung bezeichnete Ordnungsbeziehung ebenfalls für **alle** o.g. Teilbäume gilt. Es gilt also eine zwischen zwei Knoten aller betrachteten Teilbäume geltende Ordnungsbeziehung ebenfalls (entsprechend) für die jeweiligen Väter aller betrachteten Teilbäume!

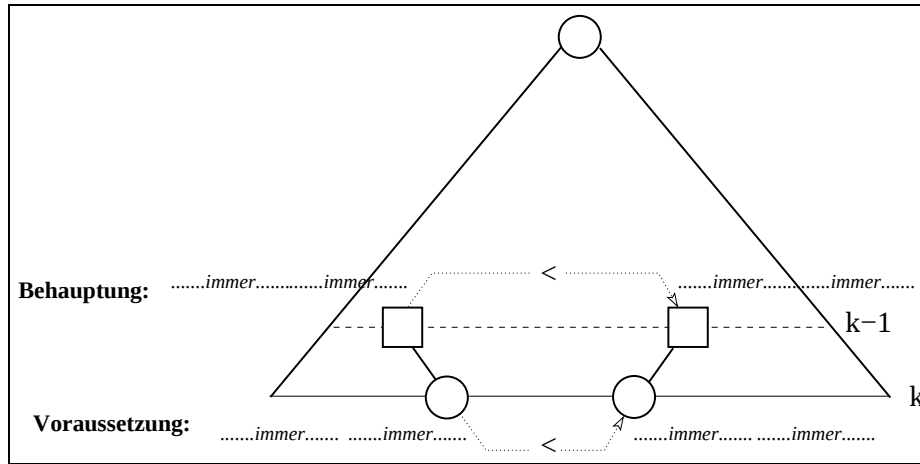


Abbildung 3.12: Schablone zur allgemeinen Senkungsregel.

Beweis:

Es wird angenommen, daß unter der Voraussetzung in einem bestimmten Fall die Behauptung nicht gelte. Dies läßt zwei Möglichkeiten zu (Gleichheit kann nicht auftreten, da alle Labels eines δ -Baumes paarweise verschieden sind.):

- $h(a_{k-1}, \dots, a_1) > h(b_{k-1}, \dots, b_1)$ gilt für alle $(k-1)$ -ten Stufen von Teilbäumen von beliebigen δ -Bäumen von (A,B)-stufentreuen Baumrekursionen.

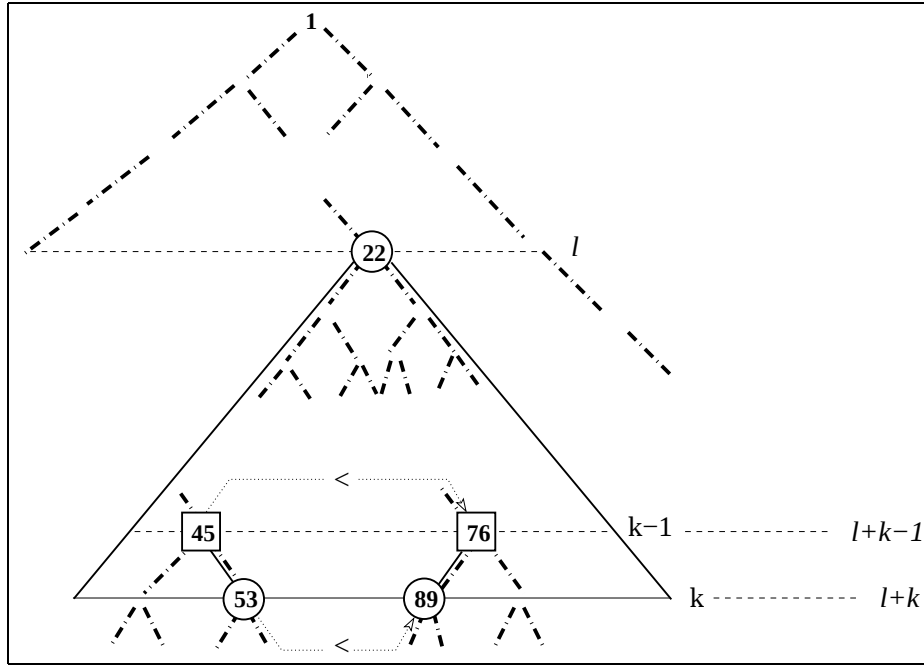


Abbildung 3.13: Anlegen der Schablone zur allgemeinen Senkungsregel an einen Teilbaum.

- Es gibt zwei verschiedene $(k - 1)$ -te Stufen von Teilbäumen von δ -Bäumen (A,B)-stufentreuer Baumrekursionen mit $h(a_{k-1}, \dots, a_1) < h(b_{k-1}, \dots, b_1)$ im einen und $h(a_{k-1}, \dots, a_1) > h(b_{k-1}, \dots, b_1)$ im anderen Fall.

In beiden Fällen gibt es dann eine (A,B)-stufentreue Baumrekursion, die in der $(k - 1)$ -ten Stufe eines Teilbaumes des zugehörigen δ -Baumes $h(a_{k-1}, \dots, a_1) > h(b_{k-1}, \dots, b_1)$ erfüllt. Nach Behauptung 2 gibt es dann eine (A,B)-stufentreue Baumrekursion, die in der k -ten Stufe eines Teilbaumes des δ -Baumes die Relation $h(a_{k-1}, \dots, a_0) > h(b_{k-1}, \dots, b_0)$ erfüllt. Damit gilt aber keinesfalls $h(a_{k-1}, \dots, a_0) < h(b_{k-1}, \dots, b_0)$ für alle k -ten Stufen von Teilbäumen von beliebigen δ -Bäumen von (A,B)-stufentreuen Baumrekursionen. Dies ist also ein Widerspruch zur Voraussetzung und es folgt die Richtigkeit der Behauptung. ■

4.) Sei nun zum Beweis des Satzes angenommen, es gäbe Stufenstellen $a = (a_{k-1}, \dots, a_0)$ und $b = (b_{k-1}, \dots, b_0)$ der k -ten Stufe, die *nicht* die Hypercube-

Ordnungsbeziehung $(a_{k-1}, \dots, a_0) <_{(k)} (b_{k-1}, \dots, b_0)$ erfüllen, aber trotzdem $h(a_{k-1}, \dots, a_0) < h(b_{k-1}, \dots, b_0)$ für alle k -ten Stufen von Teilbäumen von beliebigen δ -Bäumen von normierten, nicht ausgearteten Baumrekursionen gilt. Nach Behauptung 1 folgt nun, da alle Labels in jedem δ -Baum grundsätzlich verschieden sind, daß es ein i mit $0 \leq i \leq k-1$ gibt mit $a_i > b_i$ (denn sonst würde die Ordnungsbeziehung aus der Hypercube-Ordnung folgen). Die Behauptung gilt für alle normierten, nicht ausgearteten Baumrekursionen, also gilt sie auch für alle (A,B)-stufentreuen Baumrekursionen. Es gilt also $h(a_{k-1}, \dots, a_0) < h(b_{k-1}, \dots, b_0)$ für alle k -ten Stufen von Teilbäumen von beliebigen δ -Bäumen von (A,B)-stufentreuen Baumrekursionen.

Auch hier gilt für das oben existierende i $a_i > b_i$ und damit natürlich $a_i = 1$, $b_i = 0$. Falls es mehrere solche i 's gibt, wähle fest das **kleinste**. Nun wendet man mehrfach die „(A,B)-allgemeine Senkungsregel“ an, bis die i -te Koordinate der Dualdarstellung zur letzten Koordinate geworden ist (d.h. man streicht solange die letzten Stellen weg ohne Änderung der Ordnungsbeziehung). Dann gilt

$$h(a_{k-1}, \dots, a_{i+1}, 1) < h(b_{k-1}, \dots, b_{i+1}, 0) \quad (3.1)$$

für alle $(k-i)$ -ten Stufen von Teilbäumen von δ -Bäumen beliebiger (A,B)-stufentreuer Baumrekursionen.

Um den gewünschten Widerspruch zu erzeugen, bräuchte man nur eine (A,B)-Ordnung zu finden, in der diese Beziehung nicht gelten kann. Die gesuchte Ordnung hat den 0-1-Code $0, 1, B, B, B, \dots$. Hier werden immer zuerst die linken Söhne eingefügt und diese haben als Stufenstellen-Bezeichnung in der Dualdarstellung als letzten Eintrag eine 0. Erst nachdem diese linken Söhne alle eingefügt sind, werden die rechten Söhne eingefügt, die als letzten Eintrag in der Dualdarstellung ihrer Stufenstellen-Bezeichnung eine 1 besitzen. Damit gilt hier immer:

$$h(a_{k-1}, \dots, a_{i+1}, 1) > h(b_{k-1}, \dots, b_{i+1}, 0)$$

Dies darf aber nicht gelten, wenn (3.1) „(A,B)-global“ erfüllt sein soll.

Wenn die angenommene Ordnung somit noch nicht einmal für alle δ -Bäume gemäß einer (A,B)-stufentreuen Baumrekursion gilt, kann sie folglich auch nicht noch allgemeiner für alle nicht ausgearteten Baumrekursionen gelten. Die Annahme, es gäbe eine allgemeine Ordnungsbeziehung der k -ten Stufe, die nicht aus Hypercube-Ordnung folgt, ist somit zum Widerspruch geführt. Also ist die Hypercube-Ordnung die allgemeinste Stufenordnung. ■

In diesem Abschnitt ist gezeigt worden, daß der δ -Baum, insbesondere auf den einzelnen Stufen, eine recht starke Ordnungsstruktur der Labels aufweist. Diese

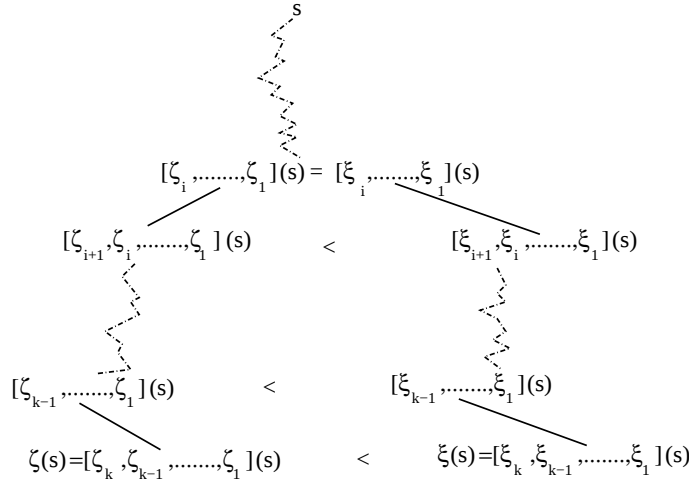
Ordnung der Labels wird in vielen Fällen eine wichtige Hilfe sein, insbesondere um Konvergenzaussagen zu ermöglichen. Dazu muß man sich aber erst einmal überzeugen, daß sich die Ordnungsrelationen im Falle der hier gewählten Randwerte auf die Werte der Quotientenfolge übertragen. Dies wird als ein Lemma formuliert:

Lemma 3.3 ($\bar{a}$)

Sei T_s der Teilbaum mit Wurzel s von T , dem δ -Baum einer nicht-ausgearteten, normierten Baumrekursion. Seien $\zeta := [\zeta_k, \dots, \zeta_1]$ und $\xi := [\xi_k, \dots, \xi_1]$ zwei Verkettungen der Rechts- und Linksfunktion. Dann sind $\zeta(s)$ und $\xi(s)$ Labels der k -ten Stufe von T_s . Unter diesen Voraussetzungen folgt aus einer Ordnungsbeziehung $\zeta(s) < \xi(s)$ gemäß der Hypercube-Ordnung für die Quotientenfolgenwerte (vgl. Definition 2.8) $Q_{\zeta(s)} > Q_{\xi(s)}$.

Beweis:

Man kann dies dadurch sehen, daß eine Hypercube-Relation auf der k -ten Stufe sich auf die „Väter“ in der $(k-1)$ -ten Stufe usw. überträgt. Dies kann man sich leicht an einem Bild klarmachen:



Die jeweiligen Vorgängerlabels besitzen die gleiche Relation wie $\zeta(s)$ und $\xi(s)$. Da im hier betrachteten Fall die Quotienten der Randwerte $\Delta c_n = \frac{n}{n-1}$ ($n \geq 2$) streng monoton fallen, dreht sich hierbei die Relation genau um (d.h. aus $<$ wird $>$). Die Quotientenfolge an den entsprechenden Stellen ist das Produkt der Randwerte auf dem gezeigten Wege:

$$Q_{\zeta(s)} = \Delta_{c_{[\zeta_k, \dots, \zeta_1](s)}} \cdot \Delta_{c_{[\zeta_{k-1}, \dots, \zeta_1](s)}} \cdots \Delta_{c_{\zeta_1(s)}} \cdot Q_s$$

Da $\Delta_{c_{\zeta(s)}} = \Delta_{c_{[\zeta_k, \dots, \zeta_1](s)}} < \Delta_{c_{[\xi_k, \dots, \xi_1](s)}} = \Delta_{c_{\xi(s)}}$ ist und für alle $j \geq 1$ $\Delta_{c_{[\zeta_j, \dots, \zeta_1](s)}} \leq \Delta_{c_{[\xi_j, \dots, \xi_1](s)}}$ ist, folgt die Behauptung. ■

3.2 Pseudo-Invertierung

Fundamentale Typen von Abstiegsfunktionen bei Baumrekursionen sind stufentreue und periodische Abstiegsfunktionen. Beide werden in den folgenden Kapiteln regelmäßig benutzt. Immer wieder werden dabei die Pseudo-Inversen benötigt und zwar meist in der Form von Abschätzungen. In diesem Abschnitt werden deshalb (soweit dies möglich ist) Sätze über die Pseudo-Inversen von periodischen und stufentreuen Baumrekursionen und deren Abschätzungen hergeleitet.

Hierbei werden ausschließlich normierte Abstiegsfunktionen betrachtet. Dies ist, wie in einer Bemerkung auf Seite 21 ausgeführt wurde, im allgemeinen keine große Einschränkung. Sie sind jedoch sehr nützlich, weil dann die Linksfunktion mit der Pseudoinversen der größeren Abstiegsfunktion (d.h. mit β^{-1}) und die Rechtsfunktion mit der Pseudo-Inversen der kleineren Abstiegsfunktion (d.h. mit α^{-1}) identifiziert werden kann. Dies wurde schon in Lemma 2.6 hergeleitet und wird im folgenden nicht mehr sonderlich hervorgehoben.

Eine weitere Einschränkung ist die ausschließliche Betrachtung von nicht ausgearteten Abstiegsfunktionen. Diese Einschränkung ist aber nur unwesentlich, da alle stufentreuen und fast alle periodischen (bis auf die mit ausschließlich Nullen im 0-1-Code) Abstiegsfunktionen nicht ausgeartet sind.

3.2.1 nicht ausgeartete, periodische Abstiegsfunktionen

Begonnen wird mit den nicht ausgearteten, periodischen Abstiegsfunktionen. In diesem Falle ist die Angabe der Pseudo-Inversen all dieser Funktionen für jede Stelle möglich. Um dies zu beweisen, muß man zuerst einige Notationen einführen.

Periodische Abstiegsfunktionen werden über den 0-1-Code definiert, der aus einer unendlichen Wiederholung eines endlichen $\{0, 1\}$ -Wortes besteht. Sei p_0 die Anzahl der Nullen im definierenden Wort, p_1 die Anzahl der Einsen und $p = p_0 + p_1$ die Periodenlänge.

Über das normierte $\{0, 1\}$ -Wort w werden mit $\alpha := \text{period}[w]$ natürlich beide Abstiegsfunktionen (vgl. z.B. Beispiel 2.7 auf Seite 36) und beide Aufstiegsfunktionen $\lambda = \beta^{-1}$ und $\rho = \alpha^{-1}$ definiert. Der 0-1-Code $\bar{\beta}$ von β geht aus dem 0-1-Code $\bar{\alpha}$ von α durch jeweiliges Umtauschen jeder 0 in eine 1 und jeder 1 in eine 0 hervor (vgl. Lemma 2.2). Man kann die Sprungstellen von β somit auch im 0-1-Code von α erkennen: es sind genau die Stellen mit dem Wert $\bar{\alpha}(n) = 0$. Darum werden die folgenden Betrachtungen auf das $\{0, 1\}$ -Wort w beschränkt.

Bemerkung:

Da nur nicht ausgeartete Fälle betrachtet werden, ist stets $p_0 \geq 1$ und $p_1 \geq 1$.

Weiter sei die folgende Notation eingeführt, wobei die Stellen im definierenden Wort bzw. Vektor mit 1 bis p numeriert werden:

$0_k :=$ Stelle, an der die k -te Null im definierenden 0-1-Wort steht

$1_k :=$ Stelle, an der die k -te Eins im definierenden 0-1-Wort steht

Beispiel 3.2

Sei $\alpha := \text{period}([0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1])$. Dann ist $p = 9$, $p_0 = 5$, $p_1 = 4$ sowie:

$$0_3 = 4, \quad 1_2 = 5, \quad 1_3 = 8, \dots$$

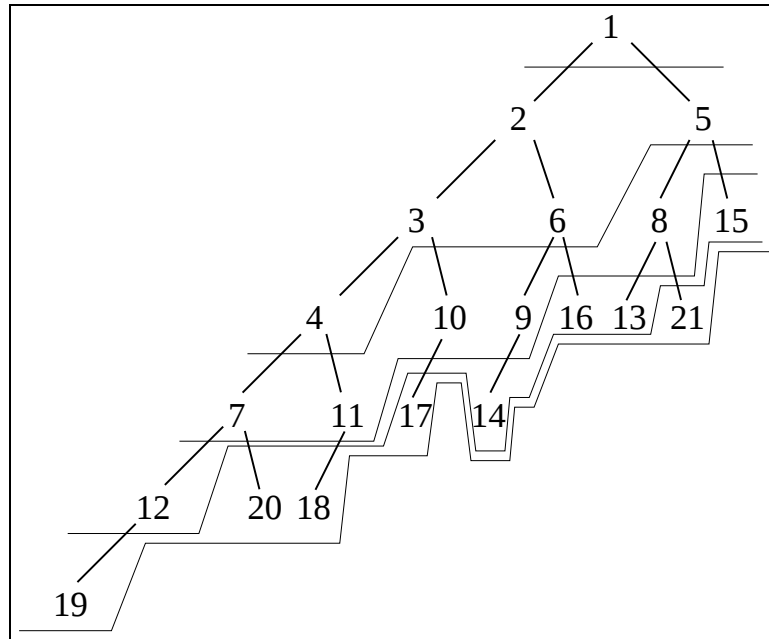
Nun soll an einem Beispiel betrachtet werden, wie sich der δ -Baum einer periodischen Baumrekursion entwickelt.

Beispiel 3.3

Sei $\alpha := \text{period}([0, 0, 0, 1, 1])$. Es wird der Anfang des δ -Baumes in Abbildung 3.14 betrachtet.

Dabei stellen die Querlinien den jeweiligen Zustand nach vollständigem Durchlauf einer Periode dar. Hiermit kann man sich veranschaulichen, wie der erneute Durchlauf des immer wieder wiederholten Wortes des 0-1-Codes eine „neue Schicht“ an den bisherigen Baum hinzufügt.

*Was macht man, wenn man in dieser Situation z.B. $\rho(9)$ wissen will? Es handelt sich dabei einerseits um den rechten Sohn der 9, wenn man die Knoten mit den Labels identifiziert. Andererseits ist es aber das 9-te **rechte** Label, das in den δ -Baum eingefügt wird. Bisher ist es nur möglich, die Abbildung zur Hilfe zu nehmen und den δ -Baum - bei dem Label 21 beginnend - zu ergänzen. Man*

Abbildung 3.14: δ -Baum einer periodischen Baumrekursion.

kann nun von Hand den Baum weiter aufbauen gemäß dem 0-1-Code-Abschnitt $[0, 0, 0, 1]$:

22, 23 und 24 werden jeweils links an 13, 14 und 15 angefügt und dann die 25 rechts an die 8 angehängt. Man fragt sich hier natürlich, ob das nicht auch leichter geht. Diese Frage wird jetzt behandelt.

Wenn man mit *div* die ganzzahlige Division und mit *mod* die Berechnung des ganzzahligen Rests bezeichnet, gilt der folgende Satz:

Satz 3.3 (Invertierung periodischer Abstiegsfunktionen : $\bar{a}p$)

Unter den o.g. Voraussetzungen gilt:

$$\lambda(n) = p \cdot ((n-1) \text{ div } p_0) + 1 + 0_{((n-1) \text{ mod } p_0)+1}$$

$$\rho(n) = p \cdot ((n-1) \text{ div } p_1) + 1 + 1_{((n-1) \text{ mod } p_1)+1}$$

Der Satz behauptet also, daß für die Berechnung der beiden Pseudo-Inversen wesentlich nur die Länge des definierenden Wortes und die Zahl der darin enthaltenen Nullen und Einsen benötigt wird, während die genaue Gestalt des Wortes

nur für ein kleines „Restglied “ benötigt wird.

Beweis:

(bis Seite 77)

Sei eine nicht ausgeartete, periodische Baumrekursion gegeben. Dann gilt:

Behauptung 1:

$\alpha(n) = \sum_{k=2}^n \bar{\alpha}(k)$ für alle $k \geq 1$, wobei $\bar{\alpha}(k)$ den 0-1-Code an der Stelle k bezeichnet.

Beweis:

Ergibt sich direkt aus der Definition des 0-1-Codes. ■

Behauptung 2:

$\alpha(k \cdot p + 1) = k \cdot p_1$, $\beta(k \cdot p + 1) = k \cdot p_0$ für alle $k \geq 0$.

Beweis:

Der definierende Vektor der periodischen Abstiegsfunktion hat p Einträge. An der Stelle 1 wird noch kein Eintrag dieses Vektors gelesen, an der Stelle 2 einer,....., an der Stelle $p + 1$ sind alle Einträge einmal gelesen worden,....., an der Stelle $k \cdot p + 1$ sind alle Einträge k -mal gelesen worden. Deswegen gilt:

$$\alpha(k \cdot p + 1) = \text{Anzahl der gelesenen Einsen, wenn der Vektor } k\text{-mal gelesen wird} = p_1 \cdot k$$

$$\beta(k \cdot p + 1) = k \cdot p + 1 - 1 - \alpha(k \cdot p + 1) = k \cdot p - k \cdot p_1 = k \cdot (p - p_1) = k \cdot p_0 \quad \blacksquare$$

Behauptung 3:

$\alpha(k \cdot p + 1 + r) = k \cdot p_1 + \#_1(r)$, $\beta(k \cdot p + 1 + r) = k \cdot p_0 + \#_0(r)$ für alle $k \geq 0$, wobei $0 \leq r \leq p - 1$ und

$\#_0(r) := \text{Anzahl der Nullen im Vektor bis zur } r\text{-ten Stelle}$, $\#_0(0) := 0$ und $\#_1(r)$ entsprechend gesetzt wird.

Beweis:

Da der Vektor an der Stelle $k \cdot p + 1$ gerade ganz durchlaufen ist, werden von hier aus bis zur Stelle $k \cdot p + 1 + r$ die ersten r Elemente angesehen. Deshalb gilt mit Beh. 1 und Beh. 2:

$$\begin{aligned} \alpha(k \cdot p + 1 + r) &= \alpha(k \cdot p + 1) + \sum_{j=1}^r \bar{\alpha}(k \cdot p + 1 + j) \\ &= k \cdot p_1 + \#_1(r) \end{aligned}$$

Wegen $\#_0(r) = r - \#_1(r)$ und $p = p_1 + p_0$ gilt:

$$\begin{aligned}\beta(k \cdot p + 1 + r) &= k \cdot p + r + 1 - 1 - \alpha(k \cdot p + 1 + r) \\ &= k \cdot p + r - k \cdot p_1 - \#_1(r) \\ &= k \cdot p_0 + \#_0(r)\end{aligned}$$

■

Die folgenden Aussagen werden nur noch für λ bzw. β^{-1} gezeigt. Die Aussage des Satzes bedeutet für λ und $n = k \cdot p_0 + s$, $1 \leq s \leq p_0$:

$$\lambda(k \cdot p_0 + s) = p \cdot k + 1 + 0_s$$

Definiere darum für $1 \leq s \leq p_0$:

$$f(k \cdot p_0 + s) = p \cdot k + 1 + 0_s$$

Behauptung 4:

Für $n = k \cdot p_0 + s$, $1 \leq s \leq p_0$, $k \geq 0$ ist $\beta(f(n)) = n$.

Beweis:

1. Fall: s sei so gewählt, daß $0_s \leq p - 1$ ist:

$$\begin{aligned}\beta(f(n)) &= \beta(p \cdot k + 1 + 0_s) \\ &\stackrel{\text{Beh. 3, } 1 \leq 0_s \leq p-1}{=} p_0 \cdot k + \#_0(0_s) \\ &= p_0 \cdot k + (\text{Anzahl der Nullen im Vektor bis zur Stelle, an der die } s\text{-te Null steht}) \\ &= p_0 \cdot k + s = n\end{aligned}$$

2. Fall: s sei so gewählt, daß $0_s = p$ ist:

Da es nur p_0 Nullen im Vektor gibt, folgt aus $0_s = p$, daß $s = p_0$ ist. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\beta(f(n)) &= \beta(p \cdot k + 1 + p) \\
&= \beta(p \cdot (k + 1) + 1) \\
&= p_0 \cdot (k + 1) \\
&= p_0 \cdot k + s = n
\end{aligned}$$

■

Nun ist bewiesen, daß die Umkehrung in der einen Richtung funktioniert. Damit es sich aber um die Pseudo-Inverse handelt, muß $f(n)$ eine Sprungstelle von β sein. Dies sagt die folgende Behauptung.

Behauptung 5:

$\beta(f(n) - 1) = \beta(f(n)) - 1$ für alle $n \geq 1$.

Beweis:

n wird wieder wie in der vorigen Behauptung gewählt. Dann existiert nur noch ein Fall, da hier $0 \leq 0_s - 1 \leq p - 1$ gilt.

$$\begin{aligned}
\beta(f(n) - 1) &= \beta(p \cdot k + 1 + 0_s - 1) \\
&= p_0 \cdot k + \#_0(0_s - 1) \\
&= p_0 \cdot k + (\text{Anzahl der Nullen im Vektor bis zur Stelle vor der Stelle, an der die } s\text{-te Null steht}) \\
&= p_0 \cdot k + s - 1 = \beta(f(n)) - 1
\end{aligned}$$

■

Nun wird die Inversitäts-Eigenschaft auch in der anderen Richtung gezeigt. Da hier nur eine Pseudo-Inverse vorliegt, brauchen nur Sprungstellen betrachtet zu werden. Zur Vorbereitung dient die folgende Behauptung.

Behauptung 6:

Sei $n \geq 2$ eine Sprungstelle von β . Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $n = f(m)$.

Beweis:

Da $n > 1$ ist, hat n die Darstellung $n = k \cdot p + 1 + r$, $0 \leq r \leq p - 1$, $k \geq 0$. Es gibt zwei Fälle:

1. Fall: $r \geq 1$:

n Sprungstelle $\Rightarrow \beta(n) \stackrel{!}{=} \beta(n - 1) + 1$. Es gilt nach Beh. 2:

$$\begin{aligned} \beta(n) &= \beta(k \cdot p + 1 + r) \\ &= k \cdot p_0 + \#_0(r) \\ &\stackrel{!}{=} \beta(n - 1) + 1 \\ &\stackrel{r \geq 1}{=} k \cdot p_0 + \#_0(r - 1) + 1 \end{aligned}$$

Es muß also gelten: $\#_0(r) = \#_0(r - 1) + 1$. Für $s := \#_0(r)$ gilt: $(*) \quad 0_s = r$, weil bei n eine Sprungstelle vorliegt.³ Ansonsten würde nur $0_s \leq r$ folgen. Setze $m := k \cdot p_0 + s$. Dann gilt:

$$f(m) \stackrel{\text{Def } f}{=} p \cdot k + 1 + 0_s \stackrel{(*)}{=} p \cdot k + 1 + r = n$$

2. Fall: $r = 0$. Wegen $n > 1$ ist $k \geq 1$ ($n = k \cdot p + 1$). Analog zu Fall 1 muß gelten:

$$\begin{aligned} \beta(n) &\stackrel{\text{Beh. 2}}{=} k \cdot p_0 \\ &\stackrel{!}{=} \beta(n - 1) + 1 \\ &= \beta((k - 1)p + 1 + (p - 1)) + 1 \\ &\stackrel{\text{Beh. 3}}{=} (k - 1)p_0 + \#_0(p - 1) + 1 \end{aligned}$$

Also muß gelten: $\#_0(p - 1) = p_0 - 1$. Da insgesamt nur p_0 Nullen existieren, folgt daraus $\#_0(p) = p_0 \Rightarrow 0_{p_0} = p \quad (**)$.

Setze nun $m := k \cdot p_0$. Dann gilt:

$$f(k \cdot p_0) = f((k - 1)p_0 + p_0) \stackrel{\text{Def } f}{=} (k - 1)p + 1 + 0_{p_0} \stackrel{(**)}{=} (k - 1)p + 1 + p = n$$

■

³Nullen (im 0-1-Code von α) geben Sprungstellen von β an!

Mit Hilfe dieser Behauptung kann der Beweis mit der folgenden Behauptung vollendet werden:

Behauptung 7:

Ist $n \geq 1$ eine Sprungstelle von β , so gilt $f(\beta(n)) = n$.

Beweis:

Sei $n \geq 1$ eine Sprungstelle von β . Dann hat nach Beh. 6 n die Darstellung $n = f(m)$ für ein $m \geq 0$. Damit gilt:

$$f(\beta(n)) = f(\beta(f(m))) \stackrel{\text{Beh. 4}}{=} f(m) = n$$

■

Somit ist f Pseudo-Inverse von β . Da α als normiert vorausgesetzt war, ist $\lambda = \beta^{-1} = f$.

Die Aussage für $\rho = \alpha^{-1}$ ist vollkommen analog zu zeigen. ■

Beispiel 3.4

Nun kann mit Hilfe des gerade bewiesenen Satzes die in Beispiel 3.3 offen gebliebene Frage nach einer einfacheren Berechnung von $\rho(9)$ im Falle der Baumrekursion mit $\alpha := \text{period}([0, 0, 0, 1, 1])$ und dem in Abbildung 3.14 dargestellten Anfang des δ -Baumes beantwortet werden.

Nach dem Satz ist $(p = 5, n - 1 = 8, p_1 = 2)$:

$$\rho(9) = 5 \cdot (8 \text{ div } 2) + 1 + 1_{(8 \bmod 2)+1} = 5 \cdot 4 + 1 + 1_1 = 21 + 4 = 25$$

Man beachte dabei für die „Berechnung“ von 1_1 , daß die erste 1 in $[0, 0, 0, 1, 1]$ an der vierten Stelle steht.

Der Satz 3.3 ist für allgemeine Betrachtungen viel zu speziell, da die genaue Gestalt des definierenden Vektors in die Aussage eingeht. Deswegen wird zuerst ein Satz hergeleitet, der eine möglichst scharfe Abschätzung liefert, in die nur noch p , p_0 und p_1 eingehen.

Satz 3.4 (Abschätzung von Aufstiegsfunktionen/period. Fall : $\bar{a}p$)

$$\frac{p}{p_0}(n-1) - p + 2 \leq \lambda(n) \leq \frac{p}{p_0}(n-1) + p + 1$$

$$\frac{p}{p_1}(n-1) - p + 2 \leq \rho(n) \leq \frac{p}{p_1}(n-1) + p + 1$$

Beweis:

Um den in beiden Fällen analogen Beweisgang zu vereinfachen, wird definiert und eingeführt:

$$i \in \{0, 1\}, f \in \{\lambda, \rho\} : \quad f = \lambda \Leftrightarrow i = 0, \quad f = \rho \Leftrightarrow i = 1$$

Mit Satz 3.3 erhält man damit:

$$\begin{aligned} f(n) &= p((n-1)\operatorname{div} p_i) + 1 + i_{((n-1)\operatorname{mod} p_i)+1} \\ &= p\left(\frac{n-1}{p_i} - \frac{(n-1)\operatorname{mod} p_i}{p_i}\right) + 1 + i_{((n-1)\operatorname{mod} p_i)+1} \end{aligned}$$

Mit den folgenden Abschätzungen folgt direkt die Behauptung:

(1):

$$(n-1)\operatorname{mod} p_i < p_i \Rightarrow -\frac{(n-1)\operatorname{mod} p_i}{p_i} > -1$$

$$(n-1)\operatorname{mod} p_i \geq 0 \Rightarrow -\frac{(n-1)\operatorname{mod} p_i}{p_i} \leq 0$$

(2): $1 \leq i_{((n-1)\operatorname{mod} p_i)+1} \leq p$ ■

Um eine Abschätzung von $\lambda^k(n)$ und $\rho^k(n)$ zu erhalten, hilft das folgende Lemma, das für eine Abbildung f von der hier benötigten Form eine Aussage über die Gestalt der k -ten Iterierten liefert.

Lemma 3.4

Ist $f(n) = a \cdot n + b$, so gilt für die k -te Iterierte von f :

$$f^k(n) = a^k \cdot n + b \cdot \frac{a^k - 1}{a - 1}$$

für $a \neq 1, a \neq 0, b \neq 0$.

Beweis:

Elementar mit vollständiger Induktion über k . ■

Nun benötigt man nur noch ein sehr einfaches Lemma, um die gewünschten Abschätzungen herzuleiten:

Lemma 3.5

Ist $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ isoton, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ isoton mit $f(n) \geq g(n)$ [bzw. $f(n) \leq g(n)$] für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt:

Für alle $k \geq 1$ ist $f^k(n) \geq g^k(n)$ [bzw. $f^k(n) \leq g^k(n)$] für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Induktion über k unter Benutzung der Isotonie von g^{k-1} auf $\mathbb{R}$, die sich leicht zeigen läßt. Das einzige Problem dieses Beweises ist, im Induktionsschritt zu vermeiden, daß f auf ein Bild von g angewandt wird, da f hierauf i.a. nicht definiert ist! ■

Mit den drei letzten Aussagen gilt der folgende Satz:

Satz 3.5 (Abschätzung iterierter Aufstiegsfunkt./period. Fall : $\bar{a}p$)

Es gelten unter den bisherigen Voraussetzungen die Abschätzungen:

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^k \left(n + \frac{2p_0 - p - p \cdot p_0}{p - p_0}\right) \leq \lambda^k(n) \leq \left(\frac{p}{p_0}\right)^k \left(n + \frac{p \cdot p_0 + p_0 - p}{p - p_0}\right)$$

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)^k \left(n + \frac{2p_1 - p - p \cdot p_1}{p - p_1}\right) \leq \rho^k(n) \leq \left(\frac{p}{p_1}\right)^k \left(n + \frac{p \cdot p_1 + p_1 - p}{p - p_1}\right)$$

Alle diese Abschätzungen sind auch reziprok gültig für $n \geq \left\lceil \frac{p \cdot p_0 + 3p}{p_1} \right\rceil$.

Bemerkung:

Sehr wichtig für die auf diesem Satz aufbauenden weiteren Abschätzungen ist die erhaltene Produktform, insbesondere aber die Trennung des Auftretens von n und k in zwei Terme. Ohne diese Eigenschaft wären die weiterführenden Abschätzungen auf dem hier beschrifteten, noch überschaubaren Wege nicht mehr möglich gewesen.

Beweis:

Der Beweis des Satzes ist durch Einsetzen von Satz 3.4 in Lemma 3.4 unter Benutzung von Lemma 3.5 zu führen. Dabei wird der Term ohne Faktor $\left(\frac{p}{p_i}\right)^k$ jeweils gegen 0 abgeschätzt.

Um die Abschätzungen reziprok verwenden zu können, müssen beide jeweiligen Seiten positiv sein. Die Schranke ergibt sich aus $n + \frac{p+p_i(p-2)}{p-p_i} \geq 2$, $i \in \{0, 1\}$, wobei eine weitere Sicherheitsschranke eingebaut wurde, um später den Wert auf der linken Seite noch um 1 verringern zu können. Es wird zum Beweis der Schranke $p_0 \geq p_i \geq p_1 \geq 1$ benutzt und für eine einfachere Form etwas stärker als notwendig abgeschätzt. ■

3.2.2 stufentreue Abstiegsfunktionen

Nun wird das gleiche Problem im Falle der stufentreuen Abstiegsfunktionen betrachtet. Hier gibt es einen wesentlichen Unterschied. Man kann eine genaue Umkehrung nur an bestimmten Stellen vornehmen, da **stufentreue** Abstiegsfunktionen **viel schwerer zu charakterisieren** sind. Dafür ist die Umkehrung an den genannten Stellen sehr einfach. Trotzdem wird es aber möglich sein, entsprechende Abschätzungen wie im periodischen Fall auch hier für jede Stelle herzuleiten.

Bevor ein erster Satz über die Aufstiegsfunktionen stufentreuer Baumrekursionen vorgestellt wird, soll zuerst an einem Beispiel das Aussehen der δ -Bäume stufentreuer Baumrekursionen vorgestellt werden.

Beispiel 3.5

In Abbildung 3.15 werden die δ -Baumanfänge zu zwei stufentreuen Baumrekursionen dargestellt, wobei der Zustand nach Durchlaufen des jeweiligen definierend 0-1-Code-Wortes der Länge 2^k durch einen dünnen Strich gekennzeichnet ist. Bei der Darstellung der 0-1-Codes werden diese Worte der Länge 2^k durch senkrechte Striche anstatt durch Kommata abgetrennt. Der obere δ -Baum gehört zur stufentreuen Baumrekursion mit Abstiegsfunktion

$$\bar{\alpha} = 0, 1|0, 0, 1, 1|0, 0, 1, 0, 0, 1, 1|0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1|$$

und der untere δ -Baum gehört zur stufentreuen Baumrekursion mit Abstiegsfunktion

$$\bar{\alpha} = 0, 1|0, 1, 0, 1|0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1|0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1|.$$

Es fällt nicht nur auf, daß eine neue Stufe erst begonnen wird, wenn die vor-

herige Stufe ganz gefüllt ist, sondern auch, daß die jeweiligen Werte ganz links und ganz rechts in den entsprechenden Stufen übereinstimmen. Dies besagt auch der folgende Satz.

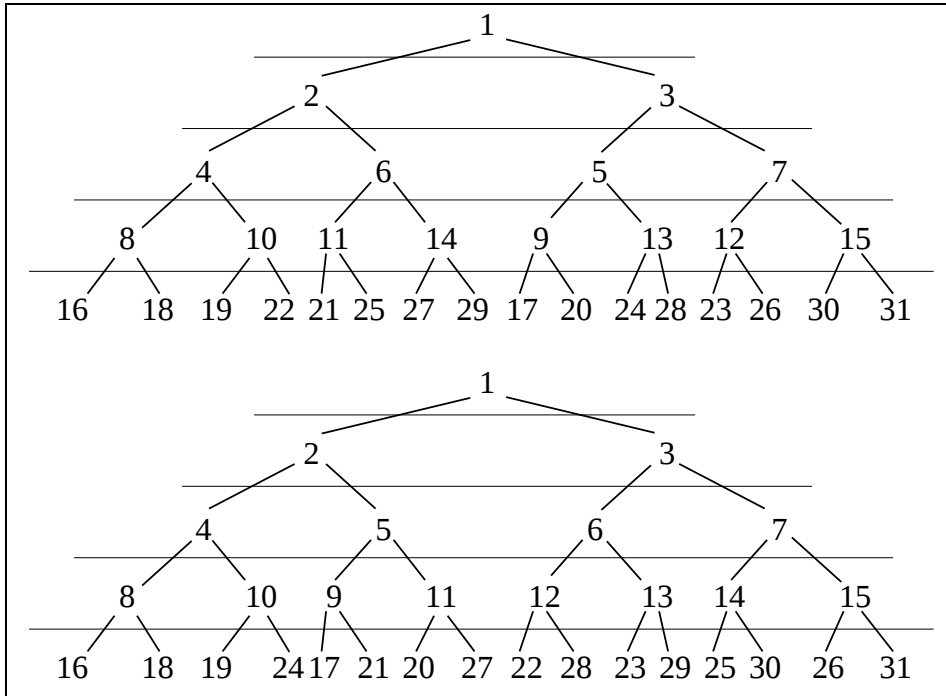


Abbildung 3.15: Zwei δ -Bäume von stufentreuen Baumrekursionen.

Satz 3.6 (Aufstiegsfunkt. am Rand des δ -Baumes/stufentr. Fall : s)

Für jede Baumrekursion mit normierter stufentreuer Abstiegsfunktion gelten die folgenden Aussagen:

1. Für $k \geq 0$ gilt:

$$\lambda(2^k) = 2^{k+1} \quad \rho(2^{k+1} - 1) = 2^{k+2} - 1$$

2. Für $k \geq 0$ gilt:

$$\lambda^k(1) = 2^k \quad \rho^k(1) = 2^{k+1} - 1$$

Beweis:

(bis Seite 83)

Die zweite Aussage folgt durch Induktion aus der ersten, so daß hier nur die erste Aussage gezeigt wird:

Es gilt nach der Definition für stufentreue Abstiegsfunktionen α (und β):

$$\alpha(2^k - 1) = 2^k - 2 - \alpha(2^k - 1) = \beta(2^k - 1)$$

Behauptung 1:

$\alpha(2^k - 1) = 2^{k-1} - 1$ für alle $k \geq 1$.

Beweis:

Einerseits gilt $\alpha(2^k - 1) + \beta(2^k - 1) = 2 \cdot \alpha(2^k - 1)$ und andererseits ist $\alpha(2^k - 1) + \beta(2^k - 1) = \alpha(2^k - 1) + 2^k - 2 - \alpha(2^k - 1) = 2^k - 2$. Durch Gleichsetzen und Auflösen folgt die Behauptung. ■

Behauptung 2:

$\bar{\alpha}(2^k - 1) = 1$ für alle $k \geq 2$.

Beweis:

Angenommen nicht, d.h. $\bar{\alpha}(2^k - 1) = 0$. Dann gilt $\alpha(2^k - 1) = \alpha(2^k - 2)$. Aus der Annahme folgt ebenfalls (genau eine Abstiegsfunktion steigt an!), daß $\bar{\beta}(2^k - 1) = 1$, was $\beta(2^k - 1) = \beta(2^k - 2) + 1$ bedeutet. Aus beidem folgt, daß gilt:⁴

$$\beta(2^k - 2) = \beta(2^k - 1) - 1 = \alpha(2^k - 1) - 1 = \alpha(2^k - 2) - 1$$

Damit ist aber $\beta(2^k - 2) < \alpha(2^k - 2)$, was ein Widerspruch zur Normiertheit von α ist. ■

Behauptung 3:

$\bar{\beta}(2^k) = 1$ für alle $k \geq 1$

Beweis:

Analog zum vorigen Beweis folgt aus der Widerspruchs-Annahme, daß $\beta(2^k) < \alpha(2^k)$, was wieder einen Widerspruch zur Normiertheit darstellt. ■

Behauptung 4:

$\beta(2^k) = 2^{k-1}$.

⁴Es ist zu beachten, daß bei allen stufentreuen Rekursionen $\alpha(2^k - 1) = \beta(2^k - 1)$ gilt (vgl. Definition 2.13).

Beweis:

Aus Beh 3. folgt (*) $\beta(2^k) = \beta(2^k - 1) + 1$. Damit gilt:

$$k = 1: \beta(2^1) \stackrel{(*)}{=} \beta(2^1 - 1) + 1 = \beta(1) + 1 = 0 + 1 = 1 = 2^0$$

$$k > 1: \beta(2^k) \stackrel{(*)}{=} \beta(2^k - 1) + 1 \stackrel{\text{Bew. zu Beh.1}}{=} (2^{k-1} - 1) + 1 = 2^{k-1} \quad \blacksquare$$

Behauptung 5:

$\lambda(2^k) = \beta^{-1}(2^k) = 2^{k+1}$ für $k \geq 0$ und $\rho(2^k - 1) = \alpha^{-1}(2^k - 1) = 2^{k+1} - 1$ für $k \geq 1$.

Beweis:

Umkehrung von Beh. 1 und Beh. 4. Diese sind erlaubt, da nach Beh. 2 und Beh. 3 an den entsprechenden Stellen Sprungstellen vorliegen. $\blacksquare$

Dies schließt den Beweis ab. $\blacksquare$

Der soeben bewiesene Satz hat weitreichende Konsequenzen für das Aussehen der Quotientenfolgen stufentreuer Baumrekursionen. Er besagt, wenn man die Aussagen im Abschnitt 3.1 zur Ordnung im δ -Baum betrachtet, daß die Quotientenfolgen aller stufentreuen Baumrekursionen Werte im gleichen Bereich („**Konvergenzkegel**“) haben und die Extremwerte übereinstimmen (für genauere Ausführungen vgl. im nächsten Abschnitt). Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird noch an weiteren Stellen herauskommen, daß stufentreue Baumrekursionen spezielle Eigenschaften besitzen, die sie auch nicht mit den periodischen Baumrekursionen gemeinsam haben.

Im Gegensatz zum periodischen Fall leitet man für den stufentreuen Fall die Abschätzungen nicht aus den exakten Angaben her, was hier auch nicht möglich ist, da die Umkehrung nur für bestimmte Stellen möglich war, aber die Abschätzungen überall gelten sollen. Im stufentreuen Fall sind ein paar allgemeinere Überlegung über den rekursiven Aufbau des δ -Baumes nötig, um den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 3.7 (Abschätzung iterierter Aufstiegsfunkt./stufentr. Fall : s)

Für jede normierte, stufentreue Rekursion gelten die folgenden Abschätzungen:

$$2^{k+j} + r \leq \lambda^j(2^k + r) \leq 2^{k+j} + 2^j \cdot r$$

$$2^{k+j} + 2^j(r + 1) - 1 \leq \rho^j(2^k + r) \leq 2^{k+j+1} - 2^k + r$$

Beweis:

(bis Seite 85)

Der Beweis wird mit vollständiger Induktion geführt.

Induktionsanfang: Zu zeigen ist:

$$2^{k+1} + r \leq \lambda(2^k + r) \leq 2^{k+1} + 2r$$

$$2^{k+1} + 2r + 1 \leq \rho(2^k + r) \leq 2^{k+1} + 2^k + r$$

Betrachte den rekursiven Aufbau des δ -Baumes. Das Label $2^k + r$ liegt in der k -ten, die Labels $\lambda(2^k + r)$ und $\rho(2^k + r)$ liegen in der $(k+1)$ -ten Stufe. Die Labels der $(k+1)$ -ten Stufe werden der Größe nach eingeführt (vgl. rekursiver Aufbau des δ -Baumes). Z.B. werden vor $\lambda(2^k + r)$ zuerst $\lambda(2^k)$, $\lambda(2^k + 1)$, $\dots$, $\lambda(2^k + r - 1)$ und eventuell noch einige Elemente von $\rho(2^k)$, $\rho(2^k + 1)$, $\dots$, $\rho(2^k + r - 1)$ eingefügt. Also gilt für die extremen Fälle:

1. Vor $\lambda(2^k + r)$ werden nur $\lambda(2^k)$, $\lambda(2^k + 1)$, $\dots$, $\lambda(2^k + r - 1)$ eingefügt (die rechts ansetzenden Elemente erst später). Dementsprechend gilt:

$$\lambda(2^k + r) \geq \underbrace{2^{k+1}}_{\text{erstes Element}} + \underbrace{r}_{r \text{ zusätzliche Elemente incl. } \lambda(2^k + r)}$$

2. Vor $\lambda(2^k + r)$ werden nicht nur die unter 1. genannten Labels, sondern auch die Labels $\rho(2^k)$, $\rho(2^k + 1)$, $\dots$, $\rho(2^k + r - 1)$ eingefügt. Hier gilt:

$$\lambda(2^k + r) \leq \underbrace{2^{k+1}}_{\text{erstes Element}} + \underbrace{r}_{r \text{ Links-Elemente}} + \underbrace{r}_{r \text{ Rechts-Elemente}} = 2^{k+1} + 2r$$

Nun das gleiche für die Rechtsfunktion. Auch hier gibt es zwei Extreme:

3. Vor $\rho(2^k + r)$ werden nur $\rho(2^k)$, $\rho(2^k + 1)$, $\dots$, $\rho(2^k + r - 1)$ und $\lambda(2^k)$, $\lambda(2^k + 1)$, $\dots$, $\lambda(2^k + r)$ eingefügt:⁵

$$\begin{aligned} \rho(2^k + r) &\geq \underbrace{2^{k+1}}_{\text{erstes Element } \lambda(2^k)} + \underbrace{r}_{r \text{ weitere Links-Elemente}} + \underbrace{r+1}_{r+1 \text{ Rechts-Elemente}} \\ &= 2^{k+1} + 2r + 1 \end{aligned}$$

4. Es werden insgesamt vor $\rho(2^k + r)$ alle links abzweigenden Labels $\lambda(2^k + i)$ für $0 \leq i \leq 2^{k+1} - 1$ eingefügt. Dann gilt:

$$\rho(2^k + r) \leq \underbrace{2^{k+1}}_{\text{erstes Element } \lambda(2^k)} + \underbrace{2^k - 1}_{2^k - 1 \text{ weitere Links-Elemente}} + \underbrace{r+1}_{r \text{ Rechts-Elemente}}$$

⁵n.b.: Es liegt hier eine normierte Abstiegsfunktion vor, d.h. vor jedem $\rho(2^k + j)$ wird auch das entsprechende $\lambda(2^k + j)$ eingefügt.

Das beweist den Induktionsanfang.

Induktionsschluß $j \rightarrow j+1$: Der erste Fall wird ausführlich vorgestellt⁶:

$$\begin{aligned}
 \lambda^{j+1}(2^k + r) &= \lambda^j(\lambda(2^k + r)) \\
 &\stackrel{\text{Ind. Anf.}}{\leq} \lambda^j(\overbrace{2^k + 1}^{k'} + \underbrace{2r}_{r'}) \\
 &\stackrel{\text{Ind. Vor.}}{\leq} \overbrace{2^k + 1}^{k'} + j + 2^j \cdot \underbrace{2r}_{r'} \\
 &= 2^{k+(j+1)} + 2^{j+1} \cdot r
 \end{aligned}$$

Die anderen Fälle in Kurzform (analog):

$$\lambda^{j+1}(2^k + r) \stackrel{\text{Ind. Anf.}}{\geq} \lambda^j(2^{k+1} + r) \stackrel{\text{Ind. Vor.}}{\geq} 2^{k+1+j} + r$$

$$\rho^{j+1}(2^k + r) \stackrel{\text{Ind. Anf.}}{\leq} \rho^j(2^{k+1} + 2^k + r) \stackrel{\text{Ind. Vor.}}{\leq} 2^{k+1+j+1} - 2^{k+1} + 2^k + r = 2^{k+(j+1)+1} - 2^k + r$$

$$\begin{aligned}
 \rho^{j+1}(2^k + r) &\stackrel{\text{Ind. Anf.}}{\geq} \rho^j(2^{k+1} + 2r + 1) \stackrel{\text{Ind. Vor.}}{\geq} 2^{k+1+j} + 2^j(2r + 1 + 1) - 1 \\
 &= 2^{k+(j+1)} + 2^{j+1}(r + 1) - 1
 \end{aligned}$$

■

Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind in dieser gehäuften Form von Invertierungen und Abschätzungen sicher nicht gerade angenehm zu lesen. Sie liefern dafür aber im späteren Verlauf der Arbeit die Möglichkeit, die Beweise etwas knapper und dadurch übersichtlicher zu gestalten, was die Lesbarkeit und Verständlichkeit erhöht. Sonst wären diese Beweise, die manchmal ebenfalls etwas „verquickt“ sind, kaum noch zu überblicken. Somit bestand die Notwendigkeit, diese gleichartigen Aussagen in diesem Kapitel zusammenzufassen.

⁶n.b.: die λ^k sind stets isoton (vgl. Folgerung 3.1).

3.3 Der Konvergenzkegel

Die Quotientenfolgen der in diesem Abschnitt betrachteten Baumrekursionen sind (unter den hier üblichen Randwerten) nicht konvergent und auch i.a. nicht strikt divergent (strikt divergent wird hier im Sinne „konvergent gegen ∞ “ angewandt). Es wechseln im Gegensatz dazu immer wieder unterschiedlich große Werte einander ab und es entsteht der Eindruck eines ständig wechselnden Auf- und Abschwingens. Weil die Größenamplitude des Bereiches, in dem die Folgenwerte liegen, gegen Unendlich größer wird, soll der Bereich, in dem die Paare $((n, Q_n))_{n \geq 0}$ liegen, als **Konvergenzkegel** bezeichnet werden. Der Konvergenzkegel wird über seinen oberen und unteren Rand begrenzt, wobei sich die Definition dieser *Randfolgen* etwas schwieriger gestaltet, da beide Ränder sich dem Folgenverlauf „gleitend“ anpassen sollen. Aus diesem Grund werden beide Randfolgen unterschiedlich definiert: Als Folge aufgefaßt soll der **untere Rand des Konvergenzkegels** definiert sein durch:

$$\left(\min_k \{ Q_k \mid k \geq n \} \right)_{n \geq 0}$$

Der **obere Rand des Konvergenzkegels** sei dagegen definiert durch:

$$\left(\max_k \{ Q_k \mid k \leq n \} \right)_{n \geq 0}$$

Abbildung 3.16 stellt den Rand des Konvergenzkegels am Beispiel der Quotientenfolge zur Baumrekursion zu $\alpha = \text{period}[0, 0, 1, 0, 1]$ dar.

Die Definition des oberen Randes ist problemlos, während beim unteren Rand eine Aussage zur Existenz des Minimums nötig wird: Da für die hier gewählte Randwertfolge stets $\Delta c_n \geq 1$ gilt, entsteht bei jedem Quotientenfolgen-Rekursionsschritt jedenfalls kein Folgenwert, der kleiner ist als der (frühere!) Folgenwert, aus dem er berechnet wird. Damit sind für die Minimum-Bildung jeweils nur endlich viele Folgenwerte maßgeblich, gegen die die verbleibenden unendlich vielen Werte nach unten abgeschätzt werden können.

Eine wesentliche Folgerung der Ordnung im δ -Baum (vgl. Abschnitt 3.1) ist, daß das kleinste Label jeder Stufe des δ -Baumes das am weitesten links stehende ist, während das am weitesten rechts stehende das größte Element der Stufe ist. Da sich bei den hier als n gewählten Randwerten die Größenordnungen umdrehen (d.h. es gilt $n_1 < n_2 \Rightarrow \frac{n_1}{n_1-1} > \frac{n_2}{n_2-1}$ wegen $\frac{n}{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{n}}$), gehört nach Lemma

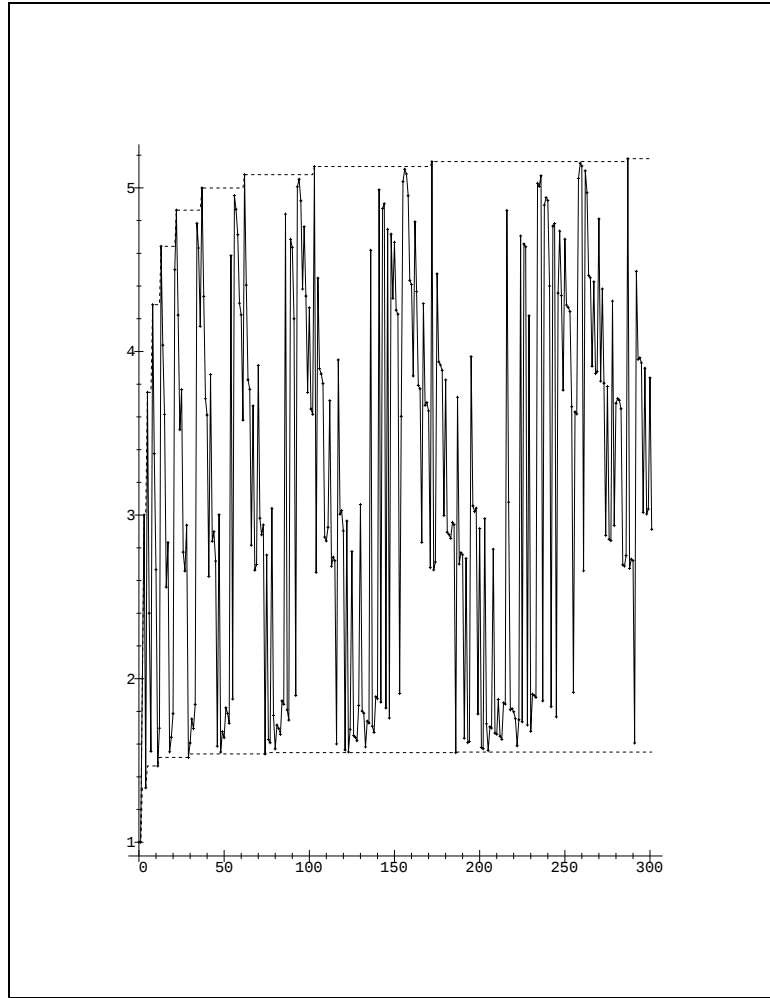


Abbildung 3.16: Rand des Konvergenzkegels.

3.3 der kleinste Quotientenfolgenwert zu den Labels jeder Stufe zu dem am weitesten rechts stehenden Label und der größte Quotientenfolgenwert zu dem am weitesten links stehenden Label. Mit dieser Vorbemerkung folgt direkt, daß für den oberen und unteren Rand des Konvergenzkegels nur die Quotientenfolgenwerte zu den Labels der „Ränder“ der Stufen des δ -Baumes betrachtet werden müssen.

Für die Bestimmung des **oberen** Randes zählt das Maximum aller bisherigen Quotientenfolgenwerte. Aus Satz 2.4 folgt, daß als erstes Label jeder Stufe das am weitesten links stehende Label eingeführt wird und zu diesem Label gehört der maximale Quotientenfolgenwert „dieser Stufe“, d.h. jeder vorkommende Quotientenfolgenwert wird durch einen (gleichzeitig oder) früher vorkommenden Quotientenfolgenwert zu dem am weitesten links stehenden Label „seiner Stufe“ an

Größe übertroffen.

Bei dem **unteren** Rand des Konvergenzkegels zählen genau umgekehrt nur die Quotientenfolgenwerte zu den am weitesten rechts stehenden Labels jeder Stufe. Wie schon gesehen, sind diese unter allen Quotientenfolgenwerten derselben Stufe minimal. Die dazu gehörenden Labels werden aber auch als letzte Labels ihrer Stufe in den δ -Baum eingefügt. Darum gibt es zu jedem Quotientenfolgenwert (der nicht zu einem in einer Stufe ganz rechts stehenden Label gehört) einen später vorkommenden kleineren Quotientenfolgenwert, der zu dem am weitesten rechts stehenden Label der gleichen Stufe gehört.

Hier soll ausschließlich der Konvergenzkegel von Baumrekursionen untersucht werden. Es wird mit ein paar einfachen, allgemeinen Betrachtungen begonnen:

Lemma 3.6

Die Quotientenfolge (Q_n) von normierten Baumrekursionen mit Randwerten $A_0 = 1$, $c_n = n$, $n \geq 1$ wächst maximal linear.

Bemerkung:

Die gerade genannten Rand- und Anfangsbedingungen sollen, wie schon gesagt, in folgenden allgemein gelten und werden nicht mehr gesondert erwähnt.

Beweis:

(von Lemma 3.6)

Dies ist leicht zu sehen, da aus $\alpha(n) \geq 0$ $\beta(n) \leq n - 1$ folgt, was $\beta^{-1}(n) \geq n + 1$ zur Folge hat.⁷ Die Teilfolge mit den maximalen Werten ist (wie am Anfang des Abschnittes erläutert) die zu den am weitesten links stehenden Elementen jeder Stufe, d.h. zu $(\beta^{-k}(1))_{k \geq 1}$. Aus dem vorigen folgt $\beta^{-k}(1) \geq k + 1$ und damit $\Delta c_{\beta^{-k}(1)} \leq \frac{k+1}{k}$. Somit gilt:

$$Q_{\beta^{-m}(1)} = \prod_{k=1}^m \Delta c_{\beta^{-k}(1)} \leq \prod_{k=1}^m \frac{k+1}{k} = m + 1$$

Weil $\beta^{-m}(1) \geq m + 1$ ist, ist dies maximal ein **lineares** Wachstum, das auch bei der Baumrekursion, deren eine Abstiegsfunktion immer den Wert Null hat (ebenso hat dann der 0-1-Code immer den Wert Null), gilt. ■

⁷ $\beta(n) \leq n - 1$ gilt auch für alle $n \geq 2$ mit $n = \beta^{-1}(k)$. Setzt man dies für n ein und wendet $\beta(\beta^{-1}(k)) = k$ an, so erhält man die behauptete Aussage.

Lemma 3.7

Der maximale Berührungspunkt⁸ der Quotientenfolge jeder normierten Baumrekursion mit beschränkter Quotientenfolge ist mindestens so groß wie $P\left(\frac{1}{2}\right) \approx 3.462746619$, wobei $P(x) := \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$ die Partitionsfunktion, d.h. die gewöhnliche erzeugende Funktion der Partitionszahlen, ist.

Beweis:

Man sieht dies ebenso wie im vorigen Fall: Da nur normierte Abstiegsfunktionen betrachtet werden, gilt stets $\alpha(n) \leq \beta(n) = n - 1 - \alpha(n)$, was $2 \cdot \alpha(n) \leq n - 1$ zur Folge hat. Da α nur positive, ganzzahlige Werte annimmt, folgt daraus $\alpha(n) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

Analog zum Beweis von Lemma 3.6 ist der maximale Berührungspunkt einer beliebigen beschränkten Baumrekursion mindestens so groß wie der maximale Berührungspunkt der Baumrekursion zu $\alpha(n) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. Es ist leicht zu sehen, daß dann $\beta(n) = n - 1 - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ gilt. Damit erhält man $\lambda(k) = \beta^{-1}(k) = 2 \cdot k \quad \forall k \geq 1$ und es ist

$$Q_{\beta^{-1}(1)} = Q_{2^k} = \frac{2^k}{2^k - 1} \cdot Q_{2^{k-1}} = \prod_{j=1}^k \frac{2^j}{2^j - 1} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^j}}$$

Nach den Ergebnissen von Abschnitt 3.1 ist $P\left(\frac{1}{2}\right) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^j}}$ der maximale Berührungspunkt von Q_n . Für ausführlichere Bemerkungen zu Berührungspunkten sei auf den Beweis von Satz 3.12 verwiesen. ■

Lemma 3.8

Die Quotientenfolgen Q_n aller normierten Baumrekursionen ist nach unten beschränkt.

Beweis:

Dies ist trivial, da $Q_n \geq 1$ für alle $n \geq 0$ gilt. ■

⁸Der Grenzwert jeder beschränkten, monotonen Teilfolge von (Q_n) soll als (**eigentlicher**) Berührungspunkt von (Q_n) bezeichnet werden. Für weitere Informationen vgl. Seite 100.

Satz 3.8 (Fehlende Beschränkung im ausgearteten Fall : a)

Die Quotientenfolge Q_n aller normierten, ausgearteten Baumrekursionen ist nach oben unbeschränkt.

Beweis:

Sei eine ausgeartete, normierte Abstiegsfunktion α gegeben. Diese hat einen 0-1-Code mit nur endlich vielen Einsen. Angenommen es gibt m_1 Einsen, wobei die letzte Eins an der Stelle m steht.

Behauptung 1:

Für $n > m + 1$ gilt: $\beta(n) = n - m_1 - 1$.

Beweis:

Nach Beh. 1 im Beweis zu Lemma 2.1 im Abschnitt 2.1 gilt für $n > m + 1$:

$$\alpha(n) = \sum_{k=2}^n \bar{\alpha}(k) = m_1$$

Dabei bezeichnet $\bar{\alpha}(k)$ wieder den 0-1-Code von α an der Stelle k . Ist n genügend groß, so kommen keine neuen Einsen mehr im 0-1-Code und die kleinere Abstiegsfunktion bleibt konstant. Damit erhalten man die Behauptung:

$$\beta(n) = n - 1 - \alpha(n) = n - m_1 - 1 \quad n > m + 1$$

■

Um die Divergenz aller Teilfolgen der Quotientenfolge zu Linkswegen⁹ (von denen es hier nur endlich viele gibt und die hier die einzigen unendlichen Wege sind) zu zeigen, reicht es zu zeigen, daß für alle $n > m + 1$ das folgende Produkt divergiert¹⁰:

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\beta^{-k}(n) - 1} \right)$$

In diesem Fall ist für $n > m + 1$ $\beta^{-k}(n) = n + k(m_1 + 1)$, wie man leicht aus Beh. 1 folgert.

Es ist für $n > m + 1$ stets $\frac{1}{\beta^{-k}(n) - 1} > 0$. Unter dieser Voraussetzung ist nach

⁹Ein Linksweg ist ein unendlicher Weg im δ -Baum, der ab einer Stelle nur nach links abzweigt.

¹⁰Es ist für $n > 1$: $\lim_{j \rightarrow \infty} Q_{\beta^{-j}(n)} = \lim_{j \rightarrow \infty} Q_{\delta(n)} \cdot \prod_{l=0}^j \Delta c_{\beta^{-l}(n)} = Q_{\delta(n)} \cdot \prod_{l=0}^{\infty} \frac{\beta^{-l}(n)}{\beta^{-l}(n) - 1}$. Für die Grenzaussage ist nur das unendliche Produkt von Interesse.

Knopp [Knopp, p.227] die Divergenz des gesuchten Produktes äquivalent mit der Divergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{-k}(n) - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n - 1 + k(m_1 + 1)}$. Dies ist eine leichte Abänderung der harmonischen Reihe und damit divergent. ■

Es ist gerade gezeigt worden, daß die ausgearteten Baumrekursionen immer einen unbeschränkten Konvergenzkegel besitzen. Es wird nun von zwei Klassen nicht ausgearteter Baumrekursionen bewiesen, daß ihr Konvergenzkegel immer beschränkt ist.

HINWEIS: Gemeint ist immer die Quotientenfolge zu den üblichen Randwerten. Deshalb kann für die Quotientenfolge der Heapfolge (als Beispiel) nur Abbildung 5.2 auf Seite 158 und *nicht* Abbildung 1.8 auf Seite 11 (zu anderen Randwerten) betrachtet werden.

Satz 3.9 (Beschränkung im stufentr. und im period. Fall : $\bar{a}p \cup s$)

Die Quotientenfolgen von normierten stufentreuen und normierten nicht ausgearteten, periodischen Baumrekursionen sind immer beschränkt.

Beweis:

(bis Seite 93)

Wie am Anfang des Abschnitts gesagt, ist in jeder Stufe des δ -Baumes einer nicht ausgearteten Baumrekursion das am weitesten links stehende Label das kleinste und der zugehörige (Q_n) -Wert in seiner Stufe maximal. Also liegen die Labels zu den maximalen Werten von Q_n im δ -Baum auf dem unendlichen Linksweg $Q_1, Q_{\lambda(1)}, Q_{\lambda^2(1)}, Q_{\lambda^3(1)}, \dots$ liegen.

$$Q_{\lambda^k(1)} = \prod_{j=1}^k \frac{\lambda^j(1)}{\lambda^j(1) - 1} = \prod_{j=1}^k \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda^j(1)}}$$

Zum Beweis der Beschränktheit des Konvergenzkegels muß man $\lambda^k(1)$ nach unten abschätzen:

1. Es wird mit dem **nicht ausgeartet periodischen Fall** begonnen und die Abschätzung

$$\lambda^k(n) \geq \left(\frac{p}{p_0}\right)^k \left(n + \frac{2p_0 - p - p \cdot p_0}{p - p_0}\right) =: \left(\frac{p}{p_0}\right)^k (n + u)$$

aus Satz 3.5 benutzt.

Hier benötigt man aber mit

$$\frac{1}{\lambda^k(n)} \leq \frac{1}{\left(\frac{p}{p_0}\right)^k (n+u)} \quad (**)$$

die reziproke Form dieser Aussage. Diese gilt aber nur, wenn die rechte Seite positiv ist. Sei deshalb m (fest!) so groß gewählt, daß $n := \lambda^{m-1}(1) \geq \left\lceil \frac{p \cdot p_0 + 3p}{p_1} \right\rceil$ ist (vgl. Satz 3.5). Dann gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q_{\lambda^k(1)} = Q_{\lambda^{m-1}(1)} \cdot \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda^j(\lambda^{m-1}(1))}} = Q_n \cdot \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda^j(n)}}$$

Da für festes n Q_n beschränkt ist, braucht nur noch die Beschränktheit des unendlichen Produktes gezeigt zu werden. Dazu wird die folgende Abschätzung über die Größenrelation zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel benutzt, die nach Beckenbach und Bellman [BecBe, p. 4] für nichtnegative a_i gilt:

$$\left(\prod_{j=1}^m a_j \right)^{\frac{1}{m}} \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_j$$

Hieraus folgt:

$$\prod_{j=1}^m a_j \leq \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_j \right)^m$$

Daraus wird gefolgert:

$$\prod_{j=1}^m (1 + a_j) \leq \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (1 + a_j) \right)^m = \left(1 + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_j \right)^m \quad (*)$$

Damit kann man abschätzen:

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda^j(n)}} \stackrel{(**)}{\leq} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{\left(\frac{p}{p_0}\right)^j \cdot (n+u)}}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{p}{p_0}\right)^k \cdot (n+u)}{\left(\frac{p}{p_0}\right)^j \cdot (n+u) - 1} \\
&= \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{p}{p_0}\right)^j \cdot (n+u) - 1}\right) \\
&\stackrel{(*)}{\leq} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{\left(\frac{p}{p_0}\right)^j \cdot (n+u) - 1}\right)^m \\
&\stackrel{\left(\frac{p}{p_0}\right)^j \geq 1}{\leq} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{\left(\frac{p}{p_0}\right)^j \cdot (n+u-1)}\right)^m \\
&\stackrel{\sum^m(\dots) \leq \sum^{\infty}(\dots)}{\leq} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \frac{1}{(n+u-1)} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{p_0}{p}\right)^j\right)^m \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \frac{1}{(n+u-1)} \left(\frac{1}{1 - \frac{p_0}{p}} - 1\right)\right)^m \\
&\stackrel{\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \rightarrow e^x}{=} \exp\left(\frac{p_0}{(p-p_0) \cdot (n+u-1)}\right) \\
&= \exp\left(\frac{p_0}{(p-p_0) \cdot \left(n + \frac{2p_0-p-p \cdot p_0}{p-p_0}\right)}\right) < \infty
\end{aligned}$$

Hiermit sind alle Quotientenfolgen nicht ausgearteter, periodischer Baumrekursionen beschränkt (nach unten vgl. Lemma 3.8).

- Der Beweis für **stufentreue** Baumrekursionen ist nun ganz leicht. Im vorigen Abschnitt hat sich ergeben, daß der Rand des Konvergenzkegels bei **allen** stufentreuen Rekursionen gleich ist (vgl. Satz 3.6). Um zu zeigen, daß alle stufentreuen Baumrekursionen beschränkt sind, muß man dies also nur für **eine** stufentreue Baumrekursion zeigen. Eine Abschätzung wie im periodischen Fall ist jedoch nicht noch einmal nötig. $\alpha := \text{period}[0, 1]$ definiert eine stufentreue Baumrekursion, die auch (nicht ausgeartet) periodisch ist. Nach dem Beweis für den periodischen Fall ist sie also beschränkt.

■

Nun ist gezeigt worden, daß einerseits die Quotientenfolgen zu ausgearteten Baumrekursionen stets unbeschränkt sind, und daß es andererseits zwei Klassen von nicht ausgearteten Baumrekursionen gibt, die nur beschränkte Quotientenfolgen enthalten. Es stellt sich die Frage, ob dies eine allgemeine Eigenschaft der

Quotientenfolgen nicht ausgearteter Baumrekursionen ist, oder ob es hier ebenfalls unbeschränkte Fälle gibt.

Eine Klärung dieser Frage gestaltet sich schwierig: Die notwendigen Abstiegsfunktionen α mit sehr langsamem, aber nicht aufhörendem Wachstum erfordern, daß die größere Abstiegsfunktion β nur indirekt gegeben ist. Dies macht eine Pseudo-Invertierung nicht gerade leicht und die Lösung der Frage bedarf einiger Umwege.

Satz 3.10 (Fehlende Beschränkung auch im nicht ausgeart. Fall : $\bar{a}$)

Es gibt Quotientenfolgen nicht ausgearteter, normierter Baumrekursionen, die nach oben unbeschränkt sind.

Beweis:

(bis Seite 99)

Um dies zu beweisen, genügt natürlich ein **einziges** Beispiel. Ein einfaches Beispiel wird es wohl nicht geben. Das hier betrachtete Beispiel wird einige Arbeit in Anspruch nehmen.

Es wird eine nicht ausgeartete Abstiegsfunktion benötigt, die langsamer wächst als alle periodischen Abstiegsfunktionen. Hier wird als Beispiel die Baumrekursion zur Abstiegsfunktion $\alpha(n) := \lfloor \log_2(n) \rfloor$ betrachtet. Dies bedeutet genauer:

$$Q_0 = Q_1 = 1, \quad \alpha(n) = \lfloor \log_2(n) \rfloor, \quad \beta(n) = n - 1 - \lfloor \log_2(n) \rfloor$$

Es soll hier nicht nur gezeigt werden, daß der maximale Linksweg divergiert, sondern die Divergenz **aller** Linkswege nachgewiesen werden. Also ist das Ziel dieses Beweises, wenn β^{-k} die k -fache Ausführung der Pseudo-Inversen von β ist:

Für $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 5$ gilt: $\prod_{k=0}^m \frac{1}{1 - \frac{1}{\beta^{-k}(a)}}$ ist divergent. Es wird nicht bei $a = 1$ gestartet, da das Paar (α, β) am Anfang nicht normiert ist. Da die Linkswege aber streng isoton sind und die Anfänge für Grenzbetrachtungen unwesentlich sind, kann dieses Problem durch $a \geq 5$ umgangen werden, denn das normierte Gegenstück zu dem hier gewählten Paar von Abstiegsfunktionen erfüllt ebenfalls $\alpha(n) = \lfloor \log_2(n) \rfloor$ für $n \geq 5$!

Es gilt:

$$\prod_{k=0}^m \frac{1}{1 - \frac{1}{\beta^{-k}(a)}} = \prod_{k=0}^m \left(1 + \frac{1}{\beta^{-k}(a) - 1} \right)$$

Dabei ist für $a \geq 2$ stets $\frac{1}{\beta^{-k}(a)-1} > 0$. Unter dieser Voraussetzung ist nach Knopp [Knopp, p.227] die Divergenz des gesuchten Produktes äquivalent mit der Divergenz von $\sum_{k=0}^m \frac{1}{\beta^{-k}(a) - 1} = \sum_{k=2}^m \frac{1}{b_k - 1}$, wobei $b_k := \beta^{-(k-2)}(a)$ für festes a gesetzt wird. Die Divergenz dieser Summe soll in diesem Beweis gezeigt werden.

Es gilt nun die folgende Darstellung: $b_2 = a$ und

$$\begin{aligned} b_n &= \beta^{-(n-2)}(a) \\ &= \beta(\beta^{-(n-1)}(a)) \\ &= \beta^{-(n-1)}(a) - 1 - \lfloor \log_2(\beta^{-(n-1)}(a)) \rfloor \\ &= b_{n+1} - 1 - \lfloor \log_2(b_{n+1}) \rfloor \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, daß die zweite Umformung gültig ist, weil nach Lemma 2.5 die Identität $\beta(\beta^{-1}(n)) = n$ gilt.

Nun kann man die Folge $(b_k)_{k \geq 2}$ über diese Gleichung definieren:

$$b_2 = a, \quad b_{n+1} = \min_{z \in \mathbb{N}} (b_n = z - 1 - \lfloor \log_2(z) \rfloor)$$

Zur Frage der Wohldefiniertheit dieser Definition: Die zu minimierende Gleichung ist identisch zu $b_n = \beta(z)$. Da $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine schwach wachsende Abstiegsfunktion ist, ist sie nach Lemma 2.4 surjektiv, was die Existenz eines $z \in \mathbb{N}$ sichert.¹¹

Die Minimumbildung sichert die Eindeutigkeit der Definition von b_{n+1} über b_n . Hat man jedoch die so definierte Folge gegeben und möchte umgekehrt b_n über b_{n+1} charakterisieren, so kann man hier die Minimum-Eigenschaft fortlassen:

$$b_n = b_{n+1} - 1 - \lfloor \log_2(b_{n+1}) \rfloor$$

¹¹Die Definition von b_{n+1} kann man auch abgekürzt mit $b_{n+1} = \lambda(b_n)$ darstellen.

Dies wird im folgenden ohne weiteren Kommentar geschehen.

Es liegt hier eine implizite Rekursion vor. Dies ist nicht gerade angenehm, da für die Grenzbetrachtung (Induktion) eine explizit rekursive Betrachtung nötig wird. Darum wird im folgenden versucht, die über eine implizite Rekursion gegebene Folge gegen eine andere Folge mit expliziter Rekursion abzuschätzen. Dazu wird in einem ersten Schritt eine Einschachtelung der beteiligten Werte zwischen Zweierpotenzen benötigt.

Behauptung 1:

Für $m \geq 5$ gilt: Es gibt ein $k \geq 1$ mit $2^k \leq m - 1 - \lfloor \log_2(m) \rfloor < m < 2^{k+2}$.

Beweis:

1. Fall: $5 \leq m < 8$:

$$m = 5 < 2^3 \quad 5 - 1 - \lfloor \log_2(5) \rfloor = 2 \geq 2^1$$

$$m = 6 < 2^3 \quad 6 - 1 - \lfloor \log_2(6) \rfloor = 3 \geq 2^1$$

$$m = 7 < 2^3 \quad 7 - 1 - \lfloor \log_2(7) \rfloor = 4 \geq 2^1$$

2. Fall: $m \geq 8$

In diesem Fall gibt es ein $k \geq 2$, sodaß $2^{k+1} \leq m < 2^{k+2}$ (*). Damit folgt:

$$\begin{aligned} m - 1 - \lfloor \log_2(m) \rfloor &\stackrel{(*)}{=} m - 2 - k \\ &\stackrel{(*)}{\geq} 2^{k+1} - 2 - k \\ &\geq 2^k \end{aligned}$$

Die letzte Umformung gilt, da für $k \geq 2$ $2^k \geq 2 + k$ gilt, wie man leicht durch Induktion zeigen kann. ■

Es wird nun die Hintereinanderausführung zweier Abbildungen untersucht, von denen die eine mit der bekannten impliziten Rekursion zusammenhängt, während die andere auf eine noch zu definierende explizite Rekursion vorgreift.

Behauptung 2:

Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(m) := m + 3 + \log_2(m)$$

und sei $h : \mathbb{N}_{\geq 5} \rightarrow \mathbb{N}$ definiert durch:

$$h(m) := m - 1 - \lfloor \log_2(m) \rfloor$$

Dann gilt:

Für $m \geq 5$ ($m \in \mathbb{N}$) ist $g(h(m)) \geq m$.

Beweis:

Nach Behauptung 1 gibt es zu $m \geq 5$ ein $k \geq 1$ mit $2^k \leq m - 1 - \lfloor \log_2(m) \rfloor < m < 2^{k+2}$. Dann gilt mit $\lfloor \log_2(m) \rfloor \leq \log_2(m)$:

$$\begin{aligned}
 g(h(m)) &= g(m - 1 - \lfloor \log_2(m) \rfloor) \\
 &= m - 1 - \lfloor \log_2(m) \rfloor + 3 + \log_2(m - 1 - \lfloor \log_2(m) \rfloor) \\
 &\geq m + 2 - \log_2(m) + \log_2(m - 1 - \lfloor \log_2(m) \rfloor) \\
 &\geq m + 2 - \log_2(2^{k+2}) + \log_2(2^k) \\
 &= m + 2 - (k + 2) + k = m
 \end{aligned}$$

■

Nun kann die neue Folge mit expliziter Rekursion definiert werden und gegen die Folge mit impliziter Rekursion abgeschätzt werden.

Behauptung 3:

Sei (b_n) wie oben definiert und charakterisiert durch die Eigenschaft:

$$b_2 = a, \quad b_n = h(b_{n+1}) \text{ für } n \geq 2$$

und sei die Folge $(e_n)_{n \geq 2}$ definiert durch:

$$e_2 := a, \quad e_{n+1} := g(e_n) \text{ für } n \geq 2$$

Dann gilt für alle $n \geq 2$ die Ungleichung: $b_n \leq e_n$.

Beweis:

Der Beweis wird mit Induktion geführt.

$n = 2$: $b_2 = a = e_2$

$n \rightarrow n + 1$:

Hier wird Behauptung 2 benutzt. Dazu muß erst einmal gezeigt werden, daß die Voraussetzung erfüllt ist: Für $n + 1 > 2$ ist $b_{n+1} \geq b_2$ mit $b_2 = a = h(b_3)$ (strenge

Monotonie). Nach Definition von h ist $b_3 \geq 5$, da $a \geq 5$ ist. Insgesamt ist $b_{n+1} \geq 5$.

Nun folgt mit Behauptung 2 und der Isotonie von g :

$$e_{n+1} \stackrel{\text{Rek.}}{=} g(e_n) \stackrel{\text{Ind., Iso.}}{\geq} g(b_n) \stackrel{\text{impliz. Rek.}}{=} g(h(b_{n+1})) \stackrel{\text{Beh. 2}}{\geq} b_{n+1}$$

■

Nun wird für die Folgenglieder von (e_n) noch eine Abschätzung nötig:

Behauptung 4:

Die in Behauptung 3 definierte Folge (e_n) erfüllt für alle $n \geq 2$ die Ungleichung:

$$e_n \leq 2^{a+6} \cdot n \cdot \log_2(n)$$

Beweis:

Zuerst muß eine Hilfsaussage bewiesen werden. Da $a \geq 5$ vorausgesetzt war, gilt die folgende Ungleichung:

$$2^{a+6} - 2 = 2 \cdot 2^{a+5} - 2 \geq 2^{a+5} = 2^{a+4} + 2^{a+4} \geq a + 2^4 > a + 9 \quad (*)$$

Nun zum Beweis, der wieder mit vollständiger Induktion geführt wird:

$n = 2$: $e_2 = a \stackrel{!}{\leq} 2^{a+6} \cdot 2 \cdot \log_2(2) = 2^{a+7}$ ist für $a \geq 5$ sicher erfüllt.

$n \rightarrow n + 1$:

$$\begin{aligned} e_{n+1} & \stackrel{\text{Rek.}}{=} e_n + 3 + \log_2(e_n) \\ & \stackrel{\text{Ind.} + \text{Isot.} \log_2}{\leq} 2^{a+6} \cdot n \cdot \log_2(n) + 3 + \log_2(2^{a+6} \cdot n \cdot \log_2(n)) \\ & = 2^{a+6} \cdot n \cdot \log_2(n) + 9 + a + \log_2(n) + \log_2(\log_2(n)) \\ & \stackrel{n \geq 2 \Rightarrow \log_2(\log_2(n)) \leq \log_2(n)}{\leq} \log_2(n) \cdot (2^{a+6} \cdot n + 2) + a + 9 \\ & \stackrel{(*)}{\leq} \log_2(n) \cdot (2^{a+6} \cdot n + 2) + 2^{a+6} - 2 \\ & \stackrel{n \geq 2 \Rightarrow \log_2(n) \geq 1}{\leq} \log_2(n) \cdot (2^{a+6} \cdot n + 2 + 2^{a+6} - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \log_2(n) \cdot (2^{a+6} \cdot (n+1)) \\
&\stackrel{\text{Isot. log}_2}{\leq} \log_2(n+1) \cdot (2^{a+6} \cdot (n+1))
\end{aligned}$$

■

Nun kann man endlich einen Schritt weiter gehen und mit den Behauptungen 3 und 4 die zu untersuchende Summe abschätzen:

$$\sum_{k=2}^m \frac{1}{b_k - 1} \geq \sum_{k=2}^m \frac{1}{e_k - 1} \geq \sum_{k=2}^m \frac{1}{2^{a+6} \cdot k \cdot \log_2(k) - 1}$$

Um die Divergenz der Summe auf der rechten Seite zu zeigen, wird der nach Knopp [Knopp, p.121] geltende „Verdichtungssatz“ benutzt:

$$\sum_{k=0}^m a_k \text{ divergent} \iff \sum_{k=0}^m 2^k \cdot a_{2^k} \text{ divergent}$$

In diesem Fall ist also die Divergenz der Summe $\sum_{k=2}^m \frac{1}{2^{a+6} \cdot k \cdot \log_2(k) - 1}$ äquivalent mit der Divergenz der Summe $\sum_{k=2}^m \frac{2^k}{2^{a+6} \cdot 2^k \cdot \log_2(2^k) - 1} = \sum_{k=2}^m \frac{1}{2^{a+6} \cdot k - \frac{1}{2^k}}$. Diese kann man weiter abschätzen:

$$\sum_{k=2}^m \frac{1}{2^{a+6} \cdot k - \frac{1}{2^k}} \geq \frac{1}{2^{a+6}} \sum_{k=2}^m \frac{1}{k}$$

Mit der Divergenz der harmonischen Reihe folgt die Aussage des Satzes, sogar für dieses Beispiel die Divergenz aller Teilfolgen zu unendlichen Linkswegen! ■

Bemerkung:

*Wenn man den notwendigen Aufwand für die gerade durchgeführte Abschätzung einer **einzigen** Quotientenfolge betrachtet, entsteht der Eindruck, daß die Grenzziehung zwischen (über ihre Abstiegsfunktionen definierten) Klassen mit beschränkten und unbeschränkten Quotientenfolgen innerhalb der nicht ausgearteten Baumrekursionen sehr schwierig sein dürfte.*

Nun ist gezeigt worden, daß auch bei nicht ausgearteten Baumrekursionen divergente Teilfolgen der Quotientenfolge auftreten können. Bei ausgearteten Baumrekursionen gibt es nur Linkswegen und damit sind alle Teilfolgen der Quotientenfolge divergent. Hier gibt es einen deutlichen Unterschied zu nicht ausgearteten

Baumrekursionen, denn deren Quotientenfolgen besitzen immer konvergente Teilfolgen (sogar mindestens abzählbar unendlich viele). Davon handelt der folgende Satz:

Satz 3.11 (Teilfolgen zu schließl. Rechtswegen sind konvergent : $\bar{a}$)

Die Teilfolgen der Quotientenfolge zu unendlichen Wegen im δ -Baum, die schließlich nur noch nach rechts abzweigen, sind bei allen (normierten, nicht ausgearteten) Baumrekursionen stets konvergent.

Bemerkung:

Die im Satz genannten Wege existieren nicht im δ -Baum von ausgearteten Baumrekursionen.

Beweis:

Wie im Beweis zu Lemma 3.7 gezeigt wurde, gilt für die kleinere Abstiegsfunktion stets $\alpha(n) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. Damit ist $\alpha^{-1}(n) \geq 2n + 1$ (analog zum Beweis von Lemma 3.6) und $\alpha^{-k}(x) \geq 2^k \cdot x + 2^k - 1$. Hieraus folgt:

$$Q_{\alpha^{-n}(x)} = Q_x \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{\alpha^{-k}(x) - 1} \right) \leq Q_x \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^k \cdot x + 2^k - 2} \right)$$

Analog zu obigen Fällen ist die Konvergenz dieses Produktes wieder äquivalent zur Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k \cdot x + 2^k - 2}$$

Deren Konvergenz ist leicht zu sehen (leichte Abwandlung der geometrischen Reihe). ■

Zusammenfassend wird in Abbildung 3.17 das Ergebnis dieses Abschnitts in Bezug auf das Auftreten beschränkter bzw. unbeschränkter Quotientenfolgen bei verschiedenen Klassen von Baumrekursionen dargestellt. Die Darstellung dieser Abbildung entspricht der Abbildung 2.5 auf Seite 48 und den dazugehörigen Anmerkungen.

3.4 Berührungspunkte von Baumrekursionen

In diesem Abschnitt soll etwas über die Berührungspunkte der Quotientenfolgen von

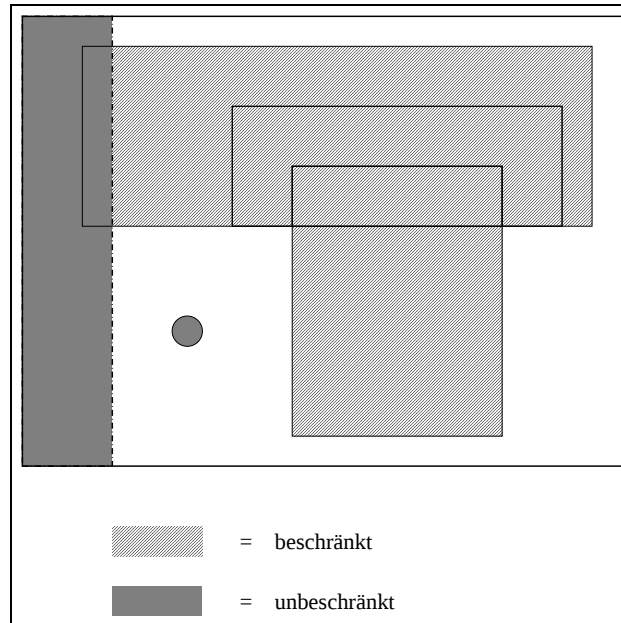


Abbildung 3.17: (Un-)beschränkte Quotientenfolgen bei Baumrekursionen.

Baumrekursionen ausgesagt werden. Unter einem Berührungspunkt einer Folge (f_n) wird hier, [Kelly] folgend, ein $x \in \mathbb{R}$ verstanden, sodaß in jeder noch so kleinen ϵ -Umgebung von x unendlich viele Werte von (f_n) liegen. Ist (f_n) nach oben (bzw. nach unten) unbeschränkt, so sei auch ∞ (bzw. $-\infty$) (uneigentlicher) Berührungspunkt von (f_n) . Eine unter den hier vorliegenden Voraussetzungen äquivalente Bedingung für einen Berührungspunkt $x \in \mathbb{R}$ ist, daß eine Teilfolge von (f_n) existiert, die gegen x konvergiert. Ebenso ist ∞ (bzw. $-\infty$) ein uneigentlicher Berührungspunkt von (f_n) , wenn eine Teilfolge von (f_n) gegen ∞ (bzw. gegen $-\infty$) strikt divergiert.

Betrachtet werden in diesem Abschnitt ausschließlich Baumrekursionen mit **beschränkten** Quotientenfolgen (vgl. Abbildung 3.17). Unter dieser Voraussetzung sind die Teilfolgen, die unendlichen Wegen im δ -Baum entsprechen, als monotone, beschränkte Folgen konvergent. Dies zieht eine Definition nach sich, die die betrachteten Berührungspunkte einschränkt:

Definition 3.2 (δ -Berührungspunkt)

*Ein Berührungspunkt der Quotientenfolge einer beschränkten Baumrekursion heißt **δ -Berührungspunkt**, wenn er Grenzwert einer (konvergenten!) Teilfolge der Quotientenfolge ist, die einem unendlichem Weg im δ -Baum folgt.*

Hier stellt sich sofort die Frage, ob die Definition der δ -Berührungspunkte eine wirkliche Einschränkung ist, oder ob nicht jeder Berührungspunkt ein δ -Berührungspunkt ist. Ein positives Resultat kann zumindest in den beiden betrachteten Hauptfällen - nicht ausgearteten periodischen und stufentreuen Baumrekursionen - gegeben werden.

Satz 3.12 (Berührungspunkte und δ -Berührungspunkte : $\bar{a}p \cup s$)

Sei (Q_n) die Quotientenfolge einer

normierten, nicht ausgearteten, periodischen

oder

normierten, stufentreuen

Baumrekursion. Dann ist jeder Berührungspunkt von (Q_n) ein δ -Berührungspunkt.

Bemerkung:

Der Beweis wird so geführt, daß die Existenz einer Teilfolge zu einem unendlichen Weg gezeigt wird, ohne daß im allgemeinen die explizite Angabe des unendlichen Weges überhaupt möglich ist. Die Beweistechnik ähnelt der des Beweises des Endlichkeitssatzes bei Schöning [Schoe, p. 35 ff.], in dem ebenfalls eine schrittweise Konstruktion mit einer entsprechenden, sich wiederholenden „Unendlichkeitsabfrage“ durchgeführt wird.

Beweis:

(bis Seite 111)

Wegen des Ausmaßes des folgenden Beweises soll an dieser Stelle seine Gliederung vorab vorgestellt werden. Dies gestattet dem Leser eine größere Freiheit in der Wahl einer eigenen Lesereihenfolge. Abbildung 3.18 stellt die beweisinternen Behauptungen mit ihren Nummern dar. Die dazwischenliegenden Textabschnitte werden mit Großbuchstaben bezeichnet, wobei die Zuordnung durch die relative Lage zu den nummerierten Behauptungen festgelegt wird.

A: Sei (Q_n) die Quotientenfolge einer stufentreuen oder periodischen, nicht ausgearteten Baumrekursion. Sei z ein Berührungspunkt von (Q_n) . Dann gibt es eine Teilfolge (Q_{k_n}) von (Q_n) , die gegen z konvergiert. Sei o.B.d.A. $k_0 \geq 1$ (betrachte sonst Teilfolge).

Im folgenden soll gezeigt werden, daß es eine Teilfolge von (Q_n) gibt, die einem unendlichen Weg im δ -Baum T zu (Q_n) folgt und gegen z konvergiert. Diese Teilfolge wird schrittweise aus (Q_{k_n}) konstruiert. Dies geschieht im wesentlichen durch die Benutzung der folgenden Aussage:

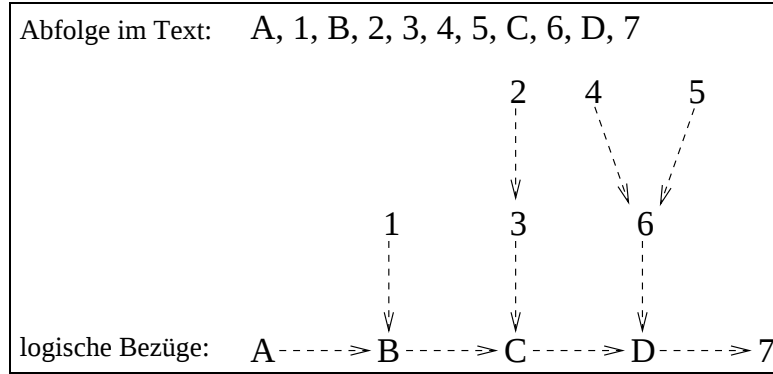


Abbildung 3.18: Gliederung des Beweises von Satz 3.12.

Behauptung 1:

Seien N und M abzählbar unendliche Mengen mit $N \subseteq M$. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_m \cup U$, wobei U eine endliche Menge und M_j , $j = 1, \dots, m$ jeweils abzählbar unendliche Mengen sind.

Dann gibt es ein $j \in \{1, \dots, m\}$ mit $N \cap M_j$ ist abzählbar unendlich.

Beweis:

Angenommen, die Aussage wäre falsch und $N \cap M_j$ wäre endlich für alle $j \in \{1, \dots, m\}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 N &= N \cap M = N \cap (M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_m \cup U) \\
 &= (N \cap M_1) \cup (N \cap M_2) \cup \dots \cup (N \cap M_m) \cup (N \cap U)
 \end{aligned}$$

$N \cap U \subseteq U$ ist mit U endlich. Nach Annahme ist $N \cap M_j$ endlich für alle $j \in \{1, \dots, m\}$. Damit ist N als Vereinigung endlicher Mengen endlich, was einen Widerspruch darstellt. ■

B: Konstruiere nun eine Folge von Teilfolgen mit Hilfe bestimmter unendlicher Teilbäume des δ -Baumes T .

Konstruktionsanfang:

$\{(k_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ ist abzählbar unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ = Labelmenge des δ -Baumes. Sei $Q_{(0)_n} := Q_{k_n}$ die Startfolge, die zum Start-Teilbaum $T_0 := T$ (ganzer δ -Baum) mit Wurzel $f_0 := 1$ gehört.

Konstruktionsschritt:

Gegeben sei ein unendlicher Teilbaum T_j des δ -Baumes mit Wurzel f_j sowie eine Teilfolge $Q_{(j)_n}$ von Q_n mit der Eigenschaft, daß $\{((j)_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ abzählbar unendlich ist und eine Teilmenge der Labelmenge von T_j ist.

Zerlege die Labelmenge von T_j folgendermaßen (dabei sei mit $L(T')$ die Labelmenge eines Teilbaumes T' und mit $l(T')$ bzw. $r(T')$ der linke bzw. rechte Teilbaum von T' bezeichnet):

$$L(T_j) = \{f_j\} \cup L(l(T_j)) \cup L(r(T_j))$$

Die erste Menge der Zerlegung ist endlich, die beiden anderen sind abzählbar unendlich. Nach Beh. 1 ist $\{((j)_n)\} \cap L(l(T_j))$ abzählbar unendlich oder $\{((j)_n)\} \cap L(r(T_j))$ abzählbar unendlich.

Ist $\{((j)_n)\} \cap L(l(T_j))$ abzählbar unendlich, so wähle $T_{j+1} := l(T_j)$ mit Wurzel $f_{j+1} := \lambda(f_j)$. Anderenfalls wähle $T_{j+1} := r(T_j)$ mit Wurzel $f_{j+1} := \rho(f_j)$. Definiere nun noch $((j+1)_n) :=$ Teilfolge von $((j)_n)$ genau mit den Werten, die Labels aus T_{j+1} darstellen. Damit ergibt sich $(Q_{(j+1)_n})$ von selbst.

Nach der Definition von $(Q_{(j)_n})$ ergeben sich folgende Eigenschaften für alle $j \geq 0$:

- i) $(Q_{(j)_n})$ ist Teilfolge von (Q_{k_n}) .
- ii) $(Q_{(j)_n})$ ist konvergent mit Grenzwert z wegen (i), denn (Q_{k_n}) konvergiert gegen z .
- iii) $((j)_n)$ liegt ganz in der Labelmenge vom δ -Baum-Teilbaum T_j mit Wurzel f_j .

Behauptung 2:

Sei T_s ein Teilbaum des δ -Baumes mit Wurzel s und Q_{l_n} eine Teilfolge von Q_n , sodaß (l_n) schließlich ganz in der Labelmenge von T_s liegt. Dann gilt:

Für alle $m \geq 0$ gibt es ein $n_0(m)$, so daß für alle $n \geq n_0(m)$ gilt: l_n liegt als Label von T_s in einer Stufe $m(n) \geq m$.

Beweis:

Definiere $n_0(m) := \min_{n \in \mathbb{N}} \{l_n \geq \rho^m(s)\}$, da $\rho^m(s)$ das maximale Element der m -ten Stufe von T_s ist. Sei $n \geq n_0(m)$. Da (l_n) Index einer Teilfolge von (Q_n) ist, ist (l_n) streng isoton. Also gilt $l_n \geq l_{n_0(m)} \geq \rho^m(s)$. Angenommen, es würde $m(n) < m$ gelten ($m(n)$ sei die Stufe von T_s , in der l_n als Label liegt). Dann ist wegen der Ordnung im δ -Baum und der strengen Isotonie der Rechtsfunktion $l_n \leq \rho^{m(n)}(s) < \rho^m(s)$. Dies ist ein Widerspruch zu $l_n \geq \rho^m(s)$. Also ist $m(n) \geq m$. ■

Behauptung 3:

Sei T_s ein Teilbaum des δ -Baumes mit Wurzel s und (Q_{l_n}) eine Teilfolge von (Q_n) , sodaß (l_n) ganz in der Labelmenge von T_s liegt. Dann liegen alle Berührungspunkte von (Q_{l_n}) im Intervall

$$I_s = \left[Q_s \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \Delta_{C_{\rho^k(s)}}, Q_s \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \Delta_{C_{\lambda^k(s)}} \right]$$

Beweis:

O.B.d.A. sei Q_{l_n} konvergent (betrachte sonst eine Teilfolge). Betrachte l_n für ein festes n . l_n ist Label von T_s , z.B. in der $m(n)$ -ten Stufe. Dann gilt wegen der Ordnung im δ -Baum:

$$(1) \quad Q_{l_n} \leq Q_{\lambda^{m(n)}(s)} = Q_s \cdot \prod_{k=1}^{m(n)} \Delta_{C_{\lambda^k(s)}}$$

und

$$(2) \quad Q_s \cdot \prod_{k=1}^{m(n)} \Delta_{C_{\rho^k(s)}} = Q_{\rho^{m(n)}(s)} \leq Q_{l_n}$$

Jetzt muß noch der Grenzübergang nach ∞ vorgenommen werden:

Zur Abschätzung nach oben:

Da stets $\Delta_{C_{\lambda^k(s)}} \geq 1$ gilt, folgt aus (1):

$$\begin{aligned} Q_{l_n} &\stackrel{\text{vgl. (1)}}{\leq} Q_s \cdot \prod_{k=1}^{m(n)} \Delta_{C_{\lambda^k(s)}} \\ &\leq Q_s \cdot \prod_{k=1}^{m(n)+1} \Delta_{C_{\lambda^k(s)}} \\ &\leq \dots \leq \\ &\leq Q_s \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \Delta_{C_{\lambda^k(s)}} \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{l_n} \leq Q_s \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \Delta_{C_{\lambda^k(s)}}$$

Zur Abschätzung nach unten:

Betrachte eine beliebige, aber feste (große!) Stufenzahl m' . Sei dazu $n_0(m')$ wie in Beh. 2 gewählt. Für $n \geq n_0(m')$ gilt nach Beh. 2: $m(n) \geq m'$ [$m(n)$ ist die Stufe, in der das Label l_n liegt.]. Mit (2) gilt dann für alle $n \geq n_0(m')$:

$$Q_{l_n} \geq Q_s \cdot \prod_{k=1}^{m(n)} \Delta_{c_{\rho^k(s)}} \geq Q_s \cdot \prod_{k=1}^{m'} \Delta_{c_{\rho^k(s)}}$$

Damit gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{l_n} \geq Q_s \cdot \prod_{k=1}^{m'} \Delta_{c_{\rho^k(s)}}$$

Da m' beliebig war, folgt die Abschätzung nach unten.

Das Intervall ist wirklich abgeschlossen, da die Grenzen von den extremen Berührungspunkten (vgl. Abschnitt 3.1 zur Ordnung im δ -Baum) angenommen werden. ■

Bevor im Beweis des Satzes fortgefahren werden kann, müssen erst einmal ein paar Abschätzungen bewiesen werden:

Behauptung 4:

Für normierte, nicht ausgeartete, periodische Baumrekursionen gilt (Notationen siehe Abschnitt 3.2) für $s \geq \left\lceil \frac{p \cdot p_0 + 3p}{p_1} \right\rceil$:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda^{k(s)}}}}{\frac{1}{1 - \frac{1}{\rho^{k(s)}}}} \leq \exp \left(\frac{(s + p \cdot p_0 + p_0 - p) \cdot p_0}{(s + 2p_0 - p - p \cdot p_0 - 1) \cdot (s + 2p_1 - p - p \cdot p_1) \cdot p_1} \right)$$

Beweis:

Benutzt werden hierfür Abschätzungen aus Satz 3.5, die für $s \geq \left\lceil \frac{p \cdot p_0 + 3p}{p_1} \right\rceil$ auch reziprok verwendet werden können:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{p_0} \right)^k \left(s + \overbrace{\frac{2p_0 - p - pp_0}{p - p_0}}^{u_1 :=} \right) &\leq \lambda^k(n) \leq \left(\frac{p}{p_0} \right)^k \left(s + \overbrace{\frac{pp_0 + p_0 - p}{p - p_0}}^{u_2 :=} \right) \\ \left(\frac{p}{p_1} \right)^k \left(s + \overbrace{\frac{2p_1 - p - pp_1}{p - p_1}}^{u_3 :=} \right) &\leq \rho^k(n) \leq \left(\frac{p}{p_1} \right)^k \left(s + \overbrace{\frac{pp_1 + p_1 - p}{p - p_1}}^{u_4 :=} \right) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der über das geometrische und arithmetische Mittel gewonnenen Produkt-Summen-Abschätzung (vgl. Seite 92) kann man dann beweisen:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{1-\frac{1}{\lambda^k(s)}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{\rho^k(s)}}} &= \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{1-\frac{1}{\lambda^{k+1}(s)}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{\rho^{k+1}(s)}}} \\
&= \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}(s)(\rho^{k+1}(s) - 1)}{(\lambda^{k+1}(s) - 1)\rho^{k+1}(s)} \\
&= \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\rho^{k+1}(s) - \lambda^{k+1}(s)}{(\lambda^{k+1}(s) - 1)\rho^{k+1}(s)} \right) \\
&\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m+1} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{\rho^{k+1}(s) - \lambda^{k+1}(s)}{(\lambda^{k+1}(s) - 1)\rho^{k+1}(s)} \right)^{m+1} \\
&\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m+1} \cdot \dots \right. \\
&\quad \left. \dots \cdot \sum_{k=0}^m \frac{\overbrace{\left(\left(\frac{p}{p_1} \right)^{k+1} (s + u_4) - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{k+1} \overbrace{(s + u_1)}^{>0} \right)}^{<0}}{\left(\left(\frac{p}{p_0} \right)^{k+1} (s + u_1) - 1 \right) \left(\frac{p}{p_1} \right)^{k+1} (s + u_3)} \right)^{m+1} \\
&\stackrel{(1) \text{ s.u.}}{\leq} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m+1} \cdot \dots \right. \\
&\quad \left. \dots \cdot \sum_{k=0}^m \frac{\left(\frac{p}{p_1} \right)^{k+1} (s + u_4)}{\left(\frac{p}{p_0} \right)^{k+1} (s + u_1 - 1) \left(\frac{p}{p_1} \right)^{k+1} (s + u_3)} \right)^{m+1} \\
&\stackrel{(2) \text{ s.u.}}{\leq} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m+1} \cdot \frac{(s + u_4) \cdot p_0}{(s + u_1 - 1) \cdot (s + u_3) \cdot p} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{p_0}{p} \right)^k \right)^{m+1} \\
&\stackrel{(3) \text{ s.u.}}{\leq} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m+1} \cdot \frac{(s + u_4) \cdot p_0}{(s + u_1 - 1) \cdot (s + u_3) \cdot p} \cdot \frac{p}{p - p_0} \right)^{m+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left(\frac{(s + u_4) \cdot p_0}{(s + u_1 - 1) \cdot (s + u_3) \cdot p_1} \right) \\
&= \exp \left(\frac{(s + p \cdot p_0 + p_0 - p) \cdot p_0}{(s + 2p_0 - p - p \cdot p_0 - 1) \cdot (s + 2p_1 - p - p \cdot p_1) \cdot p_1} \right)
\end{aligned}$$

Dabei wurden benutzt:

- (1) Im Nenner: $\left(\frac{p}{p_0}\right)^{k+1} \geq 1$. Wegen der „Sicherheitsschranke“ bleibt dann $s + u_1 - 1 \geq 1$ (vgl. Seite 80).
- (2) $\sum_{j=1}^m (\dots) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (\dots)$.
- (3) Geometrische Reihe.

■

Im stufentreuen Fall erhält man die folgende Aussage:

Behauptung 5:

Für stufentreue Baumrekursionen gilt:

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda^j(2^k+r)}}}{\frac{1}{1 - \frac{1}{\rho^j(2^k+r)}}} \leq e^{\frac{1}{2^k-1}}$$

Beweis:

Auch hier im stufentreuen Fall werden die im vorletzten Abschnitt (Satz 3.7) hergeleiteten Abschätzungen benutzt:

$$\begin{aligned}
2^{k+j} + r &\leq \lambda^j(2^k + r) \leq 2^{k+j} + 2^j \cdot r \\
2^{k+j} + 2^j(r+1) - 1 &\leq \rho^j(2^k + r) \leq 2^{k+j+1} - 2^k + r
\end{aligned}$$

Auch sonst ist der Beweis analog zum Beweis im periodischen Fall. Hierzu entsprechende Schritte werden hier nicht noch einmal begründet:

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda^j(2^k+r)}}}{\frac{1}{1 - \frac{1}{\rho^j(2^k+r)}}} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m+1} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^{j+1}(2^k+r) - \lambda^{j+1}(2^k+r)}{(\lambda^{j+1}(2^k+r) - 1)\rho^{j+1}(2^k+r)} \right)^{m+1}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m+1} \cdot \dots \right. \\
&\quad \left. \dots \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{k+j+2} - 2^k + r - (2^{k+j+1} + r)}{(2^{k+j+1} + r - 1)(2^{k+j+1} + 2^{j+1}(r+1) - 1)} \right)^{m+1} \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m+1} \cdot \dots \right. \\
&\quad \left. \dots \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{k+j+1} \overset{\leq 0}{- 2^k}}{(2^{k+j} + \underbrace{2^{k+j} + r - 1}_{\geq 0})(2^{k+j+1} + \underbrace{2^{j+1}(r+1) - 1}_{\geq 0})} \right)^{m+1} \\
&\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{2^k} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \right)^{m+1} \\
&\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right)^{m+1} \\
&= e^{\frac{1}{2^{k-1}}}
\end{aligned}$$

■

C: Nun bietet sich wieder die Möglichkeit, mit dem Beweis des Satzes fortzufahren.

Aus Beh. 3 und Aussage iii) folgt für alle $k \geq 0$, daß z in I_{f_k} liegt.

Behauptung 6:

$|I_{f_k}| \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.

Beweis:

(f_k) liegt nach der Definition auf einem unendlichen Weg und deswegen strebt f_k gegen ∞ für $k \rightarrow \infty$ gilt. Deshalb wird hier gezeigt, daß $|I_s| \rightarrow 0$ für $s \rightarrow \infty$.

Für die Betrachtungen im periodischen Fall muß wieder $s \geq \left\lceil \frac{p \cdot p_0 + 3p}{p_1} \right\rceil$ sein, damit die Abschätzungen auch reziprok gelten (vgl. Beh. 4). Es werden im wesentlichen die Aussagen von Beh. 4 und Beh. 5 benutzt. Daneben ist zu beachten, daß viele

Umformungen deswegen Gültigkeit haben, weil die betrachteten Produkte konvergent sind (es werden nur normierte nicht ausgeartet periodische und normierte stufentreue Fälle betrachtet).

$$\begin{aligned}
|I_s| &= |Q_s| \left| \prod_{k=1}^{\infty} \Delta c_{\lambda^k(s)} - \prod_{k=1}^{\infty} \Delta c_{\rho^k(s)} \right| \\
&\stackrel{\Delta c_n = \frac{1}{1-\frac{1}{n}}}{=} |Q_s| \left| \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda^k(s)}} - \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{\rho^k(s)}} \right| \\
&= |Q_s| \left| \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{\rho^k(s)}} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda^k(s)}}}{\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{\rho^k(s)}}} - 1 \right| \\
&= \underbrace{\left| Q_s \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{\rho^k(s)}} \right|}_{(1) \text{ s.u.}} \left| \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda^k(s)}}}{\frac{1}{1 - \frac{1}{\rho^k(s)}}} - 1 \right| \\
&\leq M \cdot \left| \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda^k(s)}}}{\frac{1}{1 - \frac{1}{\rho^k(s)}}} - 1 \right| \\
&\leq \left\{ \begin{array}{ll} M \cdot \left| \exp \left(\frac{(s+p \cdot p_0 + p_0 - p) \cdot p_0}{(s+2p_0 - p - p \cdot p_0 - 1) \cdot (s+2p_1 - p - p \cdot p_1) \cdot p_1} \right) - 1 \right| & \dots\dots \\ M \cdot \left| \exp \left(\frac{1}{2^{\lfloor \log_2(s) \rfloor - 1}} \right) - 1 \right| & \dots\dots \end{array} \right. \\
&\qquad \left. \begin{array}{l} \dots\dots \text{ periodischer Fall (Beh. 4)} \\ \dots\dots \text{ stufentreuer Fall (Beh. 5)} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Dabei gilt an der mit (1) bezeichneten Stelle: Der markierte Term stellt einen Berührungspunkt von Q_n dar, ist also beschränkt durch

$$M := \text{Maximum aller Berührungspunkte von } Q_n < \infty.$$

Die Majorante von $|I_s|$ strebt gegen Null für $s \rightarrow \infty$, also gilt auch $|I_s| \rightarrow 0$ für $s \rightarrow \infty$. ■

D: Da die I_{f_k} stets abgeschlossene Intervalle mit $I_{f_{k+1}} \subseteq I_{f_k}$ sind¹², ist wegen Beh. 6 $\cap_{k=1}^{\infty} I_{f_k}$ einelementig (Prinzip der Intervallschachtelung). Da $z \in I_{f_k}$ für alle $k \geq 1$ ist, gilt auch $z \in \cap_{k=1}^{\infty} I_{f_k}$ und für jedes $\hat{z} \in \cap_{k=1}^{\infty} I_{f_k}$ ist $\hat{z} = z$. Um zu zeigen, daß z ein δ -Berührungspunkt ist, muß also nur noch gezeigt werden, daß es ein solches $\hat{z}$ gibt, das δ -Berührungspunkt ist. Dies liefert Beh. 7.

Behauptung 7:

$f_0, f_1, f_2, f_3, \dots$ ist ein unendlicher Weg im δ -Baum T mit zugehörigem δ -Berührungspunkt $\hat{z} := \lim_{k \rightarrow \infty} Q_{f_k}$ und es gilt $\hat{z} \in \cap_{k=1}^{\infty} I_{f_k}$.

Beweis:

f_1 liegt in der 1. Stufe von T , ist also Sohn der Wurzel $f_0 = 1$ von T . Für jedes $i \geq 1$ ist f_{i+1} nach der Konstruktion stets ein Sohn von f_i . Damit ist die oben angegebene Folge ein unendlicher Weg in T und das oben definierte $\hat{z}$ ein δ -Berührungspunkt.

Für alle $i \geq 0$ läuft der Weg durch das Label f_i (die Wurzel des Teilbaumes T_{f_i}) und deswegen liegt $\hat{z}$ in I_{f_i} für alle $i \geq 1$ nach Beh. 3. Nach obigen Überlegungen ist deshalb $\hat{z} \in \cap_{k=1}^{\infty} I_{f_k}$. ■

Mit Beh. 7 ist damit z ein δ -Berührungspunkt, was den Beweis vollendet. ■

Bemerkung:

Man könnte der Ansicht sein, daß nach der Konstruktion der Folge von Teilfolgen der Satz 3.12 schon bewiesen wäre und schon hier klar sei, daß die mitkonstruierte Folge (Q_{f_n}) den gleichen Grenzwert hat wie die Folge (Q_{k_n}) . Ein möglicher Grund für diese Annahme ist die Vermutung, daß (Q_{f_n}) und (Q_{k_n}) eine gemeinsame Teilfolge enthalten müßten, was wegen vorliegender Konvergenz einen gleichen Grenzwert zur Folge hätte. In Abbildung 3.19 wird ein sehr einfaches Beispiel vorgestellt, das zeigt, daß beide Folgen noch nicht einmal einen einzigen Wert gemeinsam haben müssen und ein gemeinsamer Grenzwert nicht sofort ersichtlich ist. Kompliziertere Beispiele sind leicht vorstellbar.

Hier muß noch eine Bemerkung zu Abbildung 3.19 folgen, denn in der Bemerkung vor dem Beweis wurde behauptet, daß die konstruierte Folge im allgemeinen nicht explizit angegeben werden kann. Im vorliegenden einfachen Fall ist sie aber explizit anzugeben. Das Problem ist, daß man bei einer beliebigen Teilfolge (im Laufe der Konstruktion) i.a. nicht angeben kann, ob in einem Teilbaum des δ -Baumes unendlich viele ihrer Indices als Labels vorkommen oder nicht! In dem hier vorliegenden Spezialfall ist das aber sehr einfach.

¹²Nach Konstruktion ist f_{k+1} Sohn von f_k im δ -Baum. Mit Beh. 3 folgt daraus die Teilmengen-Eigenschaft.

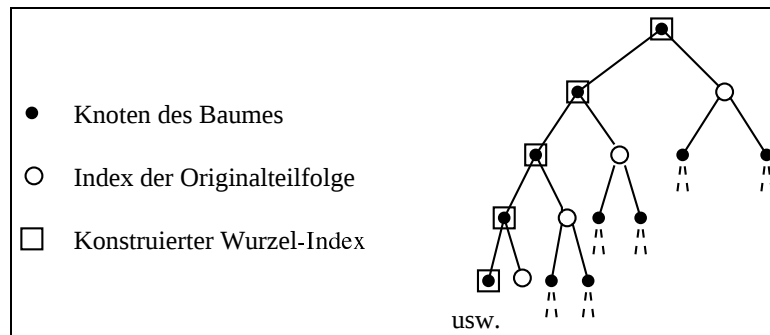


Abbildung 3.19: Ursprungsfolge und konstruierte Folge haben keine gemeinsamen Indices.

Da nun bekannt ist, daß jeder Berührungspunkt Grenzwert einer Teilfolge zu einem unendlichem Weg im δ -Baum ist, stellt sich nun die Frage, wie mächtig die Menge der Berührungspunkte ist. Diese Frage beantwortet der folgende Satz:

Satz 3.13 (Überabzählbar viele Berührungspunkte : $\bar{a}p \cup s$)

Sei (Q_n) die Quotientenfolge einer normierten, nicht ausgearteten, periodischen oder normierten, stufentreuen Baumrekursion. Dann hat Q_n überabzählbar viele Berührungspunkte.

Beweis:

(bis Seite 117)

Wie beim vorigen Beweis wir auch hier vorab eine Gliederung des folgenden Beweises in Abbildung 3.20 vorgestellt. Die Darstellung ist entsprechend gewählt.

A: Sei T im Falle einer stufentreuen Rekursion der δ -Baum von (Q_n) und im Falle einer nicht ausgearteten, periodischen Rekursion der Teilbaum des δ -Baumes mit Wurzel $\left\lceil \frac{p \cdot p_0 + 3p}{p_1} \right\rceil$ (damit die Abschätzungen reziprok gültig sind!).

Hier wird **nicht** gezeigt: **Alle** unendlichen Wege in T ergeben unterschiedliche Berührungspunkte. Deren Anzahl ist überabzählbar.

sondern:

Hier **wird** gezeigt: In T gibt es überabzählbar viele unendliche Wege mit unterschiedlichen Berührungspunkten.

Die Idee des Beweises ist, rekursiv eine Folge von Berührungspunktintervallen derart

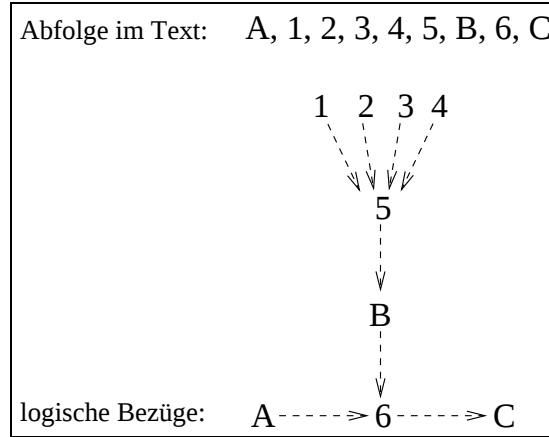


Abbildung 3.20: Gliederung des Beweises von Satz 3.13.

zu zerlegen, daß ein Intervall im nächsten Teilungsschritt in zwei **disjunkte** Teilintervalle zerlegt wird. Es stellt sich heraus, daß diese Zerlegung zu überabzählbar vielen Berührungspunkten führt, die alle verschieden sind.

Betrachte dazu ein Label s in T und das dazugehörige Berührungspunktintervall (vgl. Beh. 3 im Beweis von Satz 3.12)

$$I_s := \left[Q_s \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \Delta c_{\rho^k(s)}, Q_s \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \Delta c_{\lambda^k(s)} \right]$$

Behauptung 1:

Die linke Intervallgrenze von $I_{\rho(s)}$ ist gleich der linken Intervallgrenze von I_s .

Beweis:

$$Q_{\rho(s)} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \Delta c_{\rho^{k+1}(s)} = Q_s \cdot \Delta c_{\rho(s)} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \Delta c_{\rho^{k+1}(s)} = Q_s \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \Delta c_{\rho^k(s)}$$

■

Behauptung 2:

Für alle $n \geq 1$ ist die rechte Intervallgrenze von $I_{\lambda^n(s)}$ ist gleich der rechten Intervallgrenze von I_s .

Beweis:

$$Q_{\lambda^n(s)} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \Delta c_{\underbrace{\lambda^k(\lambda^n(s))}_{\lambda^{k+n}(s)}} = Q_s \cdot \prod_{k=1}^n \Delta c_{\lambda^k(s)} \cdot \prod_{k=n+1}^{\infty} \Delta c_{\lambda^k(s)} = Q_s \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \Delta c_{\lambda^k(s)}$$

■

Behauptung 3:

Die rechte Intervallgrenze von $I_{\rho(s)}$ ist kleiner als die rechte Intervallgrenze von I_s .

Beweis:

Es ist $\rho(s) > \lambda(s)$. Daraus folgt aus Isotoniegründen $\lambda^k(\rho(s)) > \lambda^{k+1}(s)$. Weil $\Delta c_n = \frac{n}{n-1}$ die Relationen umdreht, folgt aus den beiden Ungleichungen:

$$(*) \quad \Delta c_{\rho(s)} < \Delta c_{\lambda(s)}$$

$$(**) \quad \Delta c_{\lambda^k(\rho(s))} < \Delta c_{\lambda^{k+1}(s)}$$

Darum gilt:

$$\begin{aligned} Q_{\rho(s)} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \Delta c_{\lambda^k(\rho(s))} &= Q_s \cdot \Delta c_{\rho(s)} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \Delta c_{\lambda^k(\rho(s))} \\ &\stackrel{(*),(**)}{<} Q_s \cdot \Delta c_{\lambda(s)} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \Delta c_{\lambda^{k+1}(s)} = Q_s \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \Delta c_{\lambda^k(s)} \end{aligned}$$

■

Behauptung 4:

$$\left| I_{\lambda^n(s)} \right| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Beweis:

Folgt aus dem Beweis zu Beh. 6 im Beweis des vorigen Satzes, da $\lambda^n(s) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ gilt.

■

Behauptung 5:

Für alle $s \in T$ gibt es ein $n_0(s)$ mit $I_{\rho(s)} \cap I_{\lambda^{n_0(s)}(s)} = \emptyset$.

Beweis:

Mit den Behauptungen 1 - 4 ergibt sich die in Abbildung 3.21 dargestellte Situation der relativen Lage der zu betrachtenden Intervalle: Nach Behauptung 4 strebt $I_{\lambda^n(s)}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen einen Punkt. Analog zu dem Beweis von Behauptung 3 kann man zeigen, daß dieser Grenzübergang isoton ist. Die Behauptungen 1 bis 3 sagen etwas über die Verhältnisse der Intervallgrenzen aus.

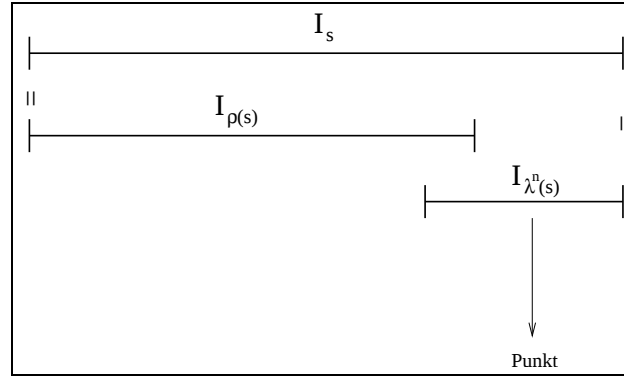


Abbildung 3.21: Relative Lage der Berührungspunkt-Intervalle.

Es ist klar, daß schließlich $I_{\rho(s)}$ und $I_{\lambda^n(s)}$ disjunkt sind. ■

B: Wähle das **spezielle** $n_0(s)$ fest zu jedem s so, daß $n_0(s)$ minimal ist mit $(I_{\rho(s)} \cap I_{\lambda^n(s)} = \emptyset \text{ für alle } n \geq n_0(s))$.

Behauptung 6:

Sei die Menge M folgendermaßen rekursiv definiert:

i) (Wurzel von T) $\in M$

ii) Ist $s \in M$, so sind auch $\rho(s) \in M$ und $\lambda^{n_0(s)}(s) \in M$.¹³

Dann haben alle unendlichen Wege in T , die unendlich oft Labels aus M berühren, unterschiedliche Berührungspunkte.

Beweis:

Seien w_1 und w_2 zwei solche Wege (o.B.d.A. vollständige, d.h. kein Zwischennoten wird ausgelassen) mit Berührungspunkten $z(w_1)$ und $z(w_2)$. Dann haben w_1 und w_2 ein letztes gemeinsames Element $s \in M$.¹⁴ Da w_1 und w_2 verschiedene Wege sind, läuft (o.B.d.A.) w_1 durch $\lambda^{n_0(s)}(s)$ und w_2 durch $\rho(s)$. Damit gilt: $z(w_1) \in I_{\lambda^{n_0(s)}(s)}$ und $z(w_2) \in I_{\rho(s)}$. Da nach Behauptung 5 $I_{\rho(s)} \cap I_{\lambda^{n_0(s)}(s)} = \emptyset$ ist, folgt $z(w_1) \neq z(w_2)$. ■

¹³Wahl von $n_0(s)$ ist fest zu jedem Label s von T !

¹⁴Es ist $s \geq$ (Wurzel von T), da alle Teilwege bei der Wurzel beginnen. Die Existenz eines letzten gemeinsamen Elements s ist trivial. Wäre $s \notin M$, so würde wegen der Konstruktion von M einer der Wege nur endlich oft Elemente aus M berühren: Wenn man die Definition von M rückwärts anwendet, kann man zeigen, daß zu einem Label $u \notin M$ der Teilbaum $T_{\rho(u)}$ mit Wurzel $\rho(u)$ kein Element aus M als Label enthält.

C: Nun müssen die unendlichen Wege in T , die unendlich oft Punkte aus M berühren, abgezählt werden. Eine Skizze der Situation kann in Abbildung 3.22 betrachtet werden.

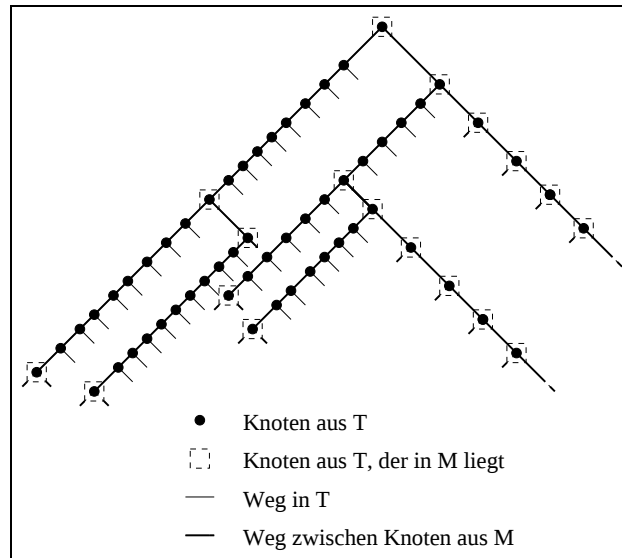


Abbildung 3.22: Darstellung der Wege durch Punkte aus der Menge M .

Indem man die Zwischenknoten, die nicht aus M sind, wegläßt, kann man die unendlichen Wege in dem Baum der Skizze abbilden auf die unendlichen Wege in dem in Abbildung 3.23 dargestellten Baum.

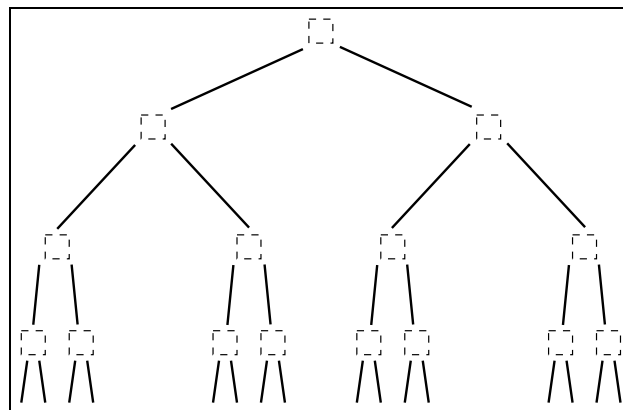


Abbildung 3.23: Wege durch Punkte aus der Menge M ohne Zwischenpunkte.

Dies ist ein unendlicher binärer Baum. Nun muß nur noch gezeigt werden, daß die Anzahl der Wege in einem unendlichen, binären Baum überabzählbar ist.

Beweis dazu:

Jeder unendliche Weg in einem unendlichen binären Baum kann durch eine unendliche $\{0, 1\}$ -Folge beschrieben werden (0=Verzweigung nach links, 1=Verzweigung nach rechts). Die gesuchte Wegeanzahl ist also gleich der Anzahl der $\{0, 1\}$ -Folgen. Die Anzahl der $\{0, 1\}$ -Folgen ist jedoch bekanntermaßen überabzählbar. Dies schließt den Beweis des Satzes ab. ■

Bemerkung:

Es ist eine wohlbekannte Tatsache der Analysis, daß jede reelle Folge mindestens einen (uneigentlichen) Berührungspunkt besitzt. Das andere Extrem der Mächtigkeit der Berührungpunktmenge einer reellen Folge ist eine überabzählbar große Anzahl von Berührungspunkten. Ein bekanntes Beispiel dazu (z.B. bei [Knopp, p. 91 f.]) ist eine Abzählung der rationalen Zahlen, die alle reellen Zahlen als Berührungpunktmenge besitzt.

Man kann der Ansicht sein, daß eine mögliche Einteilung der Komplexität einer Folge über die Mächtigkeit der Berührungpunktmenge möglich ist und Folgen mit überabzählbar vielen Berührungspunkten eine große Komplexität besitzen. Dies kann zumindest bei den hier betrachteten Folgen behauptet werden, während z.B. bei unbeschränkten Folgen drastische Abweichungen bestehen. So hat die Folge $\left(\frac{n}{Q_n}\right)$ zu einer der oben betrachteten Quotientenfolgen (Q_n) zwar nur einen einzigen (uneigentlichen) Berührungspunkt ∞ , ist aber z.B. in Bezug auf das Schwingungsverhalten nicht weniger kompliziert als (Q_n) selbst.

Nun kann man sich noch fragen, ob es Berührungspunkte gibt, die isoliert sind, oder ob sie „dicht“ liegen. Da im Beweis des letzten Satzes einige Aussagen allgemeiner gezeigt wurden, als es dort nötig war, kann man einen Satz über die Dichte der Berührungspunkte leicht folgern, ohne daß weitere Abschätzungen oder ähnliches nötig wären.

Folgerung 3.2 (Dichte der Berührungspunkte : $\bar{a}p \cup s$)

Sei eine normierte, stufentreue oder normierte, periodische, nicht ausgeartete Baumrekursion gegeben. Sei z ein Berührungspunkt der Quotientenfolge (Q_n) der Baumrekursion. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ überabzählbar viele Berührungspunkte $\hat{z} \neq z$ von (Q_n) mit $|z - \hat{z}| < \epsilon$.

Beweis:

Sei z ein beliebiger Berührungspunkt von Q_n . Dann ist er nach Satz 3.12 ein δ -Berühr-

punkt, d.h. es gibt einen unendlichen Weg im δ -Baum, dessen zugehörige Teilfolge von Q_n gegen z strebt. Die Labels dieses unendlichen Weges streben gegen unendlich. Damit strebt nach dem Beweis von Beh. 6 im Beweis von Satz 3.12 die Länge der zugehörigen Berührungspunkt-Intervalle gegen Null. Also gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein Label s auf dem unendlichen Weg, das $|I_s| < \epsilon$ erfüllt. Es ist gezeigt worden, daß alle unendlichen Wege durch s Berührungspunkte nach sich ziehen, die in I_s liegen (Beh. 3 im Beweis von Satz 3.12). Dies gilt auch für z und für jedes $\hat{z} \in I_s$, $\hat{z} \neq z$, gilt: $|z - \hat{z}| < \epsilon$. Nun muß noch gezeigt werden, daß es überabzählbar viele verschiedene $\hat{z}$'s gibt.

O.B.d.A. ist der Teilbaum T_s des δ -Baumes ein Teilbaum des Baumes T aus dem vorigen Beweis (wähle sonst ein „tiefer“ liegendes s). Alle Überlegungen, die im vorigen Beweis über T angestellt wurden, lassen sich direkt auf T_s übertragen (z.B. beginnt die Konstruktion der Menge M bei der Wurzel von T_s anstatt bei der von T). Damit ergibt sich, daß es überabzählbar viele verschiedene Berührungspunkte $\hat{z}$ in I_s gibt. Damit ist die Aussage des Satzes bewiesen. ■

Zusammenfassend wird in Abbildung 3.24 noch einmal dargestellt, bei welchen Klassen von Baumrekursionen eine abzählbare bzw. überabzählbare Menge von Berührungspunkten der Quotientenfolge nachgewiesen werden konnte (vgl. auch Abbildung 2.5 auf Seite 48 und dazugehörige Anmerkungen).

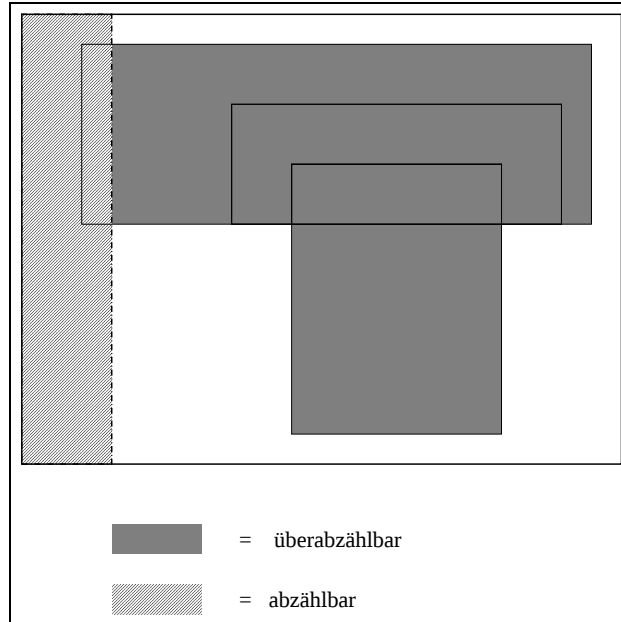


Abbildung 3.24: Berührungspunktzahl der Quotientenfolgen bei Baumrekursionen.

Bemerkung:

Bei der Betrachtung von Abbildung 3.24 erkennt man leicht ein offenes Problem: Wieviele Berührungspunkte hat eine Quotientenfolge, deren kleinere Abstiegsfunktion zwar nicht ausgeartet, aber weder periodisch noch stufentreu ist? Besteht hier irgend ein notwendiger oder hinreichender Zusammenhang zur Beschränktheit der Quotientenfolge? Diese Fragestellungen konnten im Rahmen dieser Arbeit nicht geklärt werden und stellen ein interessantes Problemfeld für zukünftige Untersuchungen dar.

Kapitel 4

Strukturähnlichkeiten bei Baumrekursionen

Dieses Kapitel behandelt im Gegensatz zum vorigen im wesentlichen Probleme, die die „graphische Gestalt“ der Quotientenfolge von Baumrekursionen betreffen. Zu nennen sind das scheinbar periodische Auftreten bestimmter Stücke mit ähnlichem Aussehen sowie Strukturähnlichkeiten bei verschiedenen, nicht monotonen Teilfolgen, die über unendliche Teilbäume des δ -Baumes gebildet werden. Die in diesem Kapitel betrachteten Aspekte werden oft abkürzend mit dem Begriff „**Reihenfolge**“ umschrieben.

4.1 Links- und Rechtsweg-Periodizität

Eine mit den bisherigen Betrachtungen nicht schwierige, jedoch für das Folgenbild zentrale Aussage ist eine gewisse Regelmäßigkeit des Auftretens ähnlicher Werte, die im Folgenbild einen regelmäßig aufgebauten Eindruck erzeugen. Ein Beispiel dazu ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Dort ist der Anfang der Quotientenfolge zur Baumrekursion mit $\alpha = period[0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1]$ dargestellt.

Um einen Grund für dieses Phänomen zu finden, werden im δ -Baum bestimmte unendliche Wege betrachtet, die ab einem bestimmten Label nur noch nach rechts oder nach links verlaufen. Als Linksweg wird eine Folge $s, \lambda(s), \lambda^2(s), \dots$,

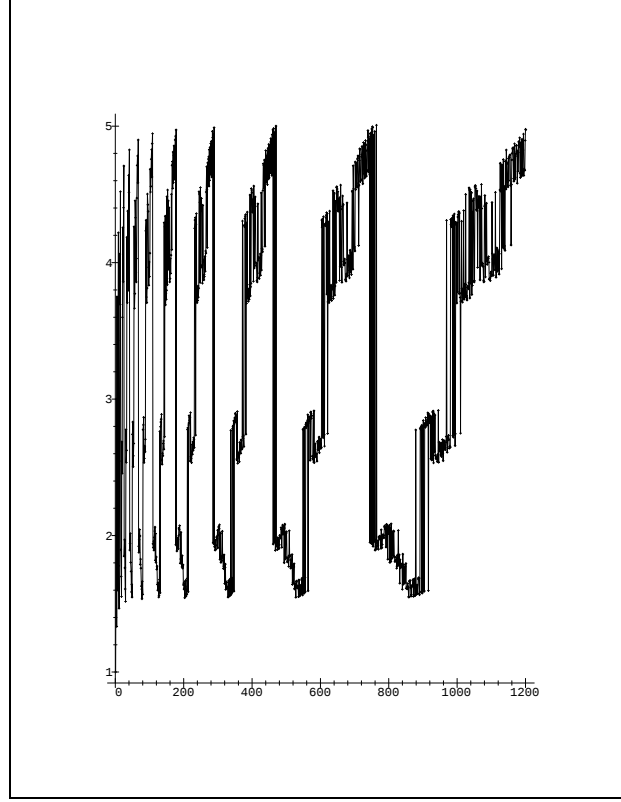


Abbildung 4.1: Quotientenfolge mit Wiederholung ähnlich aussehender Stücke.

als Rechtsweg entsprechend $s, \rho(s), \rho^2(s), \dots$ bezeichnet.¹

Wegen

$$Q_{\rho^k(s)} = \Delta_{c_{\rho^k(s)}} Q_{\rho^{k-1}(s)} \text{ bzw. } Q_{\lambda^k(s)} = \Delta_{c_{\lambda^k(s)}} Q_{\lambda^{k-1}(s)}$$

handelt es sich bei $(Q_{\rho^k(s)})_{k \geq 0}$ und $(Q_{\lambda^k(s)})_{k \geq 0}$ um auffallende, im Falle beschränkter Quotientenfolgen um konvergente, Teilfolgen. Die Frage dieses Abschnitts lautet, wann ein Links-/Rechtsweg wieder durchlaufen wird, wenn er gerade durchlaufen wurde.

¹Es wird hier also abweichend von der Definition unendlicher Wege im δ -Baum nur das „gleichgerichtete“ unendliche Endstück des unendlichen Weges betrachtet. Wesentliche Abweichungen ergeben sich dadurch nicht.

Satz 4.1 (Rechts- und Linksintervalle : $\bar{a}$)*Seien durch*

$$L_0 := \{1\}, \quad L_k := [\lambda^k(1), \lambda^{k+1}(1) - 1]$$

und

$$R_0 := \{1\}, \quad R_k := [\rho^{k-1}(1) + 1, \rho^k(1)]$$

*($\rho^0(1) = 1$) Folgen von (diskreten) **Rechts- und Links-Intervallen** definiert.*

Dann werden alle begonnenen Linkswege aus L_{k-1} in L_k durchlaufen, ferner werden alle begonnenen Rechtswege aus R_{k-1} in R_k durchlaufen. Dabei wird die Reihenfolge stets beibehalten.

Daneben werden in L_k noch Linkswege bzw. in R_k noch Rechtswege neu begründet. Neue Linkswege entstehen an neuen Rechtsabzweigungen, während Linksabzweigungen einen alten Linksweg fortsetzen. Dies ist auch in Abbildung 4.2 illustriert. Bei Rechtswegen ist die Situation spiegelverkehrt entsprechend.

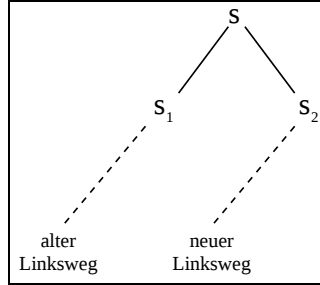


Abbildung 4.2: Bildung neuer und Wiederholung alter Linkswege.

Beweis:

Zeige: Ist $s \in L_k$, so ist $\lambda(s) \in L_{k+1}$.

Dazu: λ ist streng isoton ². Betrachtet man $\lambda^0(1) = 1$, so gilt nach der Definition von L_k :

$$\underbrace{\lambda^k(1) \leq s < \lambda^{k+1}(1)}_{s \in L_k} \xRightarrow{\text{Isotonie}} \underbrace{\lambda^{k+1}(1) \leq \lambda(s) < \lambda^{k+2}(1)}_{\lambda(s) \in L_{k+1}} \quad (4.1)$$

²streng, da jedes Label im δ -Baum genau einmal auftritt.

Die Beibehaltung der Reihenfolge folgt aus der rekursiven Konstruktion des δ -Baumes (Satz 2.4). Man kann dies aber auch mit Hilfe der strengen Isotonie zeigen: $s_1 < s_2 \Rightarrow \lambda(s_1) < \lambda(s_2)$.

Für R_k ist alles analog. ■

Die Aussage bedeutet im Falle der L_k (R_k entsprechend):

L_{k+1} enthält (neben anderen Werten, über die nichts gesagt werden kann) $|L_k|$ Werte, die den Werten aus L_k sehr ähnlich sind; genauer: zu jedem Wert aus L_k enthält L_{k+1} einen sehr ähnlichen, wobei hier unter sehr ähnlich verstanden werden soll, daß die Werte sich nur um einen Faktor $\frac{n}{n-1}$ unterscheiden. Dieser Faktor strebt für $n \rightarrow \infty$ jedoch gegen 1.

Zur Veranschaulichung werden in Abbildung 4.3 jeweils zwei aufeinanderfolgende Rechts- und Links-Intervalle im Diagramm der Quotientenfolge zu $\alpha = \text{period}[0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1]$ markiert.

Da die Links- und die Rechtsintervalle sich je nach Rekursion unterschiedlich durchdringen, entstehen je nach Ähnlichkeit bzw. Unähnlichkeit der beiden Intervallfolgen ganz unterschiedliche Folgenbilder. Dies sei bei den **periodischen, nicht ausgearteten** Baumrekursionen kurz dargestellt.

Bei periodischen Baumrekursionen gilt, wenn man mit Satz 3.5 grob abschätzt:³

$$\lambda^k(1) \approx c \cdot \left(\frac{p}{p_0}\right)^k, \quad \rho^k(1) \approx c \cdot \left(\frac{p}{p_1}\right)^k$$

Wegen der Forderung, daß die Rekursion nicht ausgeartet sein soll, ist $p_1 \geq 1$ und wegen der Normierungsbedingung ist $p_0 \geq p_1$. Es gibt zwei Extremfälle:

- i) möglichst unfairer Fall

$$p_0 = p - 1, \quad p_1 = 1$$

- ii) fairer Fall

$$p_0 = p_1 = \frac{p}{2} \quad p \text{ gerade}$$

³n.b.: $\lambda^k(1)$ ist das linke Intervallende von L_k , $\rho^k(1)$ das rechte Intervallende von R_k .

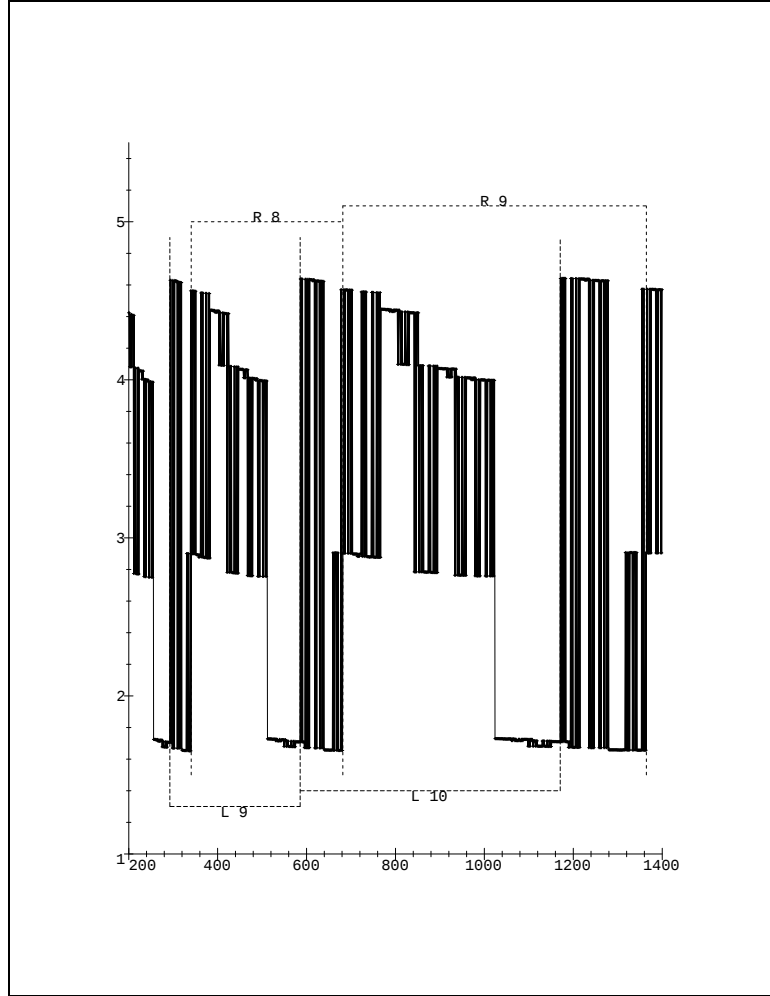


Abbildung 4.3: Links- und Rechts-Intervalle einer Quotientenfolge.

- zu i)

Die Bedingung bedeutet:

$$\lambda^k(1) \approx c \cdot \left(\frac{p}{p-1} \right)^k, \quad \rho^k(1) \approx c \cdot p^k$$

Wählt man p sehr groß, so werden nur selten neue Linkswege gebildet und viel häufiger alte Linkswege durchlaufen. Es kommt hierbei auf $p-1$ alte Linkswege nur ein neuer Linksweg. L_{k+1} besteht somit aus einem hohen Anteil von Werten, die sich von denen aus L_k nur geringfügig unterscheiden.

Schenkt man (z.B. ab einem gewissen ϵ) den Änderungen auf den Links-

wegen keine Beachtung mehr, d.h. man sieht die „sehr ähnlichen“ Werte als gleich an, so überwiegt der Anteil der periodisch wiederholten Werte bei weitem den Anteil abweichender Werte. Dies kann man in Abbildung 4.4 an einem Abschnitt der Quotientenfolge zu $\alpha = \text{period}[0^{39}, 1]$ gut nachvollziehen. Das Folgenbild macht hierbei einen sich gleichmäßig geringfügig ändernden Eindruck.

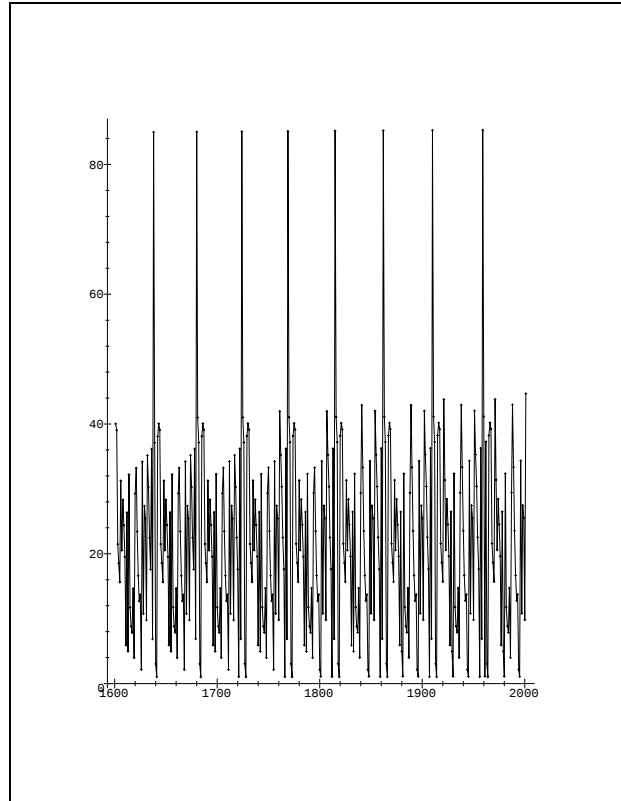


Abbildung 4.4: Scheinbar periodisches Verhalten im unfairen Fall.

Noch extremer wird dies, wenn man die periodischen Abstiegsfunktionen verläßt und noch schwächer wachsende Abstiegsfunktionen α wählt, wie z.B. $\alpha(n) = \lfloor \log_p(n) \rfloor$ zu $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dann wird die Periodizität von $\approx \log_p(n)$ Werten nur alle p^k Werte durchbrochen. Z.B. werden bei $\log_2(n)$ für $n > 1024$ zehn Werte periodisch⁴ wiederholt und bei $n = 2048$ kommt ein elfter Wert hinzu, der dann wieder in die Periodizität aufgenommen wird. Abbildung 4.5 zeigt dies auf einem Stück ohne neu hinzukommenden Linksweg-Wert, um das im Vergleich zum unfair periodischen Fall noch gleichmäßigere Folgenbild darzustellen. (Es handelt sich dabei um den ent-

⁴nur ähnlich

sprechenden Folgenabschnitt wie bei der Abbildung zum unfairen Fall.)

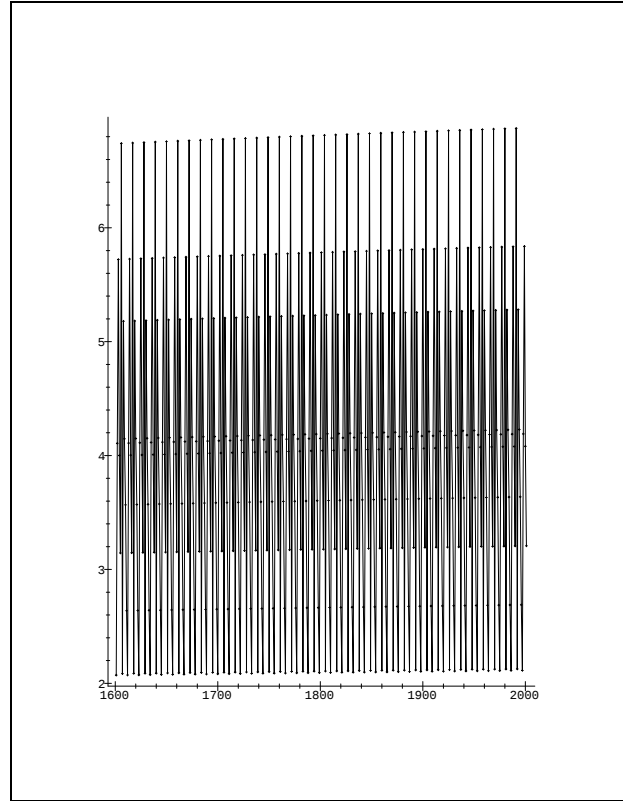


Abbildung 4.5: Scheinbar noch periodischeres Verhalten bei $\alpha(n) = \lfloor \log_2(n) \rfloor$

- zu ii)

Die Bedingung bedeutet:

$$\lambda^k(1) \approx c \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^k = c \cdot 2^k, \quad \rho^k(1) \approx c \cdot 2^k$$

Hier ist ein (Fast-)Gleichgewichts-Zustand zu beobachten. Die Zahl der Durchläufe alter Links-(bzw. Rechts-)wege entspricht ungefähr der Zahl der neu geschaffenen Links-(bzw. Rechts-)wege. Die Intervallängen verdoppeln sich in jedem Schritt und oft sehen die Folgen eingeschränkt auf L_{k+1} wie Verfeinerungen oder Verdopplungen der Folgen eingeschränkt auf L_k aus. Diese Phänomene entstehen dadurch, daß die L_k und die R_k sich weiträumig überschneiden und so auch die neuen (d.h. nicht nur die alten) Linkswege in L_{k+1} oft, aber nicht immer, aus L_k erzeugt werden (neue Linkswege=Rechtsabzweigungen bewirken auch eine große Werte-Ähnlichkeit.). Als

Beispiel wird die fair-periodische Baumrekursion mit $\alpha = \text{period}[0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1]$ in Abbildung 4.6 vorgestellt.

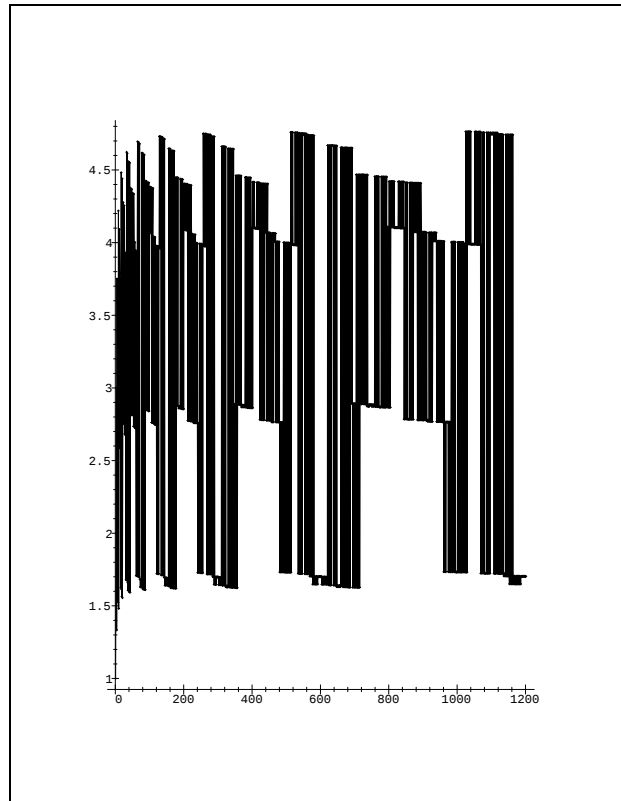


Abbildung 4.6: Ähnlich aufgebaute, größer werdende Abschnitte im fair - periodischen Fall.

Zwischen den beiden mit den Fällen i) und ii) dargestellten Extremen liegen viele hier nicht betrachtete periodische Baumrekursionen. Ziemlich intermediäre Beispiele (vgl. z.B. zu $\alpha = \text{period}[0, 0, 1]$ das links-obere Bild von Abbildung 5.6) zeigen dabei weniger deutliche Struktureigenschaften, während sich beispielsweise „wenig unfaire“ periodische Baumrekursionen ähnlich wie fair-periodische Baumrekursionen verhalten, wie an dem am Anfang dieses Abschnitts in Abbildung 4.1 dargestellten Beispiel zu sehen ist. Hier ist die Zahl der Nullen im 0-1-Code mit acht nur wenig größer als die der sieben Einsen. Das Folgenbild ähnelt daher dem des fair-periodischen Falls.

Noch deutlicher als im fair-periodischen Fall dürfte das Folgenbild gegliedert sein, falls nicht nur alle alten, sondern auch *alle* neuen Linkswege aus L_{k+1} aus den Werten aus L_k gebildet werden, d.h. wenn gilt:

$$L_k = R_k \quad \text{für alle } k \geq 0$$

Dann würden bei Übergang $k \rightarrow k+1$ die Intervalllängen verdoppelt und nur noch neue Links-/Rechtswege aus dem vorigen Intervall gebildet! Der Frage, unter welchen Voraussetzung diese Bedingung gilt, soll im folgenden nachgegangen werden. Dazu werden wieder allgemeine (nicht ausgeartete) Baumrekursionen betrachtet.

Vorher soll jedoch noch ein Beispiel vorgestellt werden, das nachweist, daß diese Aussage aus fairer Periodizität noch nicht folgt:

Beispiel 4.1

Sei $\alpha := \text{period}([0, 0, 1, 1])$. Es wird der δ -Baum-Anfang in Abbildung 4.7 betrachtet.

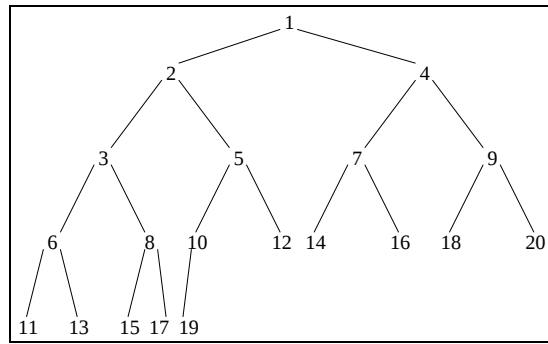


Abbildung 4.7: δ -Baum-Anfang zu $\alpha = \text{period}[0, 0, 1, 1]$.

Die Intervalle sehen zu Beginn folgendermaßen aus:

$$L_0 = \{1\}$$

$$R_0 = \{1\}$$

$$L_1 = \{2\}$$

$$R_1 = \{2, 3, 4\}$$

$$L_2 = \{3, 4, 5\}$$

$$R_2 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$L_3 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$R_3 = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$$

Man sieht, daß sich L_{k+1} und R_k stark überschneiden, aber nicht gleich sind.

Wann Gleichheit auftritt, sagt der folgende Satz:

Satz 4.2 (s)

Die Eigenschaft $L_k = R_k$ für alle $k \geq 0$ erfüllen genau die stufentreuen (normierten) Baumrekursionen.

Beweis:

(bis Seite 131)

Der Beweis wird in zwei Schritten geführt:

- 1. Schritt: Die stufentreuen Baumrekursionen erfüllen $L_k = R_k$ für alle $k \geq 0$. Dies geht aus der Definition der Intervalle in Satz 4.1 und aus Satz 3.6 hervor.
- 2. Schritt: Nur stufentreue Rekursionen erfüllen die Aussage des Satzes.

Sei eine nicht ausgeartete, normierte Baumrekursion gegeben, die $L_k = R_k$ für alle $k \geq 0$ erfüllt.

Behauptung 1:

$|L_{k+1}| = 2 \cdot |L_k|$ für alle $k \geq 0$.

Beweis:

In (4.1) auf Seite 123 ist gezeigt worden, daß $s \in L_k \implies \lambda(s) \in L_{k+1}$ und $s \in R_k \implies \rho(s) \in R_{k+1}$ gelten. Wegen $L_k = R_k$ gilt:

$$s \in L_k \implies \lambda(s) \in L_{k+1}, \rho(s) \in L_{k+1}$$

Damit gilt $|L_{k+1}| \geq 2 \cdot |L_k|$.

Sei nun angenommen, es gäbe ein $t \in L_{k+1}$ mit $t \neq \rho(s)$ und $t \neq \lambda(s)$ für alle $s \in L_k$. Da $k+1 \geq 1$ ist, ist $t > 1$ und es gibt ein $q < t$ mit $t = \lambda(q)$ oder $t = \rho(q)$. Da nach der Annahme q nicht in L_k liegt, könnte q in L_j , $j \leq k-1$ oder in L_{k+1} liegen. Aus dem ersten Fall folgt nach oben gemachten Aussagen, daß $t \in L_{j+1}$ gilt. Dies ist ein Widerspruch, da $j+1 \leq k < k+1$ ist und t folglich nicht in L_{k+1} liegen kann. Der zweite Fall führt analog zu einem Widerspruch, da aus $q \in L_{k+1}$ $t \in L_{k+2}$ folgt. ■

Da $|L_0| = 1$ gilt, folgt aus Behauptung 1:

$$|L_k| = 2^k \text{ für alle } k \geq 0$$

Nach der Definition der Intervalle bedeutet dies:

$$\lambda^k(1) = 2^k, \quad \rho^k(1) = 2^{k+1} - 1 \text{ für alle } k \geq 0$$

Im Gegensatz zu den Abstiegsfunktionen sind die Links- und Rechtsfunktionen immer invertierbar: Die Werte der Links- und Rechtsfunktionen sind Sprungstellen der jeweiligen Abstiegsfunktion und damit auch dort invertierbar. Da α normiert ist, gilt $\lambda = \beta^{-1}$ und $\rho = \alpha^{-1}$. Damit folgt aus der letzten Identität:

Behauptung 2:

$$\beta(2^k) = 2^{k-1}, \quad \alpha(2^{k+1} - 1) = 2^k - 1 \text{ für alle } k \geq 1$$

Beweis:

Mit der letzten Aussage und allgemeinen Rechenregeln für die Pseudoinverse gilt:

$$\begin{aligned} 2^{k-1} &= \lambda^{k-1}(1) = \beta^{-(k-1)}(1) = \beta(\beta^{-1}(\beta^{-(k-1)}(1))) \\ &= \beta(\beta^{-k}(1)) = \beta(\lambda^k(1)) = \beta(2^k) \end{aligned}$$

Für α ist die Aussage analog zu zeigen. ■

Daß $2^k = \lambda^k(1)$ eine Sprungstelle von β ist, bedeutet $2^{k-1} = \beta(2^k) = \beta(2^k - 1) + 1$. Damit gilt mit Behauptung 2:

$$\beta(2^k - 1) = 2^{k-1} - 1 = \alpha(2^k - 1)$$

Dies bedeutet jedoch, daß die Rekursion stufentreu ist. Damit ist der Beweis abgeschlossen. ■

Beispiel 4.2

Zum Abschluß dieses Abschnitts soll noch das Folgenbild einer stufentreuen

Baumrekursion vorgestellt werden. Es sei dazu in freier Weise definiert:

$$\bar{\alpha} := 0, 1, (0, 1)^2, 0^4, 1^4, (0, 1)^8, (0, 1)^{16}, 0^{32}, 1^{32}, (0, 1)^{64}, 0^{128}, 1^{128}, \dots$$

Der Anfang der dazugehörigen Quotientenfolge ist in Abbildung 4.8 dargestellt. Es sei darauf hingewiesen, daß nicht alle stufentreuen Baumrekursionen eine solch schöne Gestalt besitzen.

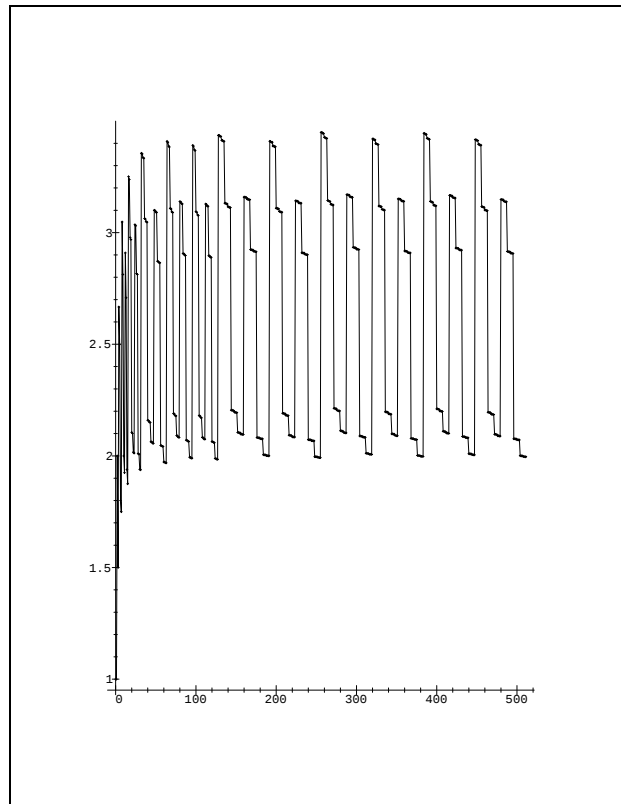


Abbildung 4.8: Quotientenfolge der stufentreuen Baumrekursion aus Beispiel 4.2.

Zusammenfassend wird in Abbildung 4.9 das Ergebnis dieses Abschnitts in Hinblick auf die jeweilige relative Länge der Rechts- und Links-Intervalle bei verschiedenen Klassen von Baumrekursionen dargestellt (vgl auch Abbildung 2.5 auf Seite 48 und dazugehörige Anmerkungen).

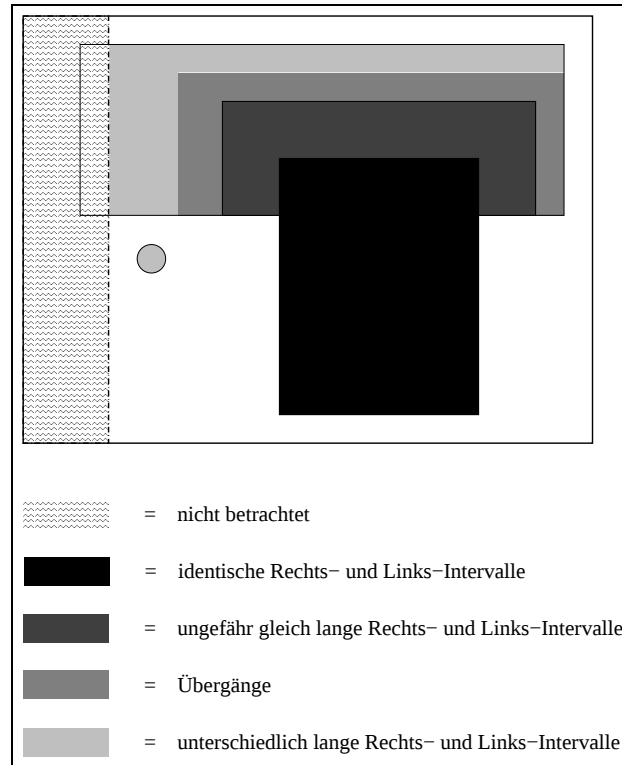


Abbildung 4.9: Rechts- und Links-Intervalle bei verschiedenen Klassen von Baumrekursionen.

4.2 Ordnungsisomorphie von Teilbäumen

Diese Arbeit behandelte bisher im wesentlichen einen Typ von Teilfolgen der Quotientenfolgen, nämlich Teilfolgen entlang von unendlichen Wegen im δ -Baum. Diese Teilfolgen waren stets monoton und oft konvergent. Jetzt soll sich anderen Teilfolgen genähert werden, die keineswegs monoton sind, sondern in ihrem Verhalten der Quotientenfolge sehr ähneln.

Es handelt sich um Teilfolgen zu unendlichen Teilbäumen des δ -Baumes. Es wird dazu ein Teilbaum T_s mit Wurzel s des δ -Baumes T ausgewählt und die Teilfolge genau all jener Folgenwerte Q_n betrachtet, deren Index n Label von T_s ist. Die endgültige Teilfolge $(\tilde{Q}_n)_{n \geq 1}$ entsteht durch Neuindizierung der ausgewählten Werte. Der Vorgang der Teilfolgenbildung wird an einem Beispiel ($\alpha = period[0, 0, 1]$) vorgeführt in Abbildung 4.10.

Es ist zu beachten, daß nach der Neu-Indizierung die Folge $(\tilde{Q}_n)_{n \geq 1}$ die folgende

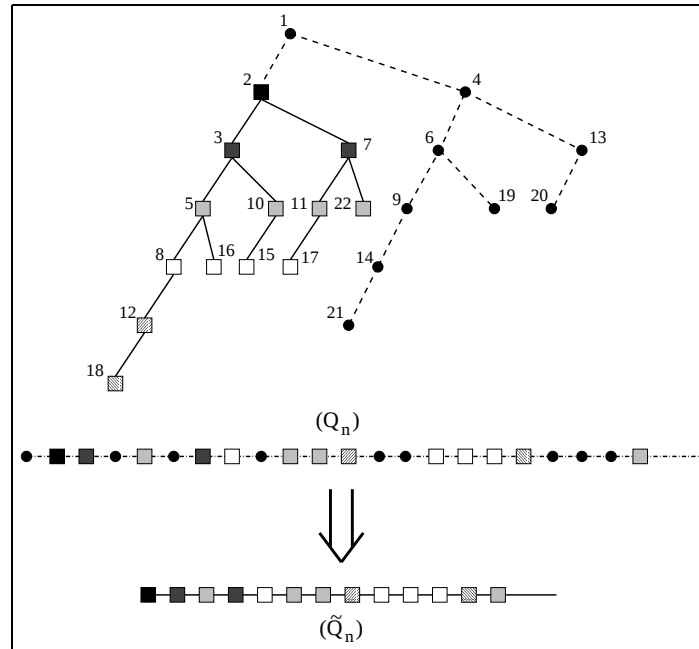


Abbildung 4.10: Bildung einer Teilbaum-Teilfolge.

Darstellung hat:

$$\tilde{Q}_1 = Q_2, \quad \tilde{Q}_2 = Q_3, \quad \tilde{Q}_3 = Q_5, \quad \tilde{Q}_4 = Q_7, \quad \tilde{Q}_5 = Q_8, \dots$$

Um einen Einblick in die Gestalt der Teilbaum-Teilfolgen zu erhalten, werden eine Quotientenfolge und zwei spezielle Teilfolgen in einem Beispiel betrachtet.

Beispiel 4.3

In Abbildung 4.11 wird ein Teilstück der Quotientenfolge zur Baumrekursion mit $\alpha = \text{period}[0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1]$ dargestellt und dazu (in dieser Reihenfolge) im gleichen Argumentbereich die neu indizierten Teilbaumteilfolgen zu Teilbäumen mit Wurzellabels 4 und 5.

Die Teilfolgen des Beispiels sehen der Originalfolge sehr ähnlich, insbesondere entspricht das Hintereinanderfolgen von Auf- und Abschwüngen, sogar in etwa die Größenrelationen der Sprünge der zweiten Teilfolge dem Verhalten der Quotientenfolge. Man fragt sich natürlich, woran das liegt.

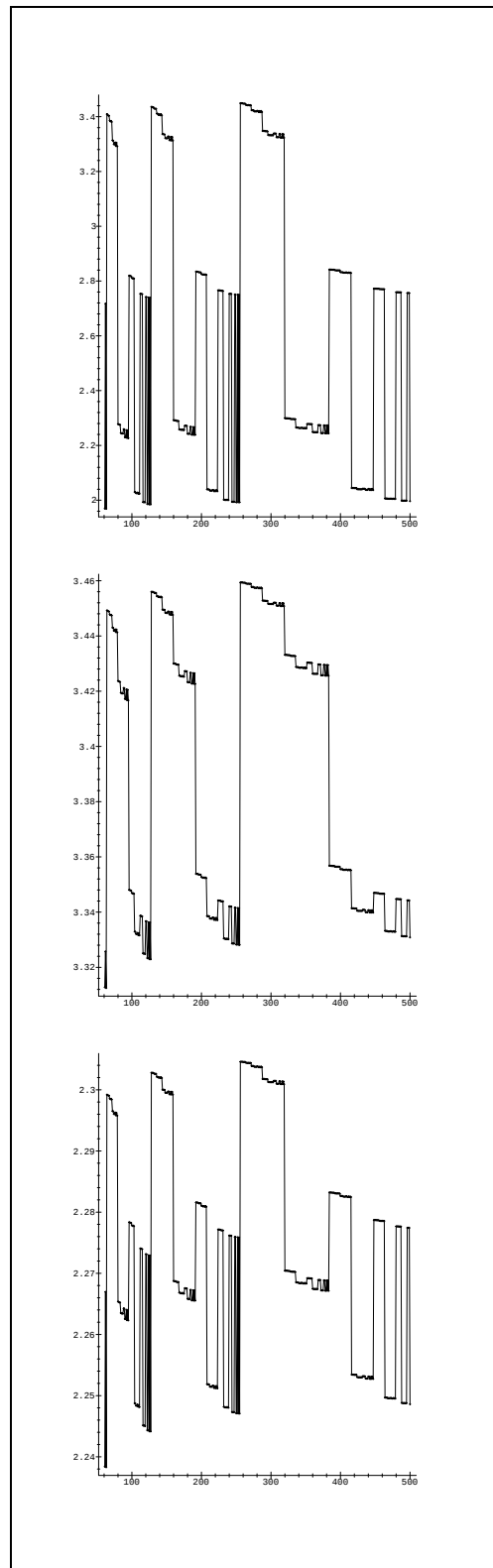


Abbildung 4.11: Quotientenfolge mit zwei Teilbaumteilstolgen.

Eine mögliche Antwort liegt in der Struktur des δ -Baumes. Es ist gezeigt worden, daß der δ -Baum eine starke Ordnung hat und die entsprechenden Ordnungsrelationen auch für die Teilbäume gelten. Der Unterschied ist nur die Größe der entsprechenden Labels, die natürlich eine andere Größenrelation der Randwerte, deren Quotienten und der Werte der Quotientenfolge zur Folge haben. Wesentlicher für das Gesamtbild der Folge ist aber die Reihenfolge des Durchlaufens der einzelnen Stellen des δ -Baumes.

Diese Reihenfolge soll sowohl im δ -Baum wie auch in seinen Teilbäumen vergleichend betrachtet werden. Hinderlich ist dabei, daß jeder Teilbaum eine andere Labelmenge besitzt. Man kann dies durch die folgende Definition ausgleichen:

Definition 4.1 (Abbildung Ψ)

Es wird eine Abbildung Ψ definiert, die Teilbäume von δ -Bäumen auf Bäume in der Standardlabelung abbildet. Dabei wird die Struktur beibehalten, jedoch werden die Labels der Reihenfolge nach auf die natürlichen Zahlen abgebildet. So steht an der Stelle in $\Psi(T_s)$, an der in T_s das n -größte Label steht, das Label n .

Bemerkung:

Es ist zu beachten, daß die Neu-Labelung eines Teilbaumes bei Anwendung der Abbildung Ψ der Neu-Indizierung der entsprechenden Teilbaum-Teilfolge (s.o.) entspricht.

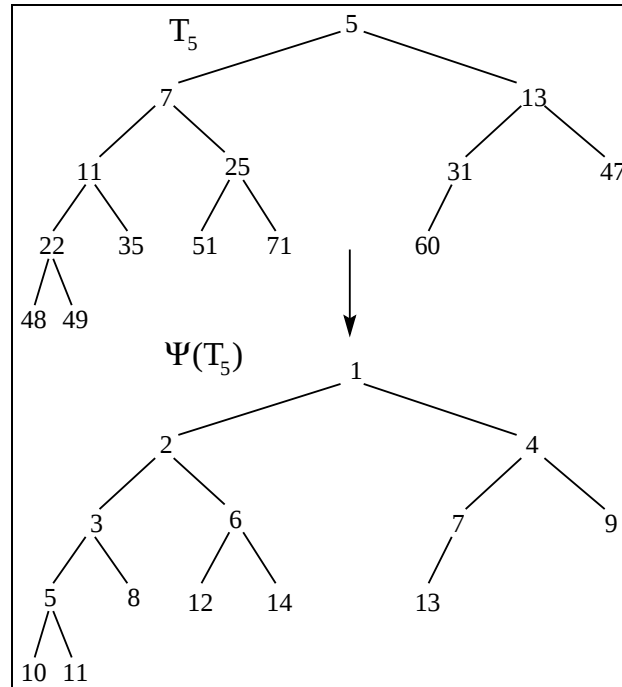
Beispiel 4.4

Den Anfang eines beliebigen (fiktiven!) Teilbaumes und das Bild unter Ψ kann man in Abbildung 4.12 betrachten.

Dort ist im gezeigten Teilbaum-Abschnitt die 5 das kleinste Label⁵. Deswegen steht an derselben Stelle in $\Psi(T_5)$ eine 1. Entsprechend ist die 7 das zweitkleinste Label in T_5 und sie führt zu einer 2 an der entsprechenden Stelle in $\Psi(T_5)$. Analog führt die 11 in T_5 zu der 3 in $\Psi(T_5)$ usw..

Mit Hilfe dieser Abbildung Ψ kann man eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Teilbäume eines δ -Baumes definieren:

⁵wie auch wegen Monotonie von oben nach unten im gesamten Teilbaum - vgl. z.B. Abbildung 3.1.

Abbildung 4.12: Abbildung eines beispielhaften Teilbaumes unter Ψ .**Definition 4.2 (ordnungsisomorph)**

Zwei Teilbäume T_{s_1} und T_{s_2} eines δ -Baumes T einer nicht ausgearteten, normierten Baumrekursion heißen **ordnungsisomorph**, falls $\Psi(T_{s_1}) = \Psi(T_{s_2})$ gilt.

Daß es sich hierbei um eine Äquivalenzrelation handelt, ist sofort ersichtlich und wird nicht extra gezeigt. Im Falle einer Äquivalenzrelation kann man sich immer fragen, wie viele Äquivalenzklassen es gibt. Bei der hier betrachteten Situation könnte es theoretisch mindestens eine Ordnungsisomorphieklasse und maximal abzählbar unendlich viele solcher Klassen geben. Es soll jetzt gezeigt werden, daß diese beiden Möglichkeiten auch angenommen werden.

Beispiel 4.5

Es wird die einfachste nicht ausgeartete, periodische Baumrekursion mit $\alpha = \text{period}[0, 1]$ betrachtet. In diesem Fall haben die Rechts- und die Linksfunktion eine sehr einfache Darstellung, nämlich:

$$\lambda(s) = 2s, \quad \rho(s) = 2s + 1$$

Damit kann man einen beliebigen Teilbaum T_s allgemein darstellen und sehen, daß $\Psi(T_s)$ immer gleich ist, wie Abbildung 4.13 zeigt.

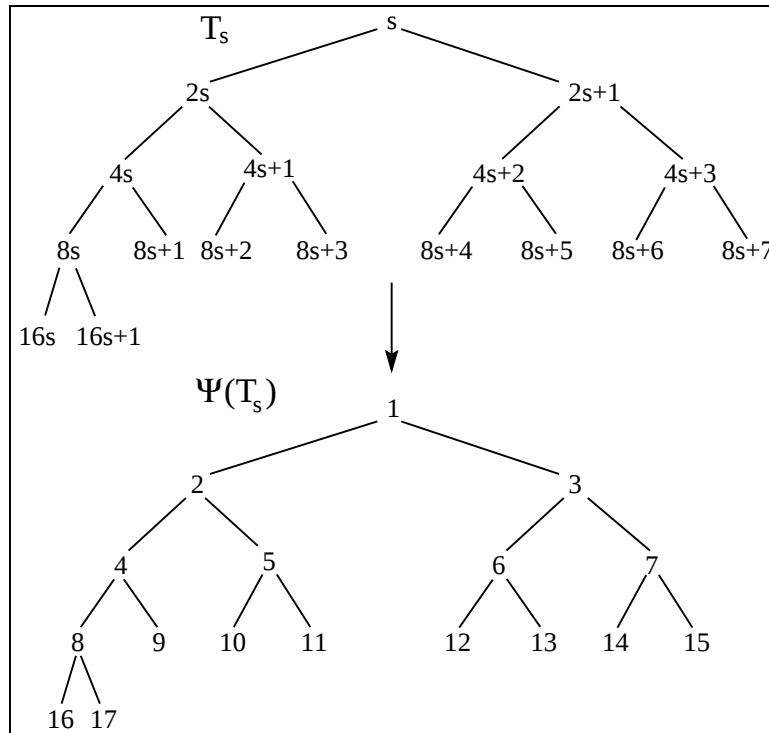


Abbildung 4.13: Abbildung eines beliebigen Teilbaumes aus Beispiel 4.5 unter Ψ .

In diesem Beispiel gibt es also nur eine Klasse von ordnungsisomorphen Teilbäumen, d.h. alle Teilbäume sind zueinander ordnungsisomorph.

Nun stellt sich die Frage, ob es auch Fälle mit unendlich vielen Ordnungsisomorphieklassen von Teilbäumen gibt. Das folgende Beispiel beantwortet diese Frage positiv und zeigt sogar einen Fall für das andere Extrem: es gibt keine ordnungsisomorphen Teilbäume.

Beispiel 4.6

Gegeben sei die Baumrekursion zu

$$\bar{\alpha} := 0^2, 1, 0^4, 1, 0^6, 1, 0^8, 1, 0^{10}, 1, 0^{12}, 1, \dots$$

Dann sind alle Teilbäume des δ -Baumes T paarweise **nicht** zueinander ordnungsisomorph.

Der Beweis dieser Aussage wird im wesentlichen in fünf Schritten geführt, wobei zur besseren Übersicht auch hier (wie sonst in Beweisen) beweisinterne Behauptungen ausgegliedert werden. Die zweite Behauptung folgt aus der ersten, die vierte aus der dritten. Schließlich folgt die fünfte Behauptung aus der zweiten und der vierten Behauptung.

Die im Beispiel aufgestellte Behauptung wird dadurch gezeigt, daß das Label des rechten Sohnes der Wurzel von $\Psi(T_s)$ für verschiedene s stets verschieden ist. Genauer wird gezeigt, daß das angesprochene Label bei $(s+1)$ mindestens um 1 größer ist als bei s . Damit ist dieses Label in $\Psi(T_{s_i})$ $i \in \{1, 2\}$ für zwei verschiedene Teilbäume T_{s_1} und T_{s_2} niemals identisch und die Teilbäume sind dementsprechend auch niemals ordnungsisomorph.

Nun stellt sich die Frage, wie man die gesuchten Labels erhält. Definiert man mit $T_s^{(n)}$ den endlichen Teilbaum von T_s (des Teilbaumes von T mit Wurzel s) mit ausschließlich allen Labels $\leq n$, so erhält man das gesuchte Label $\rho(1)$ von $\Psi(T_s)$ als $|T_s^{(\rho(s))}|$. Dies wird verständlich, wenn man beachtet, daß in beiden Bäumen die gleiche Stelle betrachtet wird, und die rekursive Konstruktion des δ -Baumes als zeitliche Entwicklung angesehen wird: Dann gibt $|T_s^{(n)}|$ die Anzahl der Labels von T_s zum „Zeitpunkt“ n an und folglich $|T_s^{(\rho(s))}|$ das gesuchte Label, da $\rho(s)$ das in $T_s^{(\rho(s))}$ zuletzt eingefügte Label ist. Die Abbildung 4.14 zeigt die im folgenden betrachteten Teilbäume $T_s^{(\rho(s))}$ und $T_{s+1}^{(\rho(s))}$, d.h. T_s und T_{s+1} jeweils zum „Zeitpunkt“ $\rho(s)$. Deren Größenunterschied ist maßgeblich für die zu zeigende Aussage. $T_{s+1}^{(\rho(s))}$ besteht nur aus einem Linksweg, der bei $(s+1)$ startet, während $T_s^{(\rho(s))}$ neben einem Linksweg zusätzlich noch ein Rechtslabel $\rho(s)$ enthält. Diese Beobachtung führt dazu, erst einmal Linkswege mit benachbarten Start-Labels genauer zu betrachten.

Sei der beim Label s startende Linksweg zum „Zeitpunkt“ n definiert durch $l_s^{(n)} := \{\lambda^i(s) \leq n, i \geq 0\}$. Mit dieser Definition gilt die folgende Behauptung.

Behauptung 1:

Für Linkswege mit aufeinanderfolgenden Start-Labels in δ -Bäumen nicht ausgearteter Baumrekursionen gilt die folgende Abschätzung:

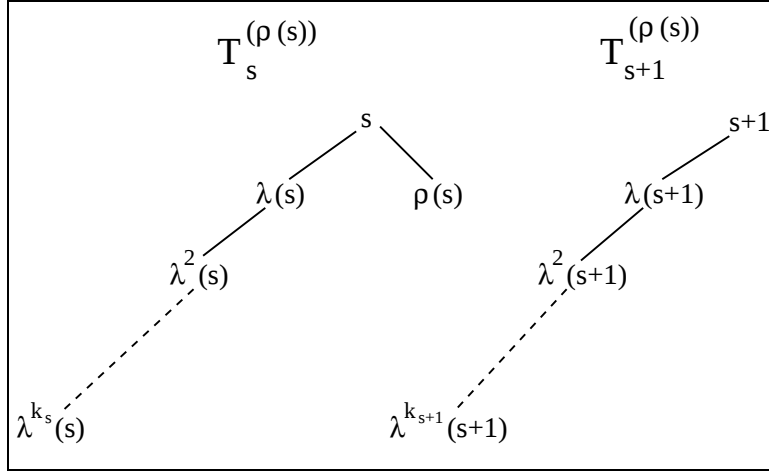


Abbildung 4.14: Teilbäume $T_s^{(\rho(s))}$ und $T_{s+1}^{(\rho(s))}$.

$$|l_s^{(n)}| - |l_{s+1}^{(n)}| \leq 1 \quad n \geq 1, s \geq 1$$

Beweis:

Es werden zwei Fälle unterschieden: Ist im ersten Fall das Label $s+1$ linker Sohn von s , so gilt für $n \geq s$ die Beziehung $|l_s^{(n)}| - |l_{s+1}^{(n)}| = 1$, da der eine Linksweg den andere enthält. Für $n < s$ haben beide Linkswege kein Label und deswegen ist die Differenz Null.

Im anderen Fall sind beide Linkswege disjunkt. Wird an den bei s beginnenden Linksweg ein weiteres Element angefügt, so wird das nächste Element, das an einen der beiden Linkswege angefügt wird, an den bei $(s+1)$ beginnenden Linksweg angehängt, da aus $s < s+1 < \lambda(s)$ (hier ist $s+1 \neq \lambda(s)$) stets $\lambda^k(s) < \lambda^k(s+1) < \lambda^{k+1}(s)$ folgt. Damit hat zu jedem Zeitpunkt der bei s startende Linksweg maximal ein Label mehr als der bei $s+1$ startende Linksweg. ■

Wie schon gesagt, besteht $T_{s+1}^{(\rho(s))}$ nur aus dem Linksweg $l_{s+1}^{(\rho(s))}$, während $T_s^{(\rho(s))}$ neben dem Linksweg $l_s^{(\rho(s))}$ noch das Label $\rho(s)$ enthält. Damit folgt aus der vorigen Behauptung direkt die folgende Behauptung.

Behauptung 2:

Für Teilbäume mit aufeinanderfolgenden Wurzel-Labels von δ -Bäumen nicht ausgearteter Baumrekursionen gilt die folgende Abschätzung:

$$\left| T_s^{(\rho(s))} \right| - \left| T_{s+1}^{(\rho(s))} \right| \leq 2 \quad s \geq 1$$

Bevor diese allgemeinen Aussagen benutzt werden können, müssen erst Informationen über die hier betrachtete spezielle Baumrekursion gesammelt werden. Den Anfang macht die folgende Behauptung.

Behauptung 3:

Für die hier betrachtete Baumrekursion gilt für $n \geq 1$: Zum „Zeitpunkt“ $\rho(n)$ existieren $n+1$ Linkswege. Diese werden anschließend bis zum „Zeitpunkt“ $\rho(n+1)$ jeweils genau zweimal durchlaufen! (Zum „Zeitpunkt“ 1 existiert 1 Linksweg, der anschließend bis zum „Zeitpunkt“ $\rho(1)$ genau zweimal durchlaufen wird.)

Beweis: Dem „Zeitpunkt“ $\rho(n)$ entspricht die n -te 1 im 0-1-Code $\bar{\alpha}$. Mit der Wurzel wird im δ -Baum der erste Linksweg begründet. Jedes neue Linkselement (0 im 0-1-Code $\bar{\alpha}$) ändert die Anzahl der vorhandenen Linkswege nicht, während jedes Rechtselement $\rho(n)$ (1 im 0-1-Code $\bar{\alpha}$) die Zahl der Linkswege um eins erhöht. Damit gibt es zum „Zeitpunkt“ $\rho(n)$ genau $(n+1)$ Linkswege.

Der zweite Teil der Behauptung wird direkt dadurch begründet, daß zwischen der n -ten und der $(n+1)$ -ten 1 im 0-1-Code $\bar{\alpha}$ genau $2n+2$ Nullen stehen, d.h. genau doppelt so viele wie es „es zu dieser Zeit“ Linkswege gibt. Also wird jeder existierende Linksweg genau zweimal durchlaufen. (Zu Beginn des 0-1-Codes $\bar{\alpha}$ stehen genau zwei Nullen und es gibt einen Linksweg, also auch hier genau doppelt so viele Durchläufe wie Linkswege.)

■

Hieraus folgt direkt die folgende Behauptung.

Behauptung 4:

Im Fall der hier betrachteten Baumrekursion gilt für $s \geq 1$:

$$\left| T_{s+1}^{(\rho(s+1))} \right| = \left| T_{s+1}^{(\rho(s))} \right| + 3$$

Beweis:

Wie gesagt, besteht $T_{s+1}^{(\rho(s))}$ ausschließlich aus dem Linksweg $l_{s+1}^{(\rho(s))}$. Vom Zeitpunkt $\rho(s)$ bis zum Zeitpunkt $\rho(s+1)$ wird nach Behauptung 3 jeder Linksweg, also auch dieser genau zweimal durchlaufen, was zwei neue Linkselemente bewirkt. Daneben erhält $T_{s+1}^{(\rho(s+1))}$ zum Zeitpunkt $\rho(s+1)$ noch ein zusätzliches (nämlich sein

erstes!) Rechtselement $\rho(s+1)$. Damit hat $T_{s+1}^{(\rho(s+1))}$ insgesamt drei Labels mehr als $T_{s+1}^{(\rho(s))}$. ■

Setzt man Behauptung 2 in Behauptung 4 ein, so erhält man die folgende Aussage.

Behauptung 5:

Für die hier betrachtete Baumrekursion gilt für $s \geq 1$:

$$|T_{s+1}^{(\rho(s+1))}| \geq |T_s^{(\rho(s))}| + 1$$

Dies beweist die Aussage dieses Beispiels.

Damit ist gezeigt worden, daß bei nicht ausgearteten Baumrekursionen alle Teilbäume oder auch gar keine Teilbäume ordnungsisomorph sein können d.h. insb. sowohl eine als auch (abzählbar) unendlich viele Ordnungsisomorphieklassen auftreten. Es wird jetzt langsam auf einen Fall hingearbeitet, in dem **immer** nur endlich viele Klassen von ordnungsisomorphen Teilbäumen auftreten.

Wie soll man so etwas jedoch beweisen?

Wann sind T_{s_1} und T_{s_2} ordnungsisomorph?

Es ist zum Glück nicht unbedingt nötig, $\Psi(T_{s_i})$ zu bilden, um die Ordnungsisomorphie zu untersuchen. Man kann nämlich auch folgendermaßen vorgehen:

Man betrachtet zwei beliebige Stellen im δ -Baum T , Stelle X und Stelle Y. T_{s_1} und T_{s_2} sind dann ordnungsisomorph, wenn für jede Wahl von Stelle X und Stelle Y gilt:

Das Label von T_{s_1} an der Stelle X ist kleiner als das Label von T_{s_1} an der Stelle Y genau dann, wenn das Label von T_{s_2} an der Stelle X kleiner ist als das Label von T_{s_2} an der Stelle Y ist. Die Situation ist auch in Abbildung 4.15 dargestellt. Unter den dort dargestellten Voraussetzungen muß stets gelten: $x_1 < y_1 \Leftrightarrow x_2 < y_2$. (Für das Verständnis ist es hier wieder nützlich, sich die Situation in Abbildung 4.15 als Schablone vorzustellen, die an den Stellen X und Y die entsprechenden Labels x_i und y_i sichtbar werden läßt, wenn man sie an die Wurzel eines Teilbaumes anlegt.)

Bemerkung:

Gleichheit kann nicht auftreten, da an unterschiedlichen Stellen im δ -Baum stets unterschiedliche Labels stehen.

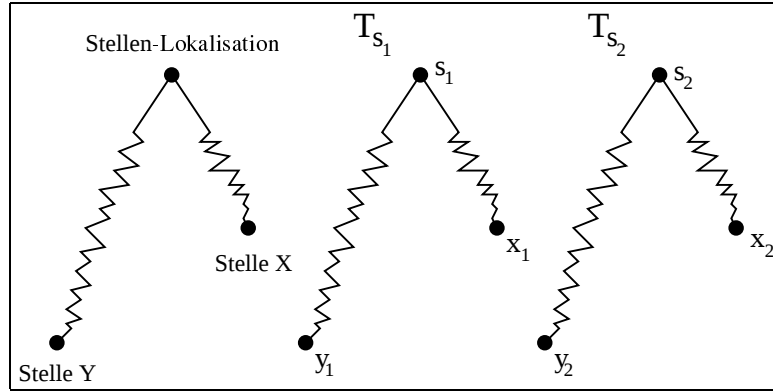


Abbildung 4.15: Situation zu zwei Stellen in verschiedenen Teilbäumen.

Dieses Kriterium wird bei den folgenden Beweisen benutzt werden, aber in einer formaleren Form, denn die Stellen werden wieder als Verkettungen der Rechts- und der Linksfunktion beschrieben:

$$\zeta := [\zeta_i, \dots, \zeta_1], \quad \zeta_k \in \{\lambda, \rho\} \quad (1 \leq k \leq i)$$

$$\xi := [\xi_j, \dots, \xi_1], \quad \xi_k \in \{\lambda, \rho\} \quad (1 \leq k \leq j)$$

Dann ist das Label von T_{s_1} an der Stelle ζ genau $\zeta(s_1)$! Die Bedingung für Ordnungsisomorphie wird nun folgendermaßen umformuliert:

Lemma 4.1

T_{s_1} und T_{s_2} sind ordnungsisomorph genau dann, wenn für alle Stellen ζ und ξ gilt:

$$\zeta(s_1) < \xi(s_1) \Leftrightarrow \zeta(s_2) < \xi(s_2)$$

Bemerkung:

Die hierbei behauptete, eigentlich zu beweisende Äquivalenz, ist nur eine Umformulierung der Definition der Ordnungsisomorphie, die die Abbildung Ψ umgeht. Sie wird nur der Hervorhebung wegen als Lemma formuliert.

Im folgenden sollen **periodische** (nicht ausgeartete) Baumrekursionen betrachtet werden und die Eigenschaften von ζ und ξ untersucht werden. Sei dazu:

$i_0 :=$ Anzahl des Auftretens von λ im ζ -definierenden Vektor $[\zeta_i, \dots, \zeta_1]$

$i_1 :=$ Anzahl des Auftretens von ρ im ζ -definierenden Vektor $[\zeta_i, \dots, \zeta_1]$

Sei j_0 und j_1 entsprechend für ξ über $[\xi_j, \dots, \xi_1]$ definiert.

Hiermit beweist man nun ein Lemma, das später ermöglichen wird, die Werte an verschiedenen Stellen zu vergleichen. Zum Verständnis des Lemmas vgl. in Abschnitt 3.2 die Definitionen im Zusammenhang mit periodischen Abstiegsfunktionen und ihren Pseudo-Inversen. (vgl. z.B.: p_0 und p_1 geben die Anzahl der Einsen im definierenden Vektor an, während 0_s bzw. 1_s die Stelle im Vektor angibt, an der die s -te 0 bzw. 1 steht. Weiter ist $p_0 + p_1 = p$.)

Lemma 4.2 ($\bar{a}fp$)

Seien eine fair-periodische, nicht ausgeartete Baumrekursion gegeben und ζ **fest** wie oben definiert. Dann gibt es eine Abbildung $\mathcal{R} : \mathbb{N}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1}$ und es gilt für $n \geq 0$ und $1 \leq r \leq p_0$:

$$\zeta(p_0 \cdot n + r) = 2^{i_0+i_1} \cdot p_0 \cdot n + \mathcal{R}(r) = 2^i \cdot p_0 \cdot n + \mathcal{R}(r)$$

Zu beachten ist, daß $\mathcal{R}(r)$ nur vom **Rest** r und **nicht** von n abhängt!

Beweis:

Dies wird durch Induktion über $i \geq 1$ (Anzahl der verketteten (λ, ρ) -Funktionen in ζ) bewiesen:

$i = 1$:

Aus Satz 3.3 weiß man, daß für $\zeta \in \{\lambda, \rho\}$ und $x := 0$ für $\zeta = \lambda$ sowie $x := 1$ für $\zeta = \rho$ gilt für $s \geq 1$ (zu beachten ist: $p_0 = p_1$, $p = 2 \cdot p_0$):

$$\zeta(s) = p \cdot ((s-1) \operatorname{div} p_0) + 1 + x_{((s-1) \bmod p_0)+1}$$

Sei $s = p_0 \cdot n + r$ wie in der Voraussetzung. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= p \cdot ([n \cdot p_0 + r - 1] \operatorname{div} p_0) + 1 + x_{([n \cdot p_0 + r - 1] \bmod p_0) + 1} \\
&= \underbrace{p}_{=: 2 \cdot p_0} \cdot n + \underbrace{1 + x_r}_{=: \mathcal{R}(r)}
\end{aligned}$$

Dabei hängt $\mathcal{R}(r)$ nur von r und nicht von n ab. Weiter ist trivialerweise $\mathcal{R}(r) \geq 1$. Damit ist der Induktionsanfang bewiesen.

$i \rightarrow i + 1$:

Es seien $\zeta := [\zeta_{i+1}, \zeta_i, \dots, \zeta_1]$ und $\zeta^* := [\zeta_i, \dots, \zeta_1]$ sowie i_0^* bzw. i_1^* entsprechend zu ζ^* definiert wie i_0 und i_1 zu ζ .⁶ Dann gilt nach der Induktionsvoraussetzung.

$$\zeta(p_0 \cdot n + r) = \zeta_{i+1}(\zeta^*(p_0 \cdot n + r)) \stackrel{\text{Ind.vor.}}{=} \zeta_{i+1}(2^i \cdot p_0 \cdot n + \mathcal{R}_1(r))$$

Weiterhin ist nach der Induktionsvoraussetzung $\mathcal{R}_1(r) \geq 1$ und $\mathcal{R}_1(r)$ unabhängig von n . Damit kann man die Darstellung $\mathcal{R}_1(r) =: p_0 \cdot y + r^*$ mit $1 \leq r^* \leq p_0$ aufstellen, wobei auch y und r^* nur von r und nicht von n abhängen. Nun setzt man diese Darstellung in das obige Zwischenergebnis ein und wendet darauf den Induktionsanfang an:

$$\begin{aligned}
\zeta(p_0 \cdot n + r) &= \zeta_{i+1}(2^i \cdot p_0 \cdot n + \mathcal{R}_1(r)) = \zeta_{i+1}(p_0(2^i \cdot n + y) + r^*) \\
&\stackrel{\text{Ind.anf.}}{=} 2 \cdot p_0(2^i \cdot n + y) + \mathcal{R}_2(r^*) = 2^{i+1} \cdot p_0 \cdot n + \underbrace{2 \cdot y + \mathcal{R}_2(r^*)}_{=: \mathcal{R}(r)}
\end{aligned}$$

Da nach dem Induktionsanfang $\mathcal{R}_2(r^*)$ nur von r^* und nicht von $2^i \cdot n + y$ abhängt und y und r^* nur von r abhängen, gilt dies auch für $\mathcal{R}(r) = 2 \cdot y + \mathcal{R}_2(r^*)$. Da $r^* \geq 1$ ist und nach dem Induktionsanfang auch $\mathcal{R}_2(r^*) \geq 1$ gilt, ist damit auch $\mathcal{R}(r) \geq 1$. Insgesamt folgt der Beweis des Induktionsschrittes und damit die Behauptung. ■

Nun kann man dieses Lemma gleichzeitig auf zwei „Stellen-Funktionen“ ζ und ξ anwenden und erhält dabei einen interessanten Zusammenhang:

⁶n.b.: $i_0 + i_1 = i + 1$, $i_0^* + i_1^* = i$.

Lemma 4.3 (Relationen in δ -Bäumen fair-period. Baumrek.: $\bar{a}fp$)

Seien ζ und ξ beliebig, aber fest, wie oben definiert. Dann gibt es in der Beziehung zwischen ζ und ξ zwei Fälle:

1. Für festes r mit $1 \leq r \leq p_0$ gilt:

$(\zeta(p_0 \cdot n + r) < \xi(p_0 \cdot n + r) \text{ für alle } n \geq 0) \text{ oder } (\zeta(p_0 \cdot n + r) > \xi(p_0 \cdot n + r) \text{ für alle } n \geq 0),$

d.h. die Größenrelation von ζ und ξ ist periodisch modulo p_0 .

2. Es gibt ein $s_0 \in \mathbb{N}$ mit $(\zeta(s) < \xi(s) \text{ für alle } s \geq s_0) \text{ oder } (\zeta(s) > \xi(s) \text{ für alle } s \geq s_0),$

d.h. die Größenrelation zwischen ζ und ξ ist schließlich einheitlich.

Beweis:

Nach dem gerade bewiesenen Lemma haben ζ und ξ die folgende Darstellung:

$$\zeta(p_0 \cdot n + r) = 2^i \cdot p_0 \cdot n + \mathcal{R}_1(r)$$

$$\xi(p_0 \cdot n + r) = 2^j \cdot p_0 \cdot n + \mathcal{R}_2(r)$$

Es existieren zwei Fälle:

Fall 1: $i = j$:

Dann ist $\zeta(p_0 \cdot n + r) - \xi(p_0 \cdot n + r) = \mathcal{R}_1(r) - \mathcal{R}_2(r)$. Da Labels immer verschieden sind, kann für $\zeta \neq \xi$ nie $\mathcal{R}_1(r) - \mathcal{R}_2(r) = 0$ auftreten. Darum ist (bei festem r) entweder $\mathcal{R}_1(r) - \mathcal{R}_2(r) < 0$, was $\zeta(p_0 \cdot n + r) < \xi(p_0 \cdot n + r)$ für alle $n \geq 0$ zur Folge hat, oder $\mathcal{R}_1(r) - \mathcal{R}_2(r) > 0$, was $\zeta(p_0 \cdot n + r) > \xi(p_0 \cdot n + r)$ für alle $n \geq 0$ bedingt. Dies ist der erste Teil der Behauptung.

Fall 2: $i \neq j$:

Dann ist entweder $i < j$ oder $i > j$. Man sieht leicht, daß in Abhängigkeit der Konstanten $\mathcal{R}_1(1), \dots, \mathcal{R}_1(p_0)$ und $\mathcal{R}_2(1), \dots, \mathcal{R}_2(p_0)$ schließlich eine der beiden Funktionen über die andere hinauswächst. Dies ist der zweite Teil der Behauptung. ■

Nun ist der Zeitpunkt gekommen, um wieder eine Aussage über Teilbaum-Ordnungsisomorphie zu treffen. Diese Aussage folgt fast direkt aus dem vorigen Lemma. Sie soll aber wegen ihrer Tragweite als Satz formuliert werden.

Satz 4.3 (Endliche Zahl von Ordnungsisomorphieklassen : $\bar{a}fp$)

Bei normierten, fair-periodischen Baumrekursionen gibt es nur **endlich viele** Klassen ordnungsisomorpher Teilbäume des δ -Baumes.

Beweis:

Wenn man das vorige Lemma benutzt, kann man für zwei Funktionen ζ und ξ folgern, daß sie als Stellen betrachtet entweder eine unterschiedliche Tiefe im δ -Baum besitzen, d.h. $i \neq j$ ist und damit eine der beiden Funktionen schließlich größer wird, oder ζ und ξ die gleiche Tiefe haben. In diesem Fall ist ihre Größenrelation konstant modulo p_0 .

Wenn man nun zeigen könnte, daß es ein $s_1 \in \mathbb{N}$ gibt, sodaß **alle** schließlich in ihrer Größenrelation einheitlichen Funktionspaare diese schließliche Eigenschaft gleichmäßig ab s_1 besitzen, so wäre der Satz bewiesen. Denn dann es gäbe nur endlich viele Ordnungsisomorphie-Typen mit folgenden Vertretern: die schließlich gültigen Funktionspaare sind ab s_1 immer gleich. Für diese braucht man also höchstens die Typen $\Psi(T_1), \dots, \Psi(T_{s_1})$. Da alle anderen Funktionspaare periodisch modulo p_0 sind, benötigt man hierfür maximal noch die Typen $\Psi(T_{s_1+1}), \dots, \Psi(T_{s_1+p_0})$, denn es ist $\Psi(T_{s_1+k \cdot p_0+r}) = \Psi(T_{s_1+r})$ für $1 \leq r \leq p_0$ und alle $k \geq 0$. Dies gilt wegen der entsprechenden Periodizität des einen Teils der Funktionspaare und weil alle anderen Funktionspaare ab s_1 immer die gleiche Relation besitzen.

Nun muß nur noch die Existenz einer solchen gleichmäßigen Schranke s_1 nachgewiesen werden:

Sei o.B.d.A. schließlich $\zeta < \xi$ (diese seien wie oben definiert) mit $i = i_0 + i_1$ und $j = j_0 + j_1$. Da nach der Ordnung im δ -Baum stets das größte Label einer Stufe am weitesten rechts in dieser Stufe steht und das entsprechende kleinste am weitesten links, gilt hier $\zeta(s) \leq \rho^i(s)$ und $\xi(s) \geq \lambda^j(s)$. Hinreichend für $\zeta(s) < \xi(s)$ ist also $\rho^i(s) < \lambda^j(s)$. Dies wird mit der gleichen Zielrichtung weiter abgeschätzt und die Aussage von Satz 3.5 benutzt (wobei hier gilt: $p_0 = p_1$ und $\frac{p}{p_0} = \frac{2p_0}{p_0} = 2$):

$$\begin{aligned} \rho^i(s) &\leq \left(\frac{p}{p_1}\right)^i \cdot \left(s + \frac{p \cdot p_1 + p_1 - p}{p - p_1}\right) = 2^i \cdot (s + 2p_0 - 1) \\ \lambda^j(s) &\geq \left(\frac{p}{p_0}\right)^j \cdot \left(s + \frac{2p_0 - p - p \cdot p_0}{p - p_0}\right) = 2^j \cdot (s - 2p_0) \end{aligned}$$

Mit der letzten Aussage ist damit hinreichend für $\zeta(s) < \xi(s)$ die Aussage:

$$2^i(s + 2p_0 - 1) < 2^j(s - 2p_0)$$

Da nach Voraussetzung schließlich $\zeta < \xi$ gilt, geht dies nur für $i < j$ (vgl. Darstellung von ζ und ξ). Daraus folgt aber $j \geq i + 1$ und somit ist hinreichend für $\zeta(s) < \xi(s)$:

$$2^i(s + 2p_0 - 1) < 2^{i+1}(s - 2p_0) \quad \Leftrightarrow \quad s > 6p_0 - 1$$

Man erhält damit als gleichmäßige untere Schranke $s_1 := 6p_0$.

Damit hat eine fair-periodische Baumrekursionen höchstens $7p_0$ Klassen ordnungsisomorpher Teilbäume und der Beweis ist abgeschlossen. ■

Ein wesentlicher Grund für die Korrektheit des vorigen Satzes ist gewesen, daß man in Lemma 4.3 die Argumente von ζ und ξ mit $p_0 \cdot n + r$ unabhängig von ζ und ξ wählen konnte. Verläßt man jedoch die fair-periodischen Baumrekursionen und betrachtet beliebige nicht ausgeartete, periodische Baumrekursionen, so gilt dies nicht mehr. Dies wird deutlich, wenn man sich die allgemeinere Form von Lemma 4.3 anschaut, die sich ähnlich zeigen läßt und deren Beweis hier nicht vorgestellt wird. Es handelt sich jedoch um eine interessante Aussage, die hier als Satz formuliert wird.

Satz 4.4 (Relationen in δ -Bäumen period. Baumrekursionen : $\bar{a}p$)

Sei eine periodische, nicht ausgeartete Baumrekursion gegeben und seien ζ und ξ beliebig, aber fest, wie oben definiert und $z_0 := p_0^{\max(i_0, j_0)} p_1^{\max(i_1, j_1)}$. Dann gibt es in der Beziehung zwischen ζ und ξ genau zwei Fälle:

1. Für festes r mit $1 \leq r \leq z_0$ gilt:

$$(\zeta(z_0 \cdot n + r) < \xi(z_0 \cdot n + r) \text{ für alle } n \geq 0) \text{ oder } (\zeta(z_0 \cdot n + r) > \xi(z_0 \cdot n + r) \text{ für alle } n \geq 0),$$

d.h. die Größenrelation von ζ und ξ ist periodisch modulo z_0 .

2. Es gibt ein $s_0 \in \mathbb{N}$ mit $(\zeta(s) < \xi(s) \text{ für alle } s \geq s_0) \text{ oder } (\zeta(s) > \xi(s) \text{ für alle } s \geq s_0),$

d.h. die Größenrelation zwischen ζ und ξ ist schließlich einheitlich.

Man sieht, daß das hier gewählte z_0 von beiden Stellenfunktionen abhängt und zumindest auf diesem Wege eine gleichzeitige Betrachtung **aller** Stellenfunktionen, die bei der Untersuchung von Ordnungsisomorphie verschiedener Teilbäume nötig ist, nicht mehr ermöglicht wird.

Mit den fair-periodischen Baumrekursionen hat man nun viele Fälle von Baumrekursionen gefunden, die nur endlich viele Klassen von ordnungsisomorphen Teilbäumen besitzen. Bisher waren die stufentreuen Baumrekursionen den fair-periodischen in vielen Dingen recht ähnlich. Man könnte also vermuten, daß auch die stufentreuen Baumrekursionen nur endlich viele Ordnungsisomorphieklassen besitzen. Dies ist aber i.a. nicht der Fall. Es wird deshalb im folgenden noch eine stufentreue Baumrekursion konstruiert, die unendlich viele paarweise nicht ordnungsisomorphe Teilbäume besitzt. Dazu benutzt man wieder als spezielle stufentreue Baumrekursionen die durch $\{A, B\}$ -Abschnitte erzeugten (vgl. Beweis zu Satz 3.2).

Um das gewünschte Gegenbeispiel zu generieren, benötigt man zuerst eine Hilfsaussage:

Lemma 4.4

Gegeben sei eine stufentreue Baumrekursion mit einem (nach Definition der C_i normierten) 0-1-Code $0, 1, C_2, C_3, C_4, \dots$ der kleineren Abstiegsfunktion, wobei die C_i $\{A, B\}$ -Abschnitte der Länge 2^i sind. Sei T der δ -Baum dieser Baumrekursion und s ein Label der j -ten Stufe. Dann hat $\Psi(T_s)$ den 0-1-Code $0, 1, C_j, C_{j+1}, \dots$

Bemerkung:

Im Prinzip ist hier ein verallgemeinerter 0-1-Code definiert worden, der auch für Teilbäume gilt. Der 0-1-Code $(\bar{x}_n)_{n \geq 2}$ zu einem Label n von $\Psi(T_s)$ ist dabei:

$$\bar{x}_n := \begin{cases} 0 & n \text{ ist linker Sohn in } \Psi(T_s) \\ 1 & n \text{ ist rechter Sohn in } \Psi(T_s) \end{cases}$$

Dabei wurde $(\bar{x}_n)_{n \geq 2}$ unter Umgehung einer Abstiegsfunktion so eingeführt, daß dies Definition im Falle $T_s = T$ mit der Definition des 0-1-Codes der kleineren (normierten!) Abstiegsfunktion zusammenfällt.

Beweis:

Es reicht hier aus, zu zeigen, daß die i -te Stufe von T_s gemäß C_{i+j-1} konstruiert wird (natürlich in verkürzter Form). Dies ist sehr leicht gedanklich nachzuvollziehen. Beide Typen A und B sind vollkommen symmetrisch in ihrem Aufbau und enthalten auch die entsprechende Teilstruktur. Anstatt eines formalen Beweises reicht es hier aus, sich diesen Fall anhand zweier Beispiele anzuschauen.

Zuerst wird eine Beispielsituation in Abbildung 4.16 betrachtet, in der die letzte Stufe nach dem B -Typ gebildet ist. Man sieht an der letzten Stufe des in der Abbildung oben dargestellten gesamten δ -Baumes die Erzeugung mit einem B -Abschnitt daran, daß zuerst (in der durch die vorige Stufe vorgegebenen Reihenfolge) alle Linkelemente und erst dann alle Rechtelelemente eingefügt werden (0-1-Code $0, \dots, 0, 1, \dots, 1$). Wählt man einen Teilbaum und bildet ihn unter Ψ ab, so bleibt dies erhalten. Wichtig ist hier, daß es nur auf die Generierung der entsprechenden Stufe durch einen B -Abschnitt ankommt, das genaue Aussehen dieser Stufe (Anordnung der Labels bzgl. ihrer Größenordnung) aber nicht übereinstimmen muß! Zu beachten ist weiterhin, daß die vierte Stufe des δ -Baumes im Teilbaum der dritten Stufe entspricht, da die Wurzel des Teilbaumes in der ersten Stufe liegt. Dies kann man leicht durch Fortsetzung der Teilbäume noch oben nachvollziehen.

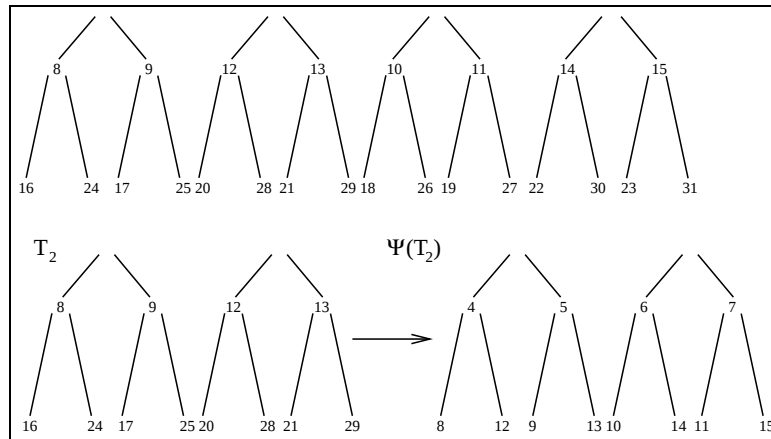
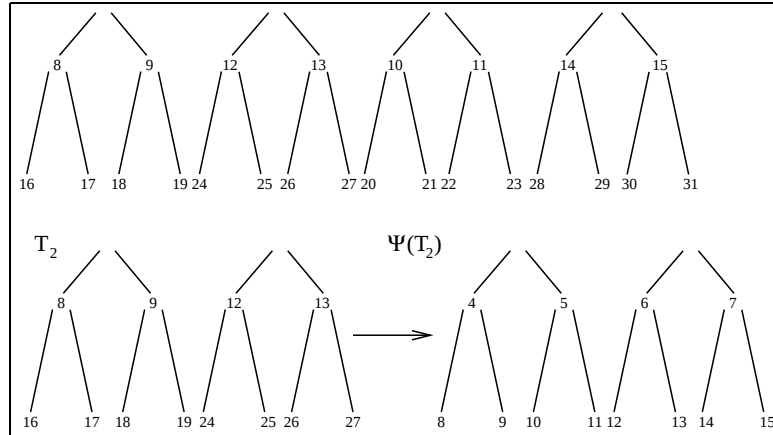


Abbildung 4.16: Erhaltung der B -Stufenordnung bei Teilbäumen.

Zum Abschluß wird die gleiche Situation noch für den A -Typ in Abbildung 4.17 betrachtet. Hier wird (0-1-Code $0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1$) sofort nach jedem Linkelement das entsprechende Rechtelelement eingefügt. Auch dies bleibt bei Teilbaumbildung und Anwendung von Ψ erhalten.

■

Abbildung 4.17: Erhaltung der A -Stufenordnung bei Teilbäumen.

Nun kann man das Gegenbeispiel direkt angeben. Man nimmt eine stufentreue Baumrekursion mit dem 0-1-Code:

$$0, 1, A, B, A^2, B, A^3, B, A^4, B, \dots$$

Jetzt wählt man von dem zugehörigen δ -Baum T zwei Teilbäume T_{s_1} und T_{s_2} zu Labels s_i in der j_i -ten Stufe für $j_1 \neq j_2$. Dann stimmen die 0-1-Codes von $\Psi(T_{s_1})$ und $\Psi(T_{s_2})$ nicht überein nach dem vorigen Lemma. Denn es gibt eine Stelle j , an der in dem einen 0-1-Code ein A und bei dem anderen ein B steht. Die entsprechenden $(j+1)$ -ten Stufen von $\Psi(T_{s_1})$ und $\Psi(T_{s_2})$ sind also einmal nach dem A -Typ und einmal nach dem B -Typ gebildet worden. Bei einer Bildung nach dem A -Typ steht als „Partner“ zu einem „linken Label“ r stets das „rechte Label“ $(r+1)$. Bei einem B -Typ steht dagegen $(r+1)$ an einer ganz anderen Stelle. Darum sind $\Psi(T_{s_1})$ und $\Psi(T_{s_2})$ ungleich. Da j_1 und j_2 beliebig gewählt wurden, gibt es also unendlich viele Ordnungsisomorphieklassen von Teilbäumen.

Bemerkung:

Mit dem vorigen Lemma eignet sich jeder 0-1-Code, der so aufgebaut ist, daß seine unendlichen Endstücke nicht übereinstimmen, zur Konstruktion eines Gegenbeispiels.

Zusammenfassend wird in Abbildung 4.18 das Ergebnis dieses Abschnitts in Bezug auf das Auftreten endlich bzw. unendlich vieler Ordnungsisomorphieklassen bei verschiedenen Klassen von Baumrekursionen dargestellt (vgl. auch Abbildung 2.5 auf Seite 48 und dazugehörige Anmerkungen). Die Angabe der Existenz von endlich vielen Klassen bei stufentreuen, nicht fair-periodischen Baumrekursionen

gründet sich auf die Heaprekursion mit 0-1-Code $0, 1, B, B, B, B, \dots$, für die dies leicht zu zeigen ist.

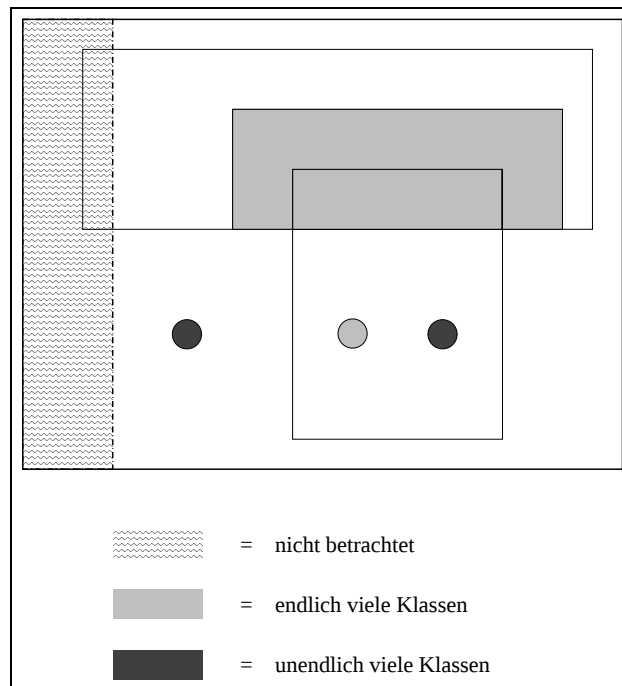


Abbildung 4.18: (Un-)endlich viele Ordnungsisomorphieklassen bei Baumrekursionen.

Kapitel 5

Rückblick und Ausblick bei Baumrekursionen

Dieses Kapitel beginnt mit einem Abschnitt über die Heapfolge, die schon in der Einleitung vorgestellt wurde und nun genauer unter die Lupe genommen wird. Danach werden in zwei weiteren Abschnitten zwei Themenkomplexe behandelt, die interessante weiterführende Forschungsansätze andeuten: die Möglichkeit der Angleichung der Quotientenfolgen verschiedener Baumrekursionen durch Umsortierung sowie die Untersuchung von Selbstähnlichkeits-Phänomenen, insbesondere bei Teilfolgen.

5.1 Die Heapfolge

Nun ist der Zeitpunkt gekommen, noch einmal kurz die Heaprekursion zu betrachten. Die Heaprekursion im strengen Sinn war definiert durch (vgl. Seite 5 und bei Schaffer und Sedgewick [SchSe]) :

$$\hat{H}_0 := 1, \hat{H}_n = \binom{n-1}{\alpha(n)} \hat{H}_{\alpha(n)} \hat{H}_{n-1-\alpha(n)} \quad n \geq 1$$

Dabei ist $\bar{\alpha} = 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0^4, 1^4, 0^8, 1^8, \dots$. Dann ist α eine stufentreue Abstiegsfunktion. Es wird die Quotientenfolge $(\hat{Q}_n)$ hier nicht betrachtet, sondern die

Quotientenfolge (Q_n) zur Rekursion¹

$$H_0 := 1, H_n = n H_{\alpha(n)} H_{n-1-\alpha(n)} \quad n \geq 1$$

mit der selben Abstiegsfunktion α . Nach Satz 2.3 ist bekannt, daß hieraus $(\hat{Q}_n)$ leicht berechenbar ist durch:

$$\hat{Q}_n = \frac{n}{Q_n} \quad (5.1)$$

Es soll nun kurz aus den vorigen Kapiteln zusammengefaßt werden, was über (Q_n) bisher bekannt ist bzw. leicht mit den schon vorgestellten Hilfsmitteln nachzuweisen ist.

- Q_n ist als Quotientenfolge einer stufentreuen Baumrekursion beschränkt mit minimalem Berührungspunkt 2 und maximalem Berührungspunkt² $P(\frac{1}{2})$ und besitzt überabzählbar viele Berührungspunkte, sogar in jeder ϵ -Umgebung jedes Berührungspunktes.
- der δ -Baum hat den in Abbildung 5.1 dargestellten Anfang.

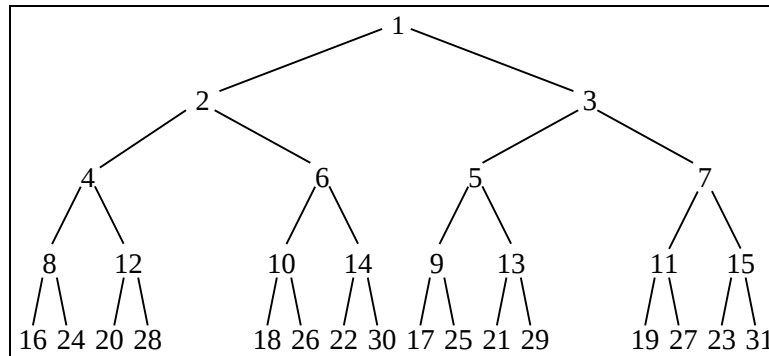


Abbildung 5.1: Anfang des δ -Baumes der Heaprekursion

¹Klostermeyer und Niewiadomska-Bugaj [KloNi] nennen mit der reziproken Folge mit Rekursion $A_0 = 1$, $A_n = \frac{1}{n} A_{\alpha(n)} A_{n-1-\alpha(n)}$ $n \geq 1$ die Folge der Wahrscheinlichkeiten, daß ein Array der Länge n heapsortiert ist. (Man kann einen Heap auch als ein spezielles Array auffassen, vgl. z.B. bei Aho und Ullman [AhoUl].)

²dabei ist $P(x)$ die Partitionsfunktion, vgl. Lemma 3.7.

- die Intervall-Periodizität ist stark ausgeprägt mit identischen Links- und Rechts-Intervallen.
- der δ -Baum hat nur eine Klasse von ordnungsisomorphen Teilbäumen, d.h. alle Teilbäume sind ordnungsisomorph zum gesamten δ -Baum.

Durch einige Eigenschaften, wie den sehr typischen 0-1-Code der kleineren Abstiegsfunktion und die Existenz nur einer Ordnungsisomorphieklasse im δ -Baum, wird die Besonderheit der Heaprekursion unter den stufentreuen Rekursionen klar.³ Dies soll nun noch etwas ausführlicher analysiert werden. Die eine Überlegungsrichtung führt dabei zu speziellen Betrachtungen der Heap-Quotientenfolgen-Periodizität, während die andere zu Aussagen über die Original-Heapfolge führt, die Ergebnissen gleichen, die Knuth [Knut3] auf völlig anderen Wegen herausgefunden hat.

Ein erstes Element der weiteren Betrachtungen ist die Analyse der Abstiegsfunktion δ . Dazu wird erst einmal betrachtet, wie die Pseudo-Inversen abbilden. Man kann folgende Beobachtung dazu anstellen (z.B. am δ -Baum-Anfang in Abbildung 5.1):

Ist n das s -kleinste Element der k -ten Stufe, so ist $\lambda(n)$ das s -kleinste Element der $(k+1)$ -ten Stufe.

Man erhält daraus leicht die folgende Aussage, die hier nicht bewiesen wird:

$$\lambda(n) = 2^{k+1} + n - 2^k$$

Stellt man n als $2^k + r$ mit $0 \leq r < 2^k$ dar, so erhält man:

$$\lambda(2^k + r) = 2^{k+1} + r$$

Analog erhält man für ρ :

$$\rho(2^k + r) = 2^{k+1} + 2^k + r$$

Wenn man nun noch einen Schritt weiter geht und für n eine Dualdarstellung $n = (1, a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1, a_0)_2$ wählt, so erhält man:

³analog gilt dies für die Rekursion zur Abstiegsfunktion $\alpha = \text{period}[0, 1]$ sowohl in Bezug auf die stufentreuen als auch auf die periodischen Rekursionen.

$$\lambda((1, a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1, a_0)_2) = (1, 0, a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1, a_0)_2$$

$$\rho((1, a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1, a_0)_2) = (1, 1, a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1, a_0)_2$$

Nun kann man leicht erkennen, daß die „Umkehrung und Zusammenfassung“ δ die Streichung der zweitgrößten Dualstelle bewirkt, d.h.

$$\delta((1, a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0)_2) = (1, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0)_2$$

Dies ist eine sehr einfache Darstellung, die später auch wieder benutzt wird.⁴ Es soll aber für die Betrachtung der Quotientenfolgen-Periodizität zuerst einmal die Generierung der $(k+1)$ -ten Stufe aus der k -ten Stufe untersucht werden. Wie gerade gezeigt wurde, werden dazu in der $(k+1)$ -ten Stufe zuerst einmal alle Labels auf Linksabzweigungen en bloc eingesetzt und erst anschließend alle Labels auf Rechtsabzweigungen. Dies sieht man auch dem 0-1-Code der Abstiegsfunktion α leicht an.

Wenn man sich überlegt, daß die Länge der Berührungspunkt-Intervalle I_s für wachsende Labels s gegen 0 strebt (vgl. Beweis zu Satz 3.12), und die k -ten Stufen für wachsendes k größere Labels enthalten, ist klar, daß die Werte (Q_n) für n aus einem Teilbaum T_m , der ein Label m aus der k -ten Stufe als Wurzel hat, schließlich (d.h. für wachsendes m) nur noch wenig variieren. Es läßt sich leicht zeigen, daß zu jedem $\epsilon > 0$ eine Stufe k auffindbar ist, so daß für jedes Label m aus dieser Stufe des δ -Baumes gilt: Ist n ein Label von T_m ⁵, so gilt $|Q_n - Q_m| < \epsilon$. Man kann folglich eine Approximation mit Fehler ϵ dadurch definieren, daß man den Wert der Approximationsfolge $\bar{Q}_n$ zu Q_n derart wählt, daß man den Teilbaum T_m mit Wurzel m in der $k(\epsilon)$ -ten Stufe betrachtet, in dem n Label ist und dann $\bar{Q}_n := Q_m$ definiert ($k(\epsilon)$ -Stufen-Approximation). Die Werte der Approximationsfolge für Labels bis zur $k(\epsilon)$ -ten Stufe einschließlich bleiben gleich den Werten von Q_n .

Bemerkung:

*Wegen der überabzählbar vielen Berührungspunkte ist eine Approximation einer Quotientenfolge (hier der Heap-Quotientenfolge), die einen relativen Fehler besitzt, der gegen 0 geht, schwer zu konstruieren, da eine solche Approximationsfolge **dieselben** Berührungspunkte besitzen müßte wie die Quotientenfolge. Die Idee, daß eine derartige Approximation leichter verständlich als die Quotientenfolge wäre, erscheint illusorisch.*

⁴Sie entspricht bei Knuth [Knut3] der Herleitung der Teilbaumgrößen entlang des Pfades von der Wurzel zum n -ten Knoten in einem Heap mit n Knoten.

⁵dem Teilbaum mit Wurzel m .

Wie sieht nun eine solche k -Stufen-Approximation der Heapfolge aus? Man kann diese leicht herleiten, wenn man die Quotientenfolge ein wenig über die k -te Stufe hinaus betrachtet:

$$Q_0, Q_1, \dots, Q_{2^k}, \dots, Q_{2^{k+1}-1}, Q_{\lambda(2^k)}, \dots, Q_{\lambda(2^{k+1}-1)}, Q_{\rho(2^k)}, \dots, Q_{\rho(2^{k+1}-1)}, \dots$$

Die k -Stufen-Approximation hat auf diesem Abschnitt die folgenden Werte (es erhält z.B. $Q_{\lambda(2^k+r)}$ den Werte Q_{2^k+r} , da $\lambda(2^k+r)$ Label von T_{2^k+r} ist, wobei 2^k+r Label der k -ten Stufe des δ -Baumes ist) :

$$Q_0, Q_1, \dots, Q_{2^k}, \dots, Q_{2^{k+1}-1}, Q_{2^k}, \dots, Q_{2^{k+1}-1}, Q_{2^k}, \dots, Q_{2^{k+1}-1}, \dots$$

Man kann leicht herleiten, daß die gesamte Approximation in Kurzschreibweise die folgende Gestalt hat:

$$Q_0, Q_1, \dots, Q_{2^k-1}, (Q_{2^k}, \dots, Q_{2^{k+1}-1})^\omega$$

Also werden schließlich immer wieder die gleichen 2^k Werte wiederholt. Wenn man also zu einem geeigneten ϵ den Abweichungen kleiner ϵ keine Beachtung mehr schenkt, so wird (Q_n) in diesem Sinne schließlich periodisch. Dabei kann ϵ beliebig klein gewählt werden. Es wächst bei kleinerem ϵ natürlich die Länge des periodisch wiederholten Abschnitts. Diese Beobachtung sagt sehr viel über die Gestalt von (Q_n) aus, wie man sich an Abbildung 5.2 klarmachen kann.

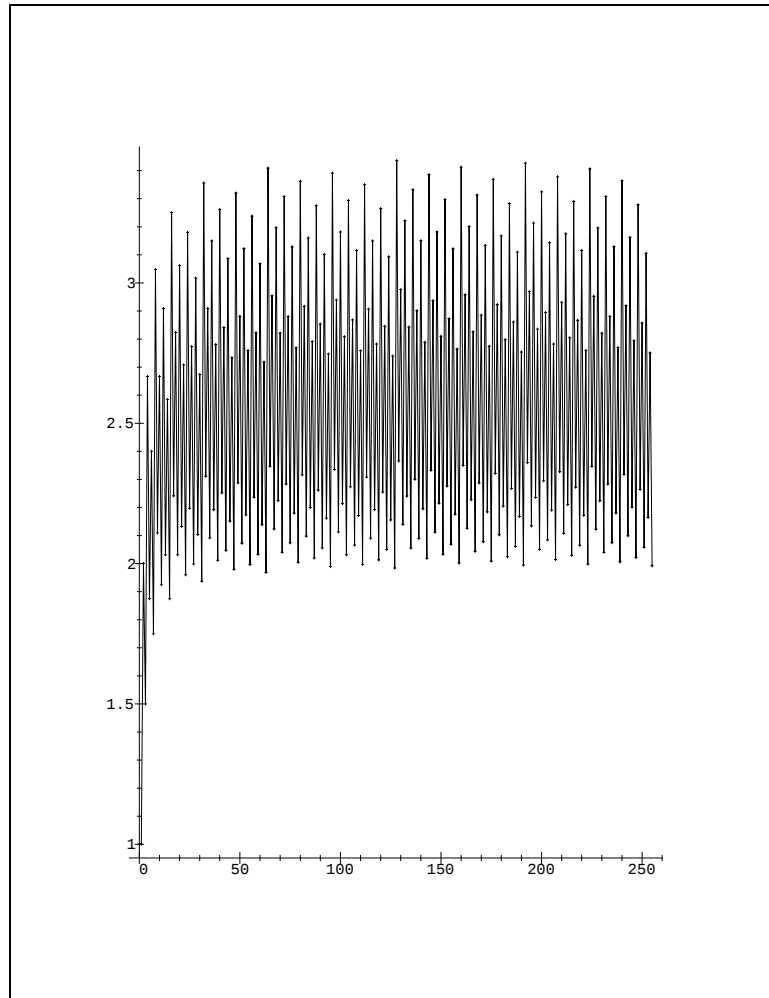
Was beim Übergang vom Intervall $[Q_{2^k}, \dots, Q_{2^{k+1}-1}]$ zum nächstgrößeren Intervall

$[Q_{2^{k+1}}, \dots, Q_{2^{k+2}-1}]$ passiert⁶, ist im Prinzip nur das Hintereinandersetzen zweier leicht veränderter Kopien von $[Q_{2^k}, \dots, Q_{2^{k+1}-1}]$. Dabei hat die erste Kopie etwas größere Werte als die zweite.⁷ Man kann dies als rekursiven Prozeß wie in Abbildung 5.3 darstellen.

Führt man dies so weiter und setzt die einzelnen Stücke aneinander, so erhält man die Gestalt der Heap-Quotientenfolge. Man kann den Übergang auch lokal-rekursiv definieren und an jeder Stelle des vorangegangenen Intervalls die in Abbildung 5.4 dargestellte Strukturersetzung vornehmen, um das folgende Intervall zu erhalten.

⁶dies sind die Intervalle der Quotientenfolge zu den hier identischen Rechts- und Linksintervallen aus Kapitel 4.1.

⁷Die Änderung der Größenordnung beruht hierbei nicht auf einer gleichmäßigen Multiplikation und Addition mit festen Werten!

Abbildung 5.2: Anfang der Heap-Quotientenfolge (Q_n)

Diese Überlegungen verdeutlichen den „inneren Aufbau“ der Heap-Quotientenfolge mit einer extrem feinen Konstruktionsmethodik. Solche Konstruktionen findet man auch bei Fraktalen, jedoch liegt hier kein Fraktal vor, da nur abzählbar viele Folgenwerte existieren, während die meistens als „fraktale“ Dimension benutzte Hausdorff-Dimension nur bei überabzählbaren Mengen größer Null ist (vgl.

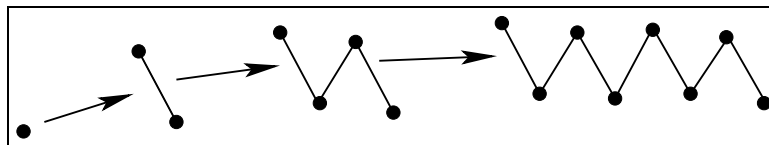


Abbildung 5.3: Rekursiver Prozeß bei der Generierung der Heap-Quotientenfolge.

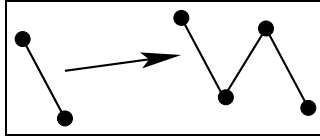


Abbildung 5.4: Lokal-rekursive Strukturersetzung bei der Heap-Quotientenfolge.

Falconer [Falco, p. 33]). Auf die Möglichkeit derartiger Ansätze wird im nächsten Abschnitt noch ausführlicher eingegangen.

Der zweite Teil dieses Abschnittes wird der Frage gewidmet, wie sich die Heapfolge $\hat{H}_n$, die die Anzahl der Heaps mit n Knoten abzählt, ohne eine Rekursion darstellen läßt.

Eine interessante Darstellung der Heapfolge hat Knuth [Knut3, p. 152-153] gefunden, die dort über mehrere Stellen verteilt zu finden ist:

Hat n die Dualdarstellung $(1, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0)_2$, so gilt:

$$\hat{H}_n = \frac{n!}{(1, a_{m-1}, \dots, a_0)_2 \cdot (1, a_{m-2}, \dots, a_0)_2 \cdot \dots \cdot (1, a_0)_2 \cdot \prod_{k=2}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} (2^k - 1)^{\left\lfloor \frac{n - 2^{k-1}}{2^k} \right\rfloor}} \quad (5.2)$$

Diese Formel wird von Knuth durch eine Aufgabe [Knut3, Exercise 5.1.4-20 (p. 67)] begründet, die übertragen die folgende Aussage formuliert:

Die Anzahl der Möglichkeiten, einen vorgegebenen (Wurzel-)Baum mit n Knoten so mit den Elementen $\{1, \dots, n\}$ zu labeln, daß das Label jedes Sohnes stets größer ist als das Label seines Vaterknotens, ist $n!$ dividiert durch das Produkt der Anzahl der Knoten aller Teilbäume.

Dies wird bei Knuth [Knut3, p. 152-153] auf denjenigen Baum angewandt, der hier als Heapstruktur mit n Knoten (vgl. Seite 2) bezeichnet wird. Eine ähnliche Aussage kann man leicht allgemeiner auf den hiesigen Kontext übertragen. Dazu definiert man eine Folge von ungelabelten Bäumen R_n , **Rekursionsbäume** genannt, die zu einer beliebigen normierten Baumrekursion folgendermaßen erzeugt werden:

R_0 ist der leere Baum, R_1 besteht nur aus einem Knoten, der Wurzel. R_n wird rekursiv definiert, indem an die Wurzel als linker Teilbaum $R_{\beta(n)}$ und als rechter

Teilbaum $R_{\alpha(n)}$ angesetzt werden.

Dann kann man leicht das folgende Lemma durch Induktion beweisen:

Lemma 5.1

Genügt A_n einer Baumrekursion mit $A_n = c_n \cdot A_{\alpha(n)} \cdot A_{\beta(n)}$, wobei $A_0 = 1$ ist, so gilt, falls unter $|R|$ die Anzahl der Knoten eines endlichen Baumes R verstanden wird:

$$A_n = \prod_{R \text{ Teilbaum von } R_n} c_{|R|}$$

Zu den Randwerten $c_n = \binom{n-1}{\alpha(n)}$ für $n \geq 1$ folgt daraus mit wenigen Überlegungen die Aussage von Knuth [Knut3, Exercize 5.1.4-20 (p. 67)].

Nun soll die Darstellung von $\hat{H}_n$ in (5.2) noch einmal genauer betrachtet werden. Im Nenner dieses Ausdrucks sind die Dualdarstellungen von natürlichen Zahlen zwischen 1 und n sowie Potenzen mit Basen zwischen 1 und n zu finden. Man kann deshalb versuchen, Zähler und Nenner dieser Darstellung zusammenzufassen. Die Exponenten des sich ergebenden Produktes mit Basen 1 bis n sind in Tabelle 5.1 dargestellt, wobei die Exponenten der Eins schon an folgende Ausführungen angepaßt wurden.

In dieser Matrix sind einige Regelmäßigkeiten zu erkennen, die sich mit Hilfe des Nenners der Formel (5.2) von Knuth erklären lassen. Es stellt sich aber die Frage, ob es eine geschlossene Formel für diese Exponenten gibt. Diese Frage beantwortet der folgende Satz.

Satz 5.1 (Heapfolgen-Formel)

Die Heapfolge (im originalen Sinne, d.h. mit Randwerten $\binom{n-1}{\alpha(n)}$) hat die folgende Darstellung.⁸

$$\hat{H}_n = \frac{n!}{\prod_{k=1}^n k^{\left\lfloor \frac{n-k+2 \lfloor \log_2(k) \rfloor}{2^{\lfloor \log_2(k) \rfloor}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k-1+2 \lfloor \log_2(k+1) \rfloor}{2^{\lfloor \log_2(k+1) \rfloor}} \right\rfloor}} = \prod_{k=1}^n k^{\left\lfloor \frac{n-k-1}{2^{\lfloor \log_2(k+1) \rfloor}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{2^{\lfloor \log_2(k) \rfloor}} \right\rfloor} + 1$$

⁸Die unteren Gaußklammern weisen die nächstkleinere ganze Zahl zu, z.B. ist $\lfloor -0.345 \rfloor = -1$ und nicht Null!

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	-2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	-2	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	-3	1	-1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	-3	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	-4	1	-1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	-4	0	-1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	-5	1	-2	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	-5	0	-1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	-6	1	-2	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	-6	0	-2	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	-7	1	-3	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	-7	0	-2	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
17	-8	1	-3	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
18	-8	0	-3	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
19	-9	1	-4	1	1	1	-1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
20	-9	0	-3	0	1	1	-1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
21	-10	1	-4	1	0	1	-1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
22	-10	0	-4	1	1	0	-1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
23	-11	1	-5	1	1	1	-2	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
24	-11	0	-4	0	1	1	-1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
25	-12	1	-5	1	0	1	-1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
26	-12	0	-5	1	1	0	-1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
27	-13	1	-6	1	1	1	-2	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
28	-13	0	-5	0	1	1	-2	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
29	-14	1	-6	1	0	1	-2	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
30	-14	0	-6	1	1	0	-2	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
31	-15	1	-7	1	1	1	-3	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1
32	-15	0	-6	0	1	1	-2	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
33	-16	1	-7	1	0	1	-2	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1

Tabelle 5.1: Matrix der Exponenten von k in der Darstellung von $\hat{H}_n$ nach (5.2) [ergänzt für $k = 1$].

Der Rest dieses Abschnittes beschäftigt sich mit der Herleitung dieser Formel (und damit mit dem Beweis des Satzes). Dazu wird die Berechnung der „**Originalfolge**“ mit Hilfe des δ -Baumes über die **Quotientenfolge** untersucht. Zum Zweck einer deutlichen Vereinfachung der sich ergebenden Darstellungen wird hier immer angenommen, daß $c_0 = A_0 = Q_0 = 1$ gilt und (Δc_n) nur von n abhängt (und *nicht* von $\alpha(n)$ bzw. $\beta(n)$).⁹ Aus der Definition der Quotientenfolge ist klar, daß gilt (Teleskop-Produkt):

$$A_0 = Q_0, \quad A_n = \prod_{k=1}^n Q_k \quad n \geq 1 \quad (5.3)$$

Die Voraussetzung $c_0 = A_0 = Q_0 = 1$ bedingt mit $Q_1 = c_1 \cdot Q_0 = c_1 = \Delta c_1$ eine einfachere Darstellbarkeit der Quotientenfolgen-Rekursion. Darum geht aus den bisherigen Überlegungen zum δ -Baum hervor, daß gilt, falls mit T der δ -Baum bezeichnet wird:¹⁰

$$Q_n = \prod_{k \text{ Label auf dem Weg in } T \text{ von der Wurzel zum Knoten mit Label } n} \Delta c_k =: \prod_{k=1}^n (\Delta c_k)^{\hat{e}_{n,k}} \quad (5.4)$$

$$\text{mit } \hat{e}_{n,k} = \begin{cases} 1 & k \text{ Label auf dem Weg in } T \text{ von der Wurzel zum Knoten mit Label } n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus (5.3) und (5.4) erhält man (an der mit $(*)$ markierten Stelle Übergang von horizontaler zu vertikaler Indizierung):

$$A_n = \prod_{k=1}^n \prod_{j=1}^k (\Delta c_j)^{\hat{e}_{k,j}} \stackrel{(*)}{=} \prod_{j=1}^n \prod_{k=j}^n (\Delta c_j)^{\hat{e}_{k,j}} = \prod_{j=1}^n (\Delta c_j)^{\sum_{k=j}^n \hat{e}_{k,j}} =: \prod_{j=1}^n (\Delta c_j)^{\bar{e}_{n,j}} \quad (5.5)$$

Damit ist $\bar{e}_{n,k} = \sum_{j=k}^n \hat{e}_{j,k}$ und $\bar{e}_{n,k}$ gibt die Anzahl der Wege in T von der Wurzel

⁹Dies ist bei den hier (bei der Heapfolge) notwendigen Bedingungen ($c_0 = 1, c_n = n \ n \geq 1$) der Fall, kann aber auch allgemeiner betrachtet werden.

¹⁰Wenn man bei dem Label n beginnt, gelangt man mit δ zum Vaterknoten von n . Führt man dies fort, so gelangt man schließlich zur Wurzel des δ -Baumes. Die Formel ergibt sich dadurch, daß man mit der Rekursion $Q_n = \Delta c_n \cdot Q_{\delta(n)}$ nacheinander alle Δc_k -Terme zu Labels k auf dem genannten Weg „aufsammelt“.

zu Labels j an, die $k \leq j \leq n$ erfüllen.¹¹ Definiert man $T_k^{(n)}$ als den endlichen Teilbaum von T mit Wurzel k und Labels $\leq n$ und mit $|T_k^{(n)}|$ die Anzahl der Labels des Baumes, so gilt $\bar{e}_{n,k} = |T_k^{(n)}|$.

Nun kann man die endgültige Formel für die Darstellung von A_n über den δ -Baum leicht herleiten. Das Ergebnis wird als Lemma formuliert:

Lemma 5.2 ($\bar{a}$)

Mit den bisherigen Notationen gilt für nicht ausgeartete Baumrekursionen mit Randwertfolge (c_n) , wobei $c_0 = A_0 = c_1 = 1$ vorausgesetzt wird und (c_n) nur abhängig von n sein soll (und nicht von α oder β):

$$A_n = \prod_{k=1}^n c_k^{|T_k^{(n)}| - |T_{k+1}^{(n)}|} \quad (5.6)$$

Dabei ist $|T_{n+1}^{(n)}| = 0$.

Beweis:

Es ist $\Delta c_k = \frac{c_k}{c_{k-1}}$ für $k \geq 1$ und insbesondere (vgl. obige Voraussetzung $c_0 = A_0 = 1$) $\Delta c_1 = c_1$. In dem Produkt (5.5) taucht jedes c_k somit zweimal auf: als Zähler von Δc_k und als Nenner von Δc_{k+1} . Dies ergibt die Behauptung. ■

Wendet man auf $\hat{H}_n = \prod_{k=1}^n \hat{Q}_k$ zuerst (5.1) und (5.3) mit $A_n = H_n$ an und erst dann auf den Nenner (5.6) an, so erhält man:

$$\hat{H}_n = \frac{n!}{\prod_{k=1}^n k^{|T_k^{(n)}| - |T_{k+1}^{(n)}|}}$$

Nun wäre es natürlich ein entscheidender Vorteil, wenn $|T_k^{(n)}|$ bekannt wäre. Eine erste Darstellung, die allerdings das Problem nur verschiebt, besagt, daß $|T_k^{(n)}|$ die Anzahl der $j \leq n$ ist, deren Dualzahldarstellung die Form $(1, w, a_{m-1}, \dots, a_0)_2$ hat, wenn w ein endliches (auch leeres!) $\{0, 1\}$ -Wort ist und $k = (1, a_{m-1}, \dots, a_0)_2$ gilt. Man könnte sich auf diesem Wege eine Lösung vorstellen, indem man die Dualzahl von n zusätzlich betrachtet. Hier wird ein gleichwertiges Ergebnis aber auf andere Weise erhalten:

¹¹Es ist: $\hat{e}_{k,j} = 1 \Leftrightarrow k \text{ liegt auf dem Weg von der Wurzel zu } j \Leftrightarrow j \text{ liegt im } \delta\text{-Baum unterhalb von } k \text{ (d.h. } j \text{ ist Nachfolger von } k).$

Lemma 5.3

Im Falle der Heap-Rekursion gilt mit obigen Notationen und $0 \leq s < 2^m$:

$$|T_{2^m+s}^{(n)}| = \left\lfloor \frac{n-s}{2^m} \right\rfloor \quad 1 \leq 2^m + s \leq n+1$$

Beweis:

(bis Seite 166)

- 1. Fall: Für $n+1 = 2^m + s \geq 1$ erhält man die Behauptung durch Einsetzen: $\left\lfloor \frac{2^m+s-1-s}{2^m} \right\rfloor = 0$. Dies ist korrekt, da nach Definition $T_{2^m+s}^{(2^m+s-1)}$ keinen Knoten besitzt.
- 2. Fall: Sei ab jetzt $1 \leq 2^m + s \leq n$:

Behauptung 1:

$$|T_{2^m+s}^{(n)}| = |T_{2^m}^{(n-s)}|$$

Beweis:

Die Pseudoinversen der Abstiegsfunktionen der Heaprekursion sind „additiv linear“ bzgl. der Reste $s \bmod 2^m$ mit $0 \leq s < 2^m$ (vgl. ab Seite 155), d.h. für $m \geq 0$ gilt:

$$\lambda(2^m) = c \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(2^m + s) = c + s$$

(analog für ρ). Hieraus folgt, daß dies auch für Verkettungen der Aufstiegsfunktionen gilt (Induktion). Damit gilt: Ist x ein Label von $T_{2^m+s}^{(n)}$, so ist $x-s$ Label von $T_{2^m}^{(n-s)}$, und umgekehrt. Damit folgt die Behauptung. ■

Hiermit kommt man zu einer weiteren Behauptung, die sich auf Bäume mit Zweierpotenz-Wurzeln beschränkt:

Behauptung 2:

Sei eine feste Stelle ζ (d.h. eine endliche Verkettung von λ und ρ) gegeben. Für $x_1, x_2 \in \{2^k, k \geq 0\}$ gilt:

$x = \zeta(x_1)$ ist genau dann Label von T_{x_1} an der Stelle ζ , wenn $\frac{x}{x_1} \cdot x_2$

Label von T_{x_2} an der Stelle ζ ist.

Beweis:

Es sollen zuerst zur Motivation für den Beweis die Labels derselben Stelle in drei Beispiel-Teilbäumen betrachtet werden. In allen Fällen gilt $s = 0$. Es werden die Anfänge von T_1 , T_4 und T_{16} betrachtet und dabei bei allen die gleiche feste Stelle untersucht. Dies ist in Abbildung 5.5 dargestellt.

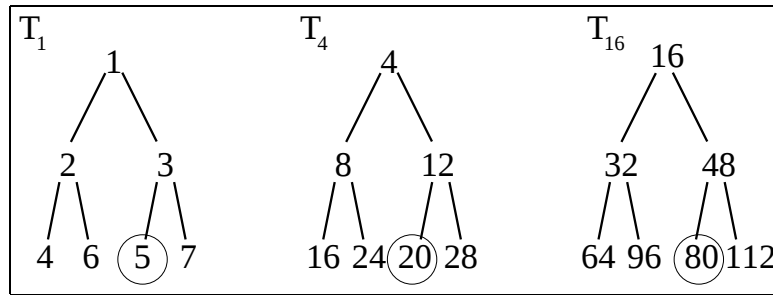


Abbildung 5.5: Drei Teilbäume des Heap- δ -Baumes.

Wenn man nun die markierte Stelle in Abhängigkeit des Wurzellabels betrachtet, bekommt man folgende Darstellungen: $5 = 5 \cdot 1$, $20 = 5 \cdot 4$ und $80 = 5 \cdot 16$. Diese Beobachtung kann man verallgemeinern:

Mit $\lambda(2^k + r) = 2^{k+1} + r = 2 \cdot 2^k + r$ und $\rho(2^k + r) = 2^{k+1} + 2^k + r = 3 \cdot 2^k + r$ hat jedes ζ die Eigenschaft $\zeta(2^k) = z_\zeta \cdot 2^k$ für $k \geq 0$ zu einem festen $z_\zeta \in \mathbb{N}$, was man per Induktion über die Länge von ζ zeigt. Damit folgt die Behauptung. ■

Daraus folgt leicht:

Behauptung 3:

Für n mit $2^m | n$ gilt:

$$|T_{2^m}^{(n)}| = |T_1^{(\frac{n}{2^m})}|$$

Da keine Werte x mit $2^m \nmid x$ Labels von T_{2^m} sind, folgt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|T_{2^m}^{(n)}| = |T_1^{(\lfloor \frac{n}{2^m} \rfloor)}|$$

Dies kann man aus der Aussage für $2^m | n$ herleiten, indem man n für $2^m \nmid n$ als $n = 2^m \cdot t + s$, $0 \leq s < 2^m$ darstellt.

Mit Behauptung 1 folgt somit insgesamt:

$$|T_{2^m+s}^{(n)}| = |T_{2^m}^{(n-s)}| = |T_1^{\lfloor \frac{n-s}{2^m} \rfloor}| = \left\lfloor \frac{n-s}{2^m} \right\rfloor$$

Der letzte Schritt ist klar, da der δ -Baum T_1 alle Labels $x \in \mathbb{N}$ enthält und somit $|T_1^{(l)}| = l$ gilt.

Hiermit ist der Beweis von Satz 5.1 abgeschlossen. ■

5.2 Umsortierung von Baumrekursionen

Die letzten beiden Abschnitte über Baumrekursionen beschäftigt sich mit der Vorstellung zweier interessanter Gruppen von Eigenschaften, die Ansätze für weitere Untersuchungen enthalten. Die zugehörigen Phänomene werden kurz vorgestellt und erläutert. Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit dem Zusammenspiel von „Reihenfolge“ und „Werten“ bei Baumrekursionen, wobei auch die Möglichkeit getrennter Analyse dieser Phänomene und der Synthese verschiedener Rekursionen betrachtet werden.

Bei den bisherigen Untersuchungen wurden schon verschiedene Aspekte der hier als „Werte“ und „Reihenfolge“ bezeichneten Bereiche der Untersuchung von Baumrekursionen vorgestellt. Unter dem Begriff Werte soll hier die „Hardware“ der Folgen verstanden werden, was im wesentlichen den Inhalt von Kapitel 3 umfaßt. Dazu gehören die Betrachtungen zum Konvergenzkegel und zu Berührungspunkten, genauer gesagt Fragen zur Beschränktheit, zu Teilfolgen entlang von unendlichen Wegen im δ -Baum sowie zur Mächtigkeit und zum Aussehen der Berührungspunktmenge. Diese Tatsachen unterscheiden sich zwar bei unterschiedlichen Folgen recht deutlich, zeigen aber auch, wie im Abschnitt 3.1 über die Ordnung im δ -Baum dargelegt, große Gemeinsamkeiten.

Reihenfolge meint die Reihenfolge des „Abgreifens“ der einzelnen Stellen des δ -Baumes unter Vernachlässigung der exakten Größe der damit zusammenhängenden Folgenwerte. Derartige Ansätze wurden in den Abschnitten zur Links- und Rechtsweg-Periodizität, Teilbaumisomorphie sowie zur Heap-Rekursion schon angedeutet und stellen damit wesentliche Anteile von Kapitel 4 sowie des ersten

Abschnitts dieses Kapitels.

An dieser Stelle kann man sich fragen, warum überhaupt zwei unterschiedliche Aspekte Werte und Reihenfolge vorliegen, da bei fest vorgegebenen Randwerten beide Tatsachen von der eindeutigen Struktur des δ -Baumes bestimmt sind. Beide Phänomene kann man folglich als so stark zusammenhängend betrachten, daß eine getrennte Analyse nicht möglich bzw. nicht sinnvoll ist.

Um den hier vertretenen Standpunkt der Möglichkeit und Sinnhaftigkeit einer getrennten Analyse von Werten und Reihenfolge darzulegen, wird hier das Ergebnis eines Experiments vorgestellt, das auf den ersten Blick befremdet, aber aufschlußreiche Beobachtungen ermöglicht. Es werden dazu zwei Baumrekursionen mit zwei verschiedenen δ -Bäumen T_1 und T_2 betrachtet, die wie bekannt mit allen $n \in \mathbb{N}$ gelabelt sind. Dazu werden die Bäume T_1^Q und T_2^Q betrachtet, die an allen Stellen anstatt von $n \in \mathbb{N}$ als Label das **entsprechende** $Q_n^{(i)}$ (Wert der Quotientenfolge) enthalten. Nun werden die Werte der Stellen von T_i^Q $i \in \{1, 2\}$ jeweils in der Reihenfolge der Labels von T_j $j \in \{1, 2\}$ abgelesen. Im Falle $i = j$ entstehen die Quotientenfolgen der entsprechenden Baumrekursion, für $i \neq j$ wird die Quotientenfolge $(Q_n^{(i)})$ in der Reihenfolge von T_j sortiert, z.B. für $i = 1, j = 2$: Das n -te Glied der umsortierten Folge $(Q_n^{(1,2)})_{n \in \mathbb{N}}$ findet man, indem man in T_2 das Label n sucht und an der **gleichen** Stelle das Label von T_1^Q abliest. Bevor dies formalisiert wird, soll zuerst das Ergebnis in einem Beispiel vorweggenommen werden.

Beispiel 5.1

Die Abbildung 5.6 zeigt die Darstellung der folgenden Quotientenfolgen bzw. ihre wechselseitigen Umsortierungen:

links oben: $(Q_n^{(1,1)}) = (Q_n^{(1)})$

rechts oben: $(Q_n^{(1,2)})$

links unten: $(Q_n^{(2,1)})$

rechts unten: $(Q_n^{(2,2)}) = (Q_n^{(2)})$

Dabei ist $(Q_n^{(1)})$ die Quotientenfolge zur Baumrekursion zu $\alpha = \text{period}[0, 0, 1]$ und $(Q_n^{(2)})$ die Quotientenfolge zur Baumrekursion zu $\alpha = \text{period}[0, 1]$. Die zuletzt genannte Quotientenfolge hat ein sehr regelmäßiges Schwingungsverhalten mit fallenden Werten auf den Links-/Rechts-Intervallen, wogegen die erstere Quotientenfolge ein relativ unregelmäßiges Schwingungsverhalten zeigt. Es gibt noch eindrucksvollere Beispiele für die Ähnlichkeit der Umsortierungen, aber dieses Beispiel soll zeigen, daß selbst hier bemerkenswerte Effekte auftreten.

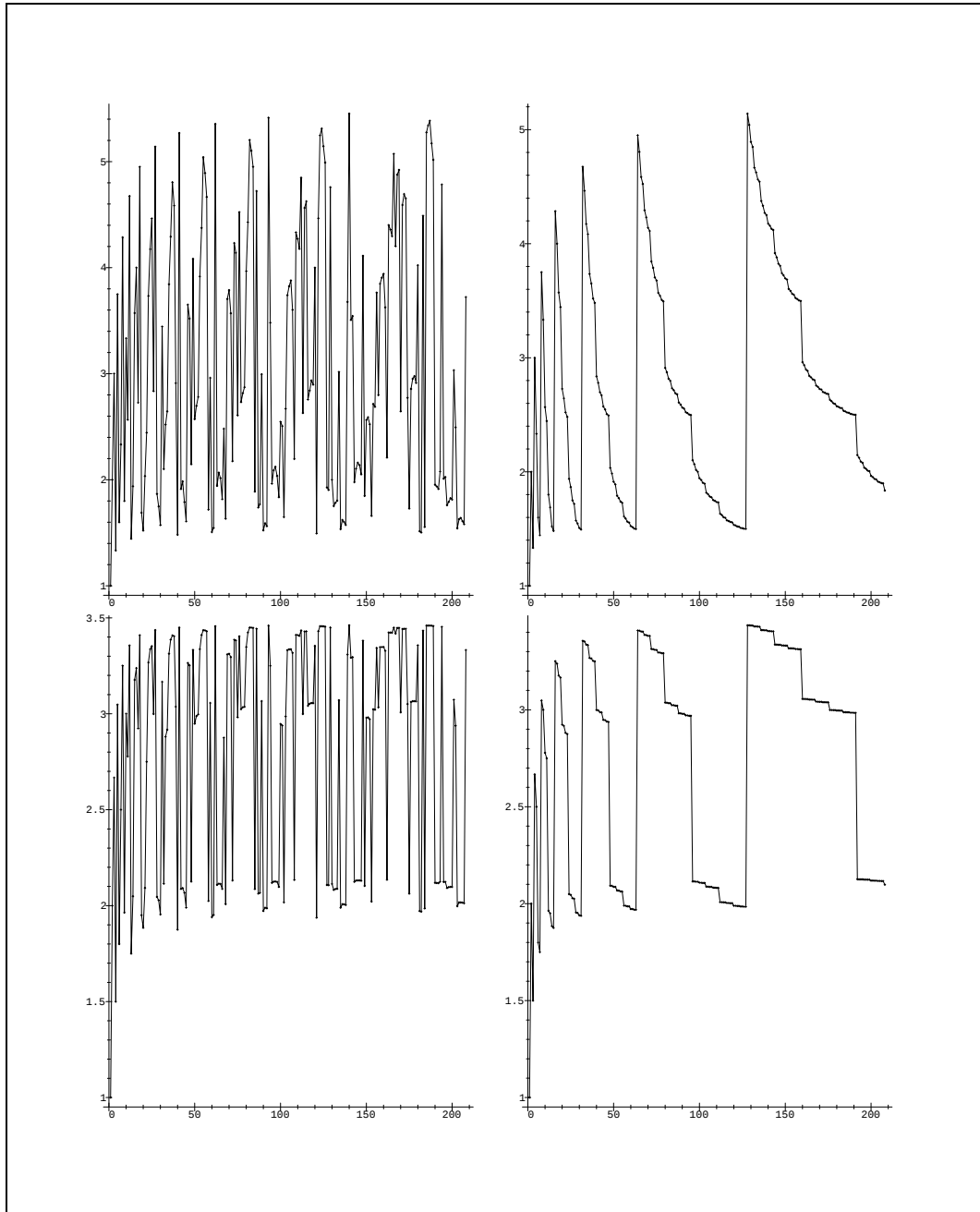


Abbildung 5.6: Umsortierung von zwei Folgen aus Beispiel 5.1

Man kann hier ein paar interessante Beobachtungen machen:

- *der Gesamteindruck der Folge richtet sich nach der gewählten Reihenfolge T_j unabhängig von den gewählten Werten. Trotz großer Wert-Unterschiede lassen sich vielfach identische Eigenschaften der Folgenstruktur beobachten, z.B. gleichartige Auf- und Abschwünge, Wiederholung und Ähnlichkeit von Folgenstücken, Lage von Extremwerten im Folgenablauf, Monotonieverhalten, usw..¹²*
- *die Werte T_i^Q bestimmen unabhängig von der Reihenfolge Eigenschaften der Ausdehnung des Konvergenzkegels wie z.B. Konvergenz und Divergenz des oberen Randes.¹³ Es wird sich später zeigen, daß Wege-Teilfolgen und Berührungspunktmengen vollkommen identisch sind.*

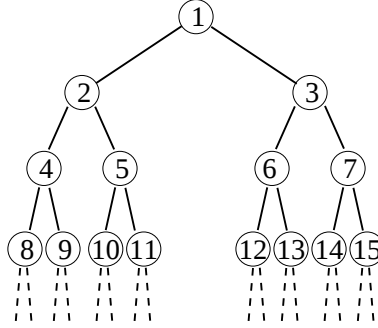
Dieses Ergebnis kann man mit vielen Folgenpaaren wiederholen und sich eindrucksvoll die große Ähnlichkeit selbst verschiedener (nicht ausgearteter) Baumrekursionen vor Augen führen. Es ist jedenfalls klar geworden, daß eine getrennte Untersuchung von Werten und Reihenfolge durchaus Sinn macht, da unterschiedliche Phänomene unabhängig vom jeweils anderen Aspekt bedingt werden.

Nun soll versucht werden, eine Begründung für die Tatsache zu geben, daß derartige Umsortierungen überhaupt zu sinnvollen Ergebnissen führen. Um dies in einer leicht verständlichen Weise zu ermöglichen, wird eine abweichende Definition des δ -Baumes und eine Definition der Reihenfolge nötig.

Sei dazu T ein beliebiger δ -Baum einer nicht ausgearteten Baumrekursion. Man kann die **Stellen** von T folgendermaßen standardisiert durchnummerieren:

¹²Diese Eigenschaften sind zwar nicht bei allen Beispielen von Umsortierungen gültig, zeigen aber vielfach Gleichheiten. So kann eine fallende Monotonie auf den Stufen-Intervallen bei Sortierung nach dem δ -Baum zu $period[0, 1]$ (was bei dem obigen Beispiel der Fall ist) nicht allgemein auftreten, da dies bedeuten würde, daß die Folgenwerte auf den Stufen stets von links nach rechts monoton fallen würden. Dies ist aber nicht der Fall (vgl. Hypercube-Ordnung in Satz 3.1).

¹³nicht jedoch die durchschnittliche Größe der Folgenwerte in einem bestimmten Abschnitt oder die genaue Lage der Extremwerte.



Nun kann man eine Abbildung $\varphi_T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definieren durch:

$$\varphi_T(n) := \text{Label von } T \text{ an der Stelle } n$$

Da die Labelung von T so beschaffen ist, daß jedes Label $n \in \mathbb{N}$ genau einmal vorkommt, die Nummerierung der Stellen ebenfalls diese Eigenschaft besitzt und beide Bezifferungen keinen Knoten auslassen, ist φ_T bijektiv!

Nun stellt sich die Frage, was $(\varphi_T)^{-1} : \text{Labels von } T \rightarrow \text{Stellen}$ bedeutet. Man kann sich dazu leicht klarmachen, daß die Folge $(\varphi_T)^{-1}(1), (\varphi_T)^{-1}(2), (\varphi_T)^{-1}(3), \dots$ genau den Zusammenhang bezeichnet, der bisher intuitiv als **Reihenfolge** bezeichnet wurde.

Sind zwei δ -Bäume T_1 und T_2 gegeben, so kann die oben eingeführte umsortierte Folge $(Q_n^{(1,2)})$ über die Quotientenfolge zu T_1 ($Q_n^{(1)}$), φ_{T_1} und φ_{T_2} definiert werden durch:

Definition 5.1

$$Q_n^{(1,2)} := Q_{\varphi_{T_1}((\varphi_{T_2})^{-1}(n))}^{(1)} \quad n \geq 1$$

Was bedeutet diese Definition? Es wird die Stelle in T_2 ausgewählt, die mit dem Label n gelabelt ist, und dann in T_1 das Label m an derselben Stelle gesucht und der dazugehörige Wert von $Q_m^{(1)}$ genommen.¹⁴

Nun kann die Sinnhaftigkeit des Reihenfolgenwechsels in einem Satz motiviert werden.

¹⁴In obiger Notation wird analog die Stelle mit Label n in T_2 gesucht und der Wert an der gleichen Stelle in T_1^Q gewählt.

Satz 5.2 (Grundlage der Umsortierung : $\bar{a}$)

Seien T_1 und T_2 zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) δ -Bäume nicht ausgearteter Baumrekursionen mit Abbildungen φ_{T_1} und φ_{T_2} . Dreht man in T_1 jeweils alle Pfeile (gerichteten Kanten) um, so erhält man $\overleftarrow{T}_1$ und damit eine partielle Ordnung auf $\mathbb{N}$ mit Relation $\leq_1$ definiert durch

$$n \leq_1 m : \Leftrightarrow \exists \text{ einen gerichteten Weg von } n \text{ nach } m \text{ in } \overleftarrow{T}_1 \text{ oder } n=m.$$

Diese Ordnung besitzt

1. endliche Intervalle und

2. ein kleinstes Element.

Eine vollständige Ordnung $\leq_2$ auf $\mathbb{N}$ kann man definieren durch $n \leq_2 m$ und

$$\varphi_{T_1} \left((\varphi_{T_2})^{-1}(1) \right) \leq_2 \varphi_{T_1} \left((\varphi_{T_2})^{-1}(2) \right) \leq_2 \varphi_{T_1} \left((\varphi_{T_2})^{-1}(3) \right) \leq_2 \dots$$

Dann ist $\leq_2$ eine topologische Sortierung von $\leq_1$, d.h. für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt stets:

$$n \leq_1 m \Rightarrow n \leq_2 m$$

Beweis:

Die behaupteten Eigenschaften der beiden Ordnungen ergeben sich bis auf die letzte direkt aus den Eigenschaften des δ -Baumes und der dazu definierten Abbildung. Nur die Behauptung der Eigenschaft der topologischen Sortierung wird hier gezeigt:

Der Beweis wird mit einer Induktion über die Länge des Weges in $\overleftarrow{T}_1$ geführt, der nach der Definition existiert, wenn $n \leq_1 m$ vorausgesetzt wird. Es wird hier auf Wege der Länge 1 eingegangen. Die Aussage für längere Wege folgt aus der Transitivität von $\leq_2$. Für Wege der Länge Null folgt die Aussage aus den Definitionen der Ordnungen. Nun zu Wegen der Länge 1:

Sei dazu $n \rightarrow m$ in $\overleftarrow{T}_1$. Dann ist der Knoten mit Label m ein Sohn von dem Knoten mit Label n in $\overleftarrow{T}_1$. Also ist die Stelle, an der das Label m steht, größer als die Stelle, an der das Label n steht. Da T und $\overleftarrow{T}_1$ abgesehen von der Pfeilrichtung die gleiche Struktur besitzen, bedeutet dies $(\varphi_{T_1})^{-1}(n) < (\varphi_{T_1})^{-1}(m)$ (natürliche Ordnung von $\mathbb{N}$). T_2 ist ein δ -Baum, was zur Folge hat, daß das Label eines

Sohn-Knotens immer größer ist als das Label des Vater-Knotens. Entsprechendes gilt für die Stellen. Da $(\varphi_{T_1})^{-1}(n)$ die Vater-Stelle und $(\varphi_{T_1})^{-1}(m)$ die entsprechende Sohn-Stelle ist, folgt über die δ -Baum-Funktion φ_{T_2} :

$$\varphi_{T_2} \left((\varphi_{T_1})^{-1}(n) \right) < \varphi_{T_2} \left((\varphi_{T_1})^{-1}(m) \right)$$

Dann gilt:

$$n = \varphi_{T_1} \left((\varphi_{T_2})^{-1} \left(\varphi_{T_2} \left((\varphi_{T_1})^{-1}(n) \right) \right) \right) \leq_2 \varphi_{T_1} \left((\varphi_{T_2})^{-1} \left(\varphi_{T_2} \left((\varphi_{T_1})^{-1}(m) \right) \right) \right) = m$$

wegen der Definition von $\leq_2$ über die Größe der Argumente von $\varphi_{T_1} \left((\varphi_{T_2})^{-1}(\cdot) \right)$. ■

Bemerkung:

Die Existenz und Eigenschaften der Ordnungen sind trivial, einerseits wegen der Struktur von T_1 , andererseits wegen der Bijektivität von $\varphi_{T_1} \left((\varphi_{T_2})^{-1}(\cdot) \right)$.

Der Satz besagt, daß es **in Bezug auf die Struktur des δ -Baumes** egal ist, ob man zur Bildung der Quotientenfolge die Folgen-Werte und die Reihenfolge bzgl. des gleichen oder zweier verschiedener Bäume wählt. Aus dem Satz folgen wichtige Eigenschaften von $(Q_n^{(1,2)})$:

1. $(Q_n^{(1,2)})$ hat nicht nur die **gleichen** Berührungspunkte, sondern auch die **gleichen** Teilfolgen zu unendlichen Wegen¹⁵ wie $(Q_n^{(1)})$,
2. $(Q_n^{(1,2)})$ und $(Q_n^{(2)})$ haben die **gleiche** Reihenfolge.

Als über diese Arbeit hinausgehende Möglichkeit bietet sich insbesondere die Analyse der Reihenfolge einzelner Rekursionen an.

Große Gemeinsamkeiten zwischen allen δ -Bäumen nicht ausgearteter Baumrekursionen liefern die Aussagen zur Ordnung des δ -Baumes in Abschnitt 3.1 für den Werte-Aspekt. Wesentliche Unterschiede bestehen aber bei dem Aspekt der Reihenfolge, da dieser deutliche Auswirkungen auf das Folgenbild besitzt. Soeben wurde gezeigt, daß eine Umsortierung in eine andere Reihenfolge ein erlaubter Eingriff ist, und dieser Eingriff zu einer wesentlichen Angleichung sehr unterschiedlicher Folgenbilder führt. Es zeigen sich somit große Gemeinsamkeiten aller

¹⁵Nach Knopp [Knopp, p. 90] ändert eine Umordnung einer konvergenten, reellen Folge nichts an deren Grenzwert. Damit kann man folgern, daß die Berührungpunktmenge bei Umordnung einer reellen Folge identisch bleibt, da dadurch eine Umordnung jeder konvergenten Teilfolge induziert wird. Dagegen bleiben bestimmte konvergente Teilfolgen bei beliebiger Umordnung keineswegs identisch.

Quotientenfolgen zu nicht ausgearteten Baumrekursionen. Es ist zu vermuten, daß sich auch Aussagen über die Gleichartigkeit der Reihenfolge für alle nicht ausgearteten Baumrekursionen finden lassen, da die Reihenfolge über $(\varphi_T)^{-1}$ direkt vom δ -Baum T abhängt.

5.3 Selbstähnlichkeit bei Baumrekursionen

Dieser letzte Abschnitt über Baumrekursionen behandelt Phänomene, die man grob unter die Überschrift „Selbstähnlichkeit“ stellen kann, obwohl sie den Anforderungen der allgemeinen Theorie der fraktalen Geometrie meist nicht gerecht werden.

Dies wird bei den ersten Aspekten der Betrachtungen deutlich, da hier grundsätzlich nur endliche oder abzählbar unendliche Mengen (hier Folgen) auftreten, die aber alle die Hausdorff-Dimension 0 besitzen¹⁶. Diese Dimension ist die am meisten benutzte „fraktale“ Dimension¹⁷. Für ein Fraktal im Sinne der allgemeinen Theorie sollte die „fraktale“ Dimension größer als die topologische Dimension sein, was bei dem Wert Null ausgeschlossen ist.

Barnsley [Barns, p. 197 ff.] beschränkt sich bei der Betrachtung verschiedener „fraktaler“ Dimensionen auf kompakte Mengen. Punktmengen der Form $((n, f_n))_{n \geq 0}$ zu Folgen (f_n) sind dagegen i.a. weder abgeschlossen noch beschränkt, selbst wenn die Folge (f_n) beschränkt ist (denn n ist unbeschränkt). Auch wenn sich somit **Folgen** nicht gut in die allgemeine fraktale Geometrie einbezogen werden können, kann man auch hier selbstähnliche Phänomene studieren.¹⁸

Zuerst werden aus dem bisherigen Kontext Erfahrungen gesammelt, die man als selbstähnliche Phänomene deuten könnte.

Nimmt man den Begriff selbstähnlich wörtlich, so ist in Abschnitt 5.1 gezeigt

¹⁶vgl. bei Falconer [Falco, p. 33]: Alle Mengen mit Hausdorff-Dimension > 0 sind überabzählbar!

¹⁷Die Anführungszeichen sollen anzeigen, daß der Begriff uneinheitlich verwandt wird!

¹⁸Folgen werden im weiteren Verlauf dieses Abschnitts nicht explizit als Punktmengen betrachtet, da Teilfolgen keine Teilmengen sind, weil bei der Teilfolgen-Bildung eine Neuindizierung stattfindet. Trotzdem wird z.B. das Schwingungsverhalten an graphischen Darstellungen von $((n, f_n))_{n \geq 0}$ vor Augen geführt.

worden, daß bei der Heap-Rekursion das Folgenintervall $[Q_{2^k}, \dots, Q_{2^{k+1}-1}]$ strukturell aus zwei Intervallen der Form $[Q_{2^{k-1}}, \dots, Q_{2^k-1}]$ zusammengesetzt ist, welche dann wieder (bei genügend großem k) aus jeweils zwei Intervallen $[Q_{2^{k-2}}, \dots, Q_{2^{k-1}-1}]$ bestehen, usw.. Dieser Prozeß ist zwar jeweils endlich, aber beliebig oft durchführbar für $k \rightarrow \infty$!

Bemerkung:

Ohne diesen Begriff i.a. quantifizieren zu können (dies wäre eine lohnende Arbeit für eine nachfolgende Untersuchung), sollen Folgen/Folgenabschnitte als strukturell ähnlich bezeichnet werden, wenn sie in ihrem wesentlichen Schwingungsverhalten übereinstimmen.

Bei vielen Quotientenfolgen zu nicht ausgearteten Baumrekursionen konnte eine „strukturelle Ähnlichkeit“ von auf den ersten Blick nicht in Verbindung stehenden Folgenstücken beobachtet werden. Hier ergeben sich interessante Forschungsmöglichkeiten.

In Zusammenhang mit der Ordnungsisomorphie von Teilbäumen (Abschnitt 4.2) wurde schon die große Ähnlichkeit verschiedener Teilfolgen erwähnt, wobei hier ebenfalls eine „strukturelle Ähnlichkeit“ gemeint ist. Man kann in diesem Zusammenhang an das Vorliegen selbstähnlicher Phänomene denken.

Es ist hier deshalb notwendig, den Begriff selbstähnlich in einem so allgemeinen Kontext zu verstehen, daß auch Folgen mit eingeschlossen sind. Die allgemeine fraktale Geometrie betrachtet im wesentlichen kompakte Euklidische Punktmenge (für eine Übersicht vgl. z.B. bei Peitgen und Richter [PeiRi] oder bei Peitgen und Saupe [PeiSa]). Selbstähnliche Mengen X enthalten eine echte Teilmenge $Y \subset X$, die der Menge X „ähnlich“ ist. Diese Ähnlichkeit wird mit Hilfe unterschiedlicher Invarianzen nachgewiesen. Über diese Invarianzen kann man Äquivalenzrelationen definieren.

Von diesen Betrachtungen ausgehend kann man auch für Folgen den Begriff der Selbstähnlichkeit einführen:

Definition 5.2 (Selbstähnlichkeit von Folgen)

*Gegeben sei eine unendliche Klasse M von reellen Folgen, die unter einer festen, (ggf. auch fehlenden) Einschränkung der strikten Teilfolgen-Bildung $\prec$ abgeschlossen ist. Weiter sei $\cong$ eine Äquivalenzrelation auf M . Dann heißt eine Folge $(f_n) \in M$ **selbstähnlich** bzgl. $(M, \prec, \cong)$ genau dann, wenn es eine Folge $(g_n) \in M$, $(g_n) \prec (f_n)$ gibt mit $(g_n) \cong (f_n)$.*

Beispiel 5.2

Sei M die Klasse aller reellwertigen Folgen mit uneingeschränkter strikter Teilfolgen-Bildung.

Eine konstante Folge ist nach Definition 5.2 dann selbst unter der Äquivalenzrelation, die Gleichheit aller Folgenwerte verlangt, selbstähnlich. Etwas weniger trivial selbstähnlich ist die Folge der natürlichen Zahlen mit den Teilfolgen der natürlichen Zahlen ≥ 2 bzw. der geraden oder ungeraden Zahlen, wenn man Skalierungen und Verschiebungen als äquivalenzerhaltende Operationen auffaßt, d.h. $(f_n) \cong (g_n)$ genau dann, wenn es $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ gibt mit $f_n = a \cdot g_n + b$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die hier vorgestellten Beispiele sind sehr einfach, im Vergleich zu dem, was allgemein als Fraktal verstanden wird, sogar zu einfach. Es zeigt sich, daß es notwendig ist, weitere Anforderungen an die Folgen zu stellen, die eine sinnvolle Übertragung der Erforschung selbstähnlicher Phänomene auf die reellen Folgen gestatten. Dies gilt auch bei der Wahl der Äquivalenzrelationen, da z.B. bei der Äquivalenzrelation, die eine Äquivalenz aller Folgen erlaubt, zwangsweise auch jede Folge selbstähnlich ist.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden selbstähnliche Folgen vorgestellt, die deutlich komplizierter sind und damit der Vorstellung eines Fraktals zumindest nahekommen. Eine weiterführende und grundlegende Betrachtung dieses Themenkreises wird in diesem als Ausblick zu verstehenden Abschnitt nicht vorgenommen.

Beispiele selbstähnlicher Folgen kann man mit Abschnitt 4.2 über Teilbaumisomorphie angeben. Im Falle von ordnungsisomorphen Teilbäumen wurde dort auf die „strukturelle Ähnlichkeit“ der zugehörigen Teilfolgen hingewiesen. Dies soll hier an einem Beispiel noch einmal veranschaulicht werden. Zuvor soll aber **für diesen Fall** die strukturelle Ähnlichkeit und Selbstähnlichkeit über die Teilbaumisomorphie begrifflich festgelegt werden.

Definition 5.3 (strukturelle (Selbst-)Ähnlichkeit von Teilfolgen)

Sei eine normierte, nicht ausgeartete Baumrekursion mit Quotientenfolge (Q_n) und δ -Baum T gegeben. Seien T_1 und T_2 zwei unendliche Teilbäume von T . Die beiden Teilfolgen der Quotientenfolge zu T_1 und T_2 heißen **strukturell ähnlich**, wenn T_1 und T_2 ordnungsisomorph sind. Ist zusätzlich T_2 Teilbaum von T_1 , so heißt die Teilfolge zu T_1 **strukturell selbstähnlich**.

Formalisiert im Sinne von Definition 5.2 bedeutet dies: Bei struktureller Selbstähnlichkeit wird die Klasse aller Teilfolgen betrachtet, die zu unendlichen Teilbäumen von Quotientenfolgen nicht ausgearteter Baumrekursionen gebildet werden. Die Teilfolgen-Bildung ist hier somit eingeschränkt auf Bildung echter Teilfolgen zu Teilbäumen des δ -Baumes (bzw. seiner Teilbäume). Äquivalenzrelation ist die strukturelle Ähnlichkeit, die mit Hilfe der zugehörigen Teilbäume definiert wird: $(Q_n^{T_1}) \cong (Q_n^{T_2}) :\Leftrightarrow \Psi(T_1) = \Psi(T_2)$, d.h. T_1 und T_2 sind ordnungsisomorph.

Bemerkung:

Diese Definition ist eigentlich nur eine indirekte, indem sie die für Teilfolgen zu definierende Eigenschaft auf Eigenschaften der entsprechenden Teilbäume zurückführt. Wegen des schon gesehenen weitreichenden Zusammenhangs des δ -Baumes und seiner Teilstrukturen mit der Quotientenfolge und den entsprechenden Teilfolgen über die Bereiche Reihenfolge und Werte sagt diese Definition jedoch auch viel über die betrachteten Folgen aus. Dies unterstreicht das folgende Beispiel.

Beispiel 5.3

Betrachtet wird die Quotientenfolge zur fair-periodischen Baumrekursion mit $\alpha = \text{period}[0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1]$, die nach Satz 4.3 nur endlich viele Klassen von ordnungsisomorphen Teilbäumen besitzt. In Abbildung 5.7 werden von zwei Strukturtypen jeweils die gleichen Folgenstücke jeweils dreier Teilbaumfolgen vorgestellt. Auf der linken Seite sind von oben nach unten die Folgen zu den Teilbäumen mit Wurzeln 18, 22, 26, auf der rechten Seite entsprechend zu 20, 24, 28 abgebildet, wobei jeweils die Folgen auf jeder Seite zueinander strukturell ähnlich sind. Hierbei wird sogar ein Blick auf die Größenordnung der Folgenwerte nötig, um zu erkennen, daß es sich nicht dreimal um dieselbe Folge handelt.

Nun stellt sich die Frage, ob in diesem Fall auch strukturell selbstähnliche Teilfolgen existieren. Die Beantwortung dieser Frage bereitet das folgende Lemma vor.

Lemma 5.4 (ordnungsisomorphe Selbstähnlichkeit von δ -Bäumen : $\bar{a}$)

Ein δ -Baum T einer nicht ausgearteten Baumrekursion mit nur endlich vielen Klassen von ordnungsisomorphen Teilbäumen enthält einen Teilbaum T' , der selbstähnlich ist bzgl. der Ordnungsisomorphie.

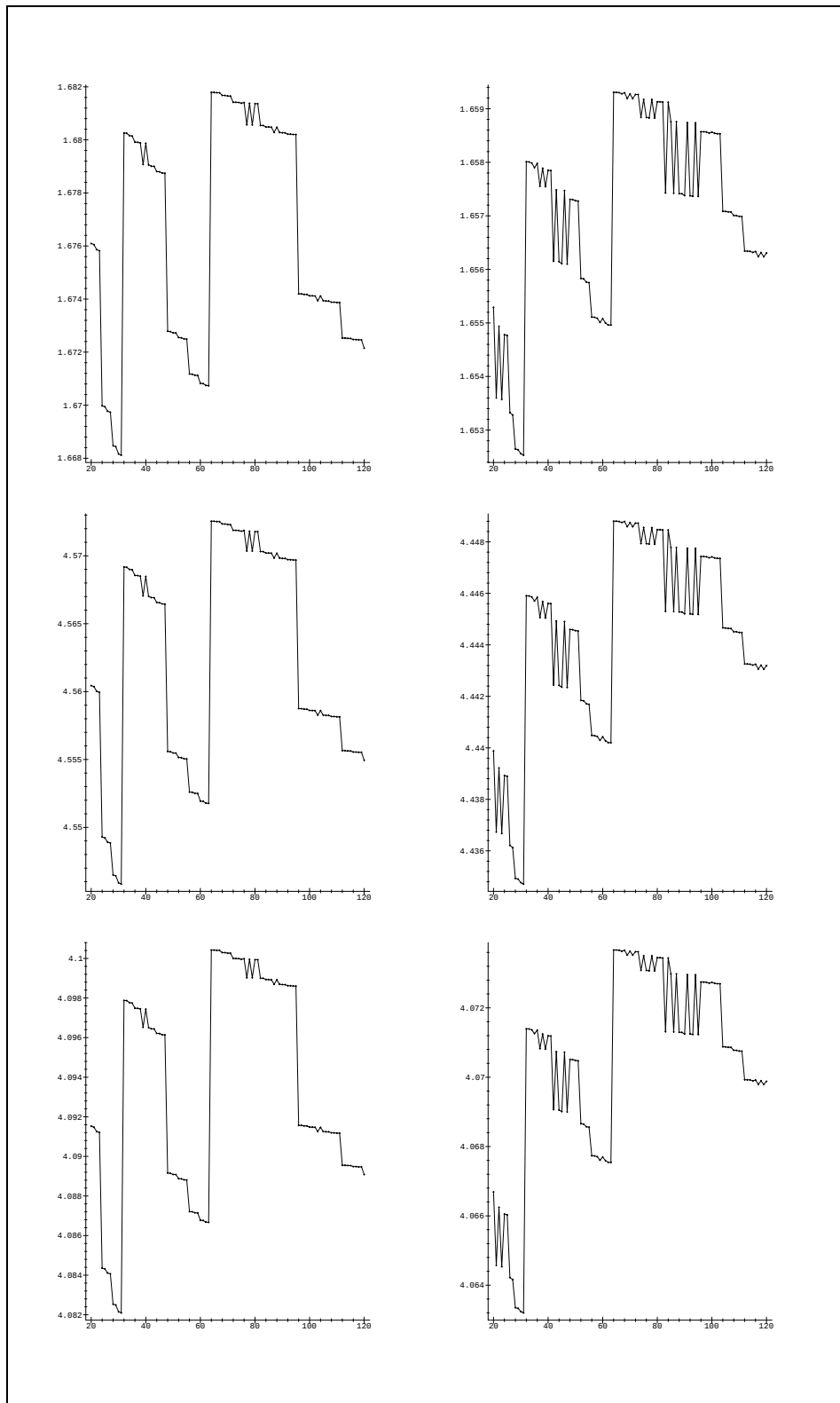


Abbildung 5.7: Gleiche Abschnitte verschiedener Teilfolgen aus Beispiel 5.3

Beweis:

Es wird das Beweisprinzip des endlich häufigen Verdünnens unendlicher Mengen angewandt:

Seien $T^{[1]}, T^{[2]}, \dots, T^{[m]}$ Vertreter der endlich vielen Ordnungsisomorphieklassen von Teilbäumen von T . O.B.d.A. ist T ordnungsisomorph zu $T^{[1]}$. Angenommen, alle echten Teilbäume von T seien nicht ordnungsisomorph zu T . Betrachte einen beliebigen Teilbaum T_1 von T . T_1 ist nicht ordnungsisomorph zu T . O.B.d.A. ist T_1 ordnungsisomorph zu $T^{[2]}$. Angenommen, alle echten Teilbäume von T_1 seien nicht ordnungsisomorph zu $T^{[2]}$. Wähle dann einen beliebigen Teilbaum T_2 von T_1 Da es nur endlich viele Ordnungsisomorphieklassen gibt, kommt man bei Fortführung dieser Konstruktion zu einem Teilbaum T_{m-1} , der zu $T^{[m]}$ ordnungsisomorph ist und nur noch Teilbäume enthalten kann, die ebenfalls zu $T^{[m]}$ ordnungsisomorph sind. Damit ist die Behauptung bewiesen, denn entweder gilt sie für T_{m-1} oder eine der Annahmen ist falsch, was ebenfalls die Richtigkeit der Behauptung beweist. ■

Die Ordnungsisomorphie überträgt sich auf strukturelle Ähnlichkeit der Folgen, also kann man aus Lemma 5.4 und Satz 4.3 folgern:

Folgerung 5.1 (strukturelle Selbstähnlichkeit von Folgen : $\bar{a}\bar{f}p$)

Die Quotientenfolge jeder fair-periodischen Baumrekursion enthält eine strukturell selbstähnliche Teilbaum-Teilfolge.

Bisher haben sich nur sehr wenige Teilfolgen von Quotientenfolgen als selbstähnlich herausgestellt. Um deren Anzahl deutlich zu vergrößern, ist ein Umweg über andere Randwertfolgen sinnvoll, um eine neue Klasse von Teilfolgen leichter einführen und motivieren zu können. In diesem Rahmen ist es dann möglich, die entstehenden ganzzahligen Quotientenfolgen mit in der Literatur vorhandenen Ergebnissen zu selbstähnlichen ganzzahligen Folgen zu vergleichen.

Einschub über ganzzahlige selbstähnliche Folgen, die im Falle der Quotientenfolgen zu anderen Randwerten gebildet werden.

Kimberling [Kim95, Kim97] betrachtet einen Typ von ganzzahligen Folgen als selbstähnlich: „fractal sequences“ zeichnen sich hierbei dadurch aus, daß die Folge, die entsteht, wenn man das erste Auftreten jeder Zahl streicht, wieder die Ursprungsfolge ist.

Hierbei handelt es sich um einen speziellen Fall der Folgen-Selbstähnlichkeit im Sinne von Definition 5.2: Die Erzeugung einer neuen Folge durch Streichen des ersten Auftretens jeder ganzen Zahl ist nichts anderes als eine spezielle Teilfolgen-Bildung. Das Ergebnis ist sehr stark in dem Sinne, daß als Äquivalenzrelation sogar die Gleichheit **aller** Folgenglieder verlangt werden kann: $(f_n) \cong (g_n) :\Leftrightarrow f_n = g_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die „fractal sequences“ von Kimberling [Kim95, Kim97] sind dabei keineswegs einfach, sondern zeigen Strukturen, die durchaus mit typischen Fraktalen mithalten können.

Ähnlich interessante ganzzahlige Beispiele lassen sich im Bereich der Quotientenfolgen von Baumrekursionen ebenfalls finden. Die zuletzt genannte Äquivalenzrelation kann aber hier nicht erfüllt werden, sondern nur eine Äquivalenzrelation, die Multiplikation mit einem ganzzahligen Faktor zuläßt. Eine noch größere Ähnlichkeit zu den „fractal sequences“ von Kimberling [Kim95, Kim97] könnte man erreichen, indem man additive Rekursionen zu passenden Randwerten betrachtet. Dies wird hier aber nicht vorgestellt. Einen Eindruck davon erhält man aber, indem man die im folgenden vorgestellten ganzzahligen Quotientenfolgen gliedweise logarithmiert.

Es werden nun Baumrekursionen zu folgender Randwertfolge betrachtet:

$$c_0 = A_0 = 1, \quad c_n = 2^n \quad n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta c_0 = Q_0 = 1, \quad \Delta c_n = 2 \quad n \geq 1$$

Wenn man sich klar macht, daß durch diese Randwerte die Quotientenfolgen-Werte zu Indices jeder k -ten Stufen konstant 2^{k+1} betragen, kann man leicht den folgenden Zusammenhang aus Satz 4.3 und Lemma 5.4 folgern: Mit den o.g. Randwerten besitzt die Quotientenfolge jeder fair-periodischen Baumrekursion eine Teilfolge, die eine mit einer festen Zweierpotenz multiplizierte Kopie von sich selbst (als Teilfolge) enthält.

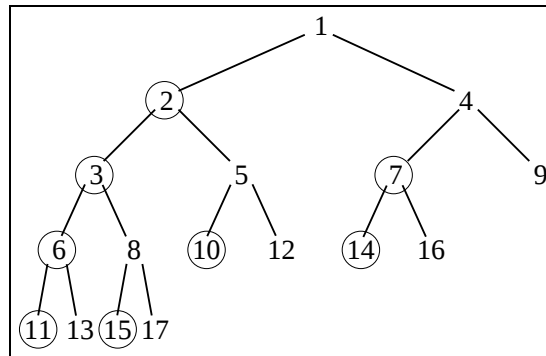
An dem Beispiel der Baumrekursion zu $\alpha := \text{period}[0, 0, 1, 1]$ wird jetzt untersucht, ob es nicht eine noch elegantere Lösung gibt. Dazu werden die Quotientenfolge $(Q_n)_{n \geq 1}$ und zwei spezielle Teilfolgen in Tabelle 5.2 dargestellt.

Man sieht an diesen wenigen Werten schon, daß die gewählten Teilfolgen die mit dem Faktor 2 multiplizierte Folge Q_n darstellen. Um zu klären, ob dies ein Zufall ist, oder unter welchen Voraussetzungen dieses Phänomen immer auftritt, wird der δ -Baum-Anfang zu diesem Beispiel in Abbildung

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Q_n	2	4	8	4	8	16	8	16	8	16	32	16	32	16	32
Tf 1		4	8			16	8			16	32			16	32
Tf 2				4	8			16	8			16	32		

Tabelle 5.2: Quotientenfolge und zwei Teilfolgen zu $\alpha := \text{period}[0, 0, 1, 1]$.

5.8 betrachtet, wobei die Indices der ersten Teilfolge umkreist sind.

Abbildung 5.8: δ -Baum zu $\alpha := \text{period}[0, 0, 1, 1]$.

Man sieht sofort, was geschehen ist: Es handelt sich um alle die Labels, die linke Söhne sind! Entsprechend wählt die zweite Teilfolge die Werte zu den Labels aus, die rechte Söhne sind. Um eine genauere Analyse durchzuführen und eine Verbindung zu bisherigen Aussagen herzustellen, werden „Sohnbäume“ und über diese „Nachfahrenbäume“ definiert. Dies wird für den linken Sohnbaum in Abbildung 5.9 für das hier betrachtete Beispiel dargestellt, wobei der ursprüngliche δ -Baum mit dünnen Kanten und der linke Sohnbaum mit dicken Kanten dargestellt ist. Dabei werden die neu hinzugenommenen rechten Kanten gestrichelt gezeichnet.

Es fällt auf, daß der linke Sohnbaum kein Teilgraph des δ -Baumes ist, da

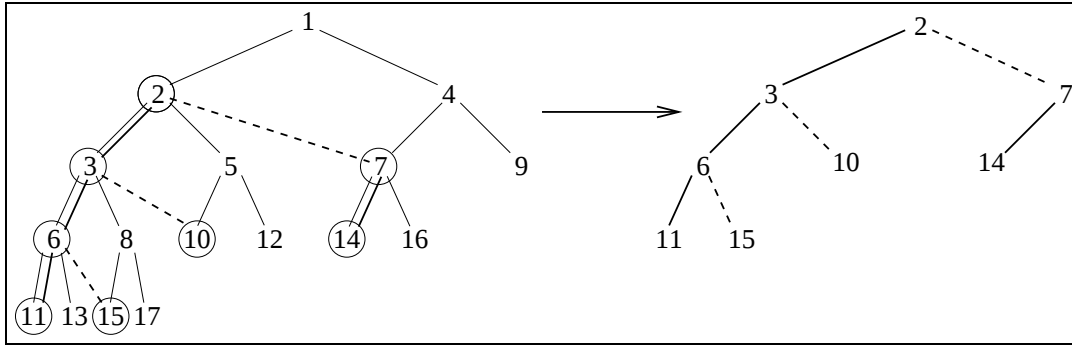


Abbildung 5.9: Konstruktion eines linken Sohnbaumes im Beispiel

neue Kanten hinzugenommen werden. Es handelt sich hierbei folglich um eine recht unorthodoxe Bildung.¹⁹ Trotzdem teilt auch der Sohnbaum viele Eigenschaften mit dem δ -Baum. Man kann sich überzeugen, daß das dargestellte Stück sogar ordnungsisomorph zum δ -Baum-Anfang ist, was wegen der extremen Ähnlichkeit der Teilfolgen zur Quotientenfolge nicht überrascht. Bevor nun weiter auf dieses Phänomen eingegangen wird, sollen erst einige Begriffe formal eingeführt werden.

Definition 5.4 (linker/rechter Sohnbaum, Nachfahrenbaum)

- (a) Sei T ein vollständiger, unendlicher, gelabelter binärer Baum. Dann wird der **linke [bzw. rechte] Sohnbaum** T_L [bzw. T_R] von T folgendermaßen definiert:
- Knoten von T_L [bzw. T_R] sind genau die Knoten von T , die linke [bzw. rechte] Söhne sind.
 - Wurzel von T_L [bzw. T_R] ist der linke [bzw. rechte] Sohn der Wurzel in T .
 - Sei v ein beliebiger Knoten von T_L [bzw. T_R]. Dann ist der linke [bzw. rechte] Sohn von v in T auch der linke [bzw. rechte] Sohn von v in T_L [bzw. T_R]. Der rechte [bzw. linke] Sohn von v in T_L [bzw. T_R] ist der linke [bzw. rechte] Sohn des rechten [bzw. linken] Nachbarknotens (der gleichen Stufe) von v in T .
 - Alle Labels werden mit den zugehörigen Knoten übernommen.
- (b) Sei T wie oben definiert. Entsteht T' aus T durch endliches iteriertes Ausführen beliebiger linker oder rechter Sohnbaum-Bildungen, so heißt T' **Nachfahrenbaum** von T .

¹⁹Eine gewisse Ähnlichkeit haben jedoch Rebalancierungsprozesse bei balancierten Bäumen (auch AVL-Bäume genannt) - vgl. bei Knuth [Knut3, p. 459 ff.].

Hier wird nun nicht näher erläutert, wie man die Ordnungsisomorphie auf Nachfahrenbäume erweitert, da diese Erweiterung sich direkt ergibt. Jetzt kann man die oben vermutete Ordnungsisomorphie des linken Sohnbaumes des Beispiel- δ -Baumes in einer unerwartet weitreichenden Form verallgemeinern:

Satz 5.3 ($\bar{a}$)

Sei T δ -Baum einer nicht ausgearteten Baumrekursion. Dann ist jeder Nachfahrenbaum von T ordnungsisomorph zu T .

Beweis:

Sei T δ -Baum einer nicht ausgearteten Baumrekursion. Seien wie auf den Seiten 170f. die Stellen von T mit $1, 2, 3, \dots$ nummeriert und die Labels an diesen Stellen über die Abbildung φ_T angegeben, wobei $\varphi_T(i)$ das Label von T an der Stelle i ist.

Dann wird behauptet, daß es für jeden Nachfahrenbaum T' von T eine endliche Iteration ζ von Aufstiegsfunktionen λ und ρ gibt, sodaß an jeder Stelle i in T' das Label $\zeta(\varphi_T(i))$ steht.

Wenn man diese Behauptung als bewiesen voraussetzt, ist die Ordnungsisomorphie von T und T' leicht zu zeigen: Da ζ streng isoton ist, gilt für die Labels zweier Stellen $i, j \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_T(i) < \varphi_T(j)$ ebenfalls $\zeta(\varphi_T(i)) < \zeta(\varphi_T(j))$. Die Umkehrung dieser Aussage folgt ebenfalls aus der strengen Isotonie von ζ . Damit sind T und T' ordnungsisomorph, da zwischen gleichen Stellen jeweils immer die gleiche Relation $<$ oder $>$ gilt (vgl. z.B. Abbildung 4.15).

Nun muß noch die Behauptung der Existenz einer derartigen Funktion ζ gezeigt werden. Dies geschieht mit vollständiger Induktion. Zum Induktionsanfang kann man sich in Abbildung 5.9 und Definition 5.4 klarmachen, daß an der gleichen Stelle, an der im δ -Baum T das Label x steht, im linken Sohnbaum T'_L von T das Label $\lambda(x)$ steht. Nimmt man die oben eingeführte Stellenbezeichnung, so steht an der Stelle i in T'_L das Label $\lambda(\varphi_T(i))$. Entsprechend steht im rechten Sohnbaum T'_R von T an der Stelle i das Label $\rho(\varphi_T(i))$. Für $\zeta := \lambda$ bzw. $\zeta := \rho$ ist damit der Induktionsanfang bewiesen.

Sei zum Induktionsschritt ein beliebiger Nachfahrenbaum T' von T gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine endliche Iteration ξ von Aufstiegsfunktionen λ und ρ , sodaß an der Stelle i in T' das Label $\xi(\varphi_T(i))$ steht. Sei nun T'' entweder der linke oder der rechte Sohnbaum von T' , im ersten Fall linker Sohnbaum. Wenn man die Stellennummerierung auf Seite 170 vor Augen hat und in Abbildung 5.9 die Konstruktion eines linken Nachfahrenbaums betrachtet, entspricht die Stelle i in T'' der Stelle $2i$ in T' . An dieser Stelle steht das gleiche Label $\xi(\varphi_T(2i))$. Nun ist aber $\varphi_T(2i)$ das Label vom δ -Baum T an der Stelle $2i$. Die Stelle $2i$ ist aber der linke Sohn von der Stelle i in T . Da in T an der Stelle i das Label $\varphi_T(i)$ steht, ist $\varphi_T(2i) = \lambda(\varphi_T(i))$. Insgesamt steht an der Stelle i in T'' folglich das Label $\xi(\lambda(\varphi_T(i)))$.

Vollkommen analog kann man in dem Fall, daß T'' der rechte Sohnbaum von T' ist, zeigen, daß an der Stelle i in T'' das Label $\xi(\rho(\varphi_T(i)))$ steht. Definiert man im ersten Fall $\zeta(n) := \xi(\lambda(n))$ und im zweiten Fall $\zeta(n) := \xi(\rho(n))$ jeweils für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist der Induktionsschritt bewiesen. ■

Man kann hieraus direkt folgern, daß die Identität der der zugehörigen Teilfolgen kein Zufall ist. Dies ist mit den bisherigen Ausführungen direkt ersichtlich und wird hier nicht mehr gesondert bewiesen.

Folgerung 5.2 ($\bar{a}$)

Sei $(Q_n)_{n \geq 1}$ die Quotientenfolge²⁰ einer nicht ausgearteten Baumrekursion mit δ -Baum T zu den Randwerten $c_0 = A_0 = 1$, $c_n = 2^n$ $n \geq 1$. Sei T' ein Nachfahrenbaum von T , dessen Wurzel w ein Knoten der k -ten Stufe von T ist. Dann gilt für die zu T' gehörende Teilfolge²¹ $(Q'_n)_{n \geq 1}$:

$$\frac{(Q'_n)}{2^k} = Q_n$$

Bei diesen Randwerten zeigt sich also eine extreme Folgen-Selbstähnlichkeit bezogen auf Teilfolgenbildung. Setzt man in der Folgerung den rechten und linken Sohnbaum für T' ein, so erhält man, daß die Quotientenfolge $(Q_n)_{n \geq 1}$ disjunkt und vollständig in den ersten Wert Q_1 und die linke und rechte Sohnbaum-Teilfolge, die beide bis auf den Faktor 2 wieder mit der

²⁰D.h. Q_0 wird fortgelassen!

²¹Dabei wird der erste Wert Q_1 und nicht Q_0 genannt.

Quotientenfolge übereinstimmen, zerfällt. Diese Überlegung gilt auch analog für jede Teilfolge zu einem beliebigen Nachfahrenbaum.

Bemerkung:

Unter den Randwerten in Folgerung 5.2 hat genau bei allen stufentreuen Baumrekursionen die Quotientenfolge die Form (Schreibweise der regulären Sprachen: 4^2 bedeutet 4, 4, und keineswegs 16) $(Q_n)_{n \geq 1} = 2, 4^2, 8^4, (16)^8, \dots$. Man sieht hier wieder einmal die spezielle Abgrenzung dieser Baumrekursio-nen-Klasse.

Nachdem mit Hilfe der abweichenden Randwerte die starke Selbstähnlichkeit der hier ganzzahligen Quotientenfolgen nachgewiesen werden konnte, wird jetzt versucht, dieses Ergebnis auf die in dieser Arbeit üblichen Randwerte zu übertragen. Sei dazu wieder $c_0 = A_0 = 1$ und $c_n = n$ für $n \geq 1$.

Mit Satz 5.3 kann man auch sofort eine Aussage über Quotientenfolgen nicht-ausgearteter Baumrekursionen zu den in dieser Arbeit üblichen Randwerten angeben.

Satz 5.4 (Strukturelle Selbstähnlichkeit von Quotientenfolgen : $\bar{a}$)

Sei $(Q_n)_{n \geq 1}$ die Quotientenfolge (ohne Q_0 !) einer nicht ausgearteten Baumrekursion mit δ -Baum T zu den üblichen Randwerten. Sei T' ein Nachfahrenbaum von T . Dann gilt:

1. *Die zu T' gehörende Teilfolge (Indizierung beginnt bei 1!) $(Q'_n)_{n \geq 1}$ hat die folgenden Eigenschaften:*
 - (Q'_n) und (Q_n) sind strukturell ähnlich.
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q'_n}{Q_n} = 1$.
2. *$(Q_n)_{n \geq 1}$ ist strukturell selbstähnlich und selbstähnlich bezüglich der Äquivalenzrelation, die von zwei positiven Folgen verlangt, daß ihr Quotient gegen 1 konvergiert.*

Bevor dieser Satz bewiesen wird, sollen erst einmal seine Auswirkungen vorgestellt werden. In Abbildung 5.10 sind von oben nach unten im gleichen Indexbereich (2 bis 400) die Quotientenfolge sowie die linke und die rechte Sohnbaum-Teilfolge der Quotientenfolge zu zwei nicht ausgearteten Baumrekursionen abgebildet: links zu $\alpha := \text{period}[0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]$ und rechts zu $\alpha := \text{period}[0, 0, 1, 0, 1]$. Die

Ähnlichkeit ist hier noch größer als in früheren Beispielen - mit dem Auge erkennbare Unterschiede sind nur bei genauer Betrachtung der Werte zu den niedrigsten Indices möglich.

Beweis:

Die Aussagen über strukturelle Ähnlichkeit und Selbstähnlichkeit folgen direkt aus Satz 5.3. Die Aussage über die Selbstähnlichkeit bezüglich der abweichenden Äquivalenzrelation im zweiten Punkt folgt aus der zweiten Aussage von (1.). Diese kann mit einer im Beweis von Satz 5.3 bewiesenen Aussage gezeigt werden: Jeder Nachfahrenbaum T' von T ist charakterisiert durch eine endliche Iteration ζ von Aufstiegsfunktionen λ und ρ , sodaß an jeder Stelle i in T' das Label $\zeta(\varphi_T(i))$ steht. Sei nun $\zeta := [\zeta_{k-1}, \zeta_{k-2}, \dots, \zeta_0]$ wie schon früher eingeführt. Da T und T' ordnungsisomorph sind, gilt für die Nachfahrenbaum-Teilfolge (Q'_n) von (Q_n) : $Q'_n = Q_{\zeta(n)}$. Weiterhin gilt:

$$Q_{\zeta(n)} = Q_{[\zeta_{k-1}, \zeta_{k-2}, \dots, \zeta_0](n)} = \Delta_{c_{[\zeta_{k-1}, \zeta_{k-2}, \dots, \zeta_0](n)}} \cdot \Delta_{c_{[\zeta_{k-2}, \dots, \zeta_0](n)}} \cdots \Delta_{c_{[\zeta_0](n)}} \cdot Q_n$$

Wegen $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_{c_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{m-1} = 1$ folgt daraus:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q'_n}{Q_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_{c_{[\zeta_{k-1}, \zeta_{k-2}, \dots, \zeta_0](n)}} \cdots \Delta_{c_{[\zeta_0](n)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\zeta_{k-1}, \zeta_{k-2}, \dots, \zeta_0](n)}{[\zeta_{k-1}, \zeta_{k-2}, \dots, \zeta_0](n) - 1} \cdots \frac{[\zeta_0](n)}{[\zeta_0](n) - 1} = 1 \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. ■

Die zweite angegebene Äquivalenzrelation drückt zwar nicht das aus, was mit dem Begriff strukturelle Selbstähnlichkeit gemeint ist, vermittelt aber einen Eindruck der großen Gemeinsamkeiten der betrachteten Folgen. Dabei ist diese Äquivalenzrelation direkt über eine Eigenschaft der Folgen definiert und nicht wie bei der strukturellen Ähnlichkeit über Bäume.

Bemerkung:

Als eine interessante Eigenschaft der Nachfahrenbaum-Teilfolgen folgt aus dem Beweis, daß ihre Berührungspunktmengen vollkommen mit der der Quotientenfolge übereinstimmen. Dies ergibt sich aus der gezeigten Darstellung

$$Q_{\zeta(n)} = Q_{[\zeta_{k-1}, \zeta_{k-2}, \dots, \zeta_0](n)} = \Delta_{c_{[\zeta_{k-1}, \zeta_{k-2}, \dots, \zeta_0](n)}} \cdot \Delta_{c_{[\zeta_{k-2}, \dots, \zeta_0](n)}} \cdots \Delta_{c_{[\zeta_0](n)}} \cdot Q_n,$$

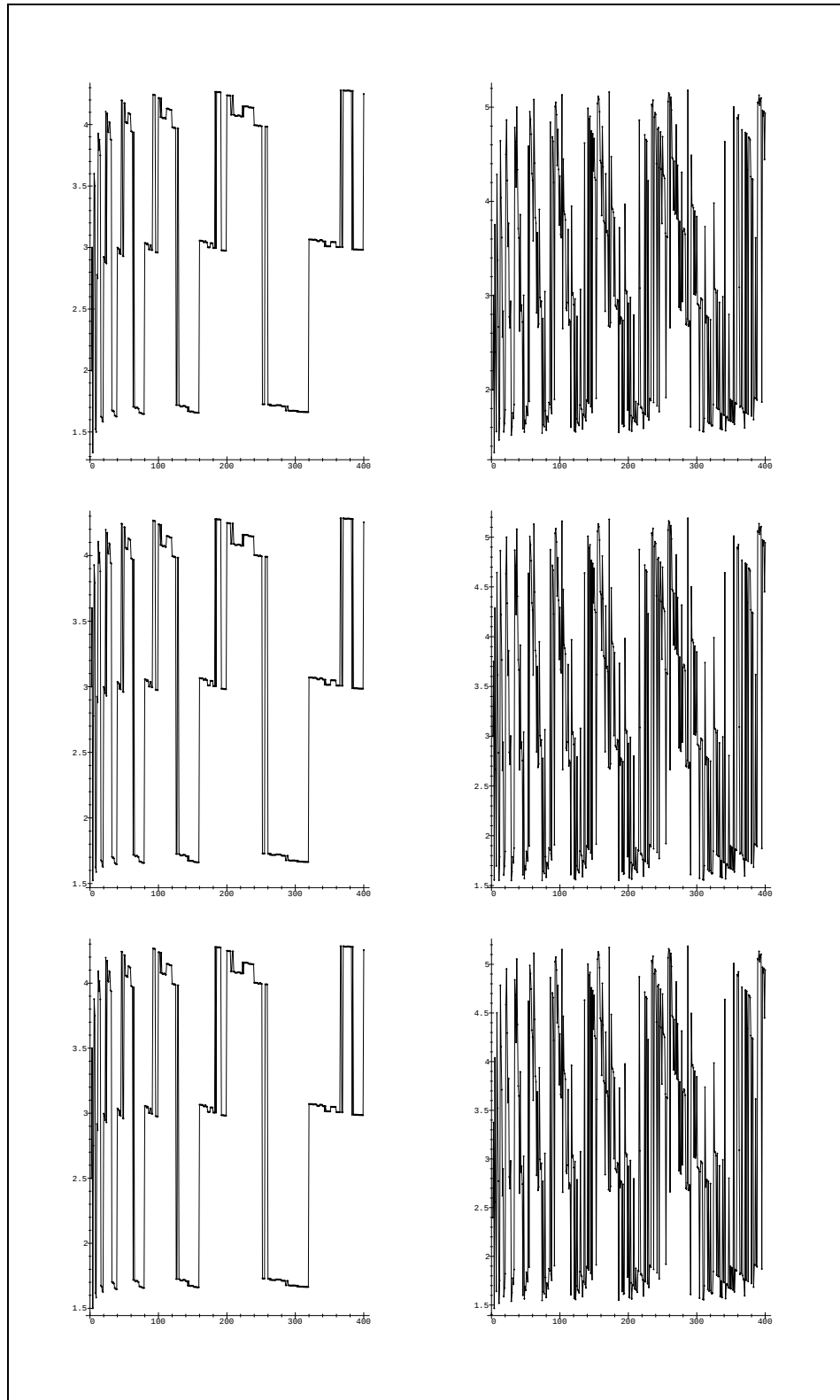


Abbildung 5.10: Gleiche Abschnitte der Quotientenfolge und der linken bzw. rechten Sohnbaum-Teilfolge von zwei Baumrekursionen.

da für jeden fest gewählten Nachfahrenbaum die Anzahl der Faktoren vor Q_n fest ist und jeder Faktor gegen 1 konvergiert, wenn n gegen Unendlich geht (s.o.).

Hier zeigen Teilfolgen zu Nachfahrenbäumen deutlich bessere und in weit größerem Rahmen nachweisbare Eigenschaften als Teilfolgen zu unendlichen Teilbäumen. Letztere haben jedoch andere Vorteile. Dies wird bei der letzten Betrachtung selbstähnlicher Phänomene deutlich werden:

Zum Abschluß dieses Kapitels soll eine überabzählbar unendliche Menge vorgestellt werden, die über eine Rekursion mit unregelmäßigen Abstieg definiert wird und ebenfalls selbstähnliche Strukturen zeigt. Es ist die Berührungspunktmenge zur Quotientenfolge der Baumrekursion zu $\alpha := \text{period}[0, 1]$. Hier kann man über eine Abschätzung mit den schon öfter dargestellten Methoden beweisen, daß jedes Berührungspunktintervall²² I_s in zwei **disjunkte** Intervalle $I_{\rho(s)}$ und $I_{\lambda(s)}$ zerfällt. Da diese Intervalle (nach Definition) abgeschlossen sind, ist „noch etwas Platz dazwischen“ und man kommt leicht zu dem Ergebnis, daß die überabzählbar unendliche Menge von Berührungspunkten eine Cantormenge²³ ist. Der Prozeß der Generierung der Berührungspunktmenge wird in Abbildung 5.11 dargestellt. Es sei darauf hingewiesen, daß aus dem Beweis zu Satz 3.13 folgt, daß im hier betrachteten Fall (disjunkte Zerlegung) keine Berührungspunkte in $I_s \setminus (I_{\rho(s)} \cup I_{\lambda(s)})$ liegen!

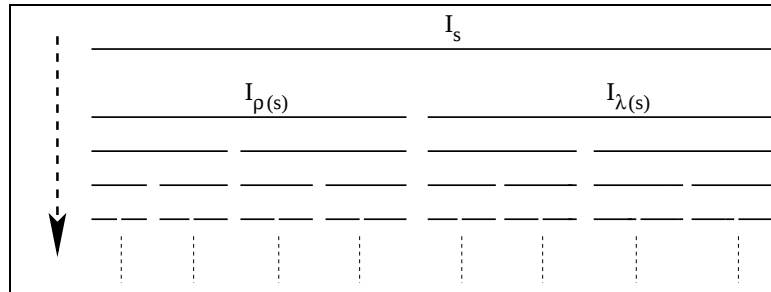


Abbildung 5.11: Konstruktion der Berührungspunktmenge.

Die Selbstähnlichkeit ist hierbei nicht als solche unter Anwendung einer gleichmäßigen Transformation (z.B. Translation o.ä.) zu verstehen, sondern so, daß die Berührungspunktmenge unendlich viele Kopien von sich selbst enthält, die **strukturell** mit der Gesamtmenge übereinstimmen.

Ob auch andere Baumrekursionen selbstähnliche Berührungspunktmenen besitzen, ist noch nicht untersucht worden. Wegen der diffizilen Abschätzungen ist ein Nachweis nicht leicht zu führen. Eine wesentliche Hilfe dazu könnten die Aussage

²²zur Definition vgl. Beweis von Satz 3.12.

²³Zu verallgemeinerten Cantormengen vgl. z.B. bei Falconer [Falco, p. 65 ff.].

von Satz 4.3 und Lemma 5.4 sein, da hier Teilbaum-Isomorphie betrachtet wird, die sich mit den Aussagen von Abschnitt 3.4 auf Berührungpunktintervalle übertragen lassen könnte. Für derartige Fragen wesentlich unbrauchbarer ist dagegen der viel allgemeinere Satz 5.3, da Nachfahrenbäume keinen so deutlichen Zusammenhang zu Berührungpunkt-Intervallen vorweisen wie Teilbäume.

Kapitel 6

Allgemeine Rekursionen mit unregelmäßigem Abstieg

Baumrekursionen sind ziemlich spezielle Rekursionen. In diesem Kapitel sollen allgemeinere multiplikative Rekursionen mit unregelmäßigem Abstieg und Rückgriff auf zwei vorherige Terme betrachtet werden. Dabei kann nicht eine solche genaue Betrachtung wie bei den Baumrekursionen geschehen, da hier u.a. eine weit größere Anzahl von Phänomenen auftritt. Es soll ein kleiner Ausblick auf die hier möglichen Abweichungen gegeben werden, wobei ein besonderer Schwerpunkt auf die Vielfalt der Rekursionsgraphen gelegt werden soll. Speziell untersucht werden in den Abschnitten 6.2 und 6.3 Rekursionen mit bzgl. der Hintereinanderausführung kommutativen Abstiegsfunktionen, und unter diesen werden die sogenannten Netzrekursionen genauer betrachtet.

6.1 Doppelsprungstellen und Irreduzible

Bisher hat sich diese Arbeit mit Baumrekursionen beschäftigt. Eine deutliche Einschränkung ist hierbei, daß die beiden Abstiegsfunktionen in ihrem Wachstum voneinander abhängig sind. Diese Einschränkung soll nun fortfallen in dem Sinne, daß beide Abstiegsfunktionen beliebig gewählt werden können, wobei es sich natürlich um schwach wachsende Abstiegsfunktionen handeln muß. Dies sei kurz formal eingeführt.

Definition 6.1 (Rekursion mit unregelmäßigem Abstieg)

Eine **Rekursion mit unregelmäßigem Abstieg** (mit Rückgriff auf zwei vorherige Terme) hat die Form

$$A_n = c_n \cdot A_{\alpha(n)} \cdot A_{\beta(n)}, n \geq 1, A_0 \text{ vorgegeben.}$$

Dabei sind α und β schwach wachsende Abstiegsfunktionen, (c_n) eine Folge von Randwerten und A_0 ein Anfangswert. In Abhängigkeit von (c_n) und A_0 kann (A_n) als reelle Folge betrachtet werden. Hier ist $A_n \in \mathbb{N}$ für $n \geq 0$.

Wie bisher wird hier im folgenden schwerpunktmäßig die Quotientenfolge (Q_n) betrachtet, die vollkommen analog wie bisher definiert wird, und als Randwertfolge $c_n = n, n \geq 1$ sowie als Anfangswert $A_0 = 1$ gewählt.

Bevor die Quotientenfolgen-Rekursion vorgestellt wird, soll in einem Beispiel die oft abweichende Gestalt der Quotientenfolgen von Nicht-Baumrekursionen kurz vorgestellt werden.

Beispiel 6.1

In Abbildung 6.1 dargestellt wird die Quotientenfolge zur Rekursion mit unregelmäßigem Abstieg zu $\alpha(n) := \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ und $\beta(n) := \lfloor \frac{n}{5} \rfloor$. Man kann zwei überraschende Eigenschaften beobachten. Erstens gibt es eine offenbar fallende Teilfolge am unteren Rand des Konvergenzkegels. Bei Baumrekursionen war der untere Rand des Konvergenzkegels immer monoton steigend. Zweitens kann man aufgrund der an Größe zunehmenden, „sehr hohen“ Werte einen unbeschränkten oberen Rand des Konvergenzkegels vermuten, obwohl beide Abstiegsfunktionen periodisch sind (bei nicht ausgearteten, periodischen Baumrekursionen war die Quotientenfolge dagegen immer beschränkt). Begründungen für diese Unterschiede werden in diesem Abschnitt gegeben.

Die folgende Rekursion der Quotientenfolge (Q_n) für $n \geq 2$ entsteht vollkommen analog zu der bei Baumrekursionen auftretenden (vgl. Satz 2.2 auf Seite 27) und wird auch entsprechend bewiesen. Bei Baumrekursionen können nur die beiden mittleren Fälle in den geschweiften Klammern auftreten, der erste und der letzte sind jedoch durch die dortige Abhängigkeit der Abstiegsfunktionen ausgeschlossen.

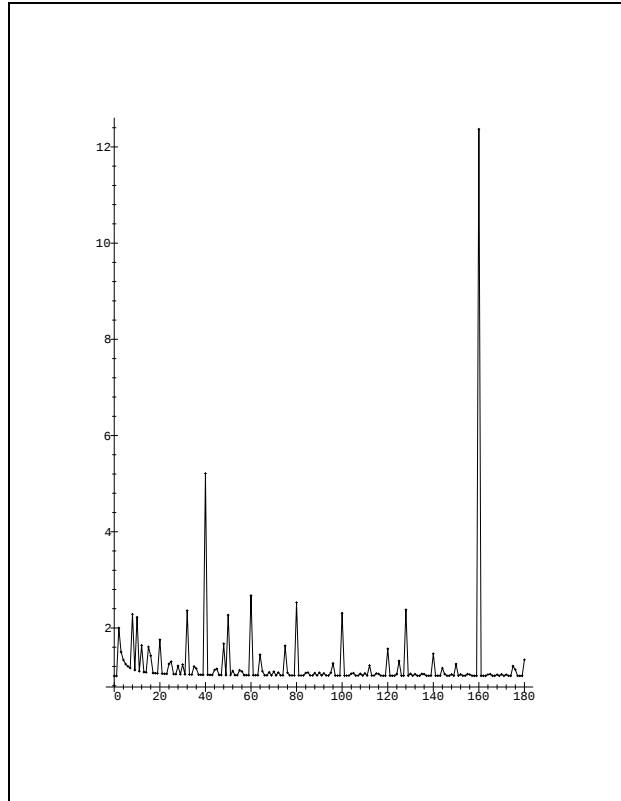


Abbildung 6.1: Quotientenfolge einer Nicht-Baumrekursion aus Beispiel 6.1.

Satz 6.1 (Quotientenfolgen-Rekursion)

Die Quotientenfolge jeder Rekursion mit unregelmäßigem Abstieg genügt für $n \geq 2$ der folgenden Rekursion:

$$Q_n = \frac{n}{n-1} \cdot \left\{ \begin{array}{ll} Q_{\alpha(n)} \cdot Q_{\beta(n)} & n \text{ ist Sprungstelle von } \alpha \text{ und von } \beta \\ Q_{\alpha(n)} & n \text{ ist Sprungstelle von } \alpha \text{ und nicht von } \beta \\ Q_{\beta(n)} & n \text{ ist Sprungstelle von } \beta \text{ und nicht von } \alpha \\ 1 & n \text{ ist weder Sprungstelle von } \alpha \text{ noch von } \beta \end{array} \right\}$$

Trotz der großen Ähnlichkeit dieser Rekursion zur Quotientenfolgen-Rekursion bei **Baumrekursionen** bestehen hier also schon entscheidende Unterschiede. Nun ergibt sich daraus schon die wesentliche Frage dieses Abschnitts:

Wie wirken sich die beiden hier neu auftretenden Fälle auf das Ver-

halten der Quotientenfolge aus?

Da beide Fälle zentral für das ganze Kapitel sind, soll für jeden ein Begriff eingeführt werden.

Definition 6.2 (Irreduzibles, Doppelsprungstelle)

1. Ein $n \in \mathbb{N}$ heißt **Irreduzibles** einer Rekursion mit unregelmäßigem Abstieg, wenn $n = 1$ oder n weder Sprungstelle von α noch von β ist.
2. Ein $n \in \mathbb{N}$ heißt **Doppelsprungstelle** einer Rekursion mit unregelmäßigem Abstieg, wenn n sowohl Sprungstelle von α als auch von β ist.

Bemerkung:

In Zusammenhang mit dieser Definition stehen einige Notationen, die vereinfachend benutzt werden: Ein Irreduzibles ist **irreduzibel**. Jedes nicht irreduzible Element n ist **reduzibel**, genauer α -**reduzibel**, wenn n eine Sprungstelle von α ist, und β -**reduzibel**, wenn n eine Sprungstelle von β ist. Führt ein gerichteter Weg (d.h. in Pfeilrichtung) von einem Label m zu einem Irreduziblen n , so **hat/besitzt** m das Irreduzible n .

Es stellt sich im folgenden die Frage, welche Komplikationen dadurch auftreten können, daß eine Rekursion mehr als ein Irreduzibles und/oder eine Doppelsprungstellen besitzt. Man kann sich leicht vorstellen, daß das Auftreten nur endlich vieler Irreduziblen bzw. Doppelsprungstellen nicht soviel verändert wie ein unendlich häufiges Vorkommen. Zuerst werden die Irreduziblen betrachtet.

Was ist das besondere an Irreduziblen? Bei den bisherigen Betrachtungen gab es immer nur **ein** Irreduzibles zu beachten, nämlich $n = 1$.¹ Dies ist auch der kleinste, bei Rekursionen überhaupt betrachtete Index. Bei größeren Irreduziblen stoppt die Rekursion bei einer mitten in $\mathbb{N}$ liegenden Stelle. Dies ist aber kein wesentliches Problem, denn die wirkliche Rekursion geschieht nicht linear auf $\mathbb{N}$, sondern auf dem „mehrdimensionalen“ Rekursionsgraphen. Im Prinzip ist dann jedes Irreduzible ein kleinstes Element.

Bemerkung:

Der **Rekursionsgraph** (der Quotientenfolge!) wird vollkommen analog zum δ -Baum gebildet, d.h. als Labels kommen alle $n \in \mathbb{N}$ genau einmal vor und es geht ein Pfeil von n nach m , wenn $\alpha(n) = m$ gilt **und** n Sprungstelle von α ist oder wenn $\beta(n) = m$ gilt **und** n Sprungstelle von β ist. Wenn $\alpha(n) = \beta(n) = m$ gilt

¹ $n = 0$ wird hier nicht betrachtet, da im Zusammenhang damit immer die gleichen Phänomene auftreten.

und n sowohl Sprungstelle von α als auch von β ist, läßt man zwei Pfeile von n nach m gehen.

Wesentlich ist hier wie bei den Baumrekursionen, daß **immer** der Rekursionsgraph der **Quotientenfolge** und **nicht** der Rekursionsgraph der Originalfolge betrachtet wird. In diesem Zusammenhang sind die angegebenen Sprungstellen-Voraussetzungen für die Pfeile **entscheidend**. Zum Vergleich sei noch einmal auf die Abbildung 2.2 bei den Baumrekursionen und die dazugehörige Bemerkung verwiesen.

Ein wesentliches Problem ist in dem Begriff des kleinsten Elements begründet. Bisher endete der (einzige von einem Label ausgehende) Rekursionsweg stets bei dem gleichen (einzigen!) Irreduziblen. Dies ist nun nicht mehr erfüllt, denn, wie das folgende Lemma zeigt, besteht die Möglichkeit, daß von einem Element aus zwei verschiedene Wege zu verschiedenen Irreduziblen führen.

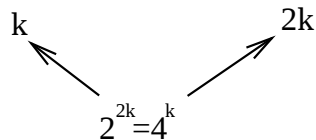
Lemma 6.1

Es gibt Rekursionen mit unregelmäßigem Abstieg, bei denen es $m \in \mathbb{N}$ gibt, die mindestens zwei Irreduzible n_1 und n_2 besitzen. Es gibt sogar Rekursionen mit unendlich vielen solchen m .

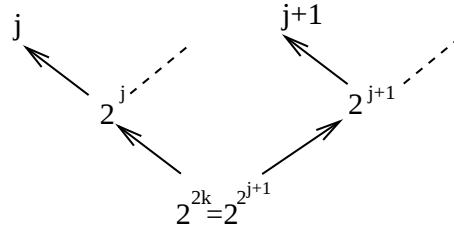
Beweis:

Da der erste Teil der Aussage aus dem zweiten folgt, wird nur letzterer bewiesen. Dies geschieht mit einem konkreten Beispiel. Es wird gewählt: $\alpha(n) := \lfloor \log_2(n) \rfloor$ und $\beta(n) := \lfloor \log_4(n) \rfloor$. Irreduzible sind alle Nicht-Zweierpotenzen; alle Zweierpotenzen sind Sprungstellen. Da $4^k = 2^{2k}$ ist, sind alle $n = 2^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$ Doppelsprungstellen, alle anderen Zweierpotenzen einfache Sprungstellen.

Es soll nun der Rekursionsgraph ausgehend von einer Doppelsprungstelle betrachtet werden. Dabei werden die Ergebnisse der α -Anwendungen nach rechts oben, die der β -Anwendungen nach links oben geschrieben.



Ist k keine Zweierpotenz, so sind k und $2k$ Irreduzible, die trivialerweise verschieden sind. Ist andererseits $k > 4$ eine Zweierpotenz, o.B.d.A. $k = 2^j$, so gilt:



Man sieht leicht, daß $(j + 1)$ irreduzibel ist, wenn j reduzibel² ist, und j irreduzibel ist, wenn $(j + 1)$ reduzibel ist. Damit ist klar, daß für $j > 1$ stets die Irreduziblen zu j und $(j + 1)$ verschieden sind.

Insgesamt sieht man, daß jedes $n = 2^{2k}$, $k > 4$ mindestens zwei verschiedene Irreduzible hat, was die Behauptung beweist. ■

Für viele Betrachtungen ist es ungünstig, wenn ein Element mehrere verschiedene Irreduzible besitzt. Deswegen sollen i.a. Fällen ausgeschlossen werden, in denen so etwas vorkommt. Dazu werden zwei Definitionen benötigt:

Definition 6.3 (Zusammenhangskomponente, Einwurzel-Struktur)

1. Ein Teilgraph H des Rekursionsgraphen G heißt **Zusammenhangskomponente von G** , falls es zwischen je zwei Knoten von H jeweils mindestens eine (ungerichtete!) Verbindung gibt, H alle Pfeile aus G enthält, die Knoten aus H verbinden, und in G (!) kein Pfeil einen Knoten von H mit einem Knoten von $G \setminus H$ verbindet und umgekehrt.
2. Eine Zusammenhangskomponente H des Rekursionsgraphen G heißt **Einwurzel-Struktur**, falls H nur ein Irreduzibles enthält.

Bemerkung:

Die Definition einer Zusammenhangskomponente in dieser Arbeit entspricht der einer schwachen Zusammenhangskomponente bei Christofides [Chris].

Es ist sinnvoll, Rekursionen zu betrachten, die nur Zusammenhangskomponenten besitzen, die Einwurzel-Strukturen sind. Als Beispiel kann man Baumrekursionen anführen, die nur eine einzige Zusammenhangskomponente, nämlich den gesamten Rekursionsgraph, enthalten. Dieser ist aber eine Einwurzel-Struktur, da $n = 1$ das einzige Irreduzible ist.

Neben diesen schon getroffenen Feststellungen ergibt sich ein anderer Unterschied

²d.h. nicht irreduzibel.

zu den Baumrekursionen bei der Existenz unendlich vieler Irreduzibler in Zusammenhang mit den Grenzwerten. Bei nicht ausgearteten, periodischen und stufentreuen Baumrekursionen brauchte man für die Grenzwerte nur alle unendlichen Wege zu betrachten. Dies ist hier anders:

Lemma 6.2 (Irreduziblen-Berührungspunkt)

Sei (Q_n) Quotientenfolge einer binären Rekursion mit unregelmäßigen Abstieg mit unendlich vielen Irreduziblen. Dann gilt:

Es gibt einen Berührungspunkt $z = 1$, der kein Grenzwert eines unendlichen Weges ist.

Beweis:

Man betrachtet die Teilfolge von Q_n , die genau alle Indices umfaßt, die irreduzibel sind. An diesen Stellen ist stets $Q_n = \frac{n}{n-1}$ (vgl. Satz 6.1). Folglich konvergiert diese Teilfolge gegen 1. (Alle unendlichen Wege im Rekursionsgraphen führen dagegen zu Teilfolgen mit Grenzwerten > 1 .) ■

Beispiel 6.2

In vielen Fällen existieren unendlich viele (disjunkte) Teilfolgen, die gegen 1 konvergieren, aber zusammengenommen nicht konvergieren. Dies ist zum Beispiel der Fall bei der Rekursion mit den hier allgegenwärtigen Rand- und Anfangswerten sowie $\alpha(n) := \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ und $\beta(n) := \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$. α -Sprungstellen liegen hier bei $n = 3k$, β -Sprungstellen bei $n = 3k + 2$ und Irreduzible bei $n = 3k + 1$, jeweils immer für $k \geq 1$, z.T. auch für $k = 0$, vor. Doppelsprungstellen gibt es keine. Darum muß jedes Element ein eindeutiges Irreduzibles besitzen. Man sieht leicht, daß der Rekursionsgraph ein unendlicher Wald aus unendlichen binären Bäumen ist, die ebenso wie δ -Bäume aufgebaut sind. Man könnte hier von einem δ -Wald sprechen.

Da hier $\alpha(n) \leq \beta(n)$ für alle $n \geq 0$ ist, kann man hier, wie bei den Baumrekursionen, die Pseudo-Inversen als Rechts- und Links-Funktionen definieren: $\lambda(n) = 3n - 1 = \beta^{-1}(n)$ und $\rho(n) = 3n = \alpha^{-1}(n)$. Darüber kann man für jede Zusammenhangskomponente wie bei den Baumrekursionen Stellen definieren. Sei eine solche mit $[\zeta_m, \dots, \zeta_1]$ bezeichnet, wobei $\zeta_i \in \{\lambda, \rho\}$ für $1 \leq i \leq m$ ist. Wie gehabt ist für $s \geq 1$:

$$Q_{[\zeta_m, \dots, \zeta_1]}(s) = Q_s \cdot \prod_{i=1}^m \Delta_{C_{[\zeta_i, \dots, \zeta_1]}(s)}$$

Ist $s = s_k := 3k + 1$ für $k \geq 0$ irreduzibel, so gilt:

$$Q_{[\zeta_m, \dots, \zeta_1](s_k)} = \Delta_{c_{s_k}} \cdot \prod_{i=1}^m \Delta_{c_{[\zeta_i, \dots, \zeta_1](s_k)}}$$

Da $\Delta_{c_n} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$, $[\zeta_m, \dots, \zeta_1]$ isoton ist und $s_k \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$, erhält man:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q_{[\zeta_m, \dots, \zeta_1](s_k)} = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_{c_{s_k}} \right) \cdot \prod_{i=1}^m \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_{c_{[\zeta_i, \dots, \zeta_1](s_k)}} \right) = 1$$

Für jede der unendlich vielen Stellen vom o.g. Typ konvergieren die zugehörigen, paarweise disjunkten Teilfolgen stets gegen 1. Die Vereinigung von allen diesen Teilfolgen ist aber die gesamte Quotientenfolge, von der man nach dem Abschnitt 3.4 wohl nicht mehr erwarten darf, daß sie konvergiert. Vielmehr verhält sich jede einzelne Zusammenhangskomponente wie ein δ -Baum. „Wald“-Rekursionen werden hier aber nicht genauer untersucht.

Weitere Dinge, die sonst ungewohnt sind, kann man erwarten, wenn es bei einer Rekursion **Doppelsprungstellen** gibt, insbesondere wenn unendlich viele Doppelsprungstellen vorkommen.

Bemerkung:

In diesem Abschnitt werden **unendliche Wege im Rekursionsgraphen** vollkommen analog zur bisherigen Vorgehensweise aufgefaßt. Es handelt sich also um vollständige Folgen von jeweils mit Pfeilen verbundenen Knotenlabels, die beginnend bei einem beliebigen Knoten (oft einem Irreduziblen) entgegen der Pfeilrichtung im Rekursionsgraph verlaufen.

Bei der Betrachtung von unendlichen Wegen wurde häufig nach dem Konvergenzverhalten der zugehörigen Teilfolgen gefragt. Was aber passiert, wenn ein unendlicher Weg nicht ausschließlich durch einfache Sprungstellen oder endlich viele Doppelsprungstellen geht, sondern durch unendlich viele Doppelsprungstellen. Gleichzeitig mit der entsprechenden Definition werden noch andere Typen von Wegen eingeführt, die noch spezieller sind.

Definition 6.4 (Doppelsprungstellenweg, Doppelpfad, M-Pfad)

Ein unendlicher Weg $f_1, f_2, f_3, \dots$, der eine unendliche Folge von Doppelsprungstellen $g_1, g_2, g_3, \dots$ enthält, heißt

- **unendlicher Doppelsprungstellenweg.** $g_1, g_2, g_3, \dots$ heißt **unendliche Doppelsprungstellenverkettung**.
- **unendlicher M-Pfad**, falls es ein $M \in \mathbb{N}$ gibt, sodaß von jedem g_i ein (endlicher, gerichteter) Pfad P_i zu einem Label $e_i \leq M$ läuft, der den nicht auf dem Weg $f_1, f_2, \dots$ liegenden, von g_{i+1} ausgehenden, Pfeil enthält. $g_1, g_2, g_3, \dots$ heißt dann **unendliche M-Verkettung**.
- **unendlicher Doppelpfad**, falls es zwischen g_{i+1} und g_i noch einen anderen (endlichen, gerichteten) Pfad als den über $f_1, f_2, \dots$ gewählten gibt, der den nicht auf dem Weg $f_1, f_2, \dots$ liegenden, von g_{i+1} ausgehenden, Pfeil enthält. $g_1, g_2, g_3, \dots$ heißt dann **unendliche Doppelverkettung**.

Bemerkung:

Die Verkettungs-Definitionen werden erst später benötigt. Wegen der ganz andersartigen Definition einer Kette als ungerichteten „Weg“ in einem gerichteten Graphen bei Christofides [Chris] wurde anstatt Kette die ähnliche Bezeichnung Verkettung gewählt.

Beispiel 6.3

In der Abbildung 6.2 werden jeweils vollkommen fiktive Beispiele für einen unendlichen Doppelsprungstellenweg, einen unendlichen M-Pfad und einen unendlichen Doppelpfad gegeben. Dabei bezeichnen die dicken Pfeile stets den gemeinten Pfad, während ansonsten vorhandene Pfeile zusätzliche Wege kennzeichnen.

Beim Doppelsprungstellenweg gehen abweichende Wege direkt zu Irreduziblen und enden hier natürlich. Setzt man das Bild so wie begonnen unendlich fort, so werden von den Doppelsprungstellen auf abzweigenden Wegen unendlich viele verschiedene Irreduzible erreicht. Deren Menge ist natürlich unbeschränkt. Folglich kann kein M-Pfad vorliegen.

Der M-Pfad sieht sehr ähnlich aus mit dem wesentlichen Unterschied, daß alle abweichenden Wege bei dem gleichen Irreduziblen enden. Dieses eine Irreduzible ist trivialerweise beschränkt.³ Es handelt sich um keinen Doppelpfad, da von

³Die in der Definition eines M-Pfades genannten Labels e_i müssen aber keine Irreduziblen sein.

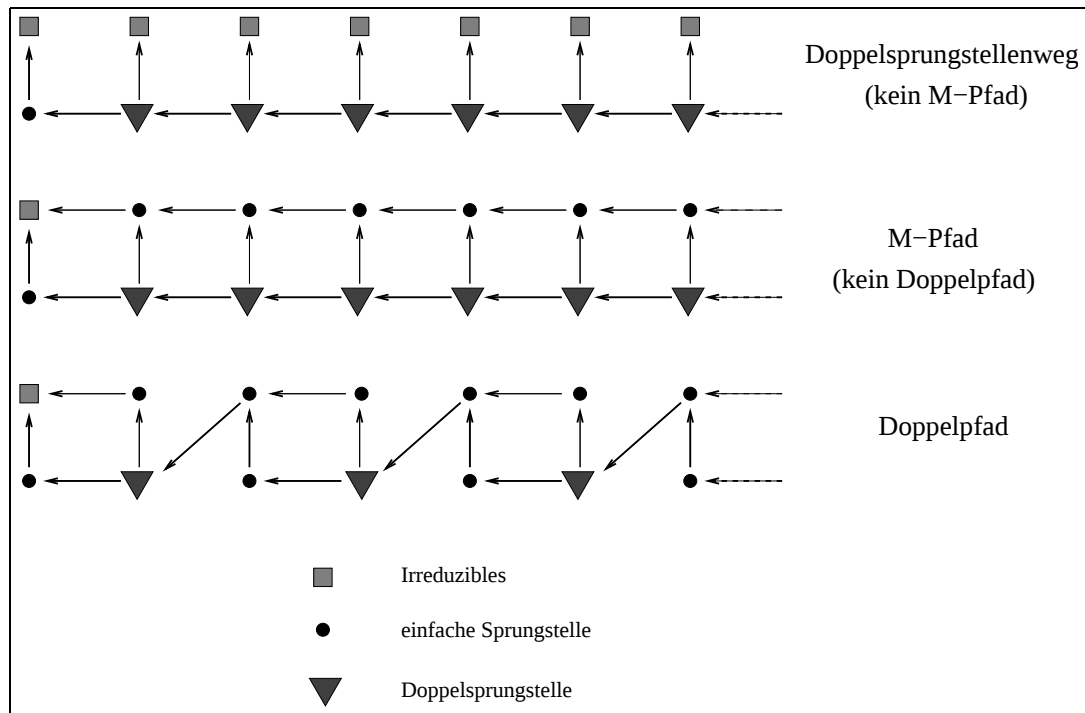


Abbildung 6.2: Wege durch unendlich viele Doppelsprungstellen.

den Doppelsprungstellen nur ein einziger Weg zur vorherigen Doppelsprungstelle führt.

Beim Doppelpfad führt auch der von jeder (bis auf die erste) Doppelsprungstelle abzweigende Weg zur vorhergehenden Doppelsprungstelle. Die in diesem Doppelpfad enthaltene Doppelverkettung besteht nur aus den auf dem Pfad liegenden Doppelsprungstellen. Bei anderen Verkettungen ist das analog.

Es soll jetzt versucht werden, mit den Begriffen vertraut zu werden. Ein Doppelsprungstellenweg ist ein Weg, auf dem unendliche viele Doppelsprungstellen liegen. Die anscheinend nächstliegende Spezialisierung, die am ehesten die Eigenschaft der Doppelsprungstelle ausnützt, das von ihr zwei Pfeile ausgehen, ist der Doppelpfad. Dort gibt es unendlich oft zwischen zwei Doppelsprungstellen jeweils zwei verschiedene endliche Wege. Der Doppelpfad ist aber eine sehr starke Forderung an eine Rekursion. Günstig wäre eine dazwischenliegende Eigenschaft. Diese soll der M-Pfad sein, wie im folgenden behauptet wird.

Lemma 6.3

Jeder unendliche Doppelpfad ist ein unendlicher M-Pfad.

Bemerkung:

Daß jeder unendliche M-Pfad ein unendlicher Doppelsprungstellenweg ist, ist trivial.

Beweis:

Gegeben sei ein unendlicher Doppelpfad. Die Folge der Labels, die Doppelsprungstellen sind und die Eigenschaft erfüllt, die für einen Doppelpfad gefordert ist, sei $h_1, h_2, \dots$. Wähle $g_i := h_{i+1}$ für $i \geq 1$ und $M := h_1$. Dann gibt es nach Voraussetzung eine vom Weg abweichende Verbindung zwischen $g_1 = h_2$ und $e_1 := h_1$. Wähle diese als P_1 . Wähle nun P_i induktiv so, daß dieser Pfad zwischen g_{i-1} und $e_i := h_1$ über den Weg P_{i-1} verläuft und zwischen $g_i = h_{i+1}$ und $g_{i-1} = h_i$ die nach Voraussetzung existierende weitere Verbindung zwischen h_{i+1} und h_i benutzt. ■

Nun stellt sich die Frage, was die Existenz eines unendlichen M-Pfades aussagt? Das folgende Lemma behauptet, daß bei einer geringen Anforderung an die Randwerte zu einem M-Pfad stets eine divergente Teilfolge gehört. Dies gilt bei allgemeinen unendlichen Wegen keineswegs immer und es wird auch gezeigt werden, daß es auch Doppelsprungstellenwege gibt, die nicht divergente Teilfolgen bedingen.

Lemma 6.4 (Divergenz von M-Pfad-Teilfolgen)

Gilt für die Randwertfolge $\frac{c_n}{c_{n-1}} \geq 1 \quad \forall n \geq 2$ und ist $\frac{c_n}{c_{n-1}} > 1$ schließlich für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die zu einem M-Pfad gehörende Teilfolge der Quotientenfolge divergent.

Beweis:

Sei $\Delta c_n = \frac{c_n}{c_{n-1}} \geq 1 \quad \forall n \geq 2$ und $\Delta c_n > 1$ für $n \geq n_0$.

- a) Man zeigt zuerst, daß man das M in der Definition des M-Pfades auch so wählen kann, daß $M \geq n_0$ ist und auch alle $e_i \geq n_0$ sind.

Sei dazu ein M-Pfad gegeben mit Schranke M . Da M endlich ist, gibt es nur endlich viele Werte, die als e_i auftauchen können: $x_1, \dots, x_m$. In jedes dieser x_i gehen genau zwei Pfeile ein von zwei Vorgängern und in diese gehen wieder genau zwei Pfeile ein, usw.. Es werden alle diese Äste genau so lange verfolgt, bis man jeweils bei einem Wert größer oder gleich n_0 angelangt ist.⁴ Diese endlich vielen Wert zu jedem x_i werden festgehalten und

⁴Die Vorgänger-Labels sind jeweils um mindestens 1 größer als die Labels des betrachte-

aus allen diesen Elementen eine Menge C^* gebildet. Es ist gezeigt worden, daß diese Menge endlich ist und alle Elemente größergleich n_0 sind. Wenn das neue M^* als das Maximum aller Elemente aus C^* gewählt wird und das neue e_i^* jeweils so bestimmt wird, daß es das eindeutige Element aus C^* ist, das auf dem Pfad P_i nach e_i liegt, so ist die Behauptung (a) gezeigt.⁵

- b) Nun sei für den weiteren Beweis angenommen, daß alle $e_i \geq n_0$ sind und damit auch $M \geq n_0$ gilt. Sei C^* die endliche Menge aller e_i -Werte.

Jeder Weg im Rekursionsgraphen stellt auch einen Rekursionsweg dar. Um die Behauptung des Lemmas zu zeigen, benutzt man die Rekursion⁶:

$$Q_{g_i} = \Delta_{c_{g_i}} \cdot Q_{\alpha(g_i)} \cdot Q_{\beta(g_i)}$$

Einer der beiden Q -Terme auf der rechten Seite der Gleichung, o.B.d.A. $Q_{\alpha(g_i)}$, gehört zu dem Weg durch $g_{i-1}, g_{i-2}, \dots, g_1$. Weil die Randwerte ≥ 1 sind, ist die Folge auf dem Weg monoton steigend. Man kann also $Q_{\alpha(g_i)}$ nach unten durch $Q_{g_{i-1}}$ abschätzen. Der andere Q -Term, o.B.d.A. folglich $Q_{\beta(g_i)}$, gehört entsprechend zu einem Weg nach e_i und kann analog gegen Q_{e_i} abgeschätzt werden. Sei e^* ein $x \in C^*$ mit minimalem Randwertquotienten $\Delta_{c_x} = \min\{\Delta_{c_y} | y \in C^*\}$. Dann kann man abschätzen $Q_{e_i} \geq \Delta_{c_{e_i}} \geq \Delta_{c_{e^*}}$. Somit erhält man:

$$Q_{g_i} \geq \Delta_{c_{g_i}} \cdot Q_{g_{i-1}} \cdot \Delta_{c_{e^*}} \geq Q_{g_{i-1}} \cdot \Delta_{c_{e^*}}$$

Durch Selbsteinsetzung dieser Abschätzung kann man weiter abschätzen:

$$Q_{g_i} \geq Q_{g_{i-1}} \cdot \Delta_{c_{e^*}} \geq Q_{g_{i-2}} \cdot (\Delta_{c_{e^*}})^2 \geq \dots \geq Q_{g_1} (\Delta_{c_{e^*}})^{i-1} \geq (\Delta_{c_{e^*}})^{i-1}$$

Da alle $e_i \geq n_0$ waren, ist auch $e^* \geq n_0$ und folglich ist $\Delta_{c_{e^*}} > 1$ und der Term auf der rechten Seite von

$$Q_{g_i} \geq (\Delta_{c_{e^*}})^{i-1}$$

ten Knotens (Pseudo-Inverse sind streng isoton), weshalb die Konstruktion in endlich vielen Schritten endet.

⁵Bem: Das geforderte Element aus C^* existiert natürlich erst ab einem $n_1 \geq n_0$.

⁶n.b.: die g_i sind Doppelsprungstellen, vgl. Definition 6.4 des M -Pfades.

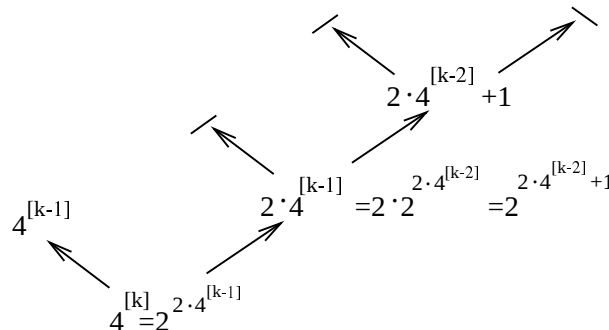
strebt gegen unendlich für i gegen unendlich. Da jede Teilfolge zu einem unendlichen Weg bei den hier gewählten Randwerten monoton ist und die g_i auf dem unendlichen M-Weg liegen, folgt die Behauptung. ■

Beispiel 6.4

Man könnte spekulieren, daß die Divergenz schon bei einem unendlichen Doppelsprungstellenweg garantiert sei. Dann könnte man gegen das soeben bewiesene Lemma einwenden, daß die Eigenschaft des M-Pfades gar nicht erforderlich wäre. Dies ist aber falsch, wie hier gezeigt werden soll. Als Beispiel wird wieder die schon gesehene Rekursion mit unregelmäßigem Abstieg mit der (auch weiterhin!!!) üblichen Randwertfolge mit $\Delta c_n = \frac{n}{n-1}$ und den Abstiegsfunktionen $\alpha(n) := \lfloor \log_4(n) \rfloor$ und $\beta(n) := \lfloor \log_2(n) \rfloor$ gewählt. Man sieht leicht, daß die Pseudo-Inversen lauten: $\alpha^{-1}(n) = 4^n$ und $\beta^{-1}(n) = 2^n$. Es soll nun ein unendlicher Doppelsprungstellenweg über α^{-1} gebildet werden:

$$4^{[1]} := 4^1 = 4, \quad 4^{[k]} := 4^{4^{[k-1]}} \quad k \geq 2$$

Damit ist die Folge $4^{[4]}, 4^{[5]}, 4^{[6]}, \dots$ ein unendlicher Doppelsprungstellenweg aufgrund der Identität $\beta(4^{[k]}) = \beta(2^{2 \cdot 4^{[k-1]}}) = 2 \cdot 4^{[k-1]}$. Man sieht hierbei sofort, daß $4^{[k]}$ auch eine Sprungstelle von β ist. Nun sollen die möglichen Anwendungen der Abstiegsfunktionen auf einen beliebigen Term des Doppelsprungstellenweges angesehen werden. Dabei bedeutet ein Pfeil mit einem Strich hinter der Spitze, daß eine Anwendung der Abstiegsfunktion nicht möglich ist (hier im Rekursionsgraph der Quotientenfolge ist dies der Fall, wenn keine Sprungstelle vorliegt).



Hiermit ist es möglich, den Wert der entsprechenden Folgenglieder zu berechnen. Über die Rekursion

$$Q_{4^{[k]}} = \frac{4^{[k]}}{4^{[k]} - 1} \cdot Q_{4^{[k-1]}} \cdot \frac{2 \cdot 4^{[k-1]}}{2 \cdot 4^{[k-1]} - 1} \cdot \frac{2 \cdot 4^{[k-2]} + 1}{2 \cdot 4^{[k-2]}}$$

erhält man die Darstellung

$$Q_{4^{[k]}} = Q_{4^{[3]}} \cdot \prod_{j=4}^k \left(\frac{4^{[j]}}{4^{[j]} - 1} \cdot \frac{2 \cdot 4^{[j-1]}}{2 \cdot 4^{[j-1]} - 1} \cdot \frac{2 \cdot 4^{[j-2]} + 1}{2 \cdot 4^{[j-2]}} \right)$$

Dies kann man wegen $\frac{n}{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{n}}$ mit der für $i \geq 2$ trivialen Aussage $4^{[i]} \geq 4^i$ abschätzen:

$$Q_{4^{[k]}} \leq Q_{4^{[3]}} \cdot \prod_{j=4}^k \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4^j}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2 \cdot 4^{j-1} - 1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2 \cdot 4^{j-2} + 1}} \right)$$

Auf einfache Weise kann man dies weiter abschätzen und den Grenzwert berechnen:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q_{4^{[k]}} \leq Q_{4^{[3]}} \cdot \prod_{j=4}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4^j}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4^{j-1}}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4^{j-2}}} \right) \leq Q_{4^{[3]}} \left(P\left(\frac{1}{4}\right) \right)^3 < \infty$$

Dabei ist $P(x)$ wieder die schon in Lemma 3.7 gesehene Partitionsfunktion (gewöhnliche erzeugende Funktion der Partitionszahlen). Es ist gezeigt worden, daß hier ein Doppelsprungstellenweg auftritt, dessen zugehörige Teilfolge konvergiert! Dem vorigen Lemma zufolge darf also kein M-Pfad vorliegen, wie man auch an der letzten Abbildung gut sehen kann. Das Irreduzible zu $4^{[k]}$ auf den Abzweigungen vom Hauptpfad ist $2 \cdot 4^{[k-2]} + 1$ und die Menge dieser Irreduziblen ist unbeschränkt, d.h. die für einem M-Pfad geforderte Schranke M existiert nicht.

Gerade ist gezeigt worden, daß es Doppelsprungstellenwege gibt, die keine M-Pfade sind. Nun wird dasselbe Beispiel benutzt, um eine etwas erweiterte Aussage zu verneinen. Es wäre nämlich möglich, daß ein anderer Doppelsprungstellenweg existiert, der ein M-Pfad ist. Genauer gesagt geht es um die folgende Aussage:

Lemma 6.5

Aus der Existenz eines unendlichen Doppelsprungstellenweges bei einer Rekursion folgt nicht die Existenz eines M-Pfades.

Beweis:

Wie gesagt wird das eben betrachtete Beispiel als Gegenbeispiel benutzt. In diesem Fall wurde die Existenz eines unendlichen Doppelsprungstellenweges nachgewiesen. Nun muß gezeigt werden, daß kein M-Pfad existiert. Dazu startet man bei einer beliebigen Doppelsprungstelle 4^k , $k \geq 2$. In einem unendlichen Doppelsprungstellenweg, der diese Doppelsprungstelle enthält, muß ein Weg „aufwärts“ zu einer größeren Doppelsprungstelle existieren. Es wird dabei zuerst die nächstgrößere, erreichbare Doppelsprungstelle gewählt. Da hier die Quotientenfolge betrachtet wird, kann diese Verbindung nur über die beiden Pseudoinversen (der Abstiegsfunktionen) geschehen: $\alpha^{-1}(n) = 4^n$, $\beta^{-1}(n) = 2^n$. Die eine Möglichkeit ist $\alpha^{-1}(4^k) = 4^{4^k} = 2^{2 \cdot 4^k} = 2^{(2^{2k+1})}$. Dies ist eine Doppelsprungstelle. Wenn man den Weg von 4^k über α^{-1} zu dieser Doppelsprungstelle nimmt, muß der Abzweig eines potentiellen M-Pfades über einen anderen Weg⁷ gehen, hier also nur über β . Es ist hier $\beta(\alpha^{-1}(4^k)) = \beta(2^{2^{2k+1}}) = 2^{2k+1}$. Da der Exponent ungerade ist, ist dies keine Viererpotenz, folglich also keine Sprungstelle von α , und man kann hier (im Rekursionsgraphen) nicht die Abstiegsfunktion α anwenden. Es kann aber noch einmal β angewandt werden und mit $\beta^2(\alpha^{-1}(4^k)) = 2k+1$ wird ein Irreduzibles erhalten.

Das gleiche Verfahren führt man für $\beta^{-1}(4^k) = 2^{(2^k)} = 2^{2 \cdot 2^{k-1}} = 4^{(2^{k-1})}$ durch. Hier liegt wieder eine Doppelsprungstelle vor und es muß wieder die nicht beteiligte Abstiegsfunktion angewandt werden: $\alpha(\beta^{-1}(4^k)) = \alpha(4^{(2^{k-1})}) = 2^{2k-1}$. Dieser Wert ist aus den gleichen Gründen wie oben α -irreduzibel und es wird noch einmal β angewandt: $\beta(\alpha(\beta^{-1}(4^k))) = \beta(2^{2k-1}) = 2k-1$. Auch hier ist wieder ein Irreduzibles erreicht worden.

Insgesamt ist herausgekommen, daß als Irreduzible auf abzweigenden Wegen nur $2k-1$ und $2k+1$ auftauchen können. Startet nun irgendein unendlicher Doppelsprungstellenweg bei 4^k , so erhält man auf anderem Wege erreichbare Irreduzible nur von diesen Typen. Wenn man das Argument iteriert und bedenkt, daß der Exponent bei Wiederholung des Argumentes ansteigt⁸, erhält man, daß in jedem Falle die Menge der so erhaltenen Irreduziblen unbeschränkt ist. Dies gilt auch für alle unendlichen Teilmengen dieser Irreduziblenmenge.⁹ Damit liegt kein M-Pfad vor.

Somit ist gezeigt worden, daß in diesem Beispiel zwar sehr viele Doppelsprungstellenwege existieren, aber keiner von diesen ein M-Pfad ist. ■

⁷Bem: Jetzt geht es wieder abwärts.

⁸Von einer Doppelsprungstelle 4^k kommt man auf den gezeigten Wegen (aufwärts) zu einer Doppelsprungstelle $4^{k'}$. Für $k > 1$ ist dann stets $2k' + 1 > 2k' - 1 > 2k + 1 > 2k - 1$.

⁹In der Definition des M-Pfades wurde nicht gefordert, daß jede Doppelsprungstelle in $g_1, g_2, \dots$ einbezogen wird.

Das Problem in diesem Fall ist die Existenz von unendlich vielen Irreduziblen. Existieren nur endlich viele Irreduziblen, so kann M stets als das Maximum über diese Irreduziblen gewählt werden. Dies wird als Lemma zusammen mit weiteren einfachen Aussagen formuliert. Der Beweis ergibt sich direkt aus dem schon gesagten.

Lemma 6.6

1. *Bei einer Rekursion mit nur endlich vielen Irreduziblen ist jeder unendliche Doppelsprungstellenweg ein M -Pfad.*
2. *Sei G ein Rekursionsgraph, in dem ein unendlicher Doppelsprungstellenweg existiert. Hat jede Zusammenhangskomponente von G nur endlich viele Irreduzible, so existiert ein M -Pfad.*
3. *Jeder Doppelsprungstellenweg, der kein M -Pfad ist, liegt in einer Zusammenhangskomponente des Rekursionsgraphen, die unendlich viele Irreduzible enthält.*

Nun soll die Frage betrachtet werden, ob die Existenz von unendlich vielen Doppelsprungstellen hinreichend ist für die Existenz eines unendlichen Doppelsprungstellenweges. Die Antwort ist nein, was wieder durch ein Gegenbeispiel gezeigt wird.

Lemma 6.7

Aus der Existenz unendlich vieler Doppelsprungstellen folgt nicht die Existenz eines unendlichen Doppelsprungstellenweges.

Da an dem interessanten Gegenbeispiel noch andere Dinge als nur den Nachweis, daß hier kein unendlicher Doppelsprungstellenweg existiert, gezeigt werden sollen, wird der Beweis in das folgende Beispiel eingeschlossen.

Beispiel 6.5

Betrachtet wird die Rekursion zu den gewohnten Anfangs- und Randwerten mit den Abstiegsfunktionen $\alpha(n) := \lfloor \log_{25}(n) \rfloor$ und $\beta(n) := \lfloor \log_{23}(n) \rfloor$. Man sieht leicht, daß es in diesem Fall unendlich viele Doppelsprungstellen gibt, nämlich $n = 2^{15 \cdot k}$, $k \geq 1$. Dabei sind sowohl $\alpha(2^{15 \cdot k}) = 3k$ als auch $\beta(2^{15 \cdot k}) = 5k$ irreduzibel. Damit existiert kein Weg von einer Doppelsprungstelle zu einer anderen und folglich auch kein unendlicher Doppelsprungstellenweg, was das Lemma beweist.

Nun sollen aber für dieses Beispiel auch die Zusammenhangskomponenten der Rekursion bestimmt werden, um ein erstes Beispiel für die hier mögliche Vielfalt der Rekursionsgraphen zu bekommen. Eine Zusammenhangskomponente hat mindestens ein Irreduzibles und man baut die entsprechende Komponente von diesem Irreduziblen aus auf. Als erstes betrachtet man ein Irreduzibles s , das weder durch fünf noch durch drei teilbar ist. Da bei Anwendung der (hier nicht mehr speziell vorgestellten) Pseudoinversen der Abstiegsfunktionen keine Doppelsprungstellen entstehen, erhält man einen unendlichen binären Baum als Zusammenhangskomponente, zu sehen in Abbildung 6.3. Diese Zusammenhangskomponenten sind Einwurzel-Strukturen, was aber nicht auf alle Zusammenhangskomponenten des Rekursionsgraphen zutrifft.

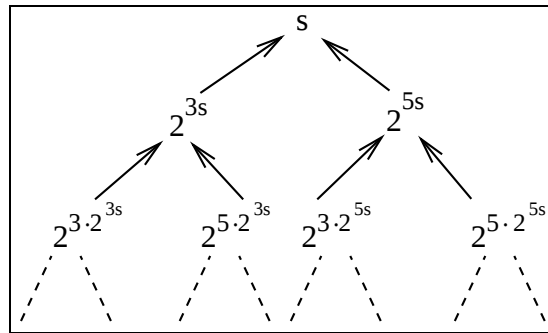


Abbildung 6.3: Erster Typ von Zusammenhangskomponenten in Beispiel 6.5.

Sei nun anderenfalls $s = 3^k \cdot t$, wobei t weder durch 3 noch durch 5 teilbar sein soll. Dies liefert die einzig mögliche weitere Zusammenhangskomponente, da die weiteren Irreduziblen zu den gleichen Zusammenhangskomponenten gehören. Dies ist in Abbildung 6.4 dargestellt.

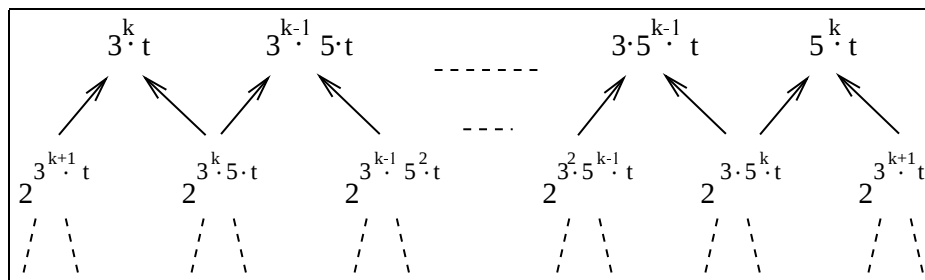


Abbildung 6.4: Zweiter Typ von Zusammenhangskomponenten in Beispiel 6.5.

Jede Zusammenhangskomponente hat zwar nur endlich viele Irreduzible, aber

auch nur endlich viele Doppelsprungstellen. Nach unten (im Bild, aber aufwärts bzgl. der Labelgröße) setzt sich diese Zusammenhangskomponente jeweils in binären Baumstrukturen fort.

6.2 Kommutative Rekursionen

In diesem Abschnitt werden wieder speziellere Rekursionen mit unregelmäßigem Abstieg betrachtet. Diese zeichnen sich dadurch aus, daß die beiden Abstiegsfunktionen kommutativ bezüglich der Hintereinanderausführung sind. Bei den hier betrachteten kommutativen Rekursionen läßt sich die Quotientenfolge leichter darstellen, was an dem regelmäßigem Aufbau des Rekursionsgraphen liegt. Zuerst sollen kommutative Rekursionen erst einmal definiert werden.

Definition 6.5 (Kommutativität von Abstiegsfunktionen)

Zwei Abstiegsfunktionen α und β heißen **kommutativ** genau dann, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha(n) \geq 1$ und $\beta(n) \geq 1$ gilt: $\alpha(\beta(n)) = \beta(\alpha(n))$.

Beispiel 6.6

1. Bei Baumrekursionen zeigt sich, daß i. A. keine Kommutativität vorliegt. Das einfachste Beispiel dazu ist eine ausgeartete Baumrekursion (vgl. Definition 2.6) mit $\alpha(n) = 10$ für $n \geq 11$. Dann gilt für $m = 23 + n \geq 23$:

$$\alpha(\beta(23+n)) = \alpha(23+n-1-\alpha(23+n)) = \alpha(23+n-1-10) = \alpha(12+n) = 10$$

und

$$\beta(\alpha(23+n)) = \beta(10) < 10$$

Somit liegt keine Kommutativität vor. Beispiele für nicht ausgeartete Fälle sind ebenfalls leicht zu finden.

2. Ein Beispiel für kommutative Abstiegsfunktionen ist durch $\alpha(n) = n - a$ $n \geq a$, $\alpha(n) = 0$ sonst, und $\beta(n) = n - b$ $n \geq b$, $\beta(n) = 0$ sonst, für $a, b \in \mathbb{N}$ gegeben. Dieses Beispiel deckt die „gewöhnlichen“ Abstiegsfunktionen ab, die bei Differenzengleichungen auftreten. Eine typische (additive!) Differenzengleichung wäre z.B. $f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$ mit $\alpha(n) = n - 1$ und $\beta(n) = n - 2$.

3. Ein weiteres Beispiel für kommutative Rekursionen soll als **Netzrekursionen** eingeführt werden. Hierbei soll gelten: $\alpha(n) := \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$ und $\beta(n) := \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor$ für $a, b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Die Kommutativität der Netzrekursionen ist zwar leicht ersichtlich, wäre aber etwas umständlicher zu zeigen. Dies ist aber nicht notwendig, da das folgende Lemma den Nachweis der Kommutativität der Netzrekursionen sehr viel leichter gestalten wird.

Satz 6.2

Zwei schwach wachsende, nicht ausgeartete Abstiegsfunktionen α und β sind kommutativ genau dann, wenn ihre Pseudoinversen α^{-1} und β^{-1} bzgl. der Hintereinanderausführung kommutieren.

Beweis:

(bis Seite 209)

„ $\Rightarrow$ “:

Voraussetzung ist, daß für alle n mit $\alpha(n) \geq 1$ und $\beta(n) \geq 1$ $\beta(\alpha(n)) = \alpha(\beta(n))$ gilt. Angenommen, es gäbe ein $k \in \mathbb{N}$ mit (o.B.d.A.) $\alpha^{-1}(\beta^{-1}(k)) < \beta^{-1}(\alpha^{-1}(k))$. Mit $k \geq 1$ und wenigen Überlegungen¹⁰ wird zunächst klar, daß $\alpha(\alpha^{-1}(\beta^{-1}(k))) \geq 1$ und $\beta(\alpha^{-1}(\beta^{-1}(k))) \geq 1$ als Voraussetzung für eine Kommutativität bzgl. α und β erfüllt sind. Wenn man jetzt die Voraussetzung auf $\alpha^{-1}(\beta^{-1}(k))$ anwendet, erhält man:

$$\alpha(\beta(\alpha^{-1}(\beta^{-1}(k)))) \stackrel{Vor.}{=} \beta(\alpha(\alpha^{-1}(\beta^{-1}(k)))) = \beta(\beta^{-1}(k)) = k \quad (*)$$

Für den Fortgang des Beweises wird **strenge** Monotonie benötigt. Leider gilt für schwach wachsende Abstiegsfunktionen γ nur $x < y \Rightarrow \gamma(x) \leq \gamma(y)$. Es ist jedoch leicht einzusehen, daß gilt:

$$x < y, y \text{ Sprungstelle von } \gamma \Rightarrow \gamma(x) < \gamma(y) \quad (6.1)$$

Dies Aussage wird im folgenden benutzt. Da $\beta^{-1}(\alpha^{-1}(k))$ eine Sprungstelle von β ist (vgl. Lemma 2.5), ergibt die Annahme $\alpha^{-1}(\beta^{-1}(k)) < \beta^{-1}(\alpha^{-1}(k))$:

¹⁰Neben $k \geq 1$ benutzt man insbesondere $\alpha(\alpha^{-1}(n)) = n$ für $n \geq 1$ und $\alpha^{-1}(n) > n$ für $n \geq 1$ sowie die schwache Isotonie von β .

$$\alpha^{-1}(k) = \beta(\beta^{-1}(\alpha^{-1}(k))) > \beta(\alpha^{-1}(\beta^{-1}(k)))$$

Nun ist $\alpha^{-1}(k)$ eine Sprungstelle von α und dasselbe Argument ergibt:

$$k = \alpha(\alpha^{-1}(k)) > \alpha(\beta(\alpha^{-1}(\beta^{-1}(k))))$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist aber nach (*) mit k identisch, was einen Widerspruch ergibt.

„ $\Leftarrow$ “:

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Zu diesem n soll $\alpha(\beta(n)) = \beta(\alpha(n))$ gezeigt werden. Es werden zwei Fälle unterschieden:

1. Fall: $n < \alpha^{-1}(\beta^{-1}(1)) = \beta^{-1}(\alpha^{-1}(1))$.

Da $\alpha^{-1}(\beta^{-1}(1))$ Sprungstelle von α ist, folgt hieraus nach (6.1):

$$\alpha(n) < \alpha(\alpha^{-1}(\beta^{-1}(1))) = \beta^{-1}(1)$$

Nun ist $\beta^{-1}(1)$ eine Sprungstelle von β , womit analog folgt:

$$\beta(\alpha(n)) < \beta(\beta^{-1}(1)) = 1$$

Wenn man diese Überlegungskette analog dazu mit $n < \beta^{-1}(\alpha^{-1}(1))$ durchführt, erhält man:

$$\alpha(\beta(n)) < 1$$

Wenn $\alpha(n) \geq 1$ und $\beta(n) \geq 1$ sind, folgt damit $\alpha(\beta(n)) = \beta(\alpha(n)) = 0$.

2. Fall: $n \geq \alpha^{-1}(\beta^{-1}(1)) = \beta^{-1}(\alpha^{-1}(1))$.

Dann sei $k \geq 1$ maximal gewählt mit $n \geq \alpha^{-1}(\beta^{-1}(k)) = \beta^{-1}(\alpha^{-1}(k))$. Dann folgt, da k maximal gewählt wurde, $n < \alpha^{-1}(\beta^{-1}(k+1)) = \beta^{-1}(\alpha^{-1}(k+1))$. Daraus folgt analog zum 1. Fall:

$$\alpha(\beta(n)) < k+1, \quad \beta(\alpha(n)) < k+1$$

Aus $n \geq \alpha^{-1}(\beta^{-1}(k)) = \beta^{-1}(\alpha^{-1}(k))$ folgt wegen der Isotonie schwach wachsender Abstiegsfunktionen:

$$\beta(\alpha(n)) \geq \beta(\alpha(\alpha^{-1}(\beta^{-1}(k)))) = k$$

und

$$\alpha(\beta(n)) \geq k$$

Aus all diesen Aussagen folgt, da die Bilder jeweils nur aus $\mathbb{N}$ sein können:

$$\beta(\alpha(n)) = k = \alpha(\beta(n))$$

■

Hiermit wird nun sofort klar, daß Teil 3 von Beispiel 6.6 kommutativ ist, denn die Pseudoinversen lauten:

$$\alpha^{-1}(k) = a \cdot k, \quad \beta^{-1}(k) = b \cdot k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Beispiel 6.7

Hier wird jetzt ein Beispiel vorgestellt, das die Tragweite des Satzes außerhalb der hier gewählten Abstiegsfunktionen vor Augen führt. Man kann nämlich zeigen für $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n+15}{21} \right\rfloor + 12}{17} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n+12}{17} \right\rfloor + 15}{21} \right\rfloor$$

Diese Aussage folgt direkt aus dem Satz, da sie die Kommutativität der Abstiegsfunktionen $n \mapsto \left\lfloor \frac{n+15}{21} \right\rfloor$ und $n \mapsto \left\lfloor \frac{n+12}{17} \right\rfloor$ darstellt. Diese Kommutativität folgt mit dem Satz aus der Kommutativität der (relativ leicht herleitbaren) Pseudoinversen $k \mapsto 21 \cdot k - 15$ und $k \mapsto 17 \cdot k - 12$, die man direkt durch wechselseitiges Einsetzen nachweist.

Die Gleichheitsaussage gilt natürlich auch für $n = 17681$, wobei das Ergebnis auf beiden Seiten 50 ist. Ändert man die Zahlen ein wenig ab, so sind die Pseudoinversen nicht mehr kommutativ und folglich wird die Identität im allgemeinen falsch. Dies trifft für $n = 17681$ zu, wenn man die 21 in der Identität an beiden vorkommenden Stellen durch 22 ersetzt:

$$\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{17681+15}{22} \right\rfloor + 12}{17} \right\rfloor = 48 \neq 47 = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{17681+12}{17} \right\rfloor + 15}{22} \right\rfloor$$

Die im vorletzten Beispiel 6.6 erwähnten gewöhnlichen Differenzengleichungen werden hier nicht näher betrachtet, da sie als Spezialfall der Theorie linearer Differenzengleichungen aufgefaßt werden können und hierzu eine große Menge an Literatur (s. Einleitung) vorliegt.¹¹

Als Beispiel kommutativer Rekursionen werden hier jedoch die **Netzrekursionen** ausführlich analysiert. Es wird zuerst der Rekursionsgraph zu einem Beispiel bestimmt und daraus der Ansatz für eine Formel hergeleitet, die dann bewiesen wird.

Beispiel 6.8

Betrachtet wird die Rekursion zu $\alpha(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ und $\beta(n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$. Die Rekursion wird jetzt beispielhaft für $n = 360$ ausgeführt, wobei die Darstellung wie allgemein bei Rekursionsgraphen „auf den Kopf“ gestellt wird und die β -Ableitung jeweils nach links oben, die α -Ableitung jeweils nach rechts oben vorgenommen wird. Es werden jeweils gleiche Labels identifiziert. Diese Darstellung kann in Abbildung 6.5 betrachtet werden.

Hierbei ist z.B. das Label 20 β -irreduzibel und 5 ein Irreduzibles sowie 60 eine Doppelsprungstelle. Wenn man sich alle Labels faktorisiert vorstellt, kann man leicht die Verallgemeinerung finden, die als Lemma formuliert wird.

Bemerkung:

Netzrekursionen mit $\alpha(n) := \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$ und $\beta(n) := \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor$ und $ggT(a, b) = 1$ werden als **teilerfremde Netzrekursionen** bezeichnet.

Lemma 6.8 (Rekursionsgraph von teilerfremden Netzrekursionen)

Eine Netzrekursion mit $\alpha(n) := \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$ und $\beta(n) := \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor$ sowie $ggT(a, b) = 1$ hat einen Rekursionsgraphen, der zu jedem $s \in \mathbb{N}$ mit $s \not\equiv 0 \pmod{a}$, $s \not\equiv 0 \pmod{b}$ (d.h. s ist irreduzibel) eine Zusammenhangskomponente der in Abbildung 6.6 dargestellten Form enthält.

¹¹Der Unterschied, daß in der Theorie der gewöhnlichen Differenzengleichungen additive Rekursionen vorliegen, ist nicht dramatisch, da man den multiplikativen Rekursionen in der hier benutzten Form formal durch Logarithmierung additive Rekursionen zuordnen kann.

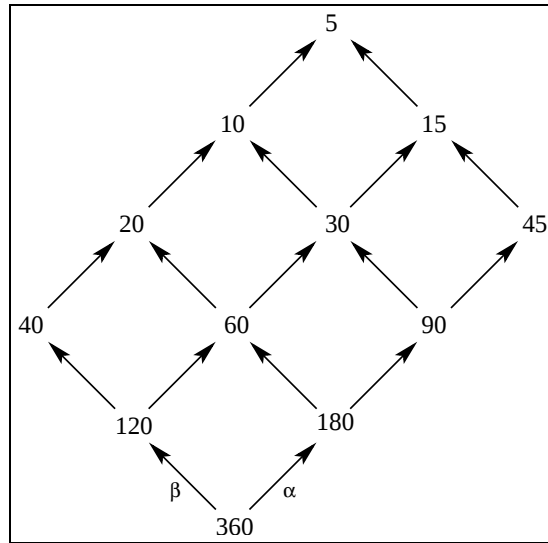


Abbildung 6.5: Netz-Rekursion zu $\alpha(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ und $\beta(n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ für $n = 360$.

Bemerkung:

Das Ergebnis des Lemmas verdeutlicht gut den Grund für die Wahl der Bezeichnung Netz-Rekursion. In diesem speziellen Fall (teilerfremde Netzrekursionen) könnte man sogar von Gitter-Rekursionen sprechen.

Mit dem Rekursionsgraphen der Quotientenfolge weiß man, welche Werte Δc_k zur Berechnung von Q_n benutzt werden, jedoch ist noch nicht bekannt, welchen Exponenten sie jeweils haben. Die Lösung dieser Frage wird wieder zur selben Beispiel-Netzrekursion betrachtet.

Beispiel 6.9

Es wird wieder die Rekursion für $n = 360$ sowie $\alpha(n) := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ und $\beta(n) := \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ durchgeführt, jedoch werden diesmal gleiche Labels nicht identifiziert. Das Ergebnis kann in Beispiel 6.7 betrachtet werden.

Man erhält somit:

$$Q_{360} = \Delta c_{360} \Delta c_{180} \Delta c_{120} \Delta c_{90} (\Delta c_{60})^2 \Delta c_{45} \Delta c_{40} (\Delta c_{30})^3 (\Delta c_{20})^3 \cdot \dots \cdot (\Delta c_{15})^4 (\Delta c_{10})^6 (\Delta c_5)^{10}$$

Wenn man mit diesen Zahlen vertraut ist, erkennt man schon jetzt, daß die Exponenten Binomialkoeffizienten sind. In diesem Fall kann man das vielleicht sogar

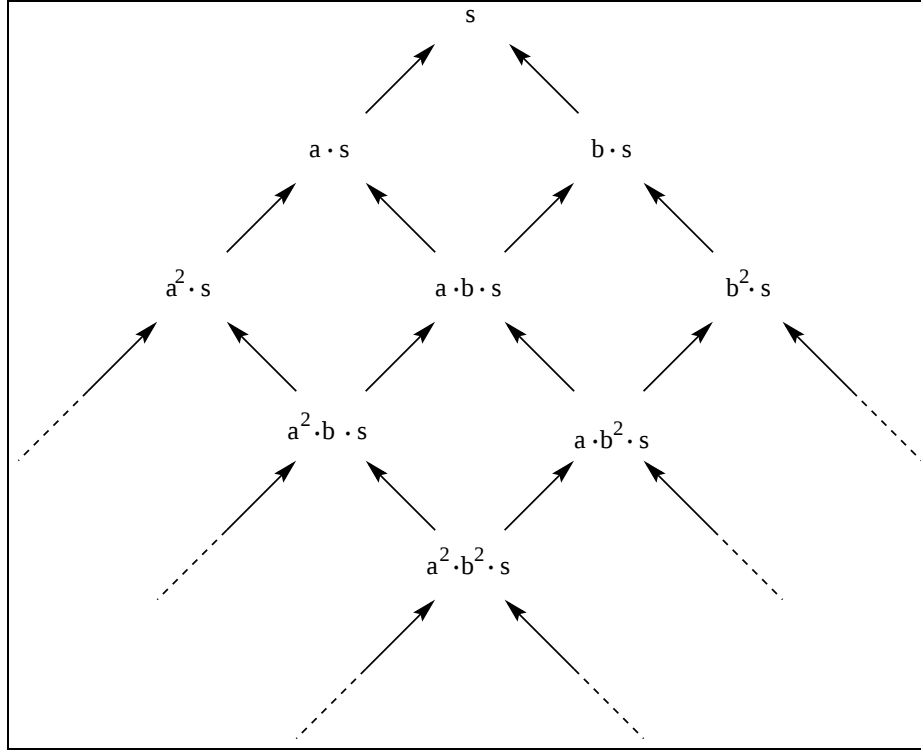


Abbildung 6.6: Zusammenhangskomponente teilerfremder Netz-Rekursionen.

dem Rekursionsgraphen ansehen, aber es stellt sich die Frage, wie man mit dem Rekursionsgraphen diese Zahlen „berechnen“ kann, ohne die Identifikation der Labels aufzulösen. Die Frage beantwortet das folgende Lemma.

Lemma 6.9 (Rechnen im Rekursionsgraphen)

Sei G der Rekursionsgraph (der Quotientenfolge) einer Rekursion mit unregelmäßigem Abstieg und $n \in \mathbb{N}$ ein Label. Sei G_n der Teilgraph von G mit allen Labels, die über gerichtete Wege vom Label n aus erreicht werden können. Dann kann man die Exponenten $e_{n,r}$ von Δ_{c_r} in der Darstellung $Q_n = \prod_{r=1}^n \Delta_{c_r}^{e_{n,r}}$ (vgl. auch (5.4)) zu allen Labels r von G_n bestimmen durch die folgende Rekursion:

- $e_{n,n} = 1$
- $$e_{n,r} = \sum_{m \text{ Label von } G_n} (e_{n,m} \cdot (\text{Anzahl der Pfeile } m \rightarrow r)) \quad r < n$$

Beweis:

Man kann sich leicht klarmachen, daß $e_{n,r}$ die Anzahl der gerichteten Wege von

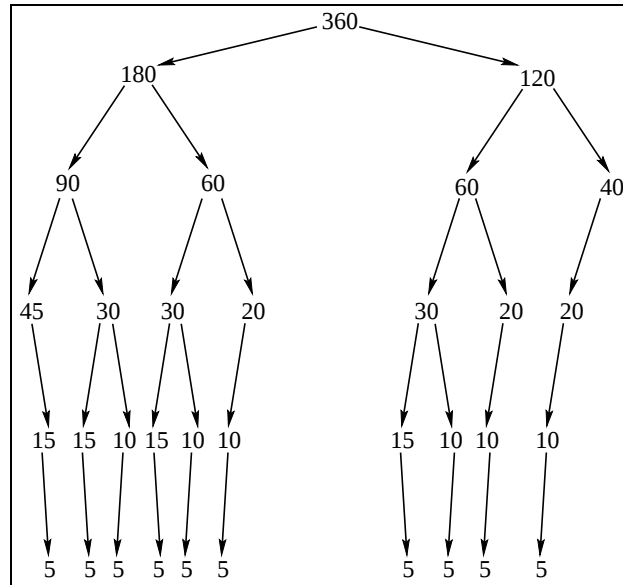


Abbildung 6.7: Rekursion zu $\alpha(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ und $\beta(n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ ohne Identifizierung.

n nach r in G_n ist (wenn Potenzen des leeren Weges absorbiert werden und für $r = n$ der leere Weg als Weg akzeptiert wird). Damit ist natürlich $e_{n,n} = 1$. Seien nun alle $e_{n,m}$ für $m > r$ bekannt. Alle Wege von n nach r laufen über die in r einlaufenden Pfeile. Damit wird klar, daß jeder Pfeil von einem Knotenlabel m aus so viele Wege einbringt, wie von n nach m führen, nämlich $e_{n,m}$ viele. Dies beweist das Lemma. ■

Bemerkung:

Die $e_{n,r}$ werden im folgenden also **Darstellungs-Exponenten** oder kurz als **Exponenten** bezeichnet.

Bemerkung:

Eine andere Möglichkeit, die Anzahl gerichteter Wege im Rekursionsgraphen zu bestimmen, geht über die (hier unendliche) Inzidenzmatrix $A = (a_{i,j}^{(1)})_{i \geq 0, j \geq 0}$, wobei $a_{i,j}^{(1)}$ die Anzahl der Pfeile vom Knoten i (d.h. Knoten mit Label i) zum Knoten j angibt. Dann gibt die k -te Matrixpotenz $A^k = (a_{i,j}^{(k)})_{i \geq 0, j \geq 0}$ die Anzahl der Wege der Länge k an (vgl. hierzu z.B. bei Gessel und Stanley [GesSt, p. 1035]).

$$(a_{i,j}^{(\infty)})_{i \geq 0, j \geq 0} =: A^{(\infty)} := \sum_{k=1}^{\infty} A^k$$

ist wohldefiniert wegen der Zykelfreiheit des Rekursionsgraphen (d.h. wenn man beginnend bei einem Knoten den Pfeilen in nur einer Orientierung folgt, erreicht man nie denselben Knoten ein zweites Mal). Dann gibt $a_{i,j}^{(\infty)}$ die Anzahl der (gerichteten) Wege vom Knoten i zum Knoten j an. Also ist $e_{n,r} = a_{n,r}^{(\infty)}$.

In den hier betrachteten Fällen haben die Zusammenhangskomponenten eine einfache, einheitliche Gestalt, über die sich mit Lemma 6.9 leicht die Darstellungs-Exponenten berechnen lassen. Bei anderen Rekursionen, die eine weniger einheitliche und übersichtliche Struktur besitzen, wäre die gerade vorgestellte Betrachtung über unendliche Matrizen angebracht. Dies sprengt jedoch den Rahmen dieser Arbeit.

Es sei nur kurz darauf hingewiesen, daß die $(e_{n,r})$ sich noch auf einem anderen Wege rekursiv berechnen lassen. Dies ergibt sich aus der (hier nicht bewiesenen) Tatsache, daß die unendliche Matrix $A^{(\infty)}$ die inverse Matrix zu einer sogenannten Rekursionsmatrix $R = (r_{i,j})_{i \geq 0, j \geq 0}$ ist, die über

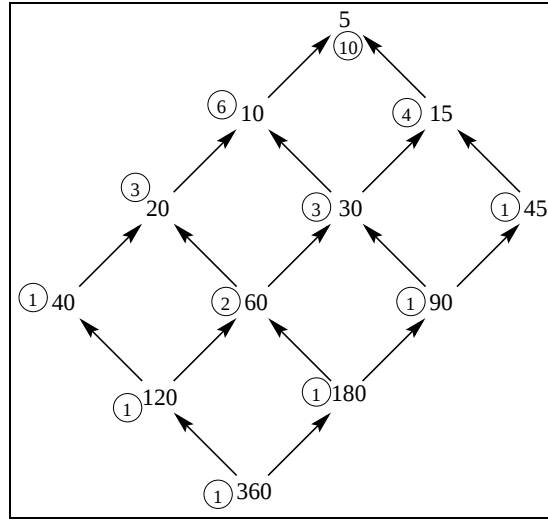
$$r_{i,j} := \begin{cases} 1 & i = j \\ -1 & \alpha(i) = j, \beta(i) \neq j \\ -1 & \alpha(i) \neq j, \beta(i) = j \\ -2 & \alpha(i) = \beta(i) = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert ist. Die Invertierbarkeit folgt, weil es sich um eine (unendliche) untere Dreiecksmatrix handelt. Auf diesem Wege könnten sich Folgenrekursionen auch allgemeiner betrachten lassen.

Beispiel 6.10

Es wird wieder das obige Beispiel mit $\alpha(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ und $\beta(n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ und der Teilgraph zu $n = 360$ betrachtet. Diesmal sind jedoch in der zugehörigen Abbildung 6.8 in Kreisen an den Labels r die Werte $e_{n,r}$ angegeben, sodaß man sich leicht von der Arbeitsweise des Lemmas überzeugen kann. So ergibt sich z.B. $e_{360,20} = 3$ aus $e_{360,40} + e_{360,60} = 1 + 2$.

Nun können die Exponenten $e_{n,r}$ für die in Lemma 6.8 dargestellte Situation angegeben werden. Dies geschieht im folgenden Lemma.

Abbildung 6.8: Netz-Rekursion zu für $n = 360$ mit Exponenten $e_{n,r}$.**Bemerkung:**

Zur Vereinfachung der Darstellung wird (wie hier immer) vorausgesetzt, daß $A_0 = Q_0 = 1$ gilt, denn sonst würde der Exponent von $\Delta c_0 = Q_0$ noch betrachtet werden müssen, was i.A. nicht auf so elegante Weise geht.

Lemma 6.10 (Quotientenfolgen-Darstellung teilerfremder Netzrekurs.)

Sei eine Netzrekursion mit $\alpha(n) := \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$ und $\beta(n) := \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor$ sowie $\text{ggT}(a, b) = 1$ gegeben. Ist $s \in \mathbb{N}$, $s \not\equiv 0 \pmod{a}$, $s \not\equiv 0 \pmod{b}$ und sind $k, l \geq 0$, so gilt die folgende Quotientenfolgen-Darstellung:

$$Q_{a^k \cdot b^l \cdot s} = \prod_{i=0}^k \prod_{j=0}^l (\Delta c_{a^i \cdot b^j \cdot s})^{\binom{k+l-i-j}{k-i}}$$

Beweis:

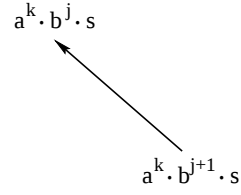
Es braucht nur die Korrektheit der Exponenten bewiesen zu werden. Dies geschieht induktiv:

Induktionsanfang:

$$i = k, j = l \Rightarrow 1 = e_{a^k \cdot b^l \cdot s, a^k \cdot b^l \cdot s} = \binom{0}{0}$$

Induktionsschluß:

1.Fall: $i = k$, $j < l$. Es gibt die Situation:

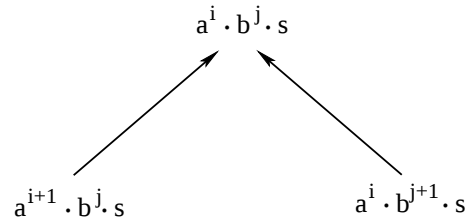


Damit gilt mit Lemma 6.9:

$$\begin{aligned} e_{a^k \cdot b^l \cdot s, a^k \cdot b^j \cdot s} &= e_{a^k \cdot b^l \cdot s, a^k \cdot b^{j+1} \cdot s} \\ &\stackrel{\text{Ind.vor.}}{=} \binom{k+l-j-1-k}{k-k} \\ &= \binom{l-j-1}{0} = 1 \\ &\stackrel{!}{=} \binom{k+l-j-k}{k-k} \\ &= \binom{l-j}{0} = 1 \end{aligned}$$

2.Fall: $i < k$, $j = l$. Analog.

3.Fall: $i < k$, $j < l$. Es gibt die Situation:



Hier folgt nun:

$$e_{a^k \cdot b^l \cdot s, a^i \cdot b^j \cdot s} = e_{a^k \cdot b^l \cdot s, a^{i+1} \cdot b^j \cdot s} + e_{a^k \cdot b^l \cdot s, a^i \cdot b^{j+1} \cdot s}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\text{Ind.Vor.}}{=} \binom{k+l-(i+1)-j}{k-(i+1)} + \binom{k+l-i-(j+1)}{k-i} \\
& = \binom{k+l-i-j-1}{k-i-1} + \binom{k+l-i-j-1}{k-i} \\
& = \binom{k+l-i-j}{k-i}
\end{aligned}$$

■

Beispiel 6.11

Ist (ausnahmsweise) $\Delta c_n = 2 \ \forall n \geq 1$, so gilt nach dem gerade gezeigten Lemma:

$$Q_{a^k \cdot b^l, s} = 2^{\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \binom{k+l-i-j}{k-i}} = 2^{\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \binom{i+j}{i}} = 2^{\binom{k+l+2}{k+1}-1}$$

Den letzten Schritt kann man mit ein paar Überlegungen zu den Binomialkoeffizienten induktiv beweisen. Für diesen einfachen Fall sind in Tabelle 6.1 ein paar einfache Folgenwerte dargestellt für $a := 2$ und $b := 3$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Q_n	2	4	4	8	2	32	2	16	8	4	2	512	2	4	4	32	2	512

Tabelle 6.1: Erste Werte der Quotientenfolge aus Beispiel 6.11.

Ähnliche Aussagen wie die der Lemmata 6.8 und 6.10 erhält man für die Netzrekursionen zu $\alpha(n) := \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$ und $\beta(n) := \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor$, falls $ggT(a, b) \neq 1$, $a \nmid b$, falls o.B.d.A. $a < b$ vorausgesetzt wird. Dies wird hier nicht vorgestellt.

Teilerfremde Netzrekursionen sind nur *ein* Spezialfall der Netzrekursionen. Nun sollen von den restlichen Fällen zuerst einmal Netzrekursionen zu $\alpha(n) := \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$ und $\beta(n) := \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor$ sowie $b = a^k$ für ein $k \geq 1$ und $a \geq 2$ mit $a \neq x^k$ für $x, k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ betrachtet werden, da hier wesentliche Unterschiede zu den ausführlich betrachteten teilerfremden Netzrekursionen auftreten. Das Problem hierbei ist, daß eine

Abstiegswfunktion durch endliche Verkettung der anderen darstellbar ist. Die zugehörigen Rekursionsgraphen sind nur noch „entartete“ Netze. Sie sollen als ***k*-Helix-Rekursionen** bezeichnet werden. Dieser Name wird bei Betrachtung der folgenden Rekursionsgraphen für $k \geq 2$ verständlich.

Zuerst wird der Fall der **1-Helixrekursionen** betrachtet. Dann sind beide Abstiegswfunktionen identisch und es entstehen zu jedem $s \not\equiv 0 \pmod a$ die in Abbildung 6.9 dargestellten Zusammenhangskomponenten des Rekursionsgraphen. Durch Anwendung von Lemma 6.9 auf diesen Graphen erhält man leicht die Darstellung der Quotientenfolge:

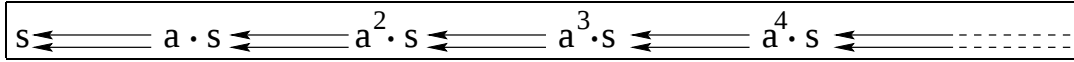


Abbildung 6.9: Zusammenhangskomponente der 1-Helix-Rekursion

$$Q_{a^k \cdot s} = \prod_{j=0}^k (\Delta_{c_{a^j \cdot s}})^{2^{k-j}}$$

Als zweiter Fall werden **2-Helixrekursionen** betrachtet. Die Zusammenhangskomponenten des Rekursionsgraphen sehen dann wie in Abbildung 6.10 dargestellt aus.

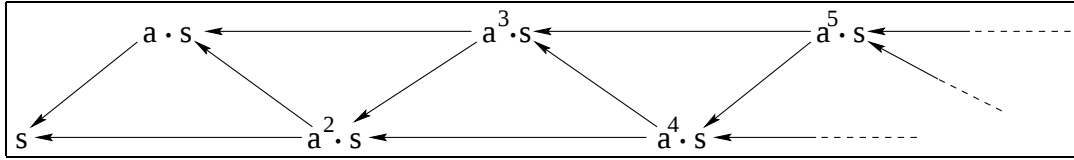


Abbildung 6.10: Zusammenhangskomponente der 2-Helix-Rekursion

Wenn man das Lemma 6.9 auf diesen Rekursionsgraphen anwendet, erkennt man, daß die Exponenten der Darstellung Fibonaccizahlen sind, die hier folgendermaßen (im Gegensatz zur gewöhnlichen Definition geshiftet) definiert werden: $f_0 = f_1 := 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \forall n \geq 2$. Damit lautet die Darstellung der Werte der Quotientenfolge:

$$Q_{a^n \cdot s} = \prod_{j=0}^n (\Delta_{c_{a^j \cdot s}})^{f_{n-j}}$$

Zum Abschluß dieser Betrachtungen, wird noch eine Zusammenhangskomponente des Rekursionsgraphen der **3-Helixrekursionen** dargestellt in Abbildung 6.11. Hier kann dann gut der Grund für die Wahl der Bezeichnung k -Helixrekursion nachvollzogen werden. Man kann zwei Typen von Pfeilen unterscheiden. Die einen folgen einer Helix, bei der regelmäßig nach k (hier also 3) Knoten eine gleiche Stelle in einer niederen Ebene erreicht wird. Die anderen laufen „senkrecht“ zur Helix in die gleiche Hauptrichtung.

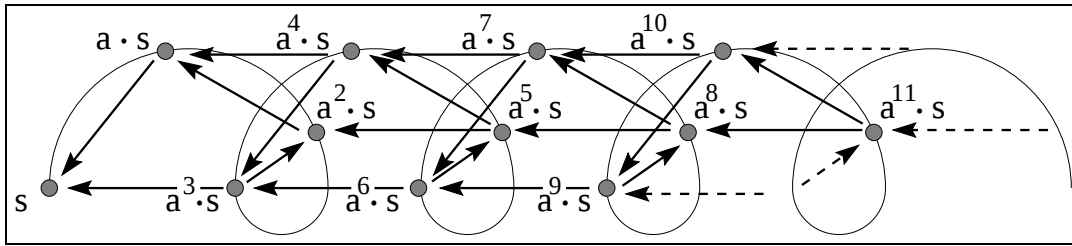


Abbildung 6.11: Zusammenhangskomponente der 3-Helix-Rekursion

Allgemein für (festes) $k \geq 2$ sind die Exponenten $e_{a^m.s, a^j.s}$ Werte der jeweiligen Folgen $(g_n^{(k)})_{n \geq 0}$, die definiert werden durch:

$$g_0^{(k)} := 1, g_1^{(k)} := 1, \dots, g_{k-1}^{(k)} := 1, g_n^{(k)} := g_{n-1}^{(k)} + g_{n-k}^{(k)} \quad n \geq k$$

Die Anfänge der ersten Folgen $(g_n^{(k)})$ sind in Tabelle 6.2 dargestellt. Diese Folgen findet man auch bei Sloane und Plouffe[SloPl], z.B. $(g_n^{(3)})$ als M0571, $(g_n^{(4)})$ als M0526 und $(g_n^{(5)})$ als M0507.

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	4	8	16	32	64	128	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536
2	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987
3	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129	189
4	1	1	1	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36	50	69
5	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	8	11	15	20	26	34

Tabelle 6.2: Erste Werte der Folgen $(g_n^{(k)})$.

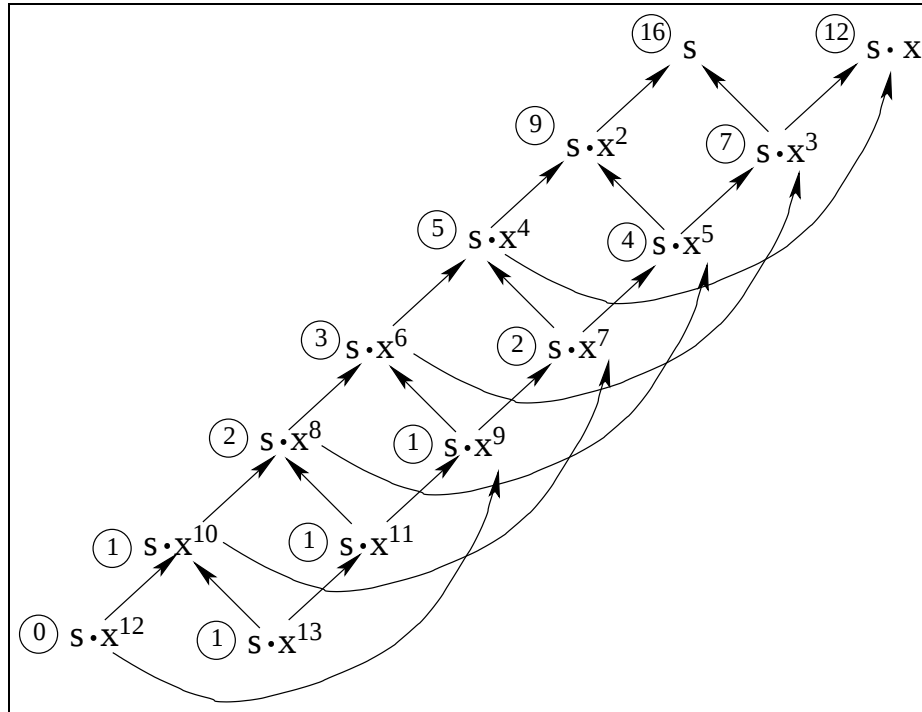
Mit diesen Folgen kann man allgemein die folgende Darstellung der Quotientenfolge der k -Helixrekursionen angeben:

$$Q_{a^n \cdot s} = \prod_{j=0}^n (\Delta_{c_{aj \cdot s}})^{g_{n-j}^{(k)}}$$

Nun soll noch ein weiterer Typ von Netzrekursionen betrachtet werden, nämlich solche zu $\alpha(n) = \lfloor \frac{n}{x^i} \rfloor$ und $\beta(n) = \lfloor \frac{n}{x^j} \rfloor$ mit $x \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, wobei für alle $y \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und alle $l \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gelten soll: $x \neq y^l$ (d.h. x ist quadratfrei) sowie $i, j \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und i ist kein Vielfaches von j und umgekehrt. O.B.d.A. ist $i < j$.

Beispiel 6.12

Es wird $i = 2$ und $j = 3$ gewählt und eine Zusammenhangskomponente des Rekursionsgraphen zu einem $s \not\equiv 0 \pmod{x}$. Dies ist in Abbildung 6.12 dargestellt, wobei auch schon die Folge der $e_{n,k}$ für das gewählte Beispiel in Kreisen zu den entsprechenden Labels eingetragen ist. Die Folge dieser Exponenten beginnt also



Abbildungung 6.12: Rekursionsgraph zu $\alpha(n) = \lfloor \frac{n}{x^2} \rfloor$ und $\beta(n) = \lfloor \frac{n}{x^3} \rfloor$ mit Exponenten $e_{n,k}$.

1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, ...

und es ist analog zu den früheren Fällen einzusehen, daß die Folge einer Rekursion genügt:

$$h_{-1} := 0, \quad h_0 := 1, \quad h_1 := 0, \quad h_n = h_{n-2} + h_{n-3} \quad n \geq 2$$

Diese Folge findet man auch bei Sloane und Plouffe/[SloPl] unter M0284.

Zusammen mit den schon betrachteten Folgen von Exponenten läßt sich hier eine ganze Menge von Folgen erzeugen. Es stellt sich die Frage, wie all diese Folgen zusammenhängen und ob sie eine gemeinsame, nicht-rekursive Darstellung besitzen. Die Antwort gibt der folgende Satz:

Satz 6.3 (Darstellung von Netzrekursionen mit gleicher „Basis“)

Gegeben sei eine Netzrekursion zu den Abstiegsfunktionen $\alpha(n) = \left\lfloor \frac{n}{x^i} \right\rfloor$ und $\beta(n) = \left\lfloor \frac{n}{x^j} \right\rfloor$ mit quadratfreiem $x \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $i, j \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $i \leq j$. Dann besitzt die zugehörige Quotientenfolge eine Darstellung

$$Q_{x^{n \cdot s}} = \prod_{m=0}^n (\Delta_{C_{x^m \cdot s}})^{h_{n-m}^{[i,j]}}$$

mit einer Folge $(h_n^{[i,j]})$, die gemäß der folgenden Rekursionsvorschrift gebildet wird:

$$h_n^{[i,j]} := 0 \quad - (j-i) \leq n < 0, \quad h_0^{[i,j]} := 1, \quad h_1^{[i,j]} = h_2^{[i,j]} = \dots = h_{i-1}^{[i,j]} := 0$$

$$h_n^{[i,j]} = h_{n-i}^{[i,j]} + h_{n-j}^{[i,j]} \quad n \geq i$$

Der Rekursionsgraph besitzt zu jedem $s \not\equiv 0 \pmod{x}$ genau $ggT(i, j)$ viele Zusammenhangskomponenten.

Ist $ggT(i, j) = 1$, so besitzt der Rekursionsgraph zu jedem $s \not\equiv 0 \pmod{x}$ nur eine Zusammenhangskomponente. In diesem Fall kann man die Folge $h_n^{[i,j]}$ über Diagonalsummen des Tableaus $\binom{k+l}{k}_{k,l \geq 0}$ ausdrücken. Die Diagonalen gehen von einem Wert zum nächsten jeweils i Stellen nach rechts und j Stellen nach oben. Genauer gesagt gilt:

$$h_n^{[i,j]} = \sum_{(k,l) \text{ mit } n=k \cdot i + l \cdot j, \quad k, l \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \binom{k+l}{k}$$

Für den allgemeinen Fall, d.h. beliebigen $ggT(i, j)$, erhält man die folgende Darstellung:

$$h_n^{[i,j]} = \begin{cases} \sum_{(k,l) \text{ mit } \frac{n}{ggT(i,j)} = \frac{k \cdot i + l \cdot j}{ggT(i,j)}, k, l \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \binom{k+l}{k} & n \equiv 0 \pmod{ggT(i,j)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel 6.13

Bevor dieser Satz bewiesen wird, soll seine Wirkungsweise an einem kurzen Beispiel veranschaulicht werden. Es sei $i = 6$ und $j = 9$, weshalb mit $ggT(i, j) = 3$ der allgemeinere Fall vorliegt. Man findet die Rekursion:

$$\begin{aligned} h_n^{[6,9]} &:= 0 \quad -3 \leq n < 0, \quad h_0^{[6,9]} := 1, \quad h_1^{[6,9]} = h_2^{[6,9]} = \dots = h_5^{[6,9]} := 0 \\ h_n^{[6,9]} &= h_{n-6}^{[6,9]} + h_{n-9}^{[6,9]} \quad n \geq 6 \end{aligned}$$

Wenn man die Rekursion ein Stück weit ausführt, sieht man die Zweiteilung der Werte in Bezug auf die Reste modulo des ggT . Die Folgenwerte $h_{27}^{[6,9]}$ bis $h_{39}^{[6,9]}$ lauten:

$$\dots, 5, 0, 0, 7, 0, 0, 9, 0, 0, 12, 0, 0, 16, \dots$$

Zum Beispiel entspricht $h_{38}^{[6,9]} = 0$ dem Fall $38 \equiv 2 \pmod{3}$ ($= ggT(6, 9)$). Dagegen soll der andere Fall mit $39 \equiv 0 \pmod{3}$ bei $h_{39}^{[6,9]} = 16$ überprüft werden. Hier erhält man

$$\begin{aligned} h_{39}^{[6,9]} &= \sum_{(k,l) \text{ mit } \frac{39}{ggT(6,9)} = k \cdot \frac{6}{ggT(6,9)} + l \cdot \frac{9}{ggT(6,9)}, k, l \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \binom{k+l}{k} \\ &= \sum_{(k,l) \text{ mit } 13 = k \cdot 2 + l \cdot 3, k, l \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \binom{k+l}{k} \end{aligned}$$

Man kann leicht nachvollziehen, daß für (k, l) die einzig möglichen Wertepaare $(2, 3)$ und $(5, 1)$ sind. Damit ergibt sich:

$$h_{39}^{[6,9]} = \binom{2+3}{2} + \binom{5+1}{5} = \binom{5}{2} + \binom{6}{1} = 10 + 6 = 16$$

Hätte man statt diesen Werten $i = 2$ und $j = 3$ gewählt, so entspricht die letzte Berechnungszeile dem Ergebnis

$$h_{13}^{[2,3]} = \binom{2+3}{2} + \binom{5+1}{5} = 16$$

Beweis:

(bis Seite 225)

Der Beweis wird in umgekehrter Reihenfolge der gemachten Aussagen geführt. Begonnen wird mit der letzten Aussage und bewiesen, daß diese mit der Rekursion und der entsprechenden Formel für $ggT(i, j) = 1$ übereinstimmt. Sei dazu $ggT(i, j) > 1$

1. Fall: $n \not\equiv 0 \mod ggT(i, j)$

Es wird $n = m \cdot ggT(i, j) + v$ dargestellt mit $1 \leq v < ggT(i, j)$ und dann eine Induktion über m geführt:

$m = 0$: $ggT(i, j) \leq i$. Damit gilt mit der Rekursionsverankerung: $h_1^{[i,j]} = h_2^{[i,j]} = \dots = h_{ggT(i,j)}^{[i,j]} = 0$

$m > 0$: Für $m \cdot ggT(i, j) + v < i$ gilt entsprechend dem vorigen Fall $h_{m \cdot ggT(i,j)+v}^{[i,j]} = 0$. Nun sei $m \cdot ggT(i, j) + v \geq i$. Dann kann man mit den Aussagen

$$\begin{aligned} (m+1) \cdot ggT(i, j) + v - i &\leq m \cdot ggT(i, j) + v; \\ (m+1) \cdot ggT(i, j) + v - i &\equiv v \mod ggT(i, j) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (m+1) \cdot ggT(i, j) + v - j &\leq m \cdot ggT(i, j) + v; \\ (m+1) \cdot ggT(i, j) + v - j &\equiv v \mod ggT(i, j) \end{aligned}$$

folgern:

$$h_{(m+1) \cdot ggT(i,j)+v}^{[i,j]} \stackrel{\text{Rek.}}{=} h_{(m+1) \cdot ggT(i,j)+v-i}^{[i,j]} + h_{(m+1) \cdot ggT(i,j)+v-j}^{[i,j]} \stackrel{\text{Ind.Vor.}}{=} 0 + 0 = 0$$

Damit ist in diesem Fall der Beweis bereits beendet.

2. Fall:

$$n \equiv 0 \bmod ggT(i, j) \Rightarrow n - i \equiv 0 \bmod ggT(i, j), \quad n - j \equiv 0 \bmod ggT(i, j)$$

Definiere nun Folge $\hat{h}_n^{[i,j]} := h_{n-ggT(i,j)}^{[i,j]}$, $n \geq 0$. Dann erkennt man leicht mit der Rekursion von $h_n^{[i,j]}$, daß $\hat{h}_n^{[i,j]}$ die folgende Rekursion besitzt:

$$\hat{h}_n^{[i,j]} = 0 \quad \frac{-(j-i)}{ggT(i,j)} \leq n < 0, \quad \hat{h}_0^{[i,j]} = 1, \quad \hat{h}_n^{[i,j]} = 0 \quad 0 < n < \frac{i}{ggT(i,j)},$$

$$\hat{h}_n^{[i,j]} = \hat{h}_{n-\frac{i}{ggT(i,j)}}^{[i,j]} + \hat{h}_{n-\frac{j}{ggT(i,j)}}^{[i,j]} \quad n \geq \frac{i}{ggT(i,j)}$$

Damit ist $\hat{h}_n^{[i,j]}$ identisch zur entsprechenden Folge $h_n^{[i,j]}$ zu $a(n) = \left\lfloor \frac{n}{x \frac{i}{ggT(i,j)}} \right\rfloor$ und

$b(n) = \left\lfloor \frac{n}{x \frac{j}{ggT(i,j)}} \right\rfloor$, wobei dies zum speziellen Fall $ggT(\frac{i}{ggT(i,j)}, \frac{j}{ggT(i,j)}) = 1$ gehört.

Die hier gemachte Aussage entspricht also der für $ggT(i, j) = 1$. Der Beweis der hier zu zeigenden Aussage kann also auf den Fall $ggT(i, j) = 1$ zurückgeführt werden.

Nun wird somit gezeigt, daß für $ggT(i, j) = 1$ die über

$$h_n^{[i,j]} = \sum_{(k,l) \text{ mit } n=k \cdot i + l \cdot j, \quad k, l \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \binom{k+l}{k}$$

beschriebene Folge mit der in der Rekursion definierten Folge $h_n^{[i,j]}$ übereinstimmt, d.h. die Binomialdarstellung der Rekursionsvorschrift incl. Anfangswerten genügt.

Induktionsanfang: $n < i$:

$n < 0$: Leere Summe: $h_n^{[i,j]} = 0$.

$n = 0$: $h_0^{[i,j]} = h_{0-i+0 \cdot j}^{[i,j]} = \binom{0+0}{0} = 1$.

$0 < n < i$: Leere Summe wegen $i < j$: $h_n^{[i,j]} = 0$.

Induktionsschluß: $n \geq i$:

$$\begin{aligned}
h_n^{[i,j]} &= h_{n-i}^{[i,j]} + h_{n-j}^{[i,j]} \\
&\stackrel{\text{Ind.vor.}}{=} \sum_{(k,l) \text{ mit } n-i=k \cdot i + l \cdot j, \, k,l \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \binom{k+l}{k} \\
&\quad + \sum_{(k,l) \text{ mit } n-j=k \cdot i + l \cdot j, \, k,l \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \binom{k+l}{k} \\
&= \sum_{(k,l) \text{ mit } n=k \cdot i + l \cdot j, \, k \geq 1, l \geq 0} \binom{k+l-1}{k-1} \\
&\quad + \sum_{(k,l) \text{ mit } n=k \cdot i + l \cdot j, \, k \geq 0, l \geq 1} \binom{k+l-1}{k} \\
&= \sum_{(k,l) \text{ mit } n=k \cdot i + l \cdot j, \, k \geq 1, l=0} \binom{k+l-1}{k-1} \\
&\quad + \sum_{(k,l) \text{ mit } n=k \cdot i + l \cdot j, \, k=0, l \geq 1} \binom{k+l-1}{k} \\
&\quad + \sum_{(k,l) \text{ mit } n=k \cdot i + l \cdot j, \, k \geq 1, l \geq 1} \left[\binom{k+l-1}{k-1} + \binom{k+l-1}{k} \right] \\
&= \sum_{(k,l) \text{ mit } n=k \cdot i, \, k \geq 1} 1 + \sum_{(k,l) \text{ mit } n=l \cdot j, \, l \geq 1} 1 \\
&\quad + \sum_{(k,l) \text{ mit } n=k \cdot i + l \cdot j, \, k \geq 1, l \geq 1} \binom{k+l}{k} \\
&= \sum_{(k,l) \text{ mit } n=k \cdot i + l \cdot j, \, k \geq 0, l \geq 0} \binom{k+l}{k}
\end{aligned}$$

Nun muß zum Schluß noch gezeigt werden, daß gilt:

$$e_{x^n \cdot s, x^m \cdot s} = h_{n-m}^{[i,j]} \quad 0 \leq m \leq n$$

Dies folgt aus Lemma 6.9, wenn man beachtet, daß die Pfeile, die in das Label x^m im Rekursionsgraphen für $m \leq n-i$ eingehen, von x^{m+i} und x^{m+j} kommen. ■

Bemerkung:

Der Zusammenhang der hier betrachteten Folgen mit Diagonalen des Tableaus

$\binom{k+l}{k}$ wurde schon von Green [Green] für den Fall $\text{ggt}(i, j) = 1$ untersucht - natürlich ohne jeden Zusammenhang zu Rekursionsgraphen.

Bemerkung:

Das Arbeitsfeld dieses Abschnittes steht in engem Zusammenhang mit random walks, die z.B. bei Feller [Felle, Chapter XIV] und bei Comtet [Comte, p.19 ff.] behandelt werden. Eine direkt nachvollziehbare Beziehung besteht hier über die Betrachtung von Wegen in vorgegebenen Richtungen.

Oberschelp [Obers] hat die random walk-Thematik in verallgemeinerter Form gelöst mit Hilfe der Technik der erzeugenden Funktionen (generating functions). Aufbauend auf diesen Überlegungen hat der Verfasser unter Benutzung von Erfahrungen aus diesem Abschnitt eine Methode gefunden, mit deren Hilfe eine allgemeine random walk-Problematik auf eine schnelle und anschauliche Weise gelöst werden kann. Diese Ergebnisse wirken sich dann wieder auf verallgemeinerte kommutative Rekursionen mit unregelmäßigem Abstieg aus, für deren Quotientenfolgen ähnliche Darstellungen gefunden werden können. Diese Betrachtungen überziehen jedoch den in dieser Arbeit gesetzten Rahmen.

6.3 Ausblick: Berührungspunkte, Selbstähnlichkeit

In diesem Abschnitt werden an speziellen Beispielen der Netzrekursionen zwei bei den Baumrekursionen wesentliche Punkte untersucht: die Berührungspunktmenge der Quotientenfolge und die strukturelle (Selbst-) Ähnlichkeit von Teilfolgen der Quotientenfolge.

Berührungspunkte

Es soll hier die Berührungspunktmenge der Quotientenfolge teilerfremder Netzrekursionen bestimmt werden. Als erste Vorbereitung werden jetzt Kriterien gegeben, mit denen man über die Darstellungs-Exponenten $\{e_{n,k}\}$ entscheiden kann, ob ein Weg ein M-Pfad, ein Doppelpfad oder keines von beiden ist.

Lemma 6.11 (M-Pfade und Darstellungs-Exponenten)

Sei eine Rekursion mit unregelmäßigem Abstieg mit zugehörigem Rekursionsgraph

und den Exponenten $\{e_{n,k}\}$ gegeben. Dann wird definiert für $M \in \mathbb{N}$ und für einen unendlichen Weg (f_i) im Rekursionsgraphen:

$$B_M((f_i)) := \{e_{f_i,m} \mid m \leq M, f_i \geq m, i \geq 1\}$$

Dann sind für einen unendlichen Weg (f_i) im Rekursionsgraph äquivalent:

1. $\exists M \in \mathbb{N}$ mit $B_M((f_i))$ ist unbeschränkt.
2. (f_i) enthält eine unendliche M -Verkettung, ist also ein M -Pfad.

Beweis:

„(1) $\Rightarrow$ (2)“:

Sei (f_i) ein vorgegebener Weg, und $m \in \mathbb{N}$, sodaß $B_M((f_i))$ unbeschränkt ist. Da M eine endliche Zahl ist, kann man $B_M((f_i))$ zerlegen:

$$B_M((f_i)) = \bigcup_{m=1}^M \{e_{f_i,m} \mid f_i \geq m, i \geq 1\}$$

Da die linke Seite unbeschränkt ist, gibt es auch auf der rechten Seite eine unbeschränkte Menge; diese sei zu m_1 gegeben. Hieraus folgt, daß es eine Teilfolge (f_{i_j}) von (f_i) gibt, sodaß gilt:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} e_{f_{i_j}, m_1} = \infty$$

O.B.d.A. ist $e_{f_{i_j}, m_1}$ streng monoton steigend (Monotonie ist klar¹² - für strenge Monotonie wird ggf. Teilfolge gewählt). Dann ist (f_{i_j}) eine M -Verkettung z.B. zu dem oben gewählten M . Dies ist klar zu sehen, da $m_1 \leq M$ ist und $e_{f_{i_j}, m_1}$ die Anzahl der Wege von f_{i_j} nach m_1 angibt. Da $e_{f_{i_j}, m_1} > e_{f_{i_{j-1}}, m_1}$ ist, gibt es einen Weg von f_{i_j} nach m_1 , der nicht über die direkte Verbindung nach $f_{i_{j-1}}$ läuft.¹³ Damit ist (f_{i_j}) eine M -Verkettung.

„(2) $\Rightarrow$ (1)“:

Sei ein M -Pfad (f_i) mit einer M -Verkettung (f_{i_j}) gegeben zu der Konstante M . Dann gibt es nach Definition eines M -Pfades von $f_{i_{j+1}}$ einen Weg zu einem

¹²Da (f_i) ein unendlicher Weg ist, geht mindestens ein Weg von (f_{i_j}) nach $(f_{i_{j-1}})$. Über diesen Weg kann jeder Weg von $(f_{i_{j-1}})$ nach m_1 zu einem Weg von (f_{i_j}) nach m_1 erweitert werden.

¹³Wenn zwei Wege von f_{i_j} nach $f_{i_{j-1}}$ existieren, wird nur einer als direkte Verbindung bezeichnet.

$m \leq M$, der nicht über die Verbindung von $f_{i_{j+1}}$ nach f_{i_j} des Pfades verläuft. (Jeder Weg von f_{i_j} zu einem $m \leq M$ ist zu einem Weg von $f_{i_{j+1}}$ nach m über diese Verbindung erweiterbar.) Somit gilt:

$$\sum_{m \leq M} e_{f_{i_{j+1}}, m} \geq \sum_{m \leq M} (e_{f_{i_j}, m} + 1) \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sum_{m \leq M} e_{f_{i_j}, m} \right) = \infty$$

Da die Summe endlich ist, ist die Menge

$$B_M((f_i)) \supseteq \bigcup_{m=1}^M \{e_{f_{i_j}, m} \mid f_{i_j} \geq m, i \geq 1\}$$

unbeschränkt. ■

Mit diesem Lemma reicht es also aus, die $\{e_{n,k}\}$ zu untersuchen, falls diese bekannt sind, um alle M -Wege zu finden bzw. zu untersuchen, ob ein M -Pfad vorliegt. Ein weiteres einfaches Lemma, dessen Aussage sich sofort ergibt, charakterisiert Doppelpfade:

Lemma 6.12 (Doppelpfade und Darstellungs-Exponenten)

Ein Weg $(f_i)_{i \geq 1}$ ist ein Doppelpfad genau dann, wenn es eine Teilfolge (f_{i_j}) von (f_i) gibt, für die gilt: $\forall j \geq 1$ ist: $e_{f_{i_{j+1}}, f_{i_j}} \geq 2$. (Dann ist (f_{i_j}) eine Doppelverketung.)

Nun soll mit diesen Kenntnissen begonnen werden, die teilerfremden Netzrekursionen (als Beispiel) auf M -Pfade und Doppelpfade zu untersuchen. Sei dazu $\alpha(n) := \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$, $\beta(n) := \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor$ mit $a, b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ sowie $\text{ggt}(a, b) = 1$. Dann sind die Exponenten $\{e_{n,k}\}$ nach Lemma 6.10 bekannt. Für $s \not\equiv 0 \pmod a$ und $s \not\equiv 0 \pmod b$ gilt:

$$e_{a^n \cdot b^k \cdot s, a^i \cdot b^j \cdot s} = \binom{n + k - i - j}{n - i}$$

Damit kann man leicht die folgende Aussage beweisen:

Lemma 6.13 (unendliche Wege bei teilerfremden Netzrekursionen)

*Seien eine **teilerfremde** Netzrekursion (wie gerade eingeführt) und eine Zusammenhangskomponente zu einem wie oben spezifizierten s gegeben. Dann gilt:*

1. Alle Wege durch ein Label $a^i \cdot b^j \cdot s$ mit $i > 0$ **und** $j > 0$ sind M -Pfade.
2. Die einzigen Nicht- M -Pfade verlaufen an den „Rändern“ des Netzes: $(a^i \cdot s)_{i \geq 0}$, $(b^j \cdot s)_{j \geq 0}$ und ihre Teilpfade.
3. Alle Wege, die schließlich parallel zu den Rändern des Netzes verlaufen, sind keine Doppelpfade, d.h. sie enthalten keine Doppelverkettungen.
4. Alle Wege, die nicht schließlich parallel zu den Rändern des Netzes verlaufen, enthalten Doppelverkettungen, sind also Doppelpfade.

Beweis:

Zu 1):

Sei das in der Behauptung geforderte Paar (i, j) gegeben durch i_0, j_0 mit $i_0 > 0$ und $j_0 > 0$. Nach Voraussetzung liegt $a^{i_0} \cdot b^{j_0} \cdot s$ auf dem Pfad. Nach Konstruktion des Netzes müssen dann auch alle später auftretenden Labels $a^i \cdot b^j \cdot s$ die Eigenschaft $i > 0$ und $j > 0$ besitzen und es muß entweder i oder j (oder beide) gegen Unendlich gehen, damit ein unendlicher Weg vorliegt. Für alle diese Paare (i, j) ergibt sich:

$$e_{a^i \cdot b^j \cdot s, s} = \binom{i + j - 0 - 0}{i - 0} = \binom{i + j}{i}$$

Nach dem vorher gesagten sind alle diese Binomialkoeffizienten größer Eins und streben schließlich gegen Unendlich. Es ist leicht über die Binomialkoeffizienten nachzuweisen, daß auf dem Weg sogar ein streng monoton steigendes Verhalten vorliegen muß. Damit liegt nach Lemma 6.11 ein M -Pfad vor.

Zu 2):

Daß die behaupteten Pfade die einzigen Pfade sind, die nicht in (1) behandelt werden, ist klar. Es bleibt nachzuweisen, daß es sich nicht um M -Pfade handeln kann. Dazu werden für den Fall $(a^i \cdot s)_{i \geq 0}$ die Exponenten bestimmt für $i^* < i$ (andere Labels als $a^{i^*} \cdot s$ sind von $a^i \cdot s$ aus im Rekursionsgraph nicht erreichbar:

$$e_{a^i \cdot s, a^{i^*} \cdot s} = \binom{i - i^*}{i - i^*} = 1$$

Damit liegt kein M -Pfad vor. Die anderen Fälle sind analog.¹⁴

¹⁴Ein noch einfacherer Beweisansatz liegt in der Tatsache, daß noch nicht einmal ein Doppelsprungstellenweg vorliegt. Hier sollte jedoch der Umgang mit den Darstellungs-Exponenten vorgestellt werden.

Zu 3):

Bei jedem Weg, der schließlich parallel zu den Rändern des Netzes läuft, ist schließlich i oder j in $a^i \cdot b^j \cdot s$ konstant, o.B.d.A. j . Dann haben die Exponenten im Vergleich zu vorigen Wert schließlich stets die Form

$$e_{a^i \cdot b^j \cdot s, a^{i^*} \cdot b^j \cdot s} = \binom{i + j - i^* - j}{i - i^*} = \binom{i - i^*}{i - i^*} = 1$$

Es kann in diesem Fall folglich keine Doppelverkettung enthalten sein, da die Potenzen im Vergleich zum vorigen Wert schließlich konstant 1 werden, für einen Doppelpfad aber immer wieder Werte ≥ 2 auftreten müssen.

Zu 4):

Ein Weg, der nicht schließlich parallel zu den Rändern des Netzes verläuft, hat immer wieder Übergänge (mit übersprungenen Werten!) von einem Label $a^{i^*} \cdot b^{j^*} \cdot s$ zu einem Label $a^i \cdot b^j \cdot s$ mit $i - i^* \geq 1$ und $j - j^* \geq 1$. Der entsprechende Darstellungs-Exponent dazu lautet dann

$$e_{a^i \cdot b^j \cdot s, a^{i^*} \cdot b^{j^*} \cdot s} = \binom{i + j - i^* - j^*}{i - i^*} \geq 2$$

Damit liegt nach Lemma 6.12 eine Doppelverkettung in einem Doppelpfad vor. ■

Nun soll in Fortführung dieser Ergebnisse und in Anlehnung an die Behandlung der Baumrekursionen die Menge der (uneigentlichen) **Berührungspunkte** der teilerfremden Netzrekursionen bestimmt werden.¹⁵

Nach den bisherigen Ergebnissen kann mit Lemma 6.4 gefolgert werden, daß alle M -Pfade den (uneigentlichen) Berührungspunkt ∞ liefern, und nach Lemma 6.2 und Beispiel 6.2 ist bekannt, daß die „Querwege“ durch alle Zusammenhangskomponenten den Berührungspunkt 1 liefern. Nun bleiben von den bisher behandelten Fällen nur noch die wenigen Teilfolgen zu konvergenten unendlichen Wegen. Wie man sich leicht überlegen kann, liefern diese die folgenden Berührungspunkte zu $s \not\equiv 0 \pmod{a}$ und $s \not\equiv 0 \pmod{b}$:

$$\Delta_{c_s} \cdot P\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{a}\right), \Delta_{c_s} \cdot P\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{b}\right)$$

¹⁵Natürlich zur hier universellen Randwertfolge $c_n = n \quad n \geq 1, c_0 = 1$.

mit

$$P\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{a}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{a^k}}$$

Dabei ist $P(x, y)$ nach Wilf [Wilf] die gewöhnliche erzeugende Funktion der Partitionszahlen $p_{n,k}$, die die Anzahl der Partitionen der Zahl n in k Summanden angeben.

Nun stellt sich die Frage, ob dies alle Berührungspunkte sind. Dazu kann man die folgenden Überlegungen durchführen, wobei eine Teilfolge über eine Folge von Labels konstruiert wird:

Die Zusammenhangskomponenten werden der Reihe nach (nach dem jeweils kleinsten Label s geordnet) „hintereinandergelegt“. Nun startet man bei dem Label $a \cdot b \cdot 1$. Es werden nun zwei Wahlmöglichkeiten vorgegeben: Bei der einen kann man in der gleichen Zusammenhangskomponente eine Stelle „weiter in a -Richtung“ gehen, d.h. von dem Label $a^i \cdot b \cdot s$ zu $a^{i+1} \cdot b \cdot s$ (Entscheidung A), oder man wechselt in die nächstgrößere Zusammenhangskomponente, d.h. man bleibt an der gleichen Stelle $a^i \cdot b \cdot s$, nimmt nur das nächstgrößere s (Entscheidung S). Nach Lemma 6.4 und Lemma 6.13 ist klar, daß von jedem erreichbaren Punkt¹⁶ ausgehend die unendliche ausschließliche Ausführung der Möglichkeit A zu einem Weg mit dazugehöriger divergenter Teilfolge von (Q_n) , d.h. zum Berührungspunkt ∞ führt, während andererseits analog zu Lemma 6.2 und Beispiel 6.2 folgern läßt, daß von jedem hier erreichbaren Punkt aus eine unendliche ausschließliche Wiederholung der Entscheidung S über die so konstruierte Teilfolge von (Q_n) zum Berührungspunkt 1 führt. Die Frage ist nun, was passiert, wenn **sowohl A als auch S unendlich oft** ausgeführt werden.

Wenn man z.B. ein reelles $x > 1$ vorgibt, stößt man nach einer endlichen Anzahl von A-Ausführungen erstmalig auf einen (Q_n) -Wert $g_1 > x$. Eine endliche Anzahl von S führt dann wieder (erstmalig) zu einem Wert $k_1 \leq x$. Durch endliche Ausführung von A kommt man zu einem $g_2 > x$, usw.. Es wird eine Folge von (Q_n) -Werten erzeugt, die um x pendeln. Man kann nach dieser Beobachtung jedenfalls nicht mehr ausschließen, daß x ein Berührungspunkt von (Q_n) ist.

Diese Überlegung führt zum folgenden Satz, dessen Beweis auf dem Zusammenspiel der beiden Verfahren A und E aufbaut, diese jedoch nicht direkt verwendet. Der Beweis des Satzes wird sich wegen der Existenz der konvergenten Wege im

¹⁶Ein Label n des Rekursionsgraphen ist erreichbar, wenn es vom hier gewählten Startpunkt mit einer endlichen Anzahl von beliebigen Hintereinanderausführungen von A und S zu erreichen ist.

Rekursionsgraphen als unerwartet leicht erweisen.

Satz 6.4 (Berührungpunktmenge teilerfremder Netzrekursionen)

Die Quotientenfolge einer teilerfremden Netzrekursion hat die (uneigentliche) Berührungpunktmenge $[1, \infty]$.

Beweis:

(bis Seite 234)

Daß 1 und ∞ (uneigentliche) Berührungpunkte von (Q_n) sind, ist schon vielfach gezeigt worden. Sei nun ein $z \in (1, \infty)$ **beliebig, aber fest**, gewählt. Definiere dazu für $s \not\equiv 0 \pmod{a}$ und $s \not\equiv 0 \pmod{b}$:

$$n_0(s) := \min \{n \in \mathbb{N} \mid Q_{b \cdot a^n \cdot s} > z\}$$

Da Q_s gegen 1 strebt für $s \rightarrow \infty$ (zu s mit obigen Anforderungen), gilt schließlich immer:

$$Q_{b \cdot a^{n_0(s)-1} \cdot s} \leq z < Q_{b \cdot a^{n_0(s)} \cdot s}$$

Zieht man die linke Seite überall ab, so ergibt sich schließlich für alle s mit $s \not\equiv 0 \pmod{a}$ und $s \not\equiv 0 \pmod{b}$:

$$0 \leq z - Q_{b \cdot a^{n_0(s)-1} \cdot s} < Q_{b \cdot a^{n_0(s)} \cdot s} - Q_{b \cdot a^{n_0(s)-1} \cdot s}$$

Wenn man nachweisen kann, daß $Q_{b \cdot a^{n_0(s)} \cdot s} - Q_{b \cdot a^{n_0(s)-1} \cdot s}$ für die erlaubten s für $s \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt, hätte man folglich eine Folge gefunden, die gegen z strebt, d.h. es wird hier bewiesen:

$$(Q_{b \cdot a^{n_0(s)-1} \cdot s})_{s \geq 1, s \not\equiv 0 \pmod{a}, s \not\equiv 0 \pmod{b}} \longrightarrow z \quad (s \rightarrow \infty)$$

Nun zum Beweis der fehlenden Aussage. Dazu wird zuerst umgeformt:

$$\begin{aligned} Q_{b \cdot a^{n_0(s)} \cdot s} - Q_{b \cdot a^{n_0(s)-1} \cdot s} &= \Delta c_{b \cdot a^{n_0(s)} \cdot s} \cdot Q_{a^{n_0(s)} \cdot s} \cdot Q_{b \cdot a^{n_0(s)-1} \cdot s} - Q_{b \cdot a^{n_0(s)-1} \cdot s} \\ &= Q_{b \cdot a^{n_0(s)-1} \cdot s} \cdot (\Delta c_{b \cdot a^{n_0(s)} \cdot s} \cdot Q_{a^{n_0(s)} \cdot s} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Q_{b \cdot a^{n_0(s)-1}, s} \cdot \left(\Delta_{c_{b \cdot a^{n_0(s)}, s}} \cdot \prod_{j=0}^{n_0(s)} \Delta_{c_{a^j, s}} - 1 \right) \\
&\leq Q_{b \cdot a^{n_0(s)-1}, s} \cdot \left(\Delta_{c_{b \cdot a^{n_0(s)}, s}} \cdot \prod_{j=0}^{\infty} \Delta_{c_{a^j, s}} - 1 \right) \\
&= Q_{b \cdot a^{n_0(s)-1}, s} \cdot \left(\Delta_{c_{b \cdot a^{n_0(s)}, s}} \cdot \Delta_{c_s} \cdot P\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{a}\right) - 1 \right) \\
&\leq z \cdot \left(\Delta_{c_{b \cdot a^{n_0(s)}, s}} \cdot \Delta_{c_s} \cdot P\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{a}\right) - 1 \right)
\end{aligned}$$

Dabei gilt die letzte Umformung nur schließlich und die Abschätzung der vierten Zeile ist klar wegen $\Delta_{c_{a^j, s}} \geq 1 \ \forall j \geq 1$.

Wenn man beweisen könnte, daß $P\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{a}\right) \rightarrow 1$ für $s \rightarrow \infty$, so wäre der Satz bewiesen, da aus $n_0(s) \rightarrow \infty$ für $s \rightarrow \infty$ $\Delta_{c_{b \cdot a^{n_0(s)}, s}} \cdot \Delta_{c_s} \rightarrow 1$ für $s \rightarrow \infty$ folgt, und damit $Q_{b \cdot a^{n_0(s)}, s} - Q_{b \cdot a^{n_0(s)-1}, s}$ gegen 0 streben würde für $s \rightarrow \infty$.

Nun noch zum letzten fehlenden Puzzlestein. Es ist klar, daß $P\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{a}\right) \geq 1$ für $a \geq 2$ und $s \geq 1$ gilt. Man kann nun weiter abschätzen¹⁷ für $s > 1$:

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{a}\right) &= \prod_{j=1}^{\infty} \Delta_{c_{a^j, s}} \\
&= \prod_{j=1}^{\infty} \frac{a^j \cdot s}{a^j \cdot s - 1} \\
&= \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{a^j \cdot s - 1} \right) \\
&\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{a^j \cdot s - 1} \right)^m \\
&\stackrel{s \cdot a^{j-1} \geq 0}{\leq} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{a^{j-1} \cdot s} \right)^m \\
&\stackrel{\sum^m \leq \sum^\infty}{\leq} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a^{j-1} \cdot s} \right)^m \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \frac{1}{s} \frac{a}{a-1} \right)^m
\end{aligned}$$

¹⁷zur Produkt/Summen-Abschätzung vgl. Satz 3.9.

$$= e^{\frac{1}{s} \frac{a}{a-1}}$$

Der letzte Term strebt gegen 1 für $s \rightarrow \infty$. Das vollendet den Beweis. ■

Selbstähnlichkeit

Zum Abschluß dieser Arbeit soll noch ein bei den Baumrekursionen ausführlich betrachteter Untersuchungspunkt auch in diesem Rahmen berührt werden, nämlich das **Folgebild**. Kurz betrachtet werden in diesem Fall nur einige Ansätze zu einer *einzigsten* teilerfremden Netzrekursion, nämlich zu der mit $\alpha(n) := \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ und $\beta(n) := \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$.

Es sollen nun Teilfolgen zu **Teilnetzen** im Rekursionsgraph untersucht werden. Ein Teilnetz mit Basislabel m (das Basislabel eines Teilnetzes entspricht der Wurzel eines Teilbaumes) soll alle die Knoten mit Label n des Rekursionsgraphen enthalten, von denen mindestens ein gerichteter Weg von n nach m geht (vgl. Abbildung 6.13). Die dazugehörige Teilfolge der Quotientenfolge wird entsprechend wie bei Teilbaum-Teilfolgen im Falle der Baumrekursionen definiert.

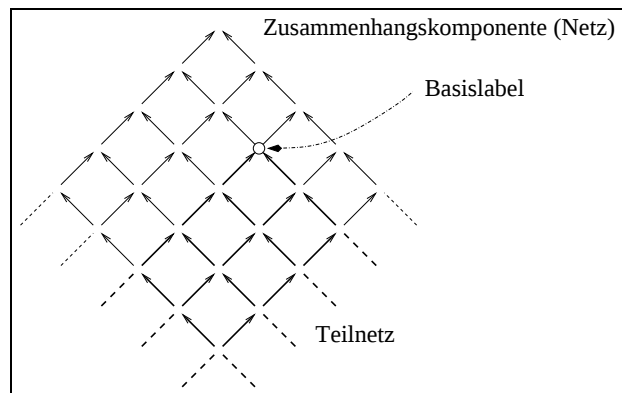


Abbildung 6.13: Teilnetz des Rekursionsgraphen einer teilerfremden Netzrekursion.

Eine erste Idee bei den Betrachtungen ist die Beschränkung auf Teilnetz-Teilfolgen zu entsprechenden Teilnetzen verschiedener Zusammenhangskomponenten, da hier eine Ähnlichkeit der Teilfolgen aufgrund des gleichen Aufbaus aller Zusammenhangskomponenten in diesem Beispiel vermutet werden kann: Über den

gleichen Aufbau aller Zusammenhangskomponenten kann man mit den beiden Abstiegsfunktionen und ihren Pseudoinversen auch hier Stellen definieren. Dies soll hier nicht formal geschehen, da nach Betrachtung von Abbildung 6.6 auf Seite 212 hinreichend klar werden dürfte, was gemeint ist.

Um erste Beobachtungen anzustellen, werden dazu in Abbildung 6.14 die Teilfolgen zu den Teilnetzen mit Basislabel $30 = 6 \cdot 5$, $42 = 6 \cdot 7$ und $66 = 6 \cdot 11$ betrachtet. Diese Basislabels befinden sich an den gleichen Stellen $6 \cdot s$ der Zusammenhangskomponenten zu den Irreduziblen $s \in \{5, 7, 11\}$. Beim Betrachten der Folgen fallen die große Übereinstimmungen auf. Liegt hier sogar Ordnungsisomorphie vor? Im folgenden wird sich zeigen, daß dies und warum dies der Fall ist.

Ein wesentlicher Schlüssel für die Erklärung der entsprechenden Phänomene bei **Baum**rekursionen war die Ordnungsisomorphie. Hier sollen entsprechende Untersuchungen für die hier betrachtete Beispiel-Netzrekursion gemacht werden. Jedoch wird hier auf eine formale Definition verzichtet, da die Vorgehensweise hier einerseits klar sein sollte und andererseits an dieser Stelle nur ein kurzer Anriß der Thematik gegeben werden soll.

Man könnte also vermuten, daß Teilnetze mit Basislabels an gleichen Stellen in verschiedenen Zusammenhangskomponenten ordnungsisomorph sind. Dies ist in der Tat der Fall, jedoch kann noch weit mehr gezeigt werden. Das wird im folgenden Lemma ausgesagt.

Lemma 6.14

Alle Teilnetze des Rekursionsgraphen der Netzrekursion mit $\alpha(n) := \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ und $\beta(n) := \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ sind ordnungsisomorph.

Beweis:

Der Beweis ist sehr einfach. Betrachtet werden zwei Basislabels $m_1 := 2^{a_1} \cdot 3^{b_1} \cdot s_1$ und $m_2 := 2^{a_2} \cdot 3^{b_2} \cdot s_2$, wobei s_1 und s_2 Irreduzible sein sollen und $a_1, a_2, b_1, b_2 \geq 0$ seien. Dazu werden zwei Stellen betrachtet, die hier folgendermaßen definiert werden:

$$\zeta(m) := 2^{c_\zeta} \cdot 3^{d_\zeta} \cdot m$$

$$\xi(m) := 2^{c_\xi} \cdot 3^{d_\xi} \cdot m$$

Dabei seien $c_\zeta, c_\xi, d_\zeta, d_\xi \geq 0$. Angenommen, es würde $\zeta(m_1) < \xi(m_1)$ gelten. Das bedeutet ausgeschrieben:

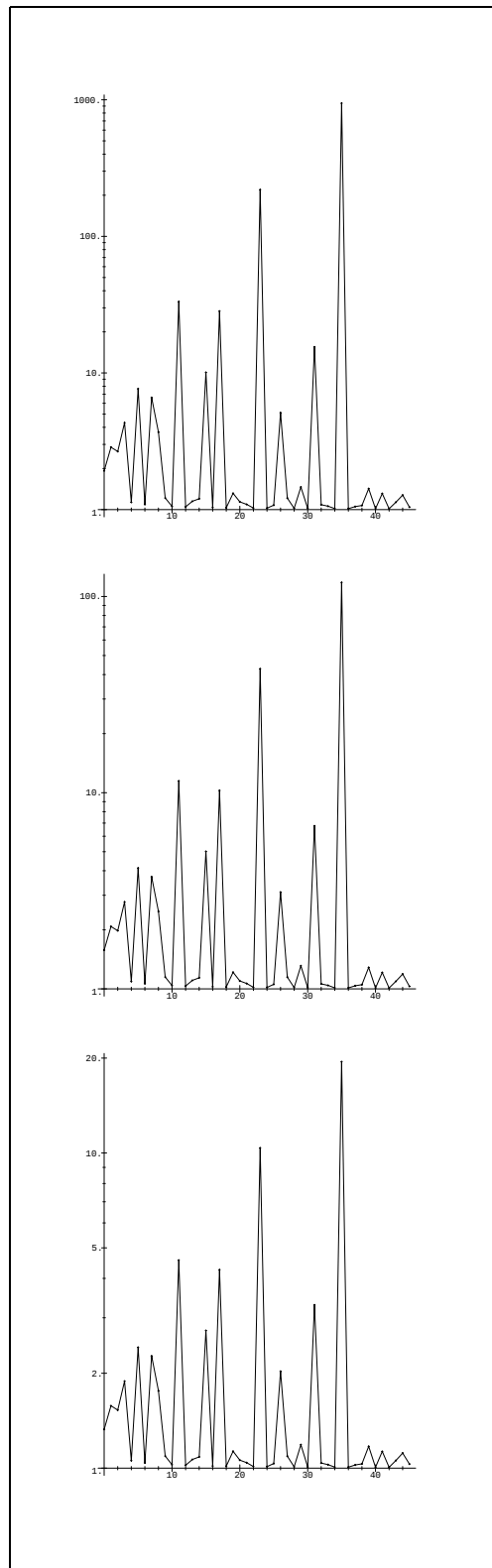


Abbildung 6.14: Entsprechende Teilnetz-Teilfolgen der Quotientenfolge verschiedener Zusammenhangskomponenten.

$$2^{c_\zeta} \cdot 3^{d_\zeta} \cdot 2^{a_1} \cdot 3^{b_1} \cdot s_1 < 2^{c_\xi} \cdot 3^{d_\xi} \cdot 2^{a_1} \cdot 3^{b_1} \cdot s_1$$

Da alle Faktoren größergleich Eins sind, kann man auf beiden Seiten durch $2^{a_1} \cdot 3^{b_1} \cdot s_1$ teilen, ohne die Relation zu ändern. Aus dem gleichen Grund kann man dann auf beiden Seiten mit $2^{a_2} \cdot 3^{b_2} \cdot s_2$ multiplizieren, ohne die Relation zu verändern. Insgesamt ergibt sich:

$$2^{c_\zeta} \cdot 3^{d_\zeta} \cdot 2^{a_2} \cdot 3^{b_2} \cdot s_2 < 2^{c_\xi} \cdot 3^{d_\xi} \cdot 2^{a_2} \cdot 3^{b_2} \cdot s_2$$

Dies bedeutet nichts anderes als $\zeta(m_2) < \xi(m_2)$. Die andere Richtung wird analog gezeigt und damit gilt:

$$\zeta(m_1) < \xi(m_1) \quad \Leftrightarrow \quad \zeta(m_2) < \xi(m_2)$$

Da ζ und ξ beliebig gewählt waren, folgt die Behauptung. ■

Bei Baumrekursionen entsprach die strukturelle Ähnlichkeit der Teilbaum-Teilfolgen der Ordnungsisomorphie der Teilbäume. Man kann deshalb aufgrund des gerade bewiesenen Lemmas vermuten, daß eine strukturelle Ähnlichkeit von Teilnetz-Teilfolgen *nicht nur* dann besteht, wenn die Basislabels an gleichen Stellen verschiedener Zusammenhangskomponenten liegen, sondern *auch* für beliebige Teilnetze (da sie alle ordnungsisomorph sind). Diese Hypothese soll nun an entsprechenden Teilnetz-Teilfolgen überprüft werden. Dazu werden in Abbildung 6.15 die Teilnetz-Teilfolgen zu den Basislabels [derselben Zusammenhangskomponente] 10 (links oben), 15 (rechts oben), 60 (links unten) und 90 (rechts unten) abgebildet.

Nach den bisherigen Überlegungen ist es sehr überraschend, daß jeweils nur die übereinander abgebildeten Teilfolgen einander ähneln, während die anderen möglichen Vergleiche deutliche Unterschiede zeigen. Eine genauere Betrachtung zeigt aber auch hier keine genauen Übereinstimmungen der Auf- und Abschwünge. Was ist hier geschehen?

Die Begründung liegt in einem wesentlichen Unterschied der Baumrekursionen zu den Netzrekursionen: den Darstellungsexponenten $e_{n,k}$. Diese waren bei den Baumrekursionen immer 1, während hier Binomialkoeffizienten als Exponenten auftauchen. Bei den Baumrekursionen führt deshalb eine Ordnungsisomorphie der Teilbäume **direkt** zu einer strukturellen Ähnlichkeit der entsprechenden Teilfolgen. Bei den hier betrachteten teilerfremden Netzrekursionen gilt dies aber **nicht**, da trotz der Ordnungsisomorphie der Labels die unterschiedlichen Darstellungsexponenten einen Strich durch die Rechnung machen.

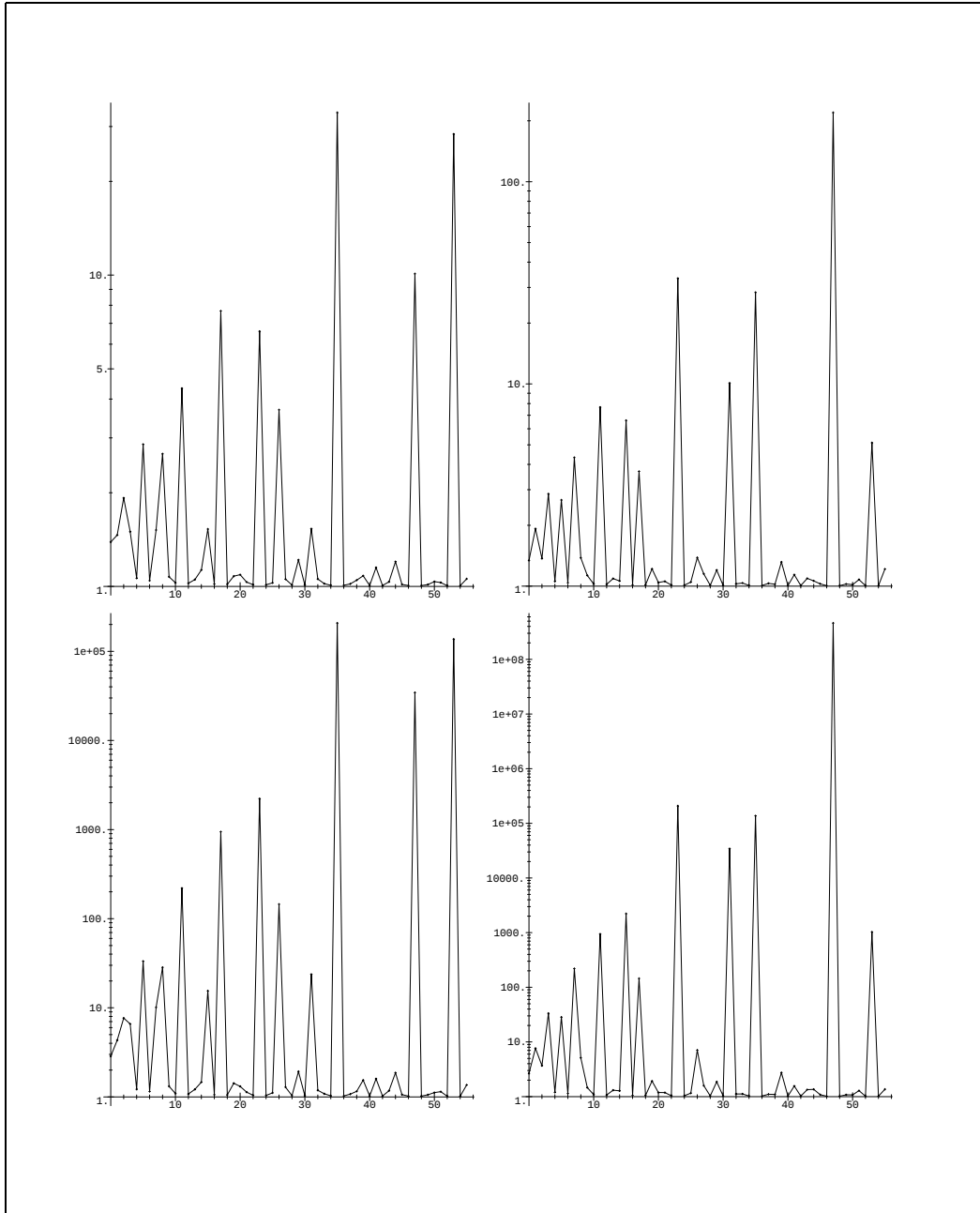


Abbildung 6.15: Teilnetz-Teilfolgen der Zusammenhangskomponente des Rekursionsgraphen einer Netzrekursion.

Eine erste Antwort auf die Frage, wann strukturelle Ähnlichkeit vorliegt, wäre eine notwendige Gleichheit aller Darstellungsexponenten in den betrachteten Teilnetzen und den bei der Berechnung der Folgenwerte damit zusammenhängenden Gebieten des Rekursionsgraphen. Dies ist jedoch nur dann der Fall, wenn - wie oben zuerst betrachtet - die beiden Basislabels der Teilnetze an gleichen Stellen in verschiedenen Zusammenhangskomponenten stehen, was leicht nach Lemma 6.10 nachzuvollziehen ist.

Wenn man jedoch Teilnetze an verschiedenen Stellen einer **einzigsten** Zusammenhangskomponente wählt, kommen auch Ähnlichkeiten vor, wie in Abbildung 6.15 zu sehen war. Wie kommen diese zustande, obwohl keine Gleichheit der Darstellungsexponenten vorliegt. Eine mögliche Antwort auf diese Frage wäre auch hier eine notwendige Ordnungsisomorphie. Es bräuchten dann nicht **gleiche** Darstellungsexponenten in den verschiedenen gleich aufgebauten Teilgraphen verlangt werden, sondern nur ordnungsisomorphe Verhältnisse. Es wird auch hier dazu übergegangen, nur die Ordnungsisomorphie der Darstellungsexponenten zu verlangen.

Im betrachteten Fall einer teilerfremden Netzrekursion haben die Darstellungsexponenten die Form $\binom{i+j}{i}$. Das Tableau dieser Zahlen wird in Tabelle 6.3 betrachtet.

Bei der Berechnung der zu den einzelnen Labels gehörenden Darstellungs-Exponenten wird dieses Tableau im Prinzip gespiegelt auf das Netz gelegt (vgl. Lemma 6.10). Deswegen kann man die Ordnungsisomorphie-Anforderungen an dieses Tableau richten.¹⁸ Dabei stellt sich die Frage, welche der Teiltabelaus, die jeweils links und oberhalb eines rechts-unteren „Eckfeldes“ liegen, ordnungsisomorph sind. Unbedingt ist notwendig, daß sich der rechts-untere „Eckpunkt“ jeweils auf der gleichen Diagonalen befindet. Ansonsten wäre zum Beispiel das Teiltabelleau mit Eckpunkt $(5, 3)$ [d.h. $i = 5, j = 3$] nicht ordnungsisomorph zum Teiltabelleau mit Eckpunkt $(4, 6)$ [d.h. $i = 4, j = 6$], da z.B. im ersten Fall $5 < 6$ [d.h. der Wert zu $(i - 1, j - 2)$ ist kleiner als der Wert zu $(i - 3, j - 1)$] gilt, aber im zweiten Fall an entsprechenden Stellen $35 > 6$ [d.h. der Wert zu $(i - 1, j - 2)$ ist größer als der Wert zu $(i - 3, j - 1)$]. Der Grund ist die verschiedene Lage der Haupt-Diagonalen, die gleichzeitig Symmetrie-Ebene des Gesamt-Tableaus ist, in beiden Teiltabelaus.

Aber auch bei Lage beider Eckpunkte auf der gleichen Hauptdiagonalen kom-

¹⁸Zwei Teiltabelaus mit Eckpunkten (i, j) und (n, m) sollen ordnungsisomorph sein, wenn für beliebige (sinnvolle, d.h. nicht zu große) $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ gilt:
 $(\text{Wert an der Stelle } (i - c_1, j - d_1)) \leq (\text{Wert an der Stelle } (i - c_2, j - d_2)) \Leftrightarrow (\text{Wert an der Stelle } (n - c_1, m - d_1)) \leq (\text{Wert an der Stelle } (n - c_2, m - d_2)).$

$i \setminus j$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7
2	1	3	6	10	15	21	28
3	1	1	10	20	35	56	84
4	1	5	15	35	70	126	210
5	1	6	21	56	126	252	462
6	1	7	28	84	210	462	924

Tabelle 6.3: Tableau von $\binom{i+j}{i}$.

men derartige Phänomene vor, wie man beim Betrachten der Teilttableaus mit den Eckpunkten $(6, 4)$ [d.h. $i = 6, j = 4$] und $(7, 5)$ [d.h. $i = 7, j = 5$] beobachten kann. Hier entspricht analog zum vorher vorgestellten Fall die Relation $5 < 6$ [d.h. der Wert zu $(i - 2, j - 3)$ ist kleiner als der Wert zu $(i - 4, j - 2)$] nicht dem entsprechenden Vergleich $21 > 20$ [d.h. der Wert zu $(i - 2, j - 3)$ ist größer als der Wert zu $(i - 4, j - 2)$]. Insgesamt kann man also feststellen, daß eine Ordnungsisomorphie bei der Wahl verschiedener, „genügend großer“ Eckpunkte nicht auftreten kann. Da bei der Berechnung der jeweiligen Teilnetz-Teilfolgen **immer** Teil-Tableaus zu großen Eckpunkten benötigt werden, folgt daraus, daß eine Ordnungs-Isomorphie der Labels des Teilnetzes **und** der Teil-Tableaus der Darstellungs-Exponenten bei Wahl verschiedener Stellen der Zusammenhangskomponenten nicht auftreten kann. Eine „strukturelle Selbstähnlichkeit“ von Teilnetz-Teilfolgen entsprechend den Teilbaum-Teilfolgen bei Baumrekursionen

ist folglich in diesem Beispiel nicht zu erwarten!

Nun bleibt aber noch die Frage, warum in Abbildung 6.15 trotzdem zwischen bestimmten Teilnetz-Teilfolgen relativ große Gemeinsamkeiten auftauchen, während bei anderen Vergleichen kaum Ähnlichkeiten bestehen. Eine Begründung dazu liefern wieder die Darstellungs-Exponenten aus Tabelle 6.3. Man sieht, daß bei Wahl der Eckpunkte auf einer Hauptdiagonalen die Ordnungsdurchbrüche seltener sind und andererseits die jeweiligen relativen Größenordnungen der Werte ähnlicher sind als bei Wahl der Eckpunkte auf weit auseinander liegenden Hauptdiagonalen. Diese größeren Gemeinsamkeiten bzw. Unterschiede wirken sich direkt auf die Gestalt der entsprechenden Teilfolgen aus, da -wie gesehen- eine Ordnungs-Isomorphie der Labels immer gegeben ist.

Kapitel 7

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden **Rekursionen mit unregelmäßigem Abstieg** behandelt. Darunter werden Rekursionen verstanden, bei denen der Rückgriff auf vorherige Werte nicht auf einem Zurückgehen um eine konstante Anzahl von Folgenwerten - wie dies bei gewöhnlichen Differenzengleichungen der Fall ist - beruht, sondern von einer andersartigen *Abstiegswfunktion* geregelt wird.

Ausgangspunkt für diese Betrachtungen ist die Heapfolge, die die Anzahl der Heaps - einer beim Sortierprogramm Heapsort auftretenden Struktur- abzählt. Die hiermit im Zusammenhang stehende Problematik sowie das seltene Auftreten der hier behandelten Folgen in der Literatur werden in der **Einleitung** erläutert.

Eine erste Verallgemeinerung der Heapfolge sind die Baumrekursionen, die im **Kapitel 2 (Einführung der Baumrekursionen)** eingeführt werden. Die Betrachtung der Baumrekursionen als einen Spezialfall der Rekursionen mit unregelmäßigem Abstieg macht erst einmal die Definition der Abstiegswfunktionen, die das Zurückgehen bei Anwendung der Rekursion definieren, nötig. Ergebnis dieser Betrachtungen ist, daß es sinnvoll und ausreichend ist, sich auf sogenannte *schwach wachsende Abstiegswfunktionen* zu beschränken. Diese besitzen eine leicht über ihre Differenzen - den *0-1-Code* - zu charakterisierende Form. Sie sind leider nicht invertierbar, aber eine Invertierung ist bei Einschränkung auf Stellen mit Anstieg, die *Sprungstellen*, möglich. Das Ergebnis der Invertierung auf den Sprungstellen wird als *Pseudo-Inverse* bezeichnet und liefert eine wesentliche Grundlage für viele Betrachtungen.

Diese Arbeit beschäftigt sich in wesentlichen nicht mit den Folgen, die direkt über eine Rekursion gebildet werden, sondern mit deren *Quotientenfolgen*. Im Falle der

Baumrekursionen, die einen Rückgriff auf zwei Terme erfordern, greift die Rekursion der zu Baumrekursionen gehörenden Quotientenfolgen nur auf einen einzigen früheren Folgenwert zurück. Ergebnis dieser Betrachtungen ist eine -im Gegensatz zu den Originalfolgen- einfache Rekursionsstruktur der Quotientenfolgen. Wenn man diese als unendlichen gelabelten Graphen auffaßt, erhält man den δ -Baum. Dieser ist ein meist vollständiger unendlicher binärer Baum, der genau einmal jedes $n \in \mathbb{N}$ als Label besitzt.

Aufbauend auf dieser Grundlage behandelt das **Kapitel 3** über die **Analytische Eigenschaften von Baumrekursionen** Fragen nach der Größe der Folgenwerte im Verhältnis zueinander und zum Grenzverhalten markanter Teilfolgen. Begonnen wird dabei mit Betrachtungen zur Größenrelation der Labels auf den Stufen des δ -Baumes. Ergebnis ist eine sehr stark festgelegte Ordnung, die als *Hypercube-Ordnung* bezeichnet wird. Diese Ordnungsstruktur überträgt sich bei monotonen Randwert-Quotienten auch auf die Folgenwerte.

Als notwendige Vorbereitung weiterer Untersuchungen, wird eine Untersuchung benötigt, die sich mit der Berechnung und Abschätzung der Pseudo-Inversen zweier wichtiger Klassen von Abstiegsfunktionen - den *stufentreuen Abstiegsfunktionen* und den *nicht ausgeartet periodischen Abstiegsfunktionen* - beschäftigt. Hiermit wird anschließend nachgewiesen, daß die zugehörigen Quotientenfolgen dieser Klassen unter einer Normierungs-Bedingung immer beschränkt sind, wenn die hier fest gewählte Randwertfolge benutzt wird. Quotientenfolgen *ausgearteter* Baumrekursion, bei denen eine der beiden Abstiegsfunktionen schließlich konstant wird, sind dagegen immer nach oben unbeschränkt. Die nun mögliche Vermutung, daß alle nicht ausgearteten Baumrekursionen beschränkte Quotientenfolgen besitzen, wird durch ein Gegenbeispiel verneint. Unabhängig davon, ob die Quotientenfolge einer nicht ausgearteten Baumrekursion nach oben beschränkt ist oder nicht, besitzt sie immer einen Typ von konvergenten Teilfolgen.

Die Werte der Quotientenfolge liegen in einem nach Unendlich breiter werdenden Kegel. Hierin kann man verschiedene unendliche „Wege“ mit einem monotonen Verhalten beobachten. Diese gehören zu unendlichen Wegen im δ -Baum. Es werden die Grenzwerte dieser Wege bei nicht ausgearteten periodischen und stufentreuen Baumrekursionen betrachtet, die wegen Konvergenz in diesen Fällen jeweils einen Berührungspunkt der Quotientenfolge liefern. Ein erster Satz besagt, daß alle Berührungspunkte der Quotientenfolge in diesen beiden Klassen über unendliche Wege im δ -Baum erhalten werden. Nun wird die Frage nach der Mächtigkeit der Berührungspunktmengen bei diesen Klassen gestellt. Ein Satz und eine Folgerung liefern das Ergebnis, daß *eine überabzählbar große Menge von Berührungspunkten existiert, sogar in jeder ϵ -Umgebung jedes Berührungspunktes*.

Das **Kapitel 4** über **Strukturähnlichkeiten bei Baumrekursionen** behandelt im wesentlichen Fragen, die das Auftreten von ähnlich aussehenden Folgenabschnitten oder Teilfolgen der Quotientenfolgen betreffen. Hierbei wird zuerst der bei vielen Folgenbildern auffällige Tatsache nachgegangen, daß die Quotientenfolgen in gegen Unendlich größer werdende, annähernd gleich aussehende Stücke zerlegt werden können. Die Entstehung derartiger Phänomene wird über die Analyse der zugehörigen Folgenabschnitte und ihre Entstehung aus den vorhergehenden Folgenabschnitten motiviert.

Anschließend wird die Tatsache untersucht, daß verschiedene Teilfolgen der Quotientenfolge, die über die Labelmengen von unendlichen Teilbäumen des δ -Baumes gebildet werden, oft eine annähernd identische Struktur besitzen. Grund dafür ist die gleiche Anordnung der Labels bezüglich ihrer relativen Größe in verschiedenen Teilbäumen. Es wird dazu die *Ordnungsisomorphie* von Teilbäumen eingeführt. Es wird gezeigt, daß beide Extreme von Anzahlen von Ordnungsisomorphieklassen von Teilbäumen - nur eine Klasse bzw. unendlich viele Klassen - bei nicht ausgearteten Baumrekursionen auftreten. Die zentrale Aussage dieser Betrachtungen besagt, daß die *Anzahl der Ordnungsisomorphieklassen bei fair periodischen Baumrekursionen immer endlich* ist. Bei stufentreuen Baumrekursionen können dagegen auch unendliche viele Klassen auftreten.

Das **Kapitel 5** mit dem Titel **Rückblick und Ausblick bei Baumrekursionen** beginnt mit der Betrachtung der schon in der Einleitung eingeführten Heapfolge. Bei der Untersuchung der Quotientenfolge der Heapfolge (unter den hier üblichen Randwerten) ergibt sich ein immer feineres Verhalten, das bei ungenauer Betrachtung schließlich einen periodischen Anschein erweckt und in einem rekursiven Prozeß zu einem immer feineren Aufbau führt. Im Anschluß daran wird eine Darstellung der Originalfolgen nicht ausgearteter Baumrekursionen (bei bestimmten Randwert-Bedingungen) hergeleitet, die die Labelzahl endlicher Teilbäume des δ -Baumes benutzt. Damit wird eine *Darstellung der Heapfolge* gefunden, die große Ähnlichkeit mit entsprechenden Ergebnissen von Knuth [Knut3] besitzt.

Zum Abschluß dieses Kapitels werden Ideen für mögliche weiterführende Untersuchungen aufgegriffen. Zuerst wird nachgewiesen, daß die Möglichkeit einer Umsortierung einer Quotientenfolge in der „Reihenfolge“ einer anderen Baumrekursion ein mit der Struktur des δ -Baumes verträglicher Vorgang ist, wobei unter Reihenfolge die Abfolge des Abgreifens der Stellen des δ -Baumes nach der Größe der Labels verstanden wird. Es zeigt sich, daß das Folgenbild, d.h. das Aussehen der graphischen Darstellung der Quotientenfolge, oft mehr von der Reihenfolge als von der absoluten Größe der Werte abhängt. Anschließend wird kurz auf verschiedene Phänomene eingegangen, die man unter dem Stichwort „Selbstähn-

lichkeit“ zusammenfassen kann. Dabei wird auf teilweise schon angesprochene Phänomene wie rekursive Konstruktion von Folgenintervallen, identische Strukturen von Teilfolgen sowie selbstähnliche Berührungpunktmengen eingegangen. Im Falle der Teilfolgenbildung werden Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu „fractal sequences“ im Sinne von Kimberling [Kim95, Kim97] besprochen. Es wird sogar die Selbstähnlichkeit in Bezug auf Teilfolgenbildung bei Quotientenfolgen *aller* nicht ausgearteten Baumrekursionen gezeigt.

Das **Kapitel 6 über Allgemeine Rekursionen mit unregelmäßigem Abstieg** behandelt eine weitere Verallgemeinerung der Heapfolgen-Rekursion. Im Gegensatz zu Baumrekursionen wird jetzt nicht mehr verlangt, daß beide Abstiegsfunktionen voneinander abhängen. Dadurch ergeben sich viel allgemeinere Möglichkeiten als bei den Baumrekursionen. Hierauf wird insbesondere in Bezug auf die Struktur der Rekursionsgraphen und die darin auftretenden unendlichen Wege eingegangen. Zwei neue Typen von unendlichen Wegen - *M-Pfade* und *Doppelpfade* - liefern bei den üblichen Randwerten immer divergente Teilfolgen. Ihr Auftreten in verschiedenen Rekursionsgraphen wird ebenso analysiert wie die Auswirkung der *Irreduziblen*, d.h. Stellen an denen die Quotientenfolgen-Rekursion (die etwas komplizierter als die der Baumrekursionen ist) stoppt.

Anschließend wird das bei den Baumrekursionen nicht aufgetretene Phänomen des Kommutierens der beiden Abstiegsfunktionen (bei der Hintereinanderausführung) betrachtet. Von entsprechenden Rekursionen, speziell vom Typ der *Netz-Rekursionen*, wird der Rekursionsgraph untersucht und davon ausgehend Formeln für Exponenten, die bei der Berechnung von Darstellungen der Quotientenfolge benötigt werden, bestimmt. Die Zusammenhänge verschiedener Folgen dieser Exponenten werden durchleuchtet.

Zum Abschluß dieses Kapitels werden die Ergebnisse der beiden vorhergehenden Untersuchungsschwerpunkte verbunden, indem für die „teilerfremden Netzrekursionen“ untersucht wird, welche Typen von unendlichen Wegen auftauchen. Dabei ergibt sich, daß es kaum Nicht-*M*-Pfade und viele Doppelpfade gibt. Es wird ein Zusammenhang zwischen diesen Pfaden und den Exponenten der Quotientenfolgen-Rekursion hergeleitet. Schließlich wird noch die Berührungpunktmenge der „teilerfremden Netzrekursionen“ bestimmt, deren Ausdehnung deutlich über die Grenzwerte der Teilfolgen zu unendlichen Wegen hinausgeht: Jede reelle Zahl zwischen Eins und Unendlich (jeweils einschließlich) ist (z.T. uneigentlicher) Berührungspunkt. Als letzter Untersuchungspunkt wird an einem Beispiel einer teilerfremden Netzrekursion motiviert, daß strukturelle Selbstähnlichkeit der Teilfolgen zu unendlichen Teilnetzen nicht existiert, da eine Ordnungsisomorphie der o.g. Exponenten i.a. nicht vorliegt.

Literaturverzeichnis

- [AhoUl] A.V. Aho, J.D. Ullman, *Foundation of computer science*, (C ed.), Computer Science Press, New York, 1995.
- [AlReS] L. Alonso, E.M. Reingold, R. Schott, *Determining the majority*, Inform. Process. Lett. **47**, 1993, pp. 253-255.
- [BaChT] E.J. Barbeau, J. Chew, S. Tanny, *A matrix dynamics approach to Golomb's recursion*, Electronic J. Combinatorics **4**, 1997.
(<http://www.combinatorics.org/Volume4/PDFFiles/v4i1r16.pdf>)
- [BarTa] E. Barbeau, S. Tanny, *On a strange recursion of Golomb*, Electronic J. Combinatorics **3**, 1996.
(<http://www.combinatorics.org/Volume3/PDFFiles/v3i1r8.pdf>)
- [Barns] M.F. Barnsley, *Fraktale*, Spektrum Akad. Verl., Heidelberg u.a., 1995.
- [BecBe] E.F. Beckenbach, R. Bellman, *Inequalities*, Springer, Berlin u.a., 1983.
- [Biggs] N.L. Biggs, *Discrete mathematics*, (rev. ed.), Clarendon Press, Oxford, 1989.
- [Chris] N. Christofides, *Graph theory*, Academic Press, London u.a., 1975.
- [Comte] L. Comtet, *Advanced combinatorics*, D. Reidel Pub. Comp., Dordrecht/Boston, 1974.
- [Dob81] E.E. Doberkat, *Inserting a new element in a heap*, BIT **21**, 1981, pp. 255-269.
- [Dob82] E.E. Doberkat, *Deleting the root of a heap*, Acta Informatica **17**, 1982, pp. 245-265.
- [Dob84] E.E. Doberkat, *An average case analysis of Floyd's algorithm to construct heaps*, Information and Control **61**, 1984, pp. 114-131.
- [Elayd] S.N. Elaydi, *An introduction to difference equations*, Springer, New York, 1996.

- [Emers] E.A.. Emerson, *Temporal and modal logic* in J. van Leeuwen, *Handbook of theoretical computer science, Volume B*, Elsevier Sc. Pub., Amsterdam u.a., 1990.
- [Falco] K.J. Falconer, *Fraktale Geometrie*, Spektrum Akad. Verl., Heidelberg u.a., 1993.
- [Felle] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications, Volume I*, 3rd ed., Wiley, New York u.a., 1968.
- [Fraen] A.S. Fraenkel, *Iterated floor function, algebraic numbers, discrete chaos, Beatty subsequences, semigroups*, Trans. Am. Math. Soc. **341**, 1994, pp. 639-664.
- [GesSt] I.M. Gessel, R.P. Stanley, *Algebraic enumeration*, in R. Graham, M. Grötschel, L. Lovász (eds.), *Handbook of combinatorics*, Elsevier Sc. Pub., Amsterdam u.a., 1995.
- [GrKnP] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading u.a., 1994.
- [Green] T.M. Green, *Recurrent sequences and Pascal's triangle*, Math. Mag. **41**, 1968, pp. 13-21.
- [KaoHo] T.-W. Kao, S.-J. Horng, *The power of list ranking on a reconfigurable array of processors with wider bus networks*, The Austral. Comp. Journ. **28**, 1996, pp. 138-148.
- [Kelly] J.L. Kelly, *General Topology*, D. van Nostrand Company, New Jersey u.a., 1955.
- [Kim95] C. Kimberling, *Numeration systems and fractal sequences*, Acta Arithmetica **73**, 1995, pp. 103-117.
- [Kim97] C. Kimberling, *Fractal sequences and interspersions*, Ars Combinatoria **45**, 1997, pp. 157-168.
- [KloNi] W. Klostermeyer, M. Niewiadomska-Bugaj, *On the number of weak-heaps*, J. of Combinatorics **22**, 1997, pp. 195-202.
- [Knopp] K. Knopp, *Theorie und Anwendung der unendliche Reihen*, 5. Aufl., Springer, Berlin u.a., 1964.
- [Knut3] D.E. Knuth, *The art of computer programming, Volume 3: Sorting and searching*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading u.a., 1998.
- [Komat] T. Komatsu, *On the characteristic word of the inhomogenous Beatty sequence*, Bull. Austral. Math. Soc. **51**, 1995, pp. 337-351.

- [Leigh] F.T. Leighton, *Introduction to parallel algorithms and architectures: arrays, trees, hypercubes*, Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo, 1992.
- [Mehlh] K. Mehlhorn, *Datenstrukturen und effiziente Algorithmen, Band 1: Sortieren und Suchen*, Teubner, Stuttgart, 1986.
- [Mesch] H. Meschkowski, *Differenzengleichungen*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1959.
- [Milne] L.M. Milne-Thomson, *The calculus of finite differences*, 2nd ed., Chelsea Pub. Co., New York, 1981.
- [Obers] W. Oberschelp, Mündliche Mitteilung zu einer noch nicht publizierten Arbeit, 2001.
- [OttWi] T. Ottmann, P. Widmayer, *Algorithmen und Datenstrukturen*, BI-Wiss. Verl., Mannheim u.a., 1990.
- [PeiRi] H.-O. Peitgen, P.H. Richter, *The beauty of fractals*, Springer, Berlin u.a., 1986.
- [PeiSa] H.-O. Peitgen, D. Saupe, *The science of fractal images*, Springer, New York u.a., 1988.
- [PeWiZ] M. Petkovšek, H.S. Wilf, D. Zeilberger, *A=B*, A K Peters, Wellesley, 1996.
- [SchSe] R. Schaffer, R. Sedgewick, *The analysis of heapsort*, J. of Algorithms **15**, 1993, pp. 76-100.
- [Schoe] U. Schöning, *Logik für Informatiker*, 3. Aufl., BI-Wiss. Verl., Mannheim u.a., 1992.
- [Sloon] N.J.A. Sloane (njas@research.att.com), *On-line encyclopedia of integer sequences*, 31.05.2001.
(<http://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html>)
- [SloPl] N.J.A. Sloane, S. Plouffe, *The encyclopedia of integer sequences*, Academic Press, San Diego u.a., 1995.
- [Spieg] M.R. Spiegel, *Endliche Differenzen und Differenzengleichungen*, McGraw-Hill (Schaum's Outline), Hamburg u.a., 1982.
- [Thoma] W. Thomas, *Automata on infinite objects* in J. van Leeuwen, *Handbook of theoretical computer science, Volume B*, Elsevier Sc. Pub., Amsterdam u.a., 1990.

- [Wilf] H.S. Wilf, *generatingfunctionology*, 2nd ed., Academic Press, Boston u.a., 1994.

Index

Symbole

A_n	14, 15, 190
H_n	154
$\hat{H}_n$	6, 3, 153
L_n	123
Q_n	25
$Q_n^{(1,2)}$	167
R_n	123
c_n	14, 14, 28
Δc_n	27
$e_{n,k}$	212ff., 226ff.
$\bar{e}_{n,k}$	162
$\hat{e}_{n,k}$	162
$g_n^{(k)}$	219
h_n	221
α	14, 14
$\bar{\alpha}$	17
α^{-1}	24
β	14, 14
δ	27
ζ	51, 69
ζ^k	50
$[\zeta_k, \dots, \zeta_1]$	50, 69
λ	37ff.
ρ	37ff.
ξ	51, 69
$\#_0(s)$	73
0_s	71
1_s	71
$\mathcal{R}$	144
φ_T	170
$P(x)$	89

$P(x, y)$	231
Ψ	136
$(\dots)^\omega$	22, 44
$<_1$	171
$<_2$	171
$B_M((f_i))$	226
$[h(0), \dots, h(2^k - 1)]$	54
I_s	105
M_α	23
$period[\dots]$	46
$\overleftarrow{T}$	171
$T_k^{(n)}$	162
T^Q	167
T_s	53, 133

Worte

- Abbildung Ψ **136**
- Abschätzung
 - Summen-Produkt- **92**
 - von Aufstiegsfunktionen . **79,83**
- Abstiegsfunktion **14**
 - periodische **44**
 - stufentreue **44**
- Ähnlichkeit **174**
 - strukturelle **175**
- Aufstiegsfunktion **38**
- ausgeartet **22**
 - nicht **22**
- Baum
 - δ - **34**
 - Nachfahren- **181**
 - Rekursions- **160**
 - Sohn- **181**
- Basislabel **234**
- Baumrekursion **15**
- Berührungspunkt **89, 100**
 - δ - **101**
 - Irreduziblen- **195**
- Berührungspunkt-Intervall **105**
- Binomialkoeffizienten . **20, 28f.**, **215**
- Code
 - 0-1- **17**
- Darstellungs-Exponenten ... **212ff.**, **226ff.**
- δ -Baum **34**
- δ -Berührungspunkt **101**
- Differenzengleichung
 - bei Maple **9**
 - lineare **7, 206, 221**
- Doppelpfad **197**
- Doppelsprungstelle **192**
- Doppelsprungstellenweg **197**
- Einwurzel-Struktur **194**
- Exponenten
 - Darstellungs- **212, 226**
 - fair **44**
 - Fibonaccizahlen **218**
 - Folge
 - Heap- **3, 6**
 - Quotienten- **25**
 - Funktion
 - Abstiegs- **14**
 - Aufstiegs- **38**
 - Rechts- **37**
 - Links- **37**
 - fractal sequences **178**
 - Heapfolge **3, 6**
 - Heapfolgen-Formel **160**
 - Heapstruktur **2**
 - Hebungsregel **64**
 - Helixrekursion **218**
 - Hypercube-Ordnung **54**
 - implizite Rekursion **96**
 - Irreduziblen-Berührungspunkt **195**
 - Irreduzibles **192**
 - Kimberling **178**
 - Knuth **159**
 - kommutative Rekursion **206ff.**
 - Konstruktion
 - eines δ -Berührp. **103**
 - rekursive **40**
 - lineare Differenzengleichung . **7, 206, 221**
 - Linksfunktion **37**
 - Linksweg **121**
 - alter/neuer **123**
 - lokal-rekursive Strukturersetzung **159**
 - M-Pfad **197**
 - Nachfahrenbaum **181**
 - Netzrekursion **207ff.**
 - teilerfremde **210, 228ff.**
 - nicht ausgeartet **22**

- normiert **20**
- 0-1-Code **17**
 - von Teilbäumen **149**
- Ordnung
 - Hypercube- **54**
 - Stufen- **49ff.**
- Ordnungsisomorphie **137**
- periodisch **44**
- Pfad
 - Doppel- **197**, 228
 - M- **197**, 228
- Prozeß
 - rekursiver 158
- Pseudoinverse **24**
 - periodischer Abstiegsf. **70ff.**
 - stufentreuer Abstiegsf. **70ff.**
- Quotientenfolge **25**
- Quotientenfolgen-Rekursion
 - bei Baumrek. **27**
 - bei allg. Rek. **191**
- Randwertfolge **14**
 - spezielle **28f.**
- Rechtsfunktion **37**
- Rechtsweg **121**
- Reihenfolge 121, **166**
- Rekursion
 - Helix- **218**
 - implizite 96
 - kommutative **206ff.**
 - mit unregelmäßigem Abstieg **190**
 - Netz- **207ff.**
 - Quotientenfolgen- **27**
- Rekursionsbaum **160**
- Rekursionsgraph **33**, **35**, **193**
 - bei teilerfr. Netzrek. **210**
 - bei Helixrek. **218f.**
- rekursive Konstruktion **40**
- rekursiver Prozeß 158
- schwach wachsend **14**
- Selbstähnlichkeit 173, **234**
 - von Folgen **174**
 - ordnungsisomorphe 176
 - strukturelle **175**
- Senkungsregel **66**
- Sohnbaum **181**
- Sprungstelle **15**
 - Doppel- **192**
- Stelle(nfunktion) **51**, **69**
- Struktur
 - Einwurzel- **194**
- strukturelle Ähnlichkeit **175**
- strukturelle Selbstähnlichkeit .. **175**
- Strukturersetzung
 - lokal-rekursive 159
- Stufenordnung **49ff.**
- stufentreu **44**
- Teilnetz **234**
- Umsortierung **167ff.**
- unendlicher Weg **43**, **196**
- unfair **44**
- wachsend
 - schwach **14**
- Weg
 - Doppelsprungstellen- **197**
 - Links- **123**
 - Rechts- **123**
 - unendlicher **43**, **196**
- Werte 49ff., **166**
- Wurzel **5**
- Zusammenhangskomponente ... **194**

Zählstrukturen

Beispiel

2.1	15
2.2	17
2.3	20
2.4	23
2.5	24
2.6	27
2.7	36
2.8	40
2.9	46
3.1	50
3.2	71
3.3	71
3.4	77
3.5	80
4.1	129
4.2	131
4.3	134
4.4	136
4.5	137
4.6	139
5.1	167
5.2	175
5.3	176
6.1	190
6.2	195
6.3	197
6.4	201
6.5	204
6.6	206
6.7	209
6.8	210
6.9	211
6.10	214
6.11	217
6.12	220
6.13	222

Definition

2.1	14
-----	----

2.2	14
2.3	15
2.4	17
2.5	20
2.6	22
2.7	24
2.8	25
2.9	27
2.10	34
2.11	37
2.12	43
2.13	44
3.1	54
3.2	101
4.1	136
4.2	137
5.1	170
5.2	174
5.3	175
5.4	181
6.1	190
6.2	192
6.3	194
6.4	197
6.5	206

Folgerung

2.1	18
2.2	39
3.1	51
3.2	117
5.1	178
5.2	183

Lemma

2.1	18
2.2	19
2.3	20
2.4	22
2.5	24
2.6	38
2.7	44

3.1	51	3.7	83
3.2	53	3.8	89
3.3	69	3.9	91
3.4	78	3.10	94
3.5	79	3.11	100
3.6	88	3.12	102
3.7	89	3.13	112
3.8	89	4.1	123
4.1	143	4.2	130
4.2	144	4.3	147
4.3	146	4.4	148
4.4	149	5.1	160
5.1	160	5.2	171
5.2	163	5.3	182
5.3	164	5.4	184
5.4	176	6.1	191
6.1	193	6.2	207
6.2	195	6.3	221
6.3	198	6.4	232
6.4	199		
6.5	202		
6.6	204		
6.7	204		
6.8	210		
6.9	212		
6.10	215		
6.11	226		
6.12	228		
6.13	228		
6.14	235		

Satz

2.1	23
2.2	27
2.3	28
2.4	40
3.1	57
3.2	59
3.3	72
3.4	78
3.5	79
3.6	81

Lebenslauf

persönliche Daten:

Name: Ferdinand Wolfgang Bomble
Geburtsdatum: 30.05.69
Geburtsort: Aachen
Eltern: Wilhelm Bomble und Elisabeth Bomble, geb. Hoenen
Familienstand: ledig

Schulbildung:

8/75-6/79 Kath. Grundschule Reumondstraße in Aachen
8/79-6/88 Couven-Gymnasium in Aachen
16.06.88 Allgemeine Hochschulreife (Abitur)

Zivildienst:

10/88-05/90 Altenheim Marien-Linde in Aachen

Studium:

10/90-11/97 Studium der Mathematik mit Nebenfach Informatik
Vertiefungsfach Kombinatorik (Diskrete Mathematik)
7.4.93 Vordiplom
4.11.97 Diplomarbeit „Shift-invariante Operatoren
und Erzeugende Funktionen“
und Examen zum Diplom-Mathematiker

Promotionsstudium:

4/98-3/01 Promotionsstudium als Stipendiat nach dem
„Graduiertenförderungsgesetz Nordrhein-Westfalen“
am Lehrstuhl für Informatik VII der RWTH Aachen
4/01-1/02 Fortsetzung und Abschluß des Promotionsstudiums

Berufliche Tätigkeit:

4/93-11/97 Anstellungen als studentische Hilfskraft am Lehrstuhl
für angewandte Mathematik insbesondere Informatik
und am Lehrstuhl für Mathematik D
11/97-12/01 Anstellungen als wissenschaftliche Hilfskraft am Lehr-
stuhl für angewandte Mathematik insbesondere
Informatik und am Lehrstuhl für Informatik VII