Unipotente Charaktere und Zerlegungszahlen der endlichen Chevalleygruppen vom Typ F_4

Von der Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Naturwissenschaften genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Mathematiker

Christoph David Köhler

aus Toulouse/Frankreich

Berichter: Universitätsprofessor Dr. Gerhard Hiß

Universitätsprofessor Dr. Gunter Malle

Tag der mündlichen Prüfung: 8.2.2006

Diese Dissertation ist auf den Internetseiten der Hochschulbibliothek online verfügbar.

Danksagungen

An erster Stelle gilt mein Dank meinem Doktorvater Gerhard Hiß, der mir dieses interessante und vielseitige Thema vorgeschlagen hat. Er hat mir große Freiheiten bei der Bearbeitung gelassen, hatte aber immer ein offenes Ohr für Fragen und war mir durch seine Unterstützung und Betreuung eine große Hilfe.

Bei Gunter Malle möchte ich mich für das Interesse an dieser Arbeit und die Bereitschaft, das Korreferat zu übernehmen, bedanken.

Danken möchte ich auch Frank Himstedt, mit dem ich zahlreiche Gespräche und Diskussionen führen konnte. Er war zu jeder Zeit bereit, sich meine Fragen anzuhören und hat durch viele konstruktive Bemerkungen sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Ohne Frank Lübeck gäbe es diese Arbeit nicht. Er hatte immer Zeit, mir meine dummen Fragen zu beantworten und mir Ideen und weitere Tipps zu geben. Sein profundes Wissen über die endlichen Gruppen vom Lie-Typ war mir eine unerschöpfliche Hilfe.

Mein Dank gilt Thomas Breuer, der mir viele hilfreiche Tipps geben konnte und große Teile der Arbeit sorgfältig Korrektur gelesen hat.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die Förderung durch ein Doktorandenstipendium im Rahmen der Graduiertenkollegs „Analyse und Konstruktion in der Mathematik“ und „Hierarchie und Symmetrie in mathematischen Modellen“.

Ein Teil dieser Arbeit ist entstanden, während ich als Graduate Visiting Student das akademische Jahr 2000/2001 an der University of Chicago verbringen durfte. In den Gesprächen mit und den Vorlesungen von Jonathan Alperin und George Glauberman habe ich vieles über die Darstellungstheorie und Gruppentheorie gelernt, das als Hintergrundwissen mit in diese Arbeit eingeflossen ist. Ihnen beiden sei dafür herzlich gedankt. Ausdrücklich bedanken möchte ich mich auch bei Volker Enß, dem Sprecher des Graduiertenkollegs „Analyse und Konstruktion in der Mathematik“, ohne dessen tatkräftige Unterstützung dieser Aufenthalt wohl nicht möglich gewesen wäre.

Schließlich möchte ich mich bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls D für Mathematik bedanken. Sie haben durch ihre herzliche und freundschaftliche Art sehr dazu beigetragen, dass Arbeiten Spaß machte und dadurch sehr zum glücklichen Ende dieser Arbeit beigetragen. Hierbei sind besonders Max Neunhöffer und Felix Noeske nicht nur wegen der zahlreichen gemeinsamen Arbeitsabende und ihrem Verständnis, wenn ich mich mal wieder „verklickt hatte“, zu erwähnen.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis **3**

Tabellenverzeichnis **5**

Einleitung **11**
Gebiet der Arbeit 11
Über diese Arbeit 13
Inhalt der Arbeit 14

I Rechnen in reduktiven algebraischen Gruppen **17**
I.1 Grundlagen reduktiver algebraischer Gruppen 18
I.2 Eine Präsentation 22
I.3 Algorithmen zum Rechnen im unipotenten Radikal 24
I.4 Die Bruhat-Zerlegung und parabolische Untergruppen 28
I.5 Ein Algorithmus zum Rechnen in reduktiven Gruppen 31
I.6 Rechnen mit parametrisierten Elementen 40
I.7 Anmerkungen zum generischen Rechnen 48
I.8 Anwendungen parametrisierter Elemente 53

II Chevalleygruppen vom Typ $\mathbf{F}_4$ **59**
II.1 Das Wurzelsystem und die Weylgruppe vom Typ $\mathbf{F}_4$ 60
II.2 Das Wurzeldatum 61
II.3 Die Chevalleygruppen vom Typ $\mathbf{F}_4$ 63

III Konjugiertenklassen **67**
III.1 Die Lang-Steinberg-Abbildung 67
III.2 Konjugiertenklassen von Leviuntergruppen 69
III.3 Halbeinfache Klassen parabolischer Untergruppen 71
III.4 Halbeinfache Klassen in $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ 76
III.5 Unipotente Klassen 85
III.6 Gemischte Klassen 92
III.7 Fusionen und Induktion 94
III.8 Ein Beispiel 104

IV Gel′fand-Graev-Charaktere **107**
IV.1 Gel′fand-Graev-Charaktere . . . 108
IV.2 Modifizierte Gel′fand-Graev-Charaktere . . . 109
IV.3 Berechnung modifizierter Gel′fand-Graev-Charaktere . . . 111

V Die unipotenten Charaktere von Chevalleygruppen vom Typ F_4 **117**
V.1 Harish-Chandra-Theorie . . . 118
V.2 Die Lusztig-Induktion . . . 120
V.3 Die Parametrisierung der Charaktere . . . 124
V.4 Die unipotenten Charaktere von $F_4(q)$ . . . 128
V.5 Überblick zur Berechnung der unipotenten Charaktere . . . 130
V.6 Die kuspidalen unipotenten Fastcharaktere . . . 133
V.7 Die Fastcharaktere in der Serie vom Typ B_2 . . . 136
V.8 Die Charakterformel von Ree . . . 140
V.9 Berechnung der fehlenden Charakterwerte . . . 143

VI Zerlegungszahlen unipotenter Blöcke von $F_4(q)$ **149**
VI.1 Grundlagen der modularen Darstellungstheorie . . . 150
VI.2 Unipotente Blöcke und Basissysteme von $F_4(q)$ . . . 154
VI.3 Die Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrizen . . . 159
VI.4 Modulare Harish-Chandra-Theorie . . . 160
VI.5 Zerlegungsmatrizen von $F_4(q)$ . . . 164

A Tabellen **177**

Literaturverzeichnis **327**

Tabellenverzeichnis

T.II.1 Vorzeichenwahl auf den extraspeziellen Paaren . . . 63
T.II.2 Kreisteilungspolynome . . . 65

T.V.1 Die unipotenten Charaktere von L_i . . . 137
T.V.2 halbeinfacher Anteil der Klassentypen, auf denen ξ_i ungleich Null sein könnte 144

T.A.1 Das Wurzelsystem . . . 177
T.A.2 Die Kowurzeln . . . 178
T.A.3 Die Konjugiertenklassen der Weylgruppe vom Typ $\mathbf{F}_4$ . . . 179
T.A.4 Die Kommutatorkoeffizienten, Teil 1 . . . 180
T.A.5 Die Kommutatorkoeffizienten, Teil 2 . . . 180
T.A.6 Die Kommutatorkoeffizienten, Teil 3 . . . 181
T.A.7 Die maximalen Tori von $F_4(q)$ . . . 181
T.A.8 Leviuntergruppen vom Typ C_3, B_3 und C_2 . . . 182
T.A.9 Klassentypen halbeinfacher Elemente in $F_4(q)$, Teil 1 , q ungerade . . . 183
T.A.10 Klassentypen halbeinfacher Elemente in $F_4(q)$, Teil 2 , q ungerade . . . 184
T.A.11 Die unipotenten Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, $2, 3 \nmid q$ . . . 185
T.A.12 Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 1 . . . 186
T.A.13 Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 2 . . . 187
T.A.14 Die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 3 . . . 188
T.A.15 Die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 4 . . . 189
T.A.16 Die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 5 . . . 190
T.A.17 Die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 6 . . . 191
T.A.18 Die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 7 . . . 192
T.A.19 Die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 8 . . . 193
T.A.20 Die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 9 . . . 194
T.A.21 Die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 10 . . . 195
T.A.22 Die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 11 . . . 196
T.A.23 Die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 12 . . . 197
T.A.24 Die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 13 . . . 198
T.A.25 Einige halbeinfache Klassentypen von L_8 . . . 199
T.A.26 Einige gemischte Klassentypen von L_8 . . . 199
T.A.27 Einige halbeinfache Klassentypen von L_6 . . . 200
T.A.28 Einige gemischte Klassentypen von L_6 . . . 201

T.A.29 Einige halbeinfache Klassentypen von P_8 . . . 202
T.A.30 Einige gemischte Klassentypen von P_8, Teil 1 . . . 203
T.A.31 Einige gemischte Klassentypen von P_8,Teil 2 . . . 204
T.A.32 Einige gemischte Klassentypen von P_8,Teil 3 . . . 205
T.A.33 Einige gemischte Klassentypen von P_8,Teil 4 . . . 206
T.A.34 Unipotente Senkrechtfunktionen von L_8 für q ungerade . . . 207
T.A.35 Unipotente Senkrechtfunktionen von L_8 für q ungerade . . . 207
T.A.36 Werte Harish-Chandra-induzierter Klassenfunktionen, Teil 1 . . . 208
T.A.37 Werte Harish-Chandra-induzierter Klassenfunktionen, Teil 2 . . . 209
T.A.38 Werte Harish-Chandra-induzierter Klassenfunktionen, Teil 3 . . . 210
T.A.39 Gel′fand-Graev-Charaktere, Teil 1 . . . 211
T.A.40 Gel′fand-Graev-Charaktere, Teil 2 . . . 212
T.A.41 Gel′fand-Graev-Charaktere, Teil 3 . . . 213
T.A.42 Gel′fand-Graev-Charaktere, Teil 4 . . . 214
T.A.43 Gel′fand-Graev-Charaktere, Teil 5 . . . 215
T.A.44 Werte projektiver Charaktere, Teil 1 . . . 216
T.A.45 Werte projektiver Charaktere, Teil 2 . . . 217
T.A.46 Werte projektiver Charaktere, Teil 3 . . . 218
T.A.47 Werte projektiver Charaktere, Teil 4 . . . 219
T.A.48 Werte projektiver Charaktere, Teil 5 . . . 220
T.A.49 Werte projektiver Charaktere, Teil 6 . . . 221
T.A.50 Werte projektiver Charaktere, Teil 7 . . . 222
T.A.51 Werte projektiver Charaktere, Teil 8 . . . 223
T.A.52 Werte projektiver Charaktere, Teil 9 . . . 224
T.A.53 Werte projektiver Charaktere, Teil 10 . . . 225
T.A.54 Werte projektiver Charaktere, Teil 11 . . . 226
T.A.55 Werte projektiver Charaktere, Teil 12 . . . 227
T.A.56 Werte projektiver Charaktere, Teil 13 . . . 228
T.A.57 Werte projektiver Charaktere, Teil 14 . . . 229
T.A.58 Werte projektiver Charaktere, Teil 15 . . . 230
T.A.59 Werte projektiver Charaktere, Teil 16 . . . 231
T.A.60 Werte projektiver Charaktere, Teil 17 . . . 232
T.A.61 Werte projektiver Charaktere, Teil 18 . . . 233
T.A.62 Werte projektiver Charaktere, Teil 19 . . . 234
T.A.63 Werte projektiver Charaktere, Teil 20 . . . 235
T.A.64 Werte projektiver Charaktere, Teil 21 . . . 236
T.A.65 Werte projektiver Charaktere, Teil 22 . . . 237
T.A.66 Werte projektiver Charaktere, Teil 23 . . . 238
T.A.67 Werte projektiver Charaktere, Teil 24 . . . 239
T.A.68 Werte projektiver Charaktere, Teil 25 . . . 240
T.A.69 Werte projektiver Charaktere, Teil 26 . . . 241
T.A.70 Werte projektiver Charaktere, Teil 27 . . . 242
T.A.71 Werte projektiver Charaktere, Teil 28 . . . 243

T.A.72 Werte projektiver Charaktere, Teil 29 . . . 244
T.A.73 Die unipotenten Charaktere von $F_4(q)$ . . . 245
T.A.74 Die kuspidalen unipotenten Fastcharaktere von $F_4(q)$ . . . 246
T.A.75 Die Charaktertafel der Hecke-Algebra $\mathcal{H}(F_4(q), P_8)$ . . . 247
T.A.76 Berechnete Charakterwerte . . . 247
T.A.77 Die Schnittzahlen zur Anwendung der Ree-Formel . . . 248
T.A.78 Die Werte der Senkrechtfunktionen δ_i von L_i . . . 249
T.A.79 Die Werte der ξ_i, Teil 1 . . . 250
T.A.80 Die Werte der ξ_i, Teil 2 . . . 251
T.A.81 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 1 . . . 252
T.A.82 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 2 . . . 253
T.A.83 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 3 . . . 254
T.A.84 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 4 . . . 255
T.A.85 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 5 . . . 256
T.A.86 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 6 . . . 257
T.A.87 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 7 . . . 258
T.A.88 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 8 . . . 259
T.A.89 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 9 . . . 260
T.A.90 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 10 . . . 261
T.A.91 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 11 . . . 262
T.A.92 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 12 . . . 263
T.A.93 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 13 . . . 264
T.A.94 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 14 . . . 265
T.A.95 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 15 . . . 266
T.A.96 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 16 . . . 267
T.A.97 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 17 . . . 268
T.A.98 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 18 . . . 269
T.A.99 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 19 . . . 270
T.A.100 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 20 . . . 271
T.A.101 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 21 . . . 272
T.A.102 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 22 . . . 273
T.A.103 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 23 . . . 274
T.A.104 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 24 . . . 275
T.A.105 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 25 . . . 276
T.A.106 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 26 . . . 277
T.A.107 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 27 . . . 278
T.A.108 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 28 . . . 279
T.A.109 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 29 . . . 280
T.A.110 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 30 . . . 281
T.A.111 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 31 . . . 282
T.A.112 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 32 . . . 283
T.A.113 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 33 . . . 284
T.A.114 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 34 . . . 285

T.A.115 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 35 286
T.A.116 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 36 287
T.A.117 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 37 288
T.A.118 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 38 289
T.A.119 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 39 290
T.A.120 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 40 291
T.A.121 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 41 292
T.A.122 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 42 293
T.A.123 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 43 294
T.A.124 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 44 295
T.A.125 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 45 296
T.A.126 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 46 297
T.A.127 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 47 298
T.A.128 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 48 299
T.A.129 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 49 300
T.A.130 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 50 301
T.A.131 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 51 302
T.A.132 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 52 303
T.A.133 Die Parametrisierung der halbeinfachen $t \in G_l^*$. 304
T.A.134 Die unipotenten Blöcke von $F_4(q)$, Teil 1 305
T.A.135 Die unipotenten Blöcke von $F_4(q)$, Teil 2 306
T.A.136 Basisrelationen für B_1 im Fall $e = 3$ 307
T.A.137 Basisrelationen für B_1 im Fall $e = 4$ 307
T.A.138 Basisrelationen für B_1 im Fall $e = 6$ 307
T.A.139 Basisrelationen für B_1 im Fall $e = 8$ 307
T.A.140 Basisrelationen für B_1 im Fall $e = 12$ 308
T.A.141 Basisrelationen für B_2 im Fall $e = 1$ 308
T.A.142 Basisrelationen für B_2 im Fall $e = 2$ 308
T.A.143 Basisrelationen für B_2 im Fall $e = 4$ 308
T.A.144 Basisrelationen für B_3 im Fall $e = 4$ 308
T.A.145 Basisrelationen für B_1 im Fall $e = 1$ 309
T.A.146 Basisrelationen für B_1 im Fall $e = 2$ 310
T.A.147 Skalarprodukte projektiver Charaktere mit den unipotenten Charakteren . . . 311
T.A.148 Harish-Chandra-induzierte Gelfand-Graev-Charaktere 312
T.A.149 Die kuspidalen Brauercharaktere der echten Leviuntergruppen von $F_4(q)$ . . 313
T.A.150 Modulare Harish-Chandra-Serien von $F_4(q)$, Teil 1 314
T.A.151 Modulare Harish-Chandra-Serien von $F_4(q)$, Teil 2 315
T.A.152 Zerlegungszahlen für zweiten unipotenten Block für $2, 3 \neq l|q-1$ 316
T.A.153 Zerlegungszahlen für zweiten unipotenten Block für $2, 3 \neq l|q+1$ 316
T.A.154 Zerlegungszahlen für den Hauptblock für $2, 3 \neq l|q-1$, Teil 1 317
T.A.155 Zerlegungszahlen für den Hauptblock für $2, 3 \neq l|q-1$, Teil 2 318
T.A.156 Zerlegungszahlen für den Hauptblock für $2, 3 \neq l|q-1$, Teil 3 319
T.A.157 Zerlegungszahlen für den Hauptblock für $2, 3 \neq l|q+1$, Teil 1 320

T.A.158 Zerlegungszahlen für den Hauptblock für 2, $3 \neq l|q+1$, Teil 2 321
T.A.159 Zerlegungszahlen für den Hauptblock für 2, $3 \neq l|q+1$, Teil 3 322
T.A.160 Zerlegungszahlen für den Hauptblock für $3 \neq l|q^2+q+1$ 323
T.A.161 Zerlegungszahlen für den Hauptblock für 2, $3 \neq l|q^2+1$ 324
T.A.162 Zerlegungszahlen für den Hauptblock für $3 \neq l|q^2-q+1$ 325

Einleitung

Gebiet der Arbeit

Die Darstellungstheorie algebraischer Strukturen befasst sich mit dem Problem, abstrakt gegebene, das heißt durch ihre Eigenschaften definierte, algebraische Strukturen wie etwa endliche Gruppen mit Hilfe konkreter Realisierungen zu untersuchen. Im Fall der endlichen Gruppen bedeutet konkrete Realisierung etwa eine mit der zu untersuchenden Gruppe verträglichen Abbildung von der Gruppe in eine Matrixalgebra. Für eine endliche Gruppe G ist eine solche auch Darstellung genannte Realisierung ein Gruppenhomomorphismus

$$D : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K)$$

von der Gruppe G in die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über einem Körper K. Die Zahl n heißt die Dimension oder der Grad der Darstellung. Diese Darstellungen einer endlichen Gruppe sind nicht nur als solche interessant, sie erlauben auch Rückschlüsse auf die Struktur der zugrunde liegenden Gruppe. Genau wie Darstellungen lassen sich alle endlichen Gruppen aus atomaren Bausteinen, den einfachen Gruppen, konstruieren, und die Baupläne für diese Konstruktionen lassen sich mit Hilfe der Darstellungstheorie untersuchen. Wichtig sind insbesondere die Darstellungen der einfachen Gruppen. Daher ist eine wesentliche Aufgabe der Darstellungstheorie die Untersuchung gerade dieser Darstellungen. Dabei enthüllt vor allem das Zusammenspiel der Darstellungen bezüglich verschiedener Körper K viele Informationen über die Gruppe G. Bevor wir allerdings Darstellungen bezüglich verschiedener Körper miteinander vergleichen, müssen wir versuchen, diese Darstellungen für einen festen gegebenen Körper zu verstehen.

Ein Grundproblem der Darstellungstheorie endlicher Gruppen ist daher die Klassifikation aller Darstellungen einer gegebenen endlichen einfachen Gruppe G über einem festen Körper K. Diese erfolgt in der Regel in zwei Schritten.

- Zunächst müssen die sogenannten einfachen Darstellungen klassifiziert werden. Dies sind die atomaren Bausteine, aus denen sich eine beliebige Darstellung von G zusammensetzt.
- Als zweites müssen die Konstruktionsprinzipien verstanden werden, mit deren Hilfe sich beliebige Darstellungen aus den einfachen Darstellungen zusammensetzen lassen.

Wie schwierig diese beiden Schritte jeweils sind, hängt entscheidend von der Wahl des Körpers K und von der Gruppe G ab. Wir wollen uns in dieser Arbeit auf den ersten Schritt konzentrieren.

Ist $D : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K)$ eine Darstellung der endlichen Gruppe G über dem Körper K, so sind viele Eigenschaften dieser Darstellung bereits durch die Spurabbildung

$$\begin{array}{rccc} \chi_D : & G & \longrightarrow & K \\ & g & \longmapsto & \mathrm{Spur}(D(g)) \end{array}$$

bestimmt. Diese Abbildung heißt der Charakter zur Darstellung D. Wir nennen χ_D irreduzibel, wenn D eine einfache Darstellung ist. Da die Spur von $D(g)$ invariant unter Konjugation ist, ist χ_D konstant auf den Konjugiertenklassen der Gruppe. Ein Charakter kann also als Klassenfunktion von G aufgefasst werden.

Ist K der Körper der komplexen Zahlen, so stellt sich die Situation besonders einfach dar. In diesem Fall werden die Darstellungen von G bis auf einen geeigneten Isomorphiebegriff durch ihre Charaktere charakterisiert. Die irreduziblen Charaktere bilden bezüglich eines geeigneten Skalarproduktes eine Orthonormalbasis des Raumes der Klassenfunktionen auf G und wir erhalten durch die Klassifikation der irreduziblen Charaktere eine vollständige Klassifikation der Darstellungen von G.

Was lässt sich nun in diesem Fall über die irreduziblen Charaktere von G sagen? Die Anzahl der Konjugiertenklassen von G stimmt mit der Anzahl der irreduziblen Charaktere von G überein. Dadurch können wir die Werte der irreduziblen Charaktere von G übersichtlich in einer quadratischen Matrix anordnen, deren Zeilen durch die irreduziblen Charaktere und deren Spalten durch die Konjugiertenklassen von G indiziert sind. Diese Matrix heißt Charaktertafel der Gruppe G und erfüllt eine Reihe kombinatorischer beziehungsweise zahlentheoretischer Bedingungen, die in vielen Fällen teilweise die Berechnung der Charaktertafel ohne explizite Konstruktion der Darstellungen erlauben.

Für viele endliche einfache Gruppen sind die Charaktertafeln bekannt, im Atlas der endlichen einfachen Gruppen [CCN+85] in schriftlicher Form veröffentlicht und durch das Computeralgebrasystem **GAP** [S+97] in elektronischer Form verfügbar. Hier sind besonders die Arbeiten von Frobenius und Schur für die alternierenden Gruppen und vieler verschiedener Personen für die sporadischen Gruppen zu erwähnen. Auch für die einfachen Gruppen vom Lie-Typ wurden die irreduziblen Charaktere durch Arbeiten von Deligne und vor allem Lusztig klassifiziert. Allerdings sind die Charaktertafeln dieser Gruppen bisher nicht in allen Fällen vollständig bekannt. Lusztig gibt einen Algorithmus an, der es im Prinzip ermöglicht, die Charakterwerte der irreduziblen Charaktere zu berechnen, allerdings sind einige in diesem Algorithmus auftretende Parameter noch nicht endgültig bestimmt.

Wenden wir uns nun der Darstellungstheorie über anderen Körpern zu. Ist die Charakteristik l des Körpers K kein Teiler der Gruppenordnung von G, so verhalten sich die Darstellungen von G über K im Wesentlichen wie im Fall des Körpers der komplexen Zahlen. Interessanter ist also der Fall, dass l die Gruppenordnung von G teilt. Richard Brauer hat gezeigt, dass man die Einschränkung eines Charakters einer Darstellung von G auf die l-regulären Elemente, das heißt, die Elemente, deren Ordnung nicht durch l teilbar ist, in den Körper der komplexen Zahlen liften

kann. Wir erhalten auf diese Weise zu einer Darstellung von G eine komplexwertige Funktion auf den l-regulären Konjugiertenklassen von G, die wir Brauercharakter der Darstellung nennen. Auch die Brauercharaktere setzen sich aus atomaren Bestandteilen, den irreduziblen Brauercharakteren zusammen und enthalten viele Informationen über die Darstellung, wenn sie diese auch nicht bis auf Äquivalenz eindeutig festlegen.

Es zeigt sich, dass die Einschränkung eines gewöhnlichen Charakters, das heißt eines Charakters einer Darstellung über den komplexen Zahlen, auf die l-regulären Klassen ein Brauercharakter ist, den wir somit als Linearkombination der irreduziblen Brauercharaktere schreiben können. Die Koeffizienten dieser Linearkombination werden Zerlegungszahlen genannt und liefern einen Zusammenhang zwischen der Darstellungstheorie von G über den komplexen Zahlen und über Körpern der Charakteristik l. Diese Zerlegungszahlen wurden für viele endliche einfache Gruppen bestimmt. Hier sind allerdings noch viele Fragen offen.

Über diese Arbeit

Diese Arbeit will einen Beitrag zur Darstellungstheorie der Gruppen vom Lie-Typ leisten. Wir konzentrieren uns hierbei auf die Gruppen $F_4(q)$ für Primzahlpotenzen q. Diese Gruppen bilden eine der unendlichen Serien von endlichen einfachen Gruppen vom Lie-Typ. Wir erhalten diese Gruppen beispielsweise durch eine in [Car72] angegebene Konstruktion als Gruppe von Automorphismen der exzeptionellen komplexen halbeinfachen Lie-Algebra vom Typ $\mathbf{F}_4$. Die gewöhnliche Charaktertafel von $F_4(2)$ ist explizit bekannt und in [CCN+85] veröffentlicht. Im Zentrum dieser Arbeit steht die Berechnung der Charakterwerte der sogenannten unipotenten Charaktere von $F_4(q)$ für $2, 3 \nmid q$. Die unipotenten Charaktere sind eine gewisse Teilmenge der gewöhnlichen irreduziblen Charaktere von $F_4(q)$, die bei der Klassifikation der Charaktere durch Lusztig eine ausgezeichnete Rolle spielen.

Für die Klassifikation der Charaktere erweist es sich als zweckmäßig, $F_4(q)$ als Fixpunktuntergruppe einer zusammenhängenden reduktiven algebraischen Gruppe vom Typ $\mathbf{F}_4$ über einem algebraisch abgeschlossen Körper unter einem geeigneten Frobeniusmorphismus aufzufassen. Wir wissen, dass die irreduziblen Charaktere eine Orthonormalbasis des Raumes der Klassenfunktionen von $F_4(q)$ bilden. Lusztig hat einen expliziten Basiswechsel auf eine neue Basis konstruiert, deren Elemente wir Fastcharaktere nennen. Diese Fastcharaktere spiegeln die Geometrie der zugrunde liegenden algebraischen Gruppe besser wider als die irreduziblen Charaktere und lassen sich mit Methoden der algebraischen Geometrie leichter untersuchen. In einer fundamentalen Arbeit haben Deligne und Lusztig einen großen Teil dieser Fastcharaktere mit Methoden der l-adischen Kohomologietheorie bestimmen können. Die unipotenten Charaktere sind genau die irreduziblen Charaktere, die sich als Linearkombinationen der unipotenten Fastcharaktere schreiben lassen.

Ein Ziel dieser Arbeit ist die explizite generische, das heißt für alle q mit $2, 3 \nmid q$ gleichzeitige Berechnung der Werte der noch fehlenden unipotenten Fastcharaktere für alle diese Gruppen $F_4(q)$. Wir konnten diese unipotenten Fastcharaktere, und somit mit Hilfe des explizit bekannten Basiswechsels, die unipotenten Charaktere von $F_4(q)$ mit $2, 3 \nmid q$ vollständig bestimmen.

Die Ergebnisse sind in Tabelle A.28 abgedruckt, liegen in elektronischer Form in einem für das Computeralgebrasystem **CHEVIE** [GHL+96] lesbaren Format vor und können von der Webseite [Kö05] heruntergeladen werden.

Ein weiteres Ziel der Arbeit betrifft die Zerlegungszahlen von $F_4(q)$. Es werden hier ausschließlich solche Darstellungen von $F_4(q)$ behandelt, bei denen die Charakteristik l des Körpers, über dem die Darstellungen betrachtet werden, kein Teiler von q ist. In diesem Fall sprechen wir von Darstellungen in nicht-definierender Charakteristik. Die Darstellungstheorie der endlichen Gruppen vom Lie-Typ unterscheidet sich in definierender Charakteristik, das heißt, wenn l ein Teiler von q ist, so fundamental von der Darstellungstheorie in nicht-definierender Charakteristik, dass diese Einschränkung berechtigt erscheint. Aus eher technischen Gründen wollen wir auch $l \neq 2, 3$ fordern. Wir beschränken uns weiter auf die Zerlegungszahlen der unipotenten Blöcke. Dies sind Blöcke, die unipotente Charaktere enthalten.

Die Zerlegungszahlen lassen sich nun generisch beschreiben. Sie hängen im Wesentlichen von der multiplikativen Ordnung e von q modulo l ab. Bei den Gruppen $F_4(q)$ müssen wir die Fälle $e = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$ betrachten. Die Fälle $e = 1, 8, 12$ wurden schon in [Hiß90] und [HL98] abgehandelt. Für die Fälle $e = 2, 3, 4, 6$ konnten wir viele, aber nicht alle Zerlegungszahlen der unipotenten Blöcke bestimmen. Diese sind in Lemma VI.(5.4) angegeben. Für die noch fehlenden Zerlegungszahlen geben wir obere und untere Schranken an. Mit Hilfe der berechneten Zerlegungszahlen können wir einige offene Vermutungen für die Gruppen $F_4(q)$ nachweisen. Dazu zählt die obere Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrizen für die unipotenten Blöcke von $F_4(q)$.

Inhalt der Arbeit

Im Verlauf dieser Arbeit müssen wir Konjugiertenklassen von Untergruppen von $F_4(q)$ und deren Fusionen zwischen den Konjugiertenklassen berechnen. Zu diesem Zweck müssen wir explizite Rechnungen mit Elementen in $F_4(q)$ durchführen. Dies ist schwierig, da wir es mit unendlich vielen Gruppen gleichzeitig zu tun haben. Wir benötigen daher eine Möglichkeit, in all diesen Gruppen gleichzeitig zu rechnen. Dazu wollen wir $F_4(q)$ als Fixpunktuntergruppe unter einem geeigneten Frobeniusmorphismus einer zusammenhängenden reduktiven linearen algebraischen Gruppe $\mathbf{G}$ vom Typ $\mathbf{F}_4$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k betrachten. Wir benutzen eine von Springer angegebene Präsentation dieser Gruppen, die es uns erlaubt, Algorithmen zu formulieren, mit deren Hilfe wir generische Berechnungen innerhalb der Gruppen $F_4(q)$ durchführen können. Dabei bedeutet "generisch", dass wir die Berechnungen für alle Primzahlpotenzen q gleichzeitig durchführen wollen.

Im ersten Kapitel beschreiben wir diese Algorithmen und deren Implementation, die in Zusammenarbeit mit Frank Himstedt erfolgt ist. Diese Algorithmen ermöglichen zwar generisches Rechnen, sie reduzieren die entsprechenden Fragestellungen auf das Lösen von polynomialen Gleichungssystemen über multivariaten Polynomringen, können diese Gleichungssysteme aber nicht lösen. Wir verwenden einige Methoden der kommutativen Algebra, um diese Gleichungssysteme zu vereinfachen. Dazu gehören insbesondere Gröbnerbasen-Techniken. Wir erläutern,

wie wir mit Hilfe dieser Methoden Konjugiertheitstests und Fusionen berechnen können, und geben noch einige weitere Anwendungen der Algorithmen an, die wir später benötigen.

Das zweite Kapitel enthält eine Beschreibung der Chevalleygruppen $F_4(q)$ für eine Primzahlpotenz q. Dazu geben wir das Wurzelsystem, das Wurzeldatum und die für die Präsentation aus Kapitel 1 notwendigen Wahlen der Strukturkonstanten an.

Im dritten Kapitel wird die Jordan-Zerlegung der Elemente von $F_4(q)$ benutzt, um die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$ und einigen Untergruppen zu beschreiben. Dabei verallgemeinern wir die Parametrisierung der halbeinfachen Konjugiertenklassen, die in [Car78] gegeben wurde, auf den Fall parabolischer Untergruppen. Mit den in Kapitel 1 beschriebenen Methoden können wir auch die unipotenten Konjugiertenklassen beschreiben und erhalten insgesamt eine Parametrisierung aller Konjugiertenklassen der parabolischen Untergruppen und deren Leviuntergruppen. Wir beschreiben die Fusionen dieser Konjugiertenklassen und können somit explizit die Harish-Chandra-Induktion einer Klassenfunktion der Leviuntergruppe nach $F_4(q)$ berechnen. Mit Hilfe dieses Verfahrens berechnen wir einige Harish-Chandra-induzierte Charaktere, die wir später benötigen.

Im vierten Kapitel beschreiben wir kurz die Konstruktion der verallgemeinerten Gel′fand-Graev-Charaktere und einer von Kawanaka vorgeschlagenen Modifizierung dieser Charaktere. Wir folgen dabei im Wesentlichen dem Vorgehen in [Win95], wo diese Charaktere für für den Fall $12 \mid q-1$ berechnet wurden. Wir berechnen diese Charaktere für alle benötigten q.

Der Gegenstand des fünften Kapitels ist endlich die Berechnung der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$. Wir verwenden dabei die folgenden Methoden:

- Harish-Chandra-Induktion geeigneter Charaktere von Untergruppen.
- Explizite Berechnung der von Kawanaka eingeführten modifizierten Gel′fand-Graev-Charaktere. Dies sind von kleinen Untergruppen induzierte Charaktere.
- Berechnung einiger geeigneter Charakterwerte unipotenter Charaktere mit Hilfe einer Charakterformel von Ree, die die Charakterwerte mit den Charakteren einer geeigneten Hecke-Algebra in Verbindung bringt.
- Zerlegung einiger von Leviuntergruppen Lusztig-induzierter Fastcharaktere.
- Ausnutzen von Eigenschaften der Fastcharaktere und der kombinatorischen und zahlentheoretischen Eigenschaften der Charaktertafel von $F_4(q)$.

Im sechsten Kapitel benutzen wir die berechneten unipotenten Charaktere, um die l-modularen Zerlegungszahlen der unipotenten Blöcke von $F_4(q)$ für Primzahlen l mit $l \neq 2, 3$ und $l \nmid q$ zu bestimmen. Wir geben dazu zunächst die Blockeinteilung der Charaktere an und berechnen die Basisrelationen der unipotenten Blöcke. Die in Kapitel 4 berechneten Charaktere sind in unserem Fall immer projektiv und ergeben die Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrizen der unipotenten

Blöcke. Wir bestimmen die Einteilung der Brauercharaktere in die modularen Harish-Chandra-Serien und versuchen, die zu den Brauercharakteren gehörenden projektiv unzerlegbaren Charaktere zu bestimmen. Dazu konstruieren wir projektive Charaktere mittels Harish-Chandra-Induktion von projektiven Charakteren von Leviuntergruppen oder durch Tensorprodukte mit Defekt-Null-Charakteren. Der Unzerlegbarkeitstest gelingt häufig mit Hilfe der Basisrelationen, die auch untere Schranken für die Zerlegungszahlen liefern. Wir können auf diese Weise leider nicht alle Zerlegungszahlen bestimmen. Wir können zeigen, dass die Einschränkungen der kuspidalen Charaktere auf die l-regulären Klassen irreduzible Brauercharaktere sind. Genau diese Brauercharaktere bereiten Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Zerlegungszahlen. Hier wäre eine weiterführende Theorie wünschenswert, die es erlaubt, die projektiv unzerlegbaren Charaktere zu diesen Brauercharakteren zu bestimmen. Die berechneten Zerlegungszahlen sind in Lemma VI.(5.4) und Anhang A.36 angegeben.

Es ist geplant, die entwickelten Algorithmen zum generischen Rechnen in Gruppen vom Lie-Typ als **GAP4** -Paket zur Verfügung zu stellen.

Kapitel I

Rechnen in reduktiven algebraischen Gruppen

Wir wollen im Verlauf dieser Arbeit Informationen über die Darstellungstheorie der endlichen Chevalleygruppen vom Typ $\mathbf{F}_4$, insbesondere über ihre Zerlegungszahlen in nicht-definierender Charakteristik gewinnen. Dazu wird es notwendig sein, explizite Rechnungen in diesen Gruppen durchzuführen, um beispielsweise Konjugiertenklassen von Untergruppen und deren Fusionen zu bestimmen, aber auch Werte irreduzibler Charaktere zu berechnen.

Jede Chevalleygruppe lässt sich als Untergruppe einer vollen linearen Gruppe auffassen. Insbesondere die klassischen Gruppen wie beispielsweise die orthogonalen oder symplektischen Gruppen, besitzen eine sogenannte natürliche treue Matrixdarstellung, die sich gut zum effizienten Rechnen benutzen lässt. Diese Darstellungen geben sehr gut die Struktur der Gruppe wieder, und man erhält viele Aussagen aus der speziellen Struktur dieser Darstellung. Für die sogenannten exzeptionellen Chevalleygruppen wie solche vom Typ $\mathbf{F}_4$ gibt es keine solche natürliche Matrixdarstellung. Die vorhandenen Darstellungen haben keine derartige unmittelbar verwendbare spezielle Struktur. Wir wollen hier daher einen anderen Zugang wählen, der die innere Struktur dieser Gruppen besser widerspiegelt und sich für alle endlichen Chevalleygruppen gleichermaßen anwenden lässt.

Wir wollen die Beschreibung der Chevalleygruppen als Fixpunktuntergruppen einer linearen algebraischen Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k unter einem Frobeniusmorphismus $\mathbf{F}$ benutzen. Wir führen dann alle Rechnungen in der algebraischen Gruppe durch und benutzen den Frobeniusmorphismus, um die entsprechenden Ergebnisse in der endlichen Untergruppe zu beschreiben. Dabei ist wichtig, dass diese Rechnungen sich generisch für alle Gruppen eines Typs durchführen lassen.

Wir werden in diesem Kapitel zunächst die benötigten grundlegenden Begriffe der Theorie der linearen reduktiven algebraischen Gruppen zusammenstellen und dann eine Präsentation angeben, die eine solche Gruppe beschreibt. Diese Präsentation werden wir benutzen, um Algorithmen zum expliziten Rechnen in der Gruppe zu beschreiben. Insbesondere benutzen wir die Bruhat-Zerlegung als Normalform der Elemente und geben einen Algorithmus an, der diese Normalform

für ein Produkt zweier Elemente ausrechnet. Im Anschluss beschreiben wir, wie wir diesen Algorithmus verwenden können, um generisch in allen Gruppen eines Typs gleichzeitig zu rechnen, und führen dies an kleinen Beispielen exemplarisch vor. Am Schluss zeigen wir noch einige Anwendungen dieses Algorithmus, die im weiteren Verlauf der Arbeit häufiger benötigt werden. Dazu gehören die Bestimmung der unipotenten Konjugiertenklassen von Untergruppen und deren Zentralisatoren und Fusionen, aber auch die Bestimmung der Schnitte von Konjugiertenklassen mit gewissen Doppelnebenklassen.

I.1 Grundlagen reduktiver algebraischer Gruppen

Es sei $\mathbf{G}$ eine zusammenhängende lineare reduktive algebraische Gruppe über dem algebraisch abgeschlossenen Körper $k := \overline{\mathbb{F}}_p$ der Charakteristik p. Die Primzahl p wird in diesem Fall die **definierende Charakteristik** von $\mathbf{G}$ genannt.

Es sei nun $\mathbf{T}$ ein fest gewählter maximaler Torus von $\mathbf{G}$. Die Gruppe $\mathbf{X}(\mathbf{T}) := \mathrm{Hom}(\mathbf{T}, k^*)$ der algebraischen Gruppenhomomorphismen von $\mathbf{T}$ in die multiplikative Gruppe k^* heißt die **Charaktergruppe** von $\mathbf{T}$. Entsprechend heißt die Gruppe $\mathbf{Y}(\mathbf{T}) := \mathrm{Hom}(k^*, \mathbf{T})$ der algebraischen Gruppenhomomorphismen von k^* in $\mathbf{T}$ die **Kocharaktergruppe** von $\mathbf{T}$. Diese sind freie $\mathbb{Z}$-Modulen von gleichem Rang, die in natürlicher Weise dual zueinander sind. Genauer bedeutet dies, dass für $\gamma \in \mathbf{Y}$ und $\chi \in \mathbf{X}$ die Komposition $\gamma \circ \chi$ ein algebraischer Gruppenmorphismus von k^* in sich, also von der Form $\varrho \mapsto \varrho^n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$, ist. Die Zuordnung

$$\begin{array}{rccc} \langle \cdot\,,\cdot \rangle : & \mathbf{X}(T) \times \mathbf{Y}(T) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & (\chi, \gamma) & \longmapsto & \langle \chi, \gamma \rangle \end{array}$$

mit $\gamma(\chi(\varrho)) = \varrho^{\langle \chi, \gamma \rangle}$ ist bilinear und es gibt $\mathbb{Z}$-Basen von $\mathbf{X}(\mathbf{T})$ und $\mathbf{Y}(\mathbf{T})$, die bezüglich $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ dual zueinander sind. Die Gruppe $\mathbf{W} := N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$ heißt **Weylgruppe** von $\mathbf{G}$ relativ zu $\mathbf{T}$. Die Weylgruppe operiert in natürlicher Weise als Gruppe von Automorphismen auf der Charaktergruppe $\mathbf{X}(\mathbf{T})$ und der Kocharaktergruppe $\mathbf{Y}(\mathbf{T})$ und es gibt ein **Wurzelsystem** $\Phi \subset \mathbf{X}(\mathbf{T})$, so dass $\mathbf{W}$ isomorph zur Weylgruppe dieses Wurzelsystems ist. Die Elemente von Φ heißen **Wurzeln**. Zu jeder Wurzel $\alpha \in \Phi$ gibt es eine **Kowurzel** $\alpha^\vee \in \mathbf{Y}(\mathbf{T})$. Es ist $\langle \alpha\,, \alpha^\vee \rangle = 2$. Die Menge der Kowurzeln wird mit $\Phi^\vee$ bezeichnet. Das Quadrupel $(\mathbf{X}(\mathbf{T}), \Phi, \mathbf{Y}(\mathbf{T}), \Phi^\vee)$ ist ein **Wurzeldatum** im Sinne der folgenden Definition.

(1.1) Definition (Wurzeldatum, vgl. [Spr98, (7.4.1)])
Es seien X und Y freie $\mathbb{Z}$-Moduln von gleichem endlichen Rang, die bezüglich einer gegebenen $\mathbb{Z}$-Bilinearform $\langle \cdot\,,\cdot \rangle : X \times Y \longrightarrow \mathbb{Z}$ dual zueinander sind. Es seien Φ und $\Phi^\vee$ zwei zueinander bijektive endliche Teilmengen von X beziehungsweise Y mit Bijektion $^\vee : \Phi \longrightarrow \Phi^\vee, r \longmapsto r^\vee$. Für $\alpha \in \Phi$ definiert man folgende Endomorphismen von X bzw. Y:

$$\begin{array}{rccc} s_\alpha : & X & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & x - \langle x\,, \alpha^\vee \rangle \alpha \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccc} s_\alpha^\vee : & Y & \longrightarrow & Y \\ & y & \longmapsto & y - \langle \alpha \, , \, y \rangle \alpha^\vee . \end{array}$$

Das Quadrupel $\Psi := (X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$ heißt **Wurzeldatum**, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) Für $\alpha \in \Phi$ ist $\langle \alpha \, , \, \alpha^\vee \rangle = 2$.

(ii) Für $\alpha \in \Phi$ ist $s_\alpha(\Phi) = \Phi$ und $s_\alpha^\vee(\Phi^\vee) = \Phi^\vee$.

Die Gruppe $W(\Psi) := \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle$ heißt **Weylgruppe** zum Wurzeldatum Ψ.

Das auf diese Weise der Gruppe $\mathbf{G}$ zugeordnete Wurzeldatum $(\mathbf{X}(\mathbf{T}), \Phi, \mathbf{Y}(\mathbf{T}), \Phi^\vee)$ werden wir auch mit $\Psi(\mathbf{G}, \mathbf{T})$ bezeichnen. Die Weylgruppe $\mathbf{W}$ ist isomorph zur Weylgruppe zum Wurzeldatum $\Psi(\mathbf{G}, \mathbf{T})$ und wird im Folgenden mit dieser identifiziert. Das Wurzeldatum ist abhängig von der Wahl des maximalen Torus $\mathbf{T}$. Allerdings sind die Wurzeldaten, die sich bei verschiedener Wahl von $\mathbf{T}$ ergeben, im folgenden Sinne isomorph zueinander.

(1.2) Definition (Isomorphie von Wurzeldaten, vgl. [Car85, (4.2)])
Zwei Wurzeldaten $(X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$ und $(X', \Phi', Y', \Phi'^\vee)$ mit zugehörigen $\mathbb{Z}$-Bilinearformen $\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle$ und $\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle'$ heißen isomorph, wenn es $\mathbb{Z}$-Modulisomorphismen $f : X \longrightarrow X'$ und $g : Y \longrightarrow Y'$ gibt, die folgende Eigenschaften erfüllen.

(i) $\langle f(\chi) \, , \, g(\psi) \rangle' = \langle \chi \, , \, \psi \rangle$ für alle $\chi \in \mathrm{X}$ und $\psi \in Y$,

(ii) $f(\Phi) = \Phi'$ und $g(\Phi^\vee) = \Phi'^\vee$,

(iii) $f(\alpha)^\vee = g(\alpha^\vee)$ für alle $\alpha \in \Phi$.

Es gilt der folgende Existenz- und Klassifikationssatz:

(1.3) Satz (Existenz- und Klassifikationssatz, vgl. [Spr98, (9.6.2) und (10.1.1)])
Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik p. Dann gilt:

(i) Es seien $\mathbf{G}$ und $\mathbf{G}_1$ zusammenhängende lineare reduktive algebraische Gruppen über k mit maximalen Tori $\mathbf{T}$ und $\mathbf{T}_1$ und zugehörigen Wurzeldaten $\Psi(\mathbf{G}, \mathbf{T})$ und $\Psi_1(\mathbf{G}_1, \mathbf{T}_1)$. Dann sind $\mathbf{G}$ und $\mathbf{G}_1$ als algebraische Gruppen genau dann isomorph, wenn $\Psi(\mathbf{G}, \mathbf{T})$ und $\Psi_1(\mathbf{G}_1, \mathbf{T}_1)$ isomorph sind.

(ii) Ist Ψ ein Wurzeldatum im Sinne von I.(1.1), so existiert eine zusammenhängende lineare reduktive algebraische Gruppe $\mathbf{G}$ über k mit maximalem Torus $\mathbf{T}$, so dass $\Psi(\mathbf{G}, \mathbf{T})$ isomorph zu Ψ ist.

Beweis: Siehe [Spr98, (9.6.2) und (10.1.1)]. □

Eine zusammenhängende lineare reduktive algebraische Gruppe ist also bis auf Isomorphie durch ein Wurzeldatum bestimmt. Es sei $\mathbf{B}$ eine fest gewählte Boreluntergruppe von $\mathbf{G}$, die den fest gewählten Torus $\mathbf{T}$ enthält. Dann ist $\mathbf{B} = \mathbf{T} \ltimes \mathbf{U}$ ein semidirektes Produkt, wobei $\mathbf{U} = \mathrm{R}_u(\mathbf{B})$ das unipotente Radikal von $\mathbf{B}$ ist. Es gibt genau eine Boreluntergruppe $\mathbf{B}^-$ von $\mathbf{G}$ mit $\mathbf{B} \cap \mathbf{B}^- = \mathbf{T}$ und es gilt $\mathbf{B}^- = \mathbf{T} \ltimes \mathbf{U}^-$ mit $\mathbf{U}^- = R_u(\mathbf{B}^-)$. Im folgenden soll eine Präsentation für $\mathbf{G}$ beschrieben werden. Dazu wollen wir zunächst einige wichtige Untergruppen von $\mathbf{G}$ definieren.

(1.4) Definition/Lemma (Wurzeluntergruppen, vgl. [Spr98, (7.5.4), (8.1.1) und (8.1.4)])
Es sei $(\mathbf{X}(\mathbf{T}), \Phi, \mathbf{Y}(\mathbf{T}), \Phi^\vee)$ ein Wurzeldatum von $\mathbf{G}$ bezüglich des maximalen Torus $\mathbf{T}$ und $\mathbf{B}$ eine Boreluntergruppe, die $\mathbf{T}$ enthält. Für jedes $\alpha \in \Phi$ existiert ein Isomorphismus x_α von $\mathbf{G}_a$, der additiven Gruppe von k, auf eine abgeschlossene Untergruppe $\mathbf{U}_\alpha$ von $\mathbf{G}$, so dass folgendes gilt:

(i) $t^{-1}x_\alpha(x)t = x_\alpha(\alpha(t)x)$ für alle $t \in \mathbf{T}$ und $x \in \mathbf{G}_a$,

(ii) $\mathbf{G}$ wird von $\mathbf{T}$ und den $\mathbf{U}_\alpha$ für $\alpha \in \Phi$ erzeugt,

(iii) $n_\alpha := x_\alpha(1)x_{-\alpha}(-1)x_\alpha(1)$ liegt in $N_\mathbf{G}(\mathbf{T})$ und hat s_α als Bild unter der kanonischen Projektion auf $\mathbf{W}$.

(iv) $x_\alpha(x)x_{-\alpha}\left(-x^{-1}\right)x_\alpha(x) = n_\alpha\alpha^\vee(x)$ für alle $x \in k^*$

Die Isomorphismen x_α können so gewählt werden, dass es für alle Paare $(\alpha, \beta) \in \Phi \times \Phi$ Konstanten $\eta_{\alpha,\beta} \in \{1, -1\}$ gibt, so dass für alle $x \in k$

$$n_\alpha^{-1}x_\beta(x)n_\alpha = x_{s_\alpha(\beta)}\left(\eta_{\alpha,\beta}x\right)$$

gilt. Die Untergruppen $\mathbf{U}_\alpha$ sind eindeutig bestimmt durch diese Eigenschaften und heißen **Wurzeluntergruppen**. Falls $\mathbf{U}_\alpha \subset \mathbf{B}$, so heißt α eine positive Wurzel relativ zu $\mathbf{B}$, sonst ist $\mathbf{U}_\alpha \subset \mathbf{B}^-$ und α heißt eine negative Wurzel relativ zu $\mathbf{B}$. Die Menge der positiven Wurzeln wird mit Φ^+ bezeichnet, die Menge der negativen Wurzeln mit Φ^-. Es gilt dann weiterhin:

(i) $\mathbf{B} = \langle \mathbf{T}, \mathbf{U}_\alpha \mid \alpha \in \Phi^+ \rangle$

(ii) $\mathbf{B}^- = \langle \mathbf{T}, \mathbf{U}_\alpha \mid \alpha \in \Phi^- \rangle$

(iii) $\mathbf{U} = \langle \mathbf{U}_\alpha \mid \alpha \in \Phi^+ \rangle$

(iii) $\mathbf{U}^- = \langle \mathbf{U}_\alpha \mid \alpha \in \Phi^- \rangle$

Beweis: Siehe [Spr98, (8.1.1) und (8.1.4)]. □

Durch die Wahl von $\mathbf{B}$ ist also ein System positiver Wurzeln Φ^+ in Φ definiert. Dann existiert nach [Car72, (2.1.3)] genau ein **Fundamentalsystem** $\Pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_l\} \subseteq \Phi^+$, dessen Elemente **Fundamentalwurzeln** heißen. Jedes $\alpha \in \Phi$ lässt sich eindeutig schreiben als Linearkombination der Fundamentalwurzeln mit nur nicht-negativen ganzzahligen Koeffizienten (dann ist $\alpha \in \Phi^+$) oder nur nicht-positiven ganzzahligen Koeffizienten (dann ist $\alpha \in \Phi^-$). Für eine Wurzel $\alpha = \sum_{i=1}^l \lambda_i\pi_i$ ist die **Höhe der Wurzel** definiert als $\mathrm{ht}(\alpha) := \sum_{i=1}^l \lambda_i$. Weiterhin wird die Weylgruppe $\mathbf{W}$ erzeugt von den **Fundamentalspiegelungen** s_π für $\pi \in \Pi$ [Car72, (2.1.8)].

(1.5) Definition (Gute und Schlechte Primzahlen)
Eine Primzahl p heißt **gut** für die reduktive Gruppe $\mathbf{G}$, wenn p keinen Koeffizienten einer Wurzel von Φ teilt. Ist p nicht gut, so heißt p **schlecht**.

(1.6) Definition ($\mathbb{F}_q$-Struktur, vgl. [DM91, 3.1])
Eine zusammenhängende lineare reduktive algebraische Gruppe $\mathbf{G}$ heißt **definiert über** $\mathbb{F}_q$, wenn $\mathbf{G}$ als affine Varietät eine $\mathbb{F}_q$-Struktur trägt. Das heißt, dass $\mathbf{G}$ beschrieben werden kann als Nullstellenmenge eines Ideals, das von Polynomen mit Koeffizienten aus $\mathbb{F}_q$ erzeugt wird. Der zu

dieser $\mathbb{F}_q$-Struktur gehörende Frobeniusmorphismus $\mathbf{F}$ ist dann gerade die Abbildung von $\mathbf{G}$ nach $\mathbf{G}$, die die Elemente von $\mathbf{G}$ aufgefasst als Punkte der affinen Varietät koordinatenweise in die q-te Potenz erhebt.

Es sei nun $\mathbf{G}$ definiert über $\mathbb{F}_q$ und $\mathbf{F}$ der zugehörige Frobeniusmorphismus von $\mathbf{G}$. Dann ist die Fixpunktuntergruppe $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ von $\mathbf{G}$ unter $\mathbf{F}$ eine sogenannte **endliche Gruppe vom Lie-Typ**. In $\mathbf{G}$ gibt es eine $\mathbf{F}$-stabile Boreluntergruppe $\mathbf{B}$, die einen $\mathbf{F}$-stabilen maximalen Torus $\mathbf{T}$ enthält [Car85, 1.17]. Das Wurzeldatum von $\mathbf{G}$ soll immer bezüglich eines $\mathbf{F}$-stabilen maximalen Torus gegeben sein. Der Frobeniusmorphismus operiert dann in natürlicher Weise auf dem bezüglich $\mathbf{T}$ gegebenen Wurzelsystem von $\mathbf{G}$. Operiert $\mathbf{F}$ trivial auf dem Wurzelsystem Φ, so heißt $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ auch **Chevalley-Gruppe**.

(1.7) Bemerkung (vgl. [DM91, Bemerkung nach 3.8])
Bei diesem Zugang werden die Suzuki- und Reegruppen ausgeschlossen. Diese Gruppen erhält man als Fixpunktgruppen zu einem Morphismus, der kein Frobeniusmorphismus wie in I.(1.6) ist, sondern dessen Quadrat beziehungsweise dritte Potenz.

Gemäß [Hum75, (8.6)] lässt sich jede lineare algebraische Gruppe als abgeschlossene Untergruppe in eine volle lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(k)$ einbetten. Es bezeichne $\varphi : \mathbf{G} \to \mathrm{GL}_n(k)$ eine solche Einbettung. Die Elemente $s \in \mathbf{G}$, für die $\varphi(s)$ diagonalisierbar ist, heißen **halbeinfach**, die Elemente $u \in \mathbf{G}$, für die alle Eigenwerte von $\varphi(u)$ gleich 1 sind, heißen **unipotent**. Diese Eigenschaften sind unabhängig von der Wahl der Einbettung φ. Die Elemente von $\mathbf{G}$ besitzen eine Produktzerlegung, die sogenannte **Jordan-Zerlegung**.

(1.8) Definition/Lemma (Jordan-Zerlegung, vgl. [Hum75, (15.3)])
Für jedes $g \in \mathbf{G}$ existieren eindeutig bestimmt ein halbeinfaches Element $s \in \mathbf{G}$ und ein unipotentes Element $u \in \mathbf{G}$ mit $g = su = us$. Dann heißt s der **halbeinfache Anteil** und u der **unipotente Anteil** von g. Da $k = \overline{\mathbb{F}}_p$ ist, hat jedes $g \in \mathbf{G} \leqslant \mathrm{GL}_n(k)$ endliche Ordnung. Dann ist u ein p-Element und s ein p'-Element.

Beweis: Siehe [Hum75, (15.3)]. □

Wir können die unipotenten und halbeinfachen Elemente von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ gruppentheoretisch charakterisieren:

(1.9) Korollar (Jordanzerlegung in $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$, vgl. [DM91, 3.18])
Es sei $\mathbf{F}$ ein Frobeniusmorphismus von $\mathbf{G}$. Die unipotenten Elemente von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ sind dann gerade die p-Elemente und die halbeinfachen Elemente gerade die p'-Elemente. Die Untergruppe $\mathbf{U}^{\mathbf{F}}$ ist eine p-Gruppe.

Beweis: Siehe [DM91, 3.18]. □

Wenn $(\mathbf{X}(\mathbf{T}), \Phi, \mathbf{Y}(\mathbf{T}), \Phi^\vee)$ das Wurzeldatum von $\mathbf{G}$ ist, dann heißt die durch das Wurzeldatum $(\mathbf{Y}(\mathbf{T}), \Phi^\vee, \mathbf{X}(\mathbf{T}), \Phi)$ aufgrund von Satz I.(1.3) beschriebene Gruppe $\mathbf{G}^*$ die zu $\mathbf{G}$ **duale Gruppe**. Diese Gruppe trägt eine zur $\mathbb{F}_q$-Struktur von $\mathbf{G}$ duale $\mathbb{F}_q$-Struktur. Der zugehörige Frobeniusmorphismus von $\mathbf{G}^*$ wird mit $\mathbf{F}^*$ bezeichnet. $\mathbf{G}^{*\mathbf{F}^*}$ heißt die zu $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ duale Gruppe. [Car85, (4.3.1)].

I.2 Eine Präsentation

Die Wurzeluntergruppen von **G** spielen eine wichtige Rolle bei der Beschreibung der gewünschten Präsentation von **G**, insbesondere ist folgender Satz entscheidend.

(2.1) Satz (Kommutatorrelationen, vgl. [Spr98, (8.2.3)])
Es seien $(\mathbf{X}(\mathbf{T}), \Phi, \mathbf{Y}(\mathbf{T}), \Phi^\vee)$ ein Wurzelsystem von **G** bezüglich des maximalen Torus **T** und $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$ Isomorphismen wie in I.(1.4). Auf Φ sei eine Totalordnung gegeben. Für $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha \neq \pm\beta$ und $i, j \in \mathbf{N}$ mit $i\alpha + j\beta \in \Phi$ existieren eindeutig bestimmte Konstanten $c_{\alpha,\beta;i,j} \in k$, so dass für alle $u, v \in k$

$$[x_\beta(u), x_\alpha(v)] := x_\beta(u)^{-1}x_\alpha(v)^{-1}x_\beta(u)x_\alpha(v) = \prod_{\substack{i,j>0\\ i\alpha+j\beta\in\Phi}} x_{i\alpha+j\beta}\left(c_{\alpha,\beta;i,j}v^i u^j\right) \tag{I.1}$$

gilt. Dabei wird das Produkt auf der rechten Seite aufsteigend bezüglich der gewählten Totalordnung auf Φ gebildet.

Beweis: Siehe [Spr98, (8.2.3)]. □

(2.2) Bemerkung
Die Konstanten $c_{\alpha,\beta;i,j}$ hängen von der Wahl der Isomorphismen $\{x_\alpha\}$ und der Totalordnung auf Φ ab. Im Abschnitt I.3 und insbesondere in I.(3.7) wird darauf noch näher eingegangen werden. Mit der Wahl dieser Isomorphismen und der Totalordnung sind aber auch die Konstanten $\eta_{\alpha,\beta}$ aus Lemma I.(1.4) bestimmt. Es gilt genauer:

(2.3) Lemma (vgl. [Spr98, (9.2.2)])
Es seien $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha \neq \beta$. Es existieren dann $m, n \in \mathbf{N}_0$ mit $i\alpha + \beta \in \Phi$ für $-m \leqslant i \leqslant n$, aber $-(m+1)\alpha + \beta \notin \Phi$ und $(n+1)\alpha + \beta \notin \Phi$. Dann gilt

$$\eta_{\alpha,\beta} := \sum_{i=\max(0,m-n)}^{m} (-1)^i c_{-\alpha,\beta;i,1}c_{\alpha,\beta-i\alpha;i-(m-n),1}$$

Beweis: Siehe [Spr98, (9.2.2)]. □

Damit können wir nun eine Präsentation von **G** beschreiben.

(2.4) Satz (Präsentation, vgl. [Spr98, (9.4.2)])
Es seien $(\mathbf{X}(\mathbf{T}), \Phi, \mathbf{Y}(\mathbf{T}), \Phi^\vee)$ ein Wurzeldatum von **G** bezüglich einem maximalem Torus **T**. Auf Φ sei eine Totalordnung gegeben. Es sei **B** eine Borelgruppe von **G**, die **T** enthält und Φ^+ das zugehörige System positiver Wurzeln mit Fundamentalsystem Π. Es seien weiterhin Isomorphismen $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$ wie in I.(1.4) mit zugehörigen Konstanten $c_{\alpha,\beta;i,j}$ und $\eta_{\alpha,\beta}$ gemäß I.(2.2) und I.(2.3) gewählt. Des weiteren definieren wir für jedes $\chi \in \mathbf{X}(\mathbf{T})$ beziehungsweise $\psi \in \mathbf{Y}(\mathbf{T})$ durch

$$\begin{array}{rccc} \overline{\chi}: & \mathrm{Hom}(\mathbf{X}(\mathbf{T}), k^*) & \longrightarrow & k^* \\ & \zeta & \longmapsto & \zeta(\chi) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccc} \overline{\psi}: & k^* & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathbf{X}(\mathbf{T}), k^*) \\ & \lambda & \longmapsto & \left(\chi \longmapsto \lambda^{\langle \chi, \psi \rangle}\right) \end{array}$$

Homomorphismen. Für $\alpha \in \Phi$ definieren wir $\zeta_\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathbf{X}(\mathbf{T}), k^*)$ durch

$$\zeta_\alpha(\chi) := (-1)^{\langle \chi, \alpha^\vee \rangle}$$

für alle $\chi \in \mathbf{X}(\mathbf{T})$. Wir definieren für alle $\alpha \in \Phi$ injektive Abbildungen $\tilde{x}_\alpha$ von k in eine Menge von Symbolen und eine injektive Abbildung $\tilde{h}$ von $\mathrm{Hom}(\mathbf{X}(\mathbf{T}), k^*)$ in eine Menge von Symbolen, so dass die Menge

$$S := \{\tilde{x}_\alpha(u) \mid \alpha \in \Phi, u \in k\} \cup \{\tilde{h}(\chi) \mid \chi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{X}(\mathbf{T}), k^*)\}$$

die disjunkte Vereinigung der Bilder dieser Abbildungen ist. Für $\tilde{h}(\zeta_\alpha)$ schreiben wir im folgenden auch $\tilde{h}_\alpha$ und $\tilde{n}_\alpha$ soll für das Wort $\tilde{x}_\alpha(1)\tilde{x}_{-\alpha}(-1)\tilde{x}_\alpha(1)$ über S stehen. Es sei nun R die durch folgende Liste gegebene Menge von Relation auf S.

(i) Für alle $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathrm{Hom}(\mathbf{X}(\mathbf{T}), k^*)$:

$$\tilde{h}(\zeta_1)\tilde{h}(\zeta_2) = \tilde{h}(\zeta_1\zeta_2).$$

(ii) Für alle $u, v \in k$ und $\alpha \in \Phi$:

$$\tilde{x}_\alpha(u)\tilde{x}_\alpha(v) = \tilde{x}_\alpha(u+v).$$

(iii) Für alle $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha \neq \pm\beta$ und $u, v \in k$:

$$[\tilde{x}_\beta(u), \tilde{x}_\alpha(v)] = \prod_{\substack{i,j>0 \\ i\alpha+j\beta\in\Phi}} \tilde{x}_{i\alpha+j\beta}\left(c_{\alpha,\beta;i,j}v^i u^j\right).$$

(iv) Für alle $\zeta \in \mathrm{Hom}(\mathbf{X}(\mathbf{T}), k^*)$, $\alpha \in \Phi$ und $u \in k$:

$$\tilde{h}(\zeta)^{-1}\,\tilde{x}_\alpha(u)\tilde{h}(\zeta) = \tilde{x}_\alpha\left(\overline{\alpha}(\zeta)u\right).$$

(v) Für alle $\alpha, \beta \in \Phi$ und $u \in k$:

$$\tilde{n}_\alpha^{-1}\tilde{x}_\beta(u)\tilde{n}_\alpha = \tilde{x}_{s_\alpha(\beta)}\left(\eta_{\alpha,\beta}u\right).$$

(vi) Für alle $\zeta \in \mathrm{Hom}(\mathbf{X}(\mathbf{T}), k^*)$, $\alpha \in \Phi$:

$$\tilde{n}_\alpha^{-1}\tilde{h}(\zeta)\tilde{n}_\alpha = \tilde{h}(\xi),$$

wobei $\xi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{X}(\mathbf{T}), k^*)$ durch $\xi(\chi) := \zeta(\chi^{s_\alpha})$ für alle $\chi \in \mathbf{X}(\mathbf{T})$ definiert ist.

(vii) Für $\alpha \in \Phi$:
$$\tilde{n}_\alpha^2 = \tilde{h}_\alpha.$$

(viii) Für $\alpha \in \Phi$:
$$\tilde{n}_\alpha^{-1} = \tilde{n}_{-\alpha}.$$

(ix) Für $\alpha \in \Phi$ und $u \in k^*$:
$$\tilde{x}_\alpha(u)\tilde{x}_{-\alpha}(-u^{-1})\tilde{x}_\alpha(u) = \tilde{n}_\alpha\overline{\alpha^\vee}(u).$$

(x) Für $\pi_1, \pi_2 \in \Pi$ mit $\pi_1 \neq \pi_2$:
$$\underbrace{\tilde{n}_{\pi_1}\tilde{n}_{\pi_2}\tilde{n}_{\pi_1}\dots}_{m(\pi_1,\pi_2)} = \underbrace{\tilde{n}_{\pi_2}\tilde{n}_{\pi_1}\tilde{n}_{\pi_2}\dots}_{m(\pi_1,\pi_2)}$$
Dabei ist $m(\pi_1, \pi_2)$ die Ordnung von $\left(s_{\pi_1}s_{\pi_2}\right)$ in $\mathbf{W}$.

Dann ist $\mathbf{G}$ isomorph zur Faktorgruppe der freien Gruppe auf der Menge S modulo des Normalteilers, der von den Relationen R erzeugt wird. Dieser Isomorphismus kann so gewählt werden, dass $x_\alpha(u)$ auf $\tilde{x}_\alpha(u)$ abgebildet wird. Die Urbilder von $\tilde{h}_\alpha$ und $\tilde{n}_\alpha$ in $\mathbf{G}$ unter diesem Isomorphismus bezeichnen wir mit h_α beziehungsweise n_α. Es gilt dann:

(a) $\mathbf{T} \cong \left\langle \tilde{h}(\zeta) \mid \zeta \in \mathrm{Hom}(\mathbf{X}(\mathbf{T}), k^*) \right\rangle$,

(b) $\mathbf{U}_\alpha \cong \langle \tilde{x}_\alpha(u) \mid u \in k \rangle$ für alle $\alpha \in \Phi$,

(c) $\mathbf{U} \cong \left\langle \tilde{x}_\alpha(u) \mid \alpha \in \Phi^+, u \in k \right\rangle$,

(d) $\mathbf{B} \cong \left\langle \tilde{h}(\zeta), \tilde{x}_\alpha(u) \mid \zeta \in \mathrm{Hom}(\mathbf{X}(\mathbf{T}), k^*), \alpha \in \Phi^+, u \in k \right\rangle$.

Beweis: Siehe [Spr98, (9.4.3)]. □

(2.5) Bemerkung
Die unter (vi) angegebenen Relationen folgen aus den Relationen (iv) und (ix).

In den folgenden Abschnitten wollen wir nun Algorithmen beschreiben, die diese Präsentation benutzen, um explizit in einer reduktiven algebraischen Gruppe zu rechnen.

I.3 Algorithmen zum Rechnen im unipotenten Radikal

Wir wollen in diesem Abschnitt zum einen einen Algorithmus vorstellen, mit dem explizite Rechnungen im unipotenten Radikal möglich sind, zum anderen wollen wir einen Algorithmus angeben, mit dessen Hilfe Vertreter für die Konjugiertenklassen berechnet werden können.

Wir behalten die Notationen aus Abschnitt I.1 bei, insbesondere sei $\mathbf{G}$ eine zusammenhängende lineare reduktive Gruppe mit fest gewähltem maximalen Torus $\mathbf{T}$ und zugehörigem Wurzeldatum $(\mathbf{X}(\mathbf{T}), \Phi, \mathbf{Y}(\mathbf{T}), \Phi^\vee)$. Es sei $\mathbf{B}$ eine Boreluntergruppe von $\mathbf{G}$, die $\mathbf{T}$ enthält, Φ^+ die zugehörige Menge positiver Wurzeln und Π das zugehörige Fundamentalsystem. Es seien zudem $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$ Isomorphismen wie in I.(1.4).

(3.1) Definition/Lemma (vgl. [Spr98, (8.2.1)])
Es sei $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ eine Totalordnung auf den positiven Wurzeln in Φ^+. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbf{G}_a^m & \longrightarrow & \mathbf{U} \\ & (u_1, u_2, \ldots, u_m) & \longmapsto & x_{\alpha_1}(u_1)x_{\alpha_2}(u_2)\cdots x_{\alpha_m}(u_m) \end{array}$$

ein Isomorphismus algebraischer Varietäten. Insbesondere lässt sich jedes $u \in \mathbf{U}$ eindeutig schreiben als

$$u = x_{\alpha_1}(u_1)x_{\alpha_2}(u_2)\cdots x_{\alpha_m}(u_m). \tag{I.2}$$

Dann wird (I.2) auch als die **Normalform von *u*** bezüglich der gewählten Totalordnung bezeichnet.

Beweis: Siehe [Spr98, (8.2.1)]. □

(3.2) Bemerkung (Eine spezielle Totalordnung, vgl. [Car72, (2.1)])
Lemma I.(3.1) besagt nur die Existenz einer Normalform für beliebige Totalordnungen auf den positiven Wurzeln. Der Beweis ist allerdings nicht konstruktiv. Für spezielle Wahlen für diese Totalordnung ist eine Berechnung aber algorithmisch unter Benutzung der Formel (I.1) möglich. Sei dazu $\Pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_l\}$ ein Fundamentalsystem von Φ, dann ist Π eine Basis des freien $\mathbb{Z}$-Moduls $Q := \mathbb{Z}\Phi$. Es sei dann $Q^+ \subset Q$ die Menge der Vektoren $v := \sum_{i=1}^{l} c_i\pi_i \in Q$ mit $c_i \in \mathbb{Z}$, so dass der erste von Null verschiedene Koeffizient positiv ist. Für $v, w \in Q$ definieren wir $v > w$ genau dann, wenn $v - w \in Q^+$ ist. Dadurch wird auf Q und somit auch auf Φ und Φ^+ eine Totalordnung definiert, die die Addition und die Multiplikation mit positiven Skalaren respektiert. Es gilt zudem $\Phi^+ = \Phi \cap Q^+$. Außerdem ist diese Totalordnung verträglich mit der Höhenfunktion auf den Wurzeln.

Lemma I.(3.1) beschreibt die Struktur von $\mathbf{U}$ als algebraische Varietät. Die gruppentheoretische Struktur wird durch folgendes Lemma beschrieben.

(3.3) Lemma (Zentralreihe für U, vgl. [Car72, 5.3.3])
Die Untergruppe $\mathbf{U}$ ist nilpotent. Es seien für $1 \leqslant i \leqslant h$ die folgenden Untergruppen definiert, wobei h die maximale Höhe einer Wurzel in Φ^+ ist.

$$\mathbf{U}_i \cong \left\langle x_\alpha(u) \mid \alpha \in \Phi^+, \mathrm{ht}(\alpha) \geq i, u \in k \right\rangle$$

Dann ist

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \supseteq \mathbf{U}_2 \supseteq \ldots \supseteq \mathbf{U}_h \supseteq 1,$$

eine Zentralreihe von $\mathbf{U}$ mit elementar-abelschen Faktoren.

Beweis: Dies ist eine einfache Folgerung aus Satz I.(2.1). Siehe [Car72, 5.3.3]. □

Um Formel (I.1) anwenden zu können, müssen wir noch die Koeffizienten $c_{\alpha,\beta;i,j}$ bestimmen. Diese hängen von der Totalordnung auf Φ und von den Isomorphismen $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$ ab. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass es für die in I.(3.2) beschriebene Totalordnung auf Φ eine Wahl der Isomorphismen gibt, so dass die $c_{\alpha,\beta;i,j}$ leicht zu bestimmen sind.

(3.4) Definition (extraspezielle Paare, vgl. [Car72, (4.2)])
Es sei durch $<$ eine Totalordnung auf Φ gegeben. Ein geordnetes Paar $(\alpha, \beta) \in \Phi \times \Phi$ heißt **speziell**, wenn $\alpha + \beta \in \Phi$ und $0 < \alpha < \beta$ gilt. Ein spezielles Paar (α, β) heißt **extraspeziell**, wenn für alle speziellen Paare (α_1, β_1) mit $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha + \beta$ gilt: $\alpha < \alpha_1$.

(3.5) Lemma (vgl. [Car72, (4.2.2),(5.2.3)])
Es sei auf Φ eine Totalordnung wie in I.(3.2) gegeben und E bezeichne die Menge der extraspeziellen Paare von Φ. Für jede Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon\colon & E & \longrightarrow & \{-1, 1\} \\ & (\alpha, \beta) & \longmapsto & \varepsilon_{\alpha,\beta} \in \{-1, 1\} \end{array}$$

gibt es eine Wahl der Isomorphismen $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$, so dass sich die Konstanten $c_{\alpha,\beta;i,j}$ rein kombinatorisch aus der Menge Φ berechnen lassen, wie in [Car72, (5.2.3)] beschrieben ist.

Beweis: Vergleiche [Spr98, (9.5.4)] für die Reduktion auf den Fall einer halbeinfachen Gruppe von adjungiertem Typ, der dann in [Car72, (5.2.3)] behandelt wird. □

(3.6) Bemerkung

(i) Die $\varepsilon_{\alpha,\beta}$ lassen sich als Vorzeichen gewisser Strukturkonstanten einer halbeinfachen komplexen Lie-Algebra mit Wurzelsystem Φ interpretieren. Die Wahl der Abbildung ε entspricht in dieser Interpretation der Wahl der Chevalley-Basis, bezüglich der die Strukturkonstanten bestimmt werden, vergleiche [Car72, (4.2.1) und (4.2.2)]. Mittels [Car72, (4.1.2)] kann man dann ε eindeutig auf beliebige Paare $(\alpha, \beta) \in \Phi \times \Phi$ mit $\alpha \neq \pm\beta$ fortsetzen, so dass man diese $\varepsilon_{\alpha,\beta}$ als Vorzeichen von Strukturkonstanten bezüglich der so gewählten Basis interpretieren kann.

(ii) Die extraspeziellen Paare stehen in Bijektion zu $\Phi^+ \setminus \Pi$. Zu jedem $\alpha \in \Phi^+ \setminus \Pi$ findet man die kleinste Wurzel $\beta \in \Phi^+$ mit $\alpha - \beta \in \Phi^+$. Dann ist $(\beta, \alpha - \beta)$ das bezüglich der Bijektion α entsprechende extraspezielle Paar.

(iii) Ein Algorithmus zur Berechnung der $c_{\alpha,\beta;i,j}$ in Abhängigkeit von der Wahl von ε ist von Frank Lübeck, basierend auf dem Paket **CHEVIE** [GHL+96] des Computeralgebrasystems **GAP** [S+97], implementiert worden. Dieser Algorithmus benutzt nur die kombinatorische Struktur von Φ und lässt sich somit unabhängig von der Primzahl p beschreiben. Dort sind auch Algorithmen zur Berechnung der Strukturkonstanten der Lie-Algebra und somit der Vorzeichen $\varepsilon_{\alpha,\beta}$ implementiert.

(iv) Algorithmen zur Berechnung von Strukturkonstanten von Lie-Algebren und damit auch der Vorzeichen $\varepsilon_{\alpha,\beta}$ wurden auch unabhängig davon von Willem de Graaf für die Computeralgebrasysteme **GAP** und **MAGMA** [BC97] implementiert.

(3.7) Bezeichnungen
Es sei $(\mathbf{X}, \Phi, \mathbf{Y}, \Phi^\vee)$ ein Wurzeldatum von $\mathbf{G}$ bezüglich maximalem Torus $\mathbf{T}$ mit zugehöriger Boreluntergruppe $\mathbf{B}$ und Weylgruppe $\mathbf{W}$. Mittels Lemma I.(3.5) können eine Totalordnung auf Φ und Isomorphismen $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$ so gewählt werden, dass die Kommutatorrelationen (I.1) berechnet werden können. Sei ab jetzt eine solche Totalordnung fest gewählt. Mit Φ^+ bezeichnen wir die

positiven Wurzeln bezüglich dieser Totalordnung und mit Π das zugehörige Fundamentalsystem. Bezüglich dieser Wahlen sind die Konstanten $\varepsilon_{\alpha,\beta}$ und $c_{\alpha,\beta;i,j}$ gemäß Lemma I.(3.5) und Bemerkung I.(3.6) bestimmt. Gemäß Lemma I.(2.3) sind somit die Konstanten $\eta_{\alpha,\beta}$ eindeutig bestimmt. Damit sind durch diese Wahlen alle Bestandteile der Präsentation I.(2.4) bestimmt.

Damit kann man nun ein beliebiges Element $u \in \mathbf{U}$ auf Normalform (I.2) bringen. Dies kann sehr effizient mit dem **„collecting from the left“**, wie in [Sim94, Seite 401ff.] beschrieben, durchgeführt werden. Die Normalform des Produktes zweier Elemente $u_1, u_2 \in U$ lässt sich somit leicht berechnen, indem man die Normalformen von u_1 und u_2 multipliziert und das Ergebnis wieder auf Normalform bringt. Das Inverse von $u_1 = x_{\alpha_1}(t_1)x_{\alpha_2}(t_2)\cdots x_{\alpha_m}(t_m)$ ist $u_1^{-1} = x_{\alpha_m}(-t_m)\cdots x_{\alpha_2}(-t_2)x_{\alpha_1}(-t_1)$. Durch Normalisierung erhält man sofort die Normalform des Inversen. Da die Normalform nach Lemma I.(3.1) eindeutig ist, kann man u_1 und u_2 auf Gleichheit testen, indem man die Normalformen der beiden Elemente vergleicht.

(3.8) Lemma (vgl. [Him03, (1.6.2)])
Es sei Φ^+ eine disjunkte Vereinigung abgeschlossener Teilmengen $\Psi_1, \Psi_2 \subseteq \Phi^+$. Dabei heißt eine Teilmenge $\Psi \subseteq \Phi$ abgeschlossen, wenn für alle $\alpha, \beta \in \Psi$ mit $\alpha + \beta \in \Phi$ auch $\alpha + \beta \in \Psi$ gilt. Dann kann jedes $u \in U$ mittels der Kommutatorrelationen (I.1) in endlich vielen Schritten auf die Form

$$u = \prod_{\alpha\in\Psi_1} x_\alpha(t_\alpha) \cdot \prod_{\alpha\in\Psi_2} x_\alpha(t_\alpha)$$

gebracht werden. Hierbei sind die beiden Produkte aufsteigend bezüglich der in I.(3.7) gewählten Totalordnung angeordnet.

Beweis: Siehe [Him03, (1.6.2)]. □

(3.9) Bemerkung

(i) Der Beweis von Lemma I.(3.8) ist konstruktiv.

(ii) Häufige Anwendungen sind:

(a) $\Psi_1 = \Phi^+$, $\Psi_2 = \emptyset$. Dies ist die Normalform (I.2), die somit ein Spezialfall von Lemma I.(3.8) ist.

(b) $\Psi_1 = \{\pi\}$, $\Psi_2 = \Phi^+ \setminus \{\pi\}$ für $\pi \in \Pi$.

(c) $\Psi_1 = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \alpha w \in \Phi^-\}$, $\Psi_2 = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \alpha w \in \Phi^+\}$ für ein festes $w \in \mathbf{W}$.

(iii) Algorithmen zur Berechnung der Normalform (I.2) und der Darstellung in Lemma I.(3.8) sind von Frank Lübeck, Frank Himstedt und mir basierend auf dem Paket **CHEVIE** [GHL+96] des Computeralgebrasystems **GAP** [S+97] implementiert worden, vergleiche dazu auch [Him03]. Zu den benutzten Datenstrukturen vergleiche I.(5.4). Weitere unabhängige Implementationen liegen in **MAGMA** [BC97] und in dem Paket **unipot** im Rahmen von **GAP** von Sergei Haller [Hal00] vor.

I.4 Die Bruhat-Zerlegung und parabolische Untergruppen

Im Folgenden soll eine Normalform für Elemente aus $\mathbf{G}$ beschrieben werden, die sich als sehr nützlich bei expliziten Rechnungen in der Gruppe erweist. Weiterhin werden **parabolische Untergruppen** von $\mathbf{G}$ definiert und die zugehörige **Levizerlegung** beschrieben. Zum Schluss werden die Vertreter für die Doppelnebenklassen von $\mathbf{G}$ nach parabolischen Untergruppen untersucht. Zunächst müssen wir noch gewisse Untergruppen von $\mathbf{U}$ definieren, die für die Beschreibung der Normalform notwendig sind.

(4.1) Definition/Lemma (vgl. [Hum75, (8.3.5)])
Für $w \in \mathbf{W}$ definiere $R(w) := \{\alpha \in \Phi^+ \mid \alpha w \in \Phi^-\}$. Es sei $\mathbf{U}_w$ die von den $\mathbf{U}_\alpha$ für $\alpha \in R(w)$ erzeugte Gruppe. Dann ist $|R(w)| = l(w)$, der Länge des Weylgruppenelementes w, und es gilt:

$$\mathbf{U}_w = \prod_{\alpha \in R(w)} \mathbf{U}_\alpha,$$

wobei das Produkt nicht von der Reihenfolge der Faktoren abhängt.

Beweis: Dies folgt aus den Kommutatorrelationen I.(2.1). Vergleiche auch [Hum75, (8.3.5)]. □

Die gewünschte Normalform ergibt sich nun direkt aus den $\mathbf{B}\backslash\mathbf{G}/\mathbf{B}$-Doppelnebenklassen.

(4.2) Satz (Bruhatzerlegung, vgl. [Spr98, (8.3.9)])
Es sei $\{\widehat{w}\}_{w \in \mathbf{W}}$ ein Nebenklassenvertretersystem von $\mathbf{W} = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$. Dann gilt:

(i)
$$\mathbf{G} = \dot{\bigcup_{w \in \mathbf{W}}} \mathbf{B}\widehat{w}\mathbf{B}.$$
Eine Doppelnebenklasse $\mathbf{B}\widehat{w}\mathbf{B}$ heißt auch **Bruhatzelle**.

(ii) Jedes $g \in \mathbf{G}$ lässt sich eindeutig als Produkt
$$g = u'\widehat{w}hu$$
mit $u \in \mathbf{U}$, $h \in \mathbf{T}$, $w \in \mathbf{W}$ und $u' \in \mathbf{U}_w$ schreiben. Diese Darstellung heißt die **Normalform** oder **Bruhatzerlegung** von g.

Beweis: Siehe [Spr98, (8.3.9)]. □

Dieser Satz gilt für ein beliebiges Vertretersystem $\{\widehat{w}\}_{w \in \mathbf{W}}$. Wir werden in I.(5.1) aber auf diese Wahl genauer eingehen und ein System angeben, das wir in den folgenden Rechnungen benutzen werden.

(4.3) Definition/Lemma (parabolische Untergruppen und Leviuntergruppen)
Es sei $J \subset \Pi$ und $\mathbf{W}_J$ die von den Fundamentalspiegelungen s_π für $\pi \in J$ erzeugte **parabolische Untergruppe** der Weylgruppe $\mathbf{W}$. Es seien $\mathbf{N}_J \subseteq \mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ das Urbild von $\mathbf{W}_J$ unter der kanonischen Projektion $\pi : \mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}) \to \mathbf{W}$ und $\Phi_J := \Phi \cap \mathbb{Z}J$ und $\Phi_{\mathbf{P}_J} := \Phi^+ \cup \Phi_J$. Dann gilt:

(i) $\mathbf{P}_J := \mathbf{B}\mathbf{N}_J\mathbf{B}$ ist eine Untergruppe von $\mathbf{G}$ und heißt **standardparabolische Untergruppe** von $\mathbf{G}$.

(ii)
$$\mathbf{P}_J = \dot{\bigcup_{w \in \mathbf{W}_J}} \mathbf{B}\widehat{w}\mathbf{B}.$$

(iii)
$$\mathbf{P}_J = \left\langle \mathbf{T}, \mathbf{U}_\alpha \mid \alpha \in \Phi_{\mathbf{P}_J} \right\rangle$$

(iv)
$$\mathbf{U}_J := \prod_{\alpha \in \Phi^+ \cap (\Phi \setminus \Phi_J)} \mathbf{U}_\alpha$$
ist ein Normalteiler von $\mathbf{P}_J$, wobei das Produkt nicht von der Reihenfolge der Faktoren abhängt. Weiterhin ist $\mathbf{U}_J$ das unipotente Radikal von $\mathbf{P}_J$.

(v) $\mathbf{P}_J = \mathbf{L}_J \ltimes \mathbf{U}_J$, wobei $\mathbf{L}_J := \langle \mathbf{T}, \mathbf{U}_\alpha \mid \alpha \in \Phi_J \rangle$ eine zusammenhängende reduktive lineare algebraische Gruppe mit Wurzelsystem Φ_J, Weylgruppe $\mathbf{W}_J$ und Wurzeldatum $(\mathbf{X}(\mathbf{T}), \Phi_J, \mathbf{Y}(\mathbf{T}), \Phi_J^\vee)$ ist. Die Gruppe $\mathbf{L}_J$ heißt dann **Standardleviuntergruppe** von $\mathbf{P}_J$ und diese Zerlegung als semidirektes Produkt heißt **Levizerlegung** von $\mathbf{P}_J$.

Eine Untergruppe $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{G}$ heißt **parabolische Untergruppe** von $\mathbf{G}$, wenn sie in $\mathbf{G}$ zu einer standardparabolischen Untergruppe $\mathbf{P}_J$ für ein $J \subseteq \Pi$ konjugiert ist.

Beweis: Siehe [Car72, (8.2.2), (8.5.1) und (8.5.2)]. □

(4.4) Bemerkung
Für $J = \emptyset$ ist $\mathbf{P}_\emptyset$ gerade die Boreluntergruppe $\mathbf{B}$ und $\mathbf{U}_\emptyset$ das unipotente Radikal $\mathbf{U}$. Die zu $\mathbf{B}$ gehörende Standardleviuntergruppe ist der Torus $\mathbf{T}$ und es gilt $\mathbf{B} = \mathbf{T} \ltimes \mathbf{U}$. Für $J = \Pi$ ist $\mathbf{P}_\Pi = \mathbf{L}_\Pi = \mathbf{G}$ und $\mathbf{U}_\Pi$ die triviale Gruppe.

(4.5) Definition
Es sei $\mathbf{F}$ ein Frobeniusmorphismus von $\mathbf{G}$. Eine abgeschlossene, $\mathbf{F}$-stabile Untergruppe $\mathbf{L}$ von $\mathbf{G}$ heißt **regulär**, wenn $\mathbf{L}$ Leviuntergruppe zu einer (nicht notwendig $\mathbf{F}$-stabilen) parabolischen Untergruppe $\mathbf{P}$ von $\mathbf{G}$ ist. Ist $\mathbf{P}$ auch $\mathbf{F}$-stabil, so heißt $\mathbf{L}$ **maximal zerfallend**.

Als nächstes sollen die $\mathbf{P}_J\backslash\mathbf{G}/\mathbf{P}_K$-Doppelnebenklassen beschrieben werden. Auch diese werden durch Elemente der Weylgruppe indiziert. Dazu erst folgende Definitionen:

(4.6) Definition/Lemma (ausgezeichnete Nebenklassenvertreter)
Es seien $J, K \subseteq \Pi$. Dann gilt:

(i) $D_J := \{w \in \mathbf{W} \mid Jw = J\}$ ist ein Nebenklassenvertretersystem für die Rechtsnebenklassen von $\mathbf{W}_J$ in $\mathbf{W}$. Die Elemente von D_J heißen **ausgezeichnete Nebenklassenvertreter**.

(ii) $D_{J,K} := D_J^{-1} \cap D_K$ ist ein Doppelnebenklassenvertretersystem für $\mathbf{W}_J\backslash\mathbf{W}/\mathbf{W}_K$. Die Elemente von $D_{J,K}$ heißen **ausgezeichnete Doppelnebenklassenvertreter**.

Beweis: Siehe [Car85, (2.7.3)]. □

(4.7) Lemma (Doppelnebenklassenvertreter und Normalform)
Es seien $J, K \subseteq \Pi$ und $D_{J,K}$ wie in I.(4.6).

(i) Dann bildet $N_{J,K} := \{\widehat{w} \mid w \in D_{J,K}\}$ ein Vertretersystem für $\mathbf{P}_J \backslash \mathbf{G} / \mathbf{P}_K$. Es gilt also:

$$\mathbf{G} = \dot{\bigcup_{w \in D_{J,K}}} \mathbf{P}_J \widehat{w} \mathbf{P}_K.$$

(ii) Falls $J = K$ ist gilt genauer

$$\mathbf{G} = \dot{\bigcup_{w \in D_{J,J}}} \mathbf{U}_w \widehat{w} \mathbf{P}_J.$$

und jedes $g \in \mathbf{G}$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$g = u' \widehat{w} p$$

mit $u' \in \mathbf{U}_w$, $w \in D_{J,J}$ und $p \in \mathbf{P}_J$.

Beweis: Siehe [Car85, (2.8.1)]. □

(4.8) Bemerkung
Die Bruhatzerlegung I.(4.2) ist ein Spezialfall von I.(4.7) für $J = K = \emptyset$.

Die Bruhatzerlegung ist verträglich mit Frobeniusmorphismen, genau gilt:

(4.9) Satz (Bruhatzerlegung in $\mathbf{G}^\mathbf{F}$, vgl. [Car85, 2.9])
Es seien $\mathbf{F}$ ein Frobeniusmorphismus von $\mathbf{G}$ und $\mathbf{P}_J$ eine $\mathbf{F}$-stabile standardparabolische Untergruppe von $\mathbf{G}$. Dann gilt:

(i) Jedes $g \in \mathbf{G}^\mathbf{F}$ lässt sich eindeutig als Produkt

$$g = u' \widehat{w} h u$$

mit $u \in \mathbf{U}^\mathbf{F}$, $h \in \mathbf{T}^\mathbf{F}$, $w \in \mathbf{W}^\mathbf{F}$ und $u' \in \mathbf{U}_w^\mathbf{F}$ schreiben. Diese Darstellung heißt die **Normalform** oder **Bruhatzerlegung** von g.

(ii) Für $g \in \mathbf{G}^\mathbf{F}$ und $w \in \mathbf{W}^\mathbf{F}$ sind äquivalent:

(a) $g \in \mathbf{P}_J \widehat{w} \mathbf{P}_J$.

(b) $g \in \mathbf{P}_J^\mathbf{F} \widehat{w} \mathbf{P}_J^\mathbf{F}$.

Beweis: Siehe [Car85, 2.9]. Teil (ii) folgt wegen der Eindeutigkeit aus (i) und der Bruhatzerlegung I.(4.2) für $\mathbf{G}$. □

I.5 Ein Algorithmus zum Rechnen in reduktiven Gruppen

Wir wollen in diesem Abschnitt einen Algorithmus zum expliziten Rechnen mit Elementen in einer reduktiven algebraischen Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper angeben. Dazu soll die Präsentation I.(2.4) benutzt werden. Die Bruhatzerlegung I.(4.2) werden wir benutzen, um die Elemente im Computer darzustellen. Dafür müssen wir zunächst noch ein Nebenklassenvertretersystem für $\mathbf{W} = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$ auswählen. Im Prinzip könnten wir hier ein beliebiges Vertretersystem auswählen, für das explizite Rechnen erweist sich aber folgende Wahl als zweckmäßig. Vergleiche dazu auch (iii) und (iv) von Bemerkung I.(5.5).

(5.1) Definition/Lemma
Es sei $w \in \mathbf{W}$ ein Element der Weylgruppe von $\mathbf{G}$. Dann lässt sich w als reduziertes Wort

$$w := s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_k}$$

mit $\pi_i \in \Pi$ für $1 \leqslant i \leqslant k$ schreiben. Wir definieren

$$\widehat{w} := n_{\pi_1} \cdots n_{\pi_k} \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}).$$

Die Definition von $\widehat{w}$ ist unabhängig von der Wahl des reduzierten Wortes und die Menge $\{\widehat{w}\}_{w \in \mathbf{W}}$ bildet ein Nebenklassenvertretersystem von $\mathbf{W} = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$.

Beweis: Die Weylgruppe $\mathbf{W}$ wird von den Fundamentalspiegelungen s_π für $\pi \in \Pi$ erzeugt. Daher lässt sich w als Wort in diesen s_π schreiben. Aus der Relation (x) aus I.(2.4) und dem Satz von Matsumoto [Spr98, (8.3.3)] folgt, dass $\widehat{w}$ unabhängig von der Wahl dieses reduzierten Wortes ist. Nach Lemma I.(1.4) (iii) ist das Bild von $\widehat{w}$ unter der kanonischen Projektion gerade w. Die Behauptung folgt aus Satz I.(4.2). □

Wir brauchen noch folgendes Lemma für die Parametrisierung des Torus $\mathbf{T}$. Diese Parametrisierung werden wir benutzen, um eine geeignete Datenstruktur für die Toruselemente zu definieren.

(5.2) Lemma (Parametrisierung von T, vgl. [Car85, (3.1.2)])

(i) Als abelsche Gruppe ist Hom $(\mathbf{X}, k)$ ist isomorph zum Torus $\mathbf{T}$. Wir identifizieren die Elemente von Hom $(\mathbf{X}, k)$ mit den Toruselementen aus $\mathbf{T}$ vermöge dieses Isomorphismus. Siehe dazu auch den Teil (a) am Ende von Satz I.(2.4). Unter diesem Isomorphismus wird ein $\zeta \in$ Hom $(\mathbf{X}, k)$ auf das Toruselement $h(\zeta)$ abgebildet.

(ii) Es ist $\mathbf{Y} \otimes k^*$ isomorph zu Hom $(\mathbf{X}, k)$ als abelsche Gruppe vermöge des Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Y} \otimes k^* & \longrightarrow & \text{Hom}\,(\mathbf{X}, k) \\ \gamma \otimes \lambda & \longmapsto & \left(\chi \mapsto \lambda^{\langle \chi, \gamma \rangle}\right). \end{array}$$

Die Tensorprodukte sind hier über $\mathbb{Z}$ zu nehmen.

(iii) Jedes Element von $\mathbf{Y} \otimes k^*$ lässt sich eindeutig darstellen in der Form $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \otimes \lambda_i$ mit $\lambda_i \in k^*$, wobei $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ eine Basis von $\mathbf{Y}$ ist. Wir erhalten also vermöge der Identifizierung von Hom $(\mathbf{X}, k)$ mit $\mathbf{T}$ einen Gruppenisomorphismus abelscher Gruppen

$$\begin{array}{rccl} \theta: & (k^*)^n & \longrightarrow & \mathbf{T} \\ & (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \longmapsto & h\left(\chi \mapsto \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{\langle \chi, \gamma_i \rangle}\right). \end{array}$$

Beweis: Vergleiche [Car85, (3.1.1) und (3.1.2)]. □

Wir wollen im Folgenden nochmals alle benötigten Bezeichnungen zusammenfassen, um daraufhin eine geeignete Datenstruktur für die Elemente von $\mathbf{G}$ zu beschreiben.

(5.3) Bezeichnungen
Wir behalten die Bezeichnungen aus I.(3.7) bei. Das Wurzeldatum Φ von $\mathbf{G}$ sei durch folgende Angaben gegeben:

(i) Es sei $\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ eine Basis des freien $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbf{X}$. Die einfachen Wurzeln des Fundamentalsystems $\Pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_l\}$ von Φ seien als $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen der Basis von $\mathbf{X}$ gegeben.

(ii) Es sei $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ die zu $\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ duale Basis von $\mathbf{Y}$. Die einfachen Kowurzeln $\{\pi_1^\vee, \ldots, \pi_l^\vee\}$ seien als $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen der Basis von $\mathbf{Y}$ gegeben.

(iii) Die Wurzeln in Φ und die Kowurzeln in $\Phi^\vee$ sind als Linearkombinationen der einfachen Wurzeln beziehungsweise der einfachen Kowurzeln gegeben. Vergleiche dazu den in [Hum72, Seite 56] angegebenen Algorithmus.

(iv) Die Spiegelungen s_α für $\alpha \in \Phi$ sind als Permutationen der Wurzeln in Φ gegeben. Die Weylgruppe ist somit als Permutationsgruppe auf den Wurzeln gegeben.

(v) Es sei $m := |\Phi^+|$ die Anzahl der positiven Wurzeln in Φ. Die positiven Wurzeln in Φ^+ werden aufsteigend gemäß der gewählten Totalordnung mit den Zahlen $\{1, \ldots, m\}$ identifiziert. Die negativen Wurzeln werden dann gemäß der Totalordnung absteigend mit den Zahlen $\{m+1, \ldots, 2m\}$ identifiziert. Damit erhalten wir eine Permutationsdarstellung von $\mathbf{W}$ auf $2m$ Punkten. Dies ist gerade die Darstellung, die in **CHEVIE** [GHL+96] für die Weylgruppe benutzt wird.

(vi) Für $w \in W$ ist $R(w) := \{\alpha \in \Phi^+ \mid \alpha w \in \Phi^-\}$.

(vii) Wir bezeichnen die Isomorphismen x_α für $\alpha \in \Phi$ entsprechend der in (v) angegebenen Identifizierung auch mit x_i für $i \in \{1, \ldots, m\}$.

(viii) Wir wählen das Vertretersystem $\{\widehat{w}\}_{w \in \mathbf{W}}$ wie in Definition I.(5.1).

Ab jetzt gelten für die ganze Arbeit die Bezeichnungen von I.(5.3). Damit stehen nun alle notwendigen Begriffe zur Verfügung, um die Datenstrukturen zu beschreiben, mit denen die Elemente von $\mathbf{G}$ auf dem Computer dargestellt werden können.

(5.4) Bemerkung (Datenstruktur für die Elemente von G)
Es sei $g \in \mathbf{G}$ ein beliebiges Element von $\mathbf{G}$. Dann lässt sich g nach I.(4.2) eindeutig darstellen als $g = u'\widehat{w}hu$ mit $u \in \mathbf{U}$, $h \in \mathbf{T}$, $w \in \mathbf{W}$ und $u' \in \mathbf{U}_w$. Wir speichern g dann als Quadrupel (u', w, h, u). Für die einzelnen Komponenten des Quadrupels wählen wir folgende Datenstrukturen:

(i) $\mathbf{U}_w$ ist eine Untergruppe von $\mathbf{U}$. Ein Element $u \in \mathbf{U}$ lässt sich gemäß Lemma I.(3.1) bezüglich der gewählten Totalordnung eindeutig in Normalform

$$u = x_{\alpha_1}(u_1)x_{\alpha_2}(u_2)\cdots x_{\alpha_m}(u_m)$$

mit $\alpha_i \in \Phi^+$ und $u_i \in k^*$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ darstellen. Da für alle $\alpha \in \Phi$ dann $x_\alpha(0) = 1$ ist, brauchen wir nur die $x_{\alpha_i}(u_i)$ mit $u_i \neq 0$ abzuspeichern. Wir benutzen dann die Identifizierung in I.(5.3) (vi) und speichern entsprechend u als Paar von Listen

$$\left[[i_1, \ldots, i_l], \left[u_{i_1}, \ldots, u_{i_l}\right]\right],$$

wobei $u_{i_j} \neq 0$ für $1 \leqslant j \leqslant l$ ist. Das Element $u' \in \mathbf{U}_w$ speichern wir entsprechend. Hierbei ist es eigentlich nicht wichtig, dass wir $u_{i_j} \neq 0$ für $1 \leqslant j \leqslant l$ fordern. Wir wollen dies nur aus Effizienzgründen so handhaben, wir vermeiden auf diese Weise in Rechnungen viele Summanden, die Null sind.

(ii) Die Weylgruppenelemente $w \in \mathbf{W}$ speichern wir, wie in I.(5.3) (v) beschrieben, als Permutationen der Wurzeln in Φ.

(iii) Wir speichern $h \in \mathbf{T}$ durch das gemäß Lemma I.(5.2) eindeutig bestimmte n-Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \in k^*$ für $1 \leqslant i \leqslant n$ und $\theta((\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = h$.

(iv) Wegen der Eindeutigkeit der Bruhatzerlegung wird jedes Element $g \in \mathbf{G}$ eindeutig durch ein solches Quadrupel dargestellt. Zwei Elemente sind insbesondere genau dann gleich, wenn die abgespeicherten Quadrupel gleich sind. Somit ist mit dieser Datenstruktur ein Gleichheitstest von Elementen effizient möglich.

Zum Rechnen in $\mathbf{G}$ brauchen wir noch zwei Dinge. Erstens müssen wir ein gegebenes Element von $\mathbf{G}$ in die Datenstruktur I.(5.4) übersetzen. Dazu müssen wir im Wesentlichen die Bruhatzerlegung I.(4.2) eines Elements bestimmen, das als Produkt der in Satz I.(2.4) angegebenen Erzeuger von $\mathbf{G}$ gegeben ist. Zweitens müssen wir beschreiben, wie zwei Elemente $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$ multipliziert werden, wenn g_1 und g_2 in ihrer Bruhatzerlegung gemäß Bemerkung I.(5.4) gegeben sind. Außerdem müssen wir das Inverse zu einem Element berechnen können. Wir müssen also einen Algorithmus beschreiben, wie man die Bruhatzerlegung von g_1g_2 und von g_1^{-1} berechnet. Wir betrachten hier zunächst die zweite Frage, die erste lässt sich danach darauf zurückführen. Dazu untersuchen wir zuerst die folgenden besonders einfachen Spezialfälle. Der allgemeine Fall kann dann auf diese vier Fälle reduziert werden.

(5.5) Bemerkung
Es seien $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$.

(i) Falls g_1 und g_2 beide in $\mathbf{U}$ liegen, ergibt sich das Produkt beziehungsweise das Inverse durch **„collecting from the left“**, wie in Abschnitt I.3 beschrieben ist.

(ii) Wenn g_1 und g_2 beide Elemente von $\mathbf{T}$ sind, so ist auch das Produkt in $\mathbf{T}$. Das zugehörige n-Tupel erhalten wir durch komponentenweise Multiplikation der n-Tupel, die g_1 und g_2 darstellen. Ebenso erhalten wir das Inverse eines Toruselementes durch komponentenweises Invertieren.

(iii) Falls $g_1 = \widehat{w}$ für ein $w \in \mathbf{W}$ und $g_2 = n_\alpha$ für ein $\alpha \in \Pi$ ist, so gilt für die Bruhatzerlegung des Produktes:

$$\widehat{w}n_\alpha = \begin{cases} \widehat{ws_a}, & \text{falls } \alpha w^{-1} > 0, \\ (\widehat{ws_a})h_\alpha, & \text{falls } \alpha w^{-1} < 0, \end{cases}$$

wobei das Toruselement h_α durch das n-Tupel

$$\left((-1)^{a'_1}, \ldots, (-1)^{a'_n}\right),$$

mit $\alpha^\vee = \sum_{i=1}^n a'_i \gamma_i$ gegeben ist. Damit lässt sich die Bruhatzerlegung eines Produktes $\widehat{w_1}\widehat{w_2}$ für beliebige $w_1, w_2 \in \mathbf{W}$ bestimmen, indem man auf $\widehat{w_2}$ die Definition I.(5.1) anwendet.

(iv) Es seien $w \in \mathbf{W}$ und $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ die positiven Wurzeln, die unter w auf negative Wurzeln abgebildet werden. Es gilt dann

$$\widehat{w}^{-1} = \widehat{w^{-1}} \prod_{i=1}^m h_{\alpha_i}.$$

Beweis: (i) und (ii) sind klar. Ist $\alpha w^{-1} > 0$, so können wir nach [Hum90, 1.7] w als reduziertes Wort $w = s_{\alpha_{i_1}} \cdots s_{\alpha_{i_m}}$ schreiben, so dass auch ws_α als reduziertes Wort vorliegt. Aus der Definition I.(5.1) folgt dann $\widehat{w}n_\alpha = \widehat{ws_\alpha}$. Ist $\alpha w^{-1} < 0$, so können wir $w = s_{\alpha_{i_1}} \cdots s_{\alpha_{i_m}} s_\alpha$ als reduziertes Wort schreiben, so dass $s_{\alpha_{i_1}} \cdots s_{\alpha_{i_m}}$ ein reduziertes Wort für ws_α ist. Aus der Definition und den bisherigen Betrachtungen und Relation (vii) in I.(2.4) folgt $\widehat{w}n_\alpha = \widehat{ws_\alpha}n_\alpha^2 = \widehat{ws_\alpha}h_\alpha$. Es gilt nach der Definition von h_α in I.(2.4) und Lemma I.(5.2)(iii)

$$h_\alpha = \theta\left(\alpha^\vee \otimes (-1)\right) = \theta\left(\sum_{i=1}^n a'_i \gamma_i \otimes (-1)\right) = \theta\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \otimes (-1)^{a'_i}\right),$$

woraus (iii) folgt. Für (iv) schreiben wir w als reduziertes Produkt von Fundamentalspiegelungen $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_m}$ mit $\alpha_i \in \Pi$ für $1 \leqslant i \leqslant m$. Mit Relation (vii) in I.(2.4) folgt nun wegen $h_\alpha = h_\alpha^{-1}$

$$\widehat{w}^{-1} = \left(n_{\alpha_1} \cdots n_{\alpha_m}\right)^{-1} = n_{\alpha_m} h_{\alpha_m} \cdots n_{\alpha_1} h_{\alpha_1}.$$

Sukzessives Anwenden von Relation (vi) aus I.(2.4) ergibt mit $w_i := s_{\alpha_{i-1}} \cdots s_{\alpha_1}$

$$\widehat{w}^{-1} = \left(n_{\alpha_m} \cdots n_{\alpha_1}\right) \prod_{i=1}^m h_{\alpha_i w_i}.$$

Nun gilt nach Definition I.(5.1) $\widehat{w^{-1}} = n_{\alpha_m} \cdots n_{\alpha_1}$. Außerdem sind nach [Car72, (2.5.16)] die Wurzeln $\alpha_i w_i$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ genau die positiven Wurzeln, die von w auf negative Wurzeln abgebildet werden, woraus die Behauptung folgt. □

Die Bemerkung I.(5.5) beschreibt die Bruhatzerlegung von Produkten und Inversen von Elementen aus $\mathbf{U}$, $\mathbf{T}$ beziehungsweise $\{\widehat{w}\}_{w\in\mathbf{W}}$. Zu beachten ist dabei, dass hier wesentlich die Wahl der Nebenklassenvertreter $\{\widehat{w}\}_{w\in\mathbf{W}}$ eingegangen ist. Für andere Wahlen dieser Vertreter wäre es unter Umständen sehr schwierig, die Bruhatzerlegung der entsprechenden Produkte zu beschreiben. Als nächstes wollen wir nun die Operation per Konjugation von $\mathbf{T}$ auf $\mathbf{U}$ und von Elementen n_α auf $\mathbf{U}$ und $\mathbf{T}$ beschreiben und die zugehörigen Bruhatzerlegungen bestimmen. Mit deren Hilfe können wir dann die Bruhatzerlegung des Produktes beliebiger Elemente berechnen.

(5.6) Bemerkung
Es seien $\pi \in \Pi$, $\alpha \in \Phi^+$, $\beta \in \Phi$ und $t \in k^*$. Weiterhin sei $h \in \mathbf{T}$ ein Toruselement, das durch das n-Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (k^*)^n$ gegeben ist und $x_\alpha(t) \in \mathbf{U}$ ein unipotentes Element, das durch die Liste $[[\alpha], [t]]$ dargestellt wird.

(i) Es ist

$$x_\alpha(t)^h = x_\alpha\left(t \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{a_i}\right),$$

wobei die $a_i \in \mathbb{Z}$ für $1 \leqslant i \leqslant n$ gegeben sind als die Koeffizienten in der Linearkombination $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_i$. Das Element $x_\alpha(t)^h$ wird dann dargestellt durch die Liste

$$\left[[\alpha], \left[t \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{a_i}\right]\right].$$

Analog ist dann auch

$${}^h x_\alpha(t) = x_\alpha\left(t \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{-a_i}\right)$$

und ${}^h x_\alpha(t)$ wird dargestellt durch die Liste

$$\left[[\alpha], \left[t \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{-\alpha_i}\right]\right].$$

(ii) Die Weylgruppe $\mathbf{W}$ operiert in natürlicher Weise auf der Kocharaktergruppe $\mathbf{Y}$ und es sei $\left(s_{ij}\right) \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ die Matrix der Operation von s_π auf $\mathbf{Y}$ bezüglich der Basis $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ von $\mathbf{Y}$. Ein Algorithmus zur Berechnung dieser Matrix ist in der Dokumentation von **CHEVIE** [GHL+96] beschrieben und mit der Funktion MatYPerm implementiert. Es ist dann

$$h^{n_\pi} = {}^{n_\pi} h = h',$$

wobei h' durch das n-Tupel $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ mit

$$\mu_i := \prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{s_{ji}}$$

für $1 \leqslant i \leqslant n$ dargestellt wird.

(iii) Es ist

$$x_\alpha(t)^{n_\beta} = x_{\alpha s_\beta}\left(\eta_{\beta,\alpha} t\right)$$

und wird durch die Liste

$$\left[[\alpha s_\beta], [\eta_{\beta,\alpha} t]\right]$$

dargestellt. Weiter gilt

$${}^{n_\beta}x_\alpha(t) = x_{\alpha s_\beta}\left(\eta_{\beta,\alpha}(-1)^{\langle\alpha,\beta^\vee\rangle} t\right).$$

Dabei ist $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i'$, wobei für $1 \leqslant i \leqslant n$ die $a_i \in \mathbb{Z}$ gegeben sind als die Koeffizienten in der Linearkombination $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \chi_i$ und die $b_i' \in \mathbb{Z}$ gegeben sind als die Koeffizienten in der Linearkombination $\beta^\vee = \sum_{i=1}^n b_i' \gamma_i$. Und ${}^{n_\beta}x_\alpha(t)$ wird dargestellt durch die Liste

$$\left[[\alpha s_\beta], \left[\eta_{\beta,\alpha}(-1)^{(\sum_{i=1}^n a_i b_i')} t\right]\right]$$

Beweis: Teil (i) folgt aus den Relationen (i) und (iv) von Satz I.(2.4). Teil (ii) folgt durch Nachrechnen sofort aus Relation (vi) aus Satz I.(2.4), wenn man beachtet, dass $\langle \chi^{s_\alpha}, \gamma\rangle = \langle \chi, \gamma^{s_\alpha^\vee}\rangle$ für alle $\chi \in \mathbf{X}$ und $\gamma \in \mathbf{Y}$ ist. Teil (iii) folgt unter Berücksichtigung von $n_\beta^{-1} = n_\beta h_\beta$ (Relation (vii)) aus den Relationen (v) aus Satz I.(2.4) und Teil (i). □

Damit sind wir endlich in der Lage, für $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$, die in Bruhatzerlegung gemäß Bemerkung I.(5.4) gegeben sind, die Bruhatzerlegung des Produktes $g_1 g_2$ zu berechnen und abzuspeichern. Das folgende Lemma beschreibt den wesentlichen Schritt, der dazu notwendig ist.

(5.7) Lemma (Grundschritt zum Rechnen mit Elementen)
Es sei $g_1 \in \mathbf{G}$ gegeben in der Bruhatzerlegung $g_1 = u'\widehat{w}hu$ und gemäß Bemerkung I.(5.4) abgespeichert. Außerdem gelte für $g_2 \in \mathbf{G}$ einer der drei folgenden Fälle:

(i) $g_2 = h' \in \mathbf{T}$ gespeichert als n-Tupel $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$,

(ii) $g_2 = x_\alpha(t)$ mit $\alpha \in \Phi^+$ und $t \in k^*$ gespeichert als Liste $[[\alpha], [t]]$,

(iii) $g_2 = n_\pi$ mit $\pi \in \Pi$ gespeichert als die Permutation, die s_π auf den Wurzeln induziert.

Dann erhält man die Bruhatzerlegung von $g_1 g_2$ in den drei Fällen folgendermaßen:

(i) Hier ist

$$g_1 g_2 = (u'\widehat{w}hu)h' = u'\widehat{w}(hh')(u^{h'}),$$

und dies ist die Bruhatzerlegung von $g_1 g_2$, die gemäß I.(5.5) (ii) und I.(5.6) (i) abgespeichert wird. In diesem Fall ist keine aufwändige Berechnung erforderlich, insbesondere ist kein **collecting** wie in Abschnitt I.3 beschrieben erforderlich.

(ii) Hier ist

$$g_1 g_2 = (u'\widehat{w}hu)x_\alpha(t) = u'\widehat{w}h(ux_\alpha(t)),$$

und dies ist die Bruhatzerlegung von $g_1 g_2$. Zur Speicherung ist ein Collecting-Prozess gemäß I.(5.5) (i) notwendig.

(iii) Dieser Fall erfordert ein wenig mehr Aufwand. Wir schreiben zunächst u mittels Bemerkung I.(3.9) (ii)(b) in der Form

$$u = x_\pi(t')u''$$

mit $u'' = x_{\alpha_1}(t_1)\cdots x_{\alpha_m}(t_m) \in \mathbf{U}$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Phi^+ \setminus \{\pi\}$ und $t_1, \ldots, t_m \in k^*$. Nach der Form von t' unterscheiden wir die drei folgenden Fälle:

(a) $t' = 0$,
(b) $t' \neq 0, \pi w^{-1} \in \Phi^+$,
(c) $t' \neq 0, \pi w^{-1} \notin \Phi^+$.

In den drei Fällen erhalten wir folgendermaßen die Bruhatzerlegung:

(a) In diesem Fall gilt für das Produkt g_1g_2

$$g_1g_2 = (u'\widehat{w}hu)n_\pi = u'\widehat{w}hu''n_\pi = u'(\widehat{w}n_\pi)(h^{n_\pi})((u'')^{n_\pi}).$$

Dies ist schon fast die Bruhatzerlegung des Produktes. Zunächst können wir gemäß Bemerkung I.(5.5) (iii) nun $\widehat{w}n_\pi(h^{n_\pi}) = \widehat{w'}h'$ mit $w' \in \mathbf{W}$ und $h' \in \mathbf{T}$ schreiben. Weiterhin schreiben wir mittels Bemerkung I.(3.9) (ii)(c) $u' = u'_1u'_2$ mit $u'_1 \in \mathbf{U}_{w'}$ und $u'^{w'}_2 \in \mathbf{U}$. Wir erhalten so für das Produkt

$$g_1g_2 = u'_1\widehat{w'}h'\left((u'_2)^{\widehat{w'h'}}((u'')^{n_\pi})\right).$$

Dies ist jetzt wegen der Relationen (iv) und (v) von Satz I.(2.4) die gewünschte Bruhatzerlegung, die sich gemäß I.(5.5) und I.(5.6) abspeichern lässt.

(b) In diesem Fall ist wegen Relation (v) aus Satz I.(2.4) $\widehat{w}h\left(x_\pi(t')\right) \in \mathbf{U}$ und wir erhalten für das Produkt

$$g_1g_2 = (u'\widehat{w}hu)n_\pi = u'\widehat{w}hx_\pi(t')u''n_\pi = \left(u'\left(\widehat{w}h\left(x_\pi(t')\right)\right)\right)(\widehat{w}n_\pi)h^{n_\pi}((u'')^{n_\pi}).$$

Wir können dann analog zu Fall (iii)(a) die Bruhatzerlegung berechnen und abspeichern.

(c) In diesem Fall ist wegen Relation (v) aus Satz I.(2.4) $\widehat{w}h\left(x_\pi(t')\right) \notin \mathbf{U}$. Unter Ausnutzung von Relation (ix) aus Satz I.(2.4) erhalten wir dann

$$g_1g_2 = \left(u'\left(\widehat{w}h\left(x_{-\pi}(t'^{-1})\right)\right)\right)\widehat{w}\left(h\overline{\pi^\vee}(-t'^{-1})\right)\left(x_\pi(-t')^{\overline{\pi^\vee}(-t'^{-1})}(u'')^{n_\pi}\right).$$

Auch hier kann man analog zu Fall (iii)(a) die Bruhatzerlegung des Produktes berechnen und abspeichern, wenn man noch beachtet, dass $\overline{\pi^\vee}(-t'^{-1})$ durch das n-Tupel $\left((-t')^{-\pi_1^\vee}, \ldots, (-t')^{-\pi_n^\vee}\right)$ dargestellt wird, wenn $\pi^\vee = \sum_{i=1}^n \pi_i^\vee\gamma_i$ ist. Denn es gilt gemäß Lemma I.(5.2)(iii) für beliebiges $t \in k^*$

$$\overline{\pi^\vee}(t) = \theta\left(\pi^\vee \otimes t\right) = \theta\left(\sum_{i=1}^n \pi_i^\vee\gamma_i \otimes t\right) = \theta\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \otimes t^{\pi_i^\vee}\right).$$

Zu beachten ist, dass in diesem Fall das Körperelement t' invertiert werden muss.

Beweis: Ergibt sich sofort durch Nachrechnen. □

(5.8) Algorithmus (Grundform des Algorithmus zum Rechnen mit Elementen von G)

INPUT:
- $g_1 = u_1' \widehat{w_1} h_1 u_1 \in \mathbf{G}$, gespeichert gemäß I.(5.4)
- $g_2 = u_2' \widehat{w_2} h_2 u_2 \in \mathbf{G}$, gespeichert gemäß I.(5.4)

OUTPUT: $g_1 g_2 = u' \widehat{w} h u \in \mathbf{G}$, gespeichert gemäß I.(5.4)

Führe folgenden Algorithmus durch:

1. Initialisiere: list $\leftarrow []$, erg $\leftarrow g_1$.
2. Setze erg $\leftarrow$ erg $\cdot\, u_2'$ gemäß Lemma I.(5.7)(ii).
3. Schreibe gemäß Definition I.(5.1) $\widehat{w_2} := n_{\pi_1} \cdots n_{\pi_r}$ mit $\pi_i \in \Pi$ für $1 \leqslant i \leqslant r$.
4. Für alle n_{π_i} mit $1 \leqslant i \leqslant r$ führe durch:

   Es sei erg $= u' \widehat{w} h u$. Schreibe $u = x_\pi(t') u''$ gemäß Bemerkung I.(3.9). Führe folgende Fallunterscheidung durch:

   i. Falls $t' = 0$, so setze erg $\leftarrow$ erg $\cdot\, n_{\pi_i}$ gemäß Lemma I.(5.7)(iii)(a)
   ii. Falls $t' \neq 0, \pi w^{-1} \in \Phi^+$, so setze erg $\leftarrow$ erg $\cdot\, n_{\pi_i}$ gemäß Lemma I.(5.7)(iii)(b)
   iii. Falls $t' \neq 0, \pi w^{-1} \notin \Phi^+$, so setze erg $\leftarrow$ erg $\cdot\, n_{\pi_i}$ gemäß Lemma I.(5.7)(iii)(c)
5. Setze erg $\leftarrow$ erg $\cdot\, h_2$ gemäß Lemma I.(5.7)(i).
6. Setze erg $\leftarrow$ erg $\cdot\, u_2$ gemäß Lemma I.(5.7)(ii).
7. Gebe erg zurück.

Beweis: Klar mit Lemma I.(5.7). □

(5.9) Bemerkung

Mit Hilfe des Algorithmus I.(5.8) können wir das Produkt zweier Elemente von $\mathbf{G}$, die in Normalform gemäß I.(5.4) gegeben sind, multiplizieren und das Ergebnis wieder in der Normalform für den Computer nutzbar abspeichern. Wir können diesen Algorithmus aber auch benutzen, um Elemente zu invertieren und die Normalform für ein als Produkt in den Erzeugern von $\mathbf{G}$ gegebenes Element zu berechnen.

(i) Es sei $g = u' \widehat{w} h u \in \mathbf{G}$, dann können wir g invertieren, indem wir u',$\widehat{w}$,h und u einzeln gemäß Bemerkung I.(5.5) invertieren und anschließend die Normalform des Produktes $u^{-1} h^{-1} \widehat{w}^{-1} u'^{-1}$ mittels Algorithmus I.(5.8) berechnen.

(ii) Die Gruppe $\mathbf{G}$ wird erzeugt von der Menge $\{h, x_\alpha(t) \mid h \in \mathbf{T}, \alpha \in \Phi, t \in k\}$. Es sei $g = g_1 \cdots g_m \in \mathbf{G}$ gegeben als Wort in diesen Erzeugern. Falls $g_i = x_\alpha(t)$ mit $\alpha \in \Phi^-$ ist, so gibt es ein $\pi \in \Pi$ und ein $w \in \mathbf{W}$ mit $\pi w = \alpha$. Wir schreiben w als reduziertes

Produkt von Fundamentalspiegelungen $w = s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_r}$. Für $1 \leqslant i \leqslant r$ definieren wir dann

$$w_i := \prod_{j=1}^{i} s_{\pi_j}$$

und zusätzlich sei an dieser Stelle ausnahmsweise aus notationstechnischen Gründen w_0 das neutrale Element und nicht das längste Element von $\mathbf{W}$. Weiter definieren wir dann

$$\eta := \prod_{i=1}^{r} \eta_{\pi w_{i-1}, \pi w_i}.$$

Aus den Relationen (v) aus Satz I.(2.4) folgt dann

$$x_\alpha(t) = \widehat{w}^{-1} x_\pi(\eta t) \widehat{w}.$$

Für diesen Ausdruck lässt sich mit Algorithmus I.(5.8) die Bruhatzerlegung berechnen. Ersetze g_i durch diesen Ausdruck. Mit dem Algorithmus I.(5.8) lässt sich dann die Bruhatzerlegung von g berechnen.

(5.10) Bemerkung

(i) Beim Algorithmus I.(5.8) müssen gegebenenfalls in Schritt 4(iii) Körperelemente invertiert werden. Dies wird beim Rechnen mit parametrisierten Elementen in $\mathbf{G}$ problematisch sein. Darauf werden wir in Abschnitt I.6 noch genauer eingehen. Ansonsten wird in allen Schritten des Algorithmus nur die Ringstruktur von k benutzt.

(ii) Es sei $\mathbf{F}$ ein Frobeniusmorphismus von $\mathbf{G}$ und das Wurzeldatum von $\mathbf{G}$ sei bezüglich eines $\mathbf{F}$-stabilen maximalen Torus $\mathbf{T}$ gegeben. Operiert $\mathbf{F}$ trivial auf dem Wurzelsystem von $\mathbf{G}$, so wird die zugehörige Chevalley-Gruppe $\mathbf{G}^\mathbf{F}$ als Untergruppe von $\mathbf{G}$ gerade von den Elementen $\{h, x_\alpha(t) \mid h \in \mathbf{T}^\mathbf{F}, \alpha \in \Phi, t \in k^\mathbf{F}\}$ erzeugt, die eine Teilmenge der Erzeuger von $\mathbf{G}$ in der Präsentation I.(2.4) bilden. Dabei induziert $\mathbf{F}$ gemäß [DM91, Proposition 3.3] einen Körperautomorphismus auf k, den wir auch mit $\mathbf{F}$ bezeichnen. Der Algorithmus I.(5.8) beschreibt in diesem Fall genau das explizite Rechnen in $\mathbf{G}^\mathbf{F}$.

(iii) Der oben beschriebene Algorithmus zum expliziten Rechnen in zusammenhängenden linearen reduktiven Gruppen ist von Frank Himstedt und mir basierend auf **CHEVIE** [GHL+96] innerhalb des Computeralgebrasystems **GAP** [S+97] implementiert worden, vergleiche dazu auch [Him03]. Unabhängig davon haben Arjeh M. Cohen, Scott H. Murray und D. E. Taylor einen ähnlichen, aber auf einer etwas anderen Präsentation beruhenden und in [CMT04] beschriebenen Algorithmus in **MAGMA** [BC97] implementiert.

(iv) Wir haben bisher nicht genauer erläutert, wie wir mit den Elementen des Körpers k rechnen. Ist k beispielsweise ein endlicher Körper, so verwenden wir die Darstellungen und Algorithmen für das Rechnen mit Elementen von k, die **GAP** zur Verfügung stellt. Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper, so wird die Sache schwieriger. Dies ist im Abschnitt I.7 erläutert.

I.6 Rechnen mit parametrisierten Elementen

Wir behalten die Bezeichnungen aus I.(5.3) bei. Im Folgenden wird es zum Beispiel für die Konjugiertenklassenberechnung, aber auch für andere Fragen, nötig sein, alle Elemente von $\mathbf{G}$ mit bestimmten Eigenschaften zu finden. Diese Rechnungen sollen dabei nicht für eine spezielle Gruppe $\mathbf{G}$, sondern generisch für unendlich viele Gruppen gleichzeitig durchgeführt werden. Zum generischen Rechnen vergleiche Abschnitt I.7. Rechnungen dieser Art wurden in der Literatur schon vielfach beschrieben. Vergleiche dazu zum Beispiel [Gec91], [Lüb93] und [Him03]. Wir wollen einige Methoden der kommutativen Algebra, insbesondere der Idealtheorie verwenden, um die in unseren Fällen auftretenden und leider sehr umfangreichen Gleichungssysteme generisch in den Griff zu bekommen. Um diese verwenden zu können, brauchen wir eine zunächst etwas technisch anmutende Beschreibung, wie wir die Elemente generisch, das heißt in allen zu betrachtenden Gruppen gleichzeitig, parametrisieren. Dieser technische Begriffsapparat ermöglicht dann eine einfachere Beschreibung der Algorithmen. Vergleiche dazu die Anwendungen in Abschnitt I.8.

Die Bruhatzerlegung I.(4.2) und Bemerkung I.(5.4) besagen nun, dass jedes Element $g \in \mathbf{G}$ in genau einer Doppelnebenklasse $\mathbf{B}\widehat{w}\mathbf{B}$ liegt für ein $w \in \mathbf{W}$ und jedes Element dieser Doppelnebenklasse eindeutig geschrieben werden kann in der Form

$$x_{\alpha_1}(t_1) \cdots x_{\alpha_{l(w)}}(t_{l(w)})\ \widehat{w}\ \theta\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\ x_{\beta_1}(u_1) \cdots x_{\beta_m}(u_m) \qquad (*)$$

mit $\alpha_i \in R(w)$ für $1 \leqslant i \leqslant l(w)$, $\beta_j \in \Phi^+$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und $t_i, \lambda_j, u_k \in k$. Es genügt also, alle Elemente einer solchen Doppelnebenklasse zu bestimmen, die die gewünschte Eigenschaft haben, und dies dann für alle (endlich viele) Doppelnebenklassen zu machen. Dazu kann man die λ_i, t_i, u_i als Unbestimmte auffassen und ein Element aus der Chevalleygruppe über dem rationalen Funktionenkörper der Form wie in $(*)$ betrachten, der mit Hilfe der Relationen der Präsentation I.(2.4) manipuliert werden kann. Die Elemente der Doppelnebenklasse ergeben sich dann genau durch Spezialisieren der Unbestimmten in diesem Ausdruck. Berechnungen mittels Algorithmus I.(5.8) und Gleichheitstest ergeben Bedingungen an die Spezialisierungen der Unbestimmten, die genau die gesuchten Elemente beschreiben. Problematisch ist allerdings, dass im Laufe des Algorithmus I.(5.8) Elemente invertiert werden müssen. Daher reicht es nicht aus, über dem multivariaten Polynomring in den Unbestimmten λ_i, t_i, u_i zu rechnen, sondern wir müssen über dem entsprechenden rationalen Funktionenkörper rechnen. Die so erhaltenen Gleichungen sind dann nicht mehr für alle Spezialisierungen richtig, sondern nur noch für eine Teilmenge. Hierdurch erhält man Fallunterscheidungen. Um die nötigen Fallunterscheidungen zu bestimmen, werden Methoden der kommutativen Algebra benutzt. Dieses wird im Folgenden noch genauer ausgeführt und präzisiert werden. Zunächst geben wir hier einige Definitionen und Lemmata aus der kommutativen Algebra an, die wir zur Manipulation der Elemente der Form $(*)$, insbesondere zur Beschreibung der notwendigen Fallunterscheidungen, brauchen werden.

(6.1) Definition (vgl. [Kun85, Kapitel I §1 und Kapitel III §1])
Es seien $s \in \mathbb{N}$ und $k[\underline{Y}] := k[Y_1, \ldots, Y_s]$ der multivariate Polynomring in den Unbestimmten $Y_1, \ldots, Y_s$ über k und $k(\underline{Y})$ der zugehörige Quotientenkörper.

(i) Es sei I ein Ideal von $k[\underline{Y}]$. Das Ideal

$$\sqrt{I} := \left\{ f \in k[\underline{Y}] \mid \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } f^n \in I \right\}$$

von $k[\underline{Y}]$ heißt das **Radikal** von I. Wenn $\sqrt{I} = I$ gilt, so heißt I ein **Radikalideal**.

(ii) Es sei $f \in k[\underline{Y}]$. Die Teilmenge

$$D_f := \left\{ t \in k^s \mid f(t) \neq 0 \right\} \subseteq k^s$$

heißt **elementaroffene Teilmenge** von k^s.

(iii) Es sei $F \subseteq k[\underline{Y}]$ eine Teilmenge des Polynomrings. Die Teilmenge

$$V(F) := \left\{ t \in k^s \mid f(t) = 0 \text{ für alle } f \in F \right\} \subseteq k^s$$

heißt **abgeschlossene Teilmenge** von k^s.

(iv) Es sei $f \in k(\underline{Y})$, dann existieren teilerfremde Polynome $g, h \in k[\underline{Y}]$ mit $f = \frac{g}{h}$. Die Menge $\mathfrak{D}_f := D_h \subseteq k^s$ heißt der **Definitionsbereich** von f und für alle $t \in \mathfrak{D}_f$ ist $f(t) := \frac{g(t)}{h(t)}$ wohldefiniert.

(v) Es sei $F \subseteq k(\underline{Y})$ eine endliche Teilmenge des Quotientenkörpers. Die Menge

$$\mathfrak{D}_F := \bigcap_{f \in F} \mathfrak{D}_f \subseteq k^s$$

heißt **Definitionsbereich** der Menge F von Polynomen und für alle $f \in F$ und $t \in \mathfrak{D}_F$ ist $f(t)$ wohldefiniert.

Die folgenden Eigenschaften abgeschlossener Teilmengen des affinen Raumes k^s sind allgemein bekannt und für unsere Anwendungsbeispiele von großer Bedeutung.

(6.2) Bemerkung (Eigenschaften, vgl. [Kun85, Kapitel I §1])
Es seien $f, g \in k[\underline{Y}]$ und I, J Ideale von $k[\underline{Y}]$. Dann gilt:

(i) $D_f \cap D_g = D_{fg}$.

(ii) $V(I) \cap V(J) = V(I + J)$.

(iii) $k^s = V(\langle f \rangle) \dot{\cup} D_f$.

(iv) Es gilt $V(I) \subseteq V(J)$ genau dann, wenn $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$ gilt.

(v) Es ist $\sqrt{\langle f \rangle} \subseteq \sqrt{I}$ genau dann, wenn $f \in \sqrt{I}$ ist.

Beweis: Für (i)-(iv) siehe [Kun85, I.1.8 und III.1.1]. Die Rückrichtung von (v) ist klar, da mit $f \in \sqrt{I}$ offensichtlich auch $\sqrt{\langle f \rangle} \subseteq \sqrt{I}$ gilt. Die Hinrichtung folgt sofort aus $f \in \sqrt{\langle f \rangle}$. □

(6.3) Lemma
Es seien $I \trianglelefteq k[\underline{Y}]$ ein Ideal des Polynomrings und $f, g \in k[\underline{Y}]$. Es seien weiter $P = V(I) \cap D_f$ und $P_1 := \{t \in P \mid g(t) = 0\}$ und $P_2 := \{t \in P \mid g(t) \neq 0\}$. Dann gilt:

(i) $P = \emptyset$ genau dann, wenn $f \in \sqrt{I}$.

(ii) $P_1 = V(\langle g \rangle + I) \cap D_f$.

(iii) $P_2 = V(I) \cap D_{fg}$.

Beweis:

(i) Nach Bemerkung I.(6.2)(iii) ist $V(I) \cap D_f = \emptyset$ äquivalent mit $V(I) \subseteq V(\langle f \rangle)$. Daraus folgt sofort die Behauptung mit I.(6.2)(iv) und (v).

(ii) Folgt sofort aus der Definition von P und P_1 mit Bemerkung I.(6.2)(ii).

(iii) Folgt sofort aus der Definition von P und P_1 mit Bemerkung I.(6.2)(i).

□

(6.4) Lemma (Rabinowitch-Trick, vgl. [CLO97, 4.2 Proposition 8])
Es sei $I \trianglelefteq k[\underline{Y}]$ ein Ideal des Polynomrings und $f \in k[\underline{Y}]$ ein Polynom. Dann ist $f \in \sqrt{I}$ genau dann, wenn $1 \in I + \langle 1 - Zf \rangle \subseteq k[\underline{Y}, Z]$, wobei $k[\underline{Y}, Z]$ der Polynomring in den Unbestimmten $Y_1, \ldots, Y_s, Z$ ist.

Beweis: Siehe [CLO97, 4.2 Proposition 8]. □

(6.5) Bemerkung (Reduktion modulo p)
Ist $f \in \mathbb{Z}[\underline{Y}]$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, so kann man f mittels Reduktion modulo p auch als $f \in k[\underline{Y}]$ auffassen. Entsprechend können wir auch für ein $f \in \mathbb{Z}(\underline{Y})$ den Definitionsbereich $\mathfrak{D}_f \subseteq k^s$ definieren und für $t \in \mathfrak{D}_f$ ist $f(t) \in k$ wohldefiniert. Beachte dazu auch I.(6.1)(iv).

Wir haben nun alle benötigten Begriffe der kommutativen Algebra eingeführt und wollen jetzt die Definition eines parametrisierten Elementes beziehungsweise einer Parametrisierung von $\mathbf{G}$ angeben.

(6.6) Definition (parametrisierte Elemente von G)
Wir behalten die Bezeichnungen aus Definition I.(6.1) bei. Es sei weiter $\mathbf{G}(k(\underline{Y}))$ die reduktive Gruppe über $k(\underline{Y})$, die durch das Wurzeldatum von $\mathbf{G}$ gegeben ist.

(i) Ein Tripel $\mathcal{A} := (A, A', P)$ heißt **parametrisiertes Grundelement** von $\mathbf{G}$ mit **Parametermenge** P, wenn $A \in \mathbf{G}(k(\underline{Y}))$, A' eine Darstellung von A als Wort in den Erzeugern von $\mathbf{G}(k(\underline{Y}))$ der Form

$$x_{\alpha_1}(f_1) \cdots x_{\alpha_{l(w)}}(f_{l(w)})\, \widehat{w}\, \theta\, (g_1, \ldots, g_n)\, x_{\beta_1}(h_1) \cdots x_{\beta_m}(h_m)$$

mit $w \in \mathbf{W}$ und $f_i, g_j, h_r \in k(\underline{Y})$ und weiter $\alpha_i \in R(w)$ und $\beta_i \in \Phi^+$ für $1 \leqslant i \leqslant l(w)$ und $1 \leqslant j \leqslant n$ und $1 \leqslant r \leqslant m$, wobei die α_i und β_j aufsteigend bezüglich der in I.(5.3) gewählten Totalordnung angeordnet sind, und

$$P \subseteq P(\mathcal{A}) \quad := \quad \mathfrak{D}_{\{f_i, g_j, h_r\}_{1 \leqslant i \leqslant l(w), 1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant r \leqslant m}} \cap D_{g_1 \cdots g_n}$$

ist. Dabei ist $\mathfrak{D}_{\{f_i, g_j, h_r\}_{1 \leqslant i \leqslant l(w), 1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant r \leqslant m}}$ der Schnitt der Definitionsbereiche der rationalen Funktionen f_i, g_j, h_r. Weiter heißt $\mathcal{A}$ **ganzzahlig parametrisiertes Grundelement** mit der Parametermenge $P \subseteq P(\mathcal{A})$, falls $f_i, g_j, h_k \in \mathbb{Z}[\underline{Y}]$ sind. Vergleiche dazu auch Bemerkung I.(6.5). Für jeden **Parameter** $t \in P$ erhält man durch Spezialisierung von

A' vermöge des Einsetzungshomomorphismus ein Element von $\mathbf{G}$, welches mit $\mathcal{A}(t)$ bezeichnet wird. Die Menge $P(\mathcal{A})$ ist genau die Menge der maximal möglichen Parameter t, so dass die Spezialisierung $\mathcal{A}(t)$ wohldefiniert ist. Für alle $t \in P(\mathcal{A})$ liegt $\mathcal{A}(t)$ in der gleichen Doppelnebenklasse $\mathbf{B}\widehat{w}\mathbf{B}$ von $\mathbf{G}$. Diese Doppelnebenklasse heißt die zu $\mathcal{A}$ gehörende **Bruhatzelle**.

(ii) Für zwei parametrisierte Grundelemente $\mathcal{A}_1 := (A_1, A_1', P_1)$ und $\mathcal{A}_1 := (A_2, A_2', P_2)$ definieren wir

$$\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A}_2 := (A_1A_2, A_1'A_2', P_1 \cap P_2).$$

Dabei sind A_1A_2 das Produkt von A_1 und A_2 in $\mathbf{G}(k(\underline{Y}))$ und $A_1'A_2'$ die Verkettung der Wörter A_1' und A_2' in den Erzeugern. Ein Produkt

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \cdots \mathcal{A}_l = (A, A', P)$$

von (ganzzahlig) parametrisierten Grundelementen $\mathcal{A}_i$ mit $1 \leqslant i \leqslant l$ von $\mathbf{G}$ heißt **(ganzzahlig) parametrisiertes Element** von $\mathbf{G}$ mit **Parametermenge** P. Für jeden Parameter $t \in P$ erhält man durch Spezialisierung wieder ein Gruppenelement, das wieder mit $\mathcal{A}(t)$ bezeichnet wird. Wir schreiben $\mathcal{A}(P) := \{\mathcal{A}(t) \mid t \in P\}$ für die Menge all dieser Spezialisierungen.

(6.7) Bemerkung
Ist $\mathcal{A} := (A, A', P)$ ein parametrisiertes Element, so schreiben wir auch abkürzend $\mathcal{A} := A'$ mit Parametermenge P. Wir könnten die parametrisierten Elemente auch als Paare der Form (A', P) definieren. Wir haben die Definition als Tripel (A, A', P) gewählt, um den Unterschied zwischen dem Element $A \in \mathbf{G}(k(\underline{Y}))$ und seiner Darstellung als Wort A' in den Erzeugern zu unterstreichen. Diese Unterscheidung ist im Folgenden wesentlich.

(6.8) Definition (Parametrisierung)
Es sei $M \subseteq \mathbf{G}$ eine Teilmenge von Elementen von $\mathbf{G}$. Eine Menge $\{\mathcal{A}_i\}_{1 \leqslant i \leqslant l}$ von (ganzzahlig) parametrisierten Elementen $\mathcal{A}_i$ mit zugehörigen Parametermengen P_i heißt **(ganzzahlige) Parametrisierung** von M, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Die Spezialisierungsabbildung $t \mapsto \mathcal{A}_i(t)$ für $t \in P_i$ ist für alle $1 \leqslant i \leqslant l$ injektiv.
- $$M = \dot{\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant l}} \mathcal{A}_i(P_i).$$

Ist $l = 1$, besteht also die Parametrisierung nur aus einem Element, so sagen wir auch: $\mathcal{A}_1$ mit Parametermenge P_1 ist eine (ganzzahlige) Parametrisierung von M.

(6.9) Beispiele
Es sei $k[\underline{Y}] := k[\lambda_1, \ldots, \lambda_n, u_1, \ldots, u_m, t_1, \ldots, t_m]$ der Polynomring in $n + 2m$ Unbestimmten über k. Die folgenden parametrisierten Elemente werden wir im folgenden oft benutzen:

(i) Es sei $w \in \mathbf{W}$ ein Weylgruppenelement. Dann ist

$$\mathcal{B}w\mathcal{B} := x_{\alpha_1}(t_1)\cdots x_{\alpha_{l(w)}}(t_{l(w)})\,\widehat{w}\,\theta\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\,x_{\beta_1}(u_1)\cdots x_{\beta_m}(u_m)$$

mit $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{l(w)}\} = R(w)$ und $\{\beta_1,\ldots,\beta_m\} = \Phi^+$ zusammen mit der Parametermenge

$$P(\mathcal{B}w\mathcal{B}) = V\left(\langle\{t_i\}_{l(w)<i\leqslant m}\rangle\right) \cap D_{\lambda_1\cdots\lambda_n} \cong (k^*)^n \times k^{m+l(w)}.$$

eine ganzzahlige Parametrisierung der Doppelnebenklasse $\mathbf{B}\widehat{w}\mathbf{B}$. Wir wollen hier noch eine kleine Erläuterung zur Parametermenge geben. Die Unbestimmten $\{t_i\}_{l(w)<i\leqslant m}$ tauchen in $\mathcal{B}w\mathcal{B}$ gar nicht auf. Für eine Parametrisierung nach Definition I.(6.8) muss die Spezialisierungsabbildung auf der Parametermenge aber injektiv sein. Dies können wir beispielsweise erreichen, indem wir für t_i nur den Wert Null einsetzen. Die Wahl unserer Parametermenge erreicht genau dies. Dies gilt entsprechend auch für die anderen Beispiele.

(ii) Für $w = 1$ erhalten wir auf die Weise eine Parametrisierung der Boreluntergruppe $\mathbf{B}$. Diese Parametrisierung bezeichnen wir auch mit $\mathcal{B}$.

(iii) Die Menge $\mathcal{G} := \{\mathcal{B}w\mathcal{B}\}_{w\in\mathbf{W}}$ ist eine ganzzahlige Parametrisierung von $\mathbf{G}$.

(iv) Das parametrisierte Element

$$\mathcal{U} = x_{\beta_1}(u_1)\cdots x_{\beta_m}(u_m)$$

zusammen mit der Parametermenge

$$P(\mathcal{U}) = V(\langle\{t_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}\rangle) \cap V(\langle\{\lambda_i - 1\}_{1\leqslant i\leqslant n}\rangle) \cong k^m$$

ist eine ganzzahlige Parametrisierung von $\mathbf{U}$. Wir sehen, dass $\mathcal{U}$ für alle $w \in \mathbf{W}$ die Einschränkung von $\mathcal{B}w\mathcal{B}$ auf die Parametermenge $P(\mathcal{U})$ ist. Zu beachten ist hier, dass wir die Parametermenge wie in Beispiel (i) einschränken, um eine Parametrisierung zu erhalten. In diesem Fall dürfen wir für λ_i nicht Null, aber beispielsweise 1 einsetzen.

(v) Das parametrisierte Element

$$\mathcal{T} := \theta\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$$

mit Parametermenge

$$P(\mathcal{T}) = V(\langle\{t_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}\rangle) \cap V(\langle\{u_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}\rangle) \cap D_{\lambda_1\cdots\lambda_n} \cong k^{*n}$$

ist eine ganzzahlige Parametrisierung von $\mathbf{T}$.

(vi) Für $w \in \mathbf{W}$ ist

$$\mathcal{U}_w := x_{\alpha_1}(t_1)\cdots x_{\alpha_{l(w)}}(t_{l(w)})$$

mit $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{l(w)}\} = R(w)$ zusammen mit der Parametermenge

$$P(\mathcal{U}_w) = V(\langle\{t_i\}_{l(w)<i\leqslant m}\rangle) \cap V(\langle\{\lambda_i - 1\}_{1\leqslant i\leqslant n}\rangle) \cap V(\langle\{u_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}\rangle) \cong k^{l(w)}$$

eine ganzzahlige Parametrisierung von $\mathbf{U}_w$.

(6.10) Bemerkung
Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ parametrisierte Elemente von $\mathbf{G}$ mit Parametermengen $P(\mathcal{A})$ und $P(\mathcal{B})$. Dann gilt:

(i) $\mathcal{A}$ ist **kein** Element von $\mathbf{G}$. Für alle $t \in P(\mathcal{A})$ ist aber die Spezialisierung $\mathcal{A}(t) \in \mathbf{G}$. Die Speicherung von $\mathcal{A}$ erfolgt entsprechend I.(5.4), wobei statt Körperelementen rationale Funktionen abgespeichert werden. Spezialisieren mit $t \in P(\mathcal{A})$ entspricht dann Einsetzen in die rationalen Funktionen.

(ii) Es gilt $(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})(t) = \mathcal{A}(t)\mathcal{B}(t) \in \mathbf{G}$ für alle $t \in P(\mathcal{A})\cap P(\mathcal{B})$. Das heißt, Spezialisierung ist verträglich mit der Multiplikation.

(6.11) Bemerkung (Umformen parametrisierter Elemente)
(i) Geht $\mathcal{B}$ durch Anwenden einer der Relationen der Präsentation I.(2.4) von $\mathbf{G}$ aus $\mathcal{A}$ hervor, so gilt $\mathcal{A}(t) = \mathcal{B}(t)$ für alle $t \in P(\mathcal{A}) \cap P(\mathcal{B})$. Wir können also mit Hilfe der Relationen aus I.(2.4) parametrisierte Elemente so manipulieren, dass die entsprechenden Manipulationen auch bei Spezialisierung auf erlaubte Parameter richtig sind.

(ii) Ist $\mathcal{A}$ sogar ein ganzzahlig parametrisiertes Element, und geht $\mathcal{B}$ durch Anwenden einer der Relationen der Präsentation I.(2.4) von $\mathbf{G}$ aus $\mathcal{A}$ hervor, so ist auch $\mathcal{B}$ ein ganzzahlig parametrisiertes Element.

Beweis: Folgt sofort aus Satz I.(2.4) und Bemerkung I.(5.6). □

Wir können analog zu Satz I.(4.2) auch eine Normalform von parametrisierten Elementen definieren. Im Folgenden werden wir sehen, dass wir diese Normalform auch algorithmisch berechnen können.

(6.12) Definition (Normalform parametrisierter Elemente)
Es sei $\mathcal{A}$ ein parametrisiertes Element mit Parametermenge P. Eine Menge $\{\mathcal{A}_i\}_{1\leqslant i\leqslant l}$ von **(ganzzahlig) parametrisierten Grundelementen** $\mathcal{A}_i$ mit den zugehörigen Parametermengen P_i heißt **(ganzzahlige) Normalform** oder auch **(ganzzahlige) Bruhatzerlegung** von $\mathcal{A}$, wenn

$$P = \dot{\bigcup_{i\in\{1,\ldots,l\}}} P_i$$

ist, und wenn für alle $i \in \{1,\ldots,l\}$ und $t \in P_i$ dann $\mathcal{A}_i(t)$ die Normalform des Elementes $\mathcal{A}(t) \in \mathbf{G}$ gemäß Satz I.(4.2) ist.

(6.13) Bemerkung
Es ist zunächst nicht klar, ob zu jedem parametrisierten Element eine solche Normalform existiert, ob nämlich eine endliche disjunkte Zerlegung der Parametermenge, wie in der Definition I.(6.12) gefordert, existiert. Der folgende Algorithmus zur Berechnung zeigt allerdings, dass dies immer möglich ist. Diese Normalform ist nicht eindeutig, was man allein daran sieht, dass eine Verfeinerung der Zerlegung zu einer anderen Normalform führt. Dies ist aber nicht schlimm, denn wir sind ja an der Normalform der Spezialisierungen interessiert, und die ist eindeutig nach Satz I.(4.2). Die parametrisierten Elemente haben nur den Vorteil, dass wir diese Normalform

für viele Elemente simultan berechnen können, was für generisches Rechnen wichtig ist. Außerdem können wir an der Normalform die Bruhatzelle ablesen, in der die spezialisierten Elemente liegen.

Wenn $\mathcal{A}$ ein parametrisiertes Element mit Parametermenge P ist, so können wir für jede Spezialisierung $\mathcal{A}(t)$ mit $t \in P$ mittels Algorithmus I.(5.8) die Normalform und insbesondere die Bruhatzelle von $\mathbf{G}$ bestimmen, in der $\mathcal{A}(t)$ liegt. Dies werden für verschiedene Parameter im Allgemeinen verschiedene Bruhatzellen sein. Wegen Bemerkung I.(6.11) ist Algorithmus I.(5.8) auch auf parametrisierte Elemente anwendbar, wenn wir die Parametermenge beachten. Wenn wir den Algorithmus I.(5.8) genauer untersuchen, so stellen wir fest, dass wir ihn auch auf parametrisierte Elemente anwenden können. Alle im Algorithmus notwendigen Schritte können problemlos für die ganze Parametermenge des Elementes durchgeführt werden, außer Schritt 4(iii). Es gilt dann:

(6.14) Bemerkung
Es sei erg ein parametrisiertes Element im Schritt 4 des Algorithmus I.(5.8) mit Parametermenge P_{erg}, dann ist erg=u'$\widehat{w}$hu mit parametrisierten Elementen u',h und u. Das in diesem Schritt auftauchende Element u hat dann die Form $x_\pi(f)u''$, wobei f eine rationale Funktion ist und $\pi w^{-1} \notin \Phi^+$. Es seien nun

$$P_1 := \{t \in P_{\mathsf{erg}} \mid f(t) = 0\} = P_{\mathsf{erg}} \cap V(\langle f \rangle)$$

und

$$P_2 := \{t \in P_{\mathsf{erg}} \mid f(t) \neq 0\} = P_{\mathsf{erg}} \cap D_f$$

Dann erhält man gemäß 4(i) ein parametrisiertes Element mit Parametermenge P_1 und gemäß 4(iii) ein parametrisiertes Element mit Parametermenge P_2, so dass bei allen Spezialisierungen mit Parametern der entsprechenden Parametermengen gültige Gleichungen in $\mathbf{G}$ entstehen.

Beweis: Folgt sofort aus Lemma I.(5.7). □

Wir erhalten also folgenden Algorithmus, der die Bruhatzerlegung eines parametrisierten Elementes berechnet.

(6.15) Algorithmus (Bruhatzerlegung parametrisierter Elemente)
INPUT: Ein parametrisiertes Element $\mathcal{A}$ mit Parametermenge P.

OUTPUT: Eine Normalform von $\mathcal{A}$ gemäß I.(6.12).

1. Benutze Bemerkung I.(5.9)(ii), um $\mathcal{A}$ als parametrisiertes Element zu schreiben, in dem nur Ausdrücke der Form $x_\alpha(f)$, n_π und $\theta(g_1, \ldots, g_n)$ auftreten. Dabei ändert sich der Parameterbereich nicht.
2. Initialisiere list $\leftarrow [[\mathcal{A}, P]]$, erg $\leftarrow [\,]$, i $\leftarrow 1$.
3. Falls $i >$ Length(list) gehe zu Schritt 5, sonst setze $[X, P_X] \leftarrow$ list$[i]$.

4 Führe den in I.(5.8) beschriebenen Algorithmus zur Berechnung der Bruhatzerlegung von $[X, P_X]$ durch, bis Algorithmusschritt 4(iii) anzuwenden und eine Fallunterscheidung notwendig wäre, oder $[X, P_X]$ in Normalform ist.

i Falls $[[X, P_X]]$ eine Normalform gemäß I.(6.12) ist, so setze

$\mathsf{Add}(\mathsf{erg},[X, P_X])$

$i \leftarrow i + 1$

und gehe zu Schritt 3.

ii Falls Algorithmusschritt 4(iii) anzuwenden und gemäß Bemerkung I.(6.14) eine Fallunterscheidung notwendig ist, so erhält man zwei parametrisierte Elemente X_1, X_2 mit Parametermengen P_1 beziehungsweise P_2. Setze

$[X, P_X] \leftarrow [X_1, P_1]$

$\mathsf{Add}(\mathsf{list},[X_2, P_2])$

und gehe zu Schritt 4.

5 Gebe erg zurück.

(6.16) Bemerkung (Parametermengen)

(i) Ist die Parametermenge von der Form

$$P = V(I) \cap D_f$$

für ein Ideal I und ein Polynom f, so sind auch die Parametermengen des Ergebnisses des Algorithmus gemäß Bemerkung I.(6.14) und Lemma I.(6.3) von dieser Form. Mittels des Rabinowitch-Tricks I.(6.4) können wir insbesondere in diesem Fall leicht bestimmen, ob eine solche Menge leer ist.

(ii) Ist $\mathcal{A}$ ein ganzzahlig parametrisiertes Element und P von der Form $P = V(I) \cap D_f$, wobei I ein Ideal und f ein Polynom aus dem Polynomring über $\mathbb{Z}$ ist, so gilt dies auch für alle Parametermengen des Ergebnisses.

Dies motiviert die folgende Definition:

(6.17) Definition (ganzzahlige Parametermenge)

Eine Parametermenge P heißt **ganzzahlig**, wenn sie von der Form $P = V(I) \cap D_f$ ist, wobei I ein Ideal und f ein Polynom aus dem entsprechenden Polynomring über $\mathbb{Z}$ ist. Vergleiche hier auch Bemerkung I.(6.5).

Wie auch die Beispiele I.(6.9) zeigen, sind die Parametermengen in unseren Anwendungen immer ganzzahlig. Daher können wir folgende Datenstruktur für parametrisierte Elemente verwenden:

(6.18) Bemerkung (Datenstruktur parametrisierter Elemente)

(i) Wir speichern das parametrisierte Element $\mathcal{A}$ als Paar $(\mathcal{A}, P_{\mathcal{A}})$. In der ersten Komponente speichern wir das parametrisierte Element in der gleichen Art wie auch die Gruppenelemente von $\mathbf{G}$ gemäß I.(5.4). Dabei müssen wir anstatt der Körperelemente einfach rationale Funktionen aus dem entsprechenden rationalen Funktionenkörper speichern. In der zweiten Komponente speichern wir die Parametermenge des Elementes. Nun ist diese Parametermenge von der Form $P_{\mathcal{A}} = V(I) \cap D_f$. Wir speichern sie als Paar. Der erste Eintrag besteht aus einer Liste von Erzeugern für das Ideal I. Der zweite Eintrag besteht aus dem Polynom f.

(ii) Parametrisierungen einer Teilmenge $M \subseteq \mathbf{G}$ speichern wir einfach als Liste der parametrisierten Elemente.

(6.19) Bemerkung

Der Algorithmus I.(6.15) benutzt nur die Relationen der Präsentation aus Satz I.(2.4). Diese hängt nur vom Wurzeldatum von $\mathbf{G}$ ab, welches rein kombinatorisch unabhängig von der definierenden Charakteristik p von $\mathbf{G}$ gegeben ist. Die auftretenden Koeffizienten $c_{\alpha,\beta;i,j}$ und $\eta_{\alpha,\beta}$ lassen sich kombinatorisch aus dem Wurzeldatum von $\mathbf{G}$ unabhängig von p beschreiben. Siehe dazu auch I.(3.6). Wenn wir also unsere Rechnungen mit einer **ganzzahligen** Parametrisierung von $\mathbf{G}$ mit **ganzzahligen** Parametermengen durchführen, so führen Umformungen gemäß Algorithmus I.(6.15) wegen Bemerkung I.(6.11) immer auf ganzzahlig parametrisierte Elemente und diese Rechnungen gelten für alle Primzahlen p. Auch die Beschreibungen der Parametermengen sind in diesem Fall dann unabhängig von p, wie Bemerkung I.(6.16) zeigt.

(6.20) Bemerkung (Implementation)

Der Algorithmus I.(6.15) wurde von mir basierend auf **CHEVIE** [GHL+96] und **MAGMA** [BC97] implementiert. Siehe auch Abschnitt I.7 über generisches Rechnen.

I.7 Anmerkungen zum generischen Rechnen

In diesem Abschnitt wollen wir einige Anmerkungen zum generischen Rechnen machen. Wir behalten die Notationen aus I.(5.3) bei. Zusätzlich sei $\mathbf{G}$ definiert über $\mathbb{F}_q$ für ein $q = p^f$. Es sei $\mathbf{F}$ der zugehörige Frobeniusmorphismus von $\mathbf{G}$ und $\mathbf{T}$ ein $\mathbf{F}$-stabiler maximaler Torus von $\mathbf{G}$. Die Menge $\mathbf{G}(q)$ der $\mathbb{F}_q$-rationalen Punkte von $\mathbf{G}$ ist gerade die Menge der Fixpunkte $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$.Vergleiche dazu auch [DM91, Kapitel 3]. Der Frobeniusmorphismus $\mathbf{F}$ induziert gemäß [Car85, 1.18] eine Abbildung auf der Charaktergruppe $\mathbf{X}(\mathbf{T})$ und somit einen Endomorphismus auf dem Vektorraum $V := \mathbb{R} \otimes \mathbf{X}(\mathbf{T})$. Dieser Endomorphismus lässt sich als $q \cdot \mathbf{F}_0$ schreiben, wobei $\mathbf{F}_0$ endliche Ordnung hat. Solch eine Gruppe $\mathbf{G}(q)$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt durch:

(i) das Wurzeldatum von $\mathbf{G}$,

(ii) die Abbildung $\mathbf{F}_0$ auf V,

(iii) die Primzahlpotenz q.

Unter **generischem Rechnen** in $\mathbf{G}$ verstehen wir, Informationen über die Gruppe $\mathbf{G}(q)$ nur unter Verwendung von (i) und (ii) zu bestimmen, ohne die Primzahlpotenz q festzulegen, sondern als Parameter aufzufassen. Es zeigt sich, dass viel Information über $\mathbf{G}(q)$ auf diese Weise beschrieben werden kann. Dazu gehören zum Beispiel die Parametrisierung der Konjugiertenklassen und der Charaktere von $\mathbf{G}(q)$, aber auch die Ordnungen der parabolischen Untergruppen, der Leviuntergruppen, der Tori, Fusionen von Elementen und Charakterwerte von gewissen induzierten Charakteren. Die genannten Ordnungen ergeben sich dann zum Beispiel als Polynome in q, wobei die Koeffizienten kombinatorisch aus dem Wurzeldatum bestimmt werden.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir diese Informationen oft mittels Rechnungen mit parametrisierten Elementen gewinnen. Vergleiche dazu auch I.8. Diese Rechnungen vereinfachen sich wesentlich, wenn wir uns auf Chevalleygruppen beschränken. Diese Gruppen sind für alle Primzahlpotenzen $q = p^f$ über $\mathbb{F}_q$ definiert. Vergleiche dazu [Car85, 1.18]. Außerdem operiert $\mathbf{F}$ trivial auf den Wurzeln und somit ist in diesem Fall $\mathbf{F}_0$ die identische Abbildung auf V. Dann induziert $\mathbf{F}$ einen Automorphismus von k mit Fixkörper $\mathbb{F}_q$, den wir auch mit $\mathbf{F}$ bezeichnen. Die Chevalleygruppe $\mathbf{G}(q) = \mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ ist eindeutig bestimmt durch die Angabe des Wurzeldatums und der Primzahlpotenz q, und zu gegebenem Wurzeldatum existiert für alle q auch ein solcher Frobeniusmorphismus $\mathbf{F}$. Es gilt dann die folgende Bemerkung:

(7.1) Bemerkung (Parametrisierungen von G und $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$)
Es sei $\mathbf{G}(q) = \mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ eine Chevalleygruppe und $\mathcal{A}$ eine Parametrisierung einer $\mathbf{F}$-stabilen Teilmenge $M \subseteq \mathbf{G}$ mit Parametermenge P. Dann ist $\mathcal{A}$ mit der Parametermenge $P^{\mathbf{F}} := \{t \in P \mid t^{\mathbf{F}} = t\}$ eine Parametrisierung von $M^{\mathbf{F}} \subseteq \mathbf{G}^{\mathbf{F}}$.

Beweis: Dies folgt sofort aus Bemerkung I.(5.10)(ii). □

Diese Bemerkung erlaubt die Reduktion von Rechnungen in $\mathbf{G}(q)$ mit $q = p^f$ auf Rechnungen innerhalb von $\mathbf{G}$. Diese können wir mit Algorithmus I.(6.15) durchführen. Wenn wir eine ganzzahlige Parametrisierung mit ganzzahligen Parametermengen benutzen, so erhalten wir gemäß Bemerkung I.(6.19) eine Bruhatzerlegung, die nur vom Wurzeldatum von $\mathbf{G}$ abhängt und unabhängig von q ist. Insbesondere erhalten wir eine Beschreibung der Parametermengen gemäß I.(6.18) durch ganzzahlige Polynome. Die entsprechenden Ergebnisse in der endlichen Gruppe $\mathbf{G}(q) = \mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ erhalten wir dann direkt durch Einschränkung der Parametermengen gemäß I.(7.1) auf die Fixpunkte unter dem zu q gehörenden Frobeniusmorphismus $\mathbf{F}$. Wenn allerdings der Frobeniusmorphismus nicht-trivial auf den Wurzeln operiert, so werden die Berechnungen komplizierter. In diesem Fall erhalten wir die Parametermengen, die die entsprechenden Elemente in $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ beschreiben, nicht einfach durch Fixpunktbildung, sondern durch je nach Beschaffenheit von $\mathbf{F}$ deutlich kompliziertere Bedingungen. Vergleiche dazu zum Beispiel auch [Him03]. In dieser Arbeit führen wir aber nur Berechnungen innerhalb der Chevalleygruppen vom Typ $\mathbf{F}_4$ durch, daher ist hier die Beschränkung auf Chevalleygruppen sinnvoll.

Im Abschnitt I.8 werden wir einige Anwendungen zum generischen Rechnen beschreiben. Dabei ist eines der zentralen Probleme die Bestimmung der Parametermengen und ihrer Fixpunkte. Vor allem die Mächtigkeit dieser Mengen in Abhängigkeit von q soll bestimmt werden. Wir wollen dies im Folgenden näher erläutern.

(7.2) Bestimmung von $P_i^{\mathbf{F}}$ und $|P_i^{\mathbf{F}}|$ in Abhängigkeit von q

Es sei $\{\mathcal{A}_i\}_{1\leqslant i\leqslant l}$ eine ganzzahlige Bruhatzerlegung mit entsprechenden ganzzahligen Parametermengen $P_i = V(I_i)\cap D_{f_i}$. Zur Bestimmung von $P_i^{\mathbf{F}}$ und insbesondere von $|P_i^{\mathbf{F}}|$ in Abhängigkeit von q können wir folgendermaßen vorgehen:

Test auf $P_i = \emptyset$:

Ist $P_i = \emptyset$, so sind natürlich auch $P_i^{\mathbf{F}} = \emptyset$ für alle q. Um dies zu testen, benutzen wir Lemma I.(6.3) und den Rabinowitch-Trick I.(6.4). Wir müssen testen, ob $f_i \in \sqrt{I_i} \subseteq k[\underline{Y}]$ gilt, wobei I_i ein von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten erzeugtes Ideal ist. Dazu müssen wir testen, ob $1 \in I + \langle 1 - Zf\rangle \in k[\underline{Y}, Z]$. Wir können $I + \langle 1 - Zf\rangle$ als Ideal von $\mathbb{Z}[\underline{Y}, Z]$ auffassen. Wir berechnen eine Gröbnerbasis dieses Ideals. Zu Gröbnerbasen von Polynomringen über Euklidischen Ringen siehe [AL94, Kapitel 4]. Es sei $B := \{b_1, \ldots, b_g\}$ mit $0 \neq b_j \in \mathbb{Z}[\underline{Y}, Z]$ für alle j eine solche Gröbnerbasis, wobei die b_i dem Grad nach absteigend angeordnet seien. Wir können b_g als Linearkombination der Erzeuger von $I + \langle 1 - Zf\rangle$ schreiben, wobei die Koeffizienten ganzzahlige Polynome sind. Reduktion modulo p ergibt also eine entsprechende Linearkombination über k. Falls b_g ein konstantes Polynom ist und die definierende Charakteristik p kein Teiler von b_g ist, ist also $1 \in I + \langle 1 - Zf\rangle \in k[\underline{Y}, Z]$ und somit $P_i = \emptyset$. Für die Primteiler von b_g erhalten wir auf diese Weise keine Aussage und wir müssen diese Fälle gesondert untersuchen. Dies sind allerdings nur endlich viele Fälle. In vielen Fällen erhält man zum Beispiel $b_g = 1$ und somit ist $P_i = \emptyset$ unabhängig von q. Falls B kein konstantes Polynom enthält, können wir zunächst keine Aussage treffen. Es kann insbesondere trotzdem der Fall $P_i = \emptyset$ eintreten. Ist zum Beispiel $B = \{pZ + 1\}$, so ergibt sich bei Reduktion modulo p, dass $1 \in I + \langle 1 - Zf\rangle$ in Charakteristik p ist, obwohl B kein konstantes Polynom enthält. Folgendes Beispiel soll dies illustrieren:

Es sei $k[X, Y]$ der Polynomring in 2 Unbestimmten über k. Es seien weiterhin

$$I = \langle X^2 - 3Y, 2Y^3 - XY, X^2 - XY\rangle \trianglelefteq k[X, Y]$$

ein Ideal von $k[X, Y]$ und $f := X + Y$. Dann ist

$$B := \{X + 2, Y + 2, Z + 4, 5\}$$

eine Gröbnerbasis von $I + \langle 1 - Zf\rangle$ als Ideal über $\mathbb{Z}[X, Y, Z]$. Ist die Charakteristik von k ungleich 5, so ist also $f \in \sqrt{I}$. Man kann in diesem Fall sogar zeigen, dass $\sqrt{I} = \langle X, Y\rangle$ ist. Also ist in diesem Fall $V(I)\cap D_f = \emptyset$.

Ist die Charakteristik von k gleich 5, so kann man nachrechnen, dass

$$B_5 := \{X + 2, Y + 2, Z + 4\}$$

eine Gröbnerbasis von $I + \langle 1 - Zf\rangle$ als Ideal über $k[X, Y, Z]$ ist. Also ist $f \notin \sqrt{I}$. In diesem Fall ist das Radikal deutlich schwieriger zu berechnen. Man sieht sofort, dass $(3, 3) \in V(I)\cap D_f$ ist. Man kann hier sogar zeigen, dass $P_i^{\mathbf{F}} = \{(3, 3)\}$ für alle $q = 5^n$ mit $n \in \mathbf{N}$ ist.

Berechnung von $|P_i^{\mathbf{F}}|$:

Falls $P_i \neq \emptyset$ ist, so wollen wir die Anzahl der Elemente von $P_i^{\mathbf{F}}$ zählen. Es gilt dann nach Lemma I.(6.2):

$$V(I_i) = V(I_i) \cap \big(V\langle f_i\rangle) \dot\cup D_{f_i}\big) = V(I_i + \langle f_i\rangle) \dot\cup P_i.$$

Somit ergibt sich

$$|P_i^{\mathbf{F}}| = |V(I_i)^{\mathbf{F}}| - |V(I_i + \langle f_i\rangle)^{\mathbf{F}}|.$$

Die Berechnung ist also zurückgeführt auf die Bestimmung der Anzahl rationaler Punkte von affinen Varietäten. Hierfür können wir wieder Gröbnerbasen-Techniken verwenden.

Bestimmung von $|V(I)^{\mathbf{F}}|$:

Es sei also $I \trianglelefteq k[\underline{Y}]$ ein Ideal, das von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten erzeugt wird. Leider ist es im Allgemeinen sehr schwierig, die Anzahl der rationalen Punkte einer affinen Varietät zu bestimmen. Ein Algorithmus, der die auftretenden polynomialen Gleichungssysteme in jedem Fall automatisch löst, ist nicht bekannt. Die folgende Vorgehensweise führt aber in den meisten Fällen zum Erfolg. Zunächst suchen wir ein möglichst einfaches Erzeugendensystem von I. Es erweist sich dazu als nützlich, Gröbnerbasen zu verwenden. Es sei B eine reduzierte Gröbnerbasis von I, aufgefasst als Ideal über $\mathbb{Z}[\underline{Y}]$, bezüglich der lexikographischen Ordnung. Vergleiche zur Definition auch [AL94, Kapitel 4]. Dann erhält man durch Reduktion modulo p aus B ein Erzeugendensystem von I als Ideal über $k[\underline{Y}]$, da sich die Elemente aus B als Linearkombination der Erzeuger von I mit ganzzahligen Polynomen schreiben lassen und umgekehrt. Dann ist $|V(I)^{\mathbf{F}}| = |V(B)^{\mathbf{F}}|$ und $|V(B)^{\mathbf{F}}|$ ist in vielen Fällen leichter zu berechnen. Diese Rechnungen führen wir von Hand durch, wie folgendes einfache Beispiel illustriert.

Es sei $k[U, X, Y, Z]$ der Polynomring in 4 Unbestimmten über k und

$$\begin{aligned} I \;:=\langle\; & UYZ^2 + UY + XY^2Z^2 + XY^2 - XZ^2 - X + Z^2 + 1, \\ & XY^2 + Z, UY + XY^2 - X \,\rangle \trianglelefteq k[U, X, Y, Z] \end{aligned}$$

ein Ideal. Dann ist

$$B := \{U - X^2YZ + XY, XY^2 + Z, Z^2 + 1\}$$

eine reduzierte Gröbnerbasis von I aufgefasst als Ideal über $\mathbb{Z}[U, X, Y, Z]$ bezüglich der lexikographischen Ordnung mit $U < X < Y < Z$. Wir wollen die Lösungen $(u, x, y, z) \in k^4$ des Gleichungssystems B zählen, die invariant unter $\mathbf{F}$ sind. Nach Bemerkung I.(7.1) ist eine solche Lösung genau dann invariant unter $\mathbf{F}$, wenn die Einträge $u, x, y, z \in \mathbb{F}_q = k^{\mathbf{F}}$ sind. Dabei unterscheiden wir drei Fälle:

- $2|q$:
  In diesem Fall zeigt die letzte Gleichung, dass $z = 1$ sein muss. Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt dann, dass $y \neq 0$ ist und somit $x = \frac{1}{y^2}$ ist. Die erste Gleichung zeigt dann, dass $u = \frac{1+y^2}{y^3}$ ist. Wir erhalten für jedes $y \neq 0$ also genau eine Lösung. Somit ist in diesem Fall $|V(I)^{\mathbf{F}}| = q - 1$.

- $4|q-1$:
  In diesem Fall gibt es in $\mathbb{F}_q$ zwei verschiedene primitive 4-te Einheitswurzeln, die wir mit ε_4 und $-\varepsilon_4$ bezeichnen. Die letzte Gleichung besagt, dass $z = \varepsilon_4$ oder $z = -\varepsilon_4$ sein muss. Die zweite Gleichung zeigt dann, dass $y \neq 0$ und $x = -\frac{z}{y^2}$ ist. Die erste Gleichung ergibt, dass u durch die Wahl von z und y eindeutig bestimmt ist. Wir sehen also, dass wir für jedes $y \neq 0$ genau zwei Lösungen erhalten. Also ist insgesamt $|V(I)^{\mathbf{F}}| = 2(q-1)$.

- $4|q-3$:
  In diesem Fall gibt es in $\mathbb{F}_q$ keine primitiven 4-ten Einheitswurzeln. Das Gleichungssystem ist also nicht lösbar und somit $|V(I)^{\mathbf{F}}| = 0$.

Es ist ein typisches Phänomen bei diesen Rechnungen, dass eine endliche Anzahl von Fallunterscheidungen getroffen werden muss. In unseren Anwendungen werden diese Fallunterscheidungen meist durch die Existenz von gewissen Einheitswurzeln oder die Frage nach der Irreduzibilität gewisser Polynome gegeben. Auch sehen wir, dass Parametermengen durchaus für gewisse Werte von q leer sein können und für andere nicht.

In vielen Fällen können wir auf diese Weise $|V(I)^{\mathbf{F}}|$ für alle q berechnen. Es können aber folgende Schwierigkeiten auftreten:

- Die lexikographische Ordnung erweist sich als gut geeignet, da die daraus resultierenden Gleichungssysteme im allgemeinen eine relativ einfache Struktur haben. Vergleiche dazu zum Beispiel [Eis95, 15.10.4]. Leider ist sie nicht gut geeignet für die Berechnung einer Gröbnerbasis und diese kommt nicht in erträglicher Zeit zum Ende.

- Wir können das resultierende Gleichungssystem nicht lösen.

In diesen Fällen kann es zum Ziel führen, eine andere Termordnung zu verwenden, bezüglich der wir die Gröbnerbasis berechnen. Aber auch für andere Termordnungen kann die Berechnung der Gröbnerbasis sehr lange dauern beziehungsweise die resultierenden Gleichungssysteme sich nicht so gut lösen lassen. Hier muss man im Einzelfall einen guten Kompromiss zwischen Termordnung und resultierenden Gleichungen finden. Auch die Wahl einer anderen Parametrisierung der parametrisierten Elemente kann helfen.

In einigen Fällen wird das Ideal I allerdings nicht von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten erzeugt. Typischerweise sind die nichtganzzahligen Koeffizienten selten und es gibt Nebenbedingungen für diese. Wir behandeln diese dann auch als Unbestimmte und suchen ein einfaches Erzeugendensystem für das Ideal über dem Polynomring über $\mathbb{Z}$. Beim Lösen des Gleichungssystems versuchen wir dann, die zusätzlichen Informationen zu benutzen. Das folgende typische Beispiel illustriert dies.

Es seien $k[X, Y, Z]$ der Polynomring in drei Unbestimmten über k und $0 \neq \mu, \nu \in \mathbb{F}_q$. Es sei weiterhin

$$I := \langle \nu X^2 - \mu, X^2Y^2Z^3 - 1 \rangle \trianglelefteq k[X, Y, Z]$$

Wir können I als Ideal über dem Polynomring $\mathbb{Z}[\mu, \nu, X, Y, Z]$ auffassen, wobei μ und ν als Unbestimmte aufgefasst werden. Dann bildet $B = \{\nu X^2 - \mu, X^2Y^2Z^3 - 1\}$ bezüglich der lexikographischen Ordnung eine reduzierte Gröbnerbasis von I. Wir suchen nun die Lösungen $(x, y, z) \in {\mathbb{F}_q}^3$ dieses Gleichungssystems in Abhängigkeit von μ, ν und q. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

- $\nu \neq 0$ und $\frac{\mu}{\nu}$ ist kein Quadrat in $\mathbb{F}_q$:
  Die erste Gleichung zeigt, dass $X^2 = \frac{\mu}{\nu}$ ist. Dies hat unter den Voraussetzungen an μ und ν keine Lösung. Also ist $|V(I)^{\mathbf{F}}| = 0$.

- $\nu \neq 0$ und $2 \mid q$:
  In diesem Fall ist Quadrieren ein Automorphismus von $\mathbb{F}_q$. Insbesondere ist $\frac{\mu}{\nu}$ immer ein Quadrat in $\mathbb{F}_q$. Es existiert also ein $\alpha \in \mathbb{F}_q$ mit $\alpha^2 = \frac{\mu}{\nu}$. Die erste Gleichung zeigt, dass $x = \alpha$ ist. Es existiert genau ein $\beta \in \mathbb{F}_q^*$ mit $z = \beta^2$. Die zweite Gleichung ergibt $y = \frac{1}{\alpha\beta^3}$. Es ergibt sich also $|V(I)^{\mathbf{F}}| = q - 1$.

- $\nu \neq 0$ und $2 \nmid q$ und $\frac{\mu}{\nu}$ ist ein Quadrat in $\mathbb{F}_q$:
  Es existiert also ein $\alpha \in \mathbb{F}_q$ mit $\alpha^2 = \frac{\mu}{\nu}$. Die erste Gleichung zeigt dann, dass $x = \alpha$ oder $x = -\alpha$ ist und es ist $\alpha \neq -\alpha$. Die zweite Gleichung zeigt, dass es zu jeder Wahl von $\beta \in \mathbb{F}_q^*$ die zwei Lösungen $(\alpha, \frac{1}{\alpha\beta^3}, \beta^2)$ und $(-\alpha, \frac{1}{\alpha\beta^3}, \beta^2)$ gibt. Wir erhalten somit $|V(I)^{\mathbf{F}}| = 2(q - 1)$.

- $\nu = 0$, $\mu \neq 0$:
  Die erste Gleichung zeigt wegen $\mu \neq 0$, dass $V(I) = \emptyset$ sein muss.

- $\nu = 0$, $\mu = 0$:
  In diesem Fall müssen wir die Nullstellen der Gleichung $X^2Y^2Z^3 - 1 = 0$ bestimmen. Wir sehen wie in den Fällen $\nu \neq 0$, dass $|V(I)^{\mathbf{F}}| = (q - 1)^2$ ist.

(7.3) Bemerkung
Zur Berechnung der Gröbnerbasen über Polynomringen über den ganzen Zahlen benutzen wir die Implementation im Rahmen des Programmpakets **MAGMA** [BC97]. Dort ist eine Verallgemeinerung des F_4-Algorithmus von Faugère [Fau99] für Polynomringe über Euklidischen Ringen implementiert. Andere Implementationen, die in Bezug auf Laufzeit vergleichbar sind, sind mir nicht bekannt.

I.8 Anwendungen parametrisierter Elemente

Es gelten weiterhin die Bezeichnungen aus I.(5.3). Insbesondere sei $\mathbf{G}$ eine zusammenhängende lineare reduktive algebraische Gruppe, die über $\mathbb{F}_q$ definiert ist. Der zugehörige Frobeniusmorphismus $\mathbf{F}$ operiere trivial auf dem bezüglich eines $\mathbf{F}$-stabilen Torus $\mathbf{T}$ gegebenen Wurzelsystem von $\mathbf{G}$. Somit ist $\mathbf{G}(q) = \mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ eine Chevalleygruppe.

In diesem Abschnitt wollen wir einige Anwendungen zum generischen Rechnen beschreiben, die im weiteren Verlauf der Arbeit häufig benutzt werden. Zu diesen Anwendungen gehört die generische Bestimmung von unipotenten Konjugiertenklassen und den zugehörigen Zentralisatoren, deren Fusionen und die Schnitte von Konjugiertenklassen mit gewissen Doppelnebenklassen. Wir werden hier keine Beispielrechnungen vorführen, diese werden wir an den entsprechenden Stellen geben.

(8.1) Unipotente Konjugiertenklassen und Zentralisatoren

Die Grundaufgabe ist folgende: Es sei $\mathbf{H}$ eine $\mathbf{F}$-stabile Untergruppe von $\mathbf{G}$. Finde Vertreter für alle unipotenten Konjugiertenklassen von $\mathbf{H}^{\mathbf{F}}$ und berechne die Zentralisatoren dieser Vertreter und deren Ordnung. Dabei heißt eine Konjugiertenklasse unipotent, wenn sie ein unipotentes Element enthält. Damit sind natürlich alle Elemente der Konjugiertenklasse unipotent. Dies ist im Allgemeinen für beliebige Untergruppen $\mathbf{H}$ ein schwieriges Problem. Wenn sich $\mathbf{H}$ gut parametrisieren lässt, können wir mit Algorithmus I.(6.15) den Zentralisator unipotenter Elemente leicht ausrechnen und auch Konjugiertheitstests durchführen.

Es seien $u, u_1 \in \mathbf{H}^{\mathbf{F}}$ unipotente Elemente und $\mathcal{H} := \{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_l\}$ eine ganzzahlige Parametrisierung von $\mathbf{H}$, wobei die Parametermenge von $\mathcal{A}_i$ mit P_i bezeichnet sei. Dabei sollen auch u und u_1 als ganzzahlig parametrisierte Elemente gegeben sein. Ein typisches Beispiel ist $u = x_\alpha(1)$. Wir wollen nun u und u_1 auf Konjugiertheit in $\mathbf{H}^{\mathbf{F}}$ testen. Für alle $i \in \{1, \ldots, l\}$ definieren wir

$$C_i := \{t \in P_i \mid \mathcal{A}_i(t)u = u_1\mathcal{A}_i(t)\}$$

Weil $\mathcal{H}$ eine Parametrisierung von $\mathbf{H}$ ist, beschreibt die Menge

$$Z := \dot{\bigcup_{i\in\{1,\ldots,l\}}} \mathcal{A}_i(C_i) \subseteq \mathbf{H}$$

genau die Elemente aus $\mathbf{H}$, die das Element u auf das Element u_1 konjugieren. Wegen Bemerkung I.(7.1) ist

$$Z^{\mathbf{F}} := \dot{\bigcup_{i\in\{1,\ldots,l\}}} \mathcal{A}_i(C_i^{\mathbf{F}}) \subseteq \mathbf{H}^{\mathbf{F}}$$

genau die Menge der Elemente aus $\mathbf{H}^{\mathbf{F}}$, die das Element u auf das Element u_1 konjugieren.

Wir müssen also nur die Parametermengen C_i bestimmen. Dazu berechnen wir zunächst für alle $i \in \{1, \ldots, l\}$ mittels Algorithmus I.(6.15) die Normalformen von $\mathcal{A}_i \cdot u$ und von $u_1 \cdot \mathcal{A}_i$. Wegen der Eindeutigkeit der Bruhatzerlegung I.(6.13) erhalten wir dann Bedingungen, das heißt Gleichungssysteme mit rationale Funktionen, für die Parameter $t \in P_i$, die in C_i liegen. Durch Multiplikation mit den Nennern dieser rationalen Funktionen erhalten wir ein polynomiales Gleichungssystem, dessen Lösung in P_i gerade C_i beschreibt. Die Bestimmung von Z ist somit zurückgeführt auf das Lösen eines polynomialen Gleichungssystems. Dies können wir wie in Abschnitt I.7 beschrieben durchführen. Dabei ist wichtig, dass wir eine ganzzahlige Parametrisierung verwenden. Ist $Z^{\mathbf{F}} = \emptyset$, so sind u und u_1 nicht in $\mathbf{H}^{\mathbf{F}}$ konjugiert. Ist $Z^{\mathbf{F}} \neq \emptyset$, so sind u

und u_1 in $\mathbf{H}^{\mathbf{F}}$ konjugiert. Für den Fall $u = u_1$ beschreibt Z gerade den Zentralisator von u in $\mathbf{H}$ und $Z^{\mathbf{F}}$ den Zentralisator von u in $\mathbf{H}^{\mathbf{F}}$. Die Anzahl der Elemente von $Z^{\mathbf{F}}$ ist dann die Ordnung des Zentralisators. Diese Anzahl berechnen wir wie in Abschnitt I.7 beschrieben.

Es sei beispielsweise $J \subseteq \Pi$. Die in I.(4.3) definierte parabolische Untergruppe $\mathbf{P}$ von $\mathbf{G}$ ist dann $\mathbf{F}$-stabil. Es sei $\mathbf{H} = \mathbf{P}$, dann ist nach Definition I.(4.3) und Beispiel I.(6.9)(i) die Menge $\{\mathcal{B}w\mathcal{B}\}_{w\in\mathbf{W}_J}$ eine Parametrisierung von $\mathbf{P}$. Wir können auf die oben beschriebene Weise also Konjugiertheitstests in parabolischen Gruppen durchführen und Zentralisatoren und deren Ordnung berechnen. Ist $\mathbf{H} = \mathbf{L}$ eine $\mathbf{F}$-stabile Leviuntergruppe von $\mathbf{G}$, so hat $\mathbf{H}$ selber wieder eine Bruhatzerlegung gemäß Satz I.(4.2) und wir erhalten durch die Menge $\{\mathcal{B}_J w\mathcal{B}_J\}_{w\in\mathbf{W}_J}$ eine Parametrisierung von $\mathbf{H}$, wobei $\mathcal{B}_J w\mathcal{B}_J$ ein zu Beispiel I.(6.9)(i) entsprechend parametrisiertes Element von $\mathbf{L}$ ist. Dabei ist zu bemerken, dass bei der Berechnung der Normalform von $\mathcal{B}w\mathcal{B}\cdot u$ beziehungsweise von $u_1 \cdot \mathcal{B}w\mathcal{B}$ durch Algorithmus I.(6.15) niemals der Fall 4(ii) eintritt, da u und u_1 unipotent sind. Daher muss hierbei keine Fallunterscheidung vorgenommen werden, das heißt, wir können für alle Parameter die gleiche Rechnung durchführen.

(8.2) Bemerkung

(i) Die bei Konjugiertheitstests und der Zentralisatorberechnung auftretenden Gleichungssysteme sind teilweise sehr schwer zu lösen. Dabei ist es oftmals deutlich leichter, zu entscheiden, ob ein Gleichungssystem keine Lösung hat oder eine Lösung existiert, als alle Lösungen zu bestimmen und deren Anzahl zu bestimmen. Daher ist ein Konjugiertheitstest im Allgemeinen deutlich einfacher durchzuführen als die Bestimmung des Zentralisators. Zur Zentralisatorbestimmung hilft es deshalb oft, ein konjugiertes Element zu finden, dessen Zentralisator leichter zu bestimmen ist, das heißt, die auftretenden Gleichungen leichter zu lösen sind.

(ii) Für Konjugiertheitstests zweier Elemente hilft es oft, ein drittes Element zu finden und nachzuweisen, dass beide Elemente zu diesem konjugiert sind, falls die Gleichungen beim direkten Nachweis zu kompliziert sind. Es empfiehlt sich also in praktischen Rechnungen, möglichst viele Vertreter für die einzelnen Konjugiertenklassen zu kennen, um genügend Testkandidaten für Konjugiertheitstests zu haben.

Bleibt noch die Frage, wie wir geeignete Vertreter für die unipotenten Klassen finden können. Darauf werden wir in I.(8.3) näher eingehen.

(8.3) Finden von Klassenvertretern unipotenter Klassen

Wir wollen nun untersuchen, wie wir geeignete Klassenvertreter für unipotente Klassen einer gegebenen Gruppe $\mathbf{H} \leqslant \mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ finden. Ein „Stochern im Nebel" führt hierbei meist nicht zum Ziel. Aber für viele Gruppen $\mathbf{H}$ können wir auf die folgende Weise Kandidaten für die Vertreter der unipotenten Klassen bestimmen. Wir nutzen dabei aus, dass wir in diesen Gruppen Vertreter für alle unipotenten Klassen von $\mathbf{H}$ in $\mathbf{U}^{\mathbf{F}} \cap \mathbf{H} \leqslant \mathbf{U}^{\mathbf{F}}$ finden können. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn $\mathbf{H}$ eine parabolische Untergruppe ist. Nun ist $\mathbf{U}^{\mathbf{F}} \cap \mathbf{H}$ nach Bemerkung I.(1.9)

eine p-Gruppe. Wir wollen daher zunächst ein Verfahren angeben, die Konjugiertenklassen einer Untergruppe von $\mathbf{U}^{\mathbf{F}}$ zu bestimmen. Wir benutzen dazu einen Algorithmus zur Berechnung von Konjugiertenklassen in auflösbaren Gruppen, der von Mecky und Neubüser in [MN89, 3.1] beschrieben wurde, und die in I.(3.3) gegebene Zentralreihe von $\mathbf{U}$. Die dort definierten Untergruppen $\mathbf{U}_i$ sind offensichtlich unter unseren Voraussetzungen $\mathbf{F}$-invariant und durch die $\mathbf{U}_i^{\mathbf{F}}$ wird eine Zentralreihe von $\mathbf{U}^{\mathbf{F}}$ gegeben. Der Einfachheit halber beschreiben wir diesen Algorithmus hier für $\mathbf{U}^{\mathbf{F}}$. Er lässt sich aber sehr einfach auch auf Untergruppen von $\mathbf{U}^{\mathbf{F}}$ anwenden. Der wesentliche Schritt des Algorithmus sieht folgendermaßen aus, wobei wir hier die Bezeichnungen aus [MN89] verwenden.

Es sei G eine p-Gruppe und N ein elementarabelscher zentraler Normalteiler von G. Weiterhin seien $h \in G$ und C das volle Urbild von $C_{G/N}(hN)$. Dann operiert C auf hN und wir erhalten auf folgende Weise ein Repräsentantensystem R für die Bahnen dieser Operation:

- Ist $[h, C] \neq 1$, dann ist $R = hK$, wobei K ein Komplement von $[h, C]$ in N ist.

Die Konjugiertenklassen von $\mathbf{U}^{\mathbf{F}}$ lassen sich dann folgendermaßen bestimmen:

Wir können per Induktion annehmen, dass für ein $i \in \{1, \ldots, h\}$ durch $\{h_1^{(i)}\mathbf{U}_i^{\mathbf{F}}, \ldots, h_k^{(i)}\mathbf{U}_i^{\mathbf{F}}\}$ ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen von $\mathbf{U}^{\mathbf{F}}/\mathbf{U}_i^{\mathbf{F}}$ gegeben ist. Es sei $\overline{C}_j$ der Zentralisator von $h_j^{(i)}\mathbf{U}_i^{\mathbf{F}}$ in $\mathbf{U}^{\mathbf{F}}/\mathbf{U}_i^{\mathbf{F}}$ und C_j das volle Urbild von $\overline{C}_j$ in $\mathbf{U}^{\mathbf{F}}/\mathbf{U}_{i+1}^{\mathbf{F}}$. Dann operiert C_j auf $h_j^{(i)}\mathbf{U}_i^{\mathbf{F}}$. Dies ist genau die oben beschriebene Situation und wir erhalten durch Komplementbestimmung ein Vertretersystem der Bahnen dieser Operation. Die Vereinigung dieser Vertreter für alle j ergibt ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen von $\mathbf{U}^{\mathbf{F}}/\mathbf{U}_{i+1}^{\mathbf{F}}$. Auf diese Weise erhalten wir schließlich ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen von $\mathbf{U}^{\mathbf{F}}$.

Wir wollen hier noch einige Bemerkungen zum generischen Berechnen dieser Konjugiertenklassen machen.

(i) Wir benutzen zum Rechnen die Parametrisierung von $\mathbf{U}$, die in Beispiel I.(6.9)(iv) angegeben wurde. Entsprechende ganzzahlige Parametrisierungen benutzen wir für die Untergruppen $\mathbf{U}_i$.

(ii) Die benötigten Zentralisatorberechnungen führen wir wie in I.(8.1) beschrieben durch. Wir erhalten so eine ganzzahlige Parametrisierung des Zentralisators. Daraus erhalten wir sofort eine ganzzahlige Parametrisierung des vollen Urbilds. Die hierbei auftretenden Gleichungssysteme sind affin und lassen sich sehr einfach automatisch lösen.

(iii) Auch die Komplementbestimmung führt auf ein lineares Gleichungssystem, das wir leicht mit den in Abschnitt I.7 beschriebenen Methoden lösen können. Vergleiche dazu die Beispielrechnung III.(5.5).

(iv) Meist sind wir gar nicht an den Konjugiertenklassen von $\mathbf{U}^{\mathbf{F}}$ oder einer Untergruppe interessiert. Der Torus $\mathbf{T}^{\mathbf{F}}$ normalisiert $\mathbf{U}^{\mathbf{F}}$ und wir sind oft nur an den unipotenten Klassen von $\mathbf{B}^{\mathbf{F}} = \mathbf{T}^{\mathbf{F}}\mathbf{U}^{\mathbf{F}}$ interessiert. Auch diese lassen sich auf diese Art berechnen. Wir müssen nur die Operation von $\mathbf{T}^{\mathbf{F}}$ auf $\mathbf{U}^{\mathbf{F}}$ berücksichtigen. Da $\mathbf{T}^{\mathbf{F}}$ alle Untergruppen $\mathbf{U}_i^{\mathbf{F}}$ der Zentralreihe normalisiert, reicht es aus, wenn wir in jedem Schritt des Algorithmus

die Bahnen von $\mathbf{T}$ auf den gefundenen Vertretern bestimmen. Wir erhalten auf diese Weise ein Vertretersystem der unipotenten Klassen von $\mathbf{B}^{\mathbf{F}}$. Für diese Rechnungen benutzen wir die ganzzahlige Parametrisierung von $\mathbf{T}$, die wir in Beispiel I.(6.9)(v) gesehen haben. Die hierbei auftretenden Gleichungssysteme sind leider nicht mehr so leicht zu lösen. Im Gegensatz zu den Gleichungssystemen, die bei der Zentralisatorberechnung und der Komplementbestimmung bei diesem Algorithmus auftreten, haben wir hierfür keinen automatischen Algorithmus, sondern müssen diese Systeme oft von Hand lösen wie in I.7 beschrieben.

(8.4) Schnittzahlen

Es sei C die $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$-Konjugiertenklasse von hu mit $h \in \mathbf{T}^{\mathbf{F}}$ und $u \in \mathbf{U}^{\mathbf{F}}$. Weiterhin sei $J \subseteq \Pi$. Die in I.(4.3) definierte parabolische Untergruppe $\mathbf{P}_J$ ist dann $\mathbf{F}$-stabil. Es sei $D = \mathbf{P}_J^{\mathbf{F}} \widehat{v} \mathbf{P}_J^{\mathbf{F}}$ mit $v \in D_{J,J}$ eine $\mathbf{P}_J^{\mathbf{F}}$-$\mathbf{P}_J^{\mathbf{F}}$-Doppelnebenklasse von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$. Vergleiche dazu I.(4.7). Die Aufgabe ist die Bestimmung von $|C \cap D|$. Es gilt nun wegen Lemma I.(4.7)(ii)

$$\begin{aligned}
|C \cap D| &= \frac{1}{|C_{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}}(hu)|} \left| \left\{ g \in \mathbf{G}^{\mathbf{F}} \mid (hu)^g \in \mathbf{P}_J^{\mathbf{F}} \widehat{v} \mathbf{P}_J^{\mathbf{F}} \right\} \right| \\
&= \frac{|\mathbf{P}_J^{\mathbf{F}}|}{|C_{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}}(hu)|} \left| \left\{ u'\widehat{w} \in \mathbf{G}^{\mathbf{F}} \mid w \in D_{\emptyset,J}, u' \in \mathbf{U}_w^{\mathbf{F}}, (hu)^{u'\widehat{w}} \in \mathbf{P}_J^{\mathbf{F}} \widehat{v} \mathbf{P}_J^{\mathbf{F}} \right\} \right| \\
&= \frac{|\mathbf{P}_J^{\mathbf{F}}|}{|C_{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}}(hu)|} \sum_{w \in D_{\emptyset,J}} \left| \left\{ u' \in \mathbf{U}_w^{\mathbf{F}} \mid (hu)^{u'\widehat{w}} \in \mathbf{P}_J^{\mathbf{F}} \widehat{v} \mathbf{P}_J^{\mathbf{F}} \right\} \right| \\
&= \frac{|\mathbf{P}_J^{\mathbf{F}}|}{|C_{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}}(hu)|} \sum_{w \in D_{\emptyset,J}} \left| \left\{ u' \in \mathbf{U}_w \mid (hu)^{u'\widehat{w}} \in \mathbf{P}_J \widehat{v} \mathbf{P}_J \right\}^{\mathbf{F}} \right|. \qquad \text{(I.3)}
\end{aligned}$$

Die letzte Umformung ist richtig, da für $g \in \mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ nach Satz I.(4.9) $g \in \mathbf{P}_J^{\mathbf{F}} \widehat{v} \mathbf{P}_J^{\mathbf{F}}$ äquivalent zu $g \in \mathbf{P}_J \widehat{v} \mathbf{P}_J$ ist. Nun gilt weiterhin

$$(hu)^{u'\widehat{w}} = \left(h \left((u')^{-1} \right)^h uu' \right)^{\widehat{w}} = h^{\widehat{w}} \left(\left((u')^{-1} \right)^h uu' \right)^{\widehat{w}} \qquad \text{(I.4)}$$

Dann gibt es wegen Lemma I.(3.8) mit $\Psi_1 = R(w)$ und $\psi_2 = \Phi \setminus R(w)$ in Abhängigkeit von u' eindeutige Elemente $u_1' \in \mathbf{U}_w$ und $u_2' \in \mathbf{U}$ mit ${u'}_2^w \in \mathbf{U}$ und

$$u_1' u_2' = \left(u'^{-1} \right)^h uu' \in \mathbf{U} \qquad \text{(I.5)}$$

Setzen wir dies in Gleichung I.4 ein, so erhalten wir

$$(hu)^{u'\widehat{w}} = \underbrace{h^{\widehat{w}}}_{\in \mathbf{T} \subseteq \mathbf{P}_J} \underbrace{{u_1'}^{\widehat{w}}}_{\in \mathbf{U}^-} \underbrace{{u_2'}^{\widehat{w}}}_{\in \mathbf{U} \subseteq \mathbf{P}_J}.$$

Somit ergibt sich aus Gleichung I.3

$$|C \cap D| = \frac{|\mathbf{P}_J^{\mathbf{F}}|}{|C_{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}}(hu)|} \sum_{w \in D_{\emptyset,J}} \left| \left\{ u' \in \mathbf{U}_w \mid u'^{\widehat{w}}_1 \in \mathbf{P}_J \widehat{v} \mathbf{P}_J \right\}^{\mathbf{F}} \right| \tag{I.6}$$

Nun wollen wir den zu $w \in D_{\emptyset,J}$ gehörenden Summanden dieser Summe berechnen. Es sei dazu $\mathcal{U}_w$ die Parametrisierung von $\mathbf{U}_w$ aus Beispiel I.(6.9)(vi) mit Parametermenge $P(\mathcal{U}_w)$. Wir berechnen gemäß Lemma I.(3.8) zwei parametrisierte Elemente $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_2$ mit Parametermengen $P(\mathcal{U}_1) = P(\mathcal{U}_2) = P(\mathcal{U}_w)$, so dass

$$\mathcal{U}_w^h u \mathcal{U}_w = \mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2$$

mit

$$\mathcal{U}_1 = \prod_{\alpha \in \Psi_1} x_\alpha(f_\alpha) \quad \text{und} \quad \mathcal{U}_2 = \prod_{\alpha \in \Psi_2} x_\alpha(g_\alpha)$$

gilt. Wir berechnen nun mit Algorithmus I.(6.15) eine Normalform von $\mathcal{U}_1^{\widehat{w}}$. Es sei $\{\mathcal{A}_i^{(w)}\}_{1 \leqslant i \leqslant e_w}$ diese Normalform mit entsprechenden Parametermengen $P_i^{(w)}$ und zugehörigen Bruhatzellen $\mathbf{B}\widehat{w}_i\mathbf{B}$. Für alle $t \in P_i^{(w)}$ ist $\mathcal{U}_1^{\widehat{w}}(t) \in \mathbf{B}\widehat{w}_i\mathbf{B}$. Nach Lemma I.(4.7) ist $\mathbf{B}\widehat{w}_i\mathbf{B} \subseteq \mathbf{P}_J\widehat{v}_i\mathbf{P}_J$ genau dann, wenn $w_i \in \mathbf{W}_J v \mathbf{W}_J$ ist. Dies ist mit **CHEVIE** [GHL+96] leicht zu bestimmen. Wegen Bemerkung I.(7.1) folgt dann aus Gleichung I.6

$$|C \cap D| = \frac{|\mathbf{P}_J^{\mathbf{F}}|}{|C_{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}}(hu)|} \sum_{w \in D_{\emptyset,J}} \left(\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant e_w \\ w_i \in \mathbf{W}_J v \mathbf{W}_J}} \left| P_i^{(w)^{\mathbf{F}}} \right| \right).$$

Diese Formel lässt sich nun auswerten. Beachte dazu auch Abschnitt I.7.

(8.5) Fusionen unipotenter Elemente

Es seien $\mathbf{H}_1 \leqslant \mathbf{H}_2$ Untergruppen von $\mathbf{G}$ und die unipotenten Konjugiertenklassen von $\mathbf{H}_1^{\mathbf{F}}$ und $\mathbf{H}_2^{\mathbf{F}}$ seien bekannt. Um die Fusionen der unipotenten Klassen von $\mathbf{H}_1^{\mathbf{F}}$ nach $\mathbf{H}_2^{\mathbf{F}}$ zu bestimmen, brauchen wir nur Konjugiertheitstests in der Gruppe $\mathbf{H}_2$ wie in I.(8.1) durchzuführen. Hierbei ist die Bemerkung I.(8.2) nützlich. Vergleiche hierzu auch die ausführliche Beispielrechnung III.(5.4).

Kapitel II

Chevalleygruppen vom Typ $\mathbf{F}_4$

In diesem Kapitel wollen wir die im weiteren Verlauf der Arbeit untersuchten endlichen Chevalleygruppen $F_4(q)$ einführen. Wir benutzen dazu die Beschreibung dieser Gruppen als Fixpunktgruppen unter einem Frobeniusmorphismus $\mathbf{F}$ einer einfachen algebraischen Gruppe vom Typ $\mathbf{F}_4$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p. Wir wollen daher zunächst diese algebraischen Gruppen genauer beschreiben. Wir folgen hier im wesentlichen der Darstellung in [Bou02] und [Car85].

Dazu geben wir eine konkrete Realisierung des Wurzelsystems vom Typ $\mathbf{F}_4$ im 4-dimensionalen euklidischen Raum an und beschreiben die Weylgruppe dieses Wurzelsystems. Weiterhin stellen wir das Wurzeldatum vor, das wir gemäß I.(1.3) zur Beschreibung der einfachen algebraischen Gruppe benutzen. Dieses Wurzeldatum ist wesentlich für die Anwendung der in I.8 beschriebenen Algorithmen auf die Gruppen $F_4(q)$. Wir geben außerdem die konkrete Wahl der in der Präsentation I.(2.4) vorkommenden Konstanten in diesem Fall an. Diese Wahl entspricht der in der Literatur häufig getroffenen Wahl, so dass sich unsere Ergebnisse vergleichen lassen zum Beispiel mit den Ergebnissen in [Sho74]. Damit haben wir alle Informationen bereitgestellt, um unsere Algorithmen aus Kapitel I anzuwenden.

Im Anschluss daran benutzen wir eine konkrete Realisierung der algebraischen Gruppe als abgeschlossene Untergruppe der $\mathrm{GL}_{52}(k)$, um die endlichen Chevalleygruppen $F_4(q)$ als Fixpunktgruppen eines geeigneten Frobeniusmorphismus zu beschreiben. Wir beschreiben die Wirkung dieses Frobeniusmorphismus auf den Elementen der algebraischen Gruppe und können somit die Elemente der Fixpunktuntergruppen $F_4(q)$ angeben. Dadurch erhalten wir effiziente Möglichkeiten, explizite Rechnungen generisch für alle Gruppen $F_4(q)$ gleichzeitig durchzuführen. Hiervon werden wir im Verlauf der Arbeit noch intensiv Gebrauch machen.

Am Schluss geben wir noch einige gruppentheoretische Eigenschaften der Gruppen an. Dazu gehören insbesondere die Größenordnungen und die Struktur einiger im Folgenden wichtigen Untergruppen. Es zeigt sich, dass sich diese Eigenschaften generisch für alle Gruppen $F_4(q)$ beschreiben lassen. Dieses Phänomen werden wir im Laufe der Arbeit noch häufig beobachten.

II.1 Das Wurzelsystem und die Weylgruppe vom Typ $\mathbf{F}_4$

Wir wollen in diesem Abschnitt das Wurzelsystem vom Typ $\mathbf{F}_4$ vorstellen. Wir wählen die Bezeichnungen wie in [Bou02, Kapitel 6, Abschnitt 4.9], die auch in [Sho74] verwendet werden.

Es sei V ein 4-dimensionaler euklidischer Vektorraum mit Orthonormalbasis $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ bezüglich des Skalarprodukts $(\cdot\,,\cdot)$. Die Menge

$$\Phi := \left\{ \begin{array}{ll} \pm\varepsilon_i & 1 \leqslant i \leqslant 4 \\ \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j & 1 \leqslant i, j \leqslant 4, i \neq j \\ \frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4) & \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(8 Wurzeln)} \\ \text{(24 Wurzeln)} \\ \text{(16 Wurzeln)} \end{array} \tag{II.1}$$

ist ein Wurzelsystem vom Typ $\mathbf{F}_4$ im Sinne von [Bou02, Kapitel 6]. Dabei sollen die Vorzeichen in der Menge jeweils unabhängig voneinander gewählt werden. Das Wurzelsystem Φ enthält dann 48 Elemente. Durch die Menge $\Pi := \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$ mit

$$\pi_1 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \pi_2 := \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \quad \pi_3 := \varepsilon_4, \quad \pi_4 := \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$$

ist ein Fundamentalsystem von Φ gegeben. Zu diesem Fundamentalsystem gehören folgende positiven Wurzeln:

$$\Phi^+ := \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon_i & 1 \leqslant i \leqslant 4 \\ \varepsilon_i \pm \varepsilon_j & 1 \leqslant i < j \leqslant 4, \\ \frac{1}{2}(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4) & \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(4 Wurzeln)} \\ \text{(12 Wurzeln)} \\ \text{(8 Wurzeln)} \end{array}$$

Für alle Wurzeln $\alpha \in \Phi$ gilt $(\alpha, \alpha) \in \{1, 2\}$ und es gilt insbesondere für die Fundamentalwurzeln $(\pi_1, \pi_1) = (\pi_2, \pi_2) = 2$ und $(\pi_3, \pi_3) = (\pi_4, \pi_4) = 1$. Wir definieren auf Φ^+ eine Totalordnung, indem wir die Wurzeln mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_{24}$ durchnummerieren und anhand ihrer Nummern vergleichen. Dies ist auch die Nummerierung der Wurzeln innerhalb von **CHEVIE** [GHL+96], das wir zum Rechnen mit Wurzeln verwenden. Vergleiche zur Nummerierung Tabelle A.1 im Anhang.

Für alle Wurzeln $\alpha \in \Phi$ definieren wir die zugehörigen Kowurzeln $\alpha^\vee$ durch

$$\alpha^\vee := 2\frac{\alpha}{(\alpha, \alpha)}. \tag{II.2}$$

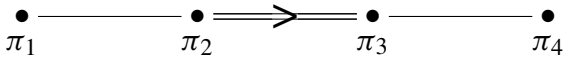
Dann bildet die Menge $\Phi^\vee := \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Phi\}$ auch ein Wurzelsystem vom Typ $\mathbf{F}_4$ mit Fundamentalsystem $\Pi^\vee := \{\pi_1^\vee, \pi_2^\vee, \pi_3^\vee, \pi_4^\vee\}$. Dabei ist $\alpha^\vee$ genau dann eine lange Wurzeln, wenn α eine kurze Wurzel ist. Vergleiche [Car72, 3.6.1]. Wir definieren die **Cartan-Matrix** als die Matrix der skalierten Skalarprodukte der Fundamentalwurzeln mit den Fundamentalkowurzeln:

$$C := \left((\pi_i, \pi_j^\vee)\right)_{i,j=1,\ldots,4}$$

Wir erhalten in unserem Fall dann die folgende Cartan-Matrix:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{II.3}$$

Aus der Cartan-Matrix können wir das zu Φ gehörende Dynkin-Diagramm gemäß [Car72, 3.4] bestimmen. Dieses hat die folgende Gestalt:



Der Pfeil deutet dabei an, dass die Fundamentalwurzeln π_1 und π_2 um den Faktor $\sqrt{2}$ länger sind als π_3 und π_4. Die maximale Höhe einer Wurzel ist $h := 11$.

Die Spiegelungen an den Ebenen senkrecht zu den 4 Fundamentalwurzeln erzeugen die Weylgruppe $\mathbf{W}$ des Wurzelsystems. Wir wollen die zu π_i gehörende Fundamentalspiegelung mit s_i bezeichnen. $\mathbf{W}$ operiert dann in natürlicher Weise durch Permutation der Wurzeln auf Φ. Diese Permutationsdarstellung wird innerhalb von **CHEVIE** zum Rechnen in $\mathbf{W}$ benutzt. Vergleiche auch I.(5.3)(v). Die Weylgruppe ist die Symmetriegruppe eines regulären Körpers in $\mathbb{R}^4$, der 24 Seiten hat, die alle Oktaeder sind [Cox73]. Gruppentheoretisch lässt sich $\mathbf{W}$ folgendermaßen charakterisieren [Bou02, Kapitel 6, 4.9]: Die 24 Wurzeln der Form $\{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leqslant i, j \leqslant 4\}$ bilden ein Wurzelsystem vom Typ $\mathbf{D_4}$. Die Weylgruppe $\mathbf{W}'$ dieses Systems ist isomorph zu einem semidirekten Produkt einer symmetrischen Gruppe auf 4 Punkten und $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. Und $\mathbf{W}$ ist isomorph zu einem semidirekten Produkt einer symmetrischen Gruppe auf 3 Punkten und $\mathbf{W}'$. Damit ist $|\mathbf{W}| = 2^7 3^2$.

Unter der Operation von $\mathbf{W}$ zerfällt Φ in zwei Bahnen. Die eine Bahn enthält genau die langen Wurzeln von Norm 2. Ein Repräsentant ist α_1. Der Stabilisator ist die Spiegelungsuntergruppe von $\mathbf{W}$, die erzeugt wird von den Spiegelungen α_3, α_4 und α_{14}, und hat Ordnung 48. Die andere Bahn enthält die kurzen Wurzeln von Norm 1. Ein Repräsentant ist α_{24}. Der Stabilisator wird erzeugt von den Spiegelungen α_2, α_3 und α_4 und hat auch Ordnung 48.

Die Weylgruppe $\mathbf{W}$ hat 25 Konjugiertenklassen. Diese wurden von Kondo in [Kon65] ausgerechnet. Im Anhang A.3 sind Repräsentanten dieser Klassen und die entsprechenden Zentralisatoren aufgelistet.

II.2 Das Wurzeldatum

In diesem Abschnitt wollen wir das Wurzeldatum einer linearen reduktiven Gruppe vom Typ $\mathbf{F}_4$ vorstellen, das wir zum expliziten Rechnen in diesen Gruppen benutzt haben. Vergleiche dazu auch [Bou02, Kapitel 6] und die Dokumentation von **CHEVIE** [GHL+96].

Es seien $\mathbf{X} := \mathbb{Z}^4$ und $\mathbf{Y} := \mathbb{Z}^4$ aufgefasst als Zeilenmoduln und es sei $\langle \cdot\,,\cdot \rangle : X \times Y \longrightarrow \mathbb{Z}$ die Standardbilinearform, die durch $\langle x\,, y\rangle = xy^{\mathrm{tr}}$ für beliebige $x \in \mathbf{X}$ und $y \in \mathbf{Y}$ definiert ist. Dann sind $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ vermöge $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ dual zueinander. Es seien weiterhin $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4\}$ die Standardbasis von $\mathbf{X}$ und $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$ die dazu bezüglich $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ duale Basis von $\mathbf{Y}$. Dann ist der Vektorraum $V := \mathbf{X} \otimes \mathbb{R}$ bezüglich der durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen positiv definiten Bilinearform ein euklidischer Raum mit Orthonormalbasis $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$, wobei

$$\varepsilon_1 := \chi_1 + 2\chi_2 + 3\chi_3 + 2\chi_4, \quad \varepsilon_2 := \chi_1 + \chi_2 + \chi_3, \quad \varepsilon_3 := \chi_2 + \chi_3, \quad \varepsilon_4 := \chi_3$$

ist. Der Vektorraum $V^\vee := \mathbf{Y} \otimes \mathbb{R}$ kann bezüglich $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ als Dualraum von V aufgefasst werden. Wir definieren dann die Menge $\Phi \subseteq V$ als die in II.1 gegebenen Linearkombinationen der Basis $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$. Dann ist $\Phi \subseteq \mathbf{X}$ und das Fundamentalsystem $\Pi := \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\} \subseteq \Phi$ ist durch die Vektoren

$$\pi_1 := (1, 0, 0, 0), \quad \pi_2 := (0, 1, 0, 0), \quad \pi_3 := (0, 0, 1, 0), \quad \pi_4 := (0, 0, 0, 1)$$

gegeben. Die Menge Φ bildet somit ein Wurzelsystem vom Typ $\mathbf{F}_4$ in V. Die zugehörigen Kowurzeln als Vektoren in V können wir mittels Gleichung II.2 berechnen. Wir erhalten daraus die Wurzeln als Linearkombinationen der Kowurzeln. In A.2 sind diese Linearkombinationen angegeben. Bezüglich der Paarung $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ zwischen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ ergibt sich dann das folgende Fundamentalsystem der Kowurzeln $\Pi^\vee := \{\pi_1^\vee, \pi_2^\vee, \pi_3^\vee, \pi_4^\vee\} \subseteq \mathbf{Y}$ als Teilmenge von $\mathbf{Y}$, die durch die Vektoren

$$\pi_1^\vee := (2, -1, 0, 0), \quad \pi_2^\vee := (-1, 2, -1, 0), \quad \pi_3^\vee := (0, -2, 2, -1), \quad \pi_4^\vee := (0, 0, -1, 2)$$

gegeben ist. Daraus können wir die Menge $\Phi^\vee \subseteq \mathbf{Y}$ der Kowurzeln bestimmen. Vergleiche dazu A.2. Das Quadrupel $\Psi := (\mathbf{X}, \Phi, \mathbf{Y}, \Phi^\vee)$ ist dann ein Wurzeldatum. Die durch die gemäß I.(1.1) definierten Endomorphismen s_α für $\alpha \in \Phi$ erzeugte Gruppe $\mathbf{W}$ ist eine Weylgruppe vom Typ $\mathbf{F}_4$. Die Weylgruppe $\mathbf{W}$ operiert auf dem Wurzelsystem Φ. Wir erhalten dadurch eine Permutationsdarstellung von $\mathbf{W}$ auf den 48 Wurzeln des Wurzelsystems. Dies ist die Darstellung von $\mathbf{W}$, die innerhalb von **CHEVIE** für die Berechnungen benutzt wird. Damit ist das Wurzeldatum genau in der in I.(5.3) beschriebenen Form gegeben.

Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik p, so ist gemäß I.(1.3) durch Ψ eine zusammenhängende lineare reduktive algebraische Gruppe $\mathbf{F}_4(k)$ vom Typ $\mathbf{F}_4$ gegeben. Diese Gruppe ist nach [Spr98, 10.1.1] eine einfache algebraische Gruppe vom adjungierten Typ, da $\mathbf{X} = \mathbb{Z}\Phi$ ist. Es ist aber auch $\mathbf{Y} = \mathbb{Z}\Phi^*$. Damit ist $\mathbf{F}_4(k)$ auch einfach zusammenhängend. Das Wurzeldatum ist selbstdual und die duale Gruppe $\mathbf{F}_4(k)^*$ ist als algebraische Gruppe isomorph zu $\mathbf{F}_4(k)$, vergleiche [Car85, 1.11].

Wir müssen zum expliziten Rechnen nur noch die in der Präsentation I.(2.4) auftretenden Konstanten $c_{\alpha,\beta;i,j}$ und $\eta_{\alpha,\beta}$ angeben. Auf Φ sei die in I.(3.2) definierte Totalordnung gegeben. Bezüglich dieser Totalordnung können wir die extraspeziellen Paare von Φ bestimmen. Diese sind in I.(3.4) angegeben. Nach Lemma I.(3.5) können wir die Vorzeichen auf diesen extraspeziellen Paaren beliebig vorgeben und dann kombinatorisch die Konstanten $c_{\alpha,\beta;i,j}$ bestimmen. Die Konstanten $\eta_{\alpha,\beta}$ ergeben sich dann aus Lemma I.(2.3). Wir wählen die Vorzeichen wie in Tabelle T.II.1 angegeben. Diese Wahl entspricht derjenigen, die Shoji in [Sho74] getroffen hat. Die daraus resultierenden Koeffizienten der Kommutatorformel sind im Anhang A.4 aufgelistet. Die Gruppe $\mathbf{F}_4(k)$ ist dann isomorph zur mit diesen Wahlen der Koeffizienten durch die Präsentation I.(2.4) definierten Gruppe. Wir wollen diese beiden Gruppen im Folgenden identifizieren. In

extraspezielles Paar	$\varepsilon_{\alpha,\beta}$	extraspezielles Paar	$\varepsilon_{\alpha,\beta}$
(α_2, α_1)	-1	(α_3, α_2)	-1
(α_4, α_3)	-1	(α_3, α_5)	-1
(α_3, α_6)	-1	(α_4, α_6)	-1
(α_3, α_8)	-1	(α_4, α_8)	-1
(α_4, α_9)	1	(α_2, α_{11})	1
(α_4, α_{11})	1	(α_4, α_{13})	1
(α_4, α_{14})	1	(α_4, α_{15})	1
(α_3, α_{17})	1	(α_4, α_{17})	1
(α_4, α_{19})	-1	(α_3, α_{21})	-1
(α_2, α_{22})	1	(α_1, α_{23})	1

Tabelle T.II.1: Vorzeichenwahl auf den extraspeziellen Paaren

diesem Sinne wird $\mathbf{F}_4(k)$ von den Elementen $t \in \mathbf{T}$ und $x_\alpha(u)$ für $\alpha \in \Phi$ und $u \in k$ erzeugt und es gilt $\mathbf{W} = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$. Wir erhalten also den Normalisator des Torus als Erweiterung der Weylgruppe mit dem Torus. In Bemerkung I.(5.5)(iii) ist der Kozykel, der diese Erweiterung beschreibt, als Funktion von $\mathbf{W} \times \mathbf{W} \to \mathbf{T}$ explizit angegeben. Man erkennt sofort, dass im Falle $p = 2$ dieser Kozykel trivial ist, die Erweiterung also zerfallend ist. Die Weylgruppe ist in diesem Fall also eine Untergruppe von $\mathbf{F}_4(k)$. Ist $p \neq 2$, so ist diese Erweiterung allerdings nicht zerfallend und die Weylgruppe keine Untergruppe von $\mathbf{F}_4(k)$. Um dies zu sehen, können wir die explizite Konstruktion von $\mathbf{F}_4(k)$ als abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}_{52}(k)$ benutzen, die in [Che55] beschrieben ist. Diese Darstellung wird auch die adjungierte Darstellung von $\mathbf{F}_4(k)$ genannt. Frank Lübeck hat Programme in **CHEVIE** geschrieben, die die Matrizen der Elemente n_π für $\pi \in \Pi$ in dieser Darstellung berechnen. Die von diesen Elementen erzeugte Gruppe hat einen elementarabelschen Normalteiler der Ordnung 2^4, dessen Faktorgruppe gerade $\mathbf{W}$ ist. Mit **GAP** kann man dann leicht zeigen, dass dieser Normalteiler kein Komplement hat, diese Erweiterung also nicht zerfallend ist.

Wir können also die in Kapitel I beschriebenen Algorithmen zum expliziten Rechnen in $\mathbf{F}_4(k)$ anwenden. Diese Rechnungen wären rein prinzipiell auch von Hand durchführbar und nachvollziehbar. Der Umfang dieser Rechnungen ist aber so groß, dass der Computer hier nicht nur zur Vermeidung von Rechenfehlern dient, sondern die meisten Ergebnisse erst ermöglicht.

II.3 Die Chevalleygruppen vom Typ $\mathbf{F}_4$

In diesem Abschnitt wollen wir die endlichen Chevalleygruppen vom Typ $\mathbf{F}_4$ beschreiben. Dazu verwenden wir das in in Abschnitt II.2 beschriebene Wurzeldatum Ψ und die dadurch gegebene einfache algebraische Gruppe $\mathbf{F}_4(k)$. Wir beschreiben, wie ein Frobeniusmorphismus auf den Wurzeluntergruppen und den Tori von $\mathbf{F}_4(k)$ operiert, und beschreiben die endlichen Chevalleygruppen.

Es sei $\Psi = (\mathbf{X}, \Phi, \mathbf{Y}, \Phi^\vee)$ das in Abschnitt II.2 beschriebene Wurzeldatum vom Typ $\mathbf{F}_4$. Es seien $q = p^f$ eine Primzahlpotenz und $\mathbb{F}_q$ der Körper mit q Elementen und k ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{F}_q$. Dann ist durch das Wurzeldatum Ψ eine einfache algebraische Gruppe $\mathbf{F}_4(k)$ gegeben. Chevalley hat in [Che55] eine Konstruktion für die einfachen adjungierten algebraischen Gruppen gegeben, die $\mathbf{F}_4(k)$ als abgeschlossene Untergruppe in die $\mathrm{GL}_{52}(k)$ einbettet. Vergleiche dazu auch [Che58, Exposée 3]. In dieser Darstellung ist $\mathbf{F}_4(k)$ dann definiert über $\mathbb{F}_q$ und wir erhalten gemäß I.(1.6) einen zugehörigen Frobeniusmorphismus $\mathbf{F}$. Die endliche Fixpunktgruppe

$$\mathbf{F}_4(k)^{\mathbf{F}} := \{g \in \mathbf{F}_4(k) \mid \mathbf{F}(g) = g\}$$

wollen wir dann auch mit $F_4(q)$ bezeichnen. Der Frobeniusmorphismus $\mathbf{F}$ operiert nach [Ste68a, 11.6] trivial auf Φ und $F_4(q)$ ist somit eine Chevalleygruppe. Die in [Ste68a] angegebene Konstruktion zeigt, dass der Torus $\mathbf{T}$ und auch viele weitere wichtige Untergruppen $\mathbf{F}$-stabil sind. Dazu gehören $\mathbf{B}$, $\mathbf{U}$, $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$, aber auch die standardparabolischen Untergruppen und die zugehörigen Standardleviuntergruppen. Insbesondere gilt auch $\mathbf{W} \cong N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})^{\mathbf{F}}/\mathbf{T}^{\mathbf{F}}$.

Die Wirkung von $\mathbf{F}$ auf den Erzeugern von $\mathbf{F}_4(k)$ können wir aus der dort angegebenen Konstruktion entnehmen. Es gilt für alle $\alpha \in \Phi$ und $u \in k$

$$\mathbf{F}(x_\alpha(u)) = x_\alpha(u^q).$$

Gemäß I.(5.2) gibt es für alle $t \in \mathbf{T}$ ein Tupel $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in (k^*)^4$ mit $t = \theta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. Außerdem ist

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}\left(\theta\left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\right)\right) = \theta\left(\lambda_1^q, \lambda_2^q, \lambda_3^q, \lambda_4^q\right).$$

Vergleiche dazu auch [Ste68b, Lemma 34]. Damit ist die Operation von $\mathbf{F}$ auf $\mathbf{F}_4(k)$ beschrieben. Die Chevalleygruppe $F_4(q)$ wird somit von den Elementen $\theta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ mit $\lambda_i \in {\mathbb{F}_q}^*$ für $1 \leqslant i \leqslant 4$ und den Elementen $x_\alpha(u)$ für $\alpha \in \Phi$ und $u \in \mathbb{F}_q$ erzeugt. Wir können somit gemäß I.7 mit Hilfe der in I.8 beschriebenen Algorithmen generisch in $F_4(q)$ rechnen.

Wir sehen anhand von Anhang A.1, dass 2 und 3 schlechte Primzahlen für $F_4(q)$ sind, das heißt, dass 2 und 3 die Koeffizienten der höchsten Wurzel $\alpha_{24} = 2\pi_1 + 3\pi_2 + 4\pi_3 + 2\pi_4$ teilen. Alle anderen Primzahlen sind gut für $F_4(q)$. Insbesondere teilt also keine gute Primzahl die Ordnung der Weylgruppe $\mathbf{W}$. Wir werden uns im Folgenden auf den Fall guter Charakteristik beschränken. Das heißt, wir werden annehmen, dass q weder durch 2 noch durch 3 teilbar ist. Im Fall schlechter Charakteristik verschwinden manche Koeffizienten in den Relationen I.(2.4), so dass die Rechnungen sich hierbei deutlich verändern.

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird sich erweisen, dass viele wichtige Werte für die Gruppen $F_4(q)$ generisch als Polynome in q geschrieben werden können. Dazu gehören Gruppenordnungen, aber auch Anzahlen von Konjugiertenklassen und Charakterwerte. Genauer müssen wir die Kongruenzklassen von q modulo 12 unterscheiden. Da wir in dieser Arbeit nur den Fall guter Charakteristik betrachten, heißt dies, dass wir die vier Kongruenzklassen $q \equiv 1(12)$, $q \equiv 5(12)$, $q \equiv 7(12)$ und $q \equiv 11(12)$ betrachten müssen. Für jede solche Kongruenzklasse finden wir dann Polynome in q, die diese Werte beschreiben. Wenn wir die Kongruenzklasse im Folgenden nicht angeben, so gelten die durch das Polynom beschriebenen Werte für alle Primzahlpotenzen q in

guter Charakteristik. Häufig erlauben diese Polynome eine Faktorisierung in Kreisteilungspolynome. Es ist hilfreich, dies in der Notation der Polynome auch zu berücksichtigen. Daher die folgende Bezeichnung:

(3.1) Bezeichnungen
Für $k \in \mathbf{N}$ sei ϕ_k das k-te Kreisteilungspolynom über $\mathbb{Q}$ ausgewerten an q. In Tabelle T.II.2 sind die im Folgenden häufig benutzten Kreisteilungspolynome aufgelistet.

ϕ_1	$=$	$q-1$	ϕ_2	$=$	$q+1$
ϕ_3	$=$	q^2+q+1	ϕ_4	$=$	q^2+1
ϕ_6	$=$	q^2-q+1	ϕ_8	$=$	q^4+1
ϕ_{12}	$=$	q^4-q^2+1			

Tabelle T.II.2: Kreisteilungspolynome

Für jedes q ist $F_4(q)$ eine endliche einfache Gruppe der Ordnung

$$|F_4(q)| = q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1) = q^{24}\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}.$$

Es gilt weiterhin $|\mathbf{T}^\mathbf{F}| = \phi_1^4$ und $|\mathbf{U}^\mathbf{F}| = q^{24}$. Dabei ist $\mathbf{T}^\mathbf{F}$ als abelsche Gruppe isomorph zu $C_{q-1} \times C_{q-1} \times C_{q-1} \times C_{q-1}$ und $\mathbf{U}^\mathbf{F}$ ist eine p-Gruppe. Dabei bezeichnet C_{q-1} die zyklische Gruppe mit $q-1$ Elementen. Die in der in Lemma I.(3.3) angegebenen Zentralreihe vorkommenden Untergruppen sind auch alle $\mathbf{F}$-stabil und wir erhalten auf die Weise eine Zentralreihe für $\mathbf{U}^\mathbf{F}$. Dabei ist $h = 11$. Die Untergruppen $U_i^\mathbf{F}$ für $1 \leqslant i \leqslant h$ ergeben sich sofort aus den Höhen der Wurzeln, die wir in A.1 ablesen können. Die Ordnungen der einzelnen elementarabelschen Faktoren $\mathbf{U}_i^\mathbf{F}/\mathbf{U}_{i+1}^\mathbf{F}$ sind der Reihe nach $q^4, q^3, q^3, q^3, q^3, q^2, q^2, q, q, q, q$. Die Elemente von $\mathbf{U}^\mathbf{F}$ können wir gemäß Gleichung I.2 in der Normalform

$$u = x_1(u_1)x_2(u_2)\cdots x_{24}(u_{24})$$

schreiben. Wir wollen dabei die Konvention verwenden, dass wir für $1 \leqslant i \leqslant 24$ auch $x_i(u_i)$ anstelle von $x_{\alpha_i}(u_i)$ schreiben.

Damit haben wir alle benötigten Informationen zusammengetragen, um Berechnungen in $F_4(q)$ durchzuführen.

Wir wollen noch darauf hinweisen, dass die hier beschriebenen Gruppen $F_4(q)$ nicht die einzigen endlichen Gruppen vom Lie-Typ sind, die von der einfachen algebraischen Gruppe vom Typ $\mathbf{F}_4$ herkommen. Ist $p = 2$ und $q = 2^{2f+1}$, so existiert ein surjektiver Endomorphismus $\mathbf{F}_1$ von $\mathbf{F}_4(k)$, so dass die Fixgruppe $\mathbf{F}_4(k)^{\mathbf{F}_1}$ endlich ist, aber $\mathbf{F}_1$ nicht-trivial auf dem Wurzelsystem Φ operiert. Diese Gruppen werden mit ${}^2\mathbf{F}_4(q^2)$ bezeichnet. Sie sind endliche Gruppen vom Lie-Typ, aber keine Chevalleygruppen und werden auch als Ree-Gruppen bezeichnet. Diese Gruppen sind nicht über $\mathbb{F}_q$ definiert. Wir wollen sie im Folgenden nicht weiter betrachten. Vergleiche dazu [Ste68a, 11.6], [Ree61a] und [Ree61b].

Kapitel III

Konjugiertenklassen

In diesem Abschnitt wollen wir die Konjugiertenklassen von parabolischen Untergruppen und deren Fusionen untersuchen. Dabei geben wir eine generische Beschreibung dieser Konjugiertenklassen an, die sich eng an die bekannte Beschreibung der Konjugiertenklassen in reduktiven Gruppen anlehnt, wie sie zum Beispiel in [Lüb93] angegeben ist, so dass wir insbesondere Fusionen in solche Gruppen leicht beschreiben können. Wir werden diese Fusionen benutzen, um generische Klassenfunktionen von Untergruppen zu induzieren.

Wir untersuchen dabei getrennt zunächst die halbeinfachen Konjugiertenklassen. Diese lassen sich im Wesentlichen allein durch Rechnungen innerhalb der Weylgruppen parametrisieren. Dabei verallgemeinern wir die Untersuchungen in [Car78] auf den Fall parabolischer Untergruppen. Daraufhin zeigen wir, wie wir die in I.8 angegebenen Algorithmen zur Bestimmung der unipotenten Konjugiertenklassen der parabolischen Untergruppen anwenden können. Schließlich beschreiben wir die Parametrisierung aller Konjugiertenklassen und geben generisch die Fusionen an. Wir schließen das Kapitel mit einem Beispiel ab, in dem wir eine Klassenfunktion einer zerfallenden Leviuntergruppe von $F_4(q)$ nach $F_4(q)$ Harish-Chandra-induzieren. Dies geschieht, indem wir diese Klassenfunktion mit Hilfe der Fusionen zunächst in die parabolische Untergruppe inflationieren und dann in die $F_4(q)$ induzieren.

Die Parametrisierungen innerhalb der parabolischen Untergruppen, die in diesem Kapitel beschrieben werden, sind an die Bestimmung generischer Charaktertafeln von reduktiven Gruppen angepasst und sind teilweise recht technischer Natur. In [GHL$^+$96] findet man mehr Information über generische Charaktertafeln und die Parametrisierungen der darin enthaltenen Information. Die dortigen Ausführungen erleichtern wesentlich das Verständnis dieses Kapitels.

III.1 Die Lang-Steinberg-Abbildung

Wir wollen in diesem Kapitel generisch die Konjugiertenklassen von parabolischen Untergruppen endlicher Gruppen vom Lie-Typ beschreiben. Dafür benutzen wir Erkenntnisse über die

Konjugiertenklassen in der zugehörigen algebraischen Gruppe und versuchen daraus die Konjugiertenklassen der endlichen Fixpunktuntergruppen zu beschreiben. Hierzu benötigen wir einige Ergebnisse von Lang und Steinberg, die wir in diesem Abschnitt zur Verfügung stellen wollen.

(1.1) Definition (F-Konjugiertheit, vgl. [Car85, 3.3.2])
Es sei $\mathbf{H}$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe und $\mathbf{F}$ ein surjektiver Endomorphismus von $\mathbf{H}$, so dass die Menge der Fixpunkte $\mathbf{H}^{\mathbf{F}}$ endlich ist. Zwei Elemente $h_1, h_2 \in \mathbf{H}$ heißen $\mathbf{F}$-konjugiert in $\mathbf{H}$, wenn ein Element $h \in \mathbf{H}$ existiert, mit $h_1 = hh_2\mathbf{F}(h^{-1})$. Dadurch wird eine Äquivalenzrelation auf $\mathbf{H}$ definiert. Die Äquivalenzklassen heißen $\mathbf{F}$-Konjugiertenklassen. Die Menge der $\mathbf{F}$-Konjugiertenklassen bezeichnen wir mit $H^1(\mathbf{F}, \mathbf{H})$. Es sei $h \in \mathbf{H}$. Die Menge

$$C_{\mathbf{H},\mathbf{F}}(h) := \{h' \in \mathbf{H} \mid h = h'h\mathbf{F}(h'^{-1})\}$$

heißt $\mathbf{F}$-Zentralisator von h.

(1.2) Definition/Satz (Lang-Steinberg-Theorem)
Es sei $\mathbf{H}$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe und $\mathbf{F}$ ein surjektiver Endomorphismus von $\mathbf{H}$, so dass die Menge der Fixpunkte $\mathbf{H}^{\mathbf{F}}$ endlich ist. Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L} : & \mathbf{H} & \longrightarrow & \mathbf{H} \\ & g & \mapsto & g^{-1}\mathbf{F}(g) \end{array}$$

ist surjektiv und heißt **Lang-Steinberg-Abbildung**

Beweis: Siehe [Ste68a, 10]. □

(1.3) Lemma
Es sei $\mathbf{H}$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe und $\mathbf{F}$ ein surjektiver Endomorphismus von $\mathbf{H}$, so dass die Menge der Fixpunkte $\mathbf{H}^{\mathbf{F}}$ endlich ist. Es sei $\mathbf{V}$ eine Menge, auf der $\mathbf{H}$ operiert, und $\mathbf{F}_1$ ein Endomorphismus von $\mathbf{V}$, so dass für alle $v \in \mathbf{V}$ und $h \in \mathbf{H}$

$$\mathbf{F}_1(vh) = \mathbf{F}_1(v)\mathbf{F}(h)$$

gilt. Dann gilt:

(i) Jede $\mathbf{F}_1$-invariante Bahn von $\mathbf{V}$ enthält ein $\mathbf{F}_1$-invariantes Element. Umgekehrt ist die Bahn eines $\mathbf{F}_1$-invarianten Elementes $\mathbf{F}_1$-invariant.

(ii) Es sei $\mathcal{O}$ eine $\mathbf{F}_1$-invariante Bahn von $\mathbf{V}$ und $v \in \mathcal{O}^{\mathbf{F}_1}$. Dann ist $vh \in \mathcal{O}^{\mathbf{F}_1}$ genau dann, wenn $h\mathbf{F}(h^{-1}) \in \mathrm{Stab}_{\mathbf{H}}(v)$ ist.

(iii) Es sei $\mathcal{O}$ eine $\mathbf{F}_1$-invariante Bahn von $\mathbf{V}$ und $v \in \mathcal{O}^{\mathbf{F}_1}$. Dann gibt es eine Bijektion zwischen den $\mathbf{H}^{\mathbf{F}}$-Bahnen von $\mathcal{O}^{\mathbf{F}_1}$ und den $\mathbf{F}$-Konjugiertenklassen der Faktorgruppe $\mathrm{Stab}_{\mathbf{H}}(v)/\mathrm{Stab}_{\mathbf{H}}(v)^0$. Dabei bezeichnet $\mathrm{Stab}_{\mathbf{H}}(v)^0$ die Zusammenhangskomponente von $\mathrm{Stab}_{\mathbf{H}}(v)$, die das Einselement enthält. Die Gruppe $\mathrm{Stab}_{\mathbf{H}}(v)/\mathrm{Stab}_{\mathbf{H}}(v)^0$ heißt **Komponentengruppe**.

Beweis: Dies ist eine einfache Anwendung von Satz III.(1.2). Siehe [DM91, 3.12 und 3.21]. □

(1.4) Beispiele
Es sei $\mathbf{G}$ eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe, definiert über $\mathbb{F}_q$ mit zugehörigem Frobeniusmorphismus $\mathbf{F}$. Dann ist $\mathbf{F}$ ein surjektiver Endomorphismus von $\mathbf{G}$ und $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ ist endlich.

(i) $\mathbf{G}$ operiert auf $\mathbf{G}$ durch Konjugation. Für $g \in \mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ gibt es eine Bijektion zwischen den $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$-Konjugiertenklassen von Elementen aus $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$, die in $\mathbf{G}$ zu g konjugiert sind, und den $\mathbf{F}$-Konjugiertenklassen von $C_{\mathbf{G}}(g)/C_{\mathbf{G}}(g)^0$. Ist $C_{\mathbf{G}}(g)$ zusammenhängend, so enthält eine $\mathbf{F}$-stabile $\mathbf{G}$-Konjugiertenklasse von g genau eine $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$-Konjugiertenklasse von Elementen aus $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$.

(ii) $\mathbf{G}$ operiert auf der Menge der maximalen Tori von $\mathbf{G}$ per Konjugation. Die Menge der maximalen Tori ist $\mathbf{F}$-stabil und diese sind alle konjugiert in $\mathbf{G}$. Also gibt es einen $\mathbf{F}$-stabilen maximalen Torus $\mathbf{T}$ und die $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$-Konjugiertenklassen $\mathbf{F}$-stabiler maximaler Tori von $\mathbf{G}$ stehen in Bijektion zu den $\mathbf{F}$-Konjugiertenklassen von

$$N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})^0.$$

Es ist $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})^0 = \mathbf{T}$, da $\mathbf{G}$ reduktiv ist. Also sind dies genau die $\mathbf{F}$-Konjugiertenklassen der Weylgruppe von $\mathbf{G}$.

III.2 Konjugiertenklassen von Leviuntergruppen

Wir behalten die Bezeichnungen aus I.(5.3) bei. In diesem Abschnitt wollen wir die Konjugiertenklassen von Leviuntergruppen beschreiben und folgen hierbei der Darstellung in [DM91]. Zunächst beschreiben wir die $\mathbf{G}$-Konjugiertenklassen von Leviuntergruppen.

(2.1) Satz (G-Konjugiertenklassen von Leviuntergruppen, vgl. [DM91, 4.2])
Die $\mathbf{G}$-Konjugiertenklassen von Leviuntergruppen von $\mathbf{G}$ stehen in Bijektion zu den $\mathbf{W}$-Bahnen der Teilmengen von Π.

Beweis: Siehe [DM91, 4.2]. □

Zusätzlich sei $\mathbf{G}$ definiert über $\mathbb{F}_q$ mit zugehörigem Frobeniusmorphismus $\mathbf{F}$. Der Torus $\mathbf{T}$ sei $\mathbf{F}$-stabil. Wir wollen die $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$-Konjugiertenklassen $\mathbf{F}$-stabiler Leviuntergruppen von $\mathbf{G}$ beschreiben. Dazu müssen wir untersuchen, wie die Menge der $\mathbf{F}$-stabilen Elemente einer $\mathbf{G}$-Bahn in $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$-Bahnen zerfällt.

(2.2) Lemma ($\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$-Klassen F-stabiler Leviuntergruppen, vgl. [DM91, 4.3])
Es sei $\mathbf{G}$ definiert über $\mathbb{F}_q$ mit zugehörigem Frobeniusmorphismus $\mathbf{F}$. Der Torus $\mathbf{T}$ sei $\mathbf{F}$-stabil. Es sei

$$M := \{w\mathbf{W}_I \mid I \subseteq \Pi, w \in \mathbf{W}, \mathbf{F}(\mathbf{W}_I) = \mathbf{W}_I^w\}.$$

Die $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$-Konjugiertenklassen $\mathbf{F}$-stabiler Leviuntergruppen von $\mathbf{G}$ stehen in Bijektion zu den $\mathbf{F}$-Konjugiertenklassen der Menge M, wobei $\mathbf{G}$ in natürlicher Weise per Konjugation auf M operiert.

Beweis: Siehe [DM91, 4.3]. Vergleiche auch Lemma III.(1.3). □

Die Bijektion aus Lemma III.(2.2) kann man konkret angeben. Es sei $\mathbf{L}$ eine $\mathbf{F}$-stabile Leviuntergruppe von $\mathbf{G}$. Dann lässt sich $\mathbf{L}$ in $\mathbf{G}$ auf eine $\mathbf{F}$-stabile Standardleviuntergruppe $\mathbf{L}_I$ für $I \subseteq \Pi$ konjugieren. Es sei etwa $g \in \mathbf{G}$ mit $\mathbf{L}^g = \mathbf{L}_I$. Dann ist $n := g^{-1}\mathbf{F}(g) \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})$. Die Operation des Frobeniusmorphismus $\mathbf{F}$ auf $\mathbf{L}$ entspricht dann auf $\mathbf{L}_I$ der Operation von

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{F}n^{-1}: & \mathbf{L}_I & \longrightarrow & \mathbf{L}_I \\ & l & \mapsto & {}^n\mathbf{F}(l) \end{array}$$

Die Operation ist durch die Restklasse $n\mathbf{L}_I$ schon eindeutig festgelegt. Nach [DM91, 4.2] ist $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I)/\mathbf{L}_I$ isomorph zu $N_{\mathbf{W}}(\mathbf{W}_I)/\mathbf{W}_I$. Wir können somit der Leviuntergruppe $\mathbf{L}$ mittels dieses Isomorphismus die Nebenklasse $w\mathbf{W}_I$ zuordnen. Wir sagen, dass $\mathbf{L}$ aus $\mathbf{L}_I$ durch **Twisten** mit w entsteht. Wir nennen $\mathbf{L}$ eine **getwistete** Leviuntergruppe. Ist $\mathbf{L}$ ein Torus, so nennen wir $\mathbf{L}$ einen getwisteten Torus.

(2.3) Bemerkung

(i) Lemma III.(2.2) gibt auch eine Übersicht über die $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$-Klassen maximaler $\mathbf{F}$-stabiler Tori von $\mathbf{G}$. Wir erhalten genau dann einen maximalen Torus, wenn $I = \emptyset$ ist. Diese werden also genau durch die $\mathbf{F}$-Konjugiertenklassen von $\mathbf{W}$ beschrieben. Vergleiche dazu auch Beispiel III.(1.4)(ii).

(ii) Operiert $\mathbf{F}$ trivial auf $\mathbf{W}$, so sind die $\mathbf{F}$-Konjugiertenklassen gerade die Konjugiertenklassen. Dies ist insbesondere der Fall, wenn $\mathbf{G}$ eine Chevalleygruppe ist.

(iii) Die Leviuntergruppen von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ sind gerade die Gruppen der Fixpunkte der $\mathbf{F}$-stabilen Leviuntergruppen von $\mathbf{G}$.

(iv) Liegt eine Leviuntergruppe $\mathbf{L}$ von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ in einer $\mathbf{F}$-stabilen parabolischen Untergruppe von $\mathbf{G}$, so heißt $\mathbf{L}$ zerfallend.

Im weiteren Verlauf der Arbeit interessieren uns bei den Chevalleygruppen $F_4(q)$ besonders die maximalen Tori und diejenigen Leviuntergruppen, die ein Wurzelsystem vom Typ B_2, B_3 oder C_3 haben. Die Weylgruppe $\mathbf{W}$ hat 25 Konjugiertenklassen. Siehe auch A.3. Es gibt also 25 $F_4(q)$-Konjugiertenklassen $\mathbf{F}$-stabiler maximaler Tori. Wir bezeichnen mit $\mathbf{T}_i$ den Torus, der durch Twisten mit einem Konjugiertenklassenvertreter w_i entsteht. In Tabelle A.5 sind diese zusammen mit der Gruppenordnung aufgelistet. Die Chevalleygruppe $F_4(q)$ enthält genau eine Standardleviuntergruppe mit Wurzelsystem B_2. Dies ist $\mathbf{L}_I$ mit $I = \{\pi_2, \pi_3\}$. Wir erhalten genau fünf $\mathbf{F}$-Konjugiertenklassen von Nebenklassen der Form $w\mathbf{W}_I$. Diese parametrisieren nach Lemma III.(2.2) genau die fünf Klassen von Leviuntergruppen dieses Typs in $F_4(q)$. Entsprechend gibt es jeweils zwei Konjugiertenklassen von Leviuntergruppen vom Typ B_3 beziehungsweise C_3. In diesem Fall muss man $I = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$ beziehungsweise $I = \{\pi_2, \pi_3, \pi_4\}$ nehmen. In Tabelle A.6 sind Vertreter für diese Klassen aufgelistet. Diese Leviuntergruppen bezeichnen wir

mit $\mathbf{L}_1$ bis $\mathbf{L}_9$. Wir erhalten genau eine Klasse zerfallender maximaler Tori und jeweils eine zerfallende Leviuntergruppe vom Typ B_2, B_3 und C_3. Diese entsprechen vermöge der Bijektion aus III.(2.2) jeweils der Nebenklasse $\mathbf{W}_I$ mit dem entsprechenden I. Dies sind genau die Standardleviuntergruppen vom jeweiligen Typ. In unserer Bezeichnung sind das die Leviuntergruppen $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_6$ und $\mathbf{L}_8$. Die zur Leviuntergruppe $\mathbf{L}_i$ gehörige parabolische Untergruppe bezeichnen wir mit $\mathbf{P}_i$ für $1 \leqslant i \leqslant 9$. Aber nur die zu den Standardleviuntergruppen gehörenden parabolischen Untergruppen $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_6$ und $\mathbf{P}_8$ sind $\mathbf{F}$-stabil. Dies sind gleichzeitig die standardparabolischen Untergruppen vom jeweiligen Typ in $\mathbf{F}_4(k)$.

(2.4) Bezeichnungen
Wir wollen für die eben definierten Tori, Leviuntergruppen und parabolischen Untergruppen noch die folgende Bezeichnung definieren:

(i) $T_i(q) := \mathbf{T}_i^{\mathbf{F}}$ für $1 \leqslant i \leqslant 25$.

(ii) $L_i(q) := \mathbf{L}_i^{\mathbf{F}}$ für $1 \leqslant i \leqslant 9$.

(iii) $P_i(q) := \mathbf{P}_i^{\mathbf{F}}$ für $i = 1, 6, 8$. In den anderen Fällen ist die entsprechende parabolische Untergruppe nicht $\mathbf{F}$-stabil.

Insbesondere gilt dann:

(2.5) Bemerkung
(i) $P_1(q)$ ist parabolische Untergruppe vom Typ B_2 mit Ordnung:

$$|P_1(q)| = q^{24}\phi_1^4\phi_2^2\phi_4 = q^{24}(q^4-1)(q^2-1)(q-1)^2.$$

(ii) $P_6(q)$ ist parabolische Untergruppe vom Typ B_3 mit Ordnung:

$$|P_6(q)| = q^{24}\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6 = q^{24}(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)(q-1).$$

(iii) $P_8(q)$ ist parabolische Untergruppe vom Typ C_3 mit Ordnung:

$$|P_8(q)| = q^{24}\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6 = q^{24}(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)(q-1).$$

III.3 Halbeinfache Klassen parabolischer Untergruppen

Wir behalten die Bezeichnungen aus I.(5.3) bei. In diesem Abschnitt wollen wir die Zentralisatoren halbeinfacher Elemente parabolischer Untergruppen von $\mathbf{G}$ beschreiben. Dies ist eine Verallgemeinerung der Beschreibung der Zentralisatoren halbeinfacher Elemente in reduktiven Gruppen, wie sie zum Beispiel in [Car85, Kapitel 3] gegeben ist. Weiterhin sei in diesem Abschnitt $J \subseteq \Pi$ und $\mathbf{P}_J$ die zu J gehörende standardparabolische Untergruppe von $\mathbf{G}$. Wir behalten die Bezeichnungen aus Definition I.(4.3) bei. Wir führen noch die folgende Bezeichnung für von Spiegelungen erzeugte Untergruppen der Weylgruppe $\mathbf{W}$ und die von den entsprechenden Wurzeluntergruppen erzeugten Untergruppen von $\mathbf{G}$ ein.

(3.1) Bezeichnungen
Für $\Psi \subseteq \Phi$ definieren wir

(i) $\mathbf{W}_\Psi := \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Psi \rangle$.

(ii) $\mathbf{C}_\Psi := \langle \mathbf{T}, \mathbf{U}_\alpha \mid \alpha \in \Psi \rangle$.

Diese Bezeichnung ist im folgenden Sinne konsistent mit der Bezeichnung für parabolische Untergruppen von $\mathbf{W}$. Für eine Teilmenge $J \subseteq \Pi$ und das zugehörige Wurzelsystem Φ_J gilt $\mathbf{W}_{\Phi_J} = \mathbf{W}_J$. Diese Notation erweist sich als nützlich, wenn wir Untergruppen dieser Form von $\mathbf{W}$ betrachten, die keine parabolischen Untergruppen sind. Wir wollen nun die von uns benötigten wichtigsten Eigenschaften der Zentralisatoren halbeinfacher Elemente in reduktiven Gruppen angeben. Für die Beweise dieser Aussagen siehe [Car85, 3.5].

(3.2) Satz (Zentralisatoren halbeinfacher Elemente in reduktiven Gruppen)
Es seien $s \in \mathbf{T}$ ein halbeinfaches Element von $\mathbf{G}$ und $\Psi := \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(s) = 1\}$. Dann gilt:

(i) Die Teilmenge Ψ ist abgeschlossen in Φ, das heißt $\mathbb{Z}\Psi \cap \Phi = \Psi$. Eine solche Teilmenge heißt auch **Teilwurzelsystem** von Φ.

(ii) Es ist $C^0_{\mathbf{G}}(s) = \mathbf{C}_\Psi$ eine reduktive Gruppe mit zugehörigem Wurzelsystem Ψ und Weylgruppe $\mathbf{W}_\Psi$.

(iii) $C_{\mathbf{G}}(s) = \left\langle \mathbf{T}, \mathbf{U}_\alpha, \widehat{w} \mid \alpha \in \Psi, w \in \mathbf{W}, s^{\widehat{w}} = s \right\rangle$.

(iv) Ist die Kommutatorgruppe von $\mathbf{G}$ einfach zusammenhängend, so ist $C_{\mathbf{G}}(s)$ zusammenhängend.

Beweis: Siehe [Car85, 3.5.3] und [Car85, 3.5.4] für (ii) und (iii). Für Teil (iv) siehe [Car85, 3.5.6] und [Ste68a, 8.5]. □

Wir benötigen noch einige Eigenschaften parabolischer Untergruppen.

(3.3) Lemma (Eigenschaften parabolischer Untergruppen, vgl. [DM91, 2.2])
Es sei $\mathbf{H}$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbf{G}$ mit $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{H}$.

(i) Die parabolischen Untergruppen von $\mathbf{H}$, die den maximalen Torus $\mathbf{T}$ enthalten, sind genau die Untergruppen von der Form $\mathbf{H} \cap \mathbf{P}$, wobei $\mathbf{P}$ eine parabolische Untergruppe von $\mathbf{G}$ mit $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{P}$ ist. Ist $\mathbf{L}$ eine Leviuntergruppe von $\mathbf{P}$ mit $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{L}$, so ist $\mathbf{H} \cap \mathbf{L}$ eine Leviuntergruppe von $\mathbf{H} \cap \mathbf{P}$.

(ii) Ist $\mathbf{G}$ zusammenhängend, so ist auch jede parabolische Untergruppe zusammenhängend.

Beweis: Siehe [DM91, 2.2]. Für die Zusammenhangsaussage siehe auch [Spr98, 6.4.10]. □

(3.4) Korollar
Es sei $\mathbf{P}$ eine parabolische Untergruppe von $\mathbf{G}$ mit $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{P}$ und $s \in \mathbf{T}$ ein halbeinfaches Element. Ist $C_{\mathbf{G}}(s)$ zusammenhängend, so ist auch $C_{\mathbf{P}}(s)$ zusammenhängend.

Beweis: Der Zentralisator $C_{\mathbf{G}}(s)$ ist nach III.(3.2)(ii) eine reduktive und somit abgeschlossene Gruppe mit $\mathbf{T} \subseteq C_{\mathbf{G}}(s)$. Die Gruppe $C_{\mathbf{P}}(s) = C_{\mathbf{G}}(s) \cap \mathbf{P}$ ist nach Lemma III.(3.3)(i) eine parabolische Untergruppe von $C_{\mathbf{G}}(s)$ und somit nach III.(3.3)(ii) zusammenhängend. □

(3.5) Korollar
Es sei $s \in F_4(q)$ ein halbeinfaches Element. Es gilt dann:

(i) $C_{\mathbf{F}_4(k)}(s)$ ist zusammenhängend,

(ii) Ist $s \in \mathbf{P}$ für eine parabolische Untergruppe von $\mathbf{F}_4(k)$, so ist $C_{\mathbf{P}}(s)$ zusammenhängend.

Beweis: $\mathbf{F}_4(k)$ ist einfach zusammenhängend und perfekt. Somit sind nach Satz III.(3.2)(iv) alle Zentralisatoren halbeinfacher Elemente in $\mathbf{F}_4(k)$ zusammenhängend. Die Aussage folgt aus Korollar III.(3.4). □

Wir wollen nun genauer die Struktur der Zentralisatoren halbeinfacher Elemente parabolischer Unterguppen untersuchen. Die folgenden Lemmata erweisen sich hierbei als wesentlich.

(3.6) Lemma
Es sei $\mathbf{H}$ eine abgeschlossene und zusammenhängende Untergruppe von $\mathbf{G}$ mit $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{H}$. Dann gibt es eine Teilmenge $\Psi \subseteq \Phi$ mit $\mathbf{H} = \mathbf{C}_\Psi$. Ist $U_\alpha \subseteq \mathbf{H}$, so ist $\alpha \in \Psi$.

Beweis: Siehe [BT65, 3.4]. □

(3.7) Bemerkung
Wenn Φ unzerlegbar ist, so ist die in Lemma III.(3.6) angegebene Teilmenge Ψ immer abgeschlossen in Φ, falls nicht $\operatorname{char} k = 2$ und Φ ein Wurzelsystem vom Typ B_n, C_n, G_2 oder $\mathbf{F}_4$ oder $\operatorname{char} k = 3$ und Φ ein Wurzelsystem vom Typ G_2 oder $\mathbf{F}_4$ ist. Vergleiche dazu [BT65, 2.5,3.8].

(3.8) Lemma
Es sei $\mathbf{P}$ eine parabolische Untergruppe von $\mathbf{G}$ und $\mathbf{L}$ eine zugehörige Leviuntergruppe. Dann gilt:

(i) Ist $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{L}$ ein maximaler Torus, so gilt $N_{\mathbf{P}}(\mathbf{T}) = N_{\mathbf{L}}(\mathbf{T})$.

(ii) Alle maximalen Tori von $\mathbf{P}$ sind in $\mathbf{P}$ konjugiert.

(iii) Jedes halbeinfache Element von $\mathbf{P}$ liegt in einem maximalen Torus von $\mathbf{P}$ und hat somit ein konjugiertes Element in $\mathbf{L}$.

Beweis: Es sei $\mathbf{P} = \mathbf{L} \ltimes \mathbf{U}_{\mathbf{P}}$ die Levizerlegung von $\mathbf{P}$. Damit ist $\mathbf{U}_{\mathbf{P}}$ ein Normalteiler von $\mathbf{P}$. Es sei $n \in N_{\mathbf{P}}(\mathbf{T})$. Dann gibt es Elemente $u \in \mathbf{U}_{\mathbf{P}}$ und $l \in \mathbf{L}$ mit $n = lu$ und $\mathbf{T}^{lu} = \mathbf{T} \subseteq \mathbf{L}$. Damit ist $\mathbf{T}^{u^{-1}} = \mathbf{T}^l \subseteq \mathbf{L}$. Damit gilt für ein beliebiges $t \in \mathbf{T}$:

$$utu^{-1}t^{-1} \in \mathbf{L} \cap \mathbf{U}_{\mathbf{P}} = \{1\}.$$

Also ist $u \in C_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$ nach [Hum75, 26.2] und somit $u = 1$ und $n \in \mathbf{L}$.

Nach [DM91, 0.12] sind alle maximalen Tori einer zusammenhängenden algebraischen Gruppe konjugiert und jedes halbeinfache Element liegt in einem maximalen Torus. Wende dies auf die zusammenhängende algebraische Gruppe $\mathbf{P}$ an. Ist $s \in \mathbf{P}$ ein halbeinfaches Element, das im maximalen Torus $\mathbf{T}'$ liegt, so ist $\mathbf{T}'$ in $\mathbf{P}$ konjugiert zu einem Torus $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{L}$ und s konjugiert zu einem Element in $\mathbf{L}$. □

Nun können wir den Satz III.(3.2) auf Zentralisatoren halbeinfacher Elemente in parabolischen Untergruppen verallgemeinern. Wir beschränken uns hierbei in der Formulierung auf standardparabolische Untergruppen. Dies ist keine wesentliche Einschränkung, da jede parabolische Untergruppe $\mathbf{P}$ definitionsgemäß zu einer standardparabolischen Untergruppe $\mathbf{P}_J$ für eine Teilmenge $J \subseteq \Pi$ konjugiert ist. Ist $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{P}$, so sind $\mathbf{P}$ und $\mathbf{P}_J$ sogar durch ein Weylgruppenelement konjugiert und wir können unsere Ergebnisse sehr einfach auf solche parabolischen Untergruppen $\mathbf{P}$ mit $\mathbf{T} \leqslant \mathbf{P}$ übertragen. Da wir im Folgenden nur standardparabolische Untergruppen betrachten, wollen wir dies hier nicht weiter ausführen.

(3.9) Lemma (Konjugiertenklassen halbeinfacher Elemente parabolischer Untergruppen) Es sei $s \in \mathbf{T} \subseteq \mathbf{P}_J$ und $\Psi := \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(s) = 1\}$. Es gilt die Notation aus I.(4.3). Insbesondere ist $\Phi_J := \Phi \cap \mathbb{Z}J$ und $\Phi_{\mathbf{P}_J} := \Phi^+ \cup \Phi_J$.

(i) Die Gruppe $\left(C_{\mathbf{G}}(s)^0 \cap \mathbf{L}_J\right)$ ist eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe mit Wurzelsystem $\Psi \cap \Phi_J$ und es gilt

$$C_{\mathbf{P}_J}(s)^0 = \mathbf{C}_{\Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}}$$

(ii) $C_{\mathbf{P}_J}(s) = \left\langle \mathbf{T}, \mathbf{U}_\alpha, \widehat{w} \mid \alpha \in \Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}, w \in \mathbf{W}_J, s^{\widehat{w}} = s \right\rangle$.

(iii) Es gibt eine Bijektion zwischen den halbeinfachen Konjugiertenklassen in $\mathbf{P}_J$ und den $\mathbf{W}_J$-Bahnen von $\mathbf{T}$.

Beweis: Es gilt $\mathbf{T} \subseteq C_{\mathbf{P}_J}(s)^0$, da $s \in \mathbf{T}$ und $\mathbf{T}$ eine abelsche zusammenhängende Gruppe ist. Außerdem ist $C_{\mathbf{P}_J}(s)^0$ eine abgeschlossene und zusammenhängende Untergruppe von $\mathbf{G}$. Nach Lemma III.(3.6) gibt es also ein $M \subseteq \Phi$ mit $C_{\mathbf{P}_J}(s)^0 = \mathbf{C}_M$ und M erfüllt die Bedingung, dass $\alpha \in M$ ist für alle $\alpha \in \Phi$ mit $\mathbf{U}_\alpha \subseteq C_{\mathbf{P}_J}(s)^0$. Also ist $M \subseteq \Phi_{\mathbf{P}_J}$. Aus I.(1.4) folgt dann, dass für $\alpha \in \Phi_{\mathbf{P}_J}$ genau dann $\alpha \in M$ ist, wenn $\alpha(s) = 1$ ist. Also ist $M = \Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}$. Damit folgt (i).

Offensichtlich gilt

$$\left\langle \mathbf{T}, \mathbf{U}_\alpha, \widehat{w} \mid \alpha \in \Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}, w \in \mathbf{W}_J, s^{\widehat{w}} = s \right\rangle \subseteq C_{\mathbf{P}_J}(s).$$

Es sei nun umgekehrt $g \in C_{\mathbf{P}_J}(s)$. Da $\mathbf{T}$ zusammenhängend ist, ist $\mathbf{T}^g$ zusammenhängend und somit ein maximaler Torus von $C_{\mathbf{P}_J}(s)^0$. Da die maximalen Tori von $C_{\mathbf{P}_J}(s)^0$ konjugiert sind, gibt es ein $c \in C_{\mathbf{P}_J}(s)^0$ mit $\mathbf{T}^{gc} = \mathbf{T}$. Also ist $gc \in N_{\mathbf{P}_J}(\mathbf{T}) = N_{\mathbf{L}_J}(\mathbf{T})$ und es gibt ein $t \in \mathbf{T}$ und ein $w \in \mathbf{W}_J$ mit $g = \widehat{w}tc^{-1}$. Daraus folgt (ii).

Ist $s \in \mathbf{P}_J$ ein halbeinfaches Element, so ist s nach Lemma III.(3.8) konjugiert zu einem Element aus $\mathbf{T}$. Wir können uns also ohne Einschränkung auf Elemente von $\mathbf{T}$ beschränken. Seien $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ konjugiert in $\mathbf{P}_J$. Dann gibt es

$$g = u'\widehat{w}tu$$

mit $u \in \mathbf{U}$, $t \in \mathbf{T}$, $w \in \mathbf{W}_J$ und $u' \in \mathbf{U}_w$ mit $t_2 = g^{-1}t_1 g$. Daraus ergibt sich die Gleichung

$$u' \cdot \widehat{w} \cdot tt_2 \cdot t_2^{-1}ut_2 = t_1 u' t_1^{-1} \cdot \widehat{w} \cdot \widehat{w}^{-1} t_1 \widehat{w} t \cdot u.$$

Beide Seiten liegen in Bruhatzerlegung vor, daher ergibt sich wegen der Eindeutigkeit insbesondere $t_2 = \widehat{w}^{-1} t_1 \widehat{w}$ und somit die Behauptung (iii). □

Die folgenden beiden Lemmata werden wir im folgenden noch häufiger benutzen. Sie erlauben insbesondere, die in Abschnitt III.4 auftretenden Rechnungen in Faktorgruppen von Weylgruppen auf Rechnungen in bestimmten Untergruppen von Weylgruppen zu reduzieren.

(3.10) Lemma
Es seien $s \in \mathbf{T}$ ein halbeinfaches Element von $\mathbf{P}_J$ und $\Psi := \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(s) = 1\}$. Dann gilt

$$\mathbf{W}_\Psi \cap \mathbf{W}_J = \mathbf{W}_{\Psi \cap \Phi_J}.$$

Beweis: Es gilt $N_{C_\mathbf{G}(s)^0 \cap \mathbf{L}_J}(\mathbf{T}) = N_{C_\mathbf{G}(s)^0}(\mathbf{T}) \cap N_{\mathbf{L}_J}(\mathbf{T})$ und somit nach III.(3.2)

$$N_{C_\mathbf{G}(s)^0 \cap \mathbf{L}_J}(\mathbf{T})/\mathbf{T} = \mathbf{W}_\Psi \cap \mathbf{W}_J.$$

Nach Lemma III.(3.9) und Lemma III.(3.3) ist $C_\mathbf{G}(s)^0 \cap \mathbf{L}_J$ eine Leviuntergruppe der reduktiven Gruppe $C_\mathbf{G}(s)^0$ mit zugehörigem Wurzelsystem $\Psi \cap \Phi_J$. Also ist $N_{C_\mathbf{G}(s)^0 \cap \mathbf{L}_J}(\mathbf{T})/\mathbf{T} = \mathbf{W}_{\Psi \cap \Phi_J}$, woraus die Behauptung folgt. □

(3.11) Bemerkung

(i) Ist Ψ das Wurzelsystem einer standardparabolischen Untergruppe von $\mathbf{W}$, so ist obige Aussage allgemein bekannt. Vergleiche zum Beispiel [Car72, 2.5.6].

(ii) Ist Ψ das Wurzelsystem einer parabolischen Untergruppe, aber nicht unbedingt einer standardparabolischen Untergruppe, so folgt dies aus einem Satz von Kilmoyer, siehe [Car85, 2.7.4].

(iii) Im Allgemeinen ist die Aussage falsch für den Schnitt beliebiger Spiegelungsuntergruppen $\mathbf{W}_{\Psi_1} \cap \mathbf{W}_{\Psi_2}$ für Teilwurzelsysteme Ψ_1, Ψ_2 von Φ. Gegenbeispiele lassen sich in der Weylgruppe vom Typ $\mathbf{F}_4$ leicht hinschreiben, wenn man ein Teilwurzelsystem vom Typ $\mathbf{D}_4$ benutzt.

(iv) Die Aussage aus Lemma III.(3.3) ist auch richtig für den Schnitt $\mathbf{W}_{\Psi_1}$, $\mathbf{W}_{\Psi_2}$, wobei Ψ_1 und Ψ_2 als Teilwurzelsysteme von Zentralisatoren halbeinfacher Elemente in $\mathbf{G}$ herkommen. Dies lässt sich beweisen, indem man $\mathbf{W}_{\Psi_1}$ und $\mathbf{W}_{\Psi_2}$ als parabolische Untergruppen der durch das erweiterte Dynkin-Diagramm gegebenen Coxetergruppe auffasst und den Beweis von Kilmoyer [Car85, 2.7.4] darauf verallgemeinert. Vergleiche zu den benötigten Eigenschaften von Coxetergruppen [Hum90, 2.2,4.7,5.5] und [DM91, 2.3.4].

(3.12) Lemma
Es seien $s \in \mathbf{T}$ ein halbeinfaches Element von $\mathbf{P}_J$ und $\Psi := \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(s) = 1\}$. Es sei weiterhin $\Pi_\Psi \subseteq \Phi_{\mathbf{P}_J}$ ein Fundamentalsystem des Wurzelsystems Ψ. Ein solches Fundamentalsystem existiert immer. Dann gilt:

(i) $\mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Psi) = \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J})$.

(ii) Die Untergruppe $\mathbf{W}_{\Psi\cap\Phi_J}$ ist ein Normalteiler von $\mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J})$. Die kanonische Projektion induziert einen Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Pi_\Psi) & \longrightarrow & \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J})/\mathbf{W}_{\Psi\cap\Phi_J} \\ w & \mapsto & w\mathbf{W}_{\Psi\cap\Phi_J}. \end{array}$$

Beweis: Es seien $w \in \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Psi)$ und $\alpha \in \Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}$. Dann ist $\alpha w \in \Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}$. Seien umgekehrt $w \in \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J})$ und $\alpha \in \Psi$. Dann ist $\alpha \in \Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}$ oder $-\alpha \in \Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}$. Im ersten Fall ist $\alpha w \in \Psi$. Im zweiten Fall ist $-(\alpha w) = (-\alpha)w \in \Psi$. Da Ψ ein Wurzelsystem ist, ist auch $\alpha w \in \Psi$. Daraus folgt Teil (i).

Für alle $w \in \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Psi)$ gilt $(\mathbf{W}_\Psi \cap \mathbf{W}_J)^w \subseteq \mathbf{W}_\Psi \cap \mathbf{W}_J$. Also ist $\mathbf{W}_\Psi \cap \mathbf{W}_J = \mathbf{W}_{\Psi\cap\Phi_J}$ normal in $\mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Psi)$. Da Π_Ψ ein Fundamentalsystem von Ψ ist, gilt für alle $w \in \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Pi_\Psi)$ natürlich $\Psi w = \Psi$ und somit $w \in \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Psi) = \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J})$. Die in Teil (ii) definierte Abbildung ist also ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus. In $\mathbf{W}_\Psi$ gibt es nach [Car72, 2.2.3] genau ein Element, das das Fundamentalsystem Π_Ψ stabilisiert. Also ist die Abbildung injektiv. Es sei nun $w \in \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J})$, dann ist auch $(\Pi_\Psi)w$ ein Fundamentalsystem von Ψ. Da $w \in \mathbf{W}_J$ und $\Pi_\Psi \subseteq \Phi_{\mathbf{P}_J}$ ist, gibt es nach Lemma III.(3.10) und [Car72, 2.2.4] genau ein $w_1 \in \mathbf{W}_\Psi \cap \mathbf{W}_J = \mathbf{W}_{\Psi\cap\Phi_J}$ mit $ww_1 \in \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Pi_\Psi)$. Daraus folgt die Surjektivität und die Behauptung in (ii). □

III.4 Halbeinfache Klassen in $\mathbf{P}^\mathbf{F}$

Es sollen wieder die Bezeichnungen aus I.(5.3) und Definition I.(4.3) gelten. Es sei ab nun $\mathbf{P}$ eine $\mathbf{F}$-stabile parabolische Untergruppe von $\mathbf{G}$, die den Torus $\mathbf{T}$ enthält. Jede solche parabolische Untergruppe ist durch ein Weylgruppenelement konjugiert zu einer standardparabolischen Untergruppe der Form $\mathbf{P}_J$ für ein $J \subseteq \Pi$. Daher können wir ohne wesentliche Einschränkung annehmen, dass $\mathbf{P}$ eine standardparabolische Untergruppe der Form $\mathbf{P}_J$ für eine Teilmenge $J \subseteq \Pi$ ist. Die Ergebnisse lassen sich dann sehr einfach auf den allgemeinen Fall übertragen. Da in unseren Anwendungen aber nur standardparabolische Untergruppen vorkommen, wollen wir uns auch auf diese beschränken. Es sei $\mathbf{L} = \mathbf{L}_J$ die zugehörige Leviuntergruppe mit Wurzelsystem Φ_J und zugehöriger Weylgruppe $\mathbf{W}_J$. Wir setzen noch $\Phi_\mathbf{P} := \Phi_{\mathbf{P}_J} = \Phi^+ \cup \Phi_J$. Wir wollen weiter annehmen, dass $\mathbf{G}$ einfach-zusammenhängend ist und somit alle Zentralisatoren halbeinfacher Elemente in $\mathbf{G}$ beziehungsweise $\mathbf{P}$ nach III.(3.2) und III.(3.4) zusammenhängend sind. Wir wollen die halbeinfachen Konjugiertenklassen in $\mathbf{P}^\mathbf{F}$ beschreiben. Schon die Anzahl hängt zum Beispiel von der Wahl von q ab und wächst mit q. Daher benötigen wir eine generische Parametrisierung dieser Klassen im Sinne von I.7, die möglichst unabhängig von q ist. Wir definieren dazu folgendermaßen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der halbeinfachen Klassen:

(4.1) Definition (halbeinfacher Klassentyp, vgl. [Him03, 3.1.2])
Zwei halbeinfache Elemente $s_1, s_2 \in \mathbf{P}^\mathbf{F}$ liegen im gleichen **halbeinfachen Klassentyp** von $\mathbf{P}^\mathbf{F}$, wenn ihre Zentralisatoren $C_\mathbf{P}(s_1)$ und $C_\mathbf{P}(s_2)$ in $\mathbf{P}^\mathbf{F}$ konjugiert sind. Dadurch wird eine Äquiva-

lenzrelation auf der Menge der halbeinfachen Konjugiertenklassen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ definiert. Die Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation nennen wir **halbeinfache Klassentypen** von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$. Die Menge der halbeinfachen Klassentypen bezeichnen wir mit $\mathsf{CT}_s{}^{\mathbf{P}^{\mathbf{F}}}$.

Diese Definition ist eine Verallgemeinerung der Definition halbeinfacher Klassentypen für reduktive algebraische Gruppen. Vergleiche [Lüb93, 4.1]. Es gilt das folgende einfache Lemma, das ein wenig den Nutzen der halbeinfachen Klassentypen verdeutlicht.

(4.2) Lemma
Es seien $s_1, s_2 \in \mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ halbeinfache Elemente vom gleichen halbeinfachen Klassentyp. Dann gibt es ein zu s_2 in $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ konjugiertes Element s_2' mit $C_{\mathbf{P}^{\mathbf{F}}}(s_1) = C_{\mathbf{P}^{\mathbf{F}}}(s_2')$.

Beweis: Da s_1 und s_2 vom gleichen halbeinfachen Klassentyp sind, gibt es ein $g \in \mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ mit $C_{\mathbf{P}^{\mathbf{F}}}(s_1) = C_{\mathbf{P}^{\mathbf{F}}}(s_2)^g = C_{\mathbf{P}^{\mathbf{F}}}(s_2^g)$. Daraus folgt die Behauptung. □

Im weiteren Verlauf dieses Abschnittes wollen wir die halbeinfachen Klassentypen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ bestimmen und die Konjugiertenklassen innerhalb eines solchen halbeinfachen Klassentyps parametrisieren. Die halbeinfachen Klassentypen lassen sich systematisch allein mit Hilfe des Wurzelsystems und der Weylgruppe $\mathbf{W}_L$ unabhängig von q beschreiben. Die Primzahlpotenz q spielt nur bei der Parametrisierung der Klassen innerhalb eines halbeinfachen Klassentyps eine Rolle. Es wird sich als nützlich erweisen, Repräsentanten für die halbeinfachen Konjugiertenklassen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ zu wählen, die nicht in $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ liegen. Es gilt die folgende Bemerkung:

(4.3) Bemerkung

(i) Ist $s \in \mathbf{P}^{\mathbf{F}}$, so ist $C_{\mathbf{P}}(s)$ eine $\mathbf{F}$-stabile Untergruppe von $\mathbf{P}$ und $C_{\mathbf{P}^{\mathbf{F}}}(s) = C_{\mathbf{P}}(s)^{\mathbf{F}}$.

(ii) Jede $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$-Konjugiertenklasse eines halbeinfachen Elementes $s \in \mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ ist eindeutig durch einen Repräsentanten $t \in \mathbf{T}$ der $\mathbf{P}$-Konjugiertenklasse von s festgelegt. Im Allgemeinen liegt t nicht in $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$.

Beweis: Es sei $g \in C_{\mathbf{P}}(s)$, dann gilt $\mathbf{F}(g)^{-1}s\mathbf{F}(g) = \mathbf{F}(g^{-1})\mathbf{F}(s)\mathbf{F}(g) = \mathbf{F}(g^{-1}sg) = \mathbf{F}(s) = s$. Also ist $\mathbf{F}(g) \in C_{\mathbf{P}}(s)$. Daraus folgt (i). Da der Zentralisator $C_{\mathbf{P}}(s)$ zusammenhängend ist, bilden die $\mathbf{F}$-stabilen Elemente in $s^{\mathbf{P}}$ nach Lemma III.(1.3) genau eine Konjugiertenklasse von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$. Die $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$-Konjugiertenklasse von s ist also durch die Angabe eines Repräsentanten von $s^{\mathbf{P}}$ eindeutig bestimmt. Nach Lemma III.(3.9)(iii) besteht der Durchschnitt $s^{\mathbf{P}} \cap \mathbf{T}$ der $\mathbf{P}$-Konjugiertenklassen von s mit dem Torus genau aus einer $\mathbf{W}_J$-Bahn von $\mathbf{T}$, ist insbesondere nicht leer. Daraus folgt (ii). □

Wir können daher die halbeinfachen Konjugiertenklassen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ durch Elemente aus $\mathbf{T}$ parametrisieren. Dabei liegen die Parameter nicht unbedingt in $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$. Dies ist von Vorteil, da wir die Struktur der Zentralisatoren halbeinfacher Elemente aus $\mathbf{T}$ benutzen können, die wir in Lemma III.(3.9) beschrieben haben. Wir wollen nun die halbeinfachen Konjugiertenklassen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ parametrisieren. Wir verallgemeinern dabei die Darstellung in [Car78] und [Lüb93] auf den Fall parabolischer Untergruppen. Dazu müssen wir die halbeinfachen Klassentypen beschreiben und dann die halbeinfachen Elemente in diesen Klassentypen parametrisieren. Dies geschieht in drei Schritten.

(i) Beschreibe bis auf Konjugation in $\mathbf{P}$ die Untergruppen von $\mathbf{P}$, die als Zentralisatoren halbeinfacher Elemente von $\mathbf{P}$ möglich sind. Welche davon sind $\mathbf{F}$-stabil, können also nach Bemerkung III.(4.3) als Zentralisatoren halbeinfacher Elemente von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ vorkommen?

(ii) Es sei $\mathbf{C}$ eine $\mathbf{F}$-stabile Untergruppe von $\mathbf{P}$, die ein möglicher Zentralisator eines halbeinfachen Elementes von $\mathbf{P}$ ist. Beschreibe die $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$-Bahnen in der Menge

$$\mathcal{C}_{\mathbf{C}} := \{\mathbf{C}^g \mid g \in \mathbf{P},\ \mathbf{C}^g \text{ ist } \mathbf{F}\text{-stabil}\}.$$

Dies beschreibt die möglichen halbeinfachen Klassentypen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ mit in $\mathbf{P}$ zu $\mathbf{C}$ konjugierten Zentralisatoren.

(iii) Parametrisiere die halbeinfachen Elemente, die zu einem halbeinfachen Klassentyp gehören, durch Möbiusinversion. Dies beschreibt dann gleichzeitig, welche halbeinfachen Klassentypen in $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ wirklich vorkommen.

Wir wollen zunächst den ersten Schritt untersuchen. Das folgende Lemma beschreibt die Untergruppen, die als Zentralisatoren halbeinfacher Elemente von $\mathbf{P}$ vorkommen können.

(4.4) Lemma
Es gibt eine injektive Abbildung von der Menge der $\mathbf{P}$-Konjugiertenklassen von Zentralisatoren halbeinfacher Elemente in $\mathbf{P}$ in die Menge der $\mathbf{W}_J$-Bahnen auf der Menge der Teilmengen von $\Phi_{\mathbf{P}_J}$ der Form $\Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}$, wobei Ψ eine abgeschlossene Teilmenge von Φ ist. Eine solche Konjugiertenklasse ist $\mathbf{F}$-stabil genau dann, wenn die zugehörige $\mathbf{W}_J$-Bahn $\mathbf{F}$-stabil ist.

Beweis: Es sei $s \in \mathbf{P}$ ein Vertreter einer halbeinfachen Konjugiertenklasse von $\mathbf{P}$. Nach Lemma III.(3.8) können wir ohne Einschränkung $s \in \mathbf{T}$ annehmen. Da die Zentralisatoren aller Vertreter einer Konjugiertenklasse konjugiert sind, brauchen wir nur Zentralisatoren von Elementen in $\mathbf{T}$ zu betrachten. Ein solcher Zentralisator hat nach Lemma III.(3.9) die Form $\mathbf{C}_{\Psi\cap\Phi_{\mathbf{P}_J}}$ für eine abgeschlossene Teilmenge $\Psi \subseteq \Phi$. Hier benutzen wir, dass alle Zentralisatoren halbeinfacher Elemente zusammenhängend sind. Seien also $\mathbf{C} := \mathbf{C}_{\Psi\cap\Phi_{\mathbf{P}_J}}$ und $\mathbf{C}_1 := \mathbf{C}_{\Psi_1\cap\Phi_{\mathbf{P}_J}}$ die Zentralisatoren halbeinfacher Elemente in $\mathbf{T}$, wobei Ψ und Ψ_1 abgeschlossene Teilmengen von Φ sind. Existiert ein $g \in \mathbf{P}$ mit $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1^g$, dann existiert ein $c \in \mathbf{C}$ mit $gc \in N_{\mathbf{P}}(\mathbf{T})$ und $\mathbf{C}_1^{gc} = \mathbf{C}$, da die Tori $\mathbf{T}$ und $\mathbf{T}^g$ maximale Tori von $\mathbf{C}$ und somit in $\mathbf{C}$ konjugiert sind. Nach III.(3.8) ist $N_{\mathbf{P}}(\mathbf{T}) = N_{\mathbf{L}}(\mathbf{T})$. Damit sind $\mathbf{C}$ und $\mathbf{C}_1$ schon in $\mathbf{N}_{\mathbf{L}}(\mathbf{T})$ konjugiert. Also ist $\Psi_1 w = \Psi$ für ein $w \in \mathbf{W}_J$ und Ψ und Ψ_1 liegen in der gleichen $\mathbf{W}_J$-Bahn. Wir bekommen so eine wohldefinierte Abbildung von der Menge der $\mathbf{P}$-Konjugiertenklassen von Zentralisatoren halbeinfacher Elemente in die Menge der $\mathbf{W}_J$-Bahnen auf der Menge der Teilmengen von $\Phi_{\mathbf{P}_J}$ der Form $\Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}$ für abgeschlossene Teilmengen $\Psi \subseteq \Phi$. Diese Abbildung ist offensichtlich injektiv. Daraus folgt die Behauptung. □

(4.5) Bemerkung

(i) Im Falle $\mathbf{P} = \mathbf{G}$ ist die Aussage aus III.(4.4) bekannt. Vergleiche [Car78, Proposition 6]. In diesem Fall können wir das Bild dieser Abbildung konkret angeben. Dazu zerlegen wir das Wurzelsystem Φ in die irreduziblen Unterwurzelsysteme Φ_i. In jedem Φ_i können wir

ein Fundamentalsystem Π_i wählen. Es sei α_{i0} die höchste Wurzel im Wurzelsystem Φ_i. Wir vereinigen die echten Teilmengen von $\Pi_i \cup \{-\alpha_{i0}\}$ für alle Unterwurzelsysteme Φ_i und bilden die Vereinigung über alle so entstehenden Teilmengen. Für alle Repräsentanten Δ der $\mathbf{W}$-Bahnen auf diesen Teilmengen bilden wir das abgeschlossene Teilwurzelsystem von Φ, das Δ als Fundamentalsystem hat. Nach [Der84, 2.3.4] hat jede $\mathbf{W}$-Bahn im Bild der Abbildung einen Repräsentanten in dieser Menge von Teilwurzelsystemen, falls die Charakteristik p groß genug ist. Wir bekommen auf diese Weise aber auf jeden Fall eine Obermenge des Bildes dieser Abbildung.

(ii) Im allgemeinen Fall erhalten wir folgendermaßen Vertreter für die $\mathbf{W}_J$-Bahnen im Bild der in Lemma III.(4.4) angegebenen Abbildung: Es sei $\{w_i\}_{1\leqslant i\leqslant s}$ ein Nebenklassenvertretersystem von $\mathbf{W}/\mathbf{W}_J$ und M die Menge der Repräsentanten der $\mathbf{W}$-Bahnen, die wir in (i) bestimmt haben. Die Menge $\{\Psi w_i \cap \Phi_{\mathbf{P}_J} \mid \Psi \in M, 1 \leqslant i \leqslant s\}$ ist dann eine Obermenge des gesuchten Vertretersystems der $\mathbf{W}_J$-Bahnen im Bild dieser Abbildung. Dies folgt sofort aus (i) und Lemma III.(4.4). Welche Bahnen wirklich als Bilder vorkommen, ergibt sich dann durch Parametrisierung der Elemente. Vergleiche dazu III.(4.12).

(iii) Diese Abbildung ist im Allgemeinen nicht surjektiv. Beispielsweise hat die Weylgruppe vom Typ $\mathbf{F}_4$ eine Untergruppe vom Typ $\mathbf{D}_4$. Es gibt aber kein halbeinfaches Element in $\mathbf{F}_4(k)$ mit einem Zentralisator mit Wurzelsystem vom Typ $\mathbf{D}_4$.

(iv) Eine Konjugiertenklasse von Zentralisatoren halbeinfacher Elemente enthält nach Lemma III.(1.3) genau dann einen $\mathbf{F}$-stabilen Vertreter, wenn die zugehörige $\mathbf{W}_J$-Bahn eine $\mathbf{F}$-stabile Menge ist. Dies ist leicht algorithmisch zu überprüfen. Ist $\mathbf{G}$ eine Chevalleygruppe, so operiert $\mathbf{F}$ trivial auf den Wurzeln und alle Bahnen sind $\mathbf{F}$-stabil.

Lemma III.(4.4) zeigt, dass ein Zentralisator eines halbeinfachen Elementes in $\mathbf{P}$ konjugiert zu einer Untergruppe der Form $\mathbf{C}_{\Psi\cap\Phi_{\mathbf{P}_J}}$ ist, wobei Ψ eine abgeschlossene Teilmenge von Φ ist. Bemerkung III.(4.5)(ii) und III.(4.5)(iv) zeigt, welche Teilmengen Ψ vorkommen können.

Nun wollen wir den zweiten Schritt untersuchen. Es sei dazu $\mathbf{C}$ eine $\mathbf{F}$-stabile abgeschlossene und zusammenhängende Untergruppe mit $\mathbf{T} \leqslant \mathbf{C}$, die als Zentralisator eines halbeinfachen Elementes von $\mathbf{P}$ vorkommen kann. Wir wissen, dass $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\Psi_{\mathbf{C}}\cap\Phi_{\mathbf{P}_J}}$ für eine $\mathbf{F}$-stabile abgeschlossene Teilmenge $\Psi_{\mathbf{C}}$ von Φ ist. Es sei $\Pi_{\mathbf{C}}$ ein Fundamentalsystem von $\Psi_{\mathbf{C}}$ mit $\Pi_{\mathbf{C}} \subseteq \Phi_{\mathbf{P}_J}$. Wir definieren

$$\mathcal{C}_{\mathbf{C}} := \left\{\mathbf{C}' \leqslant \mathbf{P} \mid \ \mathbf{C}' \text{ ist } \mathbf{F}\text{-stabil und es existiert } g \in \mathbf{P} \text{ mit } \mathbf{C}'^{g} = \mathbf{C}\right\}.$$

Die Gruppe $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ operiert auf $\mathcal{C}_{\mathbf{C}}$ durch Konjugation. Die Bahnen unter dieser Operation bezeichnen wir mit $\mathcal{C}_{\mathbf{C}}/\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$. Wir wollen nun die Menge $\mathcal{C}_{\mathbf{C}}/\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ beschreiben. Dazu benötigen wir zunächst einige Lemmata.

(4.6) Lemma
Es sei $\mathbf{C}' \in \mathcal{C}_{\mathbf{C}}$. Dann gibt es ein $g \in \mathbf{P}$ mit $\mathbf{C}'^{g} = \mathbf{C}$ und $g^{-1}\mathbf{F}(g) \in N_{\mathbf{L}}(\mathbf{C}) \cap N_{\mathbf{L}}(\mathbf{T})$.

Beweis: Da $\mathbf{C}' \in \mathcal{C}_{\mathbf{C}}$ ist, gibt es ein $g' \in \mathbf{P}$ mit $\mathbf{C} = \mathbf{C}'^{g'}$. Dann ist $\mathbf{T}^{g'^{-1}}$ ein maximaler Torus von $\mathbf{C}'$. Durch Konjugation in $\mathbf{C}'$ können wir ein $g \in \mathbf{P}$ finden, so dass $\mathbf{C} = \mathbf{C}'^{g}$ ist und gleichzeitig

$\mathbf{T}^{g^{-1}}$ ein $\mathbf{F}$-stabiler maximaler Torus ist. Es gilt also $\mathbf{F}(\mathbf{T}^{g^{-1}}) = \mathbf{T}^{g^{-1}}$ und $\mathbf{F}(\mathbf{C}^{g^{-1}}) = \mathbf{C}^{g^{-1}}$. Daraus ergibt sich

$$g^{-1}\mathbf{F}(g) \in N_{\mathbf{P}}(\mathbf{C}) \cap N_{\mathbf{P}}(\mathbf{T}),$$

weil $\mathbf{C}$ und $\mathbf{T}$ auch $\mathbf{F}$-stabil sind. Nach Lemma III.(3.8) gilt $N_{\mathbf{P}}(\mathbf{T}) = N_{\mathbf{L}}(\mathbf{T})$. Insbesondere ist $g^{-1}\mathbf{F}(g) \in \mathbf{L}$. Daraus folgt die Behauptung. □

(4.7) Lemma
Es gilt $N_{\mathbf{L}}(\mathbf{C}) = (N_{\mathbf{L}}(\mathbf{C}) \cap N_{\mathbf{L}}(\mathbf{T})) \cdot (\mathbf{C} \cap \mathbf{L})$.

Beweis: Da $\mathbf{C}$ zusammenhängend ist, ist nach Lemma III.(3.9) und Lemma III.(3.3) $\mathbf{C} \cap \mathbf{L}$ eine reduktive Gruppe mit $\mathbf{T} \leqslant \mathbf{C} \cap \mathbf{L}$. Es sei $l \in N_{\mathbf{L}}(\mathbf{C})$. Dann ist $\mathbf{T}^l$ ein maximaler Torus von $\mathbf{C} \cap \mathbf{L}$. Die maximalen Tori von $\mathbf{C} \cap \mathbf{L}$ sind alle konjugiert in $\mathbf{C} \cap \mathbf{L}$. Also existiert ein $c \in \mathbf{C} \cap \mathbf{L}$ mit $\mathbf{T}^l = \mathbf{T}^c$. Damit ist wegen Lemma III.(3.8)

$$lc^{-1} \in N_{\mathbf{P}}(\mathbf{C}) \cap N_{\mathbf{P}}(\mathbf{T}) = N_{\mathbf{L}}(\mathbf{C}) \cap N_{\mathbf{L}}(\mathbf{T})$$

und somit $l \in (N_{\mathbf{L}}(\mathbf{C}) \cap N_{\mathbf{L}}(\mathbf{T})) \cdot (\mathbf{C} \cap \mathbf{L})$. □

(4.8) Lemma
Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{\mathbf{C}} & \longrightarrow & (N_{\mathbf{L}}(\mathbf{C}) \cap N_{\mathbf{L}}(\mathbf{T}))/(\mathbf{C} \cap N_{\mathbf{L}}(\mathbf{T})) \\ \mathbf{C}^{g^{-1}} & \mapsto & g^{-1}\mathbf{F}(g) \quad (\mathbf{C} \cap N_{\mathbf{L}}(\mathbf{T})) \end{array}$$

ist wohldefiniert und induziert eine Bijektion zwischen der Menge $\mathcal{C}_{\mathbf{C}}/\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ der $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$-Bahnen von $\mathcal{C}_{\mathbf{C}}$ und der Menge der $\mathbf{F}$-Konjugiertenklassen $H^1(\mathbf{F}, (N_{\mathbf{L}}(\mathbf{C}) \cap N_{\mathbf{L}}(\mathbf{T}))/(\mathbf{C} \cap N_{\mathbf{L}}(\mathbf{T})))$.

Beweis: Dies ist eine Verallgemeinerung von [Car78, Proposition 1] auf den Fall parabolischer Untergruppen. Der dortige Beweis lässt sich im wesentlichen wörtlich auf unsere Situation übertragen, wenn man berücksichtigt, dass $\mathbf{P}$ als Erzeugnis von $\mathbf{T}$ und den Wurzeluntergruppen $\mathbf{U}_\alpha$ für $\alpha \in \Phi_{\mathbf{P}_J}$ nach [Hum75, 7.5] zusammenhängend und somit Satz III.(1.2) anwendbar ist. Die Wohldefiniertheit der Abbildung folgt durch analoge Rechnung unter Benutzung von Lemma III.(4.6) und Lemma III.(4.7). □

(4.9) Lemma
Die Gruppe $\mathbf{W}_{\Psi_{\mathbf{C}} \cap \Phi_J}$ ist ein Normalteiler von $\mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Psi_{\mathbf{C}} \cap \Phi_{\mathbf{P}_J})$. Der kanonische Epimorphismus $\pi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{W}$ induziert eine Bijektion zwischen

$$H^1(\mathbf{F}, (N_{\mathbf{L}}(\mathbf{C}) \cap N_{\mathbf{L}}(\mathbf{T}))/(\mathbf{C} \cap N_{\mathbf{L}}(\mathbf{T})))$$

und

$$H^1\left(\mathbf{F}, \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Psi_{\mathbf{C}} \cap \Phi_{\mathbf{P}_J})/\mathbf{W}_{\Psi_{\mathbf{C}} \cap \Phi_J}\right).$$

Beweis: Dies ist eine Verallgemeinerung von [Car78, Proposition 2]. Wir zeigen zunächst, dass der kanonische Epimorphismus π einen Isomorphismus zwischen $(N_{\mathbf{L}}(\mathbf{C}) \cap N_{\mathbf{L}}(\mathbf{T}))/(\mathbf{C} \cap N_{\mathbf{L}}(\mathbf{T}))$ und $\mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Psi_{\mathbf{C}} \cap \Phi_{\mathbf{P}_J})/\mathbf{W}_{\Psi_{\mathbf{C}} \cap \Phi_J}$ induziert. Da $\mathbf{C}$ eine zusammenhängende Gruppe ist, ist nach

Lemma III.(3.9) und Lemma III.(3.3) $\mathbf{C} \cap \mathbf{L}$ eine reduktive Gruppe mit Wurzelsystem $\Psi_{\mathbf{C}} \cap \Phi_J$ und Weylgruppe $\mathbf{W}_{\Psi_{\mathbf{C}} \cap \Phi_J}$ und es gilt

$$(\mathbf{C} \cap N_{\mathbf{L}}(\mathbf{T}))/\mathbf{T} = N_{\mathbf{C}\cap\mathbf{L}}(\mathbf{T})/\mathbf{T} \cong \mathbf{W}_{\Psi_{\mathbf{C}} \cap \Phi_J}.$$

Es sei nun $n \in N_{\mathbf{L}}(\mathbf{C}) \cap N_{\mathbf{L}}(\mathbf{T})$. Dann ist $\pi(n) \in \mathbf{W}_J$. Da $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}$ und $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\Psi_{\mathbf{C}} \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}}$ ist, folgt $\left(\Psi_{\mathbf{C}} \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}\right)\pi(n) = \Psi_{\mathbf{C}} \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}$ und somit $\pi(n) \in \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Psi_{\mathbf{C}} \cap \Phi_{\mathbf{P}_J})$. Daher ist

$$(N_{\mathbf{L}}(\mathbf{C}) \cap N_{\mathbf{L}}(\mathbf{T}))/\mathbf{T} \cong \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Psi_{\mathbf{C}} \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}).$$

Der Rest des Beweises kann wörtlich aus [Car78, Proposition 2] übernommen werden. □

(4.10) Korollar
Es gibt eine Bijektion zwischen $\mathcal{C}_{\mathbf{C}}/\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ und $H^1\left(\mathbf{F}, \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Pi_{\mathbf{C}})\right)$.

Beweis: Dies folgt sofort aus Lemma III.(4.8), Lemma III.(4.9) und Lemma III.(3.12). Beachte, dass $\Pi_{\mathbf{C}} \subseteq \Phi_{\mathbf{P}_J}$ ist. □

(4.11) Korollar
Es sei Ξ die Menge aller Fundamentalsysteme $\mathbf{F}$-invarianter abgeschlossener Teilmengen von Φ, die in $\Phi_{\mathbf{P}_J}$ enthalten sind. Wir definieren die folgende Menge

$$M := \left\{(\Pi, w) \mid \Pi \in \Xi \text{ und } w \in \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Pi)\right\}.$$

Auf M definieren wir folgendermaßen eine Äquivalenzrelation. Es sei $(\Pi_1, w_1) \sim (\Pi_2, w_2)$ genau dann, wenn es ein $v \in \mathbf{W}_J$ gibt mit $\Pi_1 v = \Pi_2$ und $w_1 = v w_2 \mathbf{F}(v^{-1})$. Die Menge der Äquivalenzklassen von M unter dieser Relation bezeichnen wir mit $M/\!\sim$. Dann gilt:

(i) Es sei $s \in \mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ ein halbeinfaches Element. Dann existiert ein $g \in \mathbf{P}$ mit $t := s^g \in \mathbf{T}$ und $n := g^{-1}\mathbf{F}(g) \in N_{\mathbf{L}}(\mathbf{T})$. Die Menge $\Psi := \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(t) = 1\}$ ist abgeschlossen und $\mathbf{F}$-invariant. Wir setzen $w' := \pi(n) \in \mathbf{W}_J$. Es gilt $w' \in \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Psi)$. Es sei nun Π ein Fundamentalsystem von Ψ mit $\Pi \subseteq \Phi_{\mathbf{P}_J}$. Dann gibt es nach Lemma III.(3.12) genau ein Element $w \in w'\mathbf{W}_{\Psi\cap\Phi_J}$ mit $\Pi w = \Pi$. Wir ordnen dem halbeinfachen Klassentyp von s das Paar (Π, w) zu. Weiterhin gilt $C_{\mathbf{P}^{\mathbf{F}}}(s)^g = \mathbf{C}^{\mathbf{F}w^{-1}}_{\Psi\cap\Phi_{\mathbf{P}_J}}$. Dabei operiert $\mathbf{F}w^{-1}$ wie $\mathbf{F}n^{-1}$ auf $C_{\mathbf{P}}(t)$.

(ii) Die in (i) beschriebene Zuordnung induziert eine injektive Abbildung von der Menge der halbeinfachen Klassentypen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ in die Menge der Äquivalenzklassen $M/\!\sim$.

Beweis: Dies folgt aus Satz III.(1.2) und Korollar III.(4.10). Siehe auch [Lüb93, Lemma 4.2]. □

Damit haben wir die möglichen halbeinfachen Klassentypen beschrieben. Wir wollen nun den dritten Schritt untersuchen. Dazu müssen wir noch beschreiben, welche Paare (Π, w) im Bild der in III.(4.10) beschriebenen Abbildung liegen und gegebenenfalls die halbeinfachen Elemente des zu diesem Paar gehörenden Klassentyps parametrisieren. Wir folgen dem Vorgehen in [Lüb93, Abschnitt 4.1] und [GP92]. Für die Parametrisierung der Konjugiertenklassen halbeinfacher Elemente gilt:

(4.12) Korollar (Parametrisierung halbeinfacher Elemente)
Ist $s \in \mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ ein halbeinfaches Element im Klassentyp, der durch das Paar (Π, w) gegeben ist, so gibt es nach Bemerkung III.(4.3) und Satz III.(1.2) ein $g \in \mathbf{P}$ und ein $t \in \mathbf{T}$ mit $t := s^g \in \mathbf{T}$ und $\pi(g^{-1}\mathbf{F}(g)) = w$ und $C_{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{C}_{\mathbb{Z}\Pi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}}$. Dann erfüllt t die folgenden Bedingungen:

(i) $\alpha(t) = 1$ für alle $\alpha \in \Pi$.

(ii) $\mathbf{F}(t) = t^w$.

(iii) $\alpha(t) \neq 1$ für alle $\alpha \in \Phi^+ \setminus \mathbb{Z}\Pi$.

Ist umgekehrt $t \in \mathbf{T}$ ein Toruselement, das diese Bedingungen erfüllt, so ist $C_{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{C}_{\mathbb{Z}\Pi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}}$ und es gibt nach III.(4.11) und III.(1.2) ein $g \in \mathbf{P}$ mit $\pi(g^{-1}\mathbf{F}(g)) = w$. Das halbeinfache Element $s := {}^g t$ ist dann ein Vertreter einer Konjugiertenklasse im halbeinfachen Klassentyp, der durch das Paar (Π, w) gegeben ist.

Beweis: Dies folgt sofort aus Korollar III.(4.11). □

Dieses Korollar legt die folgende Definition nahe.

(4.13) Definition/Bemerkung (Parametermenge eines halbeinfachen Klassentyps von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$)
Die Menge

$$h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}}) := \{t \in \mathbf{T} \mid t \text{ erfüllt die Bedingungen (i)-(iii) für das Paar } (\Pi, w)\}$$

heißt **Parametermenge** des halbeinfachen Klassentyps von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$, der gemäß Korollar III.(4.11) durch das Paar (Π, w) gegeben ist. Die Zentralisatoren aller halbeinfachen Elemente von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$, die im halbeinfachen Klassentyp $h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ liegen, sind in $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ konjugiert und haben somit die gleiche Ordnung. Wir bezeichnen diese Ordnung mit $c(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ und es gilt

$$c(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}}) := |C_{\mathbf{P}}(t)^{\mathbf{F}w^{-1}}|.$$

(4.14) Bemerkung

(i) Die Elemente $t \in h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ parametrisieren die Konjugiertenklassen im halbeinfachen Klassentyp von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$, der durch das Paar (Π, w) beschrieben wird. Diese Parametrisierung ist nicht eindeutig und hängt von der Wahl des Paares (Π, w) ab. Sind (Π, w) und (Π', w') zwei Paare, die den gleichen Klassentyp beschreiben, so gibt es nach III.(4.11) ein $v \in \mathbf{W}_J$ mit $\Pi' = \Pi v$ und $w = vw'\mathbf{F}(v^{-1})$. Die Abbildung $t \mapsto t^v$ ist dann eine Bijektion von der Menge der Parameter $h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ auf $h(\Pi', w', \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$. Wir können also die Parameter bezüglich verschiedener Wahlen der Paare ineinander umrechnen.

(ii) Ist Π ein Fundamentalsystem eines $\mathbf{F}$-stabilen Teilwurzelsystems und $w \in \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Pi)$, so gilt

$$h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}}) = h(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}}).$$

Wir nehmen aber die Gruppe $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ beziehungsweise $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ mit in die Notation auf. Zum Einen können wir so zwischen $h(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})$ und $h(\Pi \cap \Phi_J, w, \mathbf{L}^{\mathbf{F}})$ unterscheiden. Zum Anderen zeigt (i), dass es für $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ mehr Paare geben kann, die den gleichen Klassentyp beschreiben.

(iii) Für $t \in \mathbf{T}$ gilt $t \in h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ für höchstens ein Paar (Π, w) modulo $\sim$.

Wir wollen nun die Elemente $t \in h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ parametrisieren. Dies wollen wir in zwei Schritten durchführen:

(i) Für jedes Paar (Π, w) parametrisiere die $t \in \mathbf{T}$, die die Bedingungen (i) und (ii) erfüllen. Diese bilden gerade das Zentrum von $(\mathbf{C}_{\mathbb{Z}\Pi\cap\Phi_{\mathbf{P}_J}})^{\mathbf{F}w^{-1}}$.

(ii) Finde Klassenvertreter der halbeinfachen Konjugiertenklassen durch Inklusion-Exklusion. Dieser Schritt berücksichtigt Bedingung (iii).

Wir wollen dies hier nicht weiter ausführen, sondern verweisen für die technischen Details auf [Lüb93, 4.1]. Die Primzahlpotenz q spielt dabei nur im ersten Schritt eine Rolle. Hierbei müssen wir im Allgemeinen eine endliche Zahl von Kongruenzklassen von q modulo einer nur vom Wurzeldatum abhängigen Zahl unterscheiden. Bei den Chevalleygruppen $F_4(q)$ müssen wir beispielsweise die Kongruenzklassen von q modulo 12 unterscheiden. Gibt es zu einem Paar (Π, w) kein $t \in \mathbf{T}$, das diese Bedingungen erfüllt, so liegt das Paar (Π, w) nicht im Bild der Abbildung aus Korollar III.(4.11) und es wird dadurch kein halbeinfacher Klassentyp von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ parametrisiert. Es bleibt noch zu untersuchen, wann mehrere $t \in \mathbf{T}$ die Bedingungen (i)-(iii) erfüllen, aber die gleiche Konjugiertenklasse von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ parametrisieren.

(4.15) Definition
Es sei $h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ ein halbeinfacher Klassentyp. Zwei Elemente $t, t' \in h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$, die die gleiche Konjugiertenklasse von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ parametrisieren, sind nach III.(4.4) in $\mathbf{W}_J$ konjugiert. Es sei nun $t \in h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$. Wir definieren die Menge

$$n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}}) := \{w \in \mathbf{W}_J \mid t \text{ und } t^w \text{ parametrisieren die gleiche Konjugiertenklasse von } \mathbf{P}^{\mathbf{F}}\}.$$

Ist die Gruppe $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ aus dem Zusammenhang heraus klar, so schreiben wir auch $n(\Pi, w)$. Die Menge $n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ ist unabhängig von der Wahl von t. Vergleiche dazu auch Lemma III.(4.16). Die Mächtigkeit von $n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ gibt an, wie viele Parameter in $h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ genau die gleiche halbeinfache Konjugiertenklasse parametrisieren.

Wir können die Menge $n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ und somit insbesondere auch die Mächtigkeit $\left|n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})\right|$ bestimmen. Es gilt das folgende Lemma:

(4.16) Lemma
Es sei h ein halbeinfacher Klassentyp von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$, der durch das Paar $h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ beschrieben wird, dann gilt

$$n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}}) = \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Pi) \cap C_{\mathbf{W},\mathbf{F}}(w).$$

Beweis: Dies ist eine Verallgemeinerung der entsprechenden Aussage in [Lüb93, 4.1]. Der Beweis folgt den dort beschriebenen Ideen. Wir wollen abkürzend $\Psi := \mathbb{Z}\Pi \cap \Phi$ für das von Π erzeugte Teilwurzelsystem von Φ schreiben. Es seien nun $t, t_1 \in \mathbf{T}$ halbeinfache Elemente, die die Bedingungen (i)-(iii) erfüllen und die die gleiche Konjugiertenklasse halbeinfacher Elemente in $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ beschreiben. Dann sind t und t_1 in $\mathbf{P}$ konjugiert. Da konjugierte Toruselemente nach III.(3.9)(iii) schon in $N_{\mathbf{P}}(\mathbf{T}) = N_{\mathbf{L}}(\mathbf{T})$ konjugiert sind, gibt es ein $v \in \mathbf{W}_J$ mit ${}^v t = t_1$. Setzen

wir ${}^v t$ in die Bedingung (ii) ein, so erhalten wir nach kurzer Rechnung (vergleiche [Lüb93, 4.1]) die Bedingung

$$ {}^{v^{-1}w\mathbf{F}(v)w^{-1}}t = t. $$

Nach Lemma III.(3.9) ist ${}^v t = t$ genau dann, wenn $v \in \mathbf{W}_\Psi \cap \mathbf{W}_J = \mathbf{W}_{\Psi\cap\Phi_J}$. Hierbei benutzen wir wesentlich, dass der Zentralisator von t zusammenhängend ist. Die verschiedenen Elemente der Form ${}^v t$, die die Bedingungen (i)-(iii) erfüllen, werden also durch die Nebenklassen $v\mathbf{W}_{\Psi\cap\Phi_J}$ mit $v \in \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Psi)$ und $v^{-1}w\mathbf{F}(v)w^{-1} \in \mathbf{W}_{\Psi\cap\Phi_J}$ beschrieben. Wenden wir den Isomorphismus aus Lemma III.(3.12) an, so erhalten wir, dass die gesuchten Elemente durch die $v \in \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Pi)$ mit $v^{-1}w\mathbf{F}(v)w^{-1} \in \mathbf{W}_{\Psi\cap\Phi_J}$ beschrieben werden. Da auch $w \in \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Pi)$ ist, vereinfacht sich die letzte Bedingung zu

$$ v^{-1}w\mathbf{F}(v)w^{-1} \in \mathbf{W}_{\Psi\cap\Phi_J} \cap \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Pi). $$

Aus Teil III.(3.12) folgt $\mathbf{W}_{\Psi\cap\Phi_J} \cap \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Pi) = 1$ und somit die Behauptung. Vergleiche auch [Lüb93, 4.1] dazu. □

Wir können also die halbeinfachen Klassen des halbeinfachen Klassentyps $h(\Pi, w, \mathbf{P}^\mathbf{F})$ beschreiben, indem wir die $t \in \mathbf{T}$ parametrisieren, die die Bedingungen (i)-(iii) erfüllen und durch $\left|n(\Pi, w, \mathbf{P}^\mathbf{F})\right|$ angeben, wie viele dieser t jeweils in einer Klasse liegen.

(4.17) Bemerkung

(i) Die Parametrisierung der halbeinfachen Konjugiertenklassen ist nicht eindeutig. Zu jeder halbeinfachen Klasse gehören $\left|n(\Pi, w, \mathbf{P}^\mathbf{F})\right|$ verschiedene Parameter.

(ii) Jeder halbeinfachen Klasse ist genau ein halbeinfacher Klassentyp zugeordnet. In III.6 werden wir den Begriff des halbeinfachen Klassentyps auf beliebige Konjugiertenklassen verallgemeinern. Dort wird diese eindeutige Zuordnung nicht mehr möglich sein.

(iii) Der Algorithmus zur Parametrisierung der halbeinfachen Klassen $\mathbf{F}$-stabiler parabolischer Gruppen wurde von mir basierend auf **CHEVIE** innerhalb des Computeralgebrasystems **GAP** implementiert. Dieser ist allerdings nur in Fällen anwendbar, wo alle Zentralisatoren halbeinfacher Elemente zusammenhängend sind. Dies ist nach III.(3.5) bei allen $\mathbf{F}$-stabilen parabolischen Untergruppen von $\mathbf{F}_4(k)$ der Fall. Ein deutlich leistungsfähigerer Algorithmus, der zwar nur für reduktive Gruppen funktioniert, dafür aber keinerlei Einschränkungen des Typs der Gruppe (wie zum Beispiel einfach zusammenhängende Gruppe) unterliegt, wurde von Frank Lübeck implementiert.

(iv) Eine weitere nützliche Verallgemeinerung ergibt sich folgendermaßen: Es sei l eine Primzahl. Dann können wir die Konjugiertenklassen halbeinfacher l-Elemente von $\mathbf{P}^\mathbf{F}$ parametrisieren, indem wir das oben beschriebene Verfahren durchführen, allerdings nur die l-Elemente in den Zentren von $(\mathbf{C}_{\Psi\cap\Phi_{\mathbf{P}_J}})^{\mathbf{F}w^{-1}}$ berücksichtigen, ansonsten das Inklusions-Exklusionsverfahren genauso durchführen. Dies entspricht einer vierten Bedingung, nämlich dass die Elemente l-Potenzordnung haben müssen. Auch dies lässt sich generisch durchführen und wurde von mir im Rahmen von **CHEVIE** implementiert. Wir werden dies später zur Parametrisierung der Charaktere in den unipotenten Blöcken von $F_4(q)$ benötigen.

(v) Die durch dieses Verfahren berechnete Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ orientiert sich an folgender Aufgabenstellung. Gegeben sei eine Klassenfunktion f. Summiere f über alle Konjugiertenklassen eines halbeinfachen Klassentyps. Ist f als Funktion der Parameter des halbeinfachen Klassentyps gegeben, wie dies zum Beispiel bei den Charakteren generischer Charaktertafeln der Fall ist, so erhalten wir diese Summe, indem wir über alle Parameter $h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ des Klassentyps summieren und das Ergebnis durch die entsprechende Zahl $\left|n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})\right|$ dividieren. Diese Aufgabe tritt zum Beispiel bei der Berechnung von Skalarprodukten von Charakteren generischer Charaktertafeln auf. Vergleiche für technische Details und ein Beispiel [Lüb93, 4.1]. Im Fall der Gruppen $F_4(q)$ und parabolischer Untergruppen sind die durch den Algorithmus gelieferten Beschreibungen der Parametermengen so kompliziert, dass eine praktische Verwendung zur Summation von Klassenfunktionen kaum sinnvoll erscheint. In den uns interessierenden Fällen hängen die Werte der betrachteten Klassenfunktionen nur vom Klassentyp ab, das heißt sie sind konstant auf allen halbeinfachen Klassen eines Klassentyps. Daher benötigen wir die exakte Parametrisierung gar nicht, sondern kommen mit den Anzahlen der halbeinfachen Klassen in einem Klassentyp aus. Ausführlicher werden generische Charaktertafeln reduktiver Gruppen in [GHL$^+$96] beschrieben. Vergleiche auch die Ausführungen in [Lüb93, Kapitel 4].

(vi) Dieses Verfahren lässt sich natürlich auch auf die Fixpunktuntergruppen $\mathbf{F}$-stabiler Leviuntergruppen von $\mathbf{G}$ anwenden.

Im weiteren Verlauf der Arbeit interessieren uns vor allem die halbeinfachen Klassentypen der Chevalleygruppen $F_4(q)$ und die zugehörigen zerfallenden Leviuntergruppen der Typen B_2, B_3 und C_3, sowie die entsprechenden parabolischen Untergruppen. In Anhang A.7 sind die halbeinfachen Klassentypen der Gruppen vom Typ $\mathbf{F}_4$ in guter Charakteristik angegeben. Es gibt in diesen Gruppen 101 Klassentypen, die wir mit h_1 bis h_{101} bezeichnen. Da wir die exakte Parametrisierung der Klassen nicht benötigen, geben wir hier nur die Anzahlen der Klassen in den einzelnen Klassentypen an. Die Zahlen m_i bezeichnen die Anzahl der unipotenten Konjugiertenklassen im entsprechenden Zentralisator der halbeinfachen Elemente des halbeinfachen Klassentyps. Vergleiche dazu Abschnitt III.6. In Abschnitt III.8 werden wir ein ausführlicheres Beispiel behandeln, wo wir auch die halbeinfachen Klassentypen einer parabolischen Gruppe parametrisieren werden.

III.5 Unipotente Klassen

In den Abschnitten I.(8.1) und I.(8.3) haben wir schon beschrieben, wie wir Vertreter für die unipotenten Konjugiertenklassen einer Untergruppe $\mathbf{H}^{\mathbf{F}}$ von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ bestimmen können. Dazu suchen wir zunächst, wie in I.(8.3) beschrieben, Kandidaten für die Vertreter der Klassen. Danach müssen wir, wie in I.(8.1) beschrieben, bestimmen, welche dieser Kandidaten konjugiert sind, um so Vertreter für alle Klassen zu bestimmen. Zudem berechnen wir die Zentralisatoren dieser Vertreter. Dadurch können wir die Länge der Konjugiertenklassen bestimmen. Uns interessieren dabei

vor allem Leviuntergruppen, parabolische Untergruppen und Zentralisatoren halbeinfacher Elemente. Der folgende Satz ist ein wichtiges Hilfsmittel, das die Bestimmung der Klassenvertreter in diesen Fällen sehr vereinfacht.

(5.1) Satz (Anzahl unipotenter Elemente, vgl. [Ste68a, §15])
Es sei $\mathbf{G}$ eine zusammenhängende reduktive Gruppe und $\mathbf{F}$ ein surjektiver Endomorphismus von $\mathbf{G}$, so dass $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ endlich ist. Dann ist die Anzahl der unipotenten Elemente von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ durch $|\mathbf{G}^{\mathbf{F}}|_p^2$ gegeben. Dabei bezeichnen $|\mathbf{G}^{\mathbf{F}}|_p$ die Ordnung einer p-Sylowgruppe von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$, also die maximale p-Potenz, die $|\mathbf{G}^{\mathbf{F}}|$ teilt und p die Charakteristik von k.

Beweis: Siehe [Ste68a, §15] oder auch [Car85, 6.6.1]. □

(5.2) Korollar
Ist $\mathbf{P} = \mathbf{L} \ltimes \mathbf{U}_{\mathbf{P}}$ eine $\mathbf{F}$-stabile Untergruppe, so ist die Anzahl der unipotenten Elemente von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ durch $|\mathbf{L}^{\mathbf{F}}|_p^2|\mathbf{U}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{F}}|$ gegeben.

Beweis: Dies folgt sofort aus Satz III.(5.1) und der Levizerlegung von $\mathbf{P}$. □

Dieser Satz ermöglicht es uns, zu entscheiden, ob wir schon alle unipotenten Konjugiertenklassen gefunden haben, ohne alle berechneten Kandidaten wirklich durchzuprobieren. Außerdem wissen wir, dass die Anzahl der unipotenten Konjugiertenklassen einer reduktiven Gruppe $\mathbf{G}$ nach [Lus76] endlich ist. Wir finden dann in $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ eine im wesentlichen von q unabhängige Anzahl unipotenter Konjugiertenklassen. Hier müssen allerdings kleine Charakteristiken gesondert betrachtet werden. Vergleiche dazu [Car85, 5.11]. In den parabolischen Gruppen $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ ist dies nicht mehr richtig. Die Anzahl der unipotenten Konjugiertenklassen ist abhängig von q. In unseren Beispielen lässt diese sich bis auf wenige kleine Charakteristiken als Polynom in q schreiben. Es ist allerdings bisher unbekannt, ob dies allgemein so ist.

In Anhang A.8 geben wir als Beispiel ein Vertretersystem der unipotenten Konjugiertenklassen von $F_4(q)$ in guter Charakteristik an. Weitere Beispiele werden im nächsten Abschnitt folgen. Zuerst wurden diese Klassenvertreter in [Sho74] bestimmt. In [Win95] wurde ein Fehler, wahrscheinlich ein Druckfehler, bei einem der angegebenen Vertreter berichtigt. Wir geben allerdings teilweise andere Vertreter an, die wir mit der oben beschriebenen Methode bestimmt haben, mit denen sich die benötigten Fusionen von Untergruppen leichter berechnen lassen. Die dort angegebene Reihenfolge entspricht nicht der Reihenfolge in [Sho74], sondern der Reihenfolge, die durch die Tafel der Greenfunktionen vom Typ $\mathbf{F}_4$ in guter Charakteristik, wie sie durch **CHEVIE** zur Verfügung gestellt werden, vorgegeben ist. In der Tafel sind allerdings keine Klassenvertreter angegeben. In Tabelle A.8 geben wir auch die Bezeichnungen der Klassen in [Sho74] an.

Wir wollen hier zur Veranschaulichung der benutzten Methoden drei kleine Beispiele vorrechnen. Zuerst bestimmen wir den Zentralisator eines unipotenten Elementes, danach führen wir einen Konjugiertheitstest unipotenter Elemente durch. Zuletzt bestimmen wir Vertreter für die Konjugiertenklassen einer unipotenten Gruppe. Die weiteren Rechnungen lassen sich völlig analog dazu durchführen. Leider können sie im Detail trotz Computereinsatz durchaus sehr aufwendig werden.

(5.3) Beispiel (Zentralisatorbestimmung)
Wir betrachten dazu das Element

$$u := x_8(1)x_9(1)x_{16}(-1)$$

Wir wollen den Zentralisator dieses Elementes bestimmen. Es sei

$$\mathcal{G} = \{\mathcal{B}w\mathcal{B}\}_{w\in\mathbf{W}}$$

mit den Parameterbereichen $P_w := P(\mathcal{B}w\mathcal{B})$ die in I.(6.9)(iii) beschriebene ganzzahlige Parametrisierung von $\mathbf{F}_4(k)$. Gemäß der in I.(8.1) beschriebenen Vorgehensweise wollen wir für alle $w \in \mathbf{W}$ die Menge

$$C_w := \{t \in P_w \mid \mathcal{B}w\mathcal{B}(t)u = u\mathcal{B}w\mathcal{B}(t)\}$$

untersuchen. Durch die in I.7 beschriebenen Methoden können wir zeigen, dass $C_w = \emptyset$ für alle $w \in \mathbf{W} \setminus \{1, s_2\}$ ist. Wir wollen die beiden übrig gebliebenen Fälle genauer untersuchen.

Es sei zunächst $w = 1$. Wir betrachten also das parametrisierte Element

$$\mathcal{B} = \theta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)x_1(u_1)x_2(u_2)\cdots x_{24}(u_{24})$$

mit zugehöriger Parametermenge $P_1 := k^{*4} \times k^{24}$. Berechnen wir die Bruhatzerlegung des Ausdrucks $\mathcal{B}w\mathcal{B}(t)u$, so erhalten wir den Ausdruck

$$\begin{aligned}\mathcal{B}w\mathcal{B}(t)u \;=\;& \theta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)x_1(u_1)x_2(u_2)x_3(u_3)x_4(u_4)x_5(u_5)x_6(u_6)\cdot\\ & x_7(u_7)x_8(u_8+1)x_9(u_9+1)x_{10}(u_{10})x_{11}(u_{11})x_{12}(u_{12})\cdot\\ & x_{13}(u_{13})x_{14}(u_{14})x_{15}(u_{15})x_{16}(u_{16}-1)x_{17}(u_{17}+u_{10})\cdot\\ & x_{18}(u_{18})x_{19}(u_{19}-u_{13}+u_{12})x_{20}(u_{20})x_{21}(u_{21}+u_{16})\cdot\\ & x_{22}(u_{22}-u_{18})x_{23}(u_{23}-u_{20}+2u_{10}u_{13})\cdot\\ & x_{24}(u_{24}+2u_{21}+u_{16}-u_{12}^2+2u_{10}u_{15}).\end{aligned}$$

Für $u\mathcal{B}w\mathcal{B}(t)$ erhalten wir einen entsprechenden Ausdruck.

$$\begin{aligned}u\mathcal{B}w\mathcal{B}(t) \;=\;& \theta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)x_1(u_1)x_2(u_2)x_3(u_3)x_4(u_4)x_5(u_5)x_6(u_6)\cdot\\ & x_7(u_7)x_8(u_8+\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-1})x_9(u_9+\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-2})x_{10}(u_{10})\cdot\\ & x_{11}(u_{11}-\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-2}u_1+2\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-1}u_3)\cdot\\ & x_{12}(u_{12}+\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-1}u_4)x_{13}(u_{13}-\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-2}u_4)\cdot\\ & x_{14}(u_{14}+\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-2}u_5+\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-2}u_1u_2+2\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-1}u_6)\cdot\\ & x_{15}(u_{15}+\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-2}u_1u_4-\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-1}u_7-2\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-1}u_3u_4)\cdot\\ & x_{16}(u_{16}+\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-2}u_4^2-\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-2}\lambda_4^{-2})\cdot\\ & x_{17}(u_{17}-\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-2}u_4u_5-\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-2}u_1u_2u_4-\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-1}u_4u_6)\cdot\ldots\end{aligned}$$

Die weiteren Terme dieses Ausdrucks sind schon ziemlich unübersichtlich, daher wollen wir sie hier nicht angeben. Aus der Eindeutigkeit der Bruhatzerlegung erhalten wir ein Gleichungssystem. Wir multiplizieren mit den Nennern der Gleichungen und erhalten somit ein polynomiales

Gleichungssystem über $\mathbb{Z}$. Wir bestimmen eine ganzzahlige Gröbnerbasis B des dadurch gegebenen Ideals und erhalten:

$$\begin{aligned} B &= \{\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_2\lambda_3^2 - 1, \lambda_4^2 - 1, u_1, 2u_3, u_4, u_5, 2u_6, u_7, u_8 + u_{16}, \\ &\quad u_{10}, u_{11} - u_{18}, u_{12} - u_{13}, u_{13}^2 - u_{16}^2 - u_{16} - 2u_{21}, u_{14} - u_{20}\}. \end{aligned}$$

Nun können wir leicht die Lösungsmenge des Gleichungssystems bestimmen. Da wir in guter Charakteristik rechnen, ist $\operatorname{char} k \neq 2$. Daher ist

$$u_1 = u_3 = u_4 = u_5 = u_6 = u_7 = u_{10} = 0$$

und

$$u_8 = -u_{16}, \quad u_{11} = u_{18}, \quad u_{12} = u_{13}, \quad u_{14} = u_{20}, \quad u_{21} = \frac{1}{2}\left(u_{13}^2 - u_{16}^2 - u_{16}\right).$$

Weiterhin sind die möglichen Werte von $\lambda_3 \in k^*$. Daher gilt

$$\lambda_1 = \lambda_3 \text{ und } \lambda_2 = \lambda_3^{-2}.$$

Außerdem haben wir

$$\lambda_4 = 1 \text{ oder } \lambda_4 = -1.$$

Wir sehen also, dass wir für beliebige Wahlen

$$u_2, u_9, u_{13}, u_{15}, u_{16}, u_{17}, u_{18}, u_{19}, u_{20}, u_{22}, u_{23}, u_{24} \in k$$

und

$$\lambda_3 \in k^*$$

genau zwei Lösungen des Gleichungssystems erhalten. Auf diese Art erhalten wir also genau die Elemente $\mathcal{B}(t)$, für die $\mathcal{B}(t)u = u\mathcal{B}(t)$ ist. Dies sind genau die Elemente aus $\mathbf{B}$, die das Element u zentralisieren. Gemäß Bemerkung I.(7.1) erhalten wir daraus sofort die Elemente aus $\mathbf{B}^{\mathbf{F}}$, die u zentralisieren. Diese sind genau von der Form

$$\begin{gathered} \theta(\lambda_3, \lambda_3^{-2}, \lambda_3, \lambda_4)x_2(u_2)x_8(-u_{16})x_{11}(u_{18})x_{12}(u_{13})x_{13}(u_{13})x_{14}(u_{20})\cdot \\ x_{15}(u_{15})x_{16}(u_{16})x_{17}(u_{17})x_{18}(u_{18})x_{19}(u_{19})x_{20}(u_{20})\cdot \\ x_{21}(\tfrac{1}{2}(u_{13}^2 - u_{16}^2 - u_{16}))x_{22}(u_{22})x_{23}(u_{23})x_{24}(u_{24}) \end{gathered}$$

mit $u_i \in \mathbb{F}_q$ für $i \in \{2, 9, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24\}$, $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$ und $\lambda_4 \in \{1, -1\}$ beliebig. Wir erhalten somit in dieser Doppelnebenklasse genau $2q^{12}(q-1)$ zentralisierende Elemente.

Es sei nun $w = s_2$. Wir erhalten in diesem Fall genau wie für $w = 1$ eine Parametrisierung der zentralisierenden Elemente in $\mathbf{B}\widehat{s_2}\mathbf{B}$ und insgesamt $2q^{13}(q-1)$ zentralisierende Elemente in $\mathbf{B}^{\mathbf{F}}\widehat{s_2}\mathbf{B}^{\mathbf{F}}$.

Damit haben wir alle zentralisierenden Elemente von u in $F_4(q)$ gefunden und erhalten

$$|C_{F_4(q)}(u)| = 2q^{12}(q-1) + 2q^{13}(q-1) = 2q^{12}(q^2-1) = 2q^{12}\phi_1\phi_2.$$

Diese Rechnungen sind gemäß I.7 gültig für alle q mit $2 \nmid q$.

(5.4) Beispiel (Konjugiertheitstest)
Wir betrachten die Elemente

$$u_1 := x_8(1)x_9(1)x_{16}(-1), \quad u_2(\mu) := x_5(1)x_6(1)x_{18}(-\mu)$$

mit $\mu \in k$ beliebig. Wir wollen bestimmen, für welche Werte von μ die Elemente u_1 und u_2 konjugiert sind. Wir benutzen wieder die ganzzahlige Parametrisierung $\mathcal{G}$. Diesmal wollen wir für alle $w \in \mathbf{W}$ die Menge

$$C_w := \{t \in P_w \mid \mathcal{B}w\mathcal{B}(t)u_2(\mu) = u_1\mathcal{B}w\mathcal{B}(t)\}$$

untersuchen. Um zu zeigen, dass zwei Elemente konjugiert sind, reicht es, ein konjugierendes Element zu finden. Wir betrachten das Element $w = s_2s_1s_3$. Wir fassen nun μ als Unbestimmte über $\mathbb{Z}$ auf. Wie in Beispiel III.(5.3) erhalten wir dann ein polynomiales Gleichungssystem. Diesmal brauchen wir aber keine vollständige Lösung des Systems, sondern es genügt, eine Lösung zu finden. Wir berechnen wieder eine Gröbnerbasis B des zugehörigen Ideals und erhalten:

$$\begin{aligned} B \;=\; & \{\lambda_3^2\lambda_4^2 - \mu, \lambda_1 - \lambda_3, \lambda_2\lambda_3 - 1, \lambda_2u_{13}^2 - 2\lambda_2u_{21} + \lambda_3\lambda_4^2u_6^2 - \lambda_3\lambda_4^2u_6, \\ & \lambda_2u_{16} - \lambda_3\lambda_4^2u_2, \lambda_2u_{18} + \lambda_3\lambda_4^2u_6, \lambda_2u_{22} - \lambda_3\lambda_4^2u_2u_{11} - \lambda_3\lambda_4^2u_{14}, \\ & \lambda_2\mu - \lambda_3\lambda_4^2, u_2u_{13}^2 - 2u_2u_{21} + u_6^2u_{16} - u_6u_{16}, u_2u_{18} + u_6u_{16}, u_2\mu - u_{16}, \\ & u_6u_{18} - u_{13}^2 - u_{18} + 2u_{21}, u_6\mu + u_{18}, u_{11}u_{16} + u_{14}\mu - u_{22}, u_{12} - u_{13}, \\ & u_{13}^2\mu + u_{18}^2 + u_{18}\mu - 2u_{21}\mu\}. \end{aligned}$$

Die Basis B enthält insbesondere das Element $\lambda_3^2\lambda_4^2 - \mu$. Daran sehen wir, dass das zugehörige Gleichungssystem über $\mathbb{F}_q$ keine Lösung hat, wenn μ kein Quadrat in $\mathbb{F}_q$ ist. Außerdem sehen wir, dass das Gleichungssystem auch für $\mu = 0$ keine Lösung hat, da $\lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{F}_q^*$ sein müssen. Ist $0 \neq \mu$ ein Quadrat in $\mathbb{F}_q$, so finden wir sehr schnell eine Lösung des Systems. Also sind alle $u_2(\mu)$ mit $\mu \in \mathbb{F}_q^{*2}$ konjugiert zu u_1. Insbesondere sind sie auch untereinander alle konjugiert. Für $\mu \notin \mathbb{F}_q^{*2}$ müssen wir die anderen Doppelnebenklassen auch untersuchen und stellen fest, dass alle entsprechenden Gleichungssysteme über $\mathbb{F}_q$ keine Lösung haben. Somit ist $u_2(\mu)$ für alle $\mu \notin \mathbb{F}_q^{*2}$ nicht konjugiert zu u_1. Wir können leicht zeigen, dass $u_2(0)$ zu $x_{19}(1)x_{20}(1)$ konjugiert ist und somit nicht konjugiert ist zu u_1. Wir wollen nun zeigen, dass die Elemente $u_2(\mu)$ für $\mu \notin \mathbb{F}_q^{*2}$ alle konjugiert sind. Es seien dazu μ_1 und μ_2 Unbestimmte über $\mathbb{Z}$. Wir betrachten die Menge

$$C_1 := \{t \in P_1 \mid \mathcal{B}(t)u_2(\mu_1) = u_2(\mu_2)\mathcal{B}(t)\}.$$

Wir erhalten wieder als Gröbnerbasis B:

$$\begin{aligned} B \;=\; & \{\mu_1 - \lambda_3^2\lambda_4^2\mu_2, \lambda_4^2u_2\mu_2 - \lambda_2^2u_{16}, \lambda_4^2u_6\mu_2 + \lambda_2^2u_{18}, -u_{13} + u_{12}, \\ & -2\lambda_4^2u_{21}\mu_2 + \lambda_4^2u_{18}\mu_2 + \lambda_4^2u_{13}^2\mu_2 + \lambda_2^2u_{18}^2, \lambda_4^2u_{14}\mu_2 - \lambda_2^2u_{22} + \lambda_2^2u_{11}u_{16}, \\ & -\lambda_3 + \lambda_1, \lambda_2\lambda_3 - 1, u_{14}u_{16} - u_2u_{22} + u_2u_{11}u_{16}, u_6^2u_{16} - u_6u_{16} - 2u_2u_{21} + u_2u_{13}^2, \\ & u_6u_{16} + u_2u_{18}, -u_{14}u_{18} - u_6u_{22} + u_6u_{11}u_{16}, 2u_{21} - u_{18} - u_{13}^2 + u_6u_{18}, \\ & 2u_{21}u_{22} - u_{18}u_{22} - u_{14}u_{18}^2 - u_{13}^2u_{22} - 2u_{11}u_{16}u_{21} + u_{11}u_{16}u_{18} + u_{11}u_{13}^2u_{16}\}. \end{aligned}$$

Sind nun $0 \neq \mu_1, \mu_2 \notin \mathbb{F}_q^{*2}$, so ist $\frac{\mu_1}{\mu_2} \in \mathbb{F}_q^{*2}$. Wir finden also Elemente $\lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{F}_q^*$, die Lösungen der Gleichung $\mu_1 - \lambda_3^2\lambda_4^2\mu_2$ sind. In diesem Fall finden wir schnell eine Lösung des Gleichungssystems. Also sind alle Elemente $u_2(\mu)$ mit $0 \neq \mu \notin \mathbb{F}_q^{*2}$ untereinander konjugiert.

(5.5) Beispiel (Vertretersuche)
Es sei

$$\mathbf{H} := \langle \mathbf{U}_i \mid i \in \{2, 3, 6, 9\} \rangle.$$

Dies ist das unipotente Radikal der standardparabolischen Untergruppe vom Typ B_2. Wir wollen mit dem in I.(8.3) beschriebenen Verfahren die unipotenten Konjugiertenklassen von $\mathbf{H}^{\mathbf{F}}$ bestimmen,wobei $2 \nmid \operatorname{char} k$ gelten soll. Wir definieren dazu die Untergruppen

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &:= \mathbf{H}, \\ \mathbf{H}_2 &:= \langle \mathbf{U}_i \mid i \in \{6, 9\} \rangle, \\ \mathbf{H}_3 &:= \langle \mathbf{U}_i \mid i \in \{9\} \rangle, \\ \mathbf{H}_4 &:= \langle \emptyset \rangle. \end{aligned}$$

Wegen der Kommutatorrelationen I.(2.1) ist

$$\mathbf{H}_4 \leqslant \mathbf{H}_3 \leqslant \mathbf{H}_2 \leqslant \mathbf{H}_1$$

eine Zentralreihe von $\mathbf{H}$. Die Gruppe $\mathbf{H}_1/\mathbf{H}_2$ ist abelsch, daher ist die Menge

$$\{x_2(\mu_1)x_3(\mu_2)\mathbf{H}_2 \mid \mu_1, \mu_2 \in k\}$$

ein Vertretersystem ihrer Konjugiertenklassen. Wir betrachten jetzt die folgenden vier Fälle und wenden den Algorithmus I.(8.3) an.

(i) $\mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0$. Wir suchen ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen in der Menge $x_2(\mu_1)x_3(\mu_2)\mathbf{H}_2$ für feste $\mu_1, \mu_2 \neq 0$. Für den Zentralisator von $x_2(\mu_1)x_3(\mu_2)\mathbf{H}_2$ in $\mathbf{H}_1/\mathbf{H}_2$ erhalten wir

$$C_{\mathbf{H}_1/\mathbf{H}_2}(x_2(\mu_1)x_3(\mu_2)\mathbf{H}_2) = \mathbf{H}_1/\mathbf{H}_2,$$

da $\mathbf{H}_1/\mathbf{H}_2$ abelsch ist. Das volle Urbild C von $C_{\mathbf{H}_1/\mathbf{H}_2}(x_2(u_2)x_3(u_3))\mathbf{H}_2)$ in $\mathbf{H}_1/\mathbf{H}_3$ ist dann

$$C = \mathbf{H}_1/\mathbf{H}_3 = \{x_2(u_2)x_3(u_3)x_6(u_6)\mathbf{H}_3 \mid u_2, u_3, u_6 \in k\}.$$

Wir erhalten durch Berechnung des Kommutators

$$[x_2(\mu_1)x_3(\mu_2)\mathbf{H}_3, C] = \{x_6(-u_2\mu_1 + u_3\mu_2)\mathbf{H}_3 \mid u_2, u_3 \in k\} = \mathbf{H}_2/\mathbf{H}_3.$$

Damit ist die Menge

$$\left\{x_2(\mu_1)x_3(\mu_2)\mathbf{H}_3 \mid \mu_1, \mu_2 \in k^*\right\}$$

ein Vertretersystem der $\mathbf{H}_1/\mathbf{H}_3$-Konjugiertenklassen in der Menge $x_2(\mu_1)x_3(\mu_2)\mathbf{H}_3$. Im nächsten Schritt erhalten wir genauso, dass die Menge

$$\left\{x_2(\mu_1)x_3(\mu_2) \mid \mu_1, \mu_2 \in k^*\right\}$$

ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen von $x_2(\mu_1)x_3(\mu_2)\mathbf{H}_2$ in ganz $\mathbf{H}$ bildet.

(ii) $\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0$. In diesem Fall erhalten wir genauso wie im ersten Fall, dass die Menge

$$\{x_3(\mu_2) \mid \mu_2 \in k^*\}$$

ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen von $x_3(\mu_2)\mathbf{H}_2$ in $\mathbf{H}$ bilden.

(iii) $\mu_1 \neq 0, \mu_2 = 0$. Im ersten Schritt erhalten wir wiederum, dass die Menge

$$\{x_2(\mu_1)\mathbf{H}_3 \mid \mu_1 \in k^*\}$$

ein Vertretersystem der $\mathbf{H}_1/\mathbf{H}_3$-Konjugiertenklassen in der Menge $x_2(\mu_1)\mathbf{H}_2$ bildet. Sei C das volle Urbild des Zentralisators $C_{\mathbf{H}_1/\mathbf{H}_3}(x_2(u_2)\mathbf{H}_3)$. Dann erhalten wir für den Kommutator

$$[x_2(u_2), C] = 1.$$

Somit ist die Menge

$$\{x_2(\mu_1)x_9(\mu_3) \mid \mu_1 \in k^*, \mu_3 \in k\}$$

ein Vertretersystem der $\mathbf{H}$-Konjugiertenklassen der Menge $x_2(\mu_1)\mathbf{H}_2$.

(iv) $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Hier müssen wir noch die Konjugiertenklassen in $\mathbf{H}$ von $\mathbf{H}_2$ berechnen. Wir erhalten, dass die Menge

$$\{x_6(\mu_4), x_9(\mu_5) \mid \mu_4, \mu_5 \in k\}$$

ein Vertretersystem für diese Menge ist.

Wir haben somit ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen von $\mathbf{H}$ bestimmt. Wir wollen jetzt noch ein Vertretersystem der unipotenten Konjugiertenklassen von $\mathbf{T} \ltimes \mathbf{H}$ angeben. Dies ist die Boreluntergruppe der Standardleviuntergruppe vom Typ B_2. Dazu müssen wir nur die Bahnen von $\mathbf{T}$ per Konjugation auf den berechneten Vertretern ausrechnen. Wir wollen das im Fall $x_2(\mu_1)x_9(\mu_3)$ vorführen. Wir benutzen die ganzzahlige Parametrisierung aus I.(6.9)(v). Wir erhalten

$$\mathcal{T}^{-1}x_2(\mu_1)x_9(\mu_3)\mathcal{T} = x_2(\lambda_2^{-1}\mu_1)x_9(\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-2}\mu_3).$$

Wählen wir $\lambda_2 = \mu_1$, so sehen wir, dass $x_2(\mu_1)x_9(\mu_3)$ konjugiert ist zu allen Elementen der Form $x_2(1)x_9(\lambda_3^{-2}\mu_1\mu_3)$. Diese sind genau dann zu $x_2(1)x_9(1)$ konjugiert, wenn $\mu_1\mu_3$ ein Quadrat ist. Ist η ein Nicht-Quadrat aus dem Körper, so erhalten wir also zwei Bahnen mit Vertretern $x_2(1)x_9(1)$ und $x_2(1)x_9(\eta)$. Sind alle Elemente des Körpers Quadrate, so gibt es nur eine Bahn. Dies ist in Charakteristik 2 der Fall. Insgesamt erhalten wir die Menge

$$\{x_2(1)x_3(1), x_3(1), x_2(1), x_2(1)x_9(1), x_2(1)x_9(\eta), x_6(1), x_9(1), 1\}$$

als Vertretersystem der unipotenten Klassen von $\mathbf{T} \ltimes \mathbf{H}$, wenn der Körper ein Nichtquadrat η enthält. Dies ist zum Beispiel für alle endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ mit q ungerade der Fall.

(5.6) Bemerkung

(i) Mit den hier vorgestellten Methoden haben wir alle Vertreter für unipotente Klassen in allen vorkommenden Gruppen bestimmt. Dies sind nicht nur die Gruppe $F_4(q)$ und ihre Standardlevigruppen und standardparabolischen Untergruppen, sondern auch alle Zentralisatoren halbeinfacher Elemente. Vergleiche dazu III.6. Teilweise waren die Konjugiertenklassen in der Literatur schon bestimmt, aber keine Vertreter angegeben. Eine zusätzliche Schwierigkeit, die Daten der Literatur zu verwenden, ist, dass die Vertreter in erheblichem Maße von der Wahl der Isomorphismen x_α, sprich von der Wahl der Koeffizienten in der Kommutatorformel I.(2.1), abhängen. Es wäre hier wünschenswert, wenn man die Vertreter bezüglich verschiedener Wahlen umrechnen könnte. Dies ist aber bisher nicht bekannt.

(ii) Teilweise sind die notwendigen Rechnungen sehr aufwendig. Außerdem lassen sich einige Schritte der Verfahren bisher nicht vollständig automatisieren. Dazu gehören zum Beispiel die Bestimmung der Bahnen des Torus auf den unipotenten Klassenvertretern, aber auch das Lösen der auftretenden Gleichungssysteme. Gröbnerbasen helfen hier, können aber nicht alle Probleme beseitigen. Dabei ist teilweise leider viel Handarbeit notwendig. Es wären Verfahren wünschenswert, die die Anzahl der Lösungen über $\mathbb{F}_q$ polynomialer Gleichungssysteme vollständig automatisch berechnen. Mehr als Abschätzungen sind hier allerdings bisher nicht bekannt. Dieses Problem erweist sich als sehr schwer.

III.6 Gemischte Klassen

Wir haben in III.4 die halbeinfachen Konjugiertenklassen einer parabolischen Untergruppe untersucht und eine geeignete Parametrisierung dieser Klassen angegeben. Mit den Methoden aus III.5 können wir die unipotenten Konjugiertenklassen bestimmen. Wir wollen jetzt eine geeignete Parametrisierung aller Konjugiertenklassen beschreiben. Dabei verallgemeinern wir die in [GHL$^+$96] benutzte Parametrisierung auf den Fall parabolischer Gruppen. Wir wollen hier etwas genauer auf diese Parametrisierung eingehen, da dies für die Beschreibung der Fusionen in Abschnitt III.7 wichtig ist. Wir könnten analog zu den halbeinfachen Klassen versuchen, den Begriff des Klassentyps durch eine geeignete Äquivalenzrelation auf der Menge der Konjugiertenklassen zu definieren. Dies ist nicht zweckmäßig, vergleiche dazu zum Beispiel [Lüb93, Seite 46f.]. Wir wollen vielmehr die Jordan-Zerlegung der Elemente I.(1.8) und die Parametrisierung der halbeinfachen Elemente benutzen, um den Begriff des Klassentyps zu definieren.

Jedes $g \in \mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ besitzt eine eindeutige Jordan-Zerlegung $g = su = us$ mit $s \in \mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ halbeinfach und $u \in \mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ unipotent. Wir können alle Konjugiertenklassen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$, die einen Repräsentanten mit halbeinfachem Anteil s haben, bestimmen, indem wir Vertreter der unipotenten Konjugiertenklassen von $C_{\mathbf{P}^{\mathbf{F}}}(s)$ berechnen. Die entsprechenden Vertreter der Konjugiertenklassen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ ergeben sich durch Multiplikation mit s. Vergleiche dazu [Lüb93, Seite 46]. Wir können daher die Parametrisierung der halbeinfachen Konjugiertenklassen aus III.4 benutzen, um alle Konjugiertenklassen zu parametrisieren. Ist nämlich der halbeinfache Anteil s in dem halbeinfachen Klassentyp, der durch das Paar (Π, w) beschrieben wird, so gibt es nach Korollar III.(4.11) ein

$b \in \mathbf{P}$ mit $t := s^b \in h(\Pi, w, \mathbf{P}^\mathbf{F})$. Dann ist $g^b = s^b u^b = tu^b$ und $u^b \in C_\mathbf{P}(t)^{\mathbf{F}w^{-1}}$. Ist umgekehrt $t \in h(\Pi, w, \mathbf{P}^\mathbf{F})$ und $u \in C_\mathbf{P}(t)^{\mathbf{F}w^{-1}}$ ein unipotentes Element, so gibt es ein $b \in \mathbf{P}$ mit ${}^b(tu) \in \mathbf{P}^\mathbf{F}$. Wir können also die Konjugiertenklassen von $\mathbf{P}^\mathbf{F}$ durch solche Paare (t, u) parametrisieren. Sind u und u' in $C_\mathbf{P}(t)^{\mathbf{F}w^{-1}}$ konjugiert, so ergibt sich für die Paare (t, u) und (t, u') die gleiche Konjugiertenklasse von $\mathbf{P}^\mathbf{F}$. Wir erhalten also eine Parametrisierung der Konjugiertenklassen durch Paare der Form (t, c), wobei $t \in h(\Pi, w, \mathbf{P}^\mathbf{F})$ und c eine unipotente Konjugiertenklasse von $C_\mathbf{P}(t)^{\mathbf{F}w^{-1}}$ ist. Wie im Fall der halbeinfachen Konjugiertenklassen wollen wir nun eine Äquivalenzrelation definieren, die uns die generische Beschreibung der Konjugiertenklassen ermöglicht. Diese Relation definieren wir jedoch nicht auf der Menge der Konjugiertenklassen, sondern auf der Menge der Paar (t, c), die solche Konjugiertenklassen parametrisieren.

(6.1) Definition (Klassentypen von $\mathbf{P}^\mathbf{F}$)
Es sei $\{h(\Pi_i, w_i, \mathbf{P}^\mathbf{F})\}_{i \in I}$ ein Vertretersystem der halbeinfachen Klassentypen von $\mathbf{P}^\mathbf{F}$. Wir definieren die folgende Menge von Parametern:

$$\{(t, c) \mid t \in h(\Pi_i, w_i, \mathbf{P}^\mathbf{F}) \text{ für ein } i \in I \text{ und } c \text{ eine unipotente Klasse von } \mathbf{C}^{\mathbf{F}w_i^{-1}}_{\mathbb{Z}\Pi_i \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}}\}$$

Wir definieren $(t, c) \sim (t', c')$ genau dann, wenn es ein $i \in I$ gibt mit $t, t' \in h(\Pi_i, w_i, \mathbf{P}^\mathbf{F})$ und $c = c'$. Dadurch wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Parameter definiert. Die Äquivalenzklassen dieser Relation wollen wir **Klassentypen** von $\mathbf{P}^\mathbf{F}$ nennen. Ist $t \in h(\Pi_i, w_i, \mathbf{P}^\mathbf{F})$ und u ein Repräsentant der Konjugiertenklasse c, so wollen wir den Klassentyp von (t, c) mit $h(\Pi_i, w_i, u, \mathbf{P}^\mathbf{F})$ bezeichnen. Wir schreiben dann auch (t, u) für das Paar (t, c). Wir definieren weiterhin

$$c(\Pi, w, u, \mathbf{P}^\mathbf{F}) := |C_\mathbf{P}(tu)^{\mathbf{F}w^{-1}}|.$$

(6.2) Bemerkung

(i) Nach Korollar III.(4.11) gilt für $t \in h(\Pi_i, w_i, \mathbf{P}^\mathbf{F})$ gerade $C_\mathbf{P}(t)^{\mathbf{F}w_i^{-1}} = \mathbf{C}^{\mathbf{F}w_i^{-1}}_{\mathbb{Z}\Pi_i \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}}$.

(ii) Die Klassentypen $h(\Pi_i, w_i, u, \mathbf{P}^\mathbf{F})$ hängen von der Wahl der Vertreter (Π_i, w_i) der halbeinfachen Klassentypen, aber nicht von der Wahl des Vertreters u der unipotenten Klasse ab.

(iii) Durch die Parametrisierung der halbeinfachen Klassentypen erhalten wir eine Parametrisierung der Klassentypen. Vergleiche dazu auch die Bemerkungen und das Beispiel am Ende von Abschnitt 4 in [Lüb93].

(iv) Die Anzahl $c(\Pi, w, u, \mathbf{P}^\mathbf{F})$ ist wie im Falle halbeinfacher Klassentypen wohldefiniert.

(v) Für jedes $i \in I$ sei $p_i \in \mathbf{P}$ ein fest gewähltes Element mit $\pi(p_i^{-1}\mathbf{F}(p_i)) = w_i$. Ist dann $(t, c) \in h(\Pi_i, w_i, u, \mathbf{P}^\mathbf{F})$, so ist ${}^{p_i}(tu) \in \mathbf{P}^\mathbf{F}$. Auf diese Weise erhalten wir eine surjektive Abbildung von der Menge der Parameter (t, c) in die Konjugiertenklassen von $\mathbf{P}^\mathbf{F}$. Diese Zuordnung hängt explizit von der Wahl der p_i ab.

(vi) Zwei nicht äquivalente Paare (t, c) und (t', c') können durchaus gemäß (v) die gleiche Konjugiertenklasse von $\mathbf{P}^\mathbf{F}$ beschreiben. Dann gibt es ein $w \in \mathbf{W}_J$ mit $t^w = t'$

und $C_{\mathbf{P}}(t)^w = C_{\mathbf{P}}(t')$ und $c^w = c'$. Also ist das Paar (t', c') bezüglich der in Definition III.(6.1) gegebenen Äquivalenzrelation äquivalent zum Paar (t, c^w). Ist nun $c^w = c$, so liegen (t, c) und (t', c') im gleichen Klassentyp, ist dies nicht der Fall, so liegen diese beiden Paare in verschiedenen Klassentypen, obwohl sie die gleiche Konjugiertenklasse beschreiben. Hierbei ist zu beachten, dass c eine Konjugiertenklasse von $C_{\mathbf{P}}(t)^{\mathbf{F}w^{-1}}$ ist, aber $w \in \mathbf{W}_J$ durchaus nicht-trivial auf diesen Konjugiertenklassen operieren kann. Dieses Phänomen ist der Grund, wieso wir die Klassentypen auf der Menge der Parameter und nicht auf der Menge der Konjugiertenklassen definieren. Vergleiche dazu die Ausführungen in [Lüb93] und [GHL+96, 4.5].

(vii) Im Sinne von (vi) können wir die halbeinfachen Klassentypen als Klassentypen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ auffassen, da $1^w = 1$ ist und somit alle Paare, die die gleiche halbeinfache Klasse beschreiben, im gleichen Klassentyp liegen.

(viii) Durchlaufen wir alle Parameter (t, c) mit $t \in h(\Pi_i, w_i, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$, so haben wir alle Konjugiertenklassen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$, die Vertreter mit halbeinfachen Anteil aus dem durch (Π_i, w_i) beschriebenen halbeinfachen Klassentyp haben, genau $\left|n(\Pi_i, w_i, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})\right|$ mal durchlaufen.

Nach Korollar III.(4.11) sind die Zentralisatoren der halbeinfachen Elemente bekannt. Wir können wie in III.5 beschrieben Vertreter für die unipotenten Klassen dieser Zentralisatoren bestimmen und erhalten auf diese Weise eine vollständige Parametrisierung der Konjugiertenklassen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$.

In Anhang A.9 geben wir die vollständige Liste der Vertreter der Konjugiertenklassen von $F_4(q)$ in guter Charakteristik an. Jede Zeile entspricht dabei einem Klassentyp. Wir geben den zugehörigen halbeinfachen Klassentyp gemäß der Parametrisierung und der Bezeichnung der halbeinfachen Klassentypen in Anhang A.7 an. Wir bezeichnen die Klassentypen mit $c_{i,j}$, falls der halbeinfache Anteil zum halbeinfachen Klassentyp h_i gehört. Mit dem zweiten Index nummerieren wir die unipotenten Konjugiertenklassen des Zentralisators durch. Dabei bezeichnet $c_{i,1}$ für alle i den halbeinfachen Klassentyp des Typs h_i.

III.7 Fusionen und Induktion

Wir behalten die Notation aus Abschnitt III.4 bei. Insbesondere ist $\mathbf{P} = \mathbf{P}_J$ eine standardparabolische Untergruppe für eine Teilmenge $J \subseteq \Pi$ mit Standardleviuntergruppe $\mathbf{L}$. Das Wurzelsystem von $\mathbf{L}$ ist Φ_J. Wir wollen im weiteren Verlauf der Arbeit die Harish-Chandra-Induktion von Klassenfunktionen einer zerfallenden Leviuntergruppe $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$ in die ganze Gruppe $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ bestimmen.

(7.1) Definition/Bemerkung (Harish-Chandra-Induktion, vgl. [Gec98, 7.2])
Es sei $\mathbf{L}$ eine maximal zerfallende reguläre Untergruppe von $\mathbf{G}$, die in der parabolischen Untergruppe $\mathbf{P}$ liegt. Weiter sei $\mathbf{U}$ das zugehörige unipotente Radikal. Für eine Klassenfunktion f von $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$ bezeichnen wir die Inflation von f zu einer Klassenfunktion von $\mathbf{P}$ mit $\widetilde{f}$. Die Klassenfunktion

$$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subseteq\mathbf{P}}(f) := \mathrm{Ind}^{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}}_{\mathbf{P}^{\mathbf{F}}}(\widetilde{f})$$

heißt die **Harish-Chandra-Induktion** von f bezüglich $\mathbf{L}$. Dabei bezeichnet $\mathrm{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F}(\widetilde{f})$ die nach $\mathbf{G}^F$ induzierte Klassenfunktion. Diese Definition ist unabhängig von der $\mathbf{F}$-stabilen parabolischen Untergruppe, sondern hängt nur von $\mathbf{L}$ ab. Wir schreiben daher auch $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(f)$ für $R_{\mathbf{L}\subseteq\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(f)$. Vergleiche dazu [DD93].

Zur Berechnung der Harish-Chandra-Induktion benötigen wir einerseits Information über die Fusionen der Konjugiertenklassen von $\mathbf{L}^F$ in die Konjugiertenklassen von $\mathbf{P}^F$, um den Lift der Klassenfunktion von $\mathbf{L}^F$ nach $\mathbf{P}^F$ zu berechnen. Andererseits benötigen wir die Fusionen der Konjugiertenklassen von $\mathbf{P}^F$ in $\mathbf{G}^F$, um den Lift nach $\mathbf{G}^F$ zu induzieren. Wir werden dazu die folgende Induktionsformel benutzen:

(7.2) Satz (Induktionsformel, vgl. [Isa76, Seite 64])
Es sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Es seien weiterhin f eine Klassenfunktion von H und $g \in G$ und $h_1, \ldots, h_s$ Vertreter für die Konjugiertenklassen von H, die in der G-Konjugiertenklasse von g enthalten sind, dann gilt für den Wert des induzierten Charakters $\mathrm{Ind}_H^G(f)$ an der Stelle g:

$$\mathrm{Ind}_H^G(f)(g) = |C_G(g)| \sum_{i=1}^{s} \frac{f(h_i)}{|C_H(h_i)|}.$$

Beweis: Dies folgt sofort aus der Definition der induzierten Klassenfunktionen. Vergleiche dazu [Isa76, Seite 64]. □

Wir wollen in diesem Abschnitt beschreiben, wie die benötigten Fusionen berechnet werden können. Da die Parametrisierung der Konjugiertenklassen gemäß III.(6.2)(v) von gewissen Wahlen abhängt, die insbesondere nicht generisch, das heißt unabhängig von q, sind, wollen wir die Fusionen auf der Menge der Parameter gemäß Definition III.(6.1) beschreiben. Auch die Klassenfunktionen werden wir als Funktionen auf der Menge der Parameter angeben. Insbesondere sind die Werte einer solchen Klassenfunktion auf den Parametern, die die gleiche Konjugiertenklasse beschreiben, konstant.

Um den Wert eines induzierten Charakters auf einem Gruppenelement $g \in \mathbf{G}^F$ zu berechnen, müssen wir alle Elemente $b \in \mathbf{P}^F$ bestimmen, die zu g in $\mathbf{G}^F$ konjugiert sind. Diese Elemente können wir mit Hilfe der Fusionsabbildung einfach bestimmen. Da wir die Elemente von $\mathbf{G}^F$ und $\mathbf{P}^F$ über die Klassentypen parametrisieren, wollen wir auch die Fusionsabbildung auf den Klassentypen betrachten. Allerdings induziert die Fusionsabbildung im Gegensatz zu den halbeinfachen Klassentypen keine Abbildung auf der Menge der Klassentypen. Wir wollen daher die Fusionsabbildung zunächst auf den halbeinfachen Konjugiertenklassen betrachten, da die halbeinfachen Klassentypen Vereinigungen von Konjugiertenklassen sind, die Fusionsabbildung eine wohldefinierte Abbildung auf den halbeinfachen Klassentypen induziert und die Parametrisierung der Konjugiertenklassen insgesamt durch die Parametrisierung der halbeinfachen Konjugiertenklassen gegeben ist. Es gilt:

(7.3) Lemma
Es seien Ψ eine $\mathbf{F}$-invariante abgeschlossene Teilmenge von Φ mit Fundamentalsystem $\Pi \subseteq \Phi_{\mathbf{P}_J}$ und $w \in \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Psi)$. Es sei $t \in h(\Pi, w, \mathbf{P}^F)$.

(i) Es gilt $t \in h(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})$.

(ii) Die Gruppe $n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ ist eine Untergruppe von $n(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})$.

(iii) Es ist $w \in \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Pi \cap \Phi_J)$ und es gilt $t \in h(\Pi \cap \Phi_J, w, \mathbf{L}^{\mathbf{F}})$.

Beweis: Die Teile (i) und (ii) folgen sofort aus Lemma III.(4.12) und Lemma III.(4.16). Da Π ein Fundamentalsystem von Ψ ist, so ist $\Pi \cap \Phi_J$ ein Fundamentalsystem des Teilwurzelsystems $\Psi \cap \Phi_J \subseteq \Phi_J$. Da Ψ invariant unter $\mathbf{F}$ ist, so ist auch $\Psi \cap \Phi_J$ invariant unter $\mathbf{F}$. Da $w \in \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Pi)$ ist, gilt für ein $\alpha \in \Pi \cap \Phi_J$ sowohl $\alpha w \in \Pi$ als auch $\alpha w \in \Phi_J$. Also ist $w \in \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Pi \cap \Phi_J)$. Somit ist $h(\Pi \cap \Phi_J, w, \mathbf{L}^{\mathbf{F}})$ wohldefiniert und t erfüllt die Bedingungen aus Lemma III.(4.12) für das Paar $(\Pi \cap \Phi_J, w)$. Daraus folgt (iii). □

(7.4) Korollar (Fusion halbeinfacher Klassentypen)

(i) Die Fusionsabbildung von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ nach $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ induziert eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{CT}_s{}^{\mathbf{P}^{\mathbf{F}}} & \longmapsto & \mathsf{CT}_s{}^{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}} \\ h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}}) & \mapsto & h(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}}) \end{array}$$

von der Menge der halbeinfachen Klassentypen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ in die Menge der halbeinfachen Klassentypen von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$.

(ii) Ein Vertretersystem der halbeinfachen Konjugiertenklassen von $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$ ist auch ein Vertretersystem der halbeinfachen Konjugiertenklassen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$. Die Fusionsabbildung von $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$ nach $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ induziert eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{CT}_s{}^{\mathbf{P}^{\mathbf{F}}} & \longmapsto & \mathsf{CT}_s^{\mathbf{L}^{\mathbf{F}}} \\ h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}}) & \mapsto & h(\Pi \cap \Phi_J, w, \mathbf{L}^{\mathbf{F}}) \end{array}$$

von der Menge der halbeinfachen Klassentypen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ in die Menge der halbeinfachen Klassentypen von $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$.

Beweis: Dies folgt sofort aus Lemma III.(7.3) und der Tatsache, dass die halbeinfachen Klassentypen Vereinigungen von Konjugiertenklassen sind. Zu zeigen bleibt nur der erste Teil von Teil (ii). Es sei $t \in h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$. Nach Lemma III.(3.8) und Lemma III.(1.3) ist jedes halbeinfache Element von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ in $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ konjugiert zu einem halbeinfachen Element von $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$. Sind zwei Elemente $x, y \in \mathbf{L}^{\mathbf{F}}$ konjugiert in $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$, so sind sie auch konjugiert in $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$, da man $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$ als Faktorgruppe von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ auffassen kann. Daher ist ein Vertretersystem der halbeinfachen Konjugiertenklassen von $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$ auch ein Vertretersystem der halbeinfachen Konjugiertenklassen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$. □

(7.5) Bemerkung

(i) Mit Lemma III.(7.3) und Korollar III.(7.4) können wir die Fusionen der halbeinfachen Konjugiertenklassen vollständig beschreiben. Eine Konjugiertenklasse im halbeinfachen Klassentyp $h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ wird durch $\left|n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})\right|$ Parameter beschrieben, die entsprechende Konjugiertenklasse von $h(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})$ durch $\left|n(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})\right|$ verschiedene Parameter. Da

$$h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}}) = h(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})$$

gilt, bedeutet dies, dass immer $[n(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}}) : n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})]$ halbeinfache Konjugiertenklassen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ zu einer halbeinfachen Konjugiertenklasse von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ fusionieren. Wir müssen daher für die Fusion der halbeinfachen Konjugiertenklassen nur die in Korollar III.(7.4)(i) beschriebene Abbildung auf den Klassentypen angeben. Mit Hilfe von Bemerkung III.(4.14)(i) können wir dann die genaue Fusion der Parameter berechnen, falls ein anderer Parameter (Π', w') des halbeinfachen Klassentyps $h(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})$ gewählt wurde.

(ii) Die Parametrisierung der halbeinfachen Klassentypen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ liefert nach III.(7.4)(ii) auch eine Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$. Dies entspricht aber **nicht** der Parametrisierung durch die halbeinfachen Klassentypen von $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$. Diese Einteilung der halbeinfachen Konjugiertenklassen ist feiner als die durch die Klassentypen. Wenn die genaue Fusionsabbildung der halbeinfachen Klassen von $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$ nach $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ benötigt wird, kann es unter Umständen Sinn ergeben, diese feinere Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$ für die halbeinfachen Klassen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ zu verwenden, da die Fusionsabbildung in diesem Fall trivial wird. Falls die generische Charaktertafel von $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$ bekannt ist, kann man diese nicht direkt verwenden, sondern muss zunächst bestimmen, welche Äquivalenzklassen bezüglich dieser feineren Parametrisierung in einen Klassentyp von $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$ zusammenfallen.

Damit können wir zu einer gegebenen Klassenfunktion von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ die Werte der induzierten Klassenfunktion von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ auf den halbeinfachen Konjugiertenklassen berechnen. Außerdem können wir die Werte Harish-Chandra-induzierter Charaktere von $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$ auf halbeinfachen Konjugiertenklassen berechnen.

(7.6) Bemerkung (Induktionsformel für halbeinfache Konjugiertenklassen)

(i) In unseren Anwendungen wird f immer eine Klassenfunktion von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ sein, die konstant auf den Klassentypen ist. In diesem Fall ist auch die induzierte Klassenfunktion konstant auf den Klassentypen von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$. Die Werte von $f^{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}}$ auf den halbeinfachen Elementen können wir nun leicht berechnen, da dafür nur die Fusion der halbeinfachen Elemente benötigt wird. Es seien $h(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})$ ein halbeinfacher Klassentyp von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ und

$$h(\Pi_1, w_1, \mathbf{P}^{\mathbf{F}}), \ldots, h(\Pi_s, w_s, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$$

die halbeinfachen Klassentypen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$, deren Bild unter der in III.(7.3) beschriebenen Fusionsabbildung $h(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})$ ist. Wir schreiben $f(\Pi_i, w_i)$ für den Wert von f auf dem Klassentyp $h(\Pi_i, w_i, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$. Da immer $[n(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}}) : n(\Pi_i, w_i, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})]$ halbeinfache Konjugiertenklassen im Klassentyp $h(\Pi_i, w_i, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ zu einer halbeinfachen Konjugiertenklasse von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ fusionieren, ergibt die Induktionsformel III.(7.2) in diesem Fall

$$\mathrm{Ind}_{\mathbf{P}^{\mathbf{F}}}^{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}}(f)(\Pi, w) = c(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}}) \sum_{i=1}^{s} [n(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}}) : n(\Pi_i, w_i, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})] \frac{f(\Pi_i, w_i)}{c(\Pi_i, w_i, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})}.$$

Ist die Klassenfunktion f nicht konstant auf den Klassentypen, so wird diese Formel deutlich komplizierter, da wir dann zunächst die Fusion der Parameter in $h(\Pi_i, w_i, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$

nach $h(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})$, wie in III.(4.14)(i) beschrieben, berechnen müssen. Dies ist kein Problem, wir werden dies im Verlauf der Arbeit allerdings nicht benötigen.

(ii) Mit der Formel aus (i) können wir auch die Werte der Harish-Chandra-Induktion einer Klassenfunktion von $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$, die konstant auf den Klassentypen von $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$ ist, auf den halbeinfachen Klassen berechnen. Dazu müssen wir zunächst gemäß Bemerkung III.(7.5)(ii) die Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$ auf die feinere Parametrisierung von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ umrechnen. Der Lift der Klassenfunktion f von $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$ nach $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ ist dann auf den halbeinfachen Klassen trivial. Die Harish-Chandra-induzierte Klassenfunktion auf den halbeinfachen Konjugiertenklassen erhalten wir dann, indem wir diesen Lift mit der Formel in (i) nach $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ induzieren.

Im Folgenden wollen wir beschreiben, wie wir die Werte der induzierten Klassenfunktionen auf den gemischten Konjugiertenklassen bestimmen können. Dazu benötigen wir die Fusionsabbildung der gemischten Klassen bezüglich der durch die Klassentypen gegebenen Parametrisierung. Wir wollen uns bei der Darstellung auf Klassenfunktionen beschränken, die konstant auf den Klassentypen sind. Dies ist wie bei den halbeinfachen Konjugiertenklassen keine wesentliche Einschränkung. Die Formeln vereinfachen sich dadurch aber erheblich, da wir keine Umrechnung der Parameter auf andere Repräsentanten durchführen müssen. Vergleiche III.(7.5)(i).

Bei den nicht-halbeinfachen Klassentypen induziert die Fusionsabbildung keine Abbildung auf den Klassentypen, daher müssen wir etwas genauer untersuchen, wie sich die Fusion der Parameter, die die gleiche Konjugiertenklasse beschreiben, aber in verschiedenen Klassentypen liegen, verhält. Wir wollen hier zunächst einige Beispiele betrachten, die das typische Verhalten illustrieren.

(7.7) Beispiele

(i) Es gelte $3|q-1$, das heißt, dass $\mathbb{F}_q$ primitive dritte Einheitswurzeln enthält. Es sei $\zeta_3 \in \mathbb{F}_q$ eine solche primitive dritte Einheitswurzel. Wir betrachten die Chevalleygruppen $F_4(q)$, wie sie in II.2 definiert wurden. Weiterhin sei $\mathbf{P}$ die standardparabolische Untergruppe $\mathbf{P}_8$ vom Typ C_3. Vergleiche dazu Tabelle A.6. Es seien $\Pi := \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_{19}\}$ und $w := 1$. Außerdem definieren wir noch $t := \theta(1, 1, \zeta_3, 1) \in \mathbf{T}$ und das Weylgruppenelement $v := s_3s_2s_1s_3s_2s_3 \in \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Pi)$. Dann ist $t' := t^v = \theta(1, 1, \zeta_3^2, 1)$. Wir finden in $\mathbf{P}$ den halbeinfachen Klassentyp

$$h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}}) = \{t, t'\}.$$

Es gilt $\left|n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})\right| = 1$, daher liegen in $h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ genau zwei halbeinfache Konjugiertenklassen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$. Da $\left|n(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})\right| = 2$ ist, fusionieren diese beiden Konjugiertenklassen zu einer halbeinfachen Konjugiertenklasse von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$. Der Zentralisator der beiden halbeinfachen Konjugiertenklassen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ ist isomorph zu

$$C_{\mathbf{P}^{\mathbf{F}}} := C_{\mathbf{P}}(t)^{\mathbf{F}} = \mathbf{C}^{\mathbf{F}}_{\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_{19},\alpha_{21},\alpha_{26},\alpha_{28}\}}.$$

Der Zentralisator dieser Konjugiertenklasse in $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ ist

$$C_{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}} := C_{\mathbf{G}}(t)^{\mathbf{F}} = \mathbf{C}^{\mathbf{F}}_{\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_{19},\alpha_{21},\alpha_{25},\alpha_{26},\alpha_{28},\alpha_{29},\alpha_{43},\alpha_{45}\}}.$$

Es ist

$$C_{\mathbf{P}}(t^v) \neq C_{\mathbf{P}}(t)^v.$$

Dies ist möglich, da $v \notin \mathbf{P}$ ist. Es gilt aber

$$|C_{\mathbf{P}}(t^v)^{\mathbf{F}}| = |C_{\mathbf{P}}(t)^{\mathbf{F}}| = q^6(q^2-1)(q-1)^2.$$

Durch

$$u := x_1(1)x_2(1)x_4(1)x_{19}(\zeta_3), \quad u' := x_1(1)x_2(1)x_4(1)x_{19}(\zeta_3^2)$$

sind Vertreter zweier verschiedener unipotenter Konjugiertenklassen von $C_{\mathbf{P}^{\mathbf{F}}}$ gegeben. Wir erhalten also in $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ die beiden Klassentypen

$$h(\Pi, w, u, \mathbf{P}^{\mathbf{F}}) = \{(t, u), (t', u)\}$$

und

$$h(\Pi, w, u', \mathbf{P}^{\mathbf{F}}) = \{(t, u'), (t', u')\}.$$

Da $\left|n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})\right| = 1$ ist, beschreiben diese vier Paare vier Konjugiertenklassen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$. Nach Lemma III.(7.3) und der Definition III.(6.1) gilt

$$h(\Pi, w, u, \mathbf{G}^{\mathbf{F}}) = h(\Pi, w, u, \mathbf{P}^{\mathbf{F}}), \quad h(\Pi, w, u', \mathbf{G}^{\mathbf{F}}) = h(\Pi, w, u', \mathbf{P}^{\mathbf{F}}).$$

Da u und u' nicht in $C_{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}}$ konjugiert sind, sind $h(\Pi, w, u, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})$ und $h(\Pi, w, u', \mathbf{G}^{\mathbf{F}})$ verschiedene Klassentypen von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$. Nun ist $(tu)^v = t^v u^v = t'u^v$ und u^v ist in $C_{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}}(t')$ konjugiert zu u'. Daher beschreiben die Paare (t, u) und (t', u') die gleiche Konjugiertenklasse von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$, obwohl sie in verschiedenen Klassentypen liegen. Genauso beschreiben die Paare (t', u) und (t, u') die gleiche Konjugiertenklasse. Der Grund für dieses Phänomen ist, dass eine Konjugiertenklasse in $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ unter Umständen durch mehr Parameter beschrieben wird als in $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ und diese Parameter in anderen Klassentypen liegen können. Es gilt weiterhin

$$|C_{\mathbf{G}}(tu)^{\mathbf{F}}| = |C_{\mathbf{P}}(tu)^{\mathbf{F}}| = |C_{\mathbf{P}}(tu')^{\mathbf{F}}| = 3q^4.$$

Dieses Beispiel ist besonders einfach, da die betrachteten Konjugiertenklassen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ eindeutig parametrisiert sind. Außerdem sind die Zentralisatorordnungen der betrachteten Konjugiertenklassen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ gleich. Dies muss nicht so sein. Wir können die Fusion der Konjugiertenklassen des Klassentyps $h(\Pi, w, u, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ durch das Tupel

$$\Big(\ (h(\Pi, w, u, \mathbf{G}^{\mathbf{F}}), 1) \ , \ (h(\Pi, w, u', \mathbf{G}^{\mathbf{F}}), 1) \ \Big)$$

beschreiben. Dies ist so zu lesen, dass eine Konjugiertenklasse in $h(\Pi, w, u, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ in $\mathbf{G}$ einer Konjugiertenklasse entspricht, die durch einen Parameter in $h(\Pi, w, u, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})$ und durch einen Parameter in $h(\Pi, w, u', \mathbf{G}^{\mathbf{F}})$ beschrieben ist. Die Bedeutung der beiden Einsen erschließt sich erst nach dem nächsten Beispiel. Die Fusion der Konjugiertenklasse $h(\Pi, w, u', \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ beschreiben wir auf diese Weise durch das gleiche Tupel. Da wir nur Klassenfunktionen benötigen, die konstant auf den Klassentypen sind, reicht diese

Beschreibung der Fusion aus, um eine induzierte Klassenfunktion zu berechnen. Ist f eine Klassenfunktion von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$, so erhalten wir gemäß der Induktionsformel III.(7.2)

$$\mathrm{Ind}_{\mathbf{P}^{\mathbf{F}}}^{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}}(f)(tu) = |C_{\mathbf{G}}(tu)^{\mathbf{F}}| \left(\frac{f(tu)}{|C_{\mathbf{P}}(tu)^{\mathbf{F}}|} + \frac{f(tu')}{|C_{\mathbf{P}}(tu')^{\mathbf{F}}|} \right) + x = f(tu) + f(tu') + x.$$

Dabei bezeichnet x den Beitrag, der von Konjugiertenklassen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ herkommt, die nicht in den betrachteten Klassentypen liegen. Im folgenden Beispiel wollen wir den Fall betrachten, dass auch die Klassen in $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ nicht eindeutig parametrisiert sind. Außerdem werden die Zentralisatorordnungen verschieden sein.

(ii) Es gelte $4|q-1$, das heißt, dass $\mathbb{F}_q$ primitive vierte Einheitswurzeln enthält. Es sei $\zeta_4 \in \mathbb{F}_q$ eine solche primitive vierte Einheitswurzel. Wir betrachten wieder die Chevalleygruppen $F_4(q)$, wie sie in II.2 definiert wurden, und die standardparabolische Untergruppe $\mathbf{P}_8$ vom Typ C_3. Vergleiche dazu Tabelle A.6. Es seien $\Pi := \{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_{24}\}$ und $w := 1$. Dann ist

$$h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}}) = \{ (-s^{-2}, 1, s, 1) \mid s \in \mathbb{F}_q^*, s \notin \{1, -1, \zeta_4, \zeta_4^2\} \}.$$

Es gilt $|h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})| = q - 5$. Wir definieren noch $w_1 := s_3 s_2 s_3 s_4 s_3 s_2 s_3 \in \mathbf{W}$ und $w_2 := s_1 w_1 s_3 s_1 s_3 \in \mathbf{W}$. Dann ist $w_1^2 = w_2^2 = 1$. Es gelten $n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}}) = \langle w_1 \rangle$ und $n(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}}) = \langle w_1, w_2 \rangle$ und $\left|n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})\right| = 2$ und $\left|n(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})\right| = 4$. Die Menge $\{1, w_2\}$ ist ein Nebenklassenvertretersystem von $n(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})/n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$. Also liegen $\frac{1}{2}(q-5)$ halbeinfache Konjugiertenklassen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ in $h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ und jeweils zwei von ihnen fusionieren unter der Operation des Nebenklassenvertreters w_2 zu einer Konjugiertenklasse von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$. Es sei $t \in h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$. Die Zentralisatoren aller Konjugiertenklassen in $h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ sind isomorph zu

$$C_{\mathbf{P}^{\mathbf{F}}} := C_{\mathbf{P}}(t)^{\mathbf{F}} = \mathbf{C}^{\mathbf{F}}_{\{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_{24}, \alpha_{26}, \alpha_{28}\}}.$$

Die Zentralisatoren dieser Konjugiertenklassen in $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ sind isomorph zu

$$C_{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}} := C_{\mathbf{G}}(t)^{\mathbf{F}} = \mathbf{C}^{\mathbf{F}}_{\{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_{24}, \alpha_{26}, \alpha_{28}, \alpha_{48}\}}.$$

Es gilt wie in Beispiel (i)

$$C_{\mathbf{P}}(t^{w_2}) \neq C_{\mathbf{P}}(t)^{w_2}.$$

aber

$$|C_{\mathbf{P}}(t^{w_2})^{\mathbf{F}}| = |C_{\mathbf{P}}(t)^{\mathbf{F}}| = q^3(q^2-1)^2(q-1)^2.$$

Durch

$$u := x_2(1), \quad u' := x_{24}(1)$$

sind Vertreter zweier verschiedener unipotenter Konjugiertenklassen von $C_{\mathbf{P}^{\mathbf{F}}}$ gegeben. Wir erhalten die beiden Klassentypen $h(\Pi, w, u, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ und $h(\Pi, w, u', \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$. Es gilt

$$|C_{\mathbf{P}}(tu)^{\mathbf{F}}| = q^3(q^2-1)(q-1)^2, \quad |C_{\mathbf{P}}(tu')^{\mathbf{F}}| = q^3(q^2-1)^2(q-1).$$

und

$$|C_{\mathbf{G}}(tu)^{\mathbf{F}}| = |C_{\mathbf{G}}(tu')^{\mathbf{F}}| = q^3(q^2-1)^2(q-1).$$

Die Zentralisatoren in $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ sind in diesem Fall also nicht nur nicht konjugiert, sondern haben sogar verschiedene Ordnung. In $C_{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}}$ ist u^{w_1} konjugiert zu u und u^{w_2} konjugiert zu u'. Die vier Paare

$$(t,u),\ (t^{w_1},u),\ (t^{w_2},u'),\ (t^{w_1w_2},u')$$

beschreiben daher jeweils die gleiche Konjugiertenklasse von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$. Die ersten beiden Paare und die letzten beiden Paare beschreiben dabei jeweils die gleiche Konjugiertenklasse von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$. Die ersten beiden Paare liegen im Klassentyp $h(\Pi, w, u, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$. Die beiden letzten Paare liegen im Klassentyp $h(\Pi, w, u', \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$. Entsprechend beschreiben die vier Paare

$$(t,u'),\ (t^{w_1},u'),\ (t^{w_2},u),\ (t^{w_1w_2},u)$$

eine andere Konjugiertenklasse von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$, wobei wieder die ersten beiden beziehungsweise die letzten beiden Paare jeweils eine Konjugiertenklasse von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ beschreiben. Ist f eine Klassenfunktion von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$, die konstant auf den Klassentypen ist, so erhalten wir in diesem Fall gemäß der Induktionsformel III.(7.2)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_{\mathbf{P}^{\mathbf{F}}}^{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}}(f)(tu) &= |C_{\mathbf{G}}(tu)^{\mathbf{F}}|\left(\tfrac{f(tu)}{|C_{\mathbf{P}}(tu)^{\mathbf{F}}|} + \tfrac{f(tu')}{|C_{\mathbf{P}}(tu')^{\mathbf{F}}|}\right) + x \\
&= q^3(q^2-1)^2(q-1)\left(\tfrac{f(tu)}{q^3(q^2-1)(q-1)^2} + \tfrac{f(tu')}{q^3(q^2-1)^2(q-1)}\right) + x \\
&= (q+1)f(tu) + f(tu') + x
\end{aligned}$$

Wieder steht x für den Beitrag der Konjugiertenklassen aus anderen Klassentypen. Dabei wurde wesentlich benutzt, dass f konstant auf den Klassentypen ist, da dann zum Beispiel $f(tu) = f(t^{w_1}u)$ ist. Wir können also die Fusion der Konjugiertenklassen des Klassentyps $h(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})\,u$ wieder durch das Tupel

$$\Big(\ (h(\Pi, w, u, \mathbf{G}^{\mathbf{F}}), 1)\ \ ,\ \ (h(\Pi, w, u', \mathbf{G}^{\mathbf{F}}), 1)\ \Big)$$

beschreiben. Es genügt, die Nebenklassen von $n(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})/n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ zu betrachten, da das Verhalten der Parameter und die Ordnung der zugehörigen Zentralisatoren innerhalb einer solchen Nebenklasse identisch sind. Wir geben die Klassentypen zusammen mit der Anzahl der Nebenklassen an, die eine Konjugiertenklasse von $h(\Pi, w, u, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ in diesen Klassentyp von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ fusionieren. Die Summe dieser Anzahlen ergibt die Zahl der Nebenklassen, in unserem Fall gerade zwei.

Wir wollen nun beschreiben, wie wir die Fusionen der gemischten Klassen im Allgemeinen berechnen können, so dass wir eine Klassenfunktion f von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$, die als Funktion auf den Parametern gegeben ist, die die Konjugiertenklassen parametrisieren, in die Gruppe $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ induzieren können. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, dass f konstant auf den Klassentypen von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ ist. Dies vereinfacht die Formeln wesentlich. Es wäre aber nicht allzu schwierig, die Beschreibung

auf allgemeine Klassenfunktionen zu verallgemeinern. Da wir dies im Verlauf der Arbeit aber nicht benötigen, wollen wir dies hier nicht tun.

Wir betrachten dazu $(t, u) \in h(\Pi, w, u, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$. Die Parametrisierung der halbeinfachen Elemente ist nicht eindeutig, es gibt genau $\left|n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})\right|$ Parameter, die die gleiche Konjugiertenklasse von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ parametrisieren, und $\left|n(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})\right|$ Parameter, die die gleiche Konjugiertenklasse von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ parametrisieren. Wir können diese Parameter genauer angeben. Die Menge

$$\{(t^v, u^v) \mid v \in n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})\}$$

beschreibt genau die verschiedenen Parameter, die die gleiche Konjugiertenklasse von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ parametrisieren. Die Parametermenge

$$\{(t^v, u^v) \mid v \in n(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})\}$$

beschreibt genau die entsprechenden Parameter für die Konjugiertenklasse von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$. Diese Parameter liegen allerdings unter Umständen in verschiedenen Klassentypen. Das folgende Lemma zeigt, dass wir für die Parameter, die eine Konjugiertenklasse von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ beschreiben, nicht genau bestimmen müssen, in welchem Klassentyp sie liegen.

(7.8) Lemma
Es seien Ψ eine $\mathbf{F}$-invariante abgeschlossene Teilmenge von Φ mit Fundamentalsystem $\Pi \subseteq \Phi_{\mathbf{P}_J}$ und $w \in \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}_J}(\Pi)$. Es seien weiter $v \in n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ und $(t, u) \in h(\Pi, w, u, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$. Es gilt

(i) $f((tu)^v) = f(tu)$, auch wenn (t, u) und (t^v, u^v) in verschiedenen Klassentypen liegen.

(ii) $c(\Pi, w, u, \mathbf{P}^{\mathbf{F}}) = c(\Pi, w, u^v, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$.

(iii) Ist $v \in \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}}(\Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}) \cap n(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})$, so gilt $c(\Pi, w, u, \mathbf{P}^{\mathbf{F}}) = c(\Pi, w, u^v, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$.

Beweis: Teil (i) ist klar, da (t, u) und (t^v, u^v) die gleiche Konjugiertenklasse von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ beschreiben und f eine Klassenfunktion ist. Teil (ii) ist aus dem gleichen Grund auch klar. Wir wollen nun Teil (iii) beweisen. Nach Korollar III.(4.11) gilt $C_{\mathbf{P}}(tu) = \mathbf{C}_{\Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}}$ mit $(\Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J})v = \Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}$. Wegen der Jordanzerlegung I.(1.8) gilt $C_{\mathbf{P}}(tu) = C_{\mathbf{C}_{\Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}}}(u)$. Für ein $g \in C_{\mathbf{P}}(tu) \subseteq \mathbf{C}_{\Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}}$ gilt dann $g^v \in \mathbf{C}_{\Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}}$. Daher gilt $C_{\mathbf{P}}((tu)^v) = C_{\mathbf{P}}(tu)^v$ auch falls $v \notin \mathbf{P}$ ist. Wir müssen noch zeigen, dass die Konjugiertheit mit der Operation von $\mathbf{F}w^{-1}$ verträglich ist. Sei dazu also $g \in C_{\mathbf{P}}(tu)^{\mathbf{F}w^{-1}}$. Dann gilt $\mathbf{F}(g)^{w^{-1}} = g$ und

$$\left(g^v\right)^{\mathbf{F}w^{-1}} = \mathbf{F}(g)^{\mathbf{F}(v)w^{-1}} = \mathbf{F}(g)^{w^{-1}v} = g^v,$$

da $v \in C_{\mathbf{W},\mathbf{F}}(w)$ ist. Somit ist g^v auch invariant unter $\mathbf{F}w^{-1}$. Insgesamt erhalten wir so

$$C_{\mathbf{P}}((tu)^v)^{\mathbf{F}w^{-1}} = \left(C_{\mathbf{P}}(tu)^{\mathbf{F}w^{-1}}\right)^v,$$

woraus die Behauptung folgt, da das Paar (t, u^v) im gleichen Klassentyp wie (t^v, u^v) liegt. □

(7.9) Bemerkung (Induktionsformel)

(i) Das Lemma III.(7.8) zeigt, dass wir zur Beschreibung der Fusion zur Induktion von Klassenfunktionen nur ein Nebenklassenvertretersystem von $n(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})/n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ betrachten müssen. Eine solche Nebenklasse ist gerade die Menge der Parameter, die die gleiche Konjugiertenklasse von $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ beschreiben, unabhängig davon, ob diese Parameter alle zum gleichen Klassentyp gehören. Vergleiche dazu auch die Beispiele III.(7.7).

(ii) Um die Fusionsabbildung auf dem Klassentyp $h(\Pi, w, u, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ zu beschreiben, betrachten wir also ein Nebenklassenvertretersystem D von $n(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})/n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$. Wir bestimmen für alle $v \in D$, in welchem Klassentyp das Paar (t, u^v) liegt. Es seien

$$h(\Pi, w, u_1, \mathbf{P}^{\mathbf{F}}), \ldots, h(\Pi, w, u_s, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$$

die so auftretenden Klassentypen. Für alle i definieren wir n_i als die Anzahl der $v \in D$, für die das Paar $(t, u^v) \in h(\Pi, w, u_i, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ ist. Dann gilt insbesondere

$$\sum_{i=1}^{s} n_i = [n(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}}) : n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})].$$

Wir ordnen dem Klassentyp $h(\Pi, w, u, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ das Tupel

$$\Big((h(\Pi, w, u_1, \mathbf{G}^{\mathbf{F}}), n_1), \ldots, (h(\Pi, w, u_s, \mathbf{G}^{\mathbf{F}}), n_s)\Big)$$

zu. Der Beitrag der Konjugiertenklassen, die durch den Klassentyp $h(\Pi, w, u, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ beschrieben werden, zur Induktionsformel III.(7.2) ergibt sich dann als:

$$c(\Pi, w, u, \mathbf{G}^{\mathbf{F}}) \sum_{i=1}^{s} n_i \frac{f(\Pi, w, u_i, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})}{c(\Pi, w, u_i, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})}$$

Dabei ist nach Definition III.(6.1) immer $h(\Pi, w, u, \mathbf{G}^{\mathbf{F}}) = h(\Pi, w, u, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ als Mengen. Wir benutzen hier wesentlich, dass f konstant auf den Klassentypen ist. Vergleiche auch die Beispiele III.(7.7). Wir erhalten dann die Induktionsformel für beliebige Klassentypen, indem wir diese Beiträge für alle auftretenden Klassentypen aufsummieren.

(iii) Die Harish-Chandra-Induktion einer Klassenfunktion von $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$ lässt sich mit dieser Induktionsformel leicht berechnen, da, wie auch schon im Fall halbeinfacher Klassentypen, der Lift der Klassenfunktion von $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$ nach $\mathbf{P}^{\mathbf{F}}$ trivial ist. Vergleiche III.(7.6)(ii).

Im Abschnitt III.8 geben wir ein ausführliches Beispiel für die Harish-Chandra-Induktion von Klassenfunktionen einer zerfallenden Leviuntergruppe vom Typ C_3 nach $F_4(q)$. Diese induzierten Klassenfunktionen werden wir zur Konstruktion der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$ benötigen.

(7.10) Bemerkung

Die Aussage III.(7.8)(iii) könnten wir folgendermaßen bei der Auswertung der Induktionsformel III.(7.9) verwenden. Die Gruppe $\mathrm{Stab}_{\mathbf{W}}(\Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}) \cap n(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})$ ist in vielen Fällen echt

größer als $n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$ Wäre f, wie es in vielen betrachteten Beispielen der Fall ist, konstant auf den Parametern (t, u^v) für alle Elemente $v \in \mathrm{Stab}_{\mathbf{W}}(\Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}) \cap n(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})$, so genügte es zur Auswertung der Induktionsformel, die Nebenklassen von $n(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})$ nach der Untergruppe $\mathrm{Stab}_{\mathbf{W}}(\Psi \cap \Phi_{\mathbf{P}_J}) \cap n(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})$ zu betrachten. Dies verringert die Anzahl der zu betrachtenden Nebenklassen in der Induktionsformel dann erheblich. Es wäre wünschenswert, genaue Bedingungen anzugeben, wann wir uns auf die Nebenklassen nach dieser größeren Untergruppe beschränken könnten, da dies die Rechnungen erheblich vereinfachen würden.

III.8 Ein Beispiel

Wir wollen in diesem Abschnitt ein ausführliches Beispiel zur Harish-Chandra-Induktion von Klassenfunktionen, wie sie in Abschnitt III.7 beschrieben ist, geben. Es sei $12 \mid q - 1$. Wir betrachten die Gruppe $F_4(q)$, die standardparabolische Untergruppe P_8 vom Typ C_3 und die Leviuntergruppe L_8 vom Typ C_3, wie sie in III.(2.5) definiert wurden.

Die Levigruppe L_8 ist isomorph zu der konformen symplektischen Gruppe $CSp_6(q)$. Frank Lübeck hat die Charaktertafel dieser Gruppe in [Lüb93] berechnet. Ein wesentlicher Schritt dabei war die Bestimmung der sogenannten Senkrechtfunktionen. Zwei dieser Klassenfunktionen, die unipotenten Senkrechtfunktionen, die in [Lüb93, Tabelle 24] mit $f_1 := f_{1,1}(0)$ und $f_2 := f_{1,2}(0)$ bezeichnet sind, wollen wir in die Gruppe $F_4(q)$ Harish-Chandra-induzieren. Diese Induktion wird dadurch wesentlich vereinfacht, dass f_1 und f_2 konstant auf den Klassentypen von L_8 sind und nur auf wenigen Klassentypen Werte ungleich Null annehmen. Um die Werte von f_1 und f_2 anzugeben, benötigen wir die Parametrisierung der Konjugiertenklassen von L_8. In den Tabellen A.10 und A.11 sind die halbeinfachen Klassentypen beziehungsweise Vertreter der gemischten Klassentypen und die zugehörigen Zentralisatorordnungen von L_8 angegeben, auf denen f_1 und f_2 Werte ungleich Null annehmen. In den Tabellen A.14 und A.15 sind die entsprechenden halbeinfachen beziehungsweise gemischten Klassentypen von P_8 aufgelistet, die beim Lift von f_1 und f_2 nach P_8 eine Rolle spielen. Die Tabelle A.14 enthält die gemäß Korollar III.(7.4) und Bemerkung III.(7.5) benötigte Information über die Fusion dieser halbeinfachen Klassentypen nach L_8 beziehungsweise $F_4(q)$. Die Tabelle A.15 enthält die entsprechenden Informationen über die Fusionen, die gemäß Bemerkung III.(7.9) zur Induktion benötigt werden. Die Werte von f_i für $i = 1, 2$ auf diesen Klassentypen sind in Tabelle A.16 angegeben. Die nicht angegebenen Werte sind Null. Wir wollen nun mit Bemerkung III.(7.9) die Werte der Harish-Chandra-Induktion $\psi_i := R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_i)$ für $i = 1, 2$ bestimmen. Dazu müssen wir gemäß III.(7.1) den Lift von f_i nach P_8 bestimmen und diesen nach $F_4(q)$ induzieren.

Der letzten Spalte von Tabelle A.15 entnehmen wir, auf welchen Klassentypen von $F_4(q)$ die Klassenfunktionen ψ_1 und ψ_2 Werte ungleich Null annehmen. Wir betrachten beispielhaft den Klassentyp $c_{2,12}$. Wir entnehmen der Tabelle, dass nur der Klassentyp $p_{5,1}$ von P_8 in diesen Typ fusioniert. Genauer wird die Induktion von $p_{5,1}$ durch das Paar $(c_{2,12}, 1)$ beschrieben. Der Tabelle entnehmen wir auch, dass der Lift einer Klassenfunktion f von L_8 auf dem Klassentyp $p_{5,1}$ den Wert $f(l_{2,6})$ annimmt. Die benötigten Zentralisatorordnungen entnehmen wir den

Tabellen T.A.13 und T.A.30. Mit der Induktionsformel erhalten wir also für $i = 1, 2$:

$$\psi_i(c_{2,12}) = 2q^{10}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4\frac{f_i(l_{2,6})}{2q^9\phi_1^2\phi_2} = q\phi_2\phi_4 f_i(l_{2,6}).$$

Die Werte $f_i(l_{2,6})$ entnehmen wir der Tabelle A.16 und erhalten somit

$$\psi_1(c_{2,12}) = q^3\phi_2\phi_4, \quad \psi_2(c_{2,12}) = q^4\phi_2\phi_4.$$

Wir betrachten nun den Klassentyp $c_{43,4}$ von $F_4(q)$. Der Tabelle A.15 entnehmen, dass nur der Klassentyp $p_{94,1}$ von P_8 in diesen Klassentyp fusioniert. Genauer wird die Fusion von $p_{94,1}$ durch das Paar $(c_{43,4}, 4)$ beschrieben. Mit der Induktionsformel erhalten wir in diesem Fall:

$$\psi_i(c_{43,4}) = 2q^2\phi_1^2 \cdot 4\frac{f_i(l_{7,4})}{2q^2\phi_1^2} = 4f_i(l_{7,4})$$

Wir erhalten insgesamt

$$\psi_1(c_{43,4}) = 4q, \quad \psi_2(c_{43,4}) = 4q.$$

Die übrigen Werte lassen sich entsprechend berechnen und sind in Tabelle A.18 angegeben. Dabei sind auch Werte für die Klassentypen $c_{7,1}$ bis $c_{7,16}$, angegeben. Für $4 \mid q - 1$ kommen diese Klassentypen gar nicht vor, da die Anzahl der Parameter in diesem Typ nach Tabelle A.7 Null ist. Wir können die Rechnungen, die wir hier für den Fall $12 \mid q - 1$ vorgeführt haben, für alle q mit $2, 3 \nmid q$ durchführen und erhalten die Werte der Harish-Chandra-induzierten Senkrechtfunktionen auch für diese q. Es zeigt sich, dass die Werte unabhängig von q sind und somit die in Tabelle A.18 angegebenen Werte für alle diese q gelten.

(8.1) Bemerkung
Mit einigem Aufwand könnte man Vertreter der Klassentypen von P_8 finden, die für alle q mit $2, 3 \nmid q$ gelten. Dann könnten wir die Senkrechtfunktion gleichzeitig für alle diese q Harish-Chandra-induzieren. Dieser Aufwand würde sich lohnen, wenn wir unsere Ergebnisse für all diese q in eine einzige generische Charaktertafel zusammenfassen wollten. Wir wollen dies allerdings nicht tun, da diese Tafeln sich teilweise erheblich in der Parametrisierung unterscheiden und geben lieber für die vier Kongruenzen $q \equiv i \mod 12$ für $i = 1, 5, 7, 11$ eigene Tafeln an. Es ist dann zwar immer noch wünschenswert, Vertreter möglichst unabhängig von der Kongruenz von q anzugeben, aber falls der Aufwand dafür groß wird, lohnt sich dies nicht.

Kapitel IV

Gel′fand-Graev-Charaktere

In diesem Kapitel wollen wir einige Charaktere der Chevalleygruppen vom Typ $\mathbf{F}_4$ explizit berechnen. Wir folgen hier den im Übersichtsartikel [Kaw87] vorgestellten Ideen. Es sei $\mathbf{G}$ eine reduktive algebraische Gruppe definiert über $\mathbb{F}_q$ für eine Primzahlpotenz q in guter Charakteristik und zugehörigem Frobeniusmorphismus $\mathbf{F}$. In [Kaw87] wird eine Konstruktion angegeben, die jedem unipotenten Element $u \in \mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ einen Charakter Γ_u von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ zuordnet. Dieser Charakter entsteht durch Induktion eines bestimmten Charakters einer geeigneten unipotenten Untergruppe und hat somit nur auf den unipotenten Konjugiertenklassen von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ nicht-verschwindende Werte und wird verallgemeinerter Gel′fand-Graev-Charakter von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ zum Element u genannt. Für die Chevalleygruppen $F_4(q)$ mit $2, 3 \nmid q$ wurden diese verallgemeinerten Gel′fand-Graev-Charaktere von Kawanaka [Kaw86] explizit berechnet.

In [Kaw87] beschreibt Kawanaka eine Modifikation der verallgemeinerten Gel′fand-Graev-Charaktere. Dazu wird der Charakter nicht von der unipotenten Untergruppe nach $F_4(q)$ induziert, was den entsprechenden verallgemeinerten Gel′fand-Graev-Charakter ergibt, sondern erst auf eine Obergruppe fortgesetzt und dann nach $F_4(q)$ induziert. Auf diese Weise erhalten wir eine Aufspaltung der Gel′fand-Graev-Charaktere, die sich in Kapitel V als sehr nützlich für die Berechnung irreduzibler Charaktere von $F_4(q)$ erweisen wird. Die Art der Konstruktion dieser Charaktere wird es uns erlauben, Aussagen über die Zerlegungszahlen einiger Blöcke von $F_4(q)$ zu treffen. Wir berechnen explizit die Charakterwerte dieser modifizierten Charaktere. Dazu verwenden wir die in Kapitel I beschriebenen systematischen Methoden, um Vertreter für die Konjugiertenklassen unipotenter Untergruppen und Fusionen in die Gruppe $F_4(q)$ zu bestimmen. Die Charakterwerte ergeben sich durch Auswerten der Induktionsformel III.(7.2) mit Hilfe von Gauß-Summen. Die notwendigen Berechnungen durchzuführen, ist teilweise recht aufwendig. Insbesondere ist das Auswerten der Gauß-Summen recht mühsam, da wir es leider nicht geschafft haben, die notwendigen Rechnungen zu automatisieren.

Eine gute Übersicht über die Theorie der verallgemeinerten Gel′fand-Graev-Charaktere findet sich in [Gec91, Kapitel 1]. Die modifizierten Gel′fand-Graev-Charaktere wurden genauer in [Win95] untersucht. Dort wurden auch die Charakterwerte dieser Charaktere für $F_4(q)$ für Primzahlpotenzen q mit $q \equiv 1$ modulo 12 explizit berechnet. Die dort angegebenen Tafeln der Werte

enthalten jedoch einige Tippfehler und lagen uns leider nicht in elektronischer Form vor. Daher haben wir die Werte auch für den Fall $q \equiv 1$ modulo 12 neu ausgerechnet und stellen diese Ergebnisse in elektronischer Form auf der Webseite [Kö05] zur Verfügung. Wir folgenden dabei im Wesentlichen dem Vorgehen in [Win95], wobei unsere systematischeren Methoden und Algorithmen zur Berechnung der Konjugiertenklassen und Fusionen es erlauben, auch die anderen Kongruenzen zu behandeln.

IV.1 Gel′fand-Graev-Charaktere

Es sei $\mathbf{G}$ eine reduktive Gruppe definiert über $\mathbb{F}_q$ mit zugehörigem Frobeniusmorphismus $\mathbf{F}$, wobei die Charakteristik von $\mathbb{F}_q$ gut für $\mathbf{G}$ ist. Vergleiche dazu Definition I.(1.5). Unter diesen Voraussetzungen können wir Gel′fand-Graev-Charaktere von $\mathbf{G}$ definieren.

(1.1) Definition (Gel′fand-Graev-Charakter, vgl [DM91, 14.29])
Es seien $\mathbf{U}^*$ die Kommutatoruntergruppe von $\mathbf{U}$ und $\sigma \in \mathrm{Irr}(\mathbf{U}^\mathbf{F})$ ein regulärer linearer Charakter, dann heißt

$$\Gamma_{\mathbf{G}^\mathbf{F},\sigma} := \mathrm{Ind}_{\mathbf{U}^\mathbf{F}}^{\mathbf{G}^\mathbf{F}}(\sigma)$$

ein **Gel′fand-Graev-Charakter** von $\mathbf{G}^\mathbf{F}$.

(1.2) Bemerkung

(i) Für die genaue Definition regulärer linearer Charaktere verweisen wir auf die Definition [DM91, 14.27]. Im Fall der Chevalleygruppen vom Typ $\mathbf{F}_4$ sind dies genau die nichttrivialen linearen Charaktere von $\mathbf{U}^\mathbf{F}$, die $\mathbf{U}^{*\mathbf{F}}$ im Kern haben.

(ii) Ist das Zentrum $Z(\mathbf{G})$ zusammenhängend, so ist $\Gamma_{\mathbf{G}^\mathbf{F},\sigma}$ unabhängig von der Wahl von σ. Wir bezeichnen den Gel′fand-Graev-Charakter in diesem Fall auch mit $\Gamma_{\mathbf{G}^\mathbf{F}}$.

Kawanaka hat in [Kaw86] eine Verallgemeinerung dieser Konstruktion vorgeschlagen. Geck hat in seiner Dissertation [Gec91, Abschnitt 1] ein gute, in sich abgeschlossene Darstellung der zur Definition und Konstruktion dieser verallgemeinerten Gel′fand-Graev-Charaktere einer endlichen Gruppe vom Lie-Typ in guter Charakteristik benötigten Voraussetzungen und Methoden gegeben. Dabei wird zu jedem unipotenten Element $u \in \mathbf{G}^\mathbf{F}$ ein Charakter Γ_u von $\mathbf{G}^\mathbf{F}$ konstruiert, der die folgenden Eigenschaften hat:

(1.3) Bemerkung (Eigenschaften der verallgemeinerten Gel′fand-Graev-Charaktere)

(i) Wir können über die Theorie der gewichteten Dynkin-Diagramme einem unipotenten Element u eine Untergruppe $U_1 \leqslant \mathbf{U}^\mathbf{F}$ und einen Charakter $\mu_u \in \mathrm{Irr}(U_1)$ zuordnen, so dass $\Gamma_u = \mathrm{Ind}_{U_1}^{\mathbf{G}^\mathbf{F}}(\mu_u)$ ist.

(ii) Ist $u = 1$, so ist Γ_u der Charakter der regulären Darstellung von $\mathbf{G}^\mathbf{F}$. Ist $u \in \mathbf{G}^\mathbf{F}$ regulär unipotent und das Zentrum von $\mathbf{G}$ zusammenhängend, so ist Γ_u der gewöhnliche Gel′fand-Graev-Charakter $\Gamma_{\mathbf{G}^\mathbf{F}}$.

(iii) Der Charakter Γ_u hängt nur von der $\mathbf{G}^\mathbf{F}$-Konjugiertenklasse von u ab.

(iv) Es gilt $\Gamma_u(g) = 0$ für alle $g \in \mathbf{G}^{\mathbf{F}}$, die nicht im Zariski-Abschluss der Konjugiertenklasse von u in $\mathbf{G}$ liegt.

(1.4) Bemerkung (Charakterformel für Gel′fand-Graev-Charaktere)
Es existiert eine Charakterformel von Lusztig, die die verallgemeinerten Gel′fand-Graev-Charaktere als Linearkombinationen der verallgemeinerten Greenfunktionen ausdrückt. Die auftretenden Koeffizienten sind allerdings bisher nur in Spezialfällen bekannt. Vergleiche dazu [Lus92, 7.3,7.5] und [Gec99]. Diese Ergebnisse wurden außer in einigen Spezialfällen nur unter der Voraussetzung bewiesen, dass die Charakteristik p groß genug ist.

Wir wollen in diesem Abschnitt die Gel′fand-Graev-Charaktere für die Chevalleygruppen $F_4(q)$ mit q Primzahlpotenz und $2, 3 \nmid q$ vorstellen und verweisen für eine allgemeinere Darstellung auf [Gec91]. Es gilt der folgende Satz.

(1.5) Satz (Verallgemeinerte Gel′fand-Graev-Charaktere von $F_4(q)$)
Es sei q eine Primzahlpotenz mit $2, 3 \nmid q$. Es seien x_i für $1 \leqslant i \leqslant 26$ die in Tabelle A.8 angegebenen Vertreter der unipotenten Konjugiertenklassen von $F_4(q)$. Die verallgemeinerten Gel′fand-Graev-Charaktere Γ_{x_i} von $F_4(q)$ für $1 \leqslant i \leqslant 26$ sind in Tabelle A.19 angegeben. Wir brauchen dabei nur die Werte auf den unipotenten Konjugiertenklassen anzugeben, da Γ_{x_i} für alle $1 \leqslant i \leqslant 26$ auf den nicht-unipotenten Klassen verschwindet. Wir schreiben auch abkürzend Γ_i für Γ_{x_i}.

Beweis: Die Gel′fand-Graev-Charaktere von $F_4(q)$ in guter Charakteristik wurden von Kawanaka in [Kaw86] für q groß genug berechnet. In [Kaw87, 2.3] wird begründet, wieso die Einschränkung an das q fallen gelassen werden kann und die berechneten Werte für alle q in guter Charakteristik richtig sind. □

IV.2 Modifizierte Gel′fand-Graev-Charaktere

Es gelten die Bezeichnungen aus I.(5.3). In diesem Abschnitt wollen wir eine Modifikation der Gel′fand-Graev-Charaktere vorstellen, die es erlaubt, die verallgemeinerten Gel′fand-Graev-Charaktere in eine Summe von Charakteren zu zerlegen. Diese Modifikation wurde von Kawanaka in [Kaw87] vorgeschlagen. Dabei wird verwendet, dass $\Gamma_u = \mathrm{Ind}_{U_1}^{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}}(\mu_u)$ für einen Charakter $\mu_u \in \mathrm{Irr}(U_1)$ einer unipotenten Untergruppe U_1 von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ gilt. Die Idee ist nun, μ_u zunächst zu einem Charakter $\tilde{\mu_u} \in \mathrm{Irr}(HU_1)$ für eine geeignete Untergruppe $HU_1 \leqslant \mathbf{G}^{\mathbf{F}}$, wobei H die Untergruppe U_1 normalisiert und nur halbeinfache Elemente enthält, fortzusetzen. Wir erhalten dann den modifizierten Gel′fand-Graev-Charakter durch Induktion von $\tilde{\mu}_u$ nach $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$. Wir wollen diese Konstruktion hier kurz vorstellen und verweisen für eine detailliertere Beschreibung auf [Win95, Abschnitt 3.2].

(2.1) Bemerkung

(i) Es sei $u \in \mathbf{U}^{\mathbf{F}}$ ein unipotentes Element von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$. Mittels der Theorie gewichteter Dynkin-Diagramme kann man u eine parabolische Untergruppe $\mathbf{P}$ von $\mathbf{G}$ mit Leviuntergruppe $\mathbf{L}$

und unipotentem Radikal $\mathbf{U}_1$ zuordnen. Das unipotente Radikal $\mathbf{U}_1$ hat einen Normalteiler $\mathbf{U}_2$, so dass $\mathbf{U}_1^{\mathbf{F}}/\mathbf{U}_2^{\mathbf{F}}$ eine elementar-abelsche Gruppe ist. Die jeweiligen Fixpunktuntergruppen von $\mathbf{U}_1$ und $\mathbf{U}_2$ bezeichnen wir mit U_1 und U_2. Vergleiche zur genauen Konstruktion zum Beispiel [Win95, 3.2.1]. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $u \in U_2$ ist, ansonsten gehen wir zu einem zu u konjugierten Element in U_2 über.

(ii) Man kann einen linearen Charakter $\lambda_u \in \mathrm{Irr}(U_2)$ konstruieren, für den

$$\mathrm{Ind}_{U_2}^{U_1}(\lambda_u) = \sqrt{\frac{|U_2|}{|U_1|}}\mu_u$$

für einen Charakter $\mu_u \in \mathrm{Irr}(U_1)$ gilt. Der verallgemeinerte Gel′fand-Graev-Charakter Γ_u ist dann definiert als

$$\Gamma_u := \mathrm{Ind}_{U_1}^{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}}(\mu_u).$$

(iii) Es sei $w_0 \in \mathbf{W}$ das längste Element in der Weylgruppe $\mathbf{W}$.

(iv) Es sei $H \leqslant C_{\mathbf{L}^{\mathbf{F}}}(\widehat{w_0}u)$ und H bestehe nur aus halbeinfachen Elementen. Dann normalisiert H die unipotente Untergruppe U_1. Somit ist $HU_1 \leqslant \mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ ein semidirektes Produkt mit Untergruppe HU_2.

(v) Falls $U_1 \neq U_2$ ist, soll die Untergruppe H die folgende Eigenschaft haben. Für alle $h \in H$ ist h^{-1} in H konjugiert zu h.

(vi) Durch $\tilde{\lambda}_u(hv) := \lambda_u(v)$ für alle $h \in H$ und $v \in U_2$ erhalten wir eine Fortsetzung von λ_u auf die Untergruppe HU_2 und

$$\tilde{\mu}_u := \sqrt{\frac{|U_1|}{|U_2|}}\mathrm{Ind}_{HU_2}^{HU_1}(\tilde{\lambda}_u)$$

ist ein irreduzibler Charakter von HU_1.

Beweis: Siehe [Win95, Abschnitt 3.2]. □

Wir können nun die modifizierten Gel′fand-Graev-Charaktere von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ definieren.

(2.2) Definition (Modifizierte Gel′fand-Graev-Charaktere, vgl. [Win95, 3.2.6])
Es gelten die Bezeichnungen aus Bemerkung IV.(2.1). Es seien $\varrho \in \mathrm{Irr}(H)$ und $\tilde{\varrho}$ die Inflation von ϱ auf die Untergruppe HU_1. Der Charakter

$$\Gamma_{u,\varrho} := \mathrm{Ind}_{HU_1}^{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}}(\tilde{\varrho}\tilde{\mu}_u)$$

heißt **modifizierter verallgemeinerter Gel′fand-Graev-Charakter** von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$.

(2.3) Bemerkung

(i) Die Untergruppen U_1 und U_2 hängen nur von der Konjugiertenklasse des unipotenten Elementes u ab.

(ii) Ist $g \in \mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ nicht zu einem Element aus HU_2 konjugiert, so ist $\Gamma_{u,\varrho} = 0$.

Das folgende Lemma zeigt, dass die modifizierten Gel′fand-Graev-Charaktere eine Zerlegung der verallgemeinerten Gel′fand-Graev-Charaktere in eine direkte Summe echter Charaktere von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ liefern. Es gilt

(2.4) Lemma (vgl. [Win95, 3.2.7])
Es gelten die Bezeichnungen aus Bemerkung IV.(2.1), dann gilt

$$\Gamma_u = \sum_{\varrho \in \mathrm{Irr}(H)} \varrho(1)\Gamma_{u,\varrho}.$$

Beweis: Siehe [Win95, 3.2.7]. □

IV.3 Berechnung modifizierter Gel′fand-Graev-Charaktere

Es gelten die Bezeichnungen aus den Abschnitten IV.2 und II.3. Insbesondere ist $F_4(q)$ die Chevalleygruppe vom Typ $\mathbf{F}_4$ über dem Körper $\mathbb{F}_q$, wobei q eine Primzahlpotenz mit $2, 3 \nmid q$ ist. Wir wollen in diesem Abschnitt die Charakterwerte einiger modifizierter Gel′fand-Graev-Charaktere explizit berechnen. Hierbei sind die Kongruenzen von q modulo 12 zu unterscheiden. Für den Fall $12 \mid q - 1$ wurden diese Werte schon in [Win95] bestimmt. Da die dort angegebenen Tafeln einige Schreibfehler enthalten und auch nicht in elektronischer Form vorliegen, haben wir die Charakterwerte dieser Charaktere neu berechnet. Unsere Ergebnisse liegen in elektronischer Form in einem mit **CHEVIE** nutzbaren Datenformat vor und können von der Webseite [Kö05] heruntergeladen werden.

Wir wollen einige modifizierte Gel′fand-Graev-Charaktere zu den verallgemeinerten Gel′fand-Graev-Charakteren Γ_3, Γ_4, Γ_{15}, Γ_{16},Γ_{17},Γ_{18},Γ_{19}, Γ_{24} und Γ_{25} berechnen. Dazu geben wir jeweils die Untergruppen H, U_1 und U_2 und den linearen Charakter von U_2 an, die wir gemäß Bemerkung IV.(2.1) zur Berechnung benötigen. Wir erhalten die Charakterwerte dann mittels expliziter Induktion aus der Definition IV.(2.2). Wir benötigen dazu die folgende Bemerkung:

(3.1) Bemerkung (Einige Untergruppen halbeinfacher Elemente von $F_4(q)$)
Es gelte $2, 3 \nmid q$. Es seien weiter $\tau_1 := \widehat{s_1 s_3}\theta(-1,-1,-1,1)$, $\tau_2 := \widehat{s_4}\theta(-1,-1,1,-1)x_1(1)$, $\tau_3 := \theta(1,1,-1,-1)$, $\tau_4 := \theta(1,1,1,-1)$, $\tau_5 := \theta(-1,1,1,1)$ Elemente von $F_4(q)$. Dann gilt $\tau_i^2 = 2$ für alle $1 \leqslant i \leqslant 5$ und $(\tau_1\tau_2)^3 = 1$, also ist τ_i für alle i halbeinfach. Die Elemente τ_1, τ_2 und τ_5 gehören zum halbeinfachen Klassentyp h_2 von $F_4(q)$. Die Elemente τ_3 und τ_4 gehören zum halbeinfachen Klassentyp h_3. Die im Folgenden definierten Untergruppen H_i enthalten offensichtlich nur halbeinfache Elemente, da deren Ordnungen nur 2 und 3 als Primteiler haben.

(i) Es sei $H_1 := \langle \tau_5 \rangle \leqslant F_4(q)$, dann ist $|H_1| = 2$. Die irreduziblen Charaktere von H_1 sind somit der triviale Charakter 1 und der treue Charakter -1.

(ii) Es sei $H_2 := \langle \tau_1, \tau_2, \tau_3 \rangle \leqslant F_4(q)$. Dann ist H_2 isomorph zur symmetrischen Gruppe auf 4 Punkten und hat fünf irreduzible Charaktere, die wir gemäß der Konvention in V.4 mit 1, λ^1, λ^2, λ^3 und σ bezeichnen. Weiter hat H_2 fünf Konjugiertenklassen. Die Elemente

der Ordnung 4 gehören für $4 \mid q-1$ zum halbeinfachen Klassentyp h_6, für $4 \nmid q-1$ zum halbeinfachen Klassentyp h_7. Die Elemente der Ordnung 3 gehören für $3 \mid q-1$ zum halbeinfachen Klassentyp h_4, für $3 \nmid q-1$ zum halbeinfachen Klassentyp h_5.

(iii) Es sei $H_3 := \langle \tau_4, \tau_5 \rangle \leqslant F_4(q)$. Dann ist H_3 isomorph zur Kleinschen Vierergruppe V_4 und hat die vier linearen Charaktere $1, \varepsilon, \varepsilon'$ und ε''. Die Bezeichnung sei so gewählt, dass $\varepsilon(\tau_4) = 1$, $\varepsilon(\tau_5) = -1$ und $\varepsilon'(\tau_4) = -1$, $\varepsilon'(\tau_5) = -1$ ist.

(iv) Es sei $H_4 := \langle \tau_1, \tau_3 \rangle \leqslant F_4(q)$. Dann ist H_4 isomorph zur Diedergruppe D_8 mit acht Elementen und hat fünf Charaktere, die wir mit $1, \varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ und r bezeichnen. Die Bezeichnung sei so gewählt, dass r der zweidimensionale Charakter ist und $\varepsilon(\tau_1) = 1$, $\varepsilon(\tau_3) = -1$ und $\varepsilon'(\tau_1) = -1$, $\varepsilon'(\tau_3) = -1$ ist.

(v) Es sei $H_5 := \langle \tau_1\tau_2 \rangle \leqslant F_4(q)$. Dann ist H_5 eine zyklische Gruppe mit $|H_5| = 3$ und hat drei lineare Charaktere, die wir mit $1, \varepsilon$ und ε' bezeichnen. Für $3 \mid q-1$ gehören die Elemente der Ordnung 3 zum halbeinfachen Klassentyp h_4, für $3 \nmid q-1$ zum halbeinfachen Klassentyp h_5.

(vi) Es sei $H_6 := \langle \tau_1\tau_3 \rangle \leqslant F_4(q)$. Dann ist H_6 eine zyklische Gruppe mit $|H_6| = 4$ und hat vier lineare Charaktere, die wir mit $1, \varepsilon, \varepsilon'$ und ε'' bezeichnen. Für $4 \mid q-1$ gehören die Elemente der Ordnung 4 zum halbeinfachen Klassentyp h_6, für $4 \nmid q-1$ zum halbeinfachen Klassentyp h_7.

(vii) Es sei $H_7 := \langle \tau_4 \rangle$, dann ist $|H_7| = 2$. Die irreduziblen Charaktere von H_7 sind somit der triviale Charakter 1 und der treue Charakter -1.

Beweis: Die Elemente τ_i für $1 \leqslant i \leqslant 5$ sind in [Sho74, 2.3] angegeben. Da $2, 3 \nmid q$ sind diese Elemente alle halbeinfach. Die weiteren Aussagen ergeben sich sofort durch leichte Rechnungen. Implizit sind diese Aussagen auch in [Win95, 4.1] enthalten. □

(3.2) Lemma (modifizierte Gel′fand-Graev-Charaktere von $F_4(q)$)
Es gelten die Notationen aus Tabelle A.8 für die Elemente $\eta, \zeta, \tau \in \mathbb{F}_q$. Weiter sei Λ_1 der kanonische additive Charakter von $\mathbb{F}_q$. Vergleiche zur Definition [LN94, 5.6]. Es seien Γ_i für $1 \leqslant i \leqslant 26$ die verallgemeinerten Gel′fand-Graev-Charaktere von $F_4(q)$ gemäß Satz IV.(1.5). Die Untergruppen H_i für $1 \leqslant i \leqslant 7$ seien gemäß Bemerkung IV.(3.1) definiert. Wir definieren die folgenden Indexmengen:

$$I_1 := \{4, 7, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\},$$

$$I_2 := \{16, 18, 20, 21, 22, 23, 24\},$$

$$I_3 := \{2, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\},$$

$$I_4 := \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}.$$

Dann gilt:

(i) Wir betrachten Γ_3. Es ist $U_1 = \langle \mathbf{U}_i \mid i \in I_1 \rangle$ und $U_2 = \langle \mathbf{U}_i \mid i \in I_2 \rangle$ und

$$\lambda_{x_3}\left(\prod_{i\in I_2} x_i(c_i)\right) = \Lambda_1(-2c_4).$$

Weiter wählen wir $H := H_1$. Wir erhalten zwei modifizierte Gel′fand-Graev-Charaktere, nämlich $K_2 := \Gamma_{3,1}$ und $K_3 := \Gamma_{3,-1}$.

(ii) Wir betrachten Γ_4. Es ist $U_1 = \langle \mathbf{U}_i \mid i \in I_1 \rangle$ und $U_2 = \langle \mathbf{U}_i \mid i \in I_2 \rangle$ und

$$\lambda_{x_4}\left(\prod_{i\in I_2} x_i(c_i)\right) = \Lambda_1(c_3 - \eta c_5).$$

Weiter wählen wir $H := H_1$. Wir erhalten zwei modifizierte Gel′fand-Graev-Charaktere, nämlich $K_4 := \Gamma_{4,1}$ und $K_5 := \Gamma_{4,-1}$.

(iii) Wir betrachten Γ_{15}. Es ist $U_1 = U_2 = \langle \mathbf{U}_i \mid i \in I_3 \rangle$ und

$$\lambda_{x_{15}}\left(\prod_{i\in I} x_i(c_i)\right) = \Lambda_1(c_2 - c_7 - 2c_9 - c_{14}).$$

Wir wählen $H := H_2$. Wir erhalten fünf modifizierte Gel′fand-Graev-Charaktere, nämlich $K_9 := \Gamma_{15,1}$, $K_{12} := \Gamma_{15,\lambda^1}$, $K_{13} := \Gamma_{15,\lambda^2}$, $K_{18} := \Gamma_{15,\lambda^3}$ und $K_{20} := \Gamma_{15,\sigma}$.

(iv) Wir betrachten Γ_{16}. Es ist $U_1 = U_2 = \langle \mathbf{U}_i \mid i \in I \rangle$ und

$$\lambda_{x_{16}}\left(\prod_{i\in I} x_i(c_i)\right) = \Lambda_1(c_2 - c_7 - 2c_9 - \eta c_{14}).$$

Wir wählen $H := H_3$. Wir erhalten vier modifizierte Gel′fand-Graev-Charaktere, nämlich $K_{14} := \Gamma_{16,1}$, $K_{15} := \Gamma_{16,\varepsilon}$, $K_{26} := \Gamma_{16,\varepsilon'}$ und $K_{27} := \Gamma_{16,\varepsilon''}$.

(v) Wir betrachten Γ_{17}. Es ist $U_1 = U_2 = \langle \mathbf{U}_i \mid i \in I_3 \rangle$ und

$$\lambda_{x_{17}}\left(\prod_{i\in I} x_i(c_i)\right) = \Lambda_1(c_2 - \eta c_7 - 2c_9 - \eta c_{14}).$$

Wir wählen $H := H_4$. Wir erhalten fünf modifizierte Gel′fand-Graev-Charaktere, nämlich $K_{10} := \Gamma_{17,1}$, $K_{19} := \Gamma_{17,\varepsilon}$, $K_{11} := \Gamma_{17,\varepsilon'}$, $K_{21} := \Gamma_{17,\varepsilon''}$ und $K_{22} := \Gamma_{17,r}$.

(vi) Wir betrachten Γ_{18}. Es ist $U_1 = U_2 = \langle \mathbf{U}_i \mid i \in I_3 \rangle$ und

$$\lambda_{x_{18}}\left(\prod_{i\in I} x_i(c_i)\right) = \Lambda_1(2c_4 - c_5 - 2c_6 + c_{12} - \zeta c_{14}).$$

Wir wählen $H := H_5$. Wir erhalten drei modifizierte Gel′fand-Graev-Charaktere, nämlich $K_{23} := \Gamma_{18,1}$, $K_{24} := \Gamma_{18,\varepsilon}$ und $K_{25} := \Gamma_{17,\varepsilon''}$.

(vii) Wir betrachten Γ_{19}. Es ist $U_1 = U_2 = \langle \mathbf{U}_i \mid i \in I_3 \rangle$ und

$$\lambda_{x_{19}}\left(\prod_{i\in I} x_i(c_i)\right) = \Lambda_1(c_2 - c_5 - 2c_{11} - \eta c_{12} + \tau c_{14}).$$

Wir wählen $H := H_6$. Wir erhalten vier modifizierte Gel′fand-Graev-Charaktere, nämlich $K_{17} := \Gamma_{19,1}$, $K_{16} := \Gamma_{19,\varepsilon}$, $K_{28} := \Gamma_{19,\varepsilon''}$ und $K_{29} := \Gamma_{17,\varepsilon'''}$.

(viii) Wir betrachten Γ_{24}. Es ist $U_1 = U_2 = \langle \mathbf{U}_i \mid i \in I_4 \rangle$ und

$$\lambda_{x_{24}}\left(\prod_{i\in I} x_i(c_i)\right) = \Lambda_1(-c_1 - c_2 + 2c_3 - c_8).$$

Weiter wählen wir $H := H_7$. Wir erhalten zwei modifizierte Gel′fand-Graev-Charaktere, nämlich $K_{33} := \Gamma_{24,1}$ und $K_{34} := \Gamma_{24,-1}$.

(ix) Wir betrachten Γ_{25}. Es ist $U_1 = U_2 = \langle \mathbf{U}_i \mid i \in I_4 \rangle$ und

$$\lambda_{x_{25}}\left(\prod_{i\in I} x_i(c_i)\right) = \Lambda_1(-c_1 - c_2 + 2c_3 - \eta c_8).$$

Weiter wählen wir $H := H_7$. Wir erhalten zwei modifizierte Gel′fand-Graev-Charaktere, nämlich $K_{35} := \Gamma_{25,1}$ und $K_{36} := \Gamma_{25,-1}$.

Weiter seien $K_1 := \Gamma_1$, $K_6 := \Gamma_5$, $K_7 := \Gamma_6$, $K_8 := \Gamma_8$, $K_{30} := \Gamma_{21}$, $K_{31} := \Gamma_{20}$, $K_{32} := \Gamma_{22}$ und $K_{37} := \Gamma_{26}$. Die Werte der Charaktere K_i für $1 \leqslant i \leqslant 37$ sind in Anhang A.20 angegeben.

Beweis: Wir folgen hier im wesentlichen dem Vorgehen in [Win95], wo die Charaktere K_i für den Fall $12 \mid q - 1$ berechnet wurden. Für jeden betrachteten Charakter Γ_i ergeben sich jeweils die Untergruppen U_1 und U_2 und der lineare Charakter λ_{x_i} aus der in [Gec91, 3.10] beschriebenen Konstruktion der Gel′fand-Graev-Charaktere. Vergleiche dazu auch [Kaw86]. Man kann leicht mit dem Algorithmus I.(5.8) nachrechnen, dass die jeweils angegebenen Untergruppen H die Voraussetzungen aus IV.(2.1) erfüllen und somit die modifizierten Gel′fand-Graev-Charaktere zu diesem H existieren. Wir müssen also nur noch ihre Werte berechnen. Dazu bestimmen wir die Fusionen der Elemente von HU_1 nach $F_4(q)$ mit Hilfe der in Abschnitt III.7 beschriebenen Methoden. Mit der in Beispiel III.(5.5) vorgestellten Methode können wir systematisch Vertreter für die unipotenten Konjugiertenklassen finden. Diese Rechnungen lassen sich leicht für alle zu betrachtenden Kongruenzen von q durchführen. Die Vertreter der gemischten Klassen finden wir mit Hilfe der Jordanzerlegung I.(1.8) durch Berechnen der unipotenten Konjugiertenklassen der Zentralisatoren der halbeinfachen Elemente. Hierbei vereinfacht die Tatsache, dass HU_1 ein semidirektes Produkt ist, die Rechnungen erheblich. Mit der Induktionsformel III.(7.2) können wir dann die Werte der K_i direkt bestimmen. Die dabei auftretenden Summen können mit Hilfe von Gauß-Summen berechnet werden. Dies ist in [Win95, 3.3] ausführlich erläutert. Die hierfür notwendigen Rechnungen sind sehr umfangreich. Es ist uns leider nicht gelungen die Berechnungen der Gauß-Summen zu automatisieren, was eine erhebliche

Erleichterung wäre. Zu den Problemen bei der Bestimmung der Fusionen unipotenter Elemente vergleiche auch die Bemerkung I.(8.2). Wir wollen dieses Verfahren hier nicht ausführlicher vorführen, sondern verweisen auf ein Beispiel in [Win95, 3.4.1]. □

(3.3) Korollar
Es gelten die Bezeichnungen aus Lemma IV.(3.2). Für alle $1 \leqslant i \leqslant 37$ ist K_i ein von einer Untergruppe, deren Ordnung nicht durch 2, 3, q teilbar ist, induzierter Charakter.

Beweis: Dies folgt sofort aus der Konstruktion der Charaktere K_i für $1 \leqslant i \leqslant 37$. Vergleiche Lemma IV.(3.2). □

Kapitel V

Die unipotenten Charaktere von Chevalleygruppen vom Typ F_4

In diesem Kapitel wollen wir die unipotenten Charaktere von $F_4(q)$ berechnen. Diese werden eine wichtige Rolle bei der Bestimmung der Zerlegungszahlen der unipotenten Blöcke von $F_4(q)$ spielen. Berechnen der Charaktere bedeutet, dass wir die in Kapitel III berechnete Parametrisierung der Konjugiertenklassen in Klassentypen benutzen, um die Charakterwerte anzugeben. Dabei wird sich zeigen, dass die gesuchten Charaktere konstant auf den Klassentypen sind. Die Charakterwerte lassen sich bis auf wenige Ausnahmen durch Polynome in q mit rationalen Koeffizienten schreiben. Diese Ausnahmen beschränken sich auf dritte beziehungsweise vierte Einheitswurzeln. Diese Charaktere ermöglichen uns die explizite Berechnung von Skalarprodukten mit anderen Charakteren wie den in Kapitel IV bestimmten Charakteren. In Kapitel VI wird dies ein wesentliches Hilfsmittel zur Ermittlung der Zerlegungszahlen sein.

Zunächst definieren wir den Begriff des unipotenten Charakters und geben eine Parametrisierung dieser Charaktere an, die auf Lusztig [Lus84] zurückgeht. Dafür benötigen wir einige Begriffe aus der Harish-Chandra-Theorie [Car85, Kapitel 9,10] und der Deligne-Lusztig-Theorie [DL76], die wir zunächst einführen.

Im weiteren Verlauf benutzen wir diese Parametrisierung um die 37 unipotenten Charaktere von $F_4(q)$ für alle q mit $2, 3 \nmid q$ zu berechnen. Dabei folgen wir im Wesentlichen dem Vorgehen in [Lüb93], wo die unipotenten Charaktere von $CSp_6(q)$ berechnet wurden. Wir gehen dabei in drei Schritten vor. Die unipotenten Charaktere lassen sich gemäß der Parametrisierung als Linearkombination der unipotenten Fastcharaktere schreiben. Der erste Schritt besteht darin, die uniformen unipotenten Fastcharaktere als explizite Klassenfunktionen zu bestimmen. Im Zweiten Schritt benutzen wir die in Kapitel IV berechneten Charaktere, um die kuspidalen Fastcharaktere zu bestimmen. Wir benutzen dabei einige tiefliegende Ergebnisse aus der Theorie der Charaktergarben, die besagen, dass die Träger der gesuchten Klassenfunktionen jeweils nur wenige Konjugiertenklassen umfassen. Der dritte Schritt besteht darin, die restlichen fünf Fastcharaktere durch explizite Berechnungen in der Gruppe zu bestimmen. Wir benutzen dabei unter anderem die in [MS95] beschriebene Idee, einige Charakterwerte direkt zu berechnen. Dabei werden wir massiv die in Kapitel I beschriebenen Algorithmen benutzen.

V.1 Harish-Chandra-Theorie

Wir behalten die Bezeichnungen aus I.(5.3) bei. In diesem Abschnitt wollen wir die Parametrisierung der irreduziblen Charaktere von $\mathbf{G}^\mathbf{F}$ in sogenannte Harish-Chandra-Serien vorstellen. Wir zitieren hier nur die wichtigsten Ergebnisse und wollen für genauere Details auf die Einführung in [Car85, Kapitel 9,10] verweisen. Eine wichtige Rolle in diesem Zusammenhang spielen die sogenannten kuspidalen Charaktere, da jeder irreduzibler Charakter von $\mathbf{G}^\mathbf{F}$ in einem Harish-Chandra-induzierten kuspidalen Charakter als Konstituent vorkommt.

(1.1) Definition (kuspidaler Charakter)
Ein irreduzibler Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}(\mathbf{G}^\mathbf{F})$ heißt **kuspidal**, wenn $\langle \chi, R_\mathbf{L}^\mathbf{G}(\delta)\rangle = 0$ für alle echten maximal zerfallenden regulären Untergruppen $\mathbf{L}$ von $\mathbf{G}$ und alle $\delta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{L}^\mathbf{F})$ ist.

(1.2) Definition (Harish-Chandra-Serien)
Es seien $\mathbf{L}$ eine maximal zerfallende reguläre Untergruppe von $\mathbf{G}$ und $\delta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{L}^\mathbf{F})$ ein kuspidaler Charakter.

(i) Die Menge
$$\mathcal{E}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \delta, \mathbf{F}) := \{\chi \in \mathrm{Irr}(\mathbf{G}^\mathbf{F}) \mid \langle \chi, R_\mathbf{L}^\mathbf{G}(\delta)\rangle \neq 0\}$$
heißt **Harish-Chandra-Serie** von $\mathbf{G}^\mathbf{F}$ zum Paar $(\mathbf{L}, \delta)$.

(ii) Die Vereinigung
$$\mathcal{E}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{F}) := \bigcup_{\delta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{L}^\mathbf{F}) \text{ kuspidal}} \mathcal{E}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \delta, \mathbf{F})$$
heißt **Harish-Chandra-Serie** von $\mathbf{G}^\mathbf{F}$ zu $\mathbf{L}$.

(iii) Ist $\mathbf{L}$ ein maximaler Torus von $\mathbf{G}$, so heißt $\mathcal{E}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{F})$ **Hauptserie** von $\mathbf{G}^\mathbf{F}$. Die Menge $\mathcal{E}(\mathbf{G}, \mathbf{G}, \mathbf{F})$ heißt **diskrete Serie** von $\mathbf{G}^\mathbf{F}$ und enthält genau die kuspidalen Charaktere von $\mathbf{G}^\mathbf{F}$.

(1.3) Satz

(i) Es seien $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2 \leqslant \mathbf{G}$ und $\delta_i \in \mathrm{Irr}(\mathbf{L}_i^\mathbf{F})$ für $i = 1, 2$ kuspidale Charaktere. Dann ist genau dann $\mathcal{E}(\mathbf{G}^\mathbf{F}, \mathbf{L}_1, \delta_1, \mathbf{F}) = \mathcal{E}(\mathbf{G}^\mathbf{F}, \mathbf{L}_2, \delta_2, \mathbf{F})$, wenn die Paare $(\mathbf{L}_1, \delta_1)$ und $(\mathbf{L}_2, \delta_2)$ unter $\mathbf{G}^\mathbf{F}$ konjugiert sind. Andernfalls sind $\mathcal{E}(\mathbf{G}^\mathbf{F}, \mathbf{L}_1, \delta_1, \mathbf{F})$ und $\mathcal{E}(\mathbf{G}^\mathbf{F}, \mathbf{L}_2, \delta_2, \mathbf{F})$ disjunkt.

(ii) Zu jedem irreduziblen Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}(\mathbf{G}^\mathbf{F})$ existiert ein bis auf $\mathbf{G}^\mathbf{F}$-Konjugation eindeutig bestimmtes Paar $(\mathbf{L}, \delta)$, so dass $\mathbf{L}$ eine maximal zerfallende reguläre Untergruppe $\mathbf{L}$ von $\mathbf{G}$ und $\delta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{L}^\mathbf{F})$ ein kuspidaler Charakter und $\chi \in \mathcal{E}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \delta, \mathbf{F})$ ist.

Beweis: Siehe [Car85, 9.2.3]. □

Wir erhalten also durch die Harish-Chandra-Serien eine Parametrisierung der irreduziblen Charaktere von $\mathbf{G}^\mathbf{F}$, wenn wir noch die Charaktere in einer Serie $\mathcal{E}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \delta, \mathbf{F})$ parametrisieren. Dieses Problem wurde durch Howlett und Lehrer in [HL80] gelöst.

(1.4) Satz (Zerlegung von $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\delta)$)
Wir wollen voraussetzen, dass das Zentrum von $\mathbf{G}$ zusammenhängend ist. Es seien $\mathbf{L}$ eine maximal zerfallende reguläre Untergruppe von $\mathbf{G}$ und $\delta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{L}^{\mathbf{F}})$ ein kuspidaler Charakter. Wir definieren

$$\mathbf{W}^{\mathbf{L},\delta} := \{w \in N_{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}}(\mathbf{L})/\mathbf{L}^{\mathbf{F}} \mid \delta^w = \delta\}.$$

Dann gibt es eine Bijektion zwischen $\mathcal{E}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \delta, \mathbf{F})$ und den irreduziblen Charakteren $\mathrm{Irr}(\mathbf{W}^{\mathbf{L},\delta})$. Ist $\varrho \in \mathrm{Irr}(\mathbf{W}^{\mathbf{L},\delta})$, so schreiben wir χ_ϱ für den unter dieser Bijektion zugeordneten Charakter von $\mathrm{Irr}(\mathbf{G}^{\mathbf{F}})$. Es gilt dann

$$\langle \chi_\varrho, R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\delta)\rangle = \varrho(1)$$

und es gilt somit

$$R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\delta) = \sum_{\varrho \in \mathbf{W}^{\mathbf{L},\delta}} \varrho(1)\chi_\varrho.$$

Beweis: Siehe [Car85, Korollar 10.11.3]. Nach [Lus84, 8.6] ist der dort auftretende Kozykel μ trivial, falls das Zentrum von $\mathbf{G}$ zusammenhängend ist. Die Behauptung folgt dann sofort mit [Car85, 10.1.2]. □

(1.5) Bemerkung

(i) Ist $\mathbf{G}$ eine Chevalleygruppe und $\mathbf{L}$ ein maximaler Torus von $\mathbf{G}$ und δ der triviale Charakter von $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$, so ist $\mathbf{W}^{\mathbf{L},\delta}$ nach [DM91, 4.2] isomorph zu $\mathbf{W}$. In diesem Fall wird $\mathcal{E}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \delta, \mathbf{F})$ durch die irreduziblen Charaktere von $\mathbf{W}$ parametrisiert.

(ii) Auch im Fall, dass das Zentrum von $\mathbf{G}$ nicht zusammenhängend ist, kann eine ähnliche Bijektion wie in Satz V.(1.4) gezeigt werden. Vergleiche dazu [Car85, 10.11.3].

(1.6) Satz
Es sei das Zentrum von $\mathbf{G}$ zusammenhängend und $\mathbf{L}$ eine maximal zerfallende reguläre Untergruppe von $\mathbf{G}$. Es seien $\varrho \in \mathrm{Irr}(\mathbf{W}_{\mathbf{L}})$ und $\chi_\varrho \in \mathcal{E}(\mathbf{L}, \mathbf{T}, 1, \mathbf{F})$ der zugehörige unipotente Charakter von $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$, so gilt:

$$R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\chi_\varrho) = \sum_{\varphi \in \mathrm{Irr}(\mathbf{W})} \langle \mathrm{Ind}_{\mathbf{W}_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{W}}(\varrho), \varphi\rangle \chi_\varphi$$

Dabei ist $\chi_\varphi \in \mathcal{E}(\mathbf{G}, \mathbf{T}, 1, \mathbf{F})$ der zu φ gehörende irreduzible Charakter von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$. Zur Definition unipotenter Charaktere vergleiche V.(3.4).

Beweis: Siehe [CR90, 70.24]. □

(1.7) Bemerkung
Dies ist in **CHEVIE** implementiert. Vergleiche [S+97, Kapitel 84].

V.2 Die Lusztig-Induktion

In diesem Abschnitt wollen wir eine Verallgemeinerung der Harish-Chandra-Induktion von Charakteren vorstellen, die auf Deligne und Lusztig [DL76] zurückgeht. Vergleiche dazu die Darstellung in dem Übersichtsartikel [Gec98] und die dort angegebenen Literaturangaben. Es gelten die gleichen Bezeichnungen wie in I.(5.3). Insbesondere ist $\mathbf{T}$ ein fest gewählter maximaler $\mathbf{F}$-stabiler Torus von $\mathbf{G}$ bezüglich dem das Wurzeldatum von $\mathbf{G}$ gegeben ist. Weiterhin wollen wir voraussetzen, dass das Zentrum von $\mathbf{G}$ zusammenhängend ist. Damit sind alle Zentralisatoren halbeinfacher Elemente in der dualen Gruppe $\mathbf{G}^*$ zusammenhängend.

(2.1) Definition (Lusztig-Induktion)
Es seien $\mathbf{L}$ eine reguläre Untergruppe von $\mathbf{G}$ und $\mathbf{P} = \mathbf{L} \ltimes \mathbf{U_P}$ die zugehörige Levizerlegung. Dabei ist $\mathbf{U_P}$ das unipotente Radikal von $\mathbf{P}$. Wir definieren die Menge

$$Y^{\mathbf{G},\mathbf{F}}_{\mathbf{L}\subseteq\mathbf{P}} := \mathcal{L}^{-1}(\mathbf{U_P}) = \{g \in \mathbf{G} \mid g^{-1}\mathbf{F}(g) \in \mathbf{U_P}\} \subseteq \mathbf{G}.$$

Dies ist eine algebraische Varietät, auf der $\mathbf{G}^\mathbf{F}$ per Linksmultiplikation und $\mathbf{L}^\mathbf{F}$ per Rechtsmultiplikation operiert. Es sei $\bar{\mathbb{Q}}_l$ der algebraische Abschluss der ℓ-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_\ell$ für eine Primzahl $\ell \neq p$. Wir betrachten die ℓ-adische Kohomologie mit kompaktem Träger und Werten in $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ auf der Varietät $Y^{\mathbf{G},\mathbf{F}}_{\mathbf{L}\subseteq\mathbf{P}}$. Für jedes $i \geq 0$ erhalten wir auf diese Weise einen $\bar{\mathbb{Q}}_l$-Vektorraum $H^i_c(Y^{\mathbf{G},\mathbf{F}}_{\mathbf{L}\subseteq\mathbf{P}}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$, die i-te Kohomologiegruppe. Die Operationen von $\mathbf{G}^\mathbf{F}$ und $\mathbf{L}^\mathbf{F}$ induzieren eine Bimodulstruktur auf diesen Kohomologiegruppen. Wir können dann zu jedem endlich dimensionalen $\mathbf{L}^\mathbf{F}$-Modul M den verallgemeinerten $\mathbf{G}^\mathbf{F}$-Modul

$$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subseteq\mathbf{P}}(M) := \sum_{i\geq o}(-1)^i H^i_c(Y^{\mathbf{G},\mathbf{F}}_{\mathbf{L}\subseteq\mathbf{P}}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell\mathbf{L}^\mathbf{F}} M$$

definieren. Die Abbildung

$$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subseteq\mathbf{P}} : \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(\mathbf{L}^\mathbf{F}) \longrightarrow \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(\mathbf{G}^\mathbf{F}),$$

die wir durch lineare Fortsetzung erhalten, heißt **Lusztig-Induktion** oder **verschränkte Induktion**.

(2.2) Bemerkung

(i) Die Lusztig-Induktion ist unabhängig von der Wahl der Primzahl $l \neq p$. Siehe [Car85, 7.1.4].

(ii) In vielen Fällen hängt die Abbildung $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subseteq\mathbf{P}}$ nur von $\mathbf{G}$ und $\mathbf{L}$ ab und ist unabhängig von der Wahl der parabolischen Untergruppe $\mathbf{P}$, die $\mathbf{L}$ enthält. Wir schreiben dann einfach $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}$. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn $\mathbf{L}$ maximal zerfallend oder ein maximaler Torus von $\mathbf{G}$ ist. Vergleiche [Car85, 7.3.6] und [DD93] Es wird vermutet, dass diese Unabhängigkeit von der Wahl der parabolischen Untergruppe immer gilt.

(iii) Ist $\mathbf{L}$ eine maximal zerfallende reguläre Untergruppe, so ist die Lusztig-Induktion genau die Harish-Chandra-Induktion, wie in III.(7.1) definiert. Siehe [DM91, Seite 81].

Der Fall, wenn $\mathbf{L}$ ein maximaler Torus ist, ist für die Darstellungstheorie der endlichen Gruppen vom Lie-Typ besonders wichtig.

(2.3) Definition

(i) Ist $\tilde{\mathbf{T}}$ ein $\mathbf{F}$-stabiler maximaler Torus von $\mathbf{G}$, so heißt die Abbildung $R_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{G}}$ **Deligne-Lusztig-Induktion**. Die Charaktere $R_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{G}}(\theta)$, wobei $\tilde{\mathbf{T}}$ ein beliebiger $\mathbf{F}$-stabiler maximaler Torus von $\mathbf{G}$ und $\theta \in \mathrm{Irr}(\tilde{\mathbf{T}}^{\mathbf{F}})$ ist, heißen **Deligne-Lusztig-Charaktere**.

(ii) Die Deligne-Lusztig-Charaktere spannen einen Teilraum im Vektorraum der Klassenfunktionen von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ auf. Die Klassenfunktionen in diesem Teilraum heißen **uniform**.

Wir wollen im Folgenden eine Charakterformel für die Deligne-Lusztig-Charaktere angeben. Diese Formel wurde zuerst in [DL76] bewiesen. Wir verwenden hier allerdings eine Formel, die in [Lüb93, 2.1] gezeigt wurde und die leichter auszuwerten ist und unter der Voraussetzung, dass die Kommutatorgruppe von $\mathbf{G}$ einfach zusammenhängend ist, äquivalent zur Charakterformel aus [DL76] ist. Die Idee bei dieser Formel ist, die Jordanzerlegung I.(1.8) zu benutzen, um die Berechnung der Werte der Deligne-Lusztig-Charaktere von $\mathbf{G}$ auf die Berechnung der Werte der Deligne-Lusztig-Charaktere von Zentralisatoren halbeinfacher Elemente auf unipotenten Elementen zu reduzieren. Wir benötigen dazu die folgende Definition:

(2.4) Definition (Greenfunktionen)

Es sei $\tilde{\mathbf{T}}$ ein maximaler $\mathbf{F}$-stabiler Torus von $\mathbf{G}$. Die Einschränkung von $R_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{G}}(\theta)$ auf die Menge der unipotenten Elemente von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ ist unabhängig von $\theta \in \mathrm{Irr}(\tilde{\mathbf{T}}^{\mathbf{F}})$ und heißt die **Greenfunktion** von $\mathbf{G}$ zum Torus $\tilde{\mathbf{T}}$ und wird mit $Q_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{G}}$ bezeichnet.

(2.5) Bemerkung

Die Greenfunktionen $Q_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{G}}$ hängen nur von der $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$-Konjugiertenklasse des Torus $\tilde{\mathbf{T}}$ ab. Sie werden daher nach Lemma III.(2.2) durch die $\mathbf{F}$-Konjugiertenklassen der Weylgruppe $\mathbf{W}$ von $\mathbf{G}$ parametrisiert.

(2.6) Satz (Charakterformel für Deligne-Lusztig-Charaktere, vgl. [Lüb93, 2.1])

Es seien $R_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{G}}(\theta)$ ein Deligne-Lusztig-Charakter von $\mathbf{G}$ und $g \in \mathbf{G}^{\mathbf{F}}$. Weiterhin seien $g = su = us$ mit s halbeinfach und u unipotent die Jordan-Zerlegung von g und $\mathbf{C} := C_{\mathbf{G}}(s)$ der Zentralisator von s in $\mathbf{G}$. Wir wollen voraussetzen, dass $\mathbf{C}$ zusammenhängend ist. Es seien $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_k$ Repräsentanten der $\mathbf{C}^{\mathbf{F}}$-Konjugiertenklassen maximaler $\mathbf{F}$-invarianter Tori von $\mathbf{C}$, die in der $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$-Konjugiertenklasse von $\tilde{\mathbf{T}}$ liegen und $s_{i1}, \ldots, s_{il_i}$ für $1 \leqslant i \leqslant k$ die verschiedenen Elemente der Form $s^x \in \tilde{\mathbf{T}}^{\mathbf{F}}$ mit $x \in \mathbf{G}^{\mathbf{F}}$, für die der Torus ${}^x\tilde{\mathbf{T}}$ in der $\mathbf{C}^{\mathbf{F}}$-Konjugiertenklasse von $\mathbf{T}_i$ liegt. Dann gilt:

$$R_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{G}}(\theta)(g) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{l_i} \theta(s_{ij}) \right) Q_{\mathbf{T}_i}^{\mathbf{C}}(u)$$

Beweis: Siehe [Lüb93, 2.1]. □

(2.7) Bemerkung

(i) Ist die Kommutatorgruppe von $\mathbf{G}$ einfach zusammenhängend, so sind alle Zentralisatoren halbeinfacher Elemente nach III.(3.2)(iv) zusammenhängend. Diese Voraussetzung ist also nach Korollar III.(3.5) für die Chevalleygruppen $F_4(q)$ erfüllt. In diesem Fall beschreibt die Charakterformel V.(2.6) alle Werte der Deligne-Lusztig-Charaktere. In [Car85, 7.2.8] ist eine Charakterformel angegeben, die auch ohne diese Voraussetzung gilt, die aber nicht so leicht auszuwerten ist.

(ii) Die $\mathbf{C}^{\mathbf{F}}$-Konjugiertenklassen maximaler Tori von $\mathbf{C}^{\mathbf{F}}$ stehen nach III.(2.3) in Bijektion zu den $\mathbf{F}$-Konjugiertenklassen der Weylgruppe $\mathbf{W}_{\mathbf{C}}$ von $\mathbf{C}$. Nach III.(4.12) gehört das halbeinfache Element s zu einem halbeinfachen Klassentyp $h(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})$ von $\mathbf{G}$. Wir setzen $\Psi := \mathbb{Z}\Pi \cap \Phi$. Der Frobeniusmorphismus $\mathbf{F}$ operiert auf $\mathbf{C}$ wie $\mathbf{F}w^{-1}$ auf $\mathbf{C}_\Psi$. Die $\mathbf{C}^{\mathbf{F}}$-Konjugiertenklassen maximaler $\mathbf{F}$-stabiler Tori stehen also in Bijektion zu den $\mathbf{F}w^{-1}$-Konjugiertenklassen von $\mathbf{W}_\Psi$. Nun lassen sich zu einem gegebenen Torus $\tilde{\mathbf{T}}$ von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ durch Rechnungen in $\mathbf{W}$ leicht die Vertreter $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_k$ der $\mathbf{C}^{\mathbf{F}}$-Konjugiertenklassen maximaler $\mathbf{F}$-stabiler Tori von $\mathbf{C}$ und die zugehörigen Anzahlen l_i wie in Satz V.(2.6) bestimmen. Es sei $\mathbf{T}_i$ ein Vertreter einer $\mathbf{C}^{\mathbf{F}}$-Konjugiertenklasse von $\mathbf{C}$ und $w_i \in \mathbf{W}_\Psi$ ein Vertreter der $\mathbf{F}w^{-1}$-Konjugiertenklasse von $\mathbf{W}_\Psi$, die dem Torus $\mathbf{T}_i$ bezüglich dieser Bijektion entspricht. Der Torus $\mathbf{T}_i$ liegt dann in der $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$-Konjugiertenklasse maximaler Tori von $\mathbf{G}$, die durch die $\mathbf{F}$-Konjugiertenklasse des Elementes $w_i w$ beschrieben wird. Für die Zahl l_i gilt dann:

$$l_i := \frac{C_{\mathbf{W},\mathbf{F}}(w_i w)}{C_{\mathbf{W}_\Psi,\mathbf{F}}(w_i w)}$$

Dies ist in [Lüb93, S. 29f] genauer beschrieben. Dort wird auch gezeigt, wie sich die Vertreter s_{ij} bestimmen lassen.

(iii) Besonders einfach lassen sich die Werte der Deligne-Lusztig-Charaktere $R_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{G}}(1)$ ausrechnen, wobei mit 1 der triviale Charakter von $\tilde{\mathbf{T}}^{\mathbf{F}}$ bezeichnet ist. Dann ist $\theta(s_{ij}) = 1$ für alle s_{ij}. Wir müssen in diesem Fall wie in (ii) die Fusion der Tori und die zugehörigen Anzahlen l_i bestimmen. Außerdem benötigen wir die Greenfunktionen $Q_{\mathbf{T}_i}^{\mathbf{C}}$ für alle Zentralisatoren halbeinfacher Elemente von $\mathbf{G}$. Die Charakterformel V.(2.6) reduziert sich dann zu:

$$R_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{G}}(1)(g) = \sum_{i=1}^{k} l_i Q_{\mathbf{T}_i}^{\mathbf{G}}(u)$$

Im Folgenden wollen wir einige wichtige Eigenschaften der Deligne-Lusztig-Charaktere zusammentragen.

(2.8) Bemerkung (Eigenschaften der Deligne-Lusztig-Charaktere)

(i) Die Charaktere $R_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{G}}(\theta)$ hängen nur von der $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$-Konjugiertenklasse des Paares $(\tilde{\mathbf{T}}, \theta)$ ab. Siehe [DM91, 11.15].

(ii) Es sei $\{(\mathbf{T}_i, \theta_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant r}$ ein Vertretersystem der $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$-Konjugiertenklassen auf der Menge der Paare $\{(\tilde{\mathbf{T}}, \theta) \mid \tilde{\mathbf{T}}$ ist $\mathbf{F}$-stabiler maximaler Torus von $\mathbf{G}, \theta \in \mathrm{Irr}(\tilde{\mathbf{T}}^{\mathbf{F}})\}$. Dann ist die

Menge der Deligne-Lusztig-Charaktere $\{R_{\mathbf{T}_i}^{\mathbf{G}}(\theta_i)\}_{1\leqslant i\leqslant r}$ ein bezüglich des Standardskalarproduktes orthogonales System von Klassenfunktionen und somit eine Basis des von $\{R_{\mathbf{T}_i}^{\mathbf{G}}(\theta_i)\}_{1\leqslant i\leqslant r}$ erzeugten Raumes. Vergleiche [Car85, 7.3.8].

(2.9) Lemma
Der triviale Charakter $1_{\mathbf{G}^F}$ ist eine uniforme Klassenfunktion und es gilt

$$1_{\mathbf{G}^F} = \sum_{w\in\mathcal{V}} \frac{1}{C_{\mathbf{W},\mathbf{F}}(w)} R_{\mathbf{T}_w}^{\mathbf{G}}(1),$$

wobei $\mathcal{V}$ ein Vertretersystem für die $\mathbf{F}$-Konjugiertenklassen von $\mathbf{W}$ ist und $\mathbf{T}_w$ ein Torus von $\mathbf{G}$, der durch Twisten mit w aus $\mathbf{T}$ entsteht.

Beweis: Siehe [DM91, 12.13]. □

(2.10) Satz
Es seien $\mathbf{P}$ eine parabolische Untergruppe von $\mathbf{G}$ mit $\mathbf{F}$-stabiler Leviuntergruppe $\mathbf{L}$ und χ eine Klassenfunktion von $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$. Es sei $g = s_g u_g = u_g s_g$ die Jordanzerlegung von $g \in \mathbf{G}^{\mathbf{F}}$, wobei s_g halbeinfach und u_g unipotent ist. Dann gilt:

(i) Ist $R_{\mathbf{L}\subseteq\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(\chi)(g) \neq 0$, so gibt es ein $l \in \mathbf{L}^{\mathbf{F}}$ mit Jordanzerlegung $l = s_l u_l$ und $\chi(l) \neq 0$, so dass s_g und s_l in $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ konjugiert sind.

(ii)
$$R_{\mathbf{L}\subseteq\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(\chi)(g) = \frac{1}{|C_{\mathbf{G}^F}(s_g)|}\frac{1}{|\mathbf{L}^{\mathbf{F}}|} \sum_{\{h\in\mathbf{G}^{\mathbf{F}}\mid s_g^h\in\mathbf{L}\}} |C_{\mathbf{L}^{\mathbf{F}}}(s)| R_{C_{h_{\mathbf{L}}}(s_g)\subseteq C_{h_{\mathbf{P}}}(s_g)}^{C_{\mathbf{G}}(s)}({}^h\chi)(g)$$

(iii) Ist $C_{\mathbf{G}}(s_g) \leqslant \mathbf{L}$ und $R_{\mathbf{L}\subseteq\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(\chi)(g) \neq 0$, so gibt es ein $l \in \mathbf{L}^{\mathbf{F}}$ mit $\chi(l) \neq 0$, so dass g und l in $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ konjugiert sind.

(iv) Ist $C_{\mathbf{G}}(s_g) \leqslant \mathbf{L}$, so gilt
$$R_{\mathbf{L}\subseteq\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(\pi_g^{\mathbf{L}^F}) = \pi_g^{\mathbf{G}^F}.$$
Dabei ist $\pi_g^{\mathbf{L}^F}$ die Indikatorfunktion der Konjugiertenklasse von g in $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$ und $\pi_g^{\mathbf{G}^F}$ die entsprechende Indikatorfunktion der Klasse von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$.

Beweis: Die Teile (i) und (iii) folgen direkt aus der Charakterformel für die Lusztig-Induktion, die in [DM91, 12.2] angegeben ist. Für Teil (ii) siehe [DM91, 12.4]. Für Teil (iv) siehe [DM91, 12.22]. □

(2.11) Satz (Transitivität der Lusztig-Induktion, vgl. [DM91, 11.5])
Es seien $\mathbf{Q} \leqslant \mathbf{P}$ zwei parabolische Untergruppen von $\mathbf{G}$, und $\mathbf{M}$ beziehungsweise $\mathbf{L}$ eine $\mathbf{F}$-stabile Leviuntergruppe von $\mathbf{Q}$ beziehungsweise $\mathbf{P}$ mit $\mathbf{M} \leqslant \mathbf{L}$. Dann gilt:

$$R_{\mathbf{L}\subseteq\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{M}\subseteq\mathbf{L}\cap\mathbf{Q}}^{\mathbf{L}} = R_{\mathbf{M}\subseteq\mathbf{Q}}^{\mathbf{G}}$$

Beweis: Siehe [DM91, 11.5]. □

V.3 Die Parametrisierung der Charaktere

Wir behalten die Bezeichnungen aus I.(5.3) bei. Weiter wollen wir voraussetzen, dass das Zentrum von $\mathbf{G}$ zusammenhängend ist und $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ eine Chevalleygruppe ist, das heißt, dass der Frobeniusmorphismus $\mathbf{F}$ trivial auf den Wurzeln von $\mathbf{G}$ operiert.

Mit der in Abschnitt V.1 vorgestellten Harish-Chandra-Theorie können wir zwar die irreduziblen Charaktere parametrisieren, diese Theorie erlaubt aber nicht so ohne weiteres, diese Charaktere auszurechnen, da die uniformen Klassenfunktionen im Allgemeinen nicht den Raum der Klassenfunktionen aufspannen. Wir wollen in diesem Abschnitt eine weitere Parametrisierung der irreduziblen Charaktere vorstellen, die auf Lusztig [Lus84] zurückgeht und auch eine Berechnung der irreduziblen Charaktere ermöglicht. Diese Parametrisierung benutzt die Parametrisierung der Charaktere in Harish-Chandra-Serien. Wir führen dafür zunächst einige Begriffe ein.

(3.1) Lemma
Es sei $\mathbf{G}^*$ die duale Gruppe von $\mathbf{G}$ mit zugehörigem dualen Frobeniusmorphismus $\mathbf{F}^*$. Es gibt eine Bijektion zwischen

- der Menge der $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$-Konjugiertenklassen von Paaren $(\tilde{\mathbf{T}}, \theta)$, wobei $\tilde{\mathbf{T}}$ ein $\mathbf{F}$-stabiler maximaler Torus von $\mathbf{G}$ und $\theta \in \mathrm{Irr}(\tilde{\mathbf{T}}^{\mathbf{F}})$ ist, und
- der Menge der $\mathbf{G}^{*\mathbf{F}^*}$-Konjugiertenklassen von Paaren $(\tilde{\mathbf{T}}^*, s^*)$, wobei $\tilde{\mathbf{T}}^*$ ein $\mathbf{F}^*$-stabiler maximaler Torus von $\mathbf{G}^*$ und $s^* \in \tilde{\mathbf{T}}^{*\mathbf{F}^*}$ ist.

Beweis: Siehe [DM91, 13.13]. □

(3.2) Bemerkung

(i) Diese Bijektion hängt von der Wahl einer Einbettung $k^* \longmapsto \bar{\mathbb{Q}}_\ell^*$ ab, mit deren Hilfe wir $\mathrm{Irr}(\mathbf{T}^{\mathbf{F}})$ mit $\mathbf{X}(\mathbf{T})/(\mathbf{F}-1)\mathbf{X}(\mathbf{T})$ identifizieren können. Vergleiche dazu [Car85, 3.2] und [DM91, 13.13].

(ii) Da die Deligne-Lusztig-Charaktere gemäß V.(2.8)(i) durch die $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$-Konjugiertenklassen der Paare $(\tilde{\mathbf{T}}, \theta)$ parametrisiert werden, erhalten wir durch diese Bijektion eine neue Parametrisierung der Deligne-Lusztig-Charaktere und schreiben auch $R_{\tilde{\mathbf{T}}^*}^{\mathbf{G}}(s^*)$ für den Charakter $R_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{G}}(\theta)$, wenn sich die Konjugiertenklassen von $(\tilde{\mathbf{T}}, \theta)$ und $(\tilde{\mathbf{T}}^*, s^*)$ bezüglich dieser Bijektion entsprechen.

(3.3) Satz
Haben zwei Deligne-Lusztig-Charaktere $R_{\tilde{\mathbf{T}}_1^*}^{\mathbf{G}}(s_1^*)$ und $R_{\tilde{\mathbf{T}}_2^*}^{\mathbf{G}}(s_2^*)$ einen gemeinsamen Konstituenten, so sind s_1^* und s_2^* in $\mathbf{G}^{*\mathbf{F}^*}$ konjugiert.

Beweis: Siehe [Lus77, 7.5.2] □

Wir können nun die gewünschte Parametrisierung der irreduziblen Charaktere von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ einführen.

(3.4) Definition (unipotente Charaktere und rationale Klassen, vgl. [DM91, 13.16,13.19])
Es sei $s^* \in \mathbf{G}^{*\mathbf{F}^*}$ ein halbeinfaches Element. Die Menge

$$\mathcal{E}(\mathbf{G}^{\mathbf{F}}, s^*) := \bigcup_{\tilde{\mathbf{T}}^*} \{\chi \in \mathrm{Irr}(\mathbf{G}^{\mathbf{F}}) \mid \langle \chi, R^{\mathbf{G}}_{\tilde{\mathbf{T}}^*}(s^*)\rangle_{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}} \neq 0\},$$

wobei $\tilde{\mathbf{T}}^*$ die maximalen $\mathbf{F}^*$-stabilen Tori von $\mathbf{G}^*$, die s^* enthalten durchläuft, heißt **rationale Klasse** von Charakteren von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$. Die Elemente von $\mathcal{E}(\mathbf{G}^{\mathbf{F}}, 1)$ heißen **unipotente** Charaktere von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$.

(3.5) Satz
Die rationalen Klassen von Charakteren von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ bilden eine Partition von $\mathrm{Irr}(\mathbf{G}^{\mathbf{F}})$.

Beweis: Siehe [Lus77, 7.6]. □

(3.6) Satz (Jordan-Zerlegung von Charakteren)
Es seien das Zentrum $Z(\mathbf{G})$ zusammenhängend und $s^* \in \mathbf{G}^{*\mathbf{F}^*}$. Dann existiert eine Bijektion

$$\mathcal{L}'_{s^*} : \mathcal{E}(\mathbf{G}^{\mathbf{F}}, s^*) \longmapsto \mathcal{E}(C_{\mathbf{G}^*}(s^*)^{\mathbf{F}^*}, 1).$$

Diese Bijektion kann so gewählt werden, dass für $\chi \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^{\mathbf{F}}, s^*)$ und $\tilde{\mathbf{T}}^*$ ein maximaler Torus von $\mathbf{G}^*$, der s^* enthält, gilt:

$$\left\langle \chi, R^{\mathbf{G}}_{\tilde{\mathbf{T}}^*}(s^*)\right\rangle_{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}} = \varepsilon_{s^*} \left\langle \mathcal{L}'_{s^*}(\chi), R^{C_{\mathbf{G}^*}(s^*)}_{\tilde{\mathbf{T}}^*}(1)\right\rangle_{C_{\mathbf{G}^*}(s^*)^{\mathbf{F}^*}}$$

Dabei ist $\varepsilon_{s^*} \in \{1, -1\}$ ein nur von s^* abhängiges Vorzeichen.

Beweis: Siehe [Lus84, 4.23]. □

Durch die Sätze V.(3.5) und V.(3.6) wird das Problem der Parametrisierung der Charaktere von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ zumindest im Falle $Z(\mathbf{G})$ zusammenhängend auf die Parametrisierung der unipotenten Charaktere der Zentralisatoren der halbeinfachen Elemente der dualen Gruppe zurückgeführt.

Wir wollen nun eine Parametrisierung der unipotenten Charaktere vorstellen. Wir erinnern noch einmal daran, dass wir hier der Einfachheit halber voraussetzen, dass der Frobeniusmorphismus $\mathbf{F}$ trivial auf den Wurzeln von $\mathbf{G}$ und der Weylgruppe $\mathbf{W}$ operiert. Dies ist keine wesentliche Einschränkung, erleichtert aber die Darstellung der Ergebnisse. Diese Voraussetzung ist bei den uns interessierenden Gruppen erfüllt. Die Parametrisierung wird in [Lus84] beschrieben und ist ein wesentlicher Schritt zum Beweis der Jordan-Zerlegung der Charaktere V.(3.6). Dazu wird eine Partition der unipotenten Charaktere in sogennante Familien definiert.

(3.7) Definition (uniforme unipotente Fastcharaktere)
Es sei $\varphi \in \mathrm{Irr}(\mathbf{W})$. Die Klassenfunktion

$$R_\varphi := \frac{1}{|\mathbf{W}|} \sum_{w \in \mathbf{W}} \varphi(w) R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}_w}(1)$$

heißt ein **uniformer unipotenter Fastcharakter** von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$.

(3.8) Bemerkung

(i) Es gilt für beliebige $w \in \mathbf{W}$:

$$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}_w}(1) = \sum_{\varphi \in \mathrm{Irr}(\mathbf{W})} \varphi(w) R_\varphi$$

(ii) Die Menge der uniformen unipotenten Fastcharaktere ist eine Orthonormalbasis für den $\bar{\mathbb{Q}}_l$-Vektorraum, der von der Menge $\{R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}_w}(1)\}_{w \in \mathbf{W}}$ aufgespannt wird. Dieser Vektorraum ist ein Teilraum des $\bar{\mathbb{Q}}_l$-Vektorraums, der von den unipotenten Charakteren von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ erzeugt wird.

Die grundlegende Idee der Parametrisierung der unipotenten Charaktere ist, die orthonormale Menge der uniformen unipotenten Fastcharaktere zu einer Orthonormalbasis des $\bar{\mathbb{Q}}_l$-Vektorraums, der von den unipotenten Charakteren von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ erzeugt wird, zu ergänzen und den Basiswechsel auf die Orthonormalbasis der irreduziblen unipotenten Charaktere explizit zu beschreiben. Dazu wird in [Lus84, Kapitel 4] eine Äquivalenzrelation auf der Menge der unipotenten Charaktere von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ definiert, deren Äquivalenzklassen Familien heißen. Wir können dann die gesuchte Basisergänzung und den Basiswechsel familienweise angeben.

(3.9) Definition/Lemma (Familien unipotenter Charaktere)

Es seien $\chi, \chi' \in \mathrm{Irr}(\mathbf{G}^{\mathbf{F}})$ unipotent. Wir definieren $\chi \sim \chi'$ genau dann, wenn es eine Folge

$$(\chi = \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_r = \chi')$$

mit $\chi_i \in \mathrm{Irr}(\mathbf{G}^{\mathbf{F}})$ unipotent gibt, so dass es für alle $1 \leqslant i \leqslant r-1$ ein $\varphi_i \in \mathrm{Irr}(\mathbf{W})$ gibt mit

$$\langle \chi_i, R_{\varphi_i} \rangle \neq 0 \text{ und } \langle \chi_{i+1}, R_{\varphi_i} \rangle \neq 0 \,.$$

Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der irreduziblen unipotenten Charaktere von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$. Die Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ heißen **Familien** unipotenter Charaktere von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$.

Beweis: Siehe [Lus84, 4.2ff]. □

(3.10) Satz

Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie unipotenter Charaktere von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$.

(i) Man kann der Familie $\mathcal{F}$ eine endliche Gruppe $\Gamma_{\mathcal{F}}$ zuordnen, so dass es eine Bijektion zwischen $\mathcal{F}$ und der Menge

$$X(\Gamma_{\mathcal{F}}) := \{(y, \tau) \mid y \in \mathsf{CL}(\Gamma_{\mathcal{F}}), \tau \in \mathrm{Irr}(C_{\Gamma_{\mathcal{F}}}(y))\}$$

gibt. Dabei ist $\mathsf{CL}(\Gamma_{\mathcal{F}})$ ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen von $\Gamma_{\mathcal{F}}$. Ist nun $\varrho \in X(\Gamma_{\mathcal{F}})$, so schreiben wir $\chi_{\varrho,\mathcal{F}}$ für den bezüglich dieser Bijektion zugehörigen unipotenten Charakter aus $\mathcal{F}$.

(ii) Definiert man eine Abbildung $\{\,,\,\} : X(\Gamma_{\mathcal{F}}) \times X(\Gamma_{\mathcal{F}}) \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_l$ durch

$$\{(y,\tau),(y',\tau')\} := \frac{1}{|C_{\Gamma_{\mathcal{F}}}(y)|}\frac{1}{|C_{\Gamma_{\mathcal{F}}}(y)|} \sum_{\substack{g\in\Gamma_{\mathcal{F}} \\ ygy'g^{-1}=gy'g^{-1}y}} \tau(gyg^{-1})\overline{\tau'(g^{-1}y'g)},$$

so gibt es eine Abbildung $\Delta : X(\Gamma_{\mathcal{F}}) \to \{1,-1\}$, so dass für alle $\varphi \in \mathrm{Irr}(\mathbf{W})$ mit $\chi_\varphi \in \mathcal{F}$ gilt:

$$R_\varphi = \sum_{\varrho\in X(\Gamma_{\mathcal{F}})} \{\varrho,\varrho_\varphi\}\Delta(\varrho)\chi_{\varrho,\mathcal{F}}$$

Dabei ist $\chi_\varphi \in \mathrm{Irr}(\mathbf{G}^{\mathbf{F}})$ der Hauptseriencharakter von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$, der gemäß Bemerkung V.(1.5) durch $\varphi \in \mathrm{Irr}(\mathbf{W})$ parametrisiert wird, und $\varrho_\varphi \in X(\Gamma_{\mathcal{F}})$ der durch die Bijektion aus (i) bestimmte Parameter von χ_φ.

Beweis: Siehe [Lus84, 4.23]. Der dort auftauchende Faktor $(-1)^{l(w_1)}$ ist im Falle unipotenter Familien immer trivial. □

(3.11) Bemerkung

(i) Die Abbildung Δ aus Satz V.(3.10) ist für Chevalleygruppen immer identisch 1, es sei denn die Weylgruppe enthält einen Faktor vom Typ E_7 oder E_8. Insbesondere ist Δ in allen uns interessierenden Fällen trivial.

(ii) Die Matrix $(\{\varrho_1,\varrho_2\})_{\varrho_1,\varrho_2\in X(\Gamma_{\mathcal{F}})}$ ist hermitsch, unitär und selbstinvers. Nach Lusztig wird sie daher **Fourier-Transformationsmatrix** genannt.

Wir können nun die Menge der uniformen unipotenten Fastcharaktere zu einer Orthonormalbasis der unipotenten Charaktere ergänzen.

(3.12) Definition (unipotenter Fastcharakter)
Es seien $\mathcal{F}$ eine Familie unipotenter Charaktere und $\varrho \in X(\Gamma_{\mathcal{F}})$. Die Klassenfunktion

$$R_{\varrho,\mathcal{F}} := \sum_{\sigma\in X(\Gamma_{\mathcal{F}})} \{\sigma,\varrho\}\Delta(\sigma)\chi_{\sigma,\mathcal{F}}$$

heißt **unipotenter Fastcharakter** der Familie $\mathcal{F}$ zum Parameter ϱ. Ist die Familie $\mathcal{F}$ aus dem Zusammenhang heraus klar und keine Verwechslung zu befürchten, so schreiben wir auch einfach R_ϱ.

(3.13) Bemerkung

(i) Ist $\varphi \in \mathrm{Irr}(\mathbf{W})$ mit $\chi_\varphi \in \mathcal{F}$, so ist $R_\varphi = R_{\varrho_\varphi,\mathcal{F}}$. Damit ist die Menge der uniformen unipotenten Fastcharaktere eine Teilmenge der unipotenten Fastcharaktere.

(ii) Die Menge $\{R_{\varrho,\mathcal{F}} \mid \varrho \in X(\Gamma_{\mathcal{F}})\}$ bildet nach [Lus84] eine Orthonormalbasis für den Vektorraum, der von den Charakteren aus $\mathcal{F}$ aufgespannt wird. Ist Δ trivial, so gibt die Fourier-Transformationsmatrix $(\{\varrho_1,\varrho_2\})_{\varrho_1,\varrho_2\in X(\Gamma_{\mathcal{F}})}$ nach Satz V.(3.10) und Definition V.(3.12) die Transformationsmatrix zwischen dieser Basis und der Orthonormalbasis, die durch die irreduziblen Charaktere in $\mathcal{F}$ gegeben ist, an.

(iii) Mit der Jordanzerlegung der Charaktere V.(3.6) kann man die Definition der unipotenten Fastcharaktere auf die Fastcharaktere verallgemeinern, die dann eine Orthonormalbasis des Raumes der Klassenfunktionen von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ bilden. Vergleiche dazu [Lus84]. Wir werden dies im Verlauf der Arbeit aber nicht benötigen.

(iv) Wir haben somit zwei verschiedene Parametrisierungen der unipotenten Charaktere. Die eine wird durch Satz V.(1.4) gegeben, die andere durch Satz V.(3.10).

(v) Die Harish-Chandra-Induktion III.(7.1) kann durch lineare Fortsetzung auf den Raum der Klassenfunktionen erweitert werden. Wir können dann genau wie im Fall der irreduziblen Charaktere Harish-Chandra-Serien analog zu Definition V.(1.2) definieren. Die **kuspidalen unipotenten Fastcharaktere** sind dann entsprechend genau die Fastcharaktere, die nicht als Konstituenten in von echten Leviuntergruppen Harish-Chandra-induzierten Fastcharakteren vorkommen. Die uniformen unipotenten Fastcharaktere bilden genau die Hauptserie.

(3.14) Bezeichnungen (Notation der unipotenten Charaktere klassischer Gruppen)
Im Verlauf dieser Arbeit werden auch unipotente Charaktere klassischer Gruppen, insbesondere der Typen B_2, B_3 und C_3 vorkommen. Die unipotenten Charaktere der Hauptserie und die uniformen unipotenten Fastcharaktere lassen sich genau wie die irreduziblen Charaktere der Weylgruppen durch Doppelpartitionen parametrisieren. Durch sogenannte Symbole lassen sich auch die anderen unipotenten Fastcharaktere und Charaktere parametrisieren. Wir wollen dies hier nicht weiter ausführen sondern verweisen auf die detaillierte Beschreibung in [Car85, 13.8]. Diese Notation wird auch von **CHEVIE** benutzt.

V.4 Die unipotenten Charaktere von $F_4(q)$

In diesem Abschnitt wollen wir die unipotenten Charaktere von $F_4(q)$ beschreiben. Wir behalten die Notation aus Abschnitt II.3 bei. Es seien also q eine Primzahlpotenz, k der algebraische Abschluss von $\mathbb{F}_q$ und $\mathbf{G} := \mathbf{F}_4(k)$ mit Frobeniusmorphismus $\mathbf{F}$, so dass $\mathbf{G}^{\mathbf{F}} = F_4(q)$ eine Chevalleygruppe vom Typ F_4 ist.

Für jeden unipotenten Charakter von $F_4(q)$ geben wir den Grad und die Parameter an, die ihn beschreiben. Weiter geben wir die Einteilung der Charaktere in Familien und Serien gemäß V.(1.4) und V.(3.10) an. Diese Ergebnisse wurden zuerst von Lusztig in [Lus80] bewiesen. Wir verwenden hier die Bezeichnungen aus [Car85, 13.9].

Die Gruppe $F_4(q)$ hat 37 unipotente Charaktere, davon liegen 25 Charaktere in der Hauptserie $\mathcal{E}(\mathbf{G}, \mathbf{T}, \mathbf{F})$. Diese werden gemäß Bemerkung V.(1.5) durch die irreduziblen Charaktere von $\mathbf{W}$ parametrisiert und mit

$$\phi_{1,0}, \phi''_{1,12}, \phi'_{1,12}, \phi_{1,24}, \phi''_{2,4}, \phi'_{2,16}, \phi'_{2,4}, \phi''_{2,16}, \phi_{4,8}, \phi_{9,2}, \phi''_{9,6}, \phi'_{9,6}, \phi_{9,10},$$
$$\phi'_{6,6}, \phi''_{6,6}, \phi_{12,4}, \phi_{4,1}, \phi''_{4,7}, \phi'_{4,7}, \phi_{4,13}, \phi''_{8,3}, \phi'_{8,9}, \phi'_{8,3}, \phi''_{8,9}, \phi_{16,5}$$

bezeichnet. Sieben Charaktere liegen in der diskreten Serie $\mathcal{E}(\mathbf{G}, \mathbf{G}, \mathbf{F})$ und sind somit kuspidal. Sie werden mit

$$F_4^I[1],\ F_4^{II}[1],\ F_4[-1],\ F_4[i],\ F_4[-i],\ F_4[\theta],\ F_4[\theta^2]$$

bezeichnet. Die Serie $\mathcal{E}(\mathbf{G}, \mathbf{L}_1, \mathbf{F})$, wobei $\mathbf{L}_1$ die in Tabelle A.6 angegebene Leviuntergruppe vom Typ B_2 ist, enthält die fünf restlichen unipotenten Charaktere. Diese Charaktere werden durch die irreduziblen Charaktere von $\mathbf{W}^{\mathbf{L}_1,\delta}$ beschrieben, wobei δ der kuspidale Charakter von $\mathbf{L}_1^{\mathbf{F}}$ ist. Diese Gruppe ist isomorph zur Diedergruppe D_8 und hat fünf irreduzible Charaktere, die mit $1, \varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ und r bezeichnet werden. Dabei sind $\varepsilon, \varepsilon'$ und ε'' die drei nicht-trivialen eindimensionalen Charaktere und r der zweidimensionale Charakter von $\mathbf{W}^{\mathbf{L}_1,\delta}$. Die genaue Zuordnung der Charaktere $\varepsilon, \varepsilon'$ und ε'' ist bei der Beschreibung der Parameter der Familien am Ende dieses Abschnitts angegeben. Die unipotenten Charaktere dieser Serie werden entsprechend mit

$$B_{2,1},\quad B_{2,\varepsilon},\quad B_{2,\varepsilon'},\quad B_{2,\varepsilon''},\quad B_{2,r}$$

bezeichnet.

Diese 37 unipotenten Charaktere verteilen sich auf 11 Familien, davon haben acht Familien jeweils genau ein Element, zwei Familien jeweils genau vier Elemente und eine Familie 21 Elemente. Die Mengen

$$\begin{array}{llll} \mathcal{F}_1 := \{\phi_{1,0}\}, & \mathcal{F}_2 := \{\phi_{9,2}\}, & \mathcal{F}_3 := \{\phi'_{8,3}\}, & \mathcal{F}_4 := \{\phi''_{8,3}\}, \\ \mathcal{F}_5 := \{\phi'_{8,9}\}, & \mathcal{F}_6 := \{\phi''_{8,9}\}, & \mathcal{F}_7 := \{\phi_{9,10}\}, & \mathcal{F}_8 := \{\phi_{1,24}\} \end{array}$$

bilden die acht einelementigen Familien unipotenter Charaktere. Es gilt $\Gamma_{\mathcal{F}_i} = \{1\}$ und somit $X(\Gamma_{\mathcal{F}_i}) = \{(1,1)\}$ für alle $1 \leqslant i \leqslant 8$. Die beiden vierelementigen Familien sind

$$\mathcal{F}_9 := \{\phi_{4,1}, \phi''_{2,4}, \phi'_{2,4}, B_{2,1}\}, \quad \mathcal{F}_{10} := \{\phi_{4,13}, \phi'_{2,16}, \phi''_{2,16}, B_{2,\varepsilon}\}$$

Es ist $\Gamma_{\mathcal{F}_i} = S_2$ für $i = 9, 10$ die symmetrische Gruppe auf zwei Punkten. Zur Bezeichnung der Parametermengen $X(\Gamma_{\mathcal{F}_i})$ benutzen wir die Notation aus [Car85, 13.6]. Damit ist für $i = 9, 10$

$$X(\Gamma_{\mathcal{F}_i}) = \{(1,1), (1,\varepsilon), (g_2,1), (g_2,\varepsilon)\}.$$

Die übrigen Charaktere bilden die letzte Familie

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{11} := \ & \{\phi_{12,4}, \phi'_{9,6}, \phi'_{1,12}, F_4^{II}[1], \phi''_{6,6}, \\ & \phi_{16,5}, F_4[-1], B_{2,\epsilon''}, \phi'_{4,7}, \\ & \phi''_{9,6}, F_4^I[1], \phi''_{1,12}, \phi_{4,8}, B_2, r, \\ & \phi'_{6,6}, F_4[\theta], F_4[\theta^2], \\ & \phi''_{4,7}, B_{2,\epsilon'}, F_4[i], F_4[-i]\}. \end{aligned}$$

Die zugehörige Gruppe ist $\Gamma_{\mathcal{F}_{11}} \cong S_4 = \langle (1,2), (1,2,3,4) \rangle$, die symmetrische Gruppe auf vier Punkten und es gilt

$$\begin{aligned} X(\Gamma_{\mathcal{F}_{11}}) = \ & \{(1,1), (1,\lambda^1), (1,\lambda^2), (1,\lambda^3), (1,\sigma), \\ & (g_2,1), (g_2,\varepsilon), (g_2,\varepsilon'), (g_2,\varepsilon''), \\ & (g'_2,1), (g'_2,\varepsilon), (g'_2,\varepsilon'), (g'_2,\varepsilon''), (g'_2,r), \\ & (g_3,1), (g_3,\theta), (g_3,\theta^2), \\ & (g_4,1), (g_4,-1), (g_4,i), (g_4,-i)\}. \end{aligned}$$

Dabei sind $g_2 := (1,2)$, $g_2' := (1,2)(3,4)$, $g_3 := (1,2,3)$ und $g_4 := (1,2,3,4)$. Für $i = 3,4$ gilt $C_{S_4}(g_i) = \langle g_i \rangle$. Wir geben die Charaktere dieser Zentralisatoren durch den Wert auf dem Erzeuger g_i an. Insbesondere bezeichnen i beziehungsweise $-i$ primitive vierte Einheitswurzeln und θ beziehungsweise θ^2 primitive dritte Einheitswurzeln in $\mathbf{C}$.

Weiter gilt $C_{S_4}(g_2) = \langle (1,2), (3,4) \rangle$. Die nicht-trivialen Charaktere dieser Gruppe bezeichnen wir mit ε,ε' und ε''. Dabei gelte $\varepsilon'((1,2)) = -1$, $\varepsilon'((3,4)) = 1$ beziehungsweise $\varepsilon''((1,2)) = 1$, $\varepsilon''((3,4)) = -1$. Es ist $C_{S_4}(g_2') = \langle (1,2), (1,3,2,4) \rangle$, die Diedergruppe mit acht Elementen. Der Charakter der zweidimensionalen Darstellung sei r und weiter $\varepsilon'((1,2)) = -1$ und $\varepsilon'((1,3,2,4)) = -1$ und $\varepsilon''((1,2)) = 1$ und $\varepsilon''((1,3,2,4)) = -1$. Den zweidimensionalen Charakter von S_4 bezeichnen wir mit σ, den Charakter der Spiegelungsdarstellung mit λ^1. Die Charaktere λ^2, beziehungsweise λ^3 sind die entsprechenden äußeren Produkte. Diese Bezeichnungen decken sich mit denen in [Car85, Seite 454].

Die Reihenfolge, in der die Elemente der Parametermengen aufgeschrieben sind, entspricht genau der Reihenfolge der Elemente der zugehörigen Familie unter der Bijektion aus V.(3.10)(i). Die Fourier-Transformationsmatrizen lassen sich dann mit V.(3.10)(ii) leicht bestimmen. Wir wollen sie hier nicht abdrucken. Die 4×4-Matrix zu den Familien $\mathcal{F}_9$ und $\mathcal{F}_{10}$ steht in [Car85, Seite 455]. Die 21×21-Matrix zur Familie $\mathcal{F}_{11}$ steht in [Car85, Seite 456]. Die Fourier-Transformationsmatrizen der anderen Familien sind trivial.

Die 37 unipotenten Fastcharaktere werden gemäß Definition V.(3.12) parametrisiert. Die 25 uniformen unipotenten Fastcharaktere sind nach [Car85, 13.6]

$$R_{(1,1),\mathcal{F}_1},\ R_{(g_2',\varepsilon'),\mathcal{F}_{11}},\ R_{(1,\lambda^2),\mathcal{F}_{11}},\ R_{(1,1),\mathcal{F}_8},\ R_{(1,\varepsilon),\mathcal{F}_9},\ R_{(1,\varepsilon),\mathcal{F}_{10}},\ R_{(g_2,1),\mathcal{F}_9},$$
$$R_{(g_2,1),\mathcal{F}_{10}},\ R_{(g_2',\varepsilon''),\mathcal{F}_{11}},\ R_{(1,1),\mathcal{F}_2},\ R_{(g_2',1),\mathcal{F}_{11}},\ R_{(1,\lambda^1),\mathcal{F}_{11}},\ R_{(1,1),\mathcal{F}_7},\ R_{(g_3,1),\mathcal{F}_{11}},$$
$$R_{(1,\sigma),\mathcal{F}_{11}},\ R_{(1,1),\mathcal{F}_{11}},\ R_{(1,1),\mathcal{F}_9},\ R_{(g_4,1),\mathcal{F}_{11}},\ R_{(g_2,\varepsilon''),\mathcal{F}_{11}},\ R_{(1,1),\mathcal{F}_{10}},\ R_{(1,1),\mathcal{F}_4},$$
$$R_{(1,1),\mathcal{F}_5},\ R_{(1,1),\mathcal{F}_3},\ R_{(1,1),\mathcal{F}_6},\ R_{(g_2,1),\mathcal{F}_{11}}.$$

Die sieben kuspidalen Fastcharaktere sind nach [Car85, 13.6]

$$R_{(g_2',\varepsilon),\mathcal{F}_{11}},\ R_{(1,\lambda^3),\mathcal{F}_{11}},\ R_{(g_2,\varepsilon),\mathcal{F}_{11}},\ R_{(g_4,i),\mathcal{F}_{11}},\ R_{(g_4,-i),\mathcal{F}_{11}},\ R_{(g_3,\theta),\mathcal{F}_{11}},\ R_{(g_3,\theta^2),\mathcal{F}_{11}},$$

die fünf Fastcharaktere in der Harish-Chandra-Serie vom Typ B_2 sind nach [Car85, 13.6]

$$R_{(g_2,\varepsilon),\mathcal{F}_9},\ R_{(g_2,\varepsilon),\mathcal{F}_{10}},\ R_{(g_4,-1),\mathcal{F}_{11}},\ R_{(g_2,\varepsilon'),\mathcal{F}_{11}},\ R_{(g_2',r),\mathcal{F}_{11}}.$$

Diese treten als Konstituenten von $R_{\mathbf{L}_1}^{\mathbf{G}}(\delta_1)$ auf, wobei δ_1 der durch das Symbol $\binom{1,2,3}{-}$ beschriebene kuspidale unipotente Fastcharakter von $\mathbf{L}_1$ ist. Vergleiche dazu Abschnitt V.7. In Tabelle A.21 sind die Parameter der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$ zusammen mit den Charaktergraden angegeben. Diese wurden von Lusztig in [Lus80] bestimmt.

V.5 Überblick zur Berechnung der unipotenten Charaktere

In diesem Abschnitt geben wir einen Überblick zur Berechnung der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$ für Primzahlpotenzen q in guter Charakteristik, das heißt $2, 3 \nmid q$. Wir folgen dabei dem

Vorgehen in [Lüb93, Kapitel 2]. Unter Berechnung der unipotenten Charaktere verstehen wir die Angabe der Charakterwerte auf den Konjugiertenklassen, wie sie in Tabelle A.9 gegeben sind. Wir werden sehen, dass die unipotenten Charaktere konstant auf den Klassentypen sind. Dies ist a priori nicht klar, sondern folgt erst aus der Berechnung.

(i) **Berechnung der Deligne-Lusztig-Charaktere $R_{\mathbf{T}_w}^{\mathbf{G}}(1)$:**
Zur Berechnung der Deligne-Lusztig-Charaktere $R_{\mathbf{T}_w}^{\mathbf{G}}(1)$ benutzen wir die Charakterformel aus Bemerkung V.(2.7)(iii). Die auftretenden Koeffizienten lassen sich mit der Formel aus Bemerkung V.(2.7)(ii) leicht bestimmen. Die Greenfunktionen von $F_4(q)$ sind in [Sho82] angegeben und in der Datenbank der Greenfunktionen von **CHEVIE** [GHL$^+$96] vorhanden. Die Greenfunktionen der restlichen Zentralisatoren halbeinfacher Elemente sind entweder auch in der Datenbank von **CHEVIE** vorhanden oder lassen sich aus diesen berechnen. Dies wird genauer in [Lüb93, Kapitel 5] beschrieben. Vergleiche dazu auch [LS90]. Das einzige Problem ist, dass in der Datenbank von **CHEVIE** meist keine Konjugiertenklassenvertreter abgespeichert sind. Die Konjugiertenklassen sind meist anders parametrisiert. Durch Vergleich der Zentralisatorordnungen mit Tabelle A.9 können wir aber leicht den Konjugiertenklassen Vertreter zuordnen. Wir haben die Greenfunktionen auf diese Weise berechnet, wollen sie aber in dieser Arbeit nicht abdrucken, da sie sich aus der abgedruckten Tafel der unipotenten Charakteren A.28 rekonstruieren lassen. Vergleiche dazu die Bemerkungen in [Lüb93, Seite 50f.]. Mit Hilfe der Greenfunktionen können wir die Deligne-Lustig-Charaktere $R_{\mathbf{T}_w}^{\mathbf{G}}(1)$ vollständig bestimmen Auch diese wollen wir hier nicht ausdrucken, sie lassen sich aber aus den unipotenten Charakteren A.28 leicht durch Bilden der entsprechenden Linearkombinationen rekonstruieren. Dazu muss man aus den unipotenten Charakteren mit Hilfe von V.(3.10)(ii) die uniformen unipotenten Fastcharaktere und mit Hilfe von V.(3.8)(i) die Deligne-Lusztig-Charaktere berechnen.

(ii) **Berechnung der uniformen unipotenten Fastcharaktere:**
Die uniformen unipotenten Fastcharaktere lassen sich mit Hilfe von Definition V.(3.7) aus den Deligne-Lusztig-Charakteren berechnen. Wir benötigen dazu nur die Charaktertafel der Weylgruppe $\mathbf{W}$. Diese wurde von Kondo [Kon65] berechnet und ist in der Datenbank von **CHEVIE** abgespeichert. Wir erhalten auf diese Weise schon die ersten acht unipotenten irreduziblen Charaktere von $F_4(q)$, nämlich die Charaktere der einelementigen Familien $\mathcal{F}_i$ für $1 \leqslant i \leqslant 8$.

(iii) **Berechnung der kuspidalen Fastcharaktere:**
Die Werte der sieben kuspidalen Fastcharaktere wurden schon in [Shi97] und unabhängig davon im Fall $q \equiv 1$ modulo 12 in [Win95] bestimmt. Da wir diese Werte ohne großen Aufwand neu berechnen können, wollen wir dies zum Vergleich der Ergebnisse und zum Test der in Kapitel IV berechneten Charaktere durchführen. Wir folgen dabei dem Vorgehen in [Shi97]. Wir verwenden, dass die kuspidalen Fastcharaktere nur auf sehr wenigen Konjugiertenklassen nicht-verschwindende Werte haben. Diese Werte sind bis auf Einheitswurzeln durch die charakteristischen Funktionen kuspidaler Charaktergarben bestimmt, deren Werte sich leicht bestimmen lassen. Die noch fehlenden Einheitswurzeln bestimmen wir dann aus Skalarprodukten mit Linearkombinationen der

Charaktere in Tabelle A.20. Mit Hilfe der Fourier-Transformationsmatrizen können wir sieben weitere irreduzible unipotente Charaktere der Familie $\mathcal{F}_{11}$ berechnen. Dies wird ausführlicher in Abschnitt V.6 beschrieben.

(iv) **Beschreibung der restlichen Fastcharaktere:**
Es bleibt noch die Bestimmung der übrigen fünf Fastcharaktere, die als Konstituenten im Harish-Chandra induzierten kuspidalen Fastcharakter von der Untergruppe $\mathbf{L}_1$ vorkommen. Wir betrachten dazu Vertreter $\mathbf{L}_i$ für $1 \leqslant i \leqslant 5$ der fünf Konjugiertenklassen von Leviuntergruppen vom Typ B_2. Diese Leviuntergruppen haben jeweils einen unipotenten kuspidalen Fastcharakter δ_i . Wenden wir die Lusztig-Induktion $R_{\mathbf{L}_i}^{\mathbf{G}}$ auf diesen Fastcharakter an, so erhalten wir fünf Klassenfunktionen von $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$, die sich jeweils als Linearkombinationen der gesuchten fünf Fastcharaktere schreiben lassen. Wir bestimmen die Koeffizienten dieser Linearkombinationen mittels Harish-Chandra-Induktion und expliziten Ergebnissen über die Zerlegung Lusztig-induzierter Charaktere, wie sie in [BMM93] angegeben sind. Wir können somit die gesuchten Fastcharaktere als explizite Linearkombinationen der $R_{\mathbf{L}_i}^{\mathbf{G}}(\delta_i)$ schreiben. Dies wird ausführlich in Abschnitt V.7 beschrieben.

(v) **Bestimmung der fehlenden Werte:**
Um die noch fehlenden unipotenten Charaktere zu bestimmen, müssen die Charaktere $R_{\mathbf{L}_i}^{\mathbf{G}}(\delta_i)$ für $1 \leqslant i \leqslant 5$ berechnet werden. Durch Harish-Chandra-Induktion von bekannten Charakteren der Leviuntergruppen $\mathbf{L}_6$ und $\mathbf{L}_8$ erhalten wir drei der gesuchten Klassenfunktionen. Mit Hilfe von Satz V.(2.10) können wir zeigen, dass die noch fehlenden zwei Klassenfunktionen nur auf wenigen Konjugiertenklassen nicht-verschwindende Werte haben, und viele dieser Werte direkt berechnen. Außerdem ergibt sich, dass diese Klassenfunktionen konstant auf den Klassentypen sind. Wir können daher die noch fehlenden Werte als Unbestimmte annehmen und in Abhängigkeit dieser Unbestimmten die restlichen irreduziblen unipotenten Charaktere mit Hilfe der Fourier-Transformationsmatrizen ausrechnen. Wir bestimmen explizit einige Charakterwerte mittels der Charakterformel von Ree [CR90, 11.34]. Dadurch ergeben sich die Werte einiger Unbestimmten. Die fehlenden Werte können wir durch Skalarproduktbildung der irreduziblen Charaktere mit den Charakteren aus Tabelle A.20 und Eigenschaften wie zum Beispiel der Ganzzahligkeit der Skalarprodukte berechnen. Dies wird in Abschnitt V.9 beschrieben. Die Tabelle A.28 gibt die Werte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$ für Primzahlpotenzen q mit $2, 3 \nmid q$ an.

(5.1) Bemerkung

(i) Bei der Berechnung der unipotenten Charaktere in guter Charakteristik müssen wir die vier Fälle $q \equiv 1$, $q \equiv 5$, $q \equiv 7$ und $q \equiv 11$ modulo 12 unterscheiden. Wir werden diese Rechnungen im Folgenden nur für die Kongruenz $q \equiv 1$ modulo 12 durchführen. Die restlichen Fälle lassen sich aber genauso behandeln, die Argumente und Rechnungen ändern sich kaum.

(ii) Die berechneten Charaktertafeln der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$ aber auch die Tafeln weiterer Charaktere von $F_4(q)$, wie zum Beispiel der in Kapitel IV berechne-

ten projektiven Charaktere, aber auch der von den Leviuntergruppen L_6 und L_8 Harish-Chandra-induzierten unipotenten Charaktere sollen in die Datenbank von **CHEVIE** aufgenommen und dadurch zur Verfügung gestellt werden. Außerdem können die entsprechenden Dateien von der Webseite [Kö05] heruntergeladen werden.

V.6 Die kuspidalen unipotenten Fastcharaktere

Wir behalten die Bezeichnungen aus V.5 bei. In diesem Abschnitt wollen wir die unipotenten kuspidalen Fastcharakter von $F_4(q)$ mit $2, 3 \nmid q$ bestimmen. Der kuspidale Fastcharakter $R_{(1,\lambda^3),\mathcal{F}_{11}}$ wurde zuerst von Kawanaka in [Kaw86] für große q bestimmt. Für $q \equiv 1$ modulo 12 wurden alle kuspidalen Fastcharaktere von Wings in [Win95] berechnet. Shinoda hat die kuspidalen Fastcharaktere für alle $2, 3 \nmid q$ in [Shi97] bestimmt. Da die Zuordnung der Charakterwerte zu den Konjugiertenklassen durch die Berechnungen in [Shi97] nicht geklärt wird, wollen wir die unipotenten kuspidalen Fastcharaktere neu berechnen. Dies dient auch zum Test der in Kapitel IV berechneten Charaktere von $F_4(q)$. Gemäß Bemerkung V.(5.1)(i) beschränken wir uns in der Darstellung hier auf den Fall $q \equiv 1$ modulo 12. Die anderen Fälle können entsprechend behandelt werden. Die kuspidalen unipotenten Fastcharaktere haben nur auf sehr wenigen Konjugiertenklassen nicht-verschwindende Charakterwerte. Genauer gilt folgender Satz:

(6.1) Satz
Es sei q eine Primzahlpotenz mit $2, 3 \nmid q$, dann gilt:

(i) Der Fastcharakter $R_{(1,\lambda^3),\mathcal{F}_{11}}$ verschwindet auf allen Konjugiertenklassen außer auf den Konjugiertenklassen der Klassentypen $\{c_{1,15}, c_{1,16}, c_{1,17}, c_{1,18}, c_{1,19}\}$.

(ii) Der Fastcharakter $R_{(g_2,\varepsilon),\mathcal{F}_{11}}$ verschwindet auf allen Konjugiertenklassen außer auf den Konjugiertenklassen der Klassentypen $\{c_{2,21}, c_{2,22}, c_{2,23}, c_{2,24}\}$.

(iii) Der Fastcharakter $R_{(g_2',\varepsilon),\mathcal{F}_{11}}$ verschwindet auf allen Konjugiertenklassen außer auf den Konjugiertenklassen der Klassentypen $\{c_{3,18}, c_{3,19}, c_{3,20}, c_{3,21}, c_{3,22}\}$.

(iv) Ist $q \equiv 1$ modulo 3, so verschwinden die Fastcharaktere $R_{(g_3,\theta),\mathcal{F}_{11}}$ und $R_{(g_3,\theta^2),\mathcal{F}_{11}}$ auf allen Konjugiertenklassen außer auf den Klassen der Klassentypen $\{c_{4,9}, c_{4,10}, c_{4,11}\}$. Ist $q \equiv 2$ modulo 3, so verschwinden diese beiden Fastcharaktere auf allen Konjugiertenklassen außer auf den Konjugiertenklassen der Klassentypen $\{c_{5,9}, c_{5,10}, c_{5,11}\}$.

(v) Ist $q \equiv 1$ modulo 4, verschwinden die beiden Fastcharaktere $R_{(g_4,i),\mathcal{F}_{11}}$ und $R_{(g_4,-i),\mathcal{F}_{11}}$ auf allen Klassen außer auf den Klassen der Klassentypen $\{c_{6,13}, c_{6,14}, c_{6,15}, c_{6,16}\}$. Ist dagegen $q \equiv 3$ modulo 4, so verschwinden diese beiden Fastcharaktere auf allen Konjugiertenklassen außer auf den Klassen der Klassentypen $\{c_{7,13}, c_{7,14}, c_{7,15}, c_{7,16}\}$.

Beweis: Die kuspidalen Fastcharaktere von $F_4(q)$ stimmen nach [Sho95] bis auf skalare Vielfache mit den charakteristischen Funktionen kuspidaler Charaktergarben von $F_4(q)$ überein. Wir wollen hier den Begriff der kuspidalen Charaktergarben nicht definieren, wir benötigen nur, dass Lusztig in [Lus86, 21.3] die kuspidalen Charaktergarben von $F_4(q)$ beschrieben und gezeigt hat,

dass die zugehörigen charakteristischen Funktionen nur auf den angegebenen Konjugiertenklassen nicht-verschwindende Werte haben. □

(6.2) Bemerkung

(i) Die in Satz V.(6.1) vorkommenden Klassentypen enthalten alle nach Tabelle A.7 höchstens eine Konjugiertenklasse. Daher sind die kuspidalen Fastcharaktere konstant auf Klassentypen.

(ii) Die kuspidalen Fastcharaktere $R_{(g_3,\theta),\mathcal{F}_{11}}$, $R_{(g_3,\theta^2),\mathcal{F}_{11}}$, $R_{(g_4,i),\mathcal{F}_{11}}$ und $R_{(g_4,-i),\mathcal{F}_{11}}$ hängen gemäß Satz V.(6.1) von der Kongruenzklasse von q modulo 12 ab. Wir können die verschiedenen Fälle aber in jeweils eine Klassenfunktion zusammenfassen, da $F_4(q)$ nach Tabelle A.7 jeweils genau eine Klasse vom halbeinfachen Klassentyp h_5 oder h_6 beziehungsweise h_7 oder h_8 hat und der Charakterwert eines Klassentyps irrelevant ist, wenn die Gruppe keine Konjugiertenklasse dieses Klassentyps hat.

(iii) In [Lus86, 23.1] werden die Charakterwerte der charakteristischen Funktionen der kuspidalen Charaktergarben bis auf skalare Vielfache angegeben. Diese Information wird in [Shi97] zur Berechnung der kuspidalen Fastcharaktere benutzt. Dort müssen also nur noch die richtigen skalaren Vielfachen bestimmt werden. Diese Beschreibung erlaubt allerdings keine genaue Zuordnung der Werte zu den entsprechenden Konjugiertenklassen. Ist man nur an den Werten der Fastcharaktere interessiert, so reicht diese Beschreibung aus. Da wir aber auch die genaue Zuordnung der Charakterwerte zu den Konjugiertenklassen benötigen, reicht diese Information nicht aus, da die Beschreibung von Lusztig die Konjugiertenklassen nicht durch die Angabe von Vertretern parametrisiert, derart dass eine explizite Zuordnung zu Vertretern der Konjugiertenklassen nicht klar ist. Wir wollen die Werte der kuspidalen Fastcharaktere daher unabhängig davon berechnen.

Da die unipotenten kuspidalen Fastcharaktere nach Bemerkung V.(6.2)(i) konstant auf den Klassentypen sind und wir nach Satz V.(6.1) die Träger dieser Klassenfunktionen kennen, können wir die Werte bestimmen, indem wir für die noch unbekannten Werte Unbestimmte annehmen und diese Unbestimmte berechnen. Dies führt nach Satz V.(6.1) auf 28 Unbestimmte, die wir wie folgt bestimmen:

(i) Die unipotenten Fastcharaktere bilden nach Bemerkung V.(3.13)(ii) eine Orthonormalbasis des Raumes der von den unipotenten Charakteren erzeugten Klassenfunktionen. Die Skalarprodukte der unipotenten kuspidalen Fastcharaktere mit den nach V.5(ii) bekannten uniformen unipotenten Fastcharakteren verschwinden. Dadurch können wir 13 Unbestimmte als Linearkombination der 15 übrigen darstellen.

(ii) Aus der Fourier-Transformationsmatrix für die Familie $\mathcal{F}_{11}$ können wir entnehmen, dass die unipotenten Charaktere

$$\phi_{16,5},\ F_4[-1],\ \phi'_{6,6},\ F_4[\theta],\ F_4[\theta^2],\ F_4[i],\ F_4[-i]$$

in dem von den uniformen und den kuspidalen unipotenten Fastcharakteren erzeugten Teilraum der Klassenfunktionen liegen. Wir können daher diese irreduziblen Charaktere aus diesen Fastcharakteren berechnen. Die Skalarprodukte mit den Charakteren K_i mit

$1 \leqslant i \leqslant 37$ aus Tabelle A.20 sind also nicht-negative ganze Zahlen. Diese können mittels **CHEVIE** in Abhängigkeit der Unbestimmten berechnet werden. Beispielsweise ergibt sich

$$\langle \phi_{16,5}, K_{35} \rangle = -\langle \phi_{16,5}, K_{36} \rangle.$$

Also ist

$$\langle \phi_{16,5}, K_{35} \rangle = \langle \phi_{16,5}, K_{36} \rangle = 0.$$

Wir erhalten auf ähnliche Weise zehn weitere Bedingungen für die Unbestimmten. Insbesondere sind die drei kuspidalen Fastcharaktere $R_{(1,\lambda^3),\mathcal{F}_{11}}$, $R_{(g_2,\varepsilon),\mathcal{F}_{11}}$ und $R_{(g_2',\varepsilon),\mathcal{F}_{11}}$ durch diese Bedingungen schon vollständig bestimmt. Sie sind in Tabelle A.22 angegeben. Dabei ist zu beachten, dass sich die Werte des Fastcharakters $R_{(g_2,\varepsilon),\mathcal{F}_{11}}$ im Fall $4 \nmid q - 1$ um ein Vorzeichen unterscheiden.

(iii) Die noch zu bestimmenden kuspidalen unipotenten Fastcharaktere haben nach den bisherigen Ergebnissen die Form

Name	$c_{4,9}$	$c_{4,10}$	$c_{4,11}$	$c_{6,13}$	$c_{6,14}$	$c_{6,15}$	$c_{6,16}$
$R_{(g_3,\theta),\mathcal{F}_{11}}$	q^2	v_1	$-q^2 - v_1$	.	.	.	.
$R_{(g_3,\theta^2),\mathcal{F}_{11}}$	q^2	$-q^2 - v_1$	v_1	.	.	.	.
$R_{(g_4,i),\mathcal{F}_{11}}$	.	.	.	v_2	v_3	v_4	$-v_2 - v_3 - v_4$
$R_{(g_4,-i),\mathcal{F}_{11}}$	.	.	.	v_2	v_5	v_4	$-v_2 - v_4 - v_5$

Es bleiben noch fünf Unbestimmte v_i mit $1 \leqslant i \leqslant 5$ zu bestimmen. Durch direktes Nachrechnen erhält man

$$\left\langle F_4[\theta] + F_4[\theta^2], K_{24} \right\rangle = 1$$

und

$$\langle F_4[\theta], K_{24} \rangle = -\frac{1}{3q^2}\left(-q^2 + \varepsilon_3 q^2 + v_1 + 2\varepsilon_3 v_1\right).$$

Wir erhalten auf diese Weise zwei Fälle.

- Ist $\langle F_4[\theta], K_{24} \rangle = 1$, so ergibt sich $v_1 = \varepsilon_3 q^2$.
- Ist $\langle F_4[\theta], K_{24} \rangle = 0$, so ergibt sich $v_1 = \varepsilon_3^2 q^2$.

Beide Werte für v_1 führen auf die gleichen irreduziblen Charaktere $F_4[\theta]$ und $F_4[\theta^2]$ und unterscheiden sich nur in der Wahl des Labels dieser beiden algebraisch konjugierten Charaktere. Da die Fourier-Transformationsmatrizen zeigen, dass alle anderen unipotenten Charaktere unabhängig von der Wahl der Lösung sind, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\langle F_4[\theta], K_{24} \rangle = 1$ ist. Die resultierenden Fastcharaktere $R_{(g_3,\theta),\mathcal{F}_{11}}$ und $R_{(g_3,\theta^2),\mathcal{F}_{11}}$ sind in Tabelle A.22 angegeben. Die Werte auf den Klassentypen $c_{5,i}$ für $i = 9, 10, 11$ ergeben sich bei Betrachtung der entsprechenden Kongruenzen von q. Wir beachten hierbei, dass diese Klassen für q mit $q \equiv 1$ modulo 12 nicht vorkommen.

(iv) Jetzt fehlen nur noch die beiden kuspidalen Fastcharaktere $R_{(g_4,i),\mathcal{F}_{11}}$ und $R_{(g_4,-i),\mathcal{F}_{11}}$. Der Fourier-Transformationsmatrix können wir entnehmen, dass

$$R_{(g_4,i),\mathcal{F}_{11}} + R_{(g_4,-i),\mathcal{F}_{11}} - 2\phi_{12,4} - 2\phi_{4,8}$$

in dem von den uniformen unipotenten und den schon vollständig bestimmten kuspidalen unipotenten Fastcharakteren erzeugten Vektorraum liegt. Daher können wir das Skalarprodukt mit K_{16} berechnen und erhalten

$$\langle R_{(g_4,i),\mathcal{F}_{11}} + R_{(g_4,-i),\mathcal{F}_{11}} - 2\phi_{12,4} - 2\phi_{4,8}, K_{16}\rangle = 0.$$

Weiterhin ist K_{16} nach Lemma IV.(2.4) ein Konstituent des Gelfand-Graev-Charakters Γ_{19}. Wegen $\langle \Gamma_{19}, \phi_{12,4}\rangle = \langle \Gamma_{19}, \phi_{4,8}\rangle = 0$ gilt

$$\langle R_{(g_4,i),\mathcal{F}_{11}} + R_{(g_4,-i),\mathcal{F}_{11}}, K_{16}\rangle = 0.$$

Durch Berechnung des Skalarproduktes erhalten wir

$$\langle R_{(g_4,i),\mathcal{F}_{11}} + R_{(g_4,-i),\mathcal{F}_{11}}, K_{16}\rangle = \frac{1}{2q^3}(v_2 + v_4)$$

und somit $v_4 = -v_2$. Genauso können wir mit Hilfe der schon berechneten Fastcharaktere zeigen, dass

$$\langle R_{(g_4,i),\mathcal{F}_{11}} + R_{(g_4,-i),\mathcal{F}_{11}} - 2\phi_{12,4} - 2\phi_{1,12'} - 2\phi_{4,7''}, K_{21}\rangle = \frac{1}{2}$$

ist. Wegen

$$\langle R_{(g_4,i),\mathcal{F}_{11}} + R_{(g_4,-i),\mathcal{F}_{11}}, K_{21}\rangle = \frac{v_2}{2q^2}$$

erhalten wir daraus $v_2 = q^2$. Aus der Bedingung $\langle R_{(g_4,i),\mathcal{F}_{11}}, R_{(g_4,-i),\mathcal{F}_{11}}\rangle = 0$ erhalten wir $v_5 = -v_3$. Wir erhalten genauso wie oben aus den Skalarprodukten $\langle R_{(g_4,i),\mathcal{F}_{11}}, K_j\rangle$ mit $j = 28, 29$ die zwei Lösungen $v_3 = \varepsilon_4$ oder $v_3 = -\varepsilon_4$. Wieder können wir ohne Einschränkung $v_3 = \varepsilon_4$ annehmen. Die resultierenden Fastcharaktere sind in Tabelle A.22 angegeben. Damit sind die kuspidalen Fastcharaktere von $F_4(q)$ für alle q mit $2, 3 \nmid q$ vollständig bestimmt.

V.7 Die Fastcharaktere in der Serie vom Typ B_2

Wir wollen nun die restlichen fünf unipotenten Fastcharaktere bestimmen. Wir betrachten dazu die fünf Leviuntergruppen L_i für $1 \leqslant i \leqslant 5$. Jede dieser Leviuntergruppen vom Typ B_2 hat nach [Car85, 13.8] sechs unipotente Charaktere, die folgendermaßen parametrisiert sind:

Name	Symbol	Doppelpartition	Charaktergrad
$\chi_{1,\mathbf{L}_i}$	$\binom{2}{-}$	$2.-$	1
$\chi_{2,\mathbf{L}_i}$	$\binom{0,2}{1}$	1.1	$\frac{1}{2}q(q+1)^2$
$\chi_{3,\mathbf{L}_i}$	$\binom{1,2}{0}$	$11.-$	$\frac{1}{2}q(q^2+1)$
$\chi_{4,\mathbf{L}_i}$	$\binom{0,1}{2}$	$-.2$	$\frac{1}{2}q(q^2+1)$
$\chi_{5,\mathbf{L}_i}$	$\binom{0,1,2}{-}$		$\frac{1}{2}q(q-1)^2$
$\chi_{6,\mathbf{L}_i}$	$\binom{0,1,2}{1,2}$	$-.11$	q^4

Tabelle T.V.1: Die unipotenten Charaktere von L_i

Die Klassenfunktion

$$\delta_i := \frac{1}{2}(\chi_{2,\mathbf{L}_i} - \chi_{3,\mathbf{L}_i} - \chi_{4,\mathbf{L}_i} + \chi_{5,\mathbf{L}_i})$$

ist ein kuspidaler unipotenter Fastcharakter von L_i. Wir wollen nun die fünf Lusztig-induzierten Charaktere

$$\xi_i := R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_i \subseteq \mathbf{P}_i}(\delta_i).$$

betrachten. Wir werden zeigen, dass sich diese fünf Charaktere als Linearkombinationen der fünf noch zu berechnenden Fastcharaktere schreiben lassen und die Koeffizienten dieser Zerlegungen bestimmen. Dies wird es uns erlauben, die gesuchten Fastcharaktere aus den Charakteren ξ_i zu bestimmen. Daher müssen wir nur noch diese Charaktere ξ_i berechnen.

(7.1) Lemma (Zerlegung der ξ_i)
In der Gruppe $F_4(q)$ gelten die folgenden Zerlegungen von Charakteren:

(i) $\xi_1 = R_{(g_2,\varepsilon),\mathcal{F}_9} + R_{(g_2,\varepsilon),\mathcal{F}_{10}} + R_{(g_4,-1),\mathcal{F}_{11}} + R_{(g_2,\varepsilon'),\mathcal{F}_{11}} + 2R_{(g_2',r),\mathcal{F}_{11}}$,

(ii) $\xi_2 = R_{(g_2,\varepsilon),\mathcal{F}_9} + R_{(g_2,\varepsilon),\mathcal{F}_{10}} + R_{(g_4,-1),\mathcal{F}_{11}} + R_{(g_2,\varepsilon'),\mathcal{F}_{11}} - 2R_{(g_2',r),\mathcal{F}_{11}}$,

(iii) $\xi_3 = -R_{(g_2,\varepsilon),\mathcal{F}_9} + R_{(g_2,\varepsilon),\mathcal{F}_{10}} + R_{(g_4,-1),\mathcal{F}_{11}} - R_{(g_2,\varepsilon'),\mathcal{F}_{11}}$,

(iv) $\xi_4 = -R_{(g_2,\varepsilon),\mathcal{F}_9} + R_{(g_2,\varepsilon),\mathcal{F}_{10}} - R_{(g_4,-1),\mathcal{F}_{11}} + R_{(g_2,\varepsilon'),\mathcal{F}_{11}}$,

(v) $\xi_5 = R_{(g_2,\varepsilon),\mathcal{F}_9} + R_{(g_2,\varepsilon),\mathcal{F}_{10}} - R_{(g_4,-1),\mathcal{F}_{11}} - R_{(g_2,\varepsilon'),\mathcal{F}_{11}}$.

Beweis: Diese Zerlegungen ergeben sich bis auf Vorzeichen aus [Sho87, Abschnitt 3, Proposition]. Insbesondere können wir aus diesem Ergebnis die Normen der ξ_i für $1 \leqslant i \leqslant 5$ bestimmen und es ist $\langle \xi_2, \xi_2 \rangle = 8$ und $\langle \xi_5, \xi_5 \rangle = 4$. Wir wollen nun die Vorzeichen dieser Zerlegungen bestimmen. Wir benutzen beim Beweis, dass wir die Zerlegung der Lusztig-Induktion uniformer unipotenter Fastcharaktere berechnen können. Dies ist genauer in [Lus84] beschrieben und in **CHEVIE** implementiert. Vergleiche dazu [S+97, Kapitel 84]. Außerdem können wir mit Satz V.(1.6) die Zerlegung der Harish-Chandra-Induktion unipotenter Charaktere berechnen.

Wir betrachten nun den unipotenten Hauptseriencharakter $\phi_{(2,1)}$ von L_8. Nach [Lüb93, Seite 64] gilt

$$\phi_{(2,1)} = \frac{1}{2}(R_{(2,1)} + R_{(-,3)} + R_{(12,-)} + f_1).$$

Dabei sind $R_{(2,1)}$, $R_{(-,3)}$ und $R_{(12,-)}$ die entsprechenden uniformen unipotenten Fastcharaktere und f_1 der kuspidale unipotente Fastcharakter von L_8. Vergleiche auch Tabelle A.16 und Abschnitt III.8. Mit **CHEVIE** erhalten wir

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(\phi_{(2,1)}) \;=\; & R_{(1,1),\mathcal{F}_2} + R_{(1,1),\mathcal{F}_3} + R_{(1,1),\mathcal{F}_4} + \tfrac{1}{2}R_{(1,1),\mathcal{F}_9} + \tfrac{1}{2}R_{(g_2,1),\mathcal{F}_9} + \tfrac{1}{2}R_{(1,\varepsilon),\mathcal{F}_9} + \\ & \tfrac{1}{2}R_{(1,1),\mathcal{F}_{11}} + R_{(1,\lambda^1),\mathcal{F}_{11}} + \tfrac{1}{2}R_{(1,\lambda^2),\mathcal{F}_{11}} + \tfrac{1}{2}R_{(1,\sigma),\mathcal{F}_{11}} + R_{(g_2,1),\mathcal{F}_{11}} + \\ & \tfrac{1}{2}R_{(g_2,\varepsilon''),\mathcal{F}_{11}} + \tfrac{1}{2}R_{(g_2',1),\mathcal{F}_{11}} + \tfrac{1}{2}R_{(g_2',\varepsilon''),\mathcal{F}_{11}} + \tfrac{1}{2}R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_1). \end{aligned}$$

Andererseits erhalten wir mit Satz V.(1.6)

$$R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(\phi_{(2,1)}) = \phi_{4,1} + \phi_{9,2} + \phi_{8,3}' + \phi_{8,3}'' + \phi_{12,4} + \phi_{9,6}' + \phi_{6,6}'' + \phi_{16,5}.$$

Mit Hilfe der Fourier-Transformationsmatrizen ergibt sich durch Vergleich

$$R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_1) = R_{(g_2,\varepsilon),\mathcal{F}_9} + R_{(g_2,\varepsilon'),\mathcal{F}_{11}} + R_{(g_2',r),\mathcal{F}_{11}}.$$

Entsprechend erhalten wir bei Betrachtung des unipotenten Charakters

$$\phi_{(1,11)} = \frac{1}{2}(R_{(1,11)} + R_{(-,12)} + R_{(111,-)} + f_2)$$

von L_8 die Zerlegung

$$R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_2) = R_{(g_2,\varepsilon),\mathcal{F}_{10}} + R_{(g_4,-1),\mathcal{F}_{11}} + R_{(g_2',r),\mathcal{F}_{11}}.$$

Anhand von Tabelle A.6 sehen wir, dass die Gruppen L_1 und L_3 nicht-konjugierte Leviuntergruppen vom Typ B_2 von L_8 sind. Nach [Lüb93, 8.3] gilt $R_{\mathbf{L}_1}^{\mathbf{L}_8}(\delta_1) = f_1 + f_2$ und $R_{\mathbf{L}_3}^{\mathbf{L}_8}(\delta_3) = -f_1 + f_2$. Aus der Transitivität der Lusztig-Induktion V.(2.11) folgt dann die Zerlegung von ξ_1 und ξ_3.

Die in [Lüb93] durchgeführten Berechnungen lassen sich ohne Probleme auch für die Leviuntergruppe L_6 vom Typ B_3 durchführen. Wir erhalten auch in diesem Fall zwei kuspidale unipotente Fastcharaktere von L_6, die wir g_1 und g_2 nennen wollen und deren Werte in Anhang A.17 angegeben sind. Wir wollen dies hier nicht vorführen, sondern verweisen auf die Ausführungen in [Lüb93]. Der Tabelle A.6 entnehmen wir, dass die Gruppen L_1 und L_4 nicht-konjugierte Leviuntergruppen vom Typ B_2 von L_6 sind. Wir erhalten in diesem Fall $R_{\mathbf{L}_1}^{\mathbf{L}_6}(\delta_1) = g_1 + g_2$ und $R_{\mathbf{L}_4}^{\mathbf{L}_6}(\delta_4) = -g_1 + g_2$. Durch analoge Berechnungen wie oben erhalten wir die Zerlegung von ξ_4 und noch einmal das gleiche Ergebnis für die Zerlegung von ξ_1.

Es bleibt noch, die Zerlegung von ξ_2 und ξ_5 zu bestimmen. In [BMM93, Theorem 3.10] wurden die folgenden beiden Zerlegungen gezeigt:

(i) $R_{\mathbf{L}_2}^{\mathbf{G}}(\chi_{2,\mathbf{L}_2}) = \phi_{4,1} + \phi_{4,13} - \phi_{4,7}' - \phi_{4,7}'' - 2B_{2,r}.$

(ii) $R_{\mathbf{L}_5}^{\mathbf{G}}(\chi_{3,\mathbf{L}_5}) = \phi_{2,4}' + \phi_{2,6}' - \phi_{4,7}' + B_{2,\varepsilon'}.$

Andererseits können wir diese Zerlegung auch in Abhängigkeit von ξ_2 und ξ_5 bestimmen. Es gilt nach [Car85, 13.7]

$$\chi_{2,\mathbf{L}_2} = \frac{1}{2}(R_{(1,1)} + R_{(11,-)} + R_{(-,2)} + \delta_2).$$

Anwenden des Lusztig-Funktors ergibt die Gleichung

$$\begin{aligned} R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_2}(\chi_{2,\mathbf{L}_2}) \;=\; & \tfrac{1}{2}R_{(1,1),\mathcal{F}_9} + \tfrac{1}{2}R_{(g_2,1),\mathcal{F}_9} + \tfrac{1}{2}R_{(1,\varepsilon),\mathcal{F}_9} + \tfrac{1}{2}R_{(1,1),\mathcal{F}_{10}} + \tfrac{1}{2}R_{(g_2,1),\mathcal{F}_{10}} \\ & + \tfrac{1}{2}R_{(1,\varepsilon),\mathcal{F}_{10}} - R_{(1,1),\mathcal{F}_{11}} + \tfrac{1}{2}R_{(1,\lambda^1),\mathcal{F}_{11}} + \tfrac{1}{2}R_{(1,\lambda^2),\mathcal{F}_{11}} - R_{(1,\sigma),\mathcal{F}_{11}} \\ & - \tfrac{1}{2}R_{(g_2,\varepsilon''),\mathcal{F}_{11}} + \tfrac{1}{2}R_{(g_2',1),\mathcal{F}_{11}} + \tfrac{1}{2}R_{(g_2',\varepsilon'),\mathcal{F}_{11}} + R_{(g_2',\varepsilon''),\mathcal{F}_{11}} - \tfrac{1}{2}R_{(g_4,1),\mathcal{F}_{11}} \\ & + \tfrac{1}{2}\xi_2. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir sofort die gewünschte Zerlegung von ξ_2. Die Zerlegung von ξ_5 können wir entsprechend bestimmen. □

(7.2) Korollar

(i) Die fünf noch gesuchten unipotenten Fastcharaktere lassen sich folgendermaßen berechnen:

(a) $R_{(g_2,\varepsilon),\mathcal{F}_9} = \frac{1}{8}\xi_1 + \frac{1}{8}\xi_2 - \frac{1}{4}\xi_3 - \frac{1}{4}\xi_4 + \frac{1}{4}\xi_5$,

(b) $R_{(g_2,\varepsilon),\mathcal{F}_{10}} = \frac{1}{8}\xi_1 + \frac{1}{8}\xi_2 + \frac{1}{4}\xi_3 + \frac{1}{4}\xi_4 + \frac{1}{4}\xi_5$,

(c) $R_{(g_4,-1),\mathcal{F}_{11}} = \frac{1}{8}\xi_1 + \frac{1}{8}\xi_2 + \frac{1}{4}\xi_3 - \frac{1}{4}\xi_4 - \frac{1}{4}\xi_5$,

(d) $R_{(g_2,\varepsilon'),\mathcal{F}_{11}} = \frac{1}{8}\xi_1 + \frac{1}{8}\xi_2 + \frac{1}{4}\xi_3 - \frac{1}{4}\xi_4 + \frac{1}{4}\xi_5$,

(e) $R_{(g_2',r),\mathcal{F}_{11}} = \frac{1}{4}\xi_1 - \frac{1}{4}\xi_2$.

(ii) Es gelten weiter die folgenden Zerlegungen:

(a) $\xi_1 = R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_8}(f_1) + R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_8}(f_2)$,

(b) $\xi_3 = -R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_8}(f_1) + R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_8}(f_2)$,

(c) $\xi_4 = -R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_6}(g_1) + R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_6}(g_2)$.

Beweis: Der Teil (i) folgt sofort aus Lemma V.(7.1). Der Teil (ii) ist im Beweis von Lemma V.(7.1) mitbewiesen. □

(7.3) Bemerkung

(i) Die Werte von $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_8}(f_i)$ und $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_6}(g_i)$ für $i = 1, 2$ sind für q mit $2, 3 \nmid q$ in Tabelle A.18 angegeben. Wegen Korollar V.(7.2) können wir alle noch fehlenden unipotenten Fastcharaktere explizit bestimmen, wenn wir die Klassenfunktionen ξ_2 und ξ_5 bestimmen.

(ii) Wir können die in Lemma V.(7.1) angegebenen Zerlegungen von ξ_2 und ξ_5 auch ohne Verwendung der Ergebnisse in [Sho87] und [BMM93] berechnen, indem wir Unbestimmte für die Koeffizienten annehmen. Durch die in Abschnitt V.9 beschriebenen Methoden zur Berechnung der fehlenden Charakterwerte können wir insbesondere auch die Koeffizienten bestimmen. Dies ist allerdings deutlich aufwendiger, da die auftretenden Gleichungssysteme viel schwieriger zu lösen sind. Wir wollen dies daher hier nicht vorführen.

(iii) Der in [BMM93] angegebene Beweis benutzt die Mackey-Formel für die Lusztig-Induktion, um die Norm von $R_{\mathbf{L}_2}^{\mathbf{G}}(\chi_{2,\mathbf{L}_2})$ und $R_{\mathbf{L}_5}^{\mathbf{G}}(\chi_{3,\mathbf{L}_5})$ zu bestimmen. Diese Formel ist allerdings nur für q groß genug bewiesen. Vergleiche dazu [Bon98]. Die Unabhängigkeit von q dieser Zerlegungen wird in [BMM93] mit Hilfe von [Sho87] gezeigt. In einer neueren noch unveröffentlichten Arbeit haben Bonnafé und Michel [BM] bewiesen, dass die Mackey-Formel in den uns interessierenden Fällen für alle q richtig ist. Wir wollen dies hier allerdings nicht benutzen.

(iv) Die Klassenfunktionen ξ_1, ξ_3 und ξ_4 sind konstant auf den Klassentypen.

V.8 Die Charakterformel von Ree

In diesem Abschnitt wollen wir eine von Ree gefundene Charakterformel benutzen, um einige Charakterwerte irreduzibler Charaktere von $F_4(q)$ in guter Charakteristik explizit zu berechnen. Gemäß Bemerkung V.(5.1) beschränken wir uns in der Darstellung auf den Fall $q \equiv 1$ modulo 12. Die Ergebnisse geben wir selbstverständlich für alle vier Kongruenzen an. Diese Charakterformel wurde schon von Marcelo und Shinoda [MS95] benutzt, um die Werte der irreduziblen Charaktere von $F_4(q)$ mit $q = 2^f$ auf unipotenten Elementen zu bestimmen. Wir wollen diese Idee aufgreifen, um auch Charakterwerte auf nicht-unipotenten Elementen bestimmen zu können. Dadurch werden die Rechnungen deutlich aufwendiger und ohne Computerunterstützung kaum mehr durchführbar. Wir benutzen dabei massiv die in Abschnitt I.6 beschriebenen Algorithmen. Wir benötigen zunächst einige Aussagen über Hecke-Algebren.

(8.1) Definition/Satz (Hecke-Algebren und Fitting-Korrespondenz)
Es seien G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe von G. Durch $e := \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} h \in \mathbb{C}G$ wird ein Idempotent der Gruppenalgebra von G definiert. Die Unteralgebra

$$\mathcal{H}(G, H) := e\mathbb{C}Ge \leqslant \mathbb{C}G$$

heißt die **Hecke-Algebra**, die dem Paar (G, H) zugeordnet ist. Dann gilt:

(i) Für $\zeta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{G})$ bezeichnen wir die Einschränkung auf $\mathcal{H}(G, H)$ mit $\zeta_{\mathcal{H}}$. Durch diese Einschränkung wird eine Bijektion zwischen der Menge der irreduziblen Charaktere $\zeta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{G})$ mit $\langle \zeta, \mathrm{Ind}_H^G(1)\rangle \neq 0$ und den irreduziblen Charakteren von $\mathcal{H}(G, H)$ gegeben. Diese Bijektion heißt **Fitting-Korrespondenz**. Der Charakter $\zeta_{\mathcal{H}}$ heißt **Fitting-Korrespondent** von ζ.

(ii) $\langle \zeta, \mathrm{Ind}_H^G(1)\rangle = \deg(\zeta_{\mathcal{H}})$

Beweis: Siehe [CR90, 11.22,11.25]. □

(8.2) Satz (Charakterformel von Ree)
Es seien G eine endliche Gruppe, H eine Untergruppe von G und $\mathcal{H}(G, H)$ die zugeordnete Hecke-Algebra. Weiter sei $\zeta \in \mathrm{Irr}(G)$ mit $\langle \zeta, \mathrm{Ind}_H^G(1)\rangle \neq 0$ und $\zeta_{\mathcal{H}}$ der zugehörige Fitting-Korrespondent. Es sei $\{D_j\}_{j\in J}$ die Menge der H-H-Doppelnebenklassen von G. Definieren wir

für alle $j \in J$

$$a_j := \frac{1}{|H|} \sum_{x \in D_j} x,$$

und

$$\operatorname{ind} a_j := \frac{|D_j|}{|H|},$$

dann gilt für alle $t \in G$

$$\zeta(t) = \frac{\zeta(1)}{\deg(\zeta_{\mathcal{H}})} \sum_{j \in J} \frac{\zeta_{\mathcal{H}}(a_j)}{\operatorname{ind} a_j} \frac{|C \cap D_j|}{|C|}.$$

Dabei ist C die Konjugiertenklasse von G, die t enthält.

Beweis: Siehe [CR90, 11.32(iii),11.34]. □

Wir wollen die Ree-Formel für den Fall $G = \mathbf{G}^{\mathbf{F}} = F_4(q)$ und $H = \mathbf{P}_8^{\mathbf{F}} = P_8$ benutzen. Es sei $J := \{\pi_2, \pi_3, \pi_4\}$. Dann ist P_8 die standardparabolische Untergruppe von $F_4(q)$ zur Teilmenge J. Mit **CHEVIE** können wir unter Benutzung von Satz V.(1.6) die Zerlegung des entsprechenden Permutationscharakters berechnen und erhalten

$$\operatorname{Ind}_{P_8}^{F_4(q)}(1) = \phi_{1,0} + \phi_{4,1} + \phi'_{2,4} + \phi_{9,2} + \phi'_{8,3}.$$

Da die Konstituenten alle mit Vielfachheit eins in diesem Permutationscharakter vorkommen, sind alle irreduziblen Charaktere der Hecke-Algebra $\mathcal{H}(F_4(q), \mathbf{P}_8^{\mathbf{F}})$ nach SatzV.(8.1) linear. Die Hecke-Algebra ist somit kommutativ. Nach Lemma I.(4.7) und Satz I.(4.9) sind die P_8-P_8-Doppelnebenklassen durch die Menge

$$\{P_8 \widehat{w}_i P_8 \mid w_i \in D_{J,J}\}$$

gegeben. Mit **CHEVIE** können wir die Menge $D_{J,J}$ leicht bestimmen. Vergleiche dazu auch I.(4.6). Sie hat fünf Elemente und wir erhalten

$$w_1 = 1, \quad w_2 = s_1, \quad w_3 := s_1 s_2 s_3 s_2 s_1, \quad w_4 = w_3 s_1 s_4 s_3 s_2 s_1, \quad w_5 = w_3 s_4 s_3 s_2 s_1 s_2 s_1 w_4.$$

Wir setzen abkürzend $D_i := P_8 \widehat{w}_i P_8$ für $1 \leqslant i \leqslant 5$. Die Charaktertafel von $\mathcal{H}(F_4(q), P_8)$ wurde in [Gom94] berechnet und ist in Anhang A.23 abgedruckt. Dort ist auch die Fitting-Korrespondenz angegeben. Diese lässt sich in diesem Fall sehr einfach bestimmen, da die in der Zerlegung $\operatorname{Ind}_{P_8}^{F_4(q)}(1)$ vorkommenden Charaktere nach A.21 alle verschiedene Charaktergrade haben. Die Charaktergrade lassen sich aus der Charaktertafel der Hecke-Algebra berechnen und legen somit die Fitting-Korrespondenz fest. Vergleiche dazu [CR90, 11.32(iii)].

Wir betrachten nun den Klassentyp $c_{3,5}$ von $F_4(q)$. Aus den Tabellen in Abschnitt A.7 und der Tabelle T.A.13 entnehmen wir, dass dieser Klassentyp nur eine Konjugiertenklasse enthält, die wir mit C bezeichnen wollen. Ein Parameter, der diese Konjugiertenklasse beschreibt, ist $h(1, 1, 1, -1)x_{14}(1)x_{20}(1)$. Da dieser Klassentyp nur eine Konjugiertenklasse enthält, sind natürlich alle Charaktere konstant auf diesem Klassentyp.

Wir wollen nun die Charakterformel V.(8.2) verwenden, um die bisher unbekannten Charakterwerte von $\phi_{4,1}$ und $\phi'_{2,4}$ auf dem Klassentyp $c_{3,5}$ zu bestimmen. Dazu müssen wir die Zahlen $|C \cap D_i|$ für $1 \leqslant i \leqslant 5$ bestimmen. Wir verwenden dazu die in I.(8.4) beschriebene Methode. Dafür müssen wir für alle $1 \leqslant i \leqslant 5$ und alle Elemente $w \in D_{\emptyset,I}$ die Summe

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant e_w \\ w_i \in \mathbf{W}_J v \mathbf{W}_J}} \left| P_i^{(w)^{\mathbf{F}}} \right| \tag{V.1}$$

berechnen. Für die Bezeichnungen vergleiche I.(8.4). Diese Berechnungen können wir mit Algorithmus I.(6.15) durchführen. In Tabelle A.25 sind die Ergebnisse angegeben. Damit ergeben sich die folgenden Schnittzahlen:

$$\begin{aligned}
|C \cap D_1| &= (q^2+1)(q^4+q^3+q^2+q+1) \\
|C \cap D_2| &= q^4(q+1)(q^2+1)(2q^3+q+1) \\
|C \cap D_3| &= q^2(q+1)(q^8+q^7-q^4-q^2-1) \\
|C \cap D_4| &= q^7(q-1)(q+1)(q^2+1)(2q^3+q^2+q+1) \\
|C \cap D_5| &= q^{14}(q-1)
\end{aligned}$$

Mit diesen Informationen können wir im Fall $q \equiv 1$ modulo 12 mit Hilfe der Ree-Formel V.(8.2) die folgenden Charakterwerte berechnen.

$$\begin{aligned}
\phi_{1,0}(c_{3,5}) &= 1 \\
\phi_{4,1}(c_{3,5}) &= 1/2(q^4+q^3+1)\phi_2 \\
\phi'_{2,4}(c_{3,5}) &= -1/2(q^4+q^3-1)\phi_1 \\
\phi_{9,2}(c_{3,5}) &= (q^4+q^2+2)q^2 \\
\phi'_{8,3}(c_{3,5}) &= q^3\phi_4
\end{aligned}$$

Die Charakterwerte $\phi_{1,0}(c_{3,5})$, $\phi_{9,2}(c_{3,5})$ und $\phi'_{8,3}(c_{3,5})$ hatten wir schon vollständig berechnet. Diese Werte stimmen mit den hier angegebenen überein, was ein guter Test für die berechneten Schnittzahlen ist. Auf die gleiche Weise können wir auch noch weitere Charakterwerte berechnen, wir wollen dies hier nicht detailliert vorführen und geben nur die Ergebnisse in Tabelle A.24 an.

(8.3) Bemerkung

(i) Die notwendigen Berechnungen für die Schnittzahlen sind teilweise sehr aufwendig. Vergleiche dazu auch die Ausführungen in Abschnitt I.7. Insbesondere ist unangenehm, dass die auftretenden Gleichungssysteme zum großen Teil von Hand gelöst werden müssen und wir jede Rechnung wegen der vier verschiedenen Kongruenzen von q viermal durchführen müssen.

(ii) Mit der hier beschriebenen Methode lassen sich nur Charakterwerte auf Klassen berechnen, deren halbeinfacher Klassentyp durch ein Paar der Form $(\Pi, 1)$ beschrieben wird. Wir benötigen nämlich einen Vertreter der Klasse, der in $\mathbf{B}^{\mathbf{F}}$ enthalten ist. Vergleiche I.(8.4). Daher ist es nicht möglich, alle Charakterwerte eines irreduziblen Charakters mit der hier beschriebenen Methode zu berechnen.

V.9 Berechnung der fehlenden Charakterwerte

In diesem Abschnitt wollen wir die Werte der beiden in Abschnitt V.7 definierten Klassenfunktionen ξ_2 und ξ_5 von $F_4(q)$ bestimmen. Dazu zeigen wir mit Hilfe von Satz V.(2.10), dass diese beiden Klassenfunktionen konstant auf den Klassentypen sind und bestimmen die Klassentypen, auf denen sie Werte ungleich 0 annehmen können. Ein Abzählargument wie in [Lüb93, Kapitel 7] oder [GP92] ist in diesem Fall leider nicht möglich. Dort konnte gezeigt werden, dass fast alle Indikatorfunktionen der Konjugiertenklassen uniform sind, indem durch Dimensionsargumente gezeigt wurde, dass sie den gleichen Raum aufspannen wie die uniformen Fastcharaktere. In unserem Fall zeigt sich leider, dass der Raum, der von den Indikatorfunktionen aufgespannt wird, zu groß ist. Der Satz V.(2.10) erlaubt auch die Berechnung einiger der gesuchten Werte. Da die gesuchten Klassenfunktionen konstant auf den Klassentypen sind, können wir zur Bestimmung der noch fehlenden Werte Unbestimmte ansetzen und in Abhängigkeit dieser Unbestimmten die irreduziblen Charaktere berechnen. Die gesuchten Werte finden wir dann durch Berechnungen wie in Abschnitt V.6.

Wir wollen also zunächst bestimmen, auf welchen Klassentypen von $F_4(q)$ die Klassenfunktionen $\xi_i = R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_i \subseteq \mathbf{P}_i}(\delta_i)$ für $i = 2, 5$ Werte ungleich Null annehmen können. Es sei $g \in F_4(q)$ ein Element mit Jordan-Zerlegung $g = s_g u_g$, wobei s_g halbeinfach und u_g unipotent ist. Nach Satz V.(2.10)(i) ist $\xi_i(g) = 0$, falls es kein $l \in L_i$ mit $\delta_i(l) \neq 0$ gibt, so dass s_g in $F_4(q)$ konjugiert zu s_l ist, wenn s_l der halbeinfache Anteil in der Jordan-Zerlegung von l ist. Die halbeinfachen Klassentypen von L_i können wir leicht wie in Korollar III.(4.11) beschrieben berechnen. Nach [Lüb93, Abschnitt 8] sind die Werte von δ_i bekannt und in Tabelle A.26 angegeben. Wir sehen, dass die Klassenfunktionen δ_i nur auf Klassentypen Werte ungleich Null annehmen, deren halbeinfacher Anteil durch ein Paar der Form $([2, 9], w)$ beschrieben wird. Wir müssen nun die Fusion der Konjugiertenklassen dieser halbeinfachen Klassentypen von L_i nach $F_4(q)$ bestimmen. Da die Leviuntergruppen $\mathbf{L}_i$ für $i = 2, 5$ nicht in einer $\mathbf{F}$-stabilen parabolischen Untergruppe von $\mathbf{G}$ liegen, können wir hierfür nicht das in Abschnitt III.7 beschriebene Verfahren anwenden. Wir benötigen allerdings nicht die genaue Beschreibung der Fusionsabbildung, sondern begnügen uns mit der Information, in welchen halbeinfachen Klassentypen von $F_4(q)$ die entsprechenden halbeinfachen Elemente von L_i liegen können. Wir wollen diese Berechnung hier an einem Beispiel vorführen.

Wir betrachten die Klassenfunktion δ_5 von L_5. Es sei $s \in L_5$ ein Vertreter einer halbeinfachen Konjugiertenklasse im halbeinfachen Klassentyp von L_i, der durch das Paar $([2, 9], w)$ beschrieben wird, wobei $w = s_4 s_3 s_2 s_1 s_3 s_2 s_4 s_3 s_2 s_1$ ist. Nach Korollar III.(4.11) gibt es ein $l \in \mathbf{L}_{\{2,3\}}$ mit

$s^l \in \mathbf{T}$ und $w = l^{-1}\mathbf{F}(l) \in \mathbf{W}_{\{2,3\}}$. Weiter gilt

$$C_{L_5}(s)^l = C_{\mathbf{L}_{\{2,3\}}}(s^l)^{(\mathbf{F}w^{-1})} = \mathbf{C}^{(\mathbf{F}w^{-1})}_{\{2,9,26,33\}}.$$

Nach Korollar III.(4.11) gilt $C_{F_4(q)}(s)^l = \mathbf{C}^{(\mathbf{F}w^{-1})}_{\Psi_1}$ für ein Teilwurzelsystem $\Psi_1 \subseteq \Phi$ mit $\Psi_1 w = \Psi_1$. Ist $\Pi_1 \subseteq \Phi^+$ ein Fundamentalsystem von Ψ_1, so gibt es nach Lemma III.(3.12) genau ein Element $w_1 \in w\mathbf{W}_{\Pi_1}$, so dass der halbeinfache Klassentyp von s als Element von $F_4(q)$ durch das Paar (Π_1, w_1) beschrieben wird. Um alle diese Paare zu bestimmen, betrachten wir die in Korollar III.(4.11) definierte Menge M aller möglichen Paare (Π_1, w_1). Wir bestimmen diejenigen Paare $(\Pi_1, w_1) \in M$, für die das zugehörige Teilwurzelsystem Ψ_1 invariant unter w und $\Pi_1 \cap \Phi_{\{2,3\}} = \{2, 9\}$ ist. Dabei ist $\Phi_{\{2,3\}}$ das Wurzelsystem der Leviuntergruppe $\mathbf{L}_{\{2,3\}}$. Ein solches Paar (Π_1, w_1) beschreibt genau dann einen möglichen Klassentyp von s, wenn $ww_1^{-1} \in \mathbf{W}_{\Pi_1}$ ist. Wir finden genau die folgenden Paare $(\{2, 4, 8, 9\}, 1)$ und $(\{2, 7, 8, 9\}, 1)$ die den Klassentyp h_2 von $F_4(q)$ beschreiben und das Paar $(\{2, 9\}, w)$, welches den Klassentyp h_{47} beschreibt. Vergleiche dazu auch Tabelle A.7.

Insgesamt können wir auf diese Weise die halbeinfachen Anteile der Klassentypen von $F_4(q)$, auf denen die Klassenfunktionen ξ_i Werte ungleich Null annehmen können, berechnen. Das Ergebnis ist in der folgenden Tabelle angegeben.

ξ_i	halbeinfacher Anteil der Klassentypen, auf denen ξ_i ungleich Null sein könnte
ξ_1	$h_2, h_3, h_6, h_7, h_{12}, h_{15}, h_{18}, h_{20}, h_{22}, h_{43}, h_{48}$
ξ_2	$h_2, h_3, h_6, h_7, h_{13}, h_{14}, h_{19}, h_{21}, h_{23}, h_{44}, h_{49}$
ξ_3	$h_2, h_3, h_{22}, h_{23}, h_{45}, h_{50}$
ξ_4	$h_2, h_3, h_6, h_7, h_{12}, h_{13}, h_{14}, h_{15}, h_{18}, h_{19}, h_{20}, h_{21}, h_{46}, h_{51}$
ξ_5	h_2, h_3, h_{47}, h_{52}

Tabelle T.V.2: halbeinfacher Anteil der Klassentypen, auf denen ξ_i ungleich Null sein könnte

(9.1) Bemerkung
Vergleichen wir die Ergebnisse von Tabelle T.V.2 für $i = 1, 3, 4$ mit den schon berechneten Werten in Tabelle A.27, so erkennen wir, dass es in diesen Fällen auch immer einen Klassentyp von $F_4(q)$ gibt, dessen halbeinfacher Anteil in der Liste der möglichen halbeinfachen Klassentypen auftaucht, auf dem die Klassenfunktion ξ_i nicht verschwindet. Wir werden im Folgenden sehen, dass dies auch für $i = 2, 5$ der Fall ist.

Als nächstes zeigen wir wieder mit Hilfe von Satz V.(2.10), dass ξ_2 und ξ_5 konstant auf den Klassentypen sind und berechnen einige ihrer Werte. Da die Klassentypen h_2, h_3, h_6 und h_7 nach Tabelle A.7 höchstens eine Konjugiertenklasse von $F_4(q)$ enthalten, sind alle Klassenfunktionen konstant auf diesen Klassentypen. Ist $g = s_g u_g$ ein halbeinfaches Element aus den Klassentypen h_{44} oder h_{49}, so ist $C_{\mathbf{G}}(s_g) \leqslant \mathbf{L}_2$. Nach Satz V.(2.10)(iv) ist somit

$$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_2 \subseteq \mathbf{P}_2}(\pi_g^{\mathbf{L}_2^{\mathbf{F}}}) = \pi_g^{\mathbf{G}^{\mathbf{F}}}.$$

Den Tabellen in den Abschnitten A.7 und A.26 entnehmen wir, dass immer acht Konjugiertenklassen des entsprechenden halbeinfachen Klassentyps von $\mathbf{L}_2^{\mathbf{F}}$ in eine Klasse in $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$ fusionieren. Wir erhalten somit für die Klassenfunktionen ξ_2 und ξ_5 auf den entsprechenden Klassentypen die folgenden Werte

$$\xi_2(c_{44,4}) = -\xi_2(c_{44,5}) = \xi_2(c_{49,2}) = -\xi_2(c_{49,3}) = 8q.$$

Mit einer analogen Argumentation erhalten wir

$$\xi_5(c_{47,4}) = -\xi_5(c_{47,5}) = \xi_5(c_{52,2}) = -\xi_5(c_{52,3}) = 4q.$$

Also ist ξ_2 konstant auf den Klassentypen mit halbeinfachem Anteil h_{44} und h_{49} und ξ_5 konstant auf den Klassentypen mit halbeinfachem Anteil h_{47} und h_{52}. Insbesondere sehen wir, dass ξ_5 konstant auf allen Klassentypen ist.

Wir müssen noch ξ_2 auf den Klassentypen mit halbeinfachem Anteil h_{13}, h_{14}, h_{19}, h_{21} und h_{23} betrachten. Hierfür benutzen wir, dass wegen der Transitivität der Lusztig-Induktion V.(2.11)

$$\xi_2 = R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_7\subseteq\mathbf{P}_7}(g_1' + g_2')$$

ist, wobei g_1' und g_2' die entsprechenden Senkrechtfunktionen von L_7 sind. Vergleiche dazu die entsprechende Definition der Senkrechtfunktionen g_1 und g_2 von L_6 in V.7. Die Werte von g_1' und g_2' können aus Tabelle A.17 abgelesen werden, da L_7 vom gleichen Typ ist wie L_6 und der Frobeniusmorphismus in beiden Fällen trivial auf dem Dynkin-Diagramm operiert. Entsprechend gilt auch

$$\xi_2 = R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_9\subseteq\mathbf{P}_9}(f_1' + f_2')$$

für die Senkrechtfunktionen f_1' und f_2' von L_9, deren Werte in Tabelle A.16 abgelesen werden können. Auf diese Weise können wir analog zu oben mit Satz V.(2.10) die Werte von ξ_2 auf den Klassentypen h_{13}, h_{14}, h_{19}, h_{21} und h_{23} berechnen. Insbesondere ist ξ_2 konstant auf diesen Klassentypen. Somit sehen wir, dass alle unipotenten Fastcharaktere von $F_4(q)$ konstant auf allen Klassentypen sind. Damit sind auch die unipotenten Charaktere konstant auf allen Klassentypen.

Es bleiben noch die Werte von ξ_i für $i = 2, 5$ auf den Klassentypen h_2, h_3 und h_6 zu berechnen. Der Klassentyp h_7 kommt ja für $q \equiv 1$ modulo 12 nach Tabelle A.7 nicht vor. Da die Werte von ξ_i für $i = 2, 5$ konstant auf den Klassentypen sind, können wir wie in Abschnitt V.6 schon für die Berechnung der kuspidalen Fastcharaktere beschrieben Unbestimmte für die noch zu bestimmenden Werte ansetzen. Dann können wir in Abhängigkeit dieser Unbestimmten mittels Korollar V.(7.2) die noch fehlenden unipotenten Fastcharaktere und mit Hilfe der Fourier-Transformationsmatrizen die unipotenten Charaktere von $F_4(q)$ berechnen. Wir gehen dabei analog zu Abschnitt V.6 folgendermaßen vor.

(i) Durch die in Abschnitt V.8 explizit bestimmten Werte unipotenter Charaktere auf einigen Klassentypen können wir einige Unbestimmte als Linearkombination der übrigen schreiben.

(ii) Da die Skalarprodukte mit den schon vollständig bestimmten unipotenten Fastcharakteren verschwinden müssen, erhalten wir weitere Gleichungen für die Unbestimmten.

(iii) Wie in Abschnitt V.6 können wir einige Skalarprodukte der in Kapitel IV beschriebenen Charaktere mit den Fastcharakteren bestimmen und erhalten dadurch weitere Gleichungen für die Unbestimmten.

Wir erhalten auf diese Weise genügend viele Gleichungen, um dieses Gleichungssystem zu lösen. Wir benutzen dabei auch wieder Gröbnerbasen, um die Gleichungssysteme zu vereinfachen. Wir dürfen dabei nicht verwenden, dass die gesuchten Werte sich als Polynome in q schreiben lassen. Dies ist a priori nicht klar und ergibt sich erst aus dem Ergebnis. Wir benutzen die Gleichungen in der Weise, dass wir versuchen, einzelne Unbestimmte zu eliminieren, um das Gleichungssystem soweit zu vereinfachen, dass wir die Unbestimmten vollständig eliminieren können. Hierbei erweisen sich gerade die in Abschnitt V.8 berechneten Werte als sehr wichtig, da sie einfache Gleichungen, die nur sehr wenig Unbestimmte enthalten, ergeben. Auf diese Weise können wir die Werte von ξ_2 und ξ_5 vollständig bestimmen. Diese Werte sind in Tabelle A.27 angegeben. Damit können wir gemäß V.(7.2) die unipotenten Fastcharaktere von $F_4(q)$ und mit Hilfe der Fourier-Transformationsmatrizen die unipotenten Charaktere von $F_4(q)$ vollständig für alle Primzahlpotenzen q mit $2, 3 \nmid q$ bestimmen. Obwohl die Tabelle der Charakterwerte der unipotenten Charaktere sehr groß ist, haben wir sie im Anhang abgedruckt. In elektronischer Form können diese Charaktere als **CHEVIE** -lesbare Datenfiles zusammen mit den übrigen berechneten Charakteren auf der Webseite [Kö05] heruntergeladen werden.

(9.2) Bemerkung (Test der Ergebnisse)
Da die notwendigen Berechnungen teilweise sehr umfangreich sind, sind an dieser Stelle einige Bemerkungen zur Überprüfung der Ergebnisse angebracht. Vergleiche dazu auch die Bemerkungen in [Lüb93, Kapitel 9].

(i) Die Orthogonalitätsrelationen sind erfüllt.

(ii) Mit den unipotenten Charakteren wurden sämtliche Tensorprodukte gebildet und die Skalarprodukte mit den unipotenten Charakteren berechnet. Diese müssen nicht-negative ganze Zahlen ergeben. Dies ist für alle Primzahlpotenzen q mit $2, 3 \nmid q$ durchgeführt worden. Es ergeben sich, wie man durch einfache Kongruenzuntersuchungen erkennt, durchweg nur nicht-negative ganze Zahlen.

(iii) Die Skalarprodukte mit den in IV berechneten Charakteren sind alle nicht-negative ganze Zahlen.

(iv) Wir haben versucht, die Berechnung der Charaktere möglichst elementar zu halten. Insbesondere haben wir kaum Ergebnisse aus der Theorie der Charaktergarben verwendet. Ist einmal gezeigt, dass die gesuchten Fastcharaktere konstant auf den Klassentypen sind, so können wir deren Werte auch relativ leicht mit Hilfe der verallgemeinerten Greenfunktionen bestimmen. Dies ist genauer in dem Übersichtsartikel [Sho01] beschrieben. Es ist aber durchaus interessant zu wissen, dass wir die Werte aufgrund direkter Rechnungen unabhängig von dieser Theorie bestimmen können.

(v) Wir werden die berechneten Charaktere verwenden, um Aussagen über Zerlegungszahlen von $F_4(q)$ zu treffen. Die berechneten Zerlegungszahlen erfüllen diverse Vermutungen über Zerlegungszahlen reduktiver Gruppen. Vergleiche dazu auch Kapitel VI.

(vi) Andererseits sind die so berechneten Charaktere ein guter Test für die in Kapitel I beschriebenen Algorithmen zum direkten Rechnen in reduktiven Gruppen. Diese Algorithmen sind massiv zum Einsatz gekommen.

Kapitel VI

Zerlegungszahlen unipotenter Blöcke von $F_4(q)$

In diesem Kapitel wollen wir die modulare Darstellungstheorie der Chevalleygruppen $F_4(q)$ in nicht-definierender Charakteristik untersuchen. Im Mittelpunkt dieser Betrachtungen stehen die l-modularen Zerlegungszahlen für Primzahlen l, die weder q noch die Ordnung der Weylgruppe $|\mathbf{W}| = 2^7 3^2$ teilen. Diese Zerlegungszahlen lassen sich einheitlich für alle betrachteten l in Abhängigkeit der multiplikativen Ordnung e von q modulo l beschreiben. Da die modulare Darstellungstheorie von $F_4(q)$ auf die gewöhnliche Darstellungstheorie zurückgeführt werden kann, falls l kein Teiler von $|F_4(q)|$ ist, brauchen wir nur die Fälle $e = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$ zu betrachten.

Wir wollen uns in dieser Arbeit auf die Betrachtung der Zerlegungszahlen der unipotenten Blöcke von $F_4(q)$ beschränken. Wir geben zunächst die Blockeinteilung der Charaktere in die unipotenten Blöcke an. Ein wesentliches Hilfsmittel zur Bestimmung der Zerlegungszahlen besteht darin, dass die unipotenten Charaktere eine Basismenge der unipotenten Blöcke bilden. Die Berechnung der Zerlegungszahlen dieser Blöcke lässt sich dadurch auf die Bestimmung der Zerlegungszahlen auf den unipotenten Charakteren und der Basisrelationen reduzieren. Die Basisrelationen können wir vollständig bestimmen.

Es zeigt sich, dass die Charaktere und die Brauercharaktere in den unipotenten Blöcken von $F_4(q)$ so angeordnet werden können, dass die Zerlegungsmatrix eine Dreiecksgestalt annimmt. Wir zeigen dies mit Hilfe der Skalarprodukte der in Kapitel IV berechneten Charaktere mit den unipotenten Charakteren. Hierbei können wir eine Vermutung von Geck und Hiß [GH97, 3.4] für die Gruppen $F_4(q)$ positiv beantworten.

Im letzten Teil benutzen wir eine in [Hiß93] beschriebene modulare Verallgemeinerung der Harish-Chandra-Theorie, um weitere Aussagen über die Zerlegungszahlen der unipotenten Blöcke zu beweisen. Wir können mit Hilfe der berechneten Charaktere und der bekannten Zerlegungszahlen der Leviuntergruppen von $F_4(q)$ und der Hecke-Algebra vom Typ $\mathbf{F}_4$ viele Zerlegungszahlen explizit bestimmen. Leider bleiben dabei noch einige Fragen offen. Wir können in allen Fällen obere Schranken für die noch zu bestimmenden Zerlegungszahlen angeben, die allerdings von q abhängen. Hier wäre es im Hinblick auf den Beweis einer Vermutung von Donovan [Alp80, Conjecture M] wünschenswert, bessere Schranken zu finden.

VI.1 Grundlagen der modularen Darstellungstheorie

In diesem Abschnitt wollen wir die von uns benötigten grundlegenden Begriffe der modularen Darstellungstheorie endlicher Gruppen bereitstellen. Wir wählen hierbei einen rein charaktertheoretischen Zugang, wie er zum Beispiel in [Gol80] und [Isa76] beschrieben wird, der für unsere Zwecke ausreicht. Eine gute Übersicht zur modularen Darstellungstheorie endlicher Gruppen vom Lie-Typ in nicht-definierender Charakteristik findet man auch in [Hiß90] und [DGHM99].

Wir weichen in diesem Abschnitt ausnahmsweise von der sonst üblichen Notation ab und bezeichnen mit G eine **beliebige** endliche Gruppe. Es seien weiter l eine Primzahl und (K, R, k) ein l-modulares Zerfällungssystem für alle Untergruppen von G. Dabei ist R ein vollständig diskreter Bewertungsring vom Rang 1 und Charakteristik 0. Weiter sind K der Quotientenkörper von R und k der Restklassenkörper von R der Charakteristik $l \neq 0$. Zusätzlich sind K und k Zerfällungskörper für alle Untergruppen von G. Wenn wir im Folgenden von Blöcken, Brauercharakteren oder projektiven Charakteren sprechen, so ist dies immer relativ zu dem gewählten l-modularen System (K, R, k) zu verstehen. Zur Existenz solcher l-modularen Zerfällungssysteme vergleiche [Gol80, Kapitel 6]. Wir werden im Folgenden nur auf der Ebene der Charaktere arbeiten. Die Argumentation wird unabhängig von der Wahl des l-modularen Systems sein. Daher wollen wir hier nicht genauer darauf eingehen. Wir wollen zunächst einige Bezeichnungen festlegen.

(1.1) Bezeichnungen

(i) Ist f eine Klassenfunktion von G, so bezeichnen wir die Einschränkung von f auf die l'-Konjugiertenklassen von G mit $\check{f}$.

(ii) Die Menge der einfachen Brauercharaktere bezeichnen wir mit $\mathrm{IBr}(G)$.

(iii) Die Menge der irreduziblen Charaktere in einem l-Block B bezeichnen wir mit $\mathrm{Irr}(B)$.

Die Blöcke von G werden durch das folgende Lemma beschrieben.

(1.2) Lemma (vgl. [Gol80, (7.10)])
Zwei irreduzible Charaktere $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Irr}(G)$ liegen genau dann im gleichen l-Block, wenn für alle l'-Elemente $g \in G$

$$|g^G|\frac{\chi_1(g)}{\chi_1(1)} \equiv |g^G|\frac{\chi_2(g)}{\chi_2(1)} \quad \text{modulo } l$$

im Ring der ganzen algebraischen Zahlen gilt. Dabei bezeichnet $|g^G|$ die Konjugiertenklassenlänge von g in G.

Beweis: Siehe [Gol80, (7.10)]. □

(1.3) Definition/Satz (Zerlegungszahlen)

(i) Ist $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, so ist die Einschränkung $\check{\chi}$ ein Brauercharakter und lässt sich eindeutig als Linearkombination der einfachen Brauercharaktere schreiben. Ist

$$\check{\chi} = \sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(G)} d_{\chi\varphi}\, \varphi$$

diese Linearkombination, so heißen die Koeffizienten $d_{\chi\varphi}$ **Zerlegungszahlen**.

(ii) Die Zerlegungszahlen $d_{\chi\varphi}$ sind nicht-negative ganze Zahlen.

(iii) Die $|\operatorname{Irr}(G)| \times |\operatorname{IBr}(G)|$-Matrix der Zerlegungszahlen heißt **Zerlegungsmatrix**.

Beweis: Siehe [Isa76, 15.17,15.18]. □

Die Zerlegungszahlen sind mit der Blockeinteilung der gewöhnlichen Charaktere verträglich.

(1.4) Bemerkung

(i) Für einen Block B von G definieren wir die Menge

$$\operatorname{IBr}(B) := \{\varphi \in \operatorname{IBr}(G) \mid \text{es ist } d_{\chi\varphi} \neq 0 \text{ für ein } \chi \in \operatorname{Irr}(B)\}.$$

Wir sagen, die Brauercharaktere $\varphi \in \operatorname{IBr}(B)$ liegen im Block B. Ein Brauercharakter liegt im Block B, wenn er sich als Linearkombination der Brauercharaktere in $\operatorname{IBr}(B)$ schreiben lässt.

(ii) Bei entsprechender Anordnung der Zeilen und Spalten gemäß der Blockeinteilung der Charaktere ist die Zerlegungsmatrix von G eine Blockdiagonalmatrix.

Wegen Bemerkung VI.(1.4) können wir uns bei der Untersuchung der Zerlegungszahlen auf die Betrachtung der Blöcke beschränken. Wir wollen im Folgenden zur Berechnung der Zerlegungszahlen nicht die Definition verwenden, sondern eine andere Interpretation der Zerlegungszahlen benutzen, die es uns erlaubt, ohne Betrachtung der Brauercharaktere Rückschlüsse auf die Zerlegungszahlen zu ziehen. Wir benutzen dabei die bezüglich (K, R, k) projektiven Charaktere von G.

(1.5) Bemerkung

(i) Ein projektiver Charakter von G ist der Charakter eines projektiven Moduls von G, also eines direkten Summanden der Gruppenalgebra über R. Ist dieser Modul nicht weiter in direkte Summanden zerlegbar, so heißt der Charakter projektiv unzerlegbar. Einen solchen projektiv unzerlegbaren Charakter bezeichnen wir wie in der Literatur üblich als **PIM**.

(ii) Es gibt eine Bijektion zwischen den projektiv unzerlegbaren Charakteren von G und den einfachen Brauercharakteren. Ist $\varphi \in \operatorname{IBr}(G)$ ein einfacher Brauercharakter, so bezeichnen wir den zugehörigen PIM mit Φ_φ. Dementsprechend können wir die Spalten der Zerlegungsmatrix auch durch die PIMs indizieren.

(1.6) Satz (Brauerreziprozität, vgl. [NT89, 6.8])

Sind B ein l-Block von G und $\varphi \in \operatorname{IBr}(B)$ ein einfacher Brauercharakter in B und Φ_φ der zugehörige PIM, so gilt

$$\Phi_\varphi = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr}(B)} d_{\chi\varphi}\ \chi.$$

Beweis: Siehe [NT89, 6.8]. □

Wir werden die Brauerreziprozität VI.(1.6) benutzen, um Aussagen über die Zerlegungszahlen zu treffen. Dafür benötigen wir einerseits noch eine Möglichkeit, projektive Charaktere zu konstruieren, und andererseits ein Verfahren, diese in unzerlegbare zu zerlegen beziehungsweise die Unzerlegbarkeit zu zeigen. Um projektive Charaktere zu produzieren benutzen wir im Wesentlichen zwei Methoden:

(1.7) Bemerkung (Konstruktion projektiver Charaktere)

(i) Induktion von projektiven Charakteren von Untergruppen, siehe [Alp86, III.8.5]. Insbesondere sind alle Charaktere von l'-Untergruppen projektiv. Daher liefert die Induktion von Charakteren von l'-Untergruppen immer projektive Charaktere.

(ii) Tensorprodukte mit projektiven Charakteren, siehe [Alp86, II.7.4]. Dabei erweisen sich insbesondere die Tensorprodukte mit Defekt-Null-Charakteren, das heißt, mit Charakteren, deren Charaktergrad durch den l-Anteil der Gruppenordnung teilbar ist, als nützlich. Diese sind immer projektiv und haben den Vorteil, dass die Tensorprodukte mit ihnen typischerweise relativ wenige Konstituenten haben.

Weitere Konstruktionen und einen Unzerlegbarkeitstest für projektive Charaktere sowie Möglichkeiten, projektive Charaktere zu zerlegen, werden wir in den beiden folgenden Abschnitten beschreiben.

Wichtig bei der Berechnung der Zerlegungszahlen wird sein, dass es ausreicht, nur einen Teil der Zerlegungszahlen zu bestimmen. Die restlichen Zerlegungszahlen ergeben sich dann sofort aus Relationen, die wir einfach berechnen können. Die folgenden Begriffe erweisen sich hierbei als sehr nützlich. Für eine tiefere Einführung in die Theorie der Basismengen vergleiche [Hiß90, Kapitel 2].

(1.8) Definition (Basismengen und Relationen, vgl [Hiß90, 2.1,2.2.5])
Es sei B ein l-Block von G.

(i) Eine Menge $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{l(B)}\}$ von Brauercharakteren heißt Basismenge von Brauercharakteren des Blocks B, wenn sie linear unabhängig ist und $\mathrm{IBr}(B)$ eine Teilmenge des $\mathbb{Z}$-Erzeugnisses von $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{l(B)}\}$ ist.

(ii) Es seien S eine Basismenge von B und $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$. Dann lässt sich $\check{\chi}$ als ganzzahlige Linearkombination in der Basismenge schreiben. Die auf diese Weise erhaltene Gleichung

$$\check{\chi} - \sum_{\varphi \in S} a_{\chi\varphi}\, \varphi = 0$$

mit $a_{\chi\varphi} \in \mathbb{Z}$ heißt eine **Basisrelation** bezüglich S.

(iii) Eine Basismenge S heißt **gewöhnlich**, wenn $S = \{\check{\chi} \mid \chi \in M\}$ für eine Teilmenge $M \subseteq \mathrm{Irr}(G)$ ist. In diesem Fall nennen wir auch M eine gewöhnliche Basismenge von B.

(iv) Wir verwenden die Begriffe Basismengen und Basisrelationen sinngemäß auch für Vereinigungen von l-Blöcken.

(1.9) Bemerkung (vgl. [Hiß90, 2.2.2])
Es seien B ein l-Block von G und $\mathrm{Irr}(B) = \{\chi_1, \ldots, \chi_{k(B)}\}$ und $\mathrm{IBr}(B) = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{l(B)}\}$. Ist $S = \{\breve{\chi}_1, \ldots, \breve{\chi}_{l(B)}\}$ mit $l(B) \leqslant k(B)$ ein gewöhnliche Basismenge von B, dann gilt für alle $i > l(B)$ und $1 \leqslant j \leqslant l(B)$

$$d_{\chi_i\varphi_j} = \sum_{m=1}^{l(B)} a_{im} d_{\chi_m\varphi_j},$$

wenn

$$\breve{\chi}_i - \sum_{m=1}^{l(B)} a_{im}\, \breve{\chi}_m = 0$$

die zu χ_i gehörende Basisrelation bezüglich S ist. Die Zerlegungsmatrix des Blockes B ist also durch die Zerlegungszahlen auf der Basismenge S und alle Basisrelationen schon bestimmt.

Wir können die Bemerkung VI.(1.9) und die Brauerreziprozität VI.(1.6) benutzen, um projektive Charaktere auf Unzerlegbarkeit zu testen. Diese Methode erlaubt zwar nicht die Zerlegung eines zerlegbaren projektiven Charakters, sie ermöglicht aber unter Umständen, zu beweisen, dass ein gegebener projektiver Charakter unzerlegbar, also ein PIM ist. Auch wenn wir die Unzerlegbarkeit nicht beweisen können, können wir in einigen Fällen beweisen, dass bestimmte unipotente Charaktere Konstituenten in einem gesuchten PIM sein müssen, wodurch wir untere Schranken für die entsprechenden Zerlegungszahlen erhalten. Es gilt:

(1.10) Lemma (Unzerlegbarkeitstest, vgl. [Hiß90, 2.2.7])
Es seien Φ ein projektiver Charakter von G und $S = \{\chi_1, \ldots, \chi_{l(B)}\}$ eine gewöhnliche Basismenge eines l-Blockes B von G. Für $1 \leqslant j \leqslant l(B)$ setzen wir

$$z_j := \left(\Phi, \chi_j\right).$$

Gibt es für alle $(0, \ldots, 0) \neq (z'_1, \ldots, z'_{l(B)}) \neq (z_1, \ldots, z_{l(B)})$ mit $0 \leqslant z'_j \leqslant z_j$ für $1 \leqslant j \leqslant l(B)$ eine Basisrelation

$$\breve{\chi}_i - \sum_{m=1}^{l(B)} a_{im}\, \breve{\chi}_m = 0$$

bezüglich S, so dass

$$\sum_{j=1}^{l(B)} a_{ij} z'_j < 0$$

ist, so ist Φ unzerlegbar, also ein PIM.

Beweis: Dies ist ein Spezialfall von Lemma [Hiß90, 2.2.7] und folgt sofort aus der Brauerreziprozität VI.(1.6) und Bemerkung VI.(1.9). Für einen in Φ vorkommenden PIM $\Phi' \neq \Phi$ definieren wir $z'_j := (\Phi', \chi_j)$ für $1 \leqslant j \leqslant l(B)$. Dann gilt $(0, \ldots, 0) \neq (z'_1, \ldots, z'_{l(B)}) \neq (z_1, \ldots, z_{l(B)})$ und $0 \leqslant z'_j \leqslant z_j$ für $1 \leqslant j \leqslant l(B)$. Die Bedingung

$$\sum_{j=1}^{l(B)} a_{ij} z'_j < 0$$

impliziert dann aber, dass eine der Zerlegungszahlen negativ ist, was unmöglich ist. □

VI.2 Unipotente Blöcke und Basissysteme von $F_4(q)$

In diesem Abschnitt wollen wir die in Abschnitt VI.1 eingeführten Begriffe auf die Gruppe $F_4(q)$ anwenden und die unipotenten l-Blöcke von $F_4(q)$ aus den berechneten unipotenten Charakteren bestimmen. Diese Blöcke wurden schon in [BMM93] mit Hilfe theoretischer Methoden bestimmt. Es zeigt sich, dass diese Blöcke im wesentlichen nicht von l sondern nur von der multiplikativen Ordnung von q modulo l, die wir mit e bezeichnen, abhängen. Wir wollen die benötigten Bezeichnungen hier noch einmal zusammenfassen.

(2.1) Bezeichnungen
Es gelten die folgenden Bezeichnungen:

q	eine Primzahlpotenz mit $2, 3 \nmid q$
$\mathbf{G}$	$\mathbf{F}_4(\overline{\mathbb{F}}_q)$, wobei $\overline{\mathbb{F}}_q$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{F}_q$ ist
$G := \mathbf{G}^{\mathbf{F}} = F_4(q)$	die in Abschnitt II.3 definierte Chevalleygruppe vom Typ $\mathbf{F}_4$
$G^* := \mathbf{G}^{*\mathbf{F}^*}$	die zu $F_4(q)$ duale Gruppe. Sie ist isomorph zu $F_4(q)$.
l	eine Primzahl mit $l \nmid q$ und $2, 3 \nmid l$ und $l \mid \lvert G\rvert$
e	die multiplikative Ordnung von q modulo l
(K, R, k)	ein l-modulares Zerfällungssystem für alle Untergruppen von G

Wir wollen die l-Blöcke von $F_4(q)$ und jeweils Basismengen beschreiben und die zugehörigen Basisrelationen berechnen. Dabei beschränken wir uns hier auf die sogenannten unipotenten Blöcke. Die hier zitierten Aussagen gelten meist für eine allgemeinere Klasse von Gruppen und nicht nur für den Fall $G = F_4(q)$. Eine Übersicht der Ergebnisse findet sich zum Beispiel in [Hiß90]. Die Blockeinteilung der irreduziblen Charaktere ist verträglich mit den in V.(3.4) definierten rationalen Klassen von Charakteren. Genauer gilt:

(2.2) Definition/Satz (vgl. [BM89, 2.2])
Es sei $s \in G^*$ ein halbeinfaches l'-Element. Wir definieren

$$\mathcal{E}_l(G, s) := \bigcup_{t \in C_{G^*}(s)_l} \mathcal{E}(G, st).$$

Dabei ist $C_{G^*}(s)_l$ die Menge der l-Elemente von $C_{G^*}(s)$. Dann ist $\mathcal{E}_l(G, s)$ eine Vereinigung von l-Blöcken von G.

(2.3) Definition/Satz (unipotente Blöcke, vgl. [Hiß90, 4.2.5,4.2.6])
Die l-Blöcke in $\mathcal{E}_l(G, 1)$ heißen unipotent. Dies sind genau die l-Blöcke von G, die mindestens einen unipotenten Charakter enthalten.

Wir wollen nun die unipotenten l-Blöcke von G beschreiben. Dazu geben wir zunächst Basismengen für diese Blöcke an. Dafür benutzen wir das folgende Ergebnis von Geck und Hiß.

(2.4) Satz (Basismengen unipotenter Blöcke, vgl. [GH91, 5.1])
Ist B ein unipotenter Block von G, so bildet die Menge $\{\check{\chi} \mid \chi \in \mathrm{Irr}(B) \text{ unipotent}\}$ eine gewöhnliche Basismenge für B.

Beweis: Siehe [GH91, 5.1]. □

(2.5) Bemerkung
Die in Satz VI.(2.4) angegebenen Basismengen der unipotenten Blöcke von G erfüllen genau die Voraussetzung von Bemerkung VI.(1.9). Somit können wir die Zerlegungszahlen der unipotenten Blöcke bestimmen, wenn wir die Zerlegungszahlen für die unipotenten Charaktere bestimmen und die entsprechenden Basisrelationen gemäß VI.(1.8)(ii) ausrechnen.

Nach II.3 ist $|G| = q^{24}\Phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$. Ist l kein Teiler von $|G|$, so ist die Gruppenalgebra kG halbeinfach. Damit ist jeder unipotenten Charakter projektiv und bildet einen Block für sich. Die Zerlegungszahlen sind in diesem Fall trivial. Wir brauchen also nur Primzahlen l zu betrachten, die $|G|$ teilen. Wegen $l \neq 2, 3$ teilt l den Faktor ϕ_e, wobei e die multiplikative Ordnung von q modulo l ist und keinen weiteren Faktor ϕ_i für $i \neq e$ der Gruppenordnung. Die Blockeinteilung lässt sich in diesem Fall generisch in Abhängigkeit von e beschreiben. Was generisch in diesem Zusammenhang genau heißt, wird in [BMM93] beschrieben. Wir wollen dies hier nicht weiter ausführen. Für uns ist ausreichend, dass wir die unipotenten l-Blöcke und die zugehörigen Zerlegungszahlen in Abhängigkeit von e einheitlich beschreiben können. Wir müssen die verschiedenen Fälle für $e \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ unterscheiden.

Wir wollen nun in Abhängigkeit von e die unipotenten Blöcke von G bestimmen. Dafür verwenden wir Lemma VI.(1.2). Wir müssen als nächstes die Menge der Charaktere in

$$\mathcal{E}_l(G, 1) = \bigcup_{t \in G_l^*} \mathcal{E}(G, t)$$

angeben. Dazu müssen wir zunächst die l-Elemente von G^* bestimmen. Da l kein Teiler von q ist, sind die gesuchten Elemente halbeinfach und wir können alle l-Elemente parametrisieren, indem wir die in Bemerkung III.(4.17)(iv) beschriebene Erweiterung des Algorithmus zur Parametrisierung der halbeinfachen Elemente verwenden und auf die duale Gruppe G^*, die wieder eine Gruppe vom Typ $\mathbf{F}_4$ ist, anwenden. Zur Parametrisierung der Charaktere in $\mathcal{E}(G, t)$ verwenden wir die durch die Jordan-Zerlegung der Charaktere V.(3.6) gegebene Bijektion. Für die unipotenten Charaktere der Zentralisatoren der l-Elemente verwenden wir die in [Car85, 13.8] beschriebene Parametrisierung durch Symbole. Die Ergebnisse sind in Tabelle A.29 angegeben. Dabei verwenden wir für die Anzahlen der Charaktere die folgende Notation.

(2.6) Bezeichnungen
Sind l eine Primzahl und $n \in \mathbf{N}$, dann besagt die Schreibweise $l^d || n$, dass l^d die höchste l-Potenz ist, die n teilt.

Um mit Hilfe von Lemma VI.(1.2) die unipotenten Blöcke zu bestimmen, müssten wir allerdings die Charakterwerte dieser Charaktere kennen, die wir mit Ausnahme der Charakterwerte für die unipotenten Charaktere aber nicht berechnet haben. Da wir die Werte der unipotenten Charaktere vollständig kennen, können wir jedoch nach Satz VI.(2.4) die Basismengen für alle unipotenten Blöcke bestimmen. Diese können dem Lemma VI.(2.7) entnommen werden.

(2.7) Lemma (Blockeinteilung unipotenter Charaktere, vgl. [BMM93, 5.24])
Es seien l eine Primzahl mit $2, 3 \nmid l$ und q eine Primzahlpotenz mit $2, 3 \nmid q$ und $l \nmid q$ und l teilt $|F_4(q)|$. Es sei e die multiplikative Ordnung von q modulo l. Dann gilt:

(i) Ist $e = 1$, so hat $F_4(q)$ neun unipotente Blöcke. Sieben Blöcke enthalten jeweils genau einen Defekt-Null-Charakter, der Block B_2 enthält fünf unipotente Charaktere und der Hauptblock B_1 enthält 25 unipotente Charaktere. Die sieben unipotenten Defekt-Null-Charaktere sind:

$$\{F_4^{II}[1],\ F_4[-1],\ F_4^{I}[1],\ F_4[\theta],\ F_4[\theta^2],\ F_4[i],\ F_4[-i]\}.$$

Die unipotenten Charaktere in den unipotenten Blöcke mit mehr als einem Charakter sind:

$$B_1:\ \{\phi_{1,0},\ \phi_{4,1},\ \phi''_{2,4},\ \phi'_{2,4},\ \phi_{9,2},\ \phi'_{8,3},\ \phi''_{8,3},\ \phi_{12,4},\ \phi'_{9,6},\ \phi'_{1,12},\ \phi''_{6,6},\ \phi_{16,5},\ \phi'_{4,7},\ \phi''_{9,6},\ \phi''_{1,12},\ \phi_{4,8},\ \phi'_{6,6},\ \phi''_{4,7},\ \phi'_{8,9},\ \phi''_{8,9},\ \phi_{9,10},\ \phi_{4,13},\ \phi''_{2,16},\ \phi'_{2,16},\ \phi_{1,24}\}$$

$$B_2:\ \{B_{2,1},\ B_{2,\epsilon''},\ B_{2,r},\ B_{2,\epsilon'},\ B_{2,\epsilon}\}$$

(ii) Ist $e = 2$, so hat $F_4(q)$ neun unipotente Blöcke. Sieben Blöcke enthalten jeweils genau einen Defekt-Null-Charakter, der Block B_2 enthält fünf unipotente Charaktere und der Hauptblock B_1 enthält 25 unipotente Charaktere. Die sieben unipotenten Defekt-Null-Charaktere sind:

$$\{\phi_{12,4},\ \phi_{16,5},\ \phi_{4,8},\ F_4[\theta],\ F_4[\theta^2],\ F_4[i],\ F_4[-i]\}.$$

Die unipotenten Charaktere in den unipotenten Blöcken mit mehr als einem Charakter sind:

$$B_1:\ \{\phi_{1,0},\ \phi''_{2,4},\ \phi'_{2,4},\ B_{2,1},\ \phi_{9,2},\ \phi'_{8,3},\ \phi''_{8,3},\ \phi'_{9,6},\ \phi'_{1,12},\ F_4^{II}[1],\ \phi''_{6,6},\ F_4[-1],\ B_{2,\epsilon''},\ \phi''_{9,6},\ F_4^{I}[1],\ \phi''_{1,12},\ \phi'_{6,6},\ B_{2,\epsilon'},\ \phi'_{8,9},\ \phi''_{8,9},\ \phi_{9,10},\ \phi''_{2,16},\ \phi'_{2,16},\ B_{2,\epsilon},\ \phi_{1,24}\}$$

$$B_2:\ \{\phi_{4,1},\ \phi'_{4,7},\ B_{2,r},\ \phi''_{4,7},\ \phi_{4,13}\}$$

(iii) Ist $e = 3$, so hat $F_4(q)$ 17 unipotente Blöcke. Davon enthalten 16 Blöcke jeweils genau einen Defekt-Null-Charakter. Der Hauptblock enthält 21 unipotente Charaktere. Die 16 unipotenten Defekt-Null-Charaktere sind:

$$\{B_{2,1},\ \phi_{9,2},\ \phi_{12,4},\ \phi'_{9,6},\ \phi''_{6,6},\ F_4[-1],\ B_{2,\epsilon''},\ \phi''_{9,6},\ F_4^{I}[1],\ B_{2,r},\ \phi'_{6,6},\ B_{2,\epsilon'},\ F_4[i],\ F_4[-i],\ \phi_{9,10},\ B_{2,\epsilon}\}.$$

Die unipotenten Charaktere im Hauptblock sind:

$$B_1: \{\phi_{1,0}, \phi_{4,1}, \phi''_{2,4}, \phi'_{2,4}, \phi'_{8,3}, \phi''_{8,3}, \phi'_{1,12}, F_4^{II}[1], \phi_{16,5}, \phi'_{4,7}, \phi''_{1,12}, \phi_{4,8}, F_4[\theta], F_4[\theta^2], \phi''_{4,7}, \phi'_{8,9}, \phi''_{8,9}, \phi_{4,13}, \phi''_{2,16}, \phi'_{2,16}, \phi_{1,24}\}.$$

(iv) Ist $e = 4$, so hat $F_4(q)$ 16 unipotente Blöcke. Davon enthalten 13 Blöcke jeweils genau einen Defekt-Null-Charakter, die beiden Blöcke B_2 und B_3 enthalten jeweils vier unipotente Charaktere und der Hauptblock B_1 enthält 16 unipotente Charaktere. Die 13 unipotenten Defekt-Null-Charaktere sind:

$$\{\phi_{12,4}, \phi'_{9,6}, \phi''_{6,6}, F_4[-1], B_{2,\epsilon''}, \phi''_{9,6}, F_4^{I}[1], B_{2,r}, \phi'_{6,6}, B_{2,\epsilon'}, F_4[i], F_4[-i], \phi_{9,10}\}.$$

Die unipotenten Charaktere in den unipotenten Blöcke mit mehr als einem Charakter sind:

$$B_1: \{\phi_{1,0}, \phi_{4,1}, B_{2,1}, \phi_{9,2}, \phi_{12,4}, F_4^{II}[1], F_4^{I}[1], \phi_{4,8}, B_{2,r}, \phi'_{6,6}, F_4[i], F_4[-i], \phi_{9,10}, \phi_{4,13}, B_{2,\epsilon}, \phi_{1,24}\}$$

$$B_2: \{\phi''_{2,4}, B_{2,\epsilon''}, \phi''_{4,7}, \phi''_{2,16}\}$$

$$B_3: \{\phi'_{2,4}, \phi'_{4,7}, B_{2,\epsilon'}, \phi'_{2,16}\}$$

(v) Ist $e = 6$, so hat $F_4(q)$ 17 unipotente Blöcke. Davon sind 16 projektiv, der Hauptblock B_1 enthält 21 unipotente Charaktere. Die 16 unipotenten Defekt-Null-Charaktere sind:

$$\{\phi_{4,1}, \phi_{9,2}, \phi'_{1,12}, F_4^{II}[1], \phi''_{6,6}, \phi_{16,5}, \phi'_{4,7}, \phi''_{1,12}, \phi_{4,8}, B_{2,r}, \phi'_{6,6}, \phi''_{4,7}, F_4[i], F_4[-i], \phi_{9,10}, \phi_{4,13}\}$$

Die unipotenten Charaktere im Hauptblock sind:

$$B_1: \{\phi_{1,0}, \phi''_{2,4}, \phi'_{2,4}, B_{2,1}, \phi'_{8,3}, \phi''_{8,3}, \phi_{12,4}, \phi'_{9,6}, F_4[-1], B_{2,\epsilon''}, \phi''_{9,6}, F_4^{I}[1], F_4[\theta], F_4[\theta^2], B_{2,\epsilon'}, \phi'_{8,9}, \phi''_{8,9}, \phi''_{2,16}, \phi'_{2,16}, B_{2,\epsilon}, \phi_{1,24}\}$$

(vi) Ist $e = 8$, so hat $F_4(q)$ 30 unipotente Blöcke. Davon sind 29 projektiv, der Hauptblock B_1 enthält 8 unipotente Charaktere. Die 29 unipotenten Defekt-Null-Charaktere sind:

$$\{\phi_{4,1}, \phi''_{2,4}, \phi'_{2,4}, B_{2,1}, \phi'_{8,3}, \phi''_{8,3}, \phi_{12,4}, \phi'_{9,6}, \phi'_{1,12}, F_4^{II}[1], \phi''_{6,6}, B_{2,\epsilon''}, \phi'_{4,7}, \phi''_{9,6}, F_4^{I}[1], \phi''_{1,12}, \phi_{4,8}, B_{2,r}, \phi'_{6,6}, F_4[\theta], F_4[\theta^2], \phi''_{4,7}, B_{2,\epsilon'}, \phi'_{8,9}, \phi''_{8,9}, \phi_{4,13}, \phi''_{2,16}, \phi'_{2,16}, B_{2,\epsilon}\}$$

Die unipotenten Charaktere im Hauptblock sind:

$$B_1: \{\phi_{1,0}, \phi_{9,2}, \phi_{16,5}, F_4[-1], F_4[i], F_4[-i], \phi_{9,10}, \phi_{1,24}\}$$

(vii) Ist $e = 12$, so hat $F_4(q)$ 26 unipotente Blöcke. Davon sind 25 projektiv, der Hauptblock B_1 enthält 12 unipotente Charaktere. Die 25 unipotenten Defekt-Null-Charaktere sind:

$$\{\phi''_{2,4}, \phi'_{2,4}, \phi_{9,2}, \phi'_{8,3}, \phi''_{8,3}, \phi_{12,4}, \phi'_{9,6}, \phi'_{1,12}, F_4^{II}[1], \phi_{16,5}, F_4[-1], B_{2,\epsilon''}, \phi'_{4,7}, \phi''_{9,6}, F_4^{I}[1], \phi''_{1,12}, \phi_{4,8}, \phi'_{6,6}, \phi''_{4,7}, B_{2,\epsilon'}, \phi'_{8,9}, \phi''_{8,9}, \phi_{9,10}, \phi''_{2,16}, \phi'_{2,16}\}$$

Die unipotenten Charaktere im Hauptblock sind:

$$B_1 : \quad \{\phi_{1,0}, \phi_{4,1}, B_{2,1}, \phi''_{6,6}, B_{2,r}, F_4[\theta], F_4[\theta^2], F_4[i], F_4[-i], \phi_{4,13}, B_{2,\epsilon}, \phi_{1,24}\}$$

(2.8) Bemerkung (Test der Ergebnisse)
Die mit Hilfe der unipotenten Charaktere bestimmte Blockeinteilung VI.(2.7) stimmt mit der in [BMM93, 5.24] angegebenen Einteilung überein. Dies ist ein guter Test für die berechneten Werte der unipotenten Charaktere.

(2.9) Bemerkung (Basismengen der unipotenten Blöcke von $F_4(q)$)
Nach Satz VI.(2.4) ergeben sich aus Lemma VI.(2.7) sofort die Basismengen für die unipotenten Blöcke von $F_4(q)$.

Die Charakterwerte der übrigen Charaktere auszurechnen wäre im Prinzip mit den in [Lüb93] beschriebenen Methoden möglich, aber sehr aufwendig. Die schwierigsten Probleme haben wir in dieser Arbeit mit der Berechnung der unipotenten Fastcharaktere gelöst, die restlichen nicht-uniformen Fastcharaktere sollten deutlich leichter zu berechnen sein. Der Umfang der vollständigen generischen Charaktertafel von $F_4(q)$ ist aber so groß, dass zum Beispiel Skalarproduktberechnungen sehr langwierig wären, was den Nutzen dieser generischen Charaktertafel zweifelhaft erscheinen lässt. In unserem Fall zeigt es sich, dass wir für die Blockeinteilung gar nicht alle Charakterwerte benötigen, da schon die Werte auf den unipotenten Elementen ausreichen, um mittels Lemma VI.(1.2) und der Kenntnis der Basismengen der unipotenten Blöcke die Blockeinteilung zu berechnen. Genauer können wir aufgrund der Werte auf den unipotenten Klassen zeigen, dass ein solcher Charakter $\chi \in \mathcal{E}(G, t)$ für ein l-Element $t \in G^*$ in höchstens einem der unipotenten Blöcke liegen kann. Da χ nach Satz VI.(2.2) in einem unipotenten Block liegen muss, können wir auf diese Weise bestimmen, in welchem unipotenten Block χ liegt.

Die Werte der irreduziblen Charaktere von $F_4(q)$ auf den unipotenten Elementen wurden von Frank Lübeck unter Benutzung der Jordan-Zerlegung der Charaktere V.(3.6) explizit berechnet. Dies ist möglich, da die Werte aller Fastcharaktere von $F_4(q)$ auf den unipotenten Klassen explizit bekannt sind, da die noch nicht berechneten Fastcharaktere auf den unipotenten Klassen verschwinden. Die Charakterwerte auf den unipotenten Klassen reichen auch aus, um die in VI.(1.8)(ii) definierten Basisrelationen zu bestimmen, da wir durch die Werte auf den unipotenten Klassen genügend Gleichungen erhalten, um die Koeffizienten der Basisrelationen eindeutig zu bestimmen. Diese Ergebnisse sind in den Tabellen A.30 und A.31 angegeben.

VI.3 Die Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrizen

Wir behalten die Bezeichnungen aus Abschnitt VI.2 bei. Insbesondere sei l eine Primzahl mit $l \neq 2, 3$, die $|G|$ teilt, und l sei kein Teiler von q. Weiter sei e die multiplikative Ordnung von q modulo l. In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass die Charaktere und die Brauercharaktere in den unipotenten Blöcken von $F_4(q)$ so angeordnet werden können, dass die Zerlegungsmatrix eine untere Dreiecksform hat. Wir können dabei die Gültigkeit einer Vermutung von Geck und Hiß [GH97, 3.4] für die Gruppen $F_4(q)$ nachweisen. Wir verwenden dafür die in Tabelle A.20 angegebenen Charaktere.

(3.1) Definition (Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrix, vgl [Hiß90, 2.2.10])
Es sei B ein Block einer endlichen Gruppe G, dann hat die Zerlegungsmatrix von B **Dreiecksgestalt**, wenn sich die Charaktere in $\mathrm{Irr}(B)$ und $\mathrm{IBr}(B)$ so anordnen lassen, dass die Zerlegungsmatrix die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ * & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ * & & \cdots & * & 1 \\ * & & \cdots & & * \\ \vdots & & & & \vdots \\ * & & \cdots & & * \end{pmatrix}$$

hat. Dabei sind die Einträge oberhalb der Diagonalen alle Null.

(3.2) Bemerkung
Hat die Zerlegungsmatrix eines l-Blockes B bezüglich einer geeigneten Anordnung der Charaktere Dreiecksgestalt und ist die gewöhnliche Basismenge von B durch die bezüglich dieser Anordnung oberen $l(B)$ irreduziblen Charaktere gegeben, so erhalten wir auf diese Weise eine kanonische Parametrisierung der irreduziblen Brauercharaktere von B durch die gewöhnlichen irreduziblen Charaktere in dieser Basismenge. Vergleiche dazu [GH97, Abschnitt 3].

Wir wollen nun zeigen, dass die Zerlegungsmatrizen der unipotenten Blöcke von $F_4(q)$ in den von uns betrachteten Fällen Dreiecksgestalt hat. Für die Blöcke vom zyklischen Defekt folgt dies aus [HL98]. Für $q \equiv 1$ modulo 12 wurde dies schon in [Win95] gezeigt.

(3.3) Bemerkung
Ist l ein Primteiler von $|F_4(q)|$ mit $l \neq 2, 3$ und l kein Teiler von q, so sind die in Tabelle A.20 angegebenen Charaktere von G bezüglich des l-modularen Systems (K, R, k) projektiv.

Beweis: Nach Lemma IV.(3.3) sind die in Tabelle A.20 angegebenen Charaktere von l'-Untergruppen induziert und somit nach Bemerkung VI.(1.7) projektiv. □

(3.4) Lemma
Es sei l wie in Bemerkung VI.(3.3). Die Skalarprodukte der in Tabelle A.20 angegebenen projektiven Charaktere mit den unipotenten Charakteren sind in Tabelle A.32 angegeben. Dabei stehen Punkte (.) für den Wert 0 und Sterne ($*$) für Werte, die sich als nicht-konstante Polynome in q schreiben lassen. Diese Polynome hängen teilweise von der Kongruenz von q modulo 12 ab. Die restlichen Werte sind unabhängig von der Kongruenz von q modulo 12.

Beweis: Dies folgt durch einfache Berechnung der Skalarprodukte mit Hilfe von **CHEVIE** . Wir berechnen die Werte für die vier Kongruenzen von q und sehen, dass die Tabelle unabhängig von der Kongruenz von q ist. □

(3.5) Korollar (Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrizen unipotenter Blöcke)
Es seien q eine Primzahlpotenz mit $2, 3 \nmid q$ und $l \neq 2, 3, q$ eine Primzahl. Die Zerlegungsmatrizen der unipotenten l-Blöcke von $F_4(q)$ haben Dreiecksgestalt. Wir erhalten somit nach Bemerkung VI.(3.2) eine kanonische Parametrisierung der irreduziblen Brauercharaktere in den unipotenten Blöcken durch die gewöhnlichen unipotenten Charaktere im entsprechenden Block.

Beweis: Nach Satz VI.(2.4) bilden die unipotenten Charaktere eine gewöhnliche Basismenge für die Vereinigung der unipotenten Blöcke. Wir ordnen die unipotenten Charaktere wie in Tabelle A.21 an. Diese Anordnung ist familienweise. Die in Tabelle A.20 angegebenen Charaktere sind nach Bemerkung VI.(3.3) projektiv, also Summen von PIMs. Die Tafel der Skalarprodukte A.32 der unipotenten Charaktere mit diesen projektiven Charakteren zeigt dann, dass wir die Brauercharaktere so anordnen können, dass die Zerlegungsmatrix der unipotenten Blöcke Dreiecksgestalt hat. □

(3.6) Bemerkung
Die Skalarprodukte in Tabelle A.32 zeigen sogar, dass wir die unipotenten Charaktere innerhalb einer Familie beliebig anordnen können und bei geeigneter Anordnung der Brauercharaktere Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrix erhalten. Die Familien sind in der Tafel A.32 durch waagerechte und senkrechte Linien angedeutet. Wir sehen, dass die entsprechenden Teile der Zerlegungsmatrizen Einheitsmatrizen sein müssen. Es wird vermutet [GH97, Conjecture 3.4], dass die Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrix für gute Primzahlen l immer unabhängig von der Anordnung der gewöhnlichen Charaktere innerhalb einer Familie ist. Diese Vermutung ist also für die Gruppen $F_4(q)$ mit $2, 3 \nmid q$ richtig.

VI.4 Modulare Harish-Chandra-Theorie

Es gelten die Bezeichnungen aus Abschnitt VI.2 und insbesondere aus VI.(2.1). In diesem Abschnitt wollen wir eine modulare Verallgemeinerung der Harish-Chandra-Theorie der gewöhnlichen Charaktere von G vorstellen. Diese erlaubt die Einteilung der irreduziblen Brauercharaktere in modulare Harish-Chandra-Serien und erweist sich als sehr wichtig bei der Berechnung der Zerlegungszahlen. Die modularen Harish-Chandra-Serien geben in vielen Fällen Information über die Zerlegung projektiver Charaktere in PIMs und somit mittels der Brauerreziprozität VI.(1.6)

über die Zerlegungszahlen. Eine detaillierte Darstellung der modularen Harish-Chandra-Theorie und die Beweise der hier vorgestellten Sätze findet man in [Hiß93]. Wir beschränken uns hier im wesentlichen auf die Betrachtung der Brauercharaktere und projektiven Charaktere von G. Eine genauere Analyse liefert mehr Informationen über die Modulstrukturen der zugehörigen Moduln. Dies wird in [GHM96] und [GH97] beschrieben. Wir werden aber im Folgenden diese Modulstrukturen nicht brauchen. Wie in der gewöhnlichen Harish-Chandra-Theorie spielen die kuspidalen Charaktere eine große Rolle. Wir benötigen noch die folgenden Definitionen und Bezeichnungen.

(4.1) Bezeichnungen
Ist $J \subseteq \Pi$, so setzen wir $U_J := \mathbf{U}_J^{\mathbf{F}}$ und $L_J := \mathbf{L}_J^{\mathbf{F}}$ und $P_J := \mathbf{P}_J^{\mathbf{F}}$. Ist $\mathbf{L}$ eine maximal zerfallende reguläre Untergruppe von $\mathbf{G}$ und $L := \mathbf{L}^{\mathbf{F}}$, so nennen wir L eine maximal zerfallende Leviuntergruppe von G und schreiben auch R_L^G für die Harish-Chandra-Induktion $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$.

(4.2) Definition
Es sei ϕ ein Brauercharakter von G und Φ ein projektiver Charakter von G. Dann definieren wir

$$\langle \Phi, \phi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G_{l'}} \Phi(g)\phi(g^{-1}),$$

wenn $G_{l'}$ die Menge der l'-Elemente von G ist.

(4.3) Definition (Kuspidaler Brauercharakter)
Ein Brauercharakter $\phi \in \mathrm{IBr}(G)$ heißt **kuspidal**, wenn $\langle \mathrm{Ind}_{U_J}^G(1), \phi \rangle = 0$ für alle echten Teilmengen $J \subsetneq \Pi$ ist.

(4.4) Bemerkung

(i) Wegen $l \nmid q$ ist $\mathrm{Ind}_{U_J}^G(1)$ nach Bemerkung VI.(1.7) ein projektiver Charakter von G.

(ii) Wir können für einen gegebenen irreduziblen Brauercharakter leicht algorithmisch feststellen, ob er kuspidal ist. Dazu müssen wir für alle Teilmengen $J \subseteq \Pi$ den projektiven Charakter $\mathrm{Ind}_{U_J}^G(1)$ berechnen, der nur auf den unipotenten Klassen von G nichtverschwindende Werte annimmt. Diese Werte können wir leicht mit der folgenden Formel berechnen. Es sei $u \in G$ ein unipotentes Element. Weiter seien $w_1, \ldots, w_r$ Vertreter der Konjugiertenklassen von $\mathbf{W}_J$. Dann gilt

$$\mathrm{Ind}_{U_J}^G(1)(u) = |L_J|_{q'} \sum_{i=1}^{r} \frac{(-1)^{l(w_i)}}{|C_{\mathbf{W}_J}(w_i)|} Q_{\mathbf{T}_{w_i}}^{\mathbf{G}}(u).$$

Dabei bezeichnen $|L_J|_{q'}$ den q'-Anteil von $|L_J|$ und $l(w_i)$ gemäß I.(4.1) die Länge des Weylgruppenelementes w_i und $Q_{\mathbf{T}_{w_i}}^{\mathbf{G}}$ gemäß V.(2.4) die Greenfunktion von $\mathbf{G}$ zum Torus $\mathbf{T}_{w_i}$. Diese Formel ergibt sich sofort aus [Car85, 9.3.2]. Im Beweis dieses Satzes ist explizit eine Formel für $\mathrm{Ind}_{U_J}^G(1)$ angegeben, allerdings nicht als eigene Aussage formuliert, aus der sich die gewünschte Formel sofort ergibt. Da wir nach V.5(i) die Greenfunktionen von $\mathbf{G}$ explizit kennen, können wir die Werte von $\mathrm{Ind}_{U_J}^G(1)$ für alle echten Teilmengen $J \subsetneq \Pi$ leicht berechnen.

Der folgende Satz ermöglicht in Analogie zur klassischen Situation in Charakteristik 0 die Definition von modularen Harish-Chandra-Serien von Brauercharakteren.

(4.5) Satz (vgl. [Hiß93, 5.5])
Es sei

$$\mathcal{S} := \{(L,\theta) \mid L \leqslant G \text{ maximal zerfallende Leviuntergruppe von } G, \theta \in \mathrm{IBr}(L)\ \}.$$

Für zwei Paare $(L',\theta'), (L,\theta) \in \mathcal{S}$ definieren wir $(L',\theta') \leqslant (L,\theta)$, falls $L' \leqslant L$ und

$$\langle R^L_{L'}\Phi_{\theta'}, \theta\rangle > 0$$

ist. Dabei bezeichnet $\Phi_{\theta'}$ den zu θ' gehörenden PIM. Durch diese Definition wird $\mathcal{S}$ zu einer partiell geordneten Menge. Es gilt:

(i) Ist $(L,\theta) \in \mathcal{S}$ ein bezüglich dieser partiellen Ordnung minimales Element, so ist θ ein kuspidaler Brauercharakter von L.

(ii) Ist $\phi \in \mathrm{IBr}(G)$, so gibt es ein bis auf Konjugation unter $\mathbf{W}$ eindeutiges minimales Element $(L,\theta) \in \mathcal{S}$ mit $(L,\theta) \leqslant (G,\phi)$.

Beweis: Siehe [Hiß93, 5.5]. □

(4.6) Definition (Modulare Harish-Chandra-Serien, vgl. [Hiß93, 5.5])

(i) Es seien $J \subseteq \Pi$ und $\theta \in \mathrm{IBr}(L_J)$ ein kuspidaler Charakter. Dabei bezeichnet L_J die Leviuntergruppe zu J von G. Ein irreduzibler Brauercharakter $\phi \in \mathrm{Irr}(G)$ gehört zur **modularen Harish-Chandra-Serie** zum Paar (J,θ), falls es ein minimales Element $(L',\theta') \in \mathcal{S}$ mit $(L',\theta') \leqslant (G,\phi)$ gibt, so dass (L',θ') in $\mathbf{W}$ zu (L_J,θ) konjugiert ist.

(ii) Der triviale Charakter der Boreluntergruppe von G ist kuspidal, die zugehörige modulare Harish-Chandra-Serie von G zum Paar $(\emptyset, 1)$ heißt **Hauptserie** von G.

Wie schon in der klassischen Harish-Chandra-Theorie in Charakteristik 0 können im modularen Fall die irreduziblen Brauercharaktere in einer Harish-Chandra-Serie durch die einfachen Moduln des Endomorphismenringes beschrieben werden. Genauer gilt der folgende Satz:

(4.7) Satz (vgl. [GHM96, 2.4])
Es seien $J \subseteq \Pi$ und $\theta \in \mathrm{IBr}(L_J)$ kuspidal und X ein einfacher kL_J-Modul mit Brauercharakter θ. Dann gibt es eine Bijektion zwischen den irreduziblen Brauercharakteren von G in der modularen Harish-Chandra-Serie zum Paar (J,θ) und den einfachen Moduln des Endomorphismenrings $\mathrm{End}_{kG}(R^G_{L_J}(X))$.

Beweis: Siehe [GHM96, 2.4]. □

(4.8) Bemerkung

(i) Die Struktur von $\mathrm{End}_{kG}(R^G_{L_J}(X))$ wird in [GHM96] und [Ack02] durch die Angabe einer Basis und Multiplikationsregeln für die Basiselemente bestimmt.

(ii) Für die Hauptserie ist der Endomorphismenring nach [Hiß90, 5.3] eine Spezialisierung der generischen Ivahori-Hecke-Algebra vom Typ $\mathbf{F}_4$. Die Zerlegungszahlen der Hauptseriencharaktere auf den unipotenten Charakteren sind gerade die Zerlegungszahlen dieser Hecke-Algebra. Vergleiche dazu [Dip90, 4.10] und [Hiß90, 5.1.2].

Der folgende Satz erweist sich bei der Untersuchung der Zerlegung projektiver Charaktere in direkte Summen von PIMs als nützlich.

(4.9) Lemma (vgl. [Hiß93, 5.6])
Es seien (L_J, θ) ein minimales Paar von $\mathcal{S}$ und Φ_θ der zu θ gehörende PIM. Ist Φ ein projektiv unzerlegbarer Summand von $R_{L_J}^G(\Phi_\theta)$ mit zugehörigem Brauercharakter ϕ, dann liegt ϕ in einer modularen Harish-Chandra-Serie zum Paar (I, θ') mit $I^x \subseteq J$ für ein $x \in \mathbf{W}$.

Beweis: Siehe [Hiß93, 5.6]. □

Wir werden zur Bestimmung der Zerlegungszahlen von $F_4(q)$ noch die folgenden Lemmata benötigen. Sie erlauben uns, den unipotenten Anteil Harish-Chandra-induzierter Charaktere zu berechnen. Dies ist ein wesentlicher Bestandteil zur Bestimmung der modularen Harish-Chandra-Serien. Dazu brauchen wir die folgende Definition.

(4.10) Definition (Unipotenter Quotient, vgl. [Hiß93, 6.1])
Es sei Φ ein projektiver Charakter von G. Dann gibt es zwei Charaktere χ und ψ von G mit $\Phi = \chi + \psi$, wobei χ nur unipotente Konstituenten und ψ keinen unipotenten Konstituenten hat. Den Charakter χ nennen wir den **unipotenten Quotienten** von Φ und bezeichnen ihn auch mit $u(\Phi)$.

(4.11) Lemma (Harish-Chandra-Induktion und unipotente Quotienten, vgl. [Hiß93, 6.1])
Es seien L eine maximal zerfallende Leviuntergruppe von G und Φ ein projektiver Charakter von L. Dann gilt

$$u(R_L^G \Phi) = R_L^G(u(\Phi)).$$

Beweis: Siehe [Hiß93, 6.1]. □

(4.12) Lemma
Es seien $e \in \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ und $\phi \in \mathrm{IBr}(G)$ ein nicht-kuspidaler Brauercharakter von G, der in einem unipotenten l-Block von G liegt, und Φ_ϕ der zugehörige PIM. Dann ist l ein Teiler von $u(\Phi_\phi)(1)$.

Beweis: Da $e \in \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ ist, teilt l den Index jeder echten Leviuntergruppe von G. Daher folgt die Behauptung mit [GH97, 7.6(e)]. □

(4.13) Lemma
Es sei l eine Primzahl mit $l \neq 2, 3$ und l kein Teiler von q. Es seien $J \subseteq \Pi$ und Γ_{L_j} der Gelfand-Graev-Charakter von L_J. Dann ist $R_{L_J}^G(\Gamma_{L_J})$ projektiv und für den unipotenten Quotienten gilt:

$$u(R_{L_J}^G(\Gamma_{L_J})) = \sum_{\varphi \in \mathbf{W}} \left(\mathrm{Ind}_{\mathbf{W}_J}^{\mathbf{W}}(\mathrm{sgn}),\ \varphi \right) \chi_\varphi.$$

Dabei bezeichnet sgn den Signums-Charakter von $\mathbf{W}_J$. In Tabelle A.33 sind die Skalarprodukte von $R_{L_J}^G(\Gamma_{L_J})$ für die echten Teilmengen von Π mit den unipotenten Charakteren von G angegeben.

Beweis: Die Projektivität von $R_{L_J}^G(\Gamma_{L_J})$ folgt aus IV.(3.3) und VI.(1.7). Zur Zerlegung des unipotenten Quotienten siehe [CR87, 70.24]. Die Skalarprodukte in Tabelle A.33 wurden mit Hilfe der angegebenen Formel mit **CHEVIE** berechnet. □

VI.5 Zerlegungsmatrizen von $F_4(q)$

Wir behalten dazu die Notation aus Abschnitt VI.2 und VI.(2.1). Insbesondere ist q eine Primzahlpotenz mit $2, 3 \nmid q$ und $l \neq 2, 3$ eine weitere Primzahl, die kein Teiler von q ist. In diesem Abschnitt wollen wir, soweit es uns möglich ist, die Zerlegungszahlen der unipotenten Blöcke von $F_4(q)$ und die modularen Harish-Chandra-Serien der unipotenten Brauercharaktere bestimmen. Dabei benutzen wir im wesentlichen die Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrizen VI.(3.5) und die modulare Harish-Chandra-Theorie. Darüber hinaus spielen die schon bekannten Ergebnisse über Zerlegungszahlen der unipotenten Blöcke der echten Leviuntergruppen von G eine wesentliche Rolle. Die meisten unipotenten Blöcke der echten Leviuntergruppen von G haben zyklischen Defekt, die entsprechenden Brauerbäume wurden von Fong und Srinivasan in [FS84] und [FS90] bestimmt. Für die übrigen Blöcke der echten Leviuntergruppen können wir mit den beschriebenen Methoden die Zerlegungszahlen bis auf einige wenige bestimmen. Die berechneten Zerlegungszahlen reichen aber aus, um die modularen Harish-Chandra-Serien und insbesondere die kuspidalen Brauercharaktere der echten Leviuntergruppen zu bestimmen. Wir wollen im Verlauf dieses Abschnitts folgende Konventionen und Bezeichnungen verwenden.

(5.1) Bezeichnungen

(i) Die Zerlegungsmatrizen der auftretenden unipotenten Blöcke haben alle untere Dreiecksgestalt. Nach Bemerkung VI.(3.2) erhalten wir dadurch eine kanonische Parametrisierung der unipotenten Brauercharaktere durch die unipotenten gewöhnlichen Charaktere. Ist $\chi \in \mathrm{Irr}(L)$ für eine Leviuntergruppe L, so wollen wir den zugehörigen Brauercharakter mit λ_χ bezeichnen. Den Brauercharakter, der zum gewöhnlichen Steinberg-Charakter gehört, bezeichnen wir mit St. Zur Definition des gewöhnlichen Steinberg-Charakters vergleiche [Car85, 6.2]. Dies ist der unipotente Charakter in der Hauptserie, der dem Signums-Charakter der Weylgruppe entspricht. Den gewöhnlichen kuspidalen Charakter der Leviuntergruppe von B_2 bezeichnen wir wie in Abschnitt V.4 mit δ. Zur Vereinfachung der Notation wollen wir, wenn aus dem Zusammenhang heraus unmittelbar klar ist, dass Brauercharaktere gemeint sind, auch χ statt λ_χ schreiben. Insbesondere schreiben wir δ für den kuspidalen Brauercharakter der Leviuntergruppe vom Typ B_2.

(ii) Die modularen Harish-Chandra-Serien bezeichnen wir durch den Typ der Leviuntergruppe und den kuspidalen Brauercharakter. Die Hauptserie bezeichnen wir auch wie in der

Literatur üblich mit *ps* (für principal series). Ist der kuspidale Brauercharakter der Steinbergcharakter St, so lassen wir ihn oft weg und bezeichnen die Serie nur durch die Angabe des Typs der Leviuntergruppe.

Im folgenden Lemma sind die benötigten Ergebnisse über die kuspidalen Charaktere der echten Leviuntergruppen zusammengefasst.

(5.2) Lemma
In der Tabelle A.34 sind die kuspidalen Brauercharaktere der echten Leviuntergruppen von $F_4(q)$ mit $e \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ aufgelistet. Wir benutzen zur Bezeichnung der Brauercharaktere die Konvention aus VI.(5.1). Bei der Angabe des Typs der Leviuntergruppe berücksichtigen wir nicht die Länge der Wurzeln, da die kuspidalen Charaktere davon nicht abhängen.

Beweis: Für die echten Leviuntergruppen sind die Zerlegungszahlen mit Ausnahme der Leviuntergruppen vom Typ C_3 und B_3 und $e = 2$ explizit bekannt. In den meisten Fällen sind die zugehörigen Defektgruppen zyklisch. Die Zerlegungszahlen ergeben sich dann aus den Brauerbäumen, die in [FS84] und [FS90] bestimmt wurden. Daraus ergibt sich direkt die Einteilung in die modularen Harish-Chandra-Serien. Für die Gruppen vom Typ A vergleiche auch [DD93]. Die Zerlegungszahlen der Leviuntergruppe vom Typ C_2 wurden vollständig von Okuyama und Waki [OW98] bestimmt, woraus sich auch die modularen Harish-Chandra-Serien ergeben. Es bleiben noch die Leviuntergruppen vom Typ C_3 und B_3 im Fall $e = 2$ zu betrachten. Für die Leviuntergruppe vom Typ C_3 ergibt sich aus [AH, Tabelle 3] eine Approximation an die Zerlegungsmatrix des Hauptblocks. Aus der Konstruktion der Charaktere und mit Hilfe von Bemerkung VI.(4.4) sehen wir, dass der Steinbergcharakter und noch zwei weitere Charaktere kuspidal sind. Diese Betrachtungen lassen sich analog für die Leviuntergruppe vom Typ B_3 durchführen. Wir werden später sehen, dass die in [AH, Table 3] gegebene Matrix bis auf zwei Einträge die Zerlegungsmatrix des Hauptblocks ist. □

(5.3) Bemerkung
Die Zerlegungszahlen der unipotenten Blöcke der echten Leviuntergruppen wollen wir nicht explizit abdrucken. Sie können der im Beweis von Lemma VI.(5.2) angegebenen Literatur entnommen werden.

Wir wollen nun die unipotenten Blöcke von $F_4(q)$ betrachten, die mehr als einen Charakter enthalten. Vergleiche dazu Lemma VI.(2.7). Die Brauerbäume und somit die Zerlegungszahlen der unipotenten Blöcke mit zyklischer Defektgruppe wurden schon in [HL98] und [Win95], allerdings ohne die explizite Angabe der modularen Harish-Chandra-Serien, bestimmt. Die modularen Harish-Chandra-Serien, insbesondere die kuspidalen Brauercharaktere, lassen sich aus den Brauerbäumen und Bemerkung VI.(4.4) leicht bestimmen. Wir fassen unsere Ergebnisse über die Zerlegungszahlen und die modularen Harish-Chandra-Serien der unipotenten Blöcke mit mehr als einem Element von $F_4(q)$ in folgendem Lemma zusammen. Der Vollständigkeit halber nehmen wir auch die schon bekannten Ergebnisse über die zyklischen Blöcke mit auf.

(5.4) Lemma (Zerlegungszahlen von $F_4(q)$)
Es seien q eine Primzahlpotenz und $l \neq 2, 3$ eine Primzahl, die q nicht teilt. Es seien weiter e die multiplikative Ordnung von q modulo l und $d \in \mathbb{N}$ mit $l^d || \Phi_e$. Die unipotenten l-modularen Harish-Chandra-Serien von $F_4(q)$sind in Tabelle A.35 angegeben. Für die Zerlegungszahlen von $F_4(q)$ gilt:

(i) Es sei $e = 1$. Die Zerlegungsmatrix des Hauptblocks ist in den Tabellen T.A.154, T.A.155 und T.A.156 angegeben. Die Zerlegungsmatrix für den zweiten unipotenten Block ist in Tabelle T.A.152 angegeben. Die Zerlegungsmatrizen der unipotenten Blöcke sind vollständig bestimmt.

(ii) Es sei $e = 2$. Die Zerlegungsmatrix des Hauptblocks ist in den Tabellen T.A.157, T.A.158 und T.A.159 angegeben. Die mit $*$ angegebenen Einträge lassen sich durch Polynome vom Grad kleiner gleich 4 in q beschränken. Weiter gilt:

- Es gilt $1 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}(q-3)$. Ist $l \neq 5$, so ist $2 \leqslant a$. Ist $l = 5$ und $25 \mid q+1$, so ist $2 \leqslant a$.
- $2 \leqslant b \leqslant \frac{1}{2}(q-1)$
- Es gilt $1 \leqslant c \leqslant \frac{1}{2}(q-3)$. Ist $l \neq 5$, so ist $2 \leqslant c$. Ist $l = 5$ und $25 \mid q+1$, so ist $2 \leqslant c$.
- $2 \leqslant d \leqslant \frac{1}{2}(q-1)$
- $2 \leqslant f \leqslant \frac{1}{2}(q-1)$
- $f \leqslant g \leqslant q^2$
- Es ist $1 \leqslant h \leqslant \frac{1}{2}(q-1)$. Ist $l \neq 5$, so ist $2 \leqslant h$. Ist $l = 5$ und $25 \mid q+1$, so ist $2 \leqslant h$.
- Es ist $1 \leqslant i \leqslant \frac{1}{2}(q+1)$. Ist $l \neq 5$, so ist $2 \leqslant i$. Ist $l = 5$ und $25 \mid q+1$, so ist $2 \leqslant i$.
- Es ist $2 \leqslant j \leqslant \frac{1}{2}(q-1)$. Ist $l \neq 7, 11$, so ist $4 \leqslant j$. Ist $l = 7$ und $49 \mid q+1$, so ist $3 \leqslant j$. Ist $l = 11$ und $121 \mid q+1$, so ist $4 \geq j$.

Die Zerlegungsmatrix für den zweiten unipotenten Block ist in Tabelle T.A.153 angegeben.

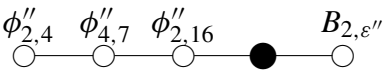
(iii) Es sei $e = 3$. Die Zerlegungsmatrix des Hauptblocks ist in Tabelle T.A.160 angegeben. Die mit $*$ angegebenen Einträge lassen sich durch Polynome vom Grad kleiner gleich 4 in q beschränken. Weiter gilt:

- $1 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}(q+1)$
- $0 \leqslant b \leqslant \frac{1}{4}(q^2-1)$
- Ist $l = 7$ und $7 || q^2+q+1$, so gilt $a \leqslant b+1$, sonst gilt $a \leqslant \frac{1}{2}(b+3)$.
- Ist $l = 7$ und $7 || q^2+q+1$, so gilt $1 \leqslant c \leqslant \frac{1}{2}(q+1)$, sonst gilt $2 \leqslant c \leqslant \frac{1}{2}(q+1)$.

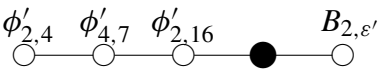
(iv) Es sei $e = 4$. Die Zerlegungsmatrix des Hauptblocks ist in Tabelle T.A.161 angegeben. Die mit $*$ gekennzeichneten Einträge lassen sich durch Polynome vom Grad kleiner gleich 4 in q beschränken. Weiter gilt:

- $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}(q+1)$
- $0 \leqslant b \leqslant \frac{1}{8}(q^2-1)$
- $1 \leqslant c \leqslant \frac{1}{2}(q-1)$
- $0 \leqslant d \leqslant \frac{1}{8}(q-1)(q-3)$
- $f \in \{0,1\}$
- Ist $l = 5$ und $5 \| q^2+1$, so gilt $1 \leqslant g \leqslant \frac{1}{2}(q-1)$, sonst gilt $2 \leqslant g \leqslant \frac{1}{2}(q-1)$.

Die Defektgruppen der beiden unipotenten Blöcke B_2 und B_3 sind zyklisch. Der Brauerbaum zu B_2 hat die folgende Gestalt.



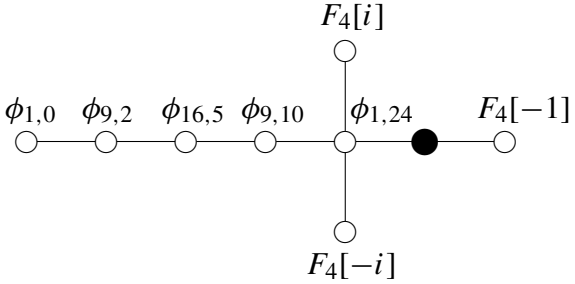
Der Brauerbaum zu B_3 hat die folgende Gestalt.



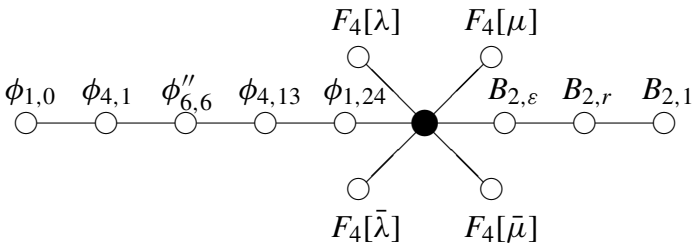
(v) Es sei $e = 6$. Die Zerlegungsmatrix des Hauptblocks ist in Tabelle T.A.162 angegeben. Die mit $*$ gekennzeichneten Einträge lassen sich durch Polynome vom Grad kleiner gleich 4 in q beschränken. Weiter gilt:

- Ist $l = 7$ und $7 \| q^2-q+1$, so gilt $1 \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}(q-1)^2$, sonst gilt $2 \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}(q-1)^2$.
- $0 \leqslant b \leqslant \frac{1}{8}(q-1)(q-3)$
- $0 \leqslant c \leqslant \frac{1}{2}(q-1)$
- $0 \leqslant d \leqslant \frac{1}{2}(q-1)$
- $0 \leqslant f \leqslant \frac{1}{2}(q-1)$

(vi) Es sei $e = 8$. Die Defektgruppe des Hauptblocks ist zyklisch, der zugehörige Brauerbaum hat die folgende Gestalt. Die Zerlegungszahlen sind dadurch vollständig bestimmt.



(vii) Es sei $e = 12$. In diesem Fall müssen wir nur den Hauptblock betrachten. Die Defektgruppe dieses Blocks ist zyklisch. Der Brauerbaum hat die folgende Gestalt.



Hierbei ist $\{\lambda, \mu\} = \{\theta, i\}$. Das heißt, die planare Einbettung des Baumes ist nicht bestimmt, die Zerlegungszahlen sind dadurch vollständig gegeben.

Beweis: Für die Blöcke mit zyklischer Defektgruppe, das heißt, die Hauptblöcke in den Fällen $e = 8$ und $e = 12$ und zwei Blöcke im Fall $e = 4$, können wir die Brauerbäume aus [HL98, 2.1] entnehmen. Ist $e = 1$, so liegt der in Satz [Hiß90, 6.3.7] behandelte Fall linearer Charakteristik vor, woraus sich die Zerlegungszahlen und die modularen Harish-Chandra-Serien sofort ergeben.

Für die übrigen Fällen folgen wir im Wesentlichen der Vorgehensweise in [GH97, Abschnitt 7]. Die kuspidalen Brauercharaktere der echten Leviuntergruppen von $F_4(q)$ sind nach Lemma VI.(5.2) bekannt. Daher wissen wir, zu welchen Paaren (J, θ) es eine nicht-leere modulare Harish-Chandra-Serie von $F_4(q)$ gibt. Die Einteilung der Brauercharaktere in die modularen Harish-Chandra-Serien fällt bei der Berechnung der Zerlegungsmatrizen mit ab. Wir wollen uns daher zunächst um die Berechnung der Zerlegungsmatrizen kümmern. Wir benutzen die Interpretation der Zerlegungszahlen als Vielfachheiten der gewöhnlichen Charaktere in den PIMs gemäß der Brauerreziprozität VI.(1.6) zur Berechnung. Die generelle Vorgehensweise ist die folgende:

- Wir produzieren projektive Charaktere durch die in Bemerkung VI.(1.7) angegebenen Methoden und bestimmen die Vielfachheiten der unipotenten Charaktere in diesen Projektiven. Dies ergibt obere Abschätzungen für die Zerlegungszahlen. Dabei erweisen sich insbesondere die Tensorprodukte von Defekt-0-Charakteren als nützlich.

- Gemäß Bemerkung VI.(1.9) können wir uns bei der Berechnung der projektiven Charaktere auf den unipotenten Quotienten beschränken. Weiter genügt es natürlich, die Einschränkung der unipotenten Quotienten auf den entsprechenden Block zu betrachten.

- Durch die Zerlegungszahlen der echten Leviuntergruppen erhalten wir die unipotenten Quotienten der PIMs der Brauercharaktere. Nach Lemma VI.(4.11) erhalten wir durch Harish-Chandra-Induktion den unipotenten Quotienten eines projektiven Charakters, der im Allgemeinen gute Abschätzungen für die Zerlegungszahlen liefert. Insbesondere geben die in Tabelle A.33 angegebenen unipotenten Quotienten Harish-Chandra-induzierter Gelfand-Graev-Charaktere sehr gute Abschätzungen.

- Wir benutzen die Basisrelationen, um die Unzerlegbarkeit von projektiven Charakteren gemäß Lemma VI.(1.10) zu untersuchen. Ist ein projektiver Charakter unzerlegbar, so ist es ein gesuchter PIM.

- Die Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrizen VI.(3.5) erlaubt es unter Umständen, zu entscheiden, dass ein schon bekannter PIM in einem projektiven Charakter vorkommt und daher abgezogen werden kann. Dabei genügt es, die unipotenten Quotienten zu betrachten, da die unipotenten Charaktere eine gewöhnliche Basismenge der unipotenten Blöcke bilden.

- Die unipotenten Quotienten der PIMs der Brauercharaktere in der modularen Hauptserie sind nach Bemerkung VI.(4.8) durch die Zerlegungsmatrizen der entsprechenden Hecke-Algebra vom Typ $\mathbf{F}_4$ gegeben. Diese Zerlegungsmatrizen wurden von Geck und Lux in [GL91] berechnet.

- Die modulare Harish-Chandra-Theorie erlaubt es gemäß VI.(4.9) zu entscheiden, dass gewisse PIMs nicht als Summanden in Harish-Chandra-induzierten projektiven Charakteren vorkommen. Im Fall $e = 3$ wurden die Anzahlen der Brauercharaktere in den modularen Harish-Chandra-Serien von Geck, Hiß und Malle durch die Analyse des Endomorphismenrings gemäß Bemerkung VI.(4.8) vollständig bestimmt. Siehe dazu [GHM96, Tabelle 3]. In den anderen Fällen ist diese Information noch nicht bekannt. Mit den hier genannten Methoden können wir bis auf wenige Ausnahmen die unipotenten Quotienten der PIMs der kuspidalen Brauercharaktere der echten Leviuntergruppen und deren Harish-Chandra-Induktion bestimmen und in unzerlegbare Summanden zerlegen. Dadurch ergeben sich die Einteilung der Brauercharaktere in die modularen Harish-Chandra-Serien für alle e. Insbesondere erhalten wir dadurch die Anzahl der kuspidalen Brauercharaktere. Mit Hilfe von Bemerkung VI.(4.4) können wir unabhängig davon nachprüfen, dass diese Brauercharaktere kuspidal sind.

- Mit Hilfe der Basisrelationen können wir gemäß Bemerkung VI.(1.9) die Zerlegungszahlen auf den nicht unipotenten Charakteren berechnen. Da diese Zerlegungszahlen nichtnegative ganze Zahlen sein müssen, erhalten wir dadurch untere Abschätzungen für die noch nicht bestimmten Zerlegungszahlen auf der Basismenge. Dabei müssen wir beachten, dass für manche Primzahlen l gewisse Basisrelationen nicht vorkommen, da die Anzahl der Charaktere in der entsprechenden Menge von Charakteren, deren Einschränkung auf die l-regulären Klassen den gleichen Brauercharakter geben, Null wird. Vergleiche dazu A.31. Daher erhalten wir Fallunterscheidungen für manche l.

Wir wollen nun diese Vorgehensweise am Fall $e = 4$ detaillierter illustrieren. Wir betrachten den Hauptblock. Die gewöhnlichen Charaktere im Hauptblock sind nach Lemma VI.(2.7) bekannt. Wir verwenden die Nummerierung aus Tabelle T.A.161 und bezeichnen den PIM, der durch die Spalte i beschrieben wird mit P_i. Zunächst bestimmen wir die Zerlegungszahlen auf den unipotenten Charakteren im Block. Die Spalten 1, 2, 4, 5 und 10 der Zerlegungsmatrix gehören zur Hauptserie und sind durch die Zerlegungsmatrix der Hecke-Algebra schon bestimmt.

Wir betrachten den in Tabelle A.33 angegebenen projektiven Charakter Ψ_{11}. Es gilt für den unipotenten Quotienten dieses Charakters eingeschränkt auf den Hauptblock:

$$u(\Psi_{11})_{B_1} = \phi_{9,10} + \phi_{4,13} + \phi_{1,24}.$$

Mit Hilfe der Basisrelationen können wir zeigen, dass $u(\Psi_{11})_{B_1}$ der unipotente Quotient eines projektiv unzerlegbaren Charakters, also eines PIMs ist. Dies ist der PIM P_{13} und ergibt die Spalte 13 der Zerlegungsmatrix.

Wegen $e = 4$ ist $\phi'_{8,3}$ ein Defekt-Null-Charakter. Also ist nach Bemerkung VI.(1.7) der Charakter $\phi'_{8,3} \otimes \phi''_{2,4}$ projektiv. Es sei Ψ die Einschränkung von $\phi'_{8,3} \otimes \phi''_{2,4}$ auf den Block B_1. Dann gilt

$$u(\Psi) = \phi_{4,8} + \phi_{9,10}.$$

Mit Hilfe der Basisrelationen sehen wir, dass Ψ unzerlegbar ist. Also ist Ψ der PIM P_8.

Nun betrachten wir den projektiven Charakter Ψ_6 aus Tabelle A.33. Es gilt

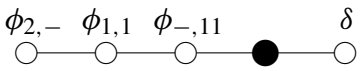
$$u(\Psi_6)_{B_1} = \phi_{12,4} + \phi_{4,8} + 3\phi_{9,10} + 2\phi_{4,13} + \phi_{1,24}.$$

Wegen der Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrix sehen wir, dass P_5 und P_8 und P_{13} direkte Summanden von Ψ_6 sind. Es seien $P_{\phi'_{2,16}}$ und $P_{\phi''_{2,16}}$ die PIMs zu Brauercharakteren, die durch die unipotenten Charaktere $\phi'_{2,16}$ beziehungsweise $\phi''_{2,16}$ parametrisiert werden. Diese liegen im Block B_2 beziehungsweise B_3 und es gilt für die unipotenten Quotienten, wie man den Brauerbäumen sofort entnimmt, $u(P_{\phi''_{2,16}}) = \phi''_{2,16}$ und $u(P_{\phi'_{2,16}}) = \phi'_{2,16}$. Insgesamt erhalten wir die vollständige Zerlegung des projektiven Charakters Ψ_6 in PIMs:

$$\Psi_6 = P_5 + P_8 + P_{13} + P_{\phi''_{2,16}} + P_{\phi'_{2,16}} + \phi'_{9,6} + \phi''_{6,6} + 2\phi_{16,5} + \phi''_{9,6} + 2\phi'_{8,9} + 2\phi''_{8,9}.$$

Die Charaktere $\phi'_{9,6}$, $\phi''_{6,6}$, $\phi_{16,5}$, $\phi''_{9,6}$, $\phi'_{8,9}$ und $\phi''_{8,9}$ sind Defekt-Null-Charaktere und somit projektiv unzerlegbar und liegen in der Hauptserie. Der Charakter P_5 liegt auch in der Hauptserie. Die restlichen PIMs liegen nicht in der Hauptserie. Da Ψ_6 der Harish-Chandra-Induzierte des PIMs des kuspidalen Brauercharakters St von $L_{\{2,3\}}$ ist, liegen die zu diesen PIMs gehörenden Brauercharaktere in der modularen Harish-Chandra vom Typ $(\{2, 3\}, St)$ und dies sind alle Brauercharaktere in dieser Serie.

Wir betrachten nun den Brauerbaum des unipotenten Hauptblocks der Leviuntergruppe $L_{\{2,3\}}$ vom Typ B_2. Dieser hat die folgende Gestalt:



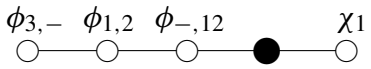
Der Charakter δ ist also unipotenter Quotient eines PIMs. Nach Lemma VI.(4.11) ist dann $R^G_{L_{\{2,3\}}}(\delta)$ der unipotente Quotient eines projektiven Charakters Λ von G. Genau wie im Beweis von Lemma V.(7.1) können wir zeigen, dass für den unipotenten Quotienten von Λ gilt:

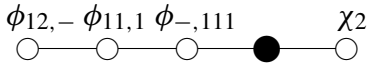
$$u(\Lambda) = R^G_{L_{\{2,3\}}}(\delta) = B_{2,1} + B_{2,\varepsilon} + B_{2,\varepsilon'} + B_{2,\varepsilon''} + 2B_{2,r}.$$

Für die Einschränkung von $u(\Lambda)$ auf den Block B_1 gilt

$$u(\Lambda)_{B_1} = B_{2,1} + B_{2,\varepsilon} + 2B_{2,r}.$$

Nun hat die Leviuntergruppe $L_{\{2,3,4\}}$ vom Typ C_3 zwei unipotente Blöcke vom zyklischen Defekt mit den folgenden Brauerbäumen.





Dabei ist χ_1 der unipotente Charakter von $L_{\{2,3,4\}}$ vom Grad $\frac{1}{2}q(q-1)^2(q^2+q+1)$ und χ_2 der unipotente Charakter von $L_{\{2,3,4\}}$ vom Grad $\frac{1}{2}q^4(q-1)^2(q^2+q+1)$. Die Brauercharaktere, die wegen der Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrix durch diese beiden Charaktere parametrisiert werden, liegen in der modularen Harish-Chandra-Serie vom Typ $(\{2,3\},\delta)$. Den Brauerbäumen entnehmen wir, dass die unipotenten Quotienten der entsprechenden PIMs gerade durch χ_1 beziehungsweise χ_2 gegeben sind. Analog zu Lemma V.(7.1) können wir χ_i als Linearkombination der Fastcharaktere schreiben und dadurch die Harish-Chandra-Induktion berechnen. Mit Hilfe von **CHEVIE** ermitteln wir die Skalarprodukte mit den unipotenten Charakteren von $F_4(q)$ und erhalten

$$u(R^G_{\{2,3,4\}}(\chi_1)) = B_{2,r} + B_{2,\varepsilon'} + B_{2,\varepsilon}$$

und

$$u(R^G_{\{2,3,4\}}(\chi_2)) = B_{2,1} + B_{2,\varepsilon''} + B_{2,r}.$$

Wir sehen, dass $B_{2,r} + B_{2,\varepsilon}$ die Einschränkung des unipotenten Quotienten auf den Block B_1 ist, daher gibt es einen projektiven Charakter Λ' mit $u(\Lambda') = B_{2,r} + B_{2,\varepsilon}$. Mit Hilfe der Basisrelationen zeigen wir, dass Λ' unzerlegbar ist. Also ist Λ' der PIM P_9, woraus sich die Spalte 9 der Zerlegungsmatrix ergibt. Entsprechend erhalten wir den PIM P_3 mit $u(P_3) = B_{2,1} + B_{2,r}$. Dies ergibt die Spalte 3 der Zerlegungsmatrix. Weiterhin erhalten wir die projektiv unzerlegbaren Charaktere $P_{B_{2,\varepsilon'}}$ und $P_{B_{2,\varepsilon''}}$ mit $u(P_{B_{2,\varepsilon'}}) = B_{2,\varepsilon'}$ und $u(P_{B_{2,\varepsilon''}}) = B_{2,\varepsilon''}$, die die PIMs der Brauercharaktere in den Blöcken B_2 beziehungsweise B_3 sind, die durch die unipotenten Charaktere $B_{2,\varepsilon'}$ beziehungsweise $B_{2,\varepsilon''}$ parametrisiert werden. Wir können nun wegen der Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrix den projektiven Charakter als direkte Summe von PIMs schreiben und erhalten

$$\Lambda = P_3 + P_9 + P_{B_{2,\varepsilon'}} + P_{B_{2,\varepsilon''}}.$$

Da Λ der Harish-Chandra-Induzierte des kuspidalen Charakters δ von $L_{\{2,3\}}$ ist, sehen wir, dass genau die Brauercharaktere, die durch die unipotenten Charaktere $B_{2,1}$, $B_{2,r}$, $B_{2,\varepsilon'}$ und $B_{2,\varepsilon''}$ parametrisiert werden, in der modularen Harish-Chandra-Serie zum Paar $(\{2,3\},\delta)$ liegen. Nach Tabelle A.35 haben wir somit im Fall $e = 4$ alle modularen Harish-Chandra-Serien von $F_4(q)$ außer den kuspidalen Charakteren und die zugehörigen PIMs vollständig bestimmt. Daraus ergibt sich, dass die Brauercharaktere zu den PIMs P_6, P_7, P_{11}, P_{12}, P_{14}, P_{15} und P_{16} kuspidal sind. Um diese PIMs zu bestimmen, kommen wir daher mit Harish-Chandra-Induktion nicht weiter.

Da $e = 4$ ist, ist $\phi''_{1,12}$ ein Defekt-Null-Charakter. Also ist nach Bemerkung VI.(1.7) der Charakter $\phi''_{1,12} \otimes \phi''_{2,4}$ projektiv. Es sei Ψ_1 die Einschränkung von $\phi''_{1,12} \otimes \phi''_{2,4}$ auf den Block B_1. Durch Berechnung der Skalarprodukte erhalten wir

$$u(\Psi_1) = \phi_{4,1} + \phi_{9,2} + \phi_{12,4} + \frac{1}{2}(q-1)\, F_4^{II}[1] + \frac{1}{4}(q^2-1)\, \phi_{4,13} + \frac{1}{16}(q^2-1)(q-1)\, \phi_{1,24}.$$

Aufgrund der Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrix sehen wir, dass

$$\Psi_1 = P_2 + \frac{1}{2}(q-1)\, P_6 + \Psi_1'$$

ist, wobei Ψ_1' eine Linearkombination der PIMs P_{14} und P_{16} mit nicht-negativen Koeffizienten ist. Also ist

$$u(P_6) = F_4^{II}[1] + a\, \phi_{4,13} + b\, \phi_{1,24}$$

mit $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}(q+1)$ und $0 \leqslant b \leqslant \frac{1}{8}(q^2-1)$. Aus den Basisrelationen ergibt sich, dass $a \geq 1$ ist, da Zerlegungszahlen nicht negativ sind.

Weiterhin ist der Charakter $\phi''_{6,6}$ ein Defekt-Null-Charakter und es sei Ψ_2 die Einschränkung des projektiven Charakters $\phi''_{6,6} \otimes B_{2,1}$ auf den Block B_1. Wir erhalten analog zu oben

$$u(\Psi_2) = \frac{1}{2}(q+1)\, F_4[I] + \frac{1}{2}(q-1)\, B_{2,r} + \frac{1}{4}(q^2+2q-3)\, B_{2,\varepsilon} + \frac{1}{16}(q^2-1)(q-3)\, \phi_{1,24}.$$

Aufgrund der Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrix ist

$$\Psi_2 = \frac{1}{2}(q+1)\, P_7 + \frac{1}{2}(q-1)\, P_9 + \Psi_2',$$

wobei Ψ_2' eine Linearkombination der PIMs P_{15} und P_{16} mit nicht-negativen Koeffizienten ist. Also ist $\Psi_2 - \frac{1}{2}(q-1)\, P_9$ ein projektiver Charakter und es gilt

$$u\left(\Psi_2 - \frac{1}{2}(q-1)\, P_9\right) = \frac{1}{2}(q+1)\, F_4[I] + \frac{1}{4}(q^2-1)\, B_{2,\varepsilon} + \frac{1}{16}(q^2-1)(q-3)\, \phi_{1,24}.$$

Wir erhalten analog zu oben

$$u(P_7) = F_4[I] + c\, B_{2,\varepsilon} + d\, \phi_{1,24}$$

mit $1 \leqslant c \leqslant \frac{1}{2}(q-1)$ und $0 \leqslant d \leqslant \frac{1}{8}(q-1)(q-3)$.

Der Charakter $\phi''_{8,3}$ ist ein Defekt-Null-Charakter. Es sei Ψ_3 die Einschränkung des projektiven Charakters $\phi''_{8,3} \otimes \phi_{9,2}$ auf den Block B_1. Aufgrund der Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrix ist der Charakter

$$\Psi_3' := P_2 + 2P_4 + 3P_5 + 2P_{13}$$

ein direkter Summand von Ψ_3 und somit ist

$$u(\Psi_3 - \Psi_3') = q\, \phi_{4,13} + q\, \phi_{1,24}$$

der unipotenten Quotient eines projektiven Charakters. Also ist

$$u(P_{14}) = \phi_{4,13} + f\,\phi_{1,24}$$

mit $f \in \{0, 1\}$.

Nun ist der in Tabelle A.32 angegebene Charakter K_{36} projektiv und es gilt

$$u(K_{36}) = B_{2,\varepsilon} + \frac{1}{2}(q-1)\,\phi_{1,24}.$$

Daraus ergibt sich

$$P_{15} = B_{2,\varepsilon} + g\,\phi_{1,24}$$

mit $1 \leqslant g \leqslant \frac{1}{2}(q-1)$. Ist nun $l = 5$ und $5||(q^2+1)$, so ergibt die Basisrelation zu den Charakteren $\{\chi_{98}\}$ keine Bedingung, da diese Charaktere nicht vorkommen. Andernfalls zeigt diese Basisrelation, dass $g \geq 2$ ist. Für die beiden PIMs P_{11} und P_{12} finden wir leider keine besseren Abschätzungen als die beim Beweis der Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrix angegebenen projektiven Charaktere K_{28} und K_{29}.

Wir können mit Hilfe der Bemerkung VI.(4.4) noch einmal nachprüfen, dass die Brauercharaktere zu den PIMs P_6, P_7, P_{11}, P_{12}, P_{14} und P_{15} kuspidal sind. Dabei können wir zwar die Brauercharaktere zu P_{14} und P_{15} nicht bestimmen, wir entnehmen aber der Zerlegungsmatrix, dass die noch fehlenden Zerlegungszahlen keine Rolle bei der Auswertung der Formel in VI.(4.4) spielen. Der Brauercharakter zum PIM P_{16} ist nach Lemma [Hiß93, 6.2] kuspidal. Dies bestätigt noch einmal unsere Bestimmung der modularen Harish-Chandra-Serien.

Damit haben wir den Fall $e = 4$ vollständig behandelt. Die noch ausstehenden Fälle $e = 2, 3, 6$ lassen sich völlig analog behandeln. Wir wollen dies hier nicht vorführen. □

(5.5) Bemerkung

(i) Da die unipotenten Charaktere von $F_4(q)$ von der Kongruenz von q modulo 12 abhängen, müssen wir die expliziten Berechnungen mit diesen Charakteren immer für alle relevanten Kongruenzen durchführen. Es zeigt sich, dass die benötigten Skalarprodukte nicht von der Kongruenz abhängen, daher haben wir dies im Beweis von VI.(5.4) nicht explizit erwähnt.

(ii) Wir haben die Zerlegungszahlen der Hecke-Algebra vom Typ $\mathbf{F}_4$ benutzt. Ein Großteil dieser Information lässt sich unabhängig von [GL91] mit den hier beschriebenen Methoden überprüfen. Dies ist einerseits ein unabhängiger Test für die in [GL91] angegebenen Tafeln und andererseits ein guter Test für die berechneten unipotenten Charaktere von $F_4(q)$. Wir wollen dies im Fall $e = 4$ kurz erläutern. Die Einschränkung des Charakters $\phi'_{8,3} \otimes \phi'_{2,4}$ auf den Hauptblock ist projektiv. Mit den Basisrelationen können wir die Unzerlegbarkeit zeigen. Dies ergibt den PIM P_2. Die Einschränkung des Charakters $\phi'_{8,3} \otimes \phi_{4,1}$ ist projektiv und enthält aufgrund der Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrix den PIM P_2 als direkten Summanden. Wir erhalten durch Abziehen den unzerlegbaren Summanden P_5. Wir betrachten die Einschränkung von Ψ_4 auf den Hauptblock. Dieser

enthält wegen der Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrix zweimal den PIM P_5 als direkten Summanden. Vergleiche dazu Tabelle A.33. Wir erhalten auf diese Weise den PIM P_{10}. Wir wissen weiter, dass Ψ_2 ein direkter Summand von Ψ_1 ist. Aufgrund der Dreiecksgestalt sehen wir, dass $\Psi_1 - \Psi_2$ die PIMs P_2 und P_5 als direkte Summanden enthält. Wir erhalten auf diese Weise den PIM P_4. Leider können wir den PIM P_1 nicht auf diese Weise konstruieren.

(iii) Es zeigen sich zwei wesentliche Probleme bei der Bestimmung der Zerlegungszahlen. Zum einen fehlt eine gute Abschätzung der Vielfachheit des Steinberg-Charakters $\chi_{1,24}$ in den kuspidalen PIMs. Zum anderen fehlen gute projektive Charaktere für viele der PIMs, die durch die gewöhnlichen kuspidalen Charaktere parametrisiert werden. Eine von Okuyama und Waki vorgeschlagene Methode, projektive Charaktere zu finden, die in diesen Fällen bessere Abschätzungen der Zerlegungszahlen liefern könnten, ist die Untersuchung der Blöcke maximaler parabolischer Untergruppen. Mit dieser Methode wurden beispielsweise in [OW98] die Zerlegungszahlen der Gruppen $Sp_4(q)$ vollständig bestimmt. Im Fall der $F_4(q)$ erscheint es jedoch sehr schwierig, die Charaktertafel einer maximalen parabolischen Untergruppe zu berechnen. Dazu ist es notwendig, die Charaktertafeln der Trägheitsfaktorgruppen zu berechnen. Dies erscheint in diesem Fall mit den bisher bekannten Methoden kaum möglich zu sein, da wir für die auftretenden Gruppen keine zufrieden stellende Theorie zur Konstruktion der Charaktere kennen.

(5.6) Korollar (Zerlegungszahlen von $CSp_6(q)$)
Es sei q eine Primzahlpotenz und $2 \nmid q$. Weiter sei l eine Primzahl mit $l > 3$ und $l \mid q+1$. In [AH, Tabelle 3] ist die folgende Matrix als Approximation der l-modularen Zerlegungsmatrix des Hauptblocks der Gruppe $CSp_6(q)$ auf der Basismenge der unipotenten Charaktere des Hauptblocks angegeben.

Nr	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5	Φ_6	Φ_7	Φ_8	Φ_9	Φ_{10}
Serie	ps	ps	A_1	B_2	$A_1 \times \tilde{A}_1$	$\tilde{A}_1$	B_2	c	c	c
				δ			St			
$\chi_{3,-}$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\chi_{2,1}$	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
$\chi_{-,3}$	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
C_2'	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
$\chi_{1,2}$	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.
$\chi_{1^2,1}$	1	1	.	.	1	1	.	.	.	.
$\chi_{1,1^2}$	1	1	1	2	1	1	1	.	.	.
$\chi_{1^3,-}$	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.
C_2''	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.
$\chi_{-,1^3}$	1	.	1	2	1	1	1	α	β	1

Dabei sind $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}(q+1)$ und $0 \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{2}(q-1)$. Approximation heißt in diesem Fall, dass keine Aussage über die Unzerlegbarkeit der PIMs gemacht wird, die angegebenen Zahlen geben also nur obere Schranken für die Zerlegungsmatrix. Zur Notation vergleiche [AH]. Wir können

nun zeigen, dass die projektiven Charaktere Φ_i für alle i außer $i = 8$ und $i = 9$ unzerlegbar sind, die angegebenen Einträge also Zerlegungszahlen sind.

Beweis: Die Konstruktion der angegebenen projektiven Charaktere Φ für $1 \leqslant i \leqslant 10$ ist in [AH, Tabelle 3] angegeben. Die modularen Harish-Chandra-Serien ergeben sich sofort aus der Konstruktion. Aufgrund von Lemma VI.(4.9) und der Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrix sind die projektiven Charaktere Φ_i mit $i \in \{2, 3, 5, 6, 7, 10\}$ unzerlegbar. Es bleibt noch die Unzerlegbarkeit von Φ_1 und Φ_4 zu zeigen.

Ist Φ_1 nicht unzerlegbar, so zeigt die Zerlegungsmatrix, dass $\Phi_1 - \Phi_2$ ein projektiver Charakter ist und es gilt für den unipotenten Quotienten

$$u(\Phi_1 - \Phi_2) = \chi_{3,-} + \chi_{-,3} + \chi_{1^3,-} + \chi_{-,1^3}.$$

Wir können gemäß Lemma VI.(4.11) den unipotenten Quotienten des Harish-Chandra-Induzierten von $\Phi_1 - \Phi_2$ bestimmen. Wir erhalten

$$\left(R^G_{L_{\{2,3,4\}}}(\Phi_1 - \Phi_2), \phi_{1,0}\right) = 1$$

und

$$\left(R^G_{L_{\{2,3,4\}}}(\Phi_1 - \Phi_2), \phi'_{2,4}\right) = 2.$$

Aus der Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrix von $F_4(q)$ VI.(3.5) können wir schließen, dass $R^G_{L_{\{2,3,4\}}}(\Phi_1 - \Phi_2)$ den PIM P_1 einmal und den PIM P_3 zweimal als direkten Summanden enthält. Der Zerlegungsmatrix der Hecke-Algebra in [GL91] können wir entnehmen, dass dann

$$\left(R^G_{L_{\{2,3,4\}}}(\Phi_1 - \Phi_2), \phi'_{8,3}\right) \geq 3$$

sein muss. Vergleiche die Spalten 1 und 3 der Zerlegungsmatrix in T.A.157. Direkte Berechnung zeigt hingegen, dass

$$\left(R^G_{L_{\{2,3,4\}}}(\Phi_1 - \Phi_2), \phi'_{8,3}\right) = 2$$

ist. Daher kann $\Phi_1 - \Phi_2$ nicht projektiv sein. Somit ist Φ_1 unzerlegbar. Mit Hilfe der Basisrelationen sehen wir, dass $\Phi_4 - \Phi_7$ kein projektiver Charakter sein kann und somit Φ_4 unzerlegbar ist. Diese Unzerlegbarkeitsaussagen lassen sich wahrscheinlich auch mit Hilfe der Basisrelationen von $CSp_6(q)$ direkt nachweisen. Wir haben diese Basisrelation allerdings nicht berechnet. □

Mit Hilfe der Zerlegungszahlen können wir eine Vermutung von Geck und Hiß [GH97, Conjecture 3.4] über die kuspidalen Charaktere in unserer Situation positiv beantworten. Es gilt genauer:

(5.7) Korollar
Es seien q eine Primzahlpotenz und $l \neq 2, 3$ eine Primzahl, die q nicht teilt. Dann ist die Einschränkung eines gewöhnlichen kuspidalen unipotenten Charakters von $F_4(q)$ auf die l-regulären Klassen ein irreduzibler Brauercharakter.

Beweis: Dies folgt nach der Definition der Zerlegungszahlen VI.(1.3) sofort aus den in Lemma VI.(5.4) angegebenen Zerlegungszahlen. □

Anhang A

Tabellen

A.1 Die Wurzeln

Es sei Φ das in II.1 angegebene Wurzelsystem vom Typ $\mathbf{F}_4$ und $\Pi := \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$ das dort angegebene Fundamentalsystem. Φ enthält dann die folgenden 24 positiven Wurzeln, geschrieben als Linearkombination der Fundamentalwurzeln.

$$
\begin{array}{rcll}
\alpha_1 & := & \pi_1 & = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \\
\alpha_2 & := & \pi_2 & = \varepsilon_3 - \varepsilon_4 \\
\alpha_3 & := & \pi_3 & = \varepsilon_4 \\
\alpha_4 & := & \pi_4 & = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \\
\alpha_5 & := & \pi_1 + \pi_2 & = \varepsilon_2 - \varepsilon_4 \\
\alpha_6 & := & \pi_2 + \pi_3 & = \varepsilon_3 \\
\alpha_7 & := & \pi_3 + \pi_4 & = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4) \\
\alpha_8 & := & \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 & = \varepsilon_2 \\
\alpha_9 & := & \pi_2 + 2\pi_3 & = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \\
\alpha_{10} & := & \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 & = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \\
\alpha_{11} & := & \pi_1 + \pi_2 + 2\pi_3 & = \varepsilon_2 + \varepsilon_4 \\
\alpha_{12} & := & \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 & = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \\
\alpha_{13} & := & \pi_2 + 2\pi_3 + \pi_4 & = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) \\
\alpha_{14} & := & \pi_1 + 2\pi_2 + 2\pi_3 & = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\
\alpha_{15} & := & \pi_1 + \pi_2 + 2\pi_3 + \pi_4 & = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4) \\
\alpha_{16} & := & \pi_2 + 2\pi_3 + 2\pi_4 & = \varepsilon_1 - \varepsilon 2 \\
\alpha_{17} & := & \pi_1 + 2\pi_2 + 2\pi_3 + \pi_4 & = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \\
\alpha_{18} & := & \pi_1 + \pi_2 + 2\pi_3 + 2\pi_4 & = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \\
\alpha_{19} & := & \pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 + \pi_4 & = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) \\
\alpha_{20} & := & \pi_1 + 2\pi_2 + 2\pi_3 + 2\pi_4 & = \varepsilon_1 - \varepsilon_4 \\
\alpha_{21} & := & \pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 + 2\pi_4 & = \varepsilon_1 \\
\alpha_{22} & := & \pi_1 + 2\pi_2 + 4\pi_3 + 2\pi_4 & = \varepsilon_1 + \varepsilon_4 \\
\alpha_{23} & := & \pi_1 + 3\pi_2 + 4\pi_3 + 2\pi_4 & = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 \\
\alpha_{24} & := & 2\pi_1 + 3\pi_2 + 4\pi_3 + 2\pi_4 & = \varepsilon_1 + \varepsilon_2
\end{array}
$$

Tabelle T.A.1: Das Wurzelsystem

A.2 Die Kowurzeln

Es sei Φ das in II.1 gegebene Wurzelsystem vom Typ $\mathbf{F}_4$. Die 24 positiven Kowurzeln geschrieben als $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen der Fundamentalkowurzeln sehen folgendermaßen aus. $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$ ist die Standardbasis von $\mathbf{Y}$. Vergleiche dazu II.2.

$$
\begin{array}{lcll}
\alpha_1^\vee & := & \pi_1^\vee & = 2\gamma_1 - \gamma_2 \\
\alpha_2^\vee & := & \pi_2^\vee & = -\gamma_1 + 2\gamma_2 - \gamma_3 \\
\alpha_3^\vee & := & \pi_3^\vee & = -2\gamma_2 + 2\gamma_3 - \gamma_4 \\
\alpha_4^\vee & := & \pi_4^\vee & = -\gamma_3 + 2\gamma_4 \\
\alpha_5^\vee & := & \pi_1^\vee + \pi_2^\vee & = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 \\
\alpha_6^\vee & := & 2\pi_2^\vee + \pi_3^\vee & = -2\gamma_1 + 2\gamma_2 - \gamma_4 \\
\alpha_7^\vee & := & \pi_3^\vee + \pi_4^\vee & = -2\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \\
\alpha_8^\vee & := & 2\pi_1^\vee + 2\pi_2^\vee + \pi_3^\vee & = 2\gamma_1 - \gamma_4 \\
\alpha_9^\vee & := & \pi_2^\vee + \pi_3^\vee & = -\gamma_1 + \gamma_3 - \gamma_4 \\
\alpha_{10}^\vee & := & 2\pi_2^\vee + \pi_3^\vee + \pi_4^\vee & = -2\gamma_1 + 2\gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4 \\
\alpha_{11}^\vee & := & \pi_1^\vee + \pi_2^\vee + \pi_3^\vee & = \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4 \\
\alpha_{12}^\vee & := & 2\pi_1^\vee + 2\pi_2^\vee + \pi_3^\vee + \pi_4^\vee & = 2\gamma_1 - \gamma_3 + \gamma_4 \\
\alpha_{13}^\vee & := & 2\pi_2^\vee + 2\pi_3^\vee + \pi_4^\vee & = -2\gamma_1 + \gamma_3 \\
\alpha_{14}^\vee & := & \pi_1^\vee + 2\pi_2^\vee + \pi_3^\vee & = \gamma_2 - \gamma_4 \\
\alpha_{15}^\vee & := & 2\pi_1^\vee + 2\pi_2^\vee + 2\pi_3^\vee + \pi_4^\vee & = 2\gamma_1 - 2\gamma_2 + \gamma_3 \\
\alpha_{16}^\vee & := & \pi_2^\vee + \pi_3^\vee + \pi_4^\vee & := -\gamma_1 + \gamma_4 \\
\alpha_{17}^\vee & := & 2\pi_1^\vee + 4\pi_2^\vee + 2\pi_3^\vee + \pi_4^\vee & = 2\gamma_2 - \gamma_3 \\
\alpha_{18}^\vee & := & \pi_1^\vee + \pi_2^\vee + \pi_3^\vee + \pi_4^\vee & = \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_4 \\
\alpha_{19}^\vee & := & 2\pi_1^\vee + 4\pi_2^\vee + 3\pi_3^\vee + 1\pi_4^\vee & = \gamma_3 - \gamma_4 \\
\alpha_{20}^\vee & := & \pi_1^\vee + 2\pi_2^\vee + \pi_3^\vee + \pi_4^\vee & = \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4 \\
\alpha_{21}^\vee & := & 2\pi_1^\vee + 4\pi_2^\vee + 3\pi_3^\vee + 2\pi_4^\vee & = \gamma_4 \\
\alpha_{22}^\vee & := & \pi_1^\vee + 2\pi_2^\vee + 2\pi_3^\vee + \pi_4^\vee & = -\gamma_2 + \gamma_3 \\
\alpha_{23}^\vee & := & \pi_1^\vee + 3\pi_2^\vee + 2\pi_3^\vee + \pi_4^\vee & = -\gamma_1 + \gamma_2 \\
\alpha_{24}^\vee & := & 2\pi_1^\vee + 3\pi_2^\vee + 2\pi_3^\vee + \pi_4^\vee & = \gamma_1
\end{array}
$$

Tabelle T.A.2: Die Kowurzeln

Die Nummerierung der Kowurzeln entspricht genau der Nummerierung der Wurzeln. Vergleiche dazu A.1. Dies entspricht genau der Darstellung der Kowurzeln in **CHEVIE** .

A.3 Die Konjugiertenklassen der Weylgruppe

Wir beschreiben die 25 Konjugiertenklassen der Weylgruppe **W** durch die Angabe von Repräsentanten w_i als Worte in den Erzeugern s_1, s_2, s_3, s_4 der Weylgruppe. Die Bezeichnungen der Klassen stammen aus [Kon65]. Die Vertreter sind diejenigen die in **CHEVIE** abgespeichert sind. Die Gruppe H_2 ist dabei die Spiegelungsuntergruppe von **W** die von den Spiegelungen erzeugt wird, die zu den Wurzeln α_2,α_3,α_4 und α_{24} gehören, und hat Ordnung 96. Die Gruppe H_1 ist eine nicht zu H_2 isomorphe Gruppe der Ordnung 96.

w_i	Bezeichnung	Repräsentant w_i	Isomorphietyp von $C_{\mathbf{W}}(w_i)$	$\lvert C_{\mathbf{W}}(w_i)\rvert$
w_1	1	1	**W**	1152
w_2	$4A_1$	$s_1s_2s_1(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^3$	**W**	1152
w_3	$2A_1$	$(s_2s_3)^2$	$D_8 \times D_8$	64
w_4	A_2	s_2s_1	$S_3 \times C_6$	36
w_5	D_4	$(s_2s_3)^2s_4s_3s_2s_1s_3s_4$	$S_3 \times C_6$	36
w_6	$D_4(a_1)$	$(s_3s_2s_4s_3s_2s_1)^2$	H_1	96
w_7	$\tilde{A}_2$	s_4s_3	$S_3 \times C_6$	36
w_8	$C_3 + A_1$	$s_1s_2s_1s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_3$	$S_3 \times C_6$	36
w_9	$A_2 + \tilde{A}_2$	$(s_3s_2s_1s_4)^2s_4s_3s_2s_3s_4s_3s_2s_1s_3s_2$	$\mathrm{SL}(2,3) \times C_3$	72
w_{10}	$F_4(a_1)$	$s_3s_2s_4s_3s_2s_1s_3s_2$	$\mathrm{SL}(2,3) \times C_3$	72
w_{11}	F_4	$s_4s_3s_2s_1$	C_{12}	12
w_{12}	A_1	s_1	H_2	96
w_{13}	$3A_1$	$s_2(s_3s_2s_3s_4)^2$	H_2	96
w_{14}	$\tilde{A}_2 + A_1$	$s_1s_4s_3$	$C_6 \times C_2$	12
w_{15}	C_3	$s_4s_3s_2$	$C_6 \times C_3$	12
w_{16}	A_3	$s_2s_3s_2s_1s_3$	$C_2 \times C_2 \times C_4$	16
w_{17}	$\tilde{A}_1$	s_3	H_2	96
w_{18}	$2A_1 + \tilde{A}_1$	$s_1s_2(s_1s_3s_2)^2s_3$	H_2	96
w_{19}	$A_2 + \tilde{A}_1$	$s_2s_1s_4$	$C_6 \times C_2$	12
w_{20}	B_3	$s_3s_2s_1$	$C_6 \times C_2$	12
w_{21}	$B_2 + A_1$	$s_2s_4s_3s_2s_3$	$C_2 \times C_2 \times C_4$	16
w_{22}	$A_1 + \tilde{A}_1$	s_1s_3	$C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$	16
w_{23}	B_2	s_3s_2	$D_8 \times C_4$	32
w_{24}	$A_3 + \tilde{A}_1$	$(s_2s_3)^2s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	$D_8 \times C_2$	32
w_{25}	B_4	$s_2s_4s_3s_2s_1s_3$	C_8	8

Tabelle T.A.3: Die Konjugiertenklassen der Weylgruppe vom Typ $\mathbf{F}_4$

A.4 Koeffizienten in der Kommutatorformel

Die Koeffizienten in der Kommutatorformel I.(2.1) ergeben sich kombinatorisch aus der Wahl der Vorzeichen auf den extraspeziellen Paaren. Vergleiche dazu Tabelle T.II.1. In der folgenden Tabelle sind die Koeffizienten der Form $c_{\alpha,\beta;1,1}$ aufgeführt, wobei α die Zeilen und β die Spalten durchläuft.

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	α_{16}	α_{17}	α_{18}	α_{19}	α_{20}	α_{21}	α_{22}	α_{23}	α_{24}
α_1	.	1	.	.	.	1	.	.	1	1	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.
α_2	−1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1	.	.
α_3	.	−1	.	1	−1	−2	.	−2	.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	−1	−2	.	.	.
α_4	.	.	−1	.	.	−1	.	−1	1	.	1	.	2	1	2	.	2	.	−1	.	.	.	.	.
α_5	.	.	1	.	.	.	1	.	−1	.	.	.	−1	.	.	−1	.	.	.	.	.	1	.	.
α_6	−1	.	2	1	.	.	−1	−2	.	.	.	1	.	.	−1	.	.	1	.	.	−2	.	.	.
α_7	.	−1	.	.	−1	1	.	1	.	−2	.	−2	.	1	.	.	−1	.	2	.	.	.	.	.
α_8	.	.	2	1	.	2	−1	.	.	−1	.	.	1	.	.	−1	.	.	.	.	−2	.	.	.
α_9	−1	.	.	−1	1	.	.	.	.	.	.	−1	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
α_{10}	−1	.	−1	.	.	.	2	1	.	.	−1	−2	.	.	1	.	.	.	2	.	.	.	.	.
α_{11}	.	−1	.	−1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	−1	.	.	.	1	.	.	.	.
α_{12}	.	.	−1	.	.	−1	2	.	1	2	.	.	−1	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.
α_{13}	−1	.	.	−2	1	.	.	−1	.	.	.	1	.	.	−2	.	−2	.	.	.	.	.	.	.
α_{14}	.	.	.	−1	.	.	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	.	−1	.	.	.	.	.	.
α_{15}	.	−1	.	−2	.	1	.	.	.	−1	.	.	2	.	.	.	−2	.	.	.	.	.	.	.
α_{16}	−1	.	.	.	1	.	.	1	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
α_{17}	.	.	−1	−2	.	.	1	.	.	.	.	.	2	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.
α_{18}	.	−1	.	.	.	−1	.	.	−1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
α_{19}	.	.	.	1	.	.	−2	.	.	−2	.	−2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
α_{20}	.	.	1	.	.	.	.	.	−1	.	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
α_{21}	.	.	2	.	.	2	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
α_{22}	.	−1	.	.	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
α_{23}	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
α_{24}	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Tabelle T.A.4: Die Kommutatorkoeffizienten, Teil 1

Es folgen hier noch die übrigen Koeffizienten, die in der Kommutatorformel auftreten, aber nicht von der Form $c_{\alpha,\beta;1,1}$ sind. Zunächst die Koeffizienten der Form $c_{\alpha,\beta;1,2}$:

$c_{\alpha_1,\alpha_6;1,2}$	=	1	$c_{\alpha_1,\alpha_{10};1,2}$	=	1	$c_{\alpha_1,\alpha_{13};1,2}$	=	1
$c_{\alpha_2,\alpha_3;1,2}$	=	1	$c_{\alpha_2,\alpha_7;1,2}$	=	1	$c_{\alpha_2,\alpha_{15};1,2}$	=	1
$c_{\alpha_5,\alpha_3;1,2}$	=	1	$c_{\alpha_5,\alpha_7;1,2}$	=	1	$c_{\alpha_5,\alpha_{13};1,2}$	=	−1
$c_{\alpha_9,\alpha_4;1,2}$	=	1	$c_{\alpha_9,\alpha_{12};1,2}$	=	1	$c_{\alpha_{11},\alpha_4;1,2}$	=	1
$c_{\alpha_{11},\alpha_{10};1,2}$	=	−1	$c_{\alpha_{14},\alpha_4;1,2}$	=	1	$c_{\alpha_{14},\alpha_7;1,2}$	=	1
$c_{\alpha_{16},\alpha_8;1,2}$	=	1	$c_{\alpha_{18},\alpha_6;1,2}$	=	−1	$c_{\alpha_{20},\alpha_3;1,2}$	=	1

Tabelle T.A.5: Die Kommutatorkoeffizienten, Teil 2

Und noch die Koeffizienten der Form $c_{\alpha,\beta;2,1}$:

$c_{\alpha_3,\alpha_2;2,1}$	$=$	1	$c_{\alpha_3,\alpha_5;2,1}$	$=$	1	$c_{\alpha_3,\alpha_{20};2,1}$	$=$	1
$c_{\alpha_4,\alpha_9;2,1}$	$=$	1	$c_{\alpha_4,\alpha_{11};2,1}$	$=$	1	$c_{\alpha_4,\alpha_{14};2,1}$	$=$	1
$c_{\alpha_6,\alpha_1;2,1}$	$=$	1	$c_{\alpha_6,\alpha_{18};2,1}$	$=$	-1	$c_{\alpha_7,\alpha_2;2,1}$	$=$	1
$c_{\alpha_7,\alpha_5;2,1}$	$=$	1	$c_{\alpha_7,\alpha_{14};2,1}$	$=$	1	$c_{\alpha_8,\alpha_{16};2,1}$	$=$	1
$c_{\alpha_{10},\alpha_1;2,1}$	$=$	1	$c_{\alpha_{10},\alpha_{11};2,1}$	$=$	-1	$c_{\alpha_{12},\alpha_9;2,1}$	$=$	1
$c_{\alpha_{13},\alpha_1;2,1}$	$=$	1	$c_{\alpha_{13},\alpha_5;2,1}$	$=$	-1	$c_{\alpha_{15},\alpha_2;2,1}$	$=$	1

Tabelle T.A.6: Die Kommutatorkoeffizienten, Teil 3

A.5 Maximale Tori von $F_4(q)$

In der folgenden Tabelle sind Vertreter für die 25 Konjugiertenklassen maximaler Tori von $F_4(q)$ angegeben. $\mathbf{T}_i$ ist für $1 \leqslant i \leqslant 25$ der Torus der durch Twisten mit w_i aus dem Torus $\mathbf{T}$ entsteht. Die Vertreter w_i stehen in Tabelle A.3. Vergleiche dazu III.(2.2). Der zerfallende Torus ist der Torus $\mathbf{T}_1$.

Torus	Bezeichnung	$\lvert\mathbf{T}^{\mathbf{F}}\rvert$	Torus	Bezeichnung	$\lvert\mathbf{T}^{\mathbf{F}}\rvert$
$\mathbf{T}_1$	1	ϕ_1^4	$\mathbf{T}_2$	$4A_1$	ϕ_2^4
$\mathbf{T}_3$	$2A_1$	$\phi_1^2\phi_2^2$	$\mathbf{T}_4$	A_2	$\phi_3\phi_1^2$
$\mathbf{T}_5$	D_4	$\phi_6\phi_2^2$	$\mathbf{T}_6$	$D_4(a_1)$	ϕ_4^2
$\mathbf{T}_7$	$\tilde{A}_2$	$\phi_3\phi_1^2$	$\mathbf{T}_8$	C_3+A_1	$\phi_6\phi_2^2$
$\mathbf{T}_9$	$A_2+\tilde{A}_2$	ϕ_3^2	$\mathbf{T}_{10}$	$F_4(a_1)$	ϕ_6^2
$\mathbf{T}_{11}$	F_4	ϕ_{12}	$\mathbf{T}_{12}$	A_1	$\phi_2\phi_1^3$
$\mathbf{T}_{13}$	$3A_1$	$\phi_1\phi_2^3$	$\mathbf{T}_{14}$	$\tilde{A}_2+A_1$	$\phi_1\phi_2\phi_3$
$\mathbf{T}_{15}$	C_3	$\phi_1\phi_2\phi_6$	$\mathbf{T}_{16}$	A_3	$\phi_1\phi_2\phi_4$
$\mathbf{T}_{17}$	$\tilde{A}_1$	$\phi_2\phi_1^3$	$\mathbf{T}_{18}$	$2A_1+\tilde{A}_1$	$\phi_1\phi_2^3$
$\mathbf{T}_{19}$	$A_2+\tilde{A}_1$	$\phi_1\phi_2\phi_3$	$\mathbf{T}_{20}$	B_3	$\phi_1\phi_2\phi_6$
$\mathbf{T}_{21}$	B_2+A_1	$\phi_1\phi_2\phi_4$	$\mathbf{T}_{22}$	$A_1+\tilde{A}_1$	$\phi_1^2\phi_2^2$
$\mathbf{T}_{23}$	B_2	$\phi_4\phi_1^2$	$\mathbf{T}_{24}$	$A_3+\tilde{A}_1$	$\phi_4\phi_2^2$
$\mathbf{T}_{25}$	B_4	ϕ_8			

Tabelle T.A.7: Die maximalen Tori von $F_4(q)$

A.6 Leviuntergruppen vom Typ B_2, B_3 und C_3

In der folgenden Tabelle sind Vertreter für die Konjugiertenklassen von Leviuntergruppen vom Typ B_2, B_3 und B_4 zusammen mit den Ordnungen angegeben. Die zerfallenden Leviuntergruppen sind $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_6$ und $\mathbf{L}_8$. Vergleiche Lemma III.(2.2).

Levigruppe	Typ	Vertreter	$\lvert L^{\mathbf{F}}\rvert$
$\mathbf{L}_1$	B_2	$\mathbf{W}_{\{\pi_2,\pi_3\}}$	$q^4\phi_1^4\phi_2^2\phi_4$
$\mathbf{L}_2$	B_2	$s_1s_2s_3s_2s_1s_4(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^2\mathbf{W}_{\{\pi_2,\pi_3\}}$	$q^4\phi_1^2\phi_2^4\phi_4$
$\mathbf{L}_3$	B_2	$s_4s_3s_2s_3s_4\mathbf{W}_{\{\pi_2,\pi_3\}}$	$q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$
$\mathbf{L}_4$	B_2	$s_1s_2s_3s_2s_1\mathbf{W}_{\{\pi_2,\pi_3\}}$	$q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$
$\mathbf{L}_5$	B_2	$s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_1\mathbf{W}_{\{\pi_2,\pi_3\}}$	$q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_4^2$
$\mathbf{L}_6$	B_3	$\mathbf{W}_{\{\pi_1,\pi_2,\pi_3\}}$	$q^9\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
$\mathbf{L}_7$	B_3	$s_4(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^2\mathbf{W}_{\{\pi_1,\pi_2,\pi_3\}}$	$q^9\phi_1^3\phi_2^4\phi_3\phi_4\phi_6$
$\mathbf{L}_8$	C_3	$\mathbf{W}_{\{\pi_2,\pi_3,\pi_4\}}$	$q^9\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
$\mathbf{L}_9$	C_3	$s_1s_2s_3s_2s_1s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_1\mathbf{W}_{\{\pi_2,\pi_3,\pi_4\}}$	$q^9\phi_1^3\phi_2^4\phi_3\phi_4\phi_6$

Tabelle T.A.8: Leviuntergruppen vom Typ C_3, B_3 und C_2

A.7 Halbeinfache Klassen von $F_4(q)$ in guter Charakteristik

In der folgenden Tabelle ist die Parametrisierung der halbeinfachen Klassentypen in Gruppen vom Typ $\mathbf{F}_4$ angegeben. Zudem ist die Anzahl der Konjugiertenklassen im jeweiligen Klassentyp angegeben. Dabei ist $x := 3-\text{ggT}(3, q-1)$ und $y := 4-\text{ggT}(4, q-1)$. Die mit n bezeichnete Spalte gibt den Wert $\left|n(\Pi, w, \mathbf{G}^{\mathbf{F}})\right|$ für den jeweiligen Klassentyp wieder.

Nr.	Typ	Π	w	m_i	Anzahl Parameter im Typ	n
h_1	F_4	$[1,2,3,4]$	1	26	1	1
h_2	$C_3 \times A_1$	$[2,3,4,24]$	1	26	1	1
h_3	B_4	$[1,2,3,16]$	1	26	1	1
h_4	$A_2 \times \tilde{A_2}$	$[1,3,4,23]$	1	11	$2-x$	2
h_5	${}^2A_2 \times {}^2\tilde{A_2}$	$[1,3,4,23]$	$s_2s_3s_2s_4s_3s_2$	11	x	2
h_6	$A_3 \times \tilde{A_1}$	$[1,2,4,22]$	1	16	$2-y$	2
h_7	${}^2A_3 \times \tilde{A_1}$	$[1,2,4,22]$	$s_3s_2s_3s_4s_3s_2s_3$	16	y	2
h_8	C_3	$[2,3,4]$	1	10	$(q-3)$	2
h_9	C_3	$[2,3,4]$	$s_1s_2s_3s_2s_1s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	10	$(q-1)$	2
h_{10}	$\tilde{A_2} \times A_1$	$[1,3,4]$	1	6	$(q-5)+x$	2
h_{11}	${}^2\tilde{A_2} \times A_1$	$[1,3,4]$	$(s_2s_1s_3)^2s_2(s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_3)^2s_3$	6	$(q-1)-x$	2
h_{12}	A_3	$[1,2,22]$	1	7	$(q-5)+y$	4
h_{13}	${}^2A_3$	$[1,2,22]$	$s_3s_2s_3s_4s_3s_2s_3s_4$	7	$(q-1)-y$	4
h_{14}	A_3	$[1,2,22]$	s_4	7	$(q-1)+y$	4
h_{15}	${}^2A_3$	$[1,2,22]$	$s_3s_2s_3s_4s_3s_2s_3$	7	$(q-1)-y$	4
h_{16}	$A_2 \times \tilde{A_1}$	$[1,2,4]$	1	6	$(q-7)+x+y$	2
h_{17}	${}^2A_2 \times \tilde{A_1}$	$[1,2,4]$	$(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^3s_4$	6	$(q-1)-x-y$	2
h_{18}	$A_1 \times \tilde{A_1} \times A_1$	$[2,4,24]$	1	10	$(q-5)+y$	4
h_{19}	$A_1 \times \tilde{A_1} \times A_1$	$[2,4,24]$	$s_3s_2s_3s_4s_3s_2s_3$	10	$(q-1)-y$	4
h_{20}	${}^2(A_1 \times A_1) \times \tilde{A_1}$	$[2,4,24]$	$s_1s_3s_2s_3s_4s_3s_2s_1s_3$	6	$(q-1)-y$	4
h_{21}	${}^2(A_1 \times A_1) \times \tilde{A_1}$	$[2,4,24]$	$s_1s_3s_2s_1s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3$	6	$(q-1)+y$	4
h_{22}	$B_2 \times A_1$	$[2,3,24]$	1	12	$(q-3)$	2
h_{23}	$B_2 \times A_1$	$[2,3,24]$	$s_4s_3s_2s_3s_4$	12	$(q-1)$	2
h_{24}	B_3	$[1,2,3]$	1	10	$(q-3)$	2
h_{25}	B_3	$[1,2,3]$	$s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4$	10	$(q-1)$	2
h_{26}	A_2	$[1,2]$	1	3	$(q^2-11q+34)-2x-3y$	12
h_{27}	${}^2A_2$	$[1,2]$	$(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^3$	3	$(q-1)(q-6)+2x+3y$	12
h_{28}	A_2	$[1,2]$	s_4	3	$(q-1)(q-2)-y$	4
h_{29}	${}^2A_2$	$[1,2]$	$s_3s_2s_1s_3s_2s_3$	3	$(q-1)(q-2)+y$	4
h_{30}	A_2	$[1,2]$	$s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4$	3	$(q+2)(q-1)+x$	6
h_{31}	${}^2A_2$	$[1,2]$	$s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4$	3	$q(q-1)-x$	6
h_{32}	$\tilde{A_2}$	$[3,4]$	1	3	$(q^2-8q+19)-2x$	12
h_{33}	${}^2\tilde{A_2}$	$[3,4]$	$s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_3s_2(s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_3)^2s_3$	3	$(q-1)(q-3)+2x$	12
h_{34}	$\tilde{A_2}$	$[3,4]$	s_1	3	$(q-1)^2$	4
h_{35}	${}^2\tilde{A_2}$	$[3,4]$	$s_2s_3s_2s_4s_3s_2$	3	$(q-1)^2$	4
h_{36}	$\tilde{A_2}$	$[3,4]$	$s_1s_2s_3s_2s_1s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2$	3	$(q+2)(q-1)+x$	6
h_{37}	${}^2\tilde{A_2}$	$[3,4]$	$s_1s_2s_3s_2s_4s_3s_2$	3	$q(q-1)-x$	6
h_{38}	B_2	$[2,3]$	1	5	$(q-3)(q-5)$	8
h_{39}	B_2	$[2,3]$	$s_1s_2s_3s_2s_1s_4(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^2$	5	$(q-1)(q-3)$	8
h_{40}	B_2	$[2,3]$	$s_4s_3s_2s_3s_4$	5	$(q-1)(q-3)$	4
h_{41}	B_2	$[2,3]$	$s_1s_2s_3s_2s_1$	5	$(q-1)^2$	4
h_{42}	B_2	$[2,3]$	$s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	5	$(q-1)(q+1)$	4
h_{43}	$A_1 \times A_1$	$[2,24]$	1	5	$(q-5)^2-2y$	16
h_{44}	$A_1 \times A_1$	$[2,24]$	$s_3s_2s_3s_4s_3s_2s_3s_4$	5	$(q-1)(q-5)+2y$	16
h_{45}	$A_1 \times A_1$	$[2,24]$	$s_3s_2s_3$	5	$(q-1)(q-3)$	8
h_{46}	$A_1 \times A_1$	$[2,24]$	s_4	5	$(q-1)(q-3)$	8
h_{47}	$A_1 \times A_1$	$[2,24]$	$s_3s_2s_3s_4$	5	$(q-1)(q+1)$	8

Tabelle T.A.9: Klassentypen halbeinfacher Elemente in $F_4(q)$, Teil 1 , q ungerade

Nr.	Typ	Π	w	m_i	Anzahl Parameter im Typ	n
h_{48}	${}^2(A_1 \times A_1)$	[2, 24]	$s_1s_3s_2s_3s_4s_3s_2s_1s_3$	3	$(q-1)(q-5)+2y$	16
h_{49}	${}^2(A_1 \times A_1)$	[2, 24]	$s_1s_3s_2s_1s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4s_3$	3	$(q-1)^2-2y$	16
h_{50}	${}^2(A_1 \times A_1)$	[2, 24]	$s_1s_3s_2s_1s_3s_4s_3s_2s_1s_3$	3	$(q-1)(q+1)$	8
h_{51}	${}^2(A_1 \times A_1)$	[2, 24]	$s_1s_3s_2s_3s_4s_3s_2s_1s_3s_4$	3	$(q-1)(q-3)$	8
h_{52}	${}^2(A_1 \times A_1)$	[2, 24]	$s_1s_3s_2s_1s_3s_4s_3s_2s_1s_3s_4$	3	$(q-1)(q+1)$	8
h_{53}	$A_1 \times \tilde{A_1}$	[1, 3]	1	4	$(q^2-10q+29)-2x-2y$	4
h_{54}	$A_1 \times \tilde{A_1}$	[1, 3]	$s_2s_1s_3s_2s_1s_3s_2s_4(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^2$	4	$(q-1)(q-5)+2x+2y$	4
h_{55}	$A_1 \times \tilde{A_1}$	[1, 3]	$s_2s_1s_3s_2s_1s_3s_2$	4	$(q-1)(q-3)$	4
h_{56}	$A_1 \times \tilde{A_1}$	[1, 3]	$s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4$	4	$(q-1)(q-3)$	4
h_{57}	A_1	[1]	1	2	$(q^3-19q^2+115q-241)+8x+12y$	48
h_{58}	A_1	[1]	$s_2s_1(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^3$	2	$(q-1)(q^2-12q+39)-8x-12y$	48
h_{59}	A_1	[1]	$s_2s_1s_3s_2s_1s_3s_2$	2	$(q-3)(q-5)(q-1)$	16
h_{60}	A_1	[1]	$s_2s_1s_3s_2s_3s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_4$	2	$(q-1)(q-3)^2$	16
h_{61}	A_1	[1]	s_4	2	$(q-1)(q^2-6q+7)+2y$	8
h_{62}	A_1	[1]	$s_2s_1s_3s_2s_1s_3s_2s_4$	2	$(q-3)(q+1)(q-1)$	8
h_{63}	A_1	[1]	$s_2s_1s_3s_2s_1s_3s_2s_3$	2	$(q-1)(q^2-4q+5)-2y$	8
h_{64}	A_1	[1]	$s_2s_1s_3s_2s_3s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4$	2	$(q+1)(q-1)^2$	8
h_{65}	A_1	[1]	s_4s_3	2	$(q-1)(q^2-2)-x$	6
h_{66}	A_1	[1]	$s_2s_1s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4$	2	$(q-1)q^2+x$	6
h_{67}	$\tilde{A_1}$	[3]	1	2	$(q^3-16q^2+85q-166)+8x+6y$	48
h_{68}	$\tilde{A_1}$	[3]	$s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_3s_2s_4(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^2$	2	$(q-1)(q^2-9q+24)-8x-6y$	48
h_{69}	$\tilde{A_1}$	[3]	$s_2s_3s_2$	2	$(q-4)(q-1)^2+2y$	16
h_{70}	$\tilde{A_1}$	[3]	$s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_3s_2$	2	$(q-2)(q-1)^2-2y$	16
h_{71}	$\tilde{A_1}$	[3]	s_1	2	$(q-3)(q-2)(q-1)$	8
h_{72}	$\tilde{A_1}$	[3]	$s_2s_3s_2s_4s_3s_2s_3s_4$	2	$(q-1)(q^2-3q+4)$	8
h_{73}	$\tilde{A_1}$	[3]	$s_1s_2s_3s_2$	2	$(q-2)(q+1)(q-1)$	8
h_{74}	$\tilde{A_1}$	[3]	$s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_3s_4$	2	$q(q-1)(q+1)$	8
h_{75}	$\tilde{A_1}$	[3]	$s_1s_4s_3s_2s_3s_4$	2	$(q-1)(q^2-2)-x$	6
h_{76}	$\tilde{A_1}$	[3]	$s_2s_3s_2s_1s_4s_3s_2s_3s_4$	2	$(q-1)q^2+x$	6
h_{77}	A_0	[]	1	1	$q^4-28q^3+286q^2-1260q+2153-64x-72y$	1152
h_{78}	A_0	[]	$s_1s_2s_1(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^3$	1	$(q-9)(q-1)(q^2-10q+33)+64x+72y$	1152
h_{79}	A_0	[]	s_1	1	$(q-1)(q-5)(q-3)^2$	96
h_{80}	A_0	[]	s_4	1	$(q-1)(q-5)(q^2-6q+3)-12y$	96
h_{81}	A_0	[]	$s_3s_2s_3s_4s_3s_2s_3s_4$	1	$(q-1)^2(q-3)^2$	64
h_{82}	A_0	[]	$s_2s_1(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^3s_3$	1	$(q-1)(q-3)(q^2+1)$	16
h_{83}	A_0	[]	s_1s_2	1	$(q^2-2q-4)(q-1)^2+2x$	36
h_{84}	A_0	[]	s_4s_3	1	$(q^2-2q-4)(q-1)^2+2x$	36
h_{85}	A_0	[]	$s_1s_2s_3s_2$	1	$(q+1)(q-1)(q-3)^2$	32
h_{86}	A_0	[]	$s_2s_1(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^3$	1	$(q-1)(q-3)(q^2-4q+7)$	96
h_{87}	A_0	[]	$s_1s_2s_1(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^3s_4$	1	$(q-5)(q-1)(q^2-2q+3)+12y$	96
h_{88}	A_0	[]	$s_2s_1s_3s_2s_3$	1	$(q+1)(q-1)(-2q+q^2-1)$	16
h_{89}	A_0	[]	$s_2s_3s_2s_3s_4$	1	$(q+1)(q-1)^3$	16
h_{90}	A_0	[]	$s_3s_2s_1s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4$	1	$q(q-2)(q+1)(q-1)$	12
h_{91}	A_0	[]	$s_1s_2s_3$	1	$q(q-2)(q+1)(q-1)$	12
h_{92}	A_0	[]	$s_1s_3s_4$	1	$q^2(q-1)(q+1)$	12
h_{93}	A_0	[]	$s_2s_1s_4$	1	$q^2(q-1)(q+1)$	12
h_{94}	A_0	[]	$s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_3s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4s_3$	1	$(q+2)(q-1)(q^2+q-4)-4x$	72
h_{95}	A_0	[]	$s_1s_2s_1s_3s_2s_3s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4$	1	$(q+1)(q-1)^3$	32
h_{96}	A_0	[]	$s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4$	1	$q^2(q-1)^2-2x$	36
h_{97}	A_0	[]	$s_2s_3s_2s_1s_3s_4s_3s_2s_3s_4$	1	$q^2(q-1)^2-2x$	36
h_{98}	A_0	[]	$s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_3s_4s_3s_2s_3s_4$	1	$(q-3)(q+3)(q+1)(q-1)$	96
h_{99}	A_0	[]	$s_2s_1s_3s_2s_3s_4$	1	$(q-1)(q+1)(q^2+1)$	8
h_{100}	A_0	[]	$s_1s_2s_3s_4$	1	$q^2(q-1)(q+1)$	12
h_{101}	A_0	[]	$s_1s_2s_1s_3s_2s_3s_4s_3$	1	$(q-3)(q+2)q(q-1)+4x$	72

Tabelle T.A.10: Klassentypen halbeinfacher Elemente in $F_4(q)$, Teil 2 , q ungerade

A.8 Unipotente Klassen von $F_4(q)$ in guter Charakteristik

In der folgenden Tabelle sind Vertreter für die unipotenten Klassen von $F_4(q)$ angeben. Die Reihenfolge entspricht nicht der Reihenfolge in [Sho74], sondern der Reihenfolge, die durch die Tafel der Greenfunktionen in **CHEVIE** vorgegeben ist. Dort sind allerdings keine Vertreter angegeben. Es seien $\eta \in \mathbb{F}_q$ ein Nichtquadrat in $\mathbb{F}_q$, $\zeta \in \mathbb{F}_q$ kein Kubus in $\mathbb{F}_q$ und $\tau \in \mathbb{F}_q$ so gewählt, dass das Polynom $X^2 + \tau X + \eta \in \mathbb{F}_q[X]$ irreduzibel ist. Solche Elemente ζ,η und ζ existieren immer in $\mathbb{F}_q$, da q nicht durch 2 oder 3 teilbar ist.

Name	Name bei Shoji	Vertreter	Zentralisatorordnung
x_1	x_0	1	$q^{24}\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$
x_2	x_1	$x_{24}(1)$	$q^{24}\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
x_3	x_2	$x_{21}(1)$	$2q^{21}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4$
x_4	x_3	$x_{20}(1)x_{22}(-\eta)$	$2q^{21}\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$
x_5	x_4	$x_{19}(1)x_{20}(1)$	$q^{20}\phi_1^2\phi_2^2$
x_6	x_5	$x_{14}(1)x_{18}(1)$	$2q^{17}\phi_1^2\phi_2\phi_3$
x_7	x_6	$x_{14}(1)x_{15}(1)x_{20}(\eta)$	$2q^{17}\phi_1\phi_2^2\phi_6$
x_8	x_7	$x_{12}(1)x_{13}(1)$	$q^{14}\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$
x_9	x_8	$x_{14}(1)x_{15}(1)x_{16}(1)$	$q^{16}\phi_1\phi_2$
x_{10}	x_9	$x_{12}(1)x_{13}(1)x_{14}(1)$	$q^{14}\phi_1\phi_2$
x_{11}	x_{10}	$x_9(1)x_{12}(1)$	$2q^{12}\phi_1^2\phi_2^2$
x_{12}	x_{11}	$x_5(1)x_9(1)x_{18}(\eta)$	$2q^{12}\phi_1\phi_2\phi_4$
x_{13}	x_{12}	$x_8(1)x_9(1)x_{16}(-1)$	$2q^{12}\phi_1\phi_2$
x_{14}	x_{13}	$x_5(1)x_6(1)x_{18}(-\eta)$	$2q^{12}\phi_1\phi_2$
x_{15}	x_{14}	$x_5(1)x_{11}(-1)x_{13}(1)x_{18}(-1)$	$24q^{12}$
x_{16}	x_{16}	$x_5(1)x_{11}(-1)x_{13}(1)x_{18}(-\eta)$	$4q^{12}$
x_{17}	x_{15}	$x_5(1)x_{11}(-\eta)x_{13}(1)x_{18}(-\eta)$	$8q^{12}$
x_{18}	x_{18}	$x_6(1)x_7(1)x_{11}(1)x_{20}(\zeta)$	$3q^{12}$
x_{19}	x_{17}	$x_5(1)x_9(1)x_{15}(1)x_{16}(-\eta)x_{18}(-\tau)$	$4q^{12}$
x_{20}	x_{19}	$x_5(1)x_6(1)x_7(1)$	$q^8\phi_1\phi_2$
x_{21}	x_{20}	$x_5(1)x_7(1)x_9(1)$	$q^8\phi_1\phi_2$
x_{22}	x_{21}	$x_5(1)x_6(1)x_7(1)x_{11}(1)$	$2q^8$
x_{23}	x_{22}	$x_5(1)x_6(1)x_7(1)x_{11}(\eta)$	$2q^8$
x_{24}	x_{23}	$x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_{16}(-1)$	$2q^6$
x_{25}	x_{24}	$x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_{16}(-\eta)$	$2q^6$
x_{26}	x_{25}	$x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_{11}(1)$	q^4

Tabelle T.A.11: Die unipotenten Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, $2, 3 \nmid q$

A.9 Die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$

In der folgenden Tabelle sind die Vertreter für die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$ in guter Charakteristik angegeben. Für die unipotenten Vertreter vergleiche A.8. Für die Anzahl Klassen in einem Klassentyp vergleiche A.7.

Name	Repräsentant	Zentralisatorordnung
$c_{1,1}$	x_1	$q^{24}\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$
$c_{1,2}$	x_2	$q^{24}\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
$c_{1,3}$	x_3	$2q^{21}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4$
$c_{1,4}$	x_4	$2q^{21}\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$
$c_{1,5}$	x_5	$q^{20}\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{1,6}$	x_6	$2q^{17}\phi_1^2\phi_2\phi_3$
$c_{1,7}$	x_7	$2q^{17}\phi_1\phi_2^2\phi_6$
$c_{1,8}$	x_8	$q^{14}\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$
$c_{1,9}$	x_9	$q^{16}\phi_1\phi_2$
$c_{1,10}$	x_{10}	$q^{14}\phi_1\phi_2$
$c_{1,11}$	x_{11}	$2q^{12}\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{1,12}$	x_{12}	$2q^{12}\phi_1\phi_2\phi_4$
$c_{1,13}$	x_{13}	$2q^{12}\phi_1\phi_2$
$c_{1,14}$	x_{14}	$2q^{12}\phi_1\phi_2$
$c_{1,15}$	x_{15}	$24q^{12}$
$c_{1,16}$	x_{16}	$4q^{12}$
$c_{1,17}$	x_{17}	$8q^{12}$
$c_{1,18}$	x_{18}	$3q^{12}$
$c_{1,19}$	x_{19}	$4q^{12}$
$c_{1,20}$	x_{20}	$q^8\phi_1\phi_2$
$c_{1,21}$	x_{21}	$q^8\phi_1\phi_2$
$c_{1,22}$	x_{22}	$2q^8$
$c_{1,23}$	x_{23}	$2q^8$
$c_{1,24}$	x_{24}	$2q^6$
$c_{1,25}$	x_{25}	$2q^6$
$c_{1,26}$	x_{26}	q^4

Tabelle T.A.12: Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 1

Name	Repräsentant	Zentralisatorordnung
$c_{2,1}$	h_2	$q^{10}\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_6\phi_4$
$c_{2,2}$	$h_2x_2(1)$	$q^{10}\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$
$c_{2,3}$	$h_2x_2(1)x_9(-1)$	$2q^9\phi_1^3\phi_2^2$
$c_{2,4}$	$h_2x_2(1)x_9(-\eta)$	$2q^9\phi_1^2\phi_2^3$
$c_{2,5}$	$h_2x_2(1)x_4(1)$	$q^8\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{2,6}$	$h_2x_2(1)x_3(1)$	$q^6\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{2,7}$	$h_2x_6(1)x_7(1)$	$q^6\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{2,8}$	$h_2x_2(1)x_4(1)x_9(-1)$	$2q^6\phi_1\phi_2$
$c_{2,9}$	$h_2x_2(1)x_4(1)x_9(-\eta)$	$2q^6\phi_1\phi_2$
$c_{2,10}$	$h_2x_2(1)x_3(1)x_4(1)$	$q^4\phi_1\phi_2$
$c_{2,11}$	$h_2x_{24}(1)$	$q^{10}\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
$c_{2,12}$	$h_2x_{16}x_{24}$	$2q^{10}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
$c_{2,13}$	$h_2x_\eta x_{24}$	$2q^{10}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
$c_{2,14}$	$h_2x_2(1)x_9(-1)x_{24}(1)$	$2q^9\phi_1^2\phi_2$
$c_{2,15}$	$h_2x_2(1)x_9(-\eta)x_{24}(1)$	$2q^9\phi_1\phi_2^2$
$c_{2,16}$	$h_2x_3(1)x_{16}(1)x_{24}(1)$	$2q^8\phi_2\phi_1$
$c_{2,17}$	$h_2x_3(1)x_{16}(\eta)x_{24}(1)$	$2q^8\phi_2\phi_1$
$c_{2,18}$	$h_2x_2(1)x_3(1)x_{24}(1)$	$2q^6\phi_1\phi_2$
$c_{2,19}$	$h_2x_2(1)x_3(1)x_{24}(\eta)$	$2q^6\phi_1\phi_2$
$c_{2,20}$	$h_2x_6(1)x_7(1)x_{24}(1)$	$q^6\phi_1\phi_2$
$c_{2,21}$	$h_2x_2(1)x_7(1)x_9(-1)x_{24}(1)$	$4q^6$
$c_{2,22}$	$h_2x_2(\eta)x_7(1)x_9(-1)x_{24}(1)$	$4q^6$
$c_{2,23}$	$h_2x_2(1)x_7(1)x_9(-\eta)x_{24}(1)$	$4q^6$
$c_{2,24}$	$h_2x_2(\eta)x_7(1)x_9(-\eta)x_{24}(1)$	$4q^6$
$c_{2,25}$	$h_2x_2(1)x_3(1)x_4(1)x_{24}(1)$	$2q^4$
$c_{2,26}$	$h_2x_2(1)x_3(1)x_4(1)x_{24}(1)$	$2q^4$
$c_{3,1}$	h_3	$q^{16}\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$
$c_{3,2}$	$h_3x_{14}(1)$	$q^{16}\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$
$c_{3,3}$	$h_3x_{21}(1)$	$2q^{13}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4$
$c_{3,4}$	$h_3x_{20}(1)x_{22}(-\eta)$	$2q^{13}\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$
$c_{3,5}$	$h_3x_{14}(1)x_{20}(1)$	$2q^{14}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
$c_{3,6}$	$h_3x_{14}(1)x_{20}(\eta)$	$2q^{14}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
$c_{3,7}$	$h_3x_{11}(1)x_{21}$	$2q^{13}\phi_1^2\phi_2$
$c_{3,8}$	$h_3x_{14}(1)x_{20}(1)x_{22}(-\eta)$	$2q^{13}\phi_1\phi_2^2$
$c_{3,9}$	$h_3x_{14}(1)x_{18}(1)$	$2q^{11}\phi_1^2\phi_2$
$c_{3,10}$	$h_3x_8(1)x_{20}(1)x_{22}(\eta)$	$2q^{11}\phi_1\phi_2^2$
$c_{3,11}$	$h_3x_8(1)x_9(1)x_{18}(1)$	$q^{10}\phi_1\phi_2$

Tabelle T.A.13: Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 2

Name	Repräsentant	Zentralisatorordnung
$c_{3,12}$	$h_3x_5(1)x_{11}(-1)x_{16}(1)$	$2q^8\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{3,13}$	$h_3x_5(1)x_{11}(-\eta)x_{16}(1)$	$2q^8\phi_1\phi_2\phi_4$
$c_{3,14}$	$h_3x_5(1)x_9(1)x_{18}(1)$	$2q^8\phi_1\phi_2$
$c_{3,15}$	$h_3x_5(1)x_9(1)x_{18}(\eta)$	$2q^8\phi_1\phi_2$
$c_{3,16}$	$h_3x_5(1)x_6(1)x_{18}(1)$	$2q^8\phi_1\phi_2$
$c_{3,17}$	$h_3x_5(1)x_6(1)x_{18}(\eta)$	$2q^8\phi_1\phi_2$
$c_{3,18}$	$h_3x_5(1)x_6(1)x_{11}(1)x_{18}(1)$	$8q^8$
$c_{3,19}$	$h_3x_5(1)x_6(1)x_{11}(\eta)x_{18}(1)$	$4q^8$
$c_{3,20}$	$h_3x_1(1)x_2(1)x_9(-\eta)x_{22}(1)$	$4q^8$
$c_{3,21}$	$h_3x_2(1)x_8(1)x_9(-\zeta)x_{16}(\eta)x_{18}(1)$	$4q^8$
$c_{3,22}$	$h_3x_5(1)x_6(1)x_{11}(1)x_{18}(\eta)$	$8q^8$
$c_{3,23}$	$h_3x_2(1)x_3(1)x_{16}(1)x_{18}(1)$	$2q^5\phi_1$
$c_{3,24}$	$h_3x_1(1)x_2(1)x_9(-\eta)x_{16}(1)$	$2q^5\phi_2$
$c_{3,25}$	$h_3x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_{16}(1)$	$2q^4$
$c_{3,26}$	$h_3x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_{16}(\eta)$	$2q^4$
$c_{4,1}$	h_4	$q^6\phi_1^4\phi_2^2\phi_3^2$
$c_{4,2}$	$h_4x_{24}(1)$	$q^6\phi_1^3\phi_2\phi_3$
$c_{4,3}$	$h_4x_1(1)x_{23}(1)$	$q^5\phi_1^2\phi_2\phi_3$
$c_{4,4}$	h_4x_7	$q^6\phi_1^3\phi_2\phi_3$
$c_{4,5}$	$h_4x_7(1)x_{24}(1)$	$q^6\phi_1^2$
$c_{4,6}$	$h_4x_1(1)x_{23}(1)x_7(1)$	$q^5\phi_1$
$c_{4,7}$	$h_4x_3(1)x_4(1)$	$q^5\phi_1^2\phi_2\phi_3$
$c_{4,8}$	$h_4x_3(1)x_4(1)x_{24}(1)$	$q^5\phi_1$
$c_{4,9}$	$h_4x_1(1)x_{23}(1)x_3(1)x_4(1)$	$3q^4$
$c_{4,10}$	$h_4x_1(1)x_{23}(\zeta)x_3(1)x_4(1)$	$3q^4$
$c_{4,11}$	$h_4x_1(1)x_{23}(\zeta^2)x_3(1)x_4(1)$	$3q^4$
$c_{5,1}$	h_5	$q^6\phi_1^2\phi_2^4\phi_6^2$
$c_{5,2}$	$h_5x_{24}(1)$	$q^6\phi_1\phi_2^3\phi_6$
$c_{5,3}$	$h_5x_1(1)x_{23}(1)$	$q^5\phi_1\phi_2^2\phi_6$
$c_{5,4}$	h_5x_7	$q^6\phi_1\phi_2^3\phi_6$
$c_{5,5}$	$h_5x_7(1)x_{24}(1)$	$q^6\phi_2^2$
$c_{5,6}$	$h_5x_1(1)x_{23}(1)x_7(1)$	$q^5\phi_2$
$c_{5,7}$	$h_5x_3(1)x_4(1)$	$q^5\phi_1\phi_2^2\phi_6$
$c_{5,8}$	$h_5x_3(1)x_4(1)x_{24}(1)$	$q^5\phi_2$
$c_{5,9}$	$h_5x_1(1)x_{23}(1)x_3(1)x_4(1)$	$3q^4$
$c_{5,10}$	$h_5x_1(\zeta)x_{23}(\zeta^q)x_3(1)x_4(1)$	$3q^4$
$c_{5,11}$	$h_5x_1(\zeta^2)x_{23}(\zeta^{2q})x_3(1)x_4(1)$	$3q^4$

Tabelle T.A.14: Die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 3

Name	Repräsentant	Zentralisatorordnung
$c_{6,1}$	h_6	$q^7\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4$
$c_{6,2}$	$h_6x_{24}(1)$	$q^7\phi_1^3\phi_2^2$
$c_{6,3}$	$h_6x_2(1)x_{24}(1)$	$2q^6\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{6,4}$	$h_6x_2(1)x_{24}(\eta)$	$2q^6\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{6,5}$	$h_6x_1(1)x_{22}(1)x_5(1)x_{23}(1)$	$q^5\phi_1^2\phi_2$
$c_{6,6}$	$h_6x_1(1)x_2(1)x_{22}(1)$	$2q^4\phi_1\phi_2$
$c_{6,7}$	$h_6x_1(1)x_2(1)x_{22}(\eta)$	$2q^4\phi_1\phi_2$
$c_{6,8}$	$h_6x_4(1)$	$q^7\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4$
$c_{6,9}$	$h_6x_4(1)x_{24}(1)$	$q^7\phi_1^2\phi_2$
$c_{6,10}$	$h_6x_2(1)x_{24}(-1)x_4(1)$	$2q^6\phi_1\phi_2$
$c_{6,11}$	$h_6x_2(1)x_{24}(-\eta)x_4(1)$	$2q^6\phi_1\phi_2$
$c_{6,12}$	$h_6x_1(1)x_{22}(1)x_5(1)x_{23}(1)x_4(1)$	$q^5\phi_1$
$c_{6,13}$	$h_6x_1(1)x_2(1)x_4(1)x_{22}(1)$	$4q^4$
$c_{6,14}$	$h_6x_1(1)x_2(1)x_4(1)x_{22}(\xi)$	$4q^4$
$c_{6,15}$	$h_6x_1(1)x_2(1)x_4(1)x_{22}(\xi^2)$	$4q^4$
$c_{6,16}$	$h_6x_1(1)x_2(1)x_4(1)x_{22}(\xi^3)$	$4q^4$
$c_{7,1}$	h_7	$q^7\phi_1^3\phi_2^4\phi_4\phi_6$
$c_{7,2}$	$h_7x_{24}(1)$	$q^7\phi_1^2\phi_2^3$
$c_{7,3}$	$h_7x_2(1)x_{24}(1)$	$2q^6\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{7,4}$	$h_7x_2(1)x_{24}(\eta)$	$2q^6\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{7,5}$	$h_7x_1(1)x_{22}(1)x_5(1)x_{23}(1)$	$q^5\phi_1\phi_2^2$
$c_{7,6}$	$h_7x_1(1)x_{22}(1)x_2(1)$	$2q^4\phi_1\phi_2$
$c_{7,7}$	$h_7x_1(\eta)x_{22}(\eta^q)x_2(1)$	$2q^4\phi_1\phi_2$
$c_{7,8}$	$h_7x_4(1)$	$q^7\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$
$c_{7,9}$	$h_7x_4(1)x_{24}(1)$	$q^7\phi_1\phi_2^2$
$c_{7,10}$	$h_7x_2(1)x_{24}(-1)x_4(1)$	$2q^6\phi_1\phi_2$
$c_{7,11}$	$h_7x_2(1)x_{24}(-\eta)x_4(1)$	$2q^6\phi_1\phi_2$
$c_{7,12}$	$h_7x_1(1)x_{22}(1)x_5(1)x_{23}(1)x_4(1)$	$q^5\phi_2$
$c_{7,13}$	$h_7x_1(1)x_{22}(1)x_2(1)x_4(1)$	$4q^4$
$c_{7,14}$	$h_7x_1(\xi)x_{22}(\xi^q)x_2(1)x_4(1)$	$4q^4$
$c_{7,15}$	$h_7x_1(\xi^2)x_{22}(\xi^{2q})x_2(1)x_4(1)$	$4q^4$
$c_{7,16}$	$h_7x_1(\xi^3)x_{22}(\xi^{3q})x_2(1)x_4(1)$	$4q^4$
$c_{8,1}$	h_8	$q^9\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
$c_{8,2}$	$h_8x_2(1)$	$q^9\phi_1^3\phi_2^2\phi_4$
$c_{8,3}$	$h_8x_2(1)x_9(-1)$	$2q^8\phi_1^3\phi_2$
$c_{8,4}$	$h_8x_2(1)x_9(-\eta)$	$2q^8\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{8,5}$	$h_8x_2(1)x_4(1)$	$q^7\phi_1^2\phi_2$

Tabelle T.A.15: Die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 4

Name	Repräsentant	Zentralisatorordnung
$c_{8,6}$	$h_8x_6(1)x_7(1)$	$q^5\phi_1^2\phi_2$
$c_{8,7}$	$h_8x_2(1)x_3(1)$	$q^5\phi_1^2\phi_2$
$c_{8,8}$	$h_8x_2(1)x_4(1)x_9(-1)$	$2q^5\phi_1$
$c_{8,9}$	$h_8x_2(1)x_4(1)x_9(-\eta)$	$2q^5\phi_1$
$c_{8,10}$	$h_8x_2(1)x_3(1)x_4(1)$	$q^3\phi_1$
$c_{9,1}$	h_9	$q^9\phi_1^3\phi_2^4\phi_3\phi_4\phi_6$
$c_{9,2}$	$h_9x_2(1)$	$q^9\phi_1^2\phi_2^3\phi_4$
$c_{9,3}$	$h_9x_2(1)x_9(-1)$	$2q^8\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{9,4}$	$h_9x_2(1)x_9(-\eta)$	$2q^8\phi_1\phi_2^3$
$c_{9,5}$	$h_9x_2(1)x_4(1)$	$q^7\phi_1\phi_2^2$
$c_{9,6}$	$h_9x_6(1)x_7(1)$	$q^5\phi_1\phi_2^2$
$c_{9,7}$	$h_9x_2(1)x_3(1)$	$q^5\phi_1\phi_2^2$
$c_{9,8}$	$h_9x_2(1)x_4(1)x_9(-1)$	$2q^5\phi_2$
$c_{9,9}$	$h_9x_2(1)x_4(1)x_9(-\eta)$	$2q^5\phi_2$
$c_{9,10}$	$h_9x_2(1)x_3(1)x_4(1)$	$q^3\phi_2$
$c_{10,1}$	h_{10}	$q^4\phi_1^4\phi_2^2\phi_3$
$c_{10,2}$	$h_{10}x_7(1)$	$q^4\phi_1^3\phi_2$
$c_{10,3}$	$h_{10}x_3(1)x_4(1)$	$q^3\phi_1^2\phi_2$
$c_{10,4}$	$h_{10}x_1(1)$	$q^4\phi_1^3\phi_2\phi_3$
$c_{10,5}$	$h_{10}x_1(1)x_7(1)$	$q^4\phi_1^2$
$c_{10,6}$	$h_{10}x_1(1)x_3(1)x_4(1)$	$q^3\phi_1$
$c_{11,1}$	h_{11}	$q^4\phi_1^2\phi_2^4\phi_6$
$c_{11,2}$	$h_{11}x_7(1)$	$q^4\phi_1\phi_2^3$
$c_{11,3}$	$h_{11}x_3(1)x_4(1)$	$q^3\phi_1\phi_2^2$
$c_{11,4}$	$h_{11}x_1(1)$	$q^4\phi_1\phi_2^3\phi_6$
$c_{11,5}$	$h_{11}x_1(1)x_7(1)$	$q^4\phi_2^2$
$c_{11,6}$	$h_{11}x_1(1)x_3(1)x_4(1)$	$q^3\phi_2$
$c_{12,1}$	h_{12}	$q^6\phi_1^4\phi_2^2\phi_3\phi_4$
$c_{12,2}$	$h_{12}x_{24}$	$q^6\phi_1^3\phi_2$
$c_{12,3}$	$h_{12}x_2(1)x_{24}(-1)$	$2q^5\phi_1^2\phi_2$
$c_{12,4}$	$h_{12}x_2(1)x_{24}(-\eta)$	$2q^5\phi_1^2\phi_2$
$c_{12,5}$	$h_{12}x_1(1)x_{22}(1)x_5(1)x_{23}(1)$	$q^4\phi_1^2$
$c_{12,6}$	$h_{12}x_1(1)x_2(1)x_{22}(-1)$	$2q^3\phi_1$
$c_{12,7}$	$h_{12}x_1(1)x_2(1)x_{22}(-\eta)$	$2q^3\phi_1$
$c_{13,1}$	h_{13}	$q^6\phi_1^2\phi_2^4\phi_4\phi_6$
$c_{13,2}$	$h_{13}x_{24}$	$q^6\phi_1\phi_2^3$
$c_{13,3}$	$h_{13}x_2(1)x_{24}(-1)$	$2q^5\phi_1\phi_2^2$

Tabelle T.A.16: Die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 5

Name	Repräsentant	Zentralisatorordnung
$c_{13,4}$	$h_{13}x_2(1)x_{24}(-\eta)$	$2q^5\phi_1\phi_2^2$
$c_{13,5}$	$h_{13}x_1(1)x_{22}(1)x_5(1)x_{23}(1)$	$q^4\phi_2^2$
$c_{13,6}$	$h_{13}x_1(1)x_{22}(1)x_2(1)$	$2q^3\phi_2$
$c_{13,7}$	$h_{13}x_1(\eta)x_{22}(\eta^q)x_2(1)$	$2q^3\phi_2$
$c_{14,1}$	h_{14}	$q^6\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
$c_{14,2}$	$h_{14}x_{24}$	$q^6\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{14,3}$	$h_{14}x_2(1)x_{24}(-1)$	$2q^5\phi_1\phi_2^2$
$c_{14,4}$	$h_{14}x_2(1)x_{24}(-\eta)$	$2q^5\phi_1\phi_2^2$
$c_{14,5}$	$h_{14}x_1(1)x_{22}(1)x_5(1)x_{23}(1)$	$q^4\phi_1\phi_2$
$c_{14,6}$	$h_{14}x_1(1)x_2(1)x_{22}(-1)$	$2q^3\phi_2$
$c_{14,7}$	$h_{14}x_1(1)x_2(1)x_{22}(-\eta)$	$2q^3\phi_2$
$c_{15,1}$	h_{15}	$q^6\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$
$c_{15,2}$	$h_{15}x_{24}$	$q^6\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{15,3}$	$h_{15}x_2(1)x_{24}(-1)$	$2q^5\phi_1^2\phi_2$
$c_{15,4}$	$h_{15}x_2(1)x_{24}(-\eta)$	$2q^5\phi_1^2\phi_2$
$c_{15,5}$	$h_{15}x_1(1)x_{22}(1)x_5(1)x_{23}(1)$	$q^4\phi_1\phi_2$
$c_{15,6}$	$h_{15}x_1(1)x_{22}(1)x_2(1)$	$2q^3\phi_1$
$c_{15,7}$	$h_{15}x_1(\eta)x_{22}(\eta^q)x_2(1)$	$2q^3\phi_1$
$c_{16,1}$	h_{16}	$q^4\phi_1^4\phi_2^2\phi_3$
$c_{16,2}$	$h_{16}x_5(1)$	$q^4\phi_1^3\phi_2$
$c_{16,3}$	$h_{16}x_1(1)x_2(1)$	$q^3\phi_1^2\phi_2$
$c_{16,4}$	$h_{16}x_4(1)$	$q^4\phi_1^3\phi_2\phi_3$
$c_{16,5}$	$h_{16}x_4(1)x_5(1)$	$q^4\phi_1^2$
$c_{16,6}$	$h_{16}x_1(1)x_2(1)x_4(1)$	$q^3\phi_1$
$c_{17,1}$	h_{17}	$q^4\phi_1^2\phi_2^4\phi_6$
$c_{17,2}$	$h_{17}x_5(1)$	$q^4\phi_1\phi_2^3$
$c_{17,3}$	$h_{17}x_1(1)x_2(1)$	$q^3\phi_1\phi_2^2$
$c_{17,4}$	$h_{17}x_4(1)$	$q^4\phi_1\phi_2^3\phi_6$
$c_{17,5}$	$h_{17}x_4(1)x_5(1)$	$q^4\phi_2^2$
$c_{17,6}$	$h_{17}x_1(1)x_2(1)x_4(1)$	$q^3\phi_2$
$c_{18,1}$	h_{18}	$q^3\phi_1^4\phi_2^3$
$c_{18,2}$	$h_{18}x_2(1)$	$q^3\phi_1^3\phi_2^2$
$c_{18,3}$	$h_{18}x_4(1)$	$q^3\phi_1^3\phi_2^2$
$c_{18,4}$	$h_{18}x_2(1)x_4(1)$	$q^3\phi_1^2\phi_2$
$c_{18,5}$	$h_{18}x_{24}$	$q^3\phi_1^3\phi_2^2$
$c_{18,6}$	$h_{18}x_2(1)x_{24}(1)$	$2q^3\phi_1^2\phi_2$
$c_{18,7}$	$h_{18}x_2(1)x_{24}(\eta)$	$2q^3\phi_1^2\phi_2$

Tabelle T.A.17: Die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 6

Name	Repräsentant	Zentralisatorordnung
$c_{18,8}$	$h_{18}x_4(1)x_{24}(1)$	$q^3\phi_1^2\phi_2$
$c_{18,9}$	$h_{18}x_2(1)x_4(1)x_{24}(1)$	$2q^3\phi_1$
$c_{18,10}$	$h_{18}x_2(1)x_4(1)x_{24}(\eta)$	$2q^3\phi_1$
$c_{19,1}$	h_{19}	$q^3\phi_1^3\phi_2^4$
$c_{19,2}$	$h_{19}x_2(1)$	$q^3\phi_1^2\phi_2^3$
$c_{19,3}$	$h_{19}x_4(1)$	$q^3\phi_1^2\phi_2^3$
$c_{19,4}$	$h_{19}x_2(1)x_4(1)$	$q^3\phi_1\phi_2^2$
$c_{19,5}$	$h_{19}x_{24}$	$q^3\phi_1^2\phi_2^3$
$c_{19,6}$	$h_{19}x_2(1)x_{24}(1)$	$2q^3\phi_1\phi_2^2$
$c_{19,7}$	$h_{19}x_2(1)x_{24}(\eta)$	$2q^3\phi_1\phi_2^2$
$c_{19,8}$	$h_{19}x_4(1)x_{24}(1)$	$q^3\phi_1\phi_2^2$
$c_{19,9}$	$h_{19}x_2(1)x_4(1)x_{24}(1)$	$2q^3\phi_2$
$c_{19,10}$	$h_{19}x_2(1)x_4(1)x_{24}(\eta)$	$2q^3\phi_2$
$c_{20,1}$	h_{20}	$q^3\phi_1^3\phi_2^2\phi_4$
$c_{20,2}$	$h_{20}x_2(1)x_{24}(1)$	$2q^3\phi_1^2\phi_2$
$c_{20,3}$	$h_{20}x_2(\gamma)x_{24}(\gamma^q)$	$2q^3\phi_1^2\phi_2$
$c_{20,4}$	$h_{20}x_4(1)$	$q^3\phi_1^2\phi_2\phi_4$
$c_{20,5}$	$h_{20}x_2(1)x_4(1)x_{24}(1)$	$2q^3\phi_1$
$c_{20,6}$	$h_{20}x_2(\gamma)x_4(1)x_{24}(\gamma^q)$	$2q^3\phi_1$
$c_{21,1}$	h_{21}	$q^3\phi_1^2\phi_2^3\phi_4$
$c_{21,2}$	$h_{21}x_2(1)x_{24}(1)$	$2q^3\phi_1\phi_2^2$
$c_{21,3}$	$h_{21}x_2(\gamma)x_{24}(\gamma^q)$	$2q^3\phi_1\phi_2^2$
$c_{21,4}$	$h_{21}x_4(1)$	$q^3\phi_1\phi_2^2\phi_4$
$c_{21,5}$	$h_{21}x_2(1)x_4(1)x_{24}(1)$	$2q^3\phi_2$
$c_{21,6}$	$h_{21}x_2(\gamma)x_4(1)x_{24}(\gamma^q)$	$2q^3\phi_2$
$c_{22,1}$	h_{22}	$q^5\phi_1^4\phi_2^3\phi_4$
$c_{22,2}$	$h_{22}x_2(1)$	$q^5\phi_1^3\phi_2^2$
$c_{22,3}$	$h_{22}x_6(1)$	$2q^4\phi_1^3\phi_2$
$c_{22,4}$	$h_{22}x_2(1)x_9(-\eta)$	$2q^4\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{22,5}$	$h_{22}x_2(1)x_3(1)$	$q^3\phi_1^2\phi_2$
$c_{22,6}$	$h_{22}x_{24}(1)$	$q^5\phi_1^3\phi_2^2\phi_4$
$c_{22,7}$	$h_{22}x_2(1)x_{24}(1)$	$2q^5\phi_1^2\phi_2$
$c_{22,8}$	$h_{22}x_2(1)x_{24}(\eta)$	$2q^5\phi_1^2\phi_2$
$c_{22,9}$	$h_{22}x_6(1)x_{24}(1)$	$2q^4\phi_1^2$
$c_{22,10}$	$h_{22}x_2(1)x_9(-\eta)x_{24}(1)$	$2q^4\phi_1\phi_2$
$c_{22,11}$	$h_{22}x_2(1)x_3(1)x_{24}(1)$	$2q^3\phi_1$
$c_{22,12}$	$h_{22}x_2(1)x_3(1)x_{24}(1)$	$2q^3\phi_1$

Tabelle T.A.18: Die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 7

Name	Repräsentant	Zentralisatorordnung
$c_{23,1}$	h_{23}	$q^5\phi_1^3\phi_2^4\phi_4$
$c_{23,2}$	$h_{23}x_2(1)$	$q^5\phi_1^2\phi_2^3$
$c_{23,3}$	$h_{23}x_6(1)$	$2q^4\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{23,4}$	$h_{23}x_2(1)x_9(-\eta)$	$2q^4\phi_1\phi_2^3$
$c_{23,5}$	$h_{23}x_2(1)x_3(1)$	$q^3\phi_1\phi_2^2$
$c_{23,6}$	$h_{23}x_{24}(1)$	$q^5\phi_1^2\phi_2^3\phi_4$
$c_{23,7}$	$h_{23}x_2(1)x_{24}(1)$	$2q^5\phi_1\phi_2^2$
$c_{23,8}$	$h_{23}x_2(1)x_{24}(\eta)$	$2q^5\phi_1\phi_2^2$
$c_{23,9}$	$h_{23}x_6(1)x_{24}(1)$	$2q^4\phi_1\phi_2$
$c_{23,10}$	$h_{23}x_2(1)x_9(-\eta)x_{24}(1)$	$2q^4\phi_2^2$
$c_{23,11}$	$h_{23}x_2(1)x_3(1)x_{24}(1)$	$2q^3\phi_2$
$c_{23,12}$	$h_{23}x_2(1)x_3(1)x_{24}(1)$	$2q^3\phi_2$
$c_{24,1}$	h_{24}	$q^9\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
$c_{24,2}$	$h_{24}x_{14}(1)$	$q^9\phi_1^3\phi_2^2$
$c_{24,3}$	$h_{24}x_5(1)x_{11}(-\eta)$	$2q^7\phi_1^2\phi_2\phi_4$
$c_{24,4}$	$h_{24}x_5(1)x_{11}(1)$	$2q^7\phi_1^3\phi_2^2$
$c_{24,5}$	$h_{24}x_8(1)x_9(1)$	$q^7\phi_1^2\phi_2$
$c_{24,6}$	$h_{24}x_5(1)x_6(1)x_{11}(\eta)$	$2q^6\phi_1\phi_2$
$c_{24,7}$	$h_{24}x_5(1)x_6(1)x_{11}(1)$	$2q^6\phi_1^2$
$c_{24,8}$	$h_{24}x_1(1)x_2(1)x_9(-\eta)$	$2q^4\phi_1\phi_2$
$c_{24,9}$	$h_{24}x_1(1)x_2(1)x_9(-1)$	$2q^4\phi_1^2$
$c_{24,10}$	$h_{24}x_1(1)x_2(1)x_3(1)$	$q^3\phi_1$
$c_{25,1}$	h_{25}	$q^9\phi_1^3\phi_2^4\phi_3\phi_4\phi_6$
$c_{25,2}$	$h_{25}x_{14}(1)$	$q^9\phi_1^2\phi_2^3$
$c_{25,3}$	$h_{25}x_5(1)x_{11}(-\eta)$	$2q^7\phi_1\phi_2^2\phi_4$
$c_{25,4}$	$h_{25}x_5(1)x_{11}(1)$	$2q^7\phi_1^2\phi_2^3$
$c_{25,5}$	$h_{25}x_8(1)x_9(1)$	$q^7\phi_1\phi_2^2$
$c_{25,6}$	$h_{25}x_5(1)x_6(1)x_{11}(\eta)$	$2q^6\phi_2^2$
$c_{25,7}$	$h_{25}x_5(1)x_6(1)x_{11}(1)$	$2q^6\phi_1\phi_2$
$c_{25,8}$	$h_{25}x_1(1)x_2(1)x_9(-\eta)$	$2q^4\phi_2^2$
$c_{25,9}$	$h_{25}x_1(1)x_2(1)x_9(-1)$	$2q^4\phi_1\phi_2$
$c_{25,10}$	$h_{25}x_1(1)x_2(1)x_3(1)$	$q^3\phi_2$
$c_{26,1}$	h_{26}	$q^3\phi_1^4\phi_2\phi_3$
$c_{26,2}$	$h_{26}x_5(1)$	$q^3\phi_1^3$
$c_{26,3}$	$h_{26}x_1(1)x_2(1)$	$q^2\phi_1^2$
$c_{27,1}$	h_{27}	$q^3\phi_1\phi_2^4\phi_6$

Tabelle T.A.19: Die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 8

Name	Repräsentant	Zentralisatorordnung
$c_{27,2}$	$h_{27}x_5(1)$	$q^3\phi_2^3$
$c_{27,3}$	$h_{27}x_1(1)x_2(1)$	$q^2\phi_2^2$
$c_{28,1}$	h_{28}	$q^3\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$
$c_{28,2}$	$h_{28}x_5(1)$	$q^3\phi_1^2\phi_2$
$c_{28,3}$	$h_{28}x_1(1)x_2(1)$	$q^2\phi_1\phi_2$
$c_{29,1}$	h_{29}	$q^3\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
$c_{29,2}$	$h_{29}x_5(1)$	$q^3\phi_1\phi_2^2$
$c_{29,3}$	$h_{29}x_1(1)x_2(1)$	$q^2\phi_1\phi_2$
$c_{30,1}$	h_{30}	$q^3\phi_1^2\phi_2\phi_3^2$
$c_{30,2}$	$h_{30}x_5(1)$	$q^3\phi_1\phi_3$
$c_{30,3}$	$h_{30}x_1(1)x_2(1)$	$q^2\phi_3$
$c_{31,1}$	h_{31}	$q^3\phi_1\phi_2^2\phi_6^2$
$c_{31,2}$	$h_{31}x_5(1)$	$q^3\phi_2\phi_6$
$c_{31,3}$	$h_{31}x_1(1)x_2(1)$	$q^2\phi_6$
$c_{32,1}$	h_{32}	$q^3\phi_1^4\phi_2\phi_3$
$c_{32,2}$	$h_{32}x_7(1)$	$q^3\phi_1^3$
$c_{32,3}$	$h_{32}x_3(1)x_4(1)$	$q^2\phi_1^2$
$c_{33,1}$	h_{33}	$q^3\phi_1\phi_2^4\phi_6$
$c_{33,2}$	$h_{33}x_7(1)$	$q^3\phi_2^3$
$c_{33,3}$	$h_{33}x_3(1)x_4(1)$	$q^2\phi_2^2$
$c_{34,1}$	h_{34}	$q^3\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$
$c_{34,2}$	$h_{34}x_7(1)$	$q^3\phi_1^2\phi_2$
$c_{34,3}$	$h_{34}x_3(1)x_4(1)$	$q^2\phi_1\phi_2$
$c_{35,1}$	h_{35}	$q^3\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
$c_{35,2}$	$h_{35}x_7(1)$	$q^3\phi_1\phi_2^2$
$c_{35,3}$	$h_{35}x_3(1)x_4(1)$	$q^2\phi_1\phi_2$
$c_{36,1}$	h_{36}	$q^3\phi_1^2\phi_2\phi_3^2$
$c_{36,2}$	$h_{36}x_7(1)$	$q^3\phi_1\phi_3$
$c_{36,3}$	$h_{36}x_3(1)x_4(1)$	$q^2\phi_3$
$c_{37,1}$	h_{37}	$q^3\phi_1\phi_2^2\phi_6^2$
$c_{37,2}$	$h_{37}x_7(1)$	$q^3\phi_2\phi_6$
$c_{37,3}$	$h_{37}x_3(1)x_4(1)$	$q^2\phi_6$
$c_{38,1}$	h_{38}	$q^4\phi_1^4\phi_2^2\phi_4$
$c_{38,2}$	$h_{38}x_2(1)$	$q^4\phi_1^3\phi_2$
$c_{38,3}$	$h_{38}x_6(1)$	$2q^3\phi_1^3$
$c_{38,4}$	$h_{38}x_2(1)x_9(\eta)$	$2q^3\phi_1^2\phi_2$

Tabelle T.A.20: Die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 9

Name	Repräsentant	Zentralisatorordnung
$c_{38,5}$	$h_{38}x_2(1)x_3(1)$	$q^2\phi_1^2$
$c_{39,1}$	h_{39}	$q^4\phi_1^2\phi_2^4\phi_4$
$c_{39,2}$	$h_{39}x_2(1)$	$q^4\phi_1\phi_2^3$
$c_{39,3}$	$h_{39}x_6(1)$	$2q^3\phi_1\phi_2^2$
$c_{39,4}$	$h_{39}x_2(1)x_9(\eta)$	$2q^3\phi_2^3$
$c_{39,5}$	$h_{39}x_2(1)x_3(1)$	$q^2\phi_2^2$
$c_{40,1}$	h_{40}	$q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$
$c_{40,2}$	$h_{40}x_2(1)$	$q^4\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{40,3}$	$h_{40}x_6(1)$	$2q^3\phi_1^2\phi_2$
$c_{40,4}$	$h_{40}x_2(1)x_9(\eta)$	$2q^3\phi_1\phi_2^2$
$c_{40,5}$	$h_{40}x_2(1)x_3(1)$	$q^2\phi_1\phi_2$
$c_{41,1}$	h_{41}	$q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$
$c_{41,2}$	$h_{41}x_2(1)$	$q^4\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{41,3}$	$h_{41}x_6(1)$	$2q^3\phi_1^2\phi_2$
$c_{41,4}$	$h_{41}x_2(1)x_9(\eta)$	$2q^3\phi_1\phi_2^2$
$c_{41,5}$	$h_{41}x_2(1)x_3(1)$	$q^2\phi_1\phi_2$
$c_{42,1}$	h_{42}	$q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_4^2$
$c_{42,2}$	$h_{42}x_2(1)$	$q^4\phi_1\phi_2\phi_4$
$c_{42,3}$	$h_{42}x_6(1)$	$2q^3\phi_1\phi_4$
$c_{42,4}$	$h_{42}x_2(1)x_9(\eta)$	$2q^3\phi_2\phi_4$
$c_{42,5}$	$h_{42}x_2(1)x_3(1)$	$q^2\phi_4$
$c_{43,1}$	h_{43}	$q^2\phi_1^4\phi_2^2$
$c_{43,2}$	$h_{43}x_2(1)$	$q^2\phi_1^3\phi_2$
$c_{43,3}$	$h_{43}x_{24}(1)$	$q^2\phi_1^3\phi_2$
$c_{43,4}$	$h_{43}x_2(1)x_{24}(\zeta)$	$2q^2\phi_1^2$
$c_{43,5}$	$h_{43}x_2(1)x_{24}(\zeta)$	$2q^2\phi_1^2$
$c_{44,1}$	h_{44}	$q^2\phi_1^2\phi_2^4$
$c_{44,2}$	$h_{44}x_2(1)$	$q^2\phi_1\phi_2^3$
$c_{44,3}$	$h_{44}x_{24}(1)$	$q^2\phi_1\phi_2^3$
$c_{44,4}$	$h_{44}x_2(1)x_{24}(\zeta)$	$2q^2\phi_2^2$
$c_{44,5}$	$h_{44}x_2(1)x_{24}(\zeta)$	$2q^2\phi_2^2$
$c_{45,1}$	h_{45}	$q^2\phi_1^3\phi_2^3$
$c_{45,2}$	$h_{45}x_2(1)$	$q^2\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{45,3}$	$h_{45}x_{24}(1)$	$q^2\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{45,4}$	$h_{45}x_2(1)x_{24}(\zeta)$	$2q^2\phi_1\phi_2$
$c_{45,5}$	$h_{45}x_2(1)x_{24}(\zeta)$	$2q^2\phi_1\phi_2$
$c_{46,1}$	h_{46}	$q^2\phi_1^3\phi_2^3$

Tabelle T.A.21: Die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 10

Name	Repräsentant	Zentralisatorordnung
$c_{46,2}$	$h_{46}x_2(1)$	$q^2\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{46,3}$	$h_{46}x_{24}(1)$	$q^2\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{46,4}$	$h_{46}x_2(1)x_{24}(\zeta)$	$2q^2\phi_1\phi_2$
$c_{46,5}$	$h_{46}x_2(1)x_{24}(\zeta)$	$2q^2\phi_1\phi_2$
$c_{47,1}$	h_{47}	$q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
$c_{47,2}$	$h_{47}x_2(1)$	$q^2\phi_1\phi_2\phi_4$
$c_{47,3}$	$h_{47}x_{24}(1)$	$q^2\phi_1\phi_2\phi_4$
$c_{47,4}$	$h_{47}x_2(1)x_{24}(\zeta)$	$2q^2\phi_4$
$c_{47,5}$	$h_{47}x_2(1)x_{24}(\zeta)$	$2q^2\phi_4$
$c_{48,1}$	h_{48}	$q^2\phi_1^3\phi_2\phi_4$
$c_{48,2}$	$h_{48}x_2(1)x_{24}(1)$	$2q^2\phi_1^2$
$c_{48,3}$	$h_{48}x_2(\gamma)x_{24}(\gamma^q)$	$2q^2\phi_1^2$
$c_{49,1}$	h_{49}	$q^2\phi_1\phi_2^3\phi_4$
$c_{49,2}$	$h_{49}x_2(1)x_{24}(1)$	$2q^2\phi_2^2$
$c_{49,3}$	$h_{49}x_2(\gamma)x_{24}(\gamma^q)$	$2q^2\phi_2^2$
$c_{50,1}$	h_{50}	$q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
$c_{50,2}$	$h_{50}x_2(1)x_{24}(1)$	$2q^2\phi_1\phi_2$
$c_{50,3}$	$h_{50}x_2(\gamma)x_{24}(\gamma^q)$	$2q^2\phi_1\phi_2$
$c_{51,1}$	h_{51}	$q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
$c_{51,2}$	$h_{51}x_2(1)x_{24}(1)$	$2q^2\phi_1\phi_2$
$c_{51,3}$	$h_{51}x_2(\gamma)x_{24}(\gamma^q)$	$2q^2\phi_1\phi_2$
$c_{52,1}$	h_{52}	$q^2\phi_1\phi_2\phi_4^2$
$c_{52,2}$	$h_{52}x_2(1)x_{24}(1)$	$2q^2\phi_4$
$c_{52,3}$	$h_{52}x_2(\gamma)x_{24}(\gamma^q)$	$2q^2\phi_4$
$c_{53,1}$	h_{53}	$q^2\phi_1^4\phi_2^2$
$c_{53,2}$	$h_{53}x_3(1)$	$q^2\phi_1^3\phi_2$
$c_{53,3}$	$h_{53}x_1(1)$	$q^2\phi_1^3\phi_2$
$c_{53,4}$	$h_{53}x_1(1)x_3(1)$	$q^2\phi_1^2$
$c_{54,1}$	h_{54}	$q^2\phi_1^2\phi_2^4$
$c_{54,2}$	$h_{54}x_3(1)$	$q^2\phi_1\phi_2^3$
$c_{54,3}$	$h_{54}x_1(1)$	$q^2\phi_1\phi_2^3$
$c_{54,4}$	$h_{54}x_1(1)x_3(1)$	$q^2\phi_2^2$
$c_{55,1}$	h_{55}	$q^2\phi_1^3\phi_2^3$
$c_{55,2}$	$h_{55}x_3(1)$	$q^2\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{55,3}$	$h_{55}x_1(1)$	$q^2\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{55,4}$	$h_{55}x_1(1)x_3(1)$	$q^2\phi_1\phi_2$

Tabelle T.A.22: Die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 11

Name	Repräsentant	Zentralisatorordnung
$c_{56,1}$	h_{56}	$q^2\phi_1^3\phi_2^3$
$c_{56,2}$	$h_{56}x_3(1)$	$q^2\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{56,3}$	$h_{56}x_1(1)$	$q^2\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{56,4}$	$h_{56}x_1(1)x_3(1)$	$q^2\phi_1\phi_2$
$c_{57,1}$	h_{57}	$q\phi_1^4\phi_2$
$c_{57,2}$	$h_{57}x_1(1)$	$q\phi_1^3$
$c_{58,1}$	h_{58}	$q\phi_1\phi_2^4$
$c_{58,2}$	$h_{58}x_1(1)$	$q\phi_2^3$
$c_{59,1}$	h_{59}	$q\phi_1^3\phi_2^2$
$c_{59,2}$	$h_{59}x_1(1)$	$q\phi_1^2\phi_2$
$c_{60,1}$	h_{60}	$q\phi_1^2\phi_2^3$
$c_{60,2}$	$h_{60}x_1(1)$	$q\phi_1\phi_2^2$
$c_{61,1}$	h_{61}	$q\phi_1^3\phi_2^2$
$c_{61,2}$	$h_{61}x_1(1)$	$q\phi_1^2\phi_2$
$c_{62,1}$	h_{62}	$q\phi_1^2\phi_2\phi_4$
$c_{62,2}$	$h_{62}x_1(1)$	$q\phi_1\phi_4$
$c_{63,1}$	h_{63}	$q\phi_1^2\phi_2^3$
$c_{63,2}$	$h_{63}x_1(1)$	$q\phi_1\phi_2^2$
$c_{64,1}$	h_{64}	$q\phi_1\phi_2^2\phi_4$
$c_{64,2}$	$h_{64}x_1(1)$	$q\phi_2\phi_4$
$c_{65,1}$	h_{65}	$q\phi_1^2\phi_2\phi_3$
$c_{65,2}$	$h_{65}x_1(1)$	$q\phi_1\phi_3$
$c_{66,1}$	h_{66}	$q\phi_1\phi_2^2\phi_6$
$c_{66,2}$	$h_{66}x_1(1)$	$q\phi_2\phi_6$
$c_{67,1}$	h_{67}	$q\phi_1^4\phi_2$
$c_{67,2}$	$h_{67}x_3(1)$	$q\phi_1^3$
$c_{68,1}$	h_{68}	$q\phi_1\phi_2^4$
$c_{68,2}$	$h_{68}x_3(1)$	$q\phi_2^3$
$c_{69,1}$	h_{69}	$q\phi_1^3\phi_2^2$
$c_{69,2}$	$h_{69}x_3(1)$	$q\phi_1^2\phi_2$
$c_{70,1}$	h_{70}	$q\phi_1^2\phi_2^3$
$c_{70,2}$	$h_{70}x_3(1)$	$q\phi_1\phi_2^2$
$c_{71,1}$	h_{71}	$q\phi_1^3\phi_2^2$
$c_{71,2}$	$h_{71}x_3(1)$	$q\phi_1^2\phi_2$
$c_{72,1}$	h_{72}	$q\phi_1^2\phi_2^3$
$c_{72,2}$	$h_{72}x_3(1)$	$q\phi_1\phi_2^2$

Tabelle T.A.23: Die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 12

Name	Repräsentant	Zentralisatorordnung
$c_{73,1}$	h_{73}	$q\phi_1^2\phi_2\phi_4$
$c_{73,2}$	$h_{73}x_3(1)$	$q\phi_1\phi_4$
$c_{74,1}$	h_{74}	$q\phi_1\phi_2^2\phi_4$
$c_{74,2}$	$h_{74}x_3(1)$	$q\phi_2\phi_4$
$c_{75,1}$	h_{75}	$q\phi_1^2\phi_2\phi_3$
$c_{75,2}$	$h_{75}x_3(1)$	$q\phi_1\phi_3$
$c_{76,1}$	h_{76}	$q\phi_1\phi_2^2\phi_6$
$c_{76,2}$	$h_{76}x_3(1)$	$q\phi_2\phi_6$
$c_{77,1}$	h_{77}	ϕ_1^4
$c_{78,1}$	h_{78}	ϕ_2^4
$c_{79,1}$	h_{79}	$\phi_1^3\phi_2$
$c_{80,1}$	h_{80}	$\phi_1^3\phi_2$
$c_{81,1}$	h_{81}	$\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{82,1}$	h_{82}	$\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{83,1}$	h_{83}	$\phi_1^2\phi_3$
$c_{84,1}$	h_{84}	$\phi_1^2\phi_3$
$c_{85,1}$	h_{85}	$\phi_1^2\phi_4$
$c_{86,1}$	h_{86}	$\phi_1\phi_2^3$
$c_{87,1}$	h_{87}	$\phi_1\phi_2^3$
$c_{88,1}$	h_{88}	$\phi_1\phi_2\phi_4$
$c_{89,1}$	h_{89}	$\phi_1\phi_2\phi_4$
$c_{90,1}$	h_{90}	$\phi_1\phi_2\phi_6$
$c_{91,1}$	h_{91}	$\phi_1\phi_2\phi_6$
$c_{92,1}$	h_{92}	$\phi_1\phi_2\phi_3$
$c_{93,1}$	h_{93}	$\phi_1\phi_2\phi_3$
$c_{94,1}$	h_{94}	ϕ_3^2
$c_{95,1}$	h_{95}	$\phi_2^2\phi_4$
$c_{96,1}$	h_{96}	$\phi_2^2\phi_6$
$c_{97,1}$	h_{97}	$\phi_2^2\phi_6$
$c_{98,1}$	h_{98}	ϕ_4^2
$c_{99,1}$	h_{99}	ϕ_8
$c_{100,1}$	h_{100}	ϕ_{12}
$c_{101,1}$	h_{101}	ϕ_6^2

Tabelle T.A.24: Die Konjugiertenklassen von $F_4(q)$, Teil 13

A.10 Einige halbeinfache Klassentypen von L_8

Es sei q ungerade. In der folgenden Tabelle sind einige Klassentypen der zerfallenden Leviuntergruppe L_8 vom Typ C_3 von $F_4(q)$ angegeben. Diese Gruppe ist eine $CSp_6(q)$, wie sie in [Lüb93] untersucht wurde. Die Nummerierung der Klassentypen entspricht der dort gewählten Nummerierung in Tabelle 8. Die mit m_i bezeichnete Spalte gibt die Anzahl der unipotenten Konjugiertenklassen im entsprechenden Zentralisator an. Die Anzahl der Parameter in dem Klassentyp zusammen mit der Zahl m_i identifizieren den Klassentyp eindeutig. Wir geben hier nur die halbeinfachen Klassentypen an, die wir später brauchen.

Nr.	Π	w	m_i	Anzahl Parameter	$n(\Pi, w, \mathbf{L}^{\mathbf{F}})$
l_2	$[2, 3, 16]$	1	12	$q-1$	1
l_7	$[2, 9]$	1	5	$(q-1)(q-3)$	4
l_9	$[2, 9]$	$s_4s_3s_2s_3s_4$	3	$(q-1)^2$	4
l_{11}	$[2, 9]$	s_3	5	$(q-1)^2$	4
l_{12}	$[2, 9]$	$s_3s_4s_3s_2s_3s_4$	3	q^2-1	4

Tabelle T.A.25: Einige halbeinfache Klassentypen von L_8

A.11 Einige gemischte Klassentypen von L_8

Es sei q ungerade. Für die Bezeichnungen vergleiche Tabelle A.9. In der folgenden Tabelle geben wir einige gemischte Klassentypen von L_8 an. Vergleiche dazu A.10. Die Nummerierung der Klassentypen entspricht der Nummerierung der Klassentypen in [Lüb93, Tabelle 13].

Nr.	Vertreter	Zentralisatorordnung
$l_{2,6}$	$l_2x_2(1)x_{16}(1)$	$2q^5(q^2-1)(q-1)$
$l_{2,7}$	$l_2x_2(1)x_{16}(\eta)$	$2q^5(q^2-1)(q-1)$
$l_{2,10}$	$l_2x_2(1)x_3(1)x_{16}(\eta)$	$2q^3(q-1)$
$l_{2,11}$	$l_2x_2(1)x_3(1)x_{16}(\eta)$	$2q^3(q-1)$
$l_{7,3}$	$l_7x_2(1)x_9(1)$	$2q^2(q-1)^2$
$l_{7,4}$	$l_7x_2(1)x_9(\eta)$	$2q^2(q-1)^2$
$l_{9,3}$	$l_9x_2(1)x_9(1)$	$2q^2(q^2-1)$
$l_{9,4}$	$l_9x_2(1)x_9(\eta)$	$2q^2(q^2-1)$
$l_{11,1}$	$l_{11}x_2(1)x_9(1)$	$2q^2(q-1)^2$
$l_{11,2}$	$l_{11}x_2(\gamma)x_9(\gamma^q)$	$2q^2(q-1)^2$
$l_{12,1}$	$l_{12}x_2(1)x_9(1)$	$2q^2(q^2-1)$
$l_{12,2}$	$l_{12}x_2(\gamma)x_9(\gamma^q)$	$2q^2(q^2-1)$

Tabelle T.A.26: Einige gemischte Klassentypen von L_8

A.12 Einige halbeinfache Klassentypen von L_6

Es sei q ungerade. In der folgenden Tabelle sind einige halbeinfache Klassentypen der zerfallenden Leviuntergruppe L_6 angegeben. Vergleiche auch A.10.

Nr.	Π	w	m_i	Anzahl Parameter	$n(\Pi, w, \mathbf{L}^{\mathbf{F}})$
l_2	$[1, 2, 9]$	1	7	$q-1$	2
l_3	$[1, 2, 9]$	s_3	7	$q-1$	2
l_8	$[1, 3, 14]$	1	10	$q-1$	2
l_9	$[1, 3, 14]$	$s_3s_2s_3$	6	$q-1$	2
l_{12}	$[1, 14]$	1	5	$(q-1)(q-3)$	4
l_{13}	$[1, 14]$	s_3	5	$(q-1)^2$	4
l_{14}	$[1, 14]$	$(s_2s_3)^2$	3	$(q-1)^2$	4
l_{15}	$[1, 14]$	$s_3s_2s_3$	3	$(q-1)(q-3)$	4

Tabelle T.A.27: Einige halbeinfache Klassentypen von L_6

A.13 Einige gemischte Klassentypen von L_6

Es sei q ungerade. In der folgenden Tabelle geben wir einige gemischte Klassentypen von L_6 an. Vergleiche dazu A.10.

Nr.	Vertreter	Zentralisatorordnung
$l_{2,3}$	$l_2x_2(1)x_{16}(1)$	$2q^5(q^2-1)(q-1)$
$l_{2,4}$	$l_2x_2(1)x_{16}(\eta)$	$2q^5(q^2-1)(q-1)$
$l_{2,6}$	$l_2x_2(1)x_3(1)x_{16}(\eta)$	$2q^3(q-1)$
$l_{2,7}$	$l_2x_2(1)x_3(1)x_{16}(\eta)$	$2q^3(q-1)$
$l_{3,3}$	$l_3x_2(1)x_{16}(1)$	$2q^5(q^2-1)(q+1)$
$l_{3,4}$	$l_3x_2(1)x_{16}(\eta)$	$2q^5(q^2-1)(q+1)$
$l_{3,6}$	$l_3x_2(1)x_3(1)x_{16}(\eta)$	$2q^3(q+1)$
$l_{3,7}$	$l_3x_2(1)x_3(1)x_{16}(\eta)$	$2q^3(q+1)$
$l_{8,6}$	$l_8x_2(1)x_{16}(1)$	$2q^3(q^2-1)(q-1)$
$l_{8,7}$	$l_8x_2(1)x_{16}(\eta)$	$2q^3(q^2-1)(q-1)$
$l_{8,9}$	$l_8x_2(1)x_3(1)x_{16}(\eta)$	$2q^3(q-1)$
$l_{8,10}$	$l_8x_2(1)x_3(1)x_{16}(\eta)$	$2q^3(q-1)$
$l_{9,2}$	$l_9x_2(1)x_{16}(1)$	$2q^3(q^2-1)(q+1)$
$l_{9,3}$	$l_9x_2(1)x_{16}(\eta)$	$2q^3(q^2-1)(q+1)$
$l_{9,5}$	$l_9x_2(1)x_3(1)x_{16}(\eta)$	$2q^3(q+1)$
$l_{9,6}$	$l_9x_2(1)x_3(1)x_{16}(\eta)$	$2q^3(q+1)$
$l_{12,4}$	$l_{12}x_2(1)x_9(1)$	$2q^2(q-1)^2$
$l_{12,5}$	$l_{12}x_2(1)x_9(\eta)$	$2q^2(q-1)^2$
$l_{13,4}$	$l_{13}x_2(1)x_9(1)$	$2q^2(q^2-1)$
$l_{13,5}$	$l_{13}x_2(1)x_9(\eta)$	$2q^2(q^2-1)$
$l_{14,2}$	$l_{14}x_2(1)x_9(1)$	$2q^2(q-1)^2$
$l_{14,3}$	$l_{14}x_2(\gamma)x_9(\gamma^q)$	$2q^2(q-1)^2$
$l_{15,2}$	$l_{15}x_2(1)x_9(1)$	$2q^2(q^2-1)$
$l_{15,3}$	$l_{15}x_2(\gamma)x_9(\gamma^q)$	$2q^2(q^2-1)$

Tabelle T.A.28: Einige gemischte Klassentypen von L_6

A.14 Einige halbeinfache Klassentypen von P_8

Es sei $12|q-1$. In der folgenden Tabelle sind die halbeinfachen Klassentypen von P_8 aufgelistet, die in L_8 in die in Tabelle A.10 angegebenen Klassen fusionieren. Diese Faktorfusion ist in der fünften Spalte angegeben. Die sechste Spalte gibt die entsprechende Fusion nach $F_4(q)$ an. Die Nummerierung der Typen entspricht der Nummerierung in den Tabellen A.10 und A.7.

Nr.	Π	w	Anzahl Parameter	Fusion $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$	Fusion $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$	$n(\Pi, w, \mathbf{P}^{\mathbf{F}})$
p_2	[1, 2, 3, 16]	1	1	l_2	h_3	1
p_5	[2, 3, 12, 16]	1	1	l_2	h_2	1
p_{15}	[1, 2, 9, 21]	1	2	l_7	h_6	2
p_{19}	[1, 2, 9]	1	$q-5$	l_7	h_{12}	2
p_{20}	[1, 2, 9]	s_3	$q-1$	l_{11}	h_{15}	2
p_{28}	[2, 3, 16]	1	$q-3$	l_2	h_{22}	1
p_{31}	[2, 8, 16]	1	$q-3$	l_7	h_{22}	2
p_{32}	[2, 8, 16]	$s_3s_2s_3$	$q-1$	l_9	h_{23}	2
p_{75}	[2, 8, 9]	1	$q-5$	l_7	h_{18}	2
p_{76}	[2, 8, 9]	s_3	$q-1$	l_{11}	h_{20}	2
p_{94}	[2, 9]	1	$(q-5)^2$	l_7	h_{43}	4
p_{95}	[2, 9]	s_3	$(q-1)(q-5)$	l_{11}	h_{48}	4
p_{96}	[2, 9]	$s_4s_3s_2s_3s_4$	$(q-1)(q-3)$	l_9	h_{45}	4
p_{97}	[2, 9]	$s_3s_4s_3s_2s_3s_4$	q^2-1	l_{12}	h_{50}	4

Tabelle T.A.29: Einige halbeinfache Klassentypen von P_8

A.15 Einige gemischte Klassentypen von P_8

Es sei $12 \mid q-1$. In der folgenden Tabelle geben wir Vertreter für einige gemischte Klassentypen von P_8 und sie zugehörigen Fusionen in L_8 und $F_4(q)$ gemäß Bemerkung III.(7.9) an. Für die Bezeichnungen vergleiche Tabelle A.9. Die Klassentypen sind gemäß den Tabellen A.9, A.11 und A.14 bezeichnet.

Nr.	Vertreter	Zentralisatorordnung	Fusion in $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$	Fusion in $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$
$p_{2,1}$	$p_2x_2(1)x_{16}(1)$	$2q^{11}\phi_1^2\phi_2$	$l_{2,7}$	$(c_{3,5}, 1)$
$p_{2,2}$	$p_2x_2(1)x_{16}(\eta)$	$2q^{11}\phi_1^2\phi_2$	$l_{2,8}$	$(c_{3,6}, 1)$
$p_{2,3}$	$p_2x_2(1)x_{16}(1)x_{24}(-1)$	$4q^{11}\phi_1\phi_2$	$l_{2,7}$	$(c_{3,7}, 1)$
$p_{2,4}$	$p_2x_2(1)x_{16}(1)x_{24}(-\eta)$	$4q^{11}\phi_1\phi_2$	$l_{2,7}$	$(c_{3,8}, 1)$
$p_{2,5}$	$p_2x_2(1)x_{16}(\eta)x_{24}(-1)$	$4q^{11}\phi_1\phi_2$	$l_{2,8}$	$(c_{3,8}, 1)$
$p_{2,6}$	$p_2x_2(1)x_{16}(\eta)x_{24}(-\eta)$	$4q^{11}\phi_1\phi_2$	$l_{2,8}$	$(c_{3,7}, 1)$
$p_{2,7}$	$p_2x_2(1)x_{16}(1)x_{22}(1)$	$2q^{10}\phi_1$	$l_{2,7}$	$(c_{3,9}, 1)$
$p_{2,8}$	$p_2x_2(1)x_{16}(\eta)x_{22}(1)$	$2q^{10}\phi_1$	$l_{2,8}$	$(c_{3,9}, 1)$
$p_{2,9}$	$p_2x_2(1)x_8(1)x_{16}(1)$	$2q^8\phi_1\phi_2$	$l_{2,7}$	$(c_{3,16}, 1)$
$p_{2,10}$	$p_2x_2(1)x_8(1)x_{16}(\eta)$	$2q^8\phi_1\phi_2$	$l_{2,8}$	$(c_{3,17}, 1)$
$p_{2,11}$	$p_2x_2(1)x_{11}(1)x_{16}(1)$	$2q^8\phi_1$	$l_{2,7}$	$(c_{3,14}, 1)$
$p_{2,12}$	$p_2x_2(1)x_{11}(1)x_{16}(\eta)$	$2q^8\phi_1$	$l_{2,8}$	$(c_{3,15}, 1)$
$p_{2,13}$	$p_2x_1(1)x_2(1)x_{16}(1)x_{22}(1)$	$4q^8$	$l_{2,7}$	$(c_{3,18}, 1)$
$p_{2,14}$	$p_2x_1(1)x_2(1)x_{16}(1)x_{22}(\eta)$	$4q^8$	$l_{2,7}$	$(c_{3,20}, 1)$
$p_{2,15}$	$p_2x_1(1)x_2(1)x_{16}(\eta)x_{22}(1)$	$4q^8$	$l_{2,8}$	$(c_{3,20}, 1)$
$p_{2,16}$	$p_2x_1(1)x_2(1)x_{16}(\eta)x_{22}(\eta)$	$4q^8$	$l_{2,8}$	$(c_{3,22}, 1)$
$p_{2,17}$	$p_2x_2(1)x_3(1)x_{16}(1)$	$2q^6\phi_1$	$l_{2,11}$	$(c_{3,16}, 1)$
$p_{2,18}$	$p_2x_2(1)x_3(1)x_{16}(\eta)$	$2q^6\phi_1$	$l_{2,12}$	$(c_{3,17}, 1)$
$p_{2,19}$	$p_2x_2(1)x_3(1)x_{16}(1)x_{24}(1)$	$4q^6$	$l_{2,11}$	$(c_{3,18}, 1)$
$p_{2,20}$	$p_2x_2(1)x_3(1)x_{16}(1)x_{24}(\eta)$	$4q^6$	$l_{2,11}$	$(c_{3,19}, 1)$
$p_{2,21}$	$p_2x_2(1)x_3(1)x_{16}(\eta)x_{24}(1)$	$4q^6$	$l_{2,12}$	$(c_{3,19}, 1)$
$p_{2,22}$	$p_2x_2(1)x_3(1)x_{16}(\eta)x_{24}(\eta)$	$4q^6$	$l_{2,12}$	$(c_{3,22}, 1)$
$p_{2,23}$	$p_2x_2(1)x_3(1)x_{16}(1)x_{18}(1)$	$2q^5$	$l_{2,11}$	$(c_{3,23}, 1)$
$p_{2,24}$	$p_2x_2(1)x_3(1)x_{16}(\eta)x_{18}(1)$	$2q^5$	$l_{2,12}$	$(c_{3,23}, 1)$
$p_{2,25}$	$p_2x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_{16}(1)$	$2q^4$	$l_{2,11}$	$(c_{3,25}, 1)$
$p_{2,26}$	$p_2x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_{16}(\eta)$	$2q^4$	$l_{2,12}$	$(c_{3,26}, 1)$
$p_{5,1}$	$p_5x_2(1)x_{16}(-1)$	$2q^9\phi_1^2\phi_2$	$l_{2,6}$	$(c_{2,12}, 1)$
$p_{5,2}$	$p_5x_2(1)x_{16}(-\eta)$	$2q^9\phi_1^2\phi_2$	$l_{2,7}$	$(c_{2,13}, 1)$

Tabelle T.A.30: Einige gemischte Klassentypen von P_8, Teil 1

Nr.	Vertreter	Zentralisatorordnung	Fusion in $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$	Fusion in $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$
$p_{5,3}$	$p_5x_2(1)x_{15}(1)x_{16}(1)$	$2q^6\phi_1\phi_2$	$l_{2,6}$	$(c_{2,18}, 1)$
$p_{5,4}$	$p_5x_2(1)x_{15}(1)x_{16}(\eta)$	$2q^6\phi_1\phi_2$	$l_{2,7}$	$(c_{2,19}, 1)$
$p_{5,5}$	$p_5x_2(1)x_{12}(1)x_{16}(1)$	$2q^8\phi_1$	$l_{2,6}$	$(c_{2,16}, 1)$
$p_{5,6}$	$p_5x_2(1)x_{12}(1)x_{16}(\eta)$	$2q^8\phi_1$	$l_{2,7}$	$(c_{2,17}, 1)$
$p_{5,7}$	$p_5x_2(1)x_{16}(1)x_{24}(1)$	$4q^9\phi_1\phi_2$	$l_{2,6}$	$(c_{2,14}, 1)$
$p_{5,8}$	$p_5x_2(1)x_{16}(1)x_{24}(\eta)$	$4q^9\phi_1\phi_2$	$l_{2,6}$	$(c_{2,15}, 1)$
$p_{5,9}$	$p_5x_2(1)x_{16}(\eta)x_{24}(1)$	$4q^9\phi_1\phi_2$	$l_{2,7}$	$(c_{2,15}, 1)$
$p_{5,10}$	$p_5x_2(1)x_{16}(\eta)x_{24}(\eta)$	$4q^9\phi_1\phi_2$	$l_{2,7}$	$(c_{2,14}, 1)$
$p_{5,11}$	$p_5x_2(1)x_3(1)x_{16}(1)$	$2q^5\phi_1$	$l_{2,11}$	$(c_{2,18}, 1)$
$p_{5,12}$	$p_5x_2(1)x_3(1)x_{16}(\eta)$	$2q^5\phi_1$	$l_{2,12}$	$(c_{2,19}, 1)$
$p_{5,13}$	$p_5x_2(1)x_3(1)x_{16}(1)x_{24}(-1)$	$4q^5$	$l_{2,11}$	$(c_{2,21}, 1)$
$p_{5,14}$	$p_5x_2(1)x_3(1)x_{16}(1)x_{24}(-\eta)$	$4q^5$	$l_{2,11}$	$(c_{2,23}, 1)$
$p_{5,15}$	$p_5x_2(1)x_3(1)x_{16}(\eta)x_{24}(-1)$	$4q^5$	$l_{2,12}$	$(c_{2,22}, 1)$
$p_{5,16}$	$p_5x_2(1)x_3(1)x_{16}(\eta)x_{24}(-\eta)$	$4q^5$	$l_{2,12}$	$(c_{2,24}, 1)$
$p_{5,17}$	$p_5x_2(1)x_3(1)x_{12}(1)x_{16}(1)$	$2q^4$	$l_{2,11}$	$(c_{2,25}, 1)$
$p_{5,18}$	$p_5x_2(1)x_3(1)x_{12}(1)x_{16}(\eta)$	$2q^4$	$l_{2,12}$	$(c_{2,26}, 1)$
$p_{28,1}$	$p_{28}x_2(1)x_{16}(1)$	$2q^5\phi_1^2\phi_2$	$l_{2,7}$	$(c_{22,7}, 2)$
$p_{28,2}$	$p_{28}x_2(1)x_{16}(\eta)$	$2q^5\phi_1^2\phi_2$	$l_{2,8}$	$(c_{22,8}, 2)$
$p_{28,3}$	$p_{28}x_2(1)x_3(1)x_{16}(1)$	$2q^3\phi_1$	$l_{2,11}$	$(c_{22,11}, 2)$
$p_{28,4}$	$p_{28}x_2(1)x_3(1)x_{16}(\eta)$	$2q^3\phi_1$	$l_{2,12}$	$(c_{22,12}, 2)$
$p_{15,1}$	$p_{15}x_2(1)x_9(-1)$	$2q^5\phi_1^2$	$l_{7,4}$	$(c_{6,3}, 1)$
$p_{15,2}$	$p_{15}x_2(1)x_9(-\eta)$	$2q^5\phi_1^2$	$l_{7,5}$	$(c_{6,4}, 1)$
$p_{15,3}$	$p_{15}x_2(1)x_9(-1)x_{11}(1)$	$2q^5\phi_1$	$l_{7,4}$	$(c_{6,5}, 1)$
$p_{15,4}$	$p_{15}x_2(1)x_9(-\eta)x_{11}(1)$	$2q^5\phi_1$	$l_{7,5}$	$(c_{6,5}, 1)$
$p_{15,5}$	$p_{15}x_2(1)x_9(-1)x_{21}(1)$	$2q^5\phi_1$	$l_{7,4}$	$(c_{6,10}, 1)$
$p_{15,6}$	$p_{15}x_2(1)x_9(-\eta)x_{21}(1)$	$2q^5\phi_1$	$l_{7,5}$	$(c_{6,11}, 1)$
$p_{15,7}$	$p_{15}x_1(1)x_2(1)x_9(-1)$	$2q^4\phi_1$	$l_{7,4}$	$(c_{6,6}, 1)$
$p_{15,8}$	$p_{15}x_1(1)x_2(1)x_9(-\eta)$	$2q^4\phi_1$	$l_{7,5}$	$(c_{6,7}, 1)$
$p_{15,9}$	$p_{15}x_2(1)x_9(-1)x_{11}(1)x_{21}(1)$	$4q^5$	$l_{7,4}$	$(c_{6,12}, 1)$
$p_{15,10}$	$p_{15}x_2(1)x_9(-\xi^2)x_{11}(1)x_{21}(1)$	$4q^5$	$l_{7,4}$	$(c_{6,12}, 1)$
$p_{15,11}$	$p_{15}x_2(1)x_9(-\eta)x_{11}(1)x_{21}(1)$	$4q^5$	$l_{7,5}$	$(c_{6,12}, 1)$
$p_{15,12}$	$p_{15}x_2(1)x_9(-\xi)x_{11}(1)x_{21}(1)$	$4q^5$	$l_{7,5}$	$(c_{6,12}, 1)$
$p_{15,13}$	$p_{15}x_1(1)x_2(1)x_9(-1)x_{21}(1)$	$4q^4$	$l_{7,4}$	$(c_{6,13}, 1)$
$p_{15,14}$	$p_{15}x_1(1)x_2(1)x_9(-\xi^2)x_{21}(1)$	$4q^4$	$l_{7,4}$	$(c_{6,15}, 1)$
$p_{15,15}$	$p_{15}x_1(1)x_2(1)x_9(-\xi)x_{21}(1)$	$4q^4$	$l_{7,5}$	$(c_{6,14}, 1)$
$p_{15,16}$	$p_{15}x_1(1)x_2(1)x_9(-\xi^3)x_{21}(1)$	$4q^4$	$l_{7,5}$	$(c_{6,16}, 1)$

Tabelle T.A.31: Einige gemischte Klassentypen von P_8,Teil 2

Nr.	Vertreter	Zentralisatorordnung	Fusion in $\mathbf{L^F}$	Fusion in $\mathbf{G^F}$
$p_{19,1}$	$p_{19}x_2(1)x_9(-1)$	$2q^4\phi_1^2$	$l_{7,4}$	$(c_{12,3}, 2)$
$p_{19,2}$	$p_{19}x_2(1)x_9(-\eta)$	$2q^4\phi_1^2$	$l_{7,5}$	$(c_{12,4}, 2)$
$p_{19,3}$	$p_{19}x_2(1)x_9(-1)x_{11}(1)$	$2q^4\phi_1$	$l_{7,4}$	$(c_{12,5}, 2)$
$p_{19,4}$	$p_{19}x_2(1)x_9(-\eta)x_{11}(1)$	$2q^4\phi_1$	$l_{7,5}$	$(c_{12,5}, 2)$
$p_{19,5}$	$p_{19}x_1(1)x_2(1)x_9(-1)$	$2q^3\phi_1$	$l_{7,4}$	$(c_{12,6}, 2)$
$p_{19,6}$	$p_{19}x_1(1)x_2(1)x_9(-\eta)$	$2q^3\phi_1$	$l_{7,5}$	$(c_{12,7}, 2)$
$p_{31,1}$	$p_{31}x_2(1)x_{16}(1)$	$2q^4\phi_1^2$	$l_{7,4}$	$(c_{22,7}, 1)$
$p_{31,2}$	$p_{31}x_2(1)x_{16}(\eta)$	$2q^4\phi_1^2$	$l_{7,5}$	$(c_{22,8}, 1)$
$p_{31,3}$	$p_{31}x_2(1)x_{16}(1)x_{24}(-1)$	$4q^4\phi_1$	$l_{7,4}$	$(c_{22,9}, 1)$
$p_{31,4}$	$p_{31}x_2(1)x_{16}(1)x_{24}(-\eta)$	$4q^4\phi_1$	$l_{7,4}$	$(c_{22,10}, 1)$
$p_{31,5}$	$p_{31}x_2(1)x_{16}(\eta)x_{24}(-1)$	$4q^4\phi_1$	$l_{7,5}$	$(c_{22,10}, 1)$
$p_{31,6}$	$p_{31}x_2(1)x_{16}(\eta)x_{24}(-\eta)$	$4q^4\phi_1$	$l_{7,5}$	$(c_{22,9}, 1)$
$p_{31,7}$	$p_{31}x_2(1)x_8(1)x_{16}(1)$	$2q^3\phi_1$	$l_{7,4}$	$(c_{22,11}, 1)$
$p_{31,8}$	$p_{31}x_2(1)x_8(1)x_{16}(\eta)$	$2q^3\phi_1$	$l_{7,5}$	$(c_{22,12}, 1)$
$p_{75,1}$	$p_{75}x_2(1)x_9(1)$	$2q^3\phi_1^2$	$l_{7,4}$	$(c_{18,6}, 2)$
$p_{75,2}$	$p_{75}x_2(1)x_9(\eta)$	$2q^3\phi_1^2$	$l_{7,5}$	$(c_{18,7}, 2)$
$p_{75,3}$	$p_{75}x_2(1)x_8(1)x_9(1)$	$2q^3\phi_1$	$l_{7,4}$	$(c_{18,9}, 2)$
$p_{75,4}$	$p_{75}x_2(1)x_8(1)x_9(\eta)$	$2q^3\phi_1$	$l_{7,5}$	$(c_{18,10}, 2)$
$p_{94,1}$	$p_{94}x_2(1)x_9(1)$	$2q^2\phi_1^2$	$l_{7,4}$	$(c_{43,4}, 4)$
$p_{94,2}$	$p_{94}x_2(1)x_9(\eta)$	$2q^2\phi_1^2$	$l_{7,5}$	$(c_{43,5}, 4)$
$p_{32,1}$	$p_{32}x_2(1)x_{16}(\eta)$	$2q^4\phi_1\phi_2$	$l_{9,4}$	$(c_{23,8}, 1)$
$p_{32,2}$	$p_{32}x_2(1)x_{16}(1)$	$2q^4\phi_1\phi_2$	$l_{9,5}$	$(c_{23,7}, 1)$
$p_{32,3}$	$p_{32}x_2(1)x_{16}(\eta)x_{24}(-1)$	$4q^4\phi_2$	$l_{9,4}$	$(c_{23,10}, 1)$
$p_{32,4}$	$p_{32}x_2(1)x_{16}(\eta)x_{24}(-\eta)$	$4q^4\phi_2$	$l_{9,4}$	$(c_{23,9}, 1)$
$p_{32,5}$	$p_{32}x_2(1)x_{16}(1)x_{24}(-1)$	$4q^4\phi_2$	$l_{9,5}$	$(c_{23,9}, 1)$
$p_{32,6}$	$p_{32}x_2(1)x_{16}(1)x_{24}(-\eta)$	$4q^4\phi_2$	$l_{9,5}$	$(c_{23,10}, 1)$
$p_{32,7}$	$p_{32}x_2(1)x_8(1)x_{16}(\eta)$	$2q^3\phi_2$	$l_{9,4}$	$(c_{23,12}, 1)$
$p_{32,8}$	$p_{32}x_2(1)x_8(1)x_{16}(1)$	$2q^3\phi_2$	$l_{9,5}$	$(c_{23,11}, 1)$
$p_{96,1}$	$p_{96}x_2(1)x_9(\eta)$	$2q^2\phi_1\phi_2$	$l_{9,4}$	$(c_{45,5}, 2)$
$p_{96,2}$	$p_{96}x_2(1)x_9(1)$	$2q^2\phi_1\phi_2$	$l_{9,5}$	$(c_{45,4}, 2)$

Tabelle T.A.32: Einige gemischte Klassentypen von P_8,Teil 3

Nr.	Vertreter	Zentralisatorordnung	Fusion in $\mathbf{L}^{\mathbf{F}}$	Fusion in $\mathbf{G}^{\mathbf{F}}$
$p_{20,1}$	$p_{20}x_2(1)x_9(1)$	$2q^4\phi_1^2$	$l_{11,2}$	$(c_{15,3}, 2)$
$p_{20,2}$	$p_{20}x_2(1)x_9(1)$	$2q^4\phi_1^2$	$l_{11,3}$	$(c_{15,4}, 2)$
$p_{20,3}$	$p_{20}x_2(1)x_9(1)x_5(\gamma)x_{11}(\gamma^q)$	$2q^4\phi_1$	$l_{11,2}$	$(c_{15,5}, 2)$
$p_{20,4}$	$p_{20}x_2(1)x_9(\eta)x_5(\gamma)x_{11}(\gamma^q)$	$2q^4\phi_1$	$l_{11,3}$	$(c_{15,5}, 2)$
$p_{20,5}$	$p_{20}x_1(1)x_2(1)x_9(1)$	$2q^3\phi_1$	$l_{11,2}$	$(c_{15,6}, 2)$
$p_{20,6}$	$p_{20}x_1(1)x_2(\gamma)x_9(\gamma^q)$	$2q^3\phi_1$	$l_{11,3}$	$(c_{15,7}, 2)$
$p_{76,1}$	$p_{76}x_2(1)x_9(1)$	$2q^3\phi_1^2$	$l_{11,2}$	$(c_{20,2}, 2)$
$p_{76,2}$	$p_{76}x_2(\gamma)x_9(\gamma^q)$	$2q^3\phi_1^2$	$l_{11,3}$	$(c_{20,3}, 2)$
$p_{76,3}$	$p_{76}x_2(1)x_9(1)x_8(1)$	$2q^3\phi_1$	$l_{11,2}$	$(c_{20,5}, 2)$
$p_{76,4}$	$p_{76}x_2(\gamma)x_9(\gamma^q)x_8(1)$	$2q^3\phi_1$	$l_{11,3}$	$(c_{20,6}, 2)$
$p_{95,1}$	$p_{95}x_2(1)x_9(1)$	$2q^2\phi_1^2$	$l_{11,2}$	$(c_{48,2}, 4)$
$p_{95,2}$	$p_{95}x_2(\gamma)x_9(\gamma^q)$	$2q^2\phi_1^2$	$l_{11,3}$	$(c_{48,3}, 4)$
$p_{97,1}$	$p_{97}x_2(\gamma)x_9(\gamma^q)$	$2q^2\phi_1\phi_2$	$l_{12,2}$	$(c_{50,3}, 2)$
$p_{97,2}$	$p_{97}x_2(1)x_9(1)$	$2q^2\phi_1\phi_2$	$l_{12,3}$	$(c_{50,2}, 2)$

Tabelle T.A.33: Einige gemischte Klassentypen von P_8,Teil 4

A.16 Werte der unipotenten Senkrechtfunktionen von L_8

Es sei q ungerade. In der folgenden Tabelle geben wir die Werte der unipotenten Senkrechtfunktionen von L_8 an. Diese Werte sind der Tabelle 24 in [Lüb93] entnommen. Die Senkrechtfunktion f_1 entspricht dort der Funktion $f_{1,1}(0)$ und f_2 entspricht $f_{1,2}(0)$. Die nicht angegebenen Werte sind Null. Die Bezeichnung der Klassentypen von L_8 entspricht der Bezeichnung in Tabelle A.11.

	$l_{2,6}$	$l_{2,7}$	$l_{2,10}$	$l_{2,11}$	$l_{7,3}$	$l_{7,4}$	$l_{9,3}$	$l_{9,4}$	$l_{11,1}$	$l_{11,2}$	$l_{12,1}$	$l_{12,2}$
f_1	q^2	$-q^2$	q	$-q$	q	$-q$	$-q$	q	q	$-q$	$-q$	q
f_2	q^3	$-q^3$	0	0	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$

Tabelle T.A.34: Unipotente Senkrechtfunktionen von L_8 für q ungerade

A.17 Werte der unipotenten Senkrechtfunktionen von L_6

Es sei q ungerade. In der folgenden Tabelle geben wir die Werte der unipotenten Senkrechtfunktionen von L_6 an. Diese Werte sind mit den in [Lüb93] beschriebenen Methoden berechnet worden. Die Bezeichnung der Klassentypen von L_6 entspricht der Bezeichnung in Tabelle A.13.

	$l_{2,3}$	$l_{2,4}$	$l_{2,6}$	$l_{2,7}$	$l_{3,3}$	$l_{3,4}$	$l_{3,6}$	$l_{3,7}$	$l_{8,6}$	$l_{8,7}$	$l_{8,9}$	$l_{8,10}$
g_1	q^2	$-q^2$	q	$-q$	q^2	$-q^2$	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$
g_2	q^3	$-q^3$	0	0	q^3	$-q^3$	0	0	q^2	$-q^2$	0	0

	$l_{9,2}$	$l_{9,3}$	$l_{9,5}$	$l_{9,6}$	$l_{12,4}$	$l_{12,5}$	$l_{13,4}$	$l_{13,5}$	$l_{14,2}$	$l_{14,3}$	$l_{15,2}$	$l_{15,3}$
g_1	q	$-q$	q	$-q$	$-q$	q	q	$-q$	q	$-q$	$-q$	q
g_2	q^2	$-q^2$	0	0	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$

Tabelle T.A.35: Unipotente Senkrechtfunktionen von L_8 für q ungerade

A.18 Werte Harish-Chandra-induzierter Klassenfunktionen

Es sei $2,3 \nmid q$. In der folgenden Tabelle geben wir die Werte der Harish-Chandra-Induktion der unipotenten Senkrecht-Funktionen der Levi-Untergruppen L_6 und L_8 an. Zur Berechnung vergleiche Beispiel III.8.

	$c_{2,12}$	$c_{2,13}$	$c_{2,16}$	$c_{2,17}$	$c_{2,18}$	$c_{2,19}$	$c_{2,21}$	$c_{2,22}$
$R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_1)$	$q^3\phi_2\phi_4$	$-q^3\phi_2\phi_4$	$q^2\phi_2$	$-q^2\phi_2$	$(q+2)q^2$	$-(q+2)q^2$	q^2	$-q^2$
$R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_2)$	$q^4\phi_2\phi_4$	$-q^4\phi_2\phi_4$	$q^3\phi_2$	$-q^3\phi_2$	q^3	$-q^3$	0	0
$R_{\mathbf{L}_6}^{\mathbf{G}}(g_1)$	$q^3\phi_2\phi_4$	$-q^3\phi_2\phi_4$	$q^2\phi_3$	$-q^2\phi_3$	$q^2\phi_2$	$-q^2\phi_2$	0	0
$R_{\mathbf{L}_6}^{\mathbf{G}}(g_2)$	$q^4\phi_2\phi_4$	$-q^4\phi_2\phi_4$	q^3	$-q^3$	$q^2\phi_2$	$-q^2\phi_2$	q^2	$-q^2$

	$c_{2,23}$	$c_{2,24}$	$c_{2,25}$	$c_{2,26}$	$c_{3,5}$	$c_{3,6}$	$c_{3,14}$	$c_{3,15}$
$R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_1)$	q^2	$-q^2$	q	$-q$	$q^5\phi_2\phi_4$	$-q^5\phi_2\phi_4$	$q^2\phi_2$	$-q^2\phi_2$
$R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_2)$	0	0	0	0	$q^6\phi_2\phi_4$	$-q^6\phi_2\phi_4$	$q^3\phi_2$	$-q^3\phi_2$
$R_{\mathbf{L}_6}^{\mathbf{G}}(g_1)$	0	0	q	$-q$	$q^5\phi_2\phi_4$	$-q^5\phi_2\phi_4$	$q^2\phi_3$	$-q^2\phi_3$
$R_{\mathbf{L}_6}^{\mathbf{G}}(g_2)$	q^2	$-q^2$	0	0	$q^6\phi_2\phi_4$	$-q^6\phi_2\phi_4$	q^3	$-q^3$

	$c_{3,16}$	$c_{3,17}$	$c_{3,18}$	$c_{3,22}$	$c_{3,25}$	$c_{3,26}$	$c_{6,3}$	$c_{6,4}$
$R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_1)$	$q^2\phi_3$	$-q^2\phi_3$	$2q^2\phi_2$	$-2q^2\phi_2$	q	$-q$	$q^2\phi_2^2$	$-q^2\phi_2^2$
$R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_2)$	q^3	$-q^3$	$2q^3$	$-2q^3$	0	0	$q^2\phi_2^2$	$-q^2\phi_2^2$
$R_{\mathbf{L}_6}^{\mathbf{G}}(g_1)$	$q^2\phi_2$	$-q^2\phi_2$	$2q^2\phi_2$	$-2q^2\phi_2$	q	$-q$	$2q^2\phi_2$	$-2q^2\phi_2$
$R_{\mathbf{L}_6}^{\mathbf{G}}(g_2)$	$q^3\phi_2$	$-q^3\phi_2$	$2q^3$	$-2q^3$	0	0	$2q^3\phi_2$	$-2q^3\phi_2$

	$c_{6,6}$	$c_{6,7}$	$c_{6,10}$	$c_{6,11}$	$c_{6,13}$	$c_{6,14}$	$c_{6,15}$	$c_{6,16}$
$R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_1)$	$q\phi_2$	$-q\phi_2$	$q^2\phi_2$	$-q^2\phi_2$	q	$-q$	q	$-q$
$R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_2)$	$q\phi_2$	$-q\phi_2$	$q^2\phi_2$	$-q^2\phi_2$	q	$-q$	q	$-q$
$R_{\mathbf{L}_6}^{\mathbf{G}}(g_1)$	$q(q+2)$	$-q(q+2)$	$(q+2)q^2$	$-(q+2)q^2$	$2q$	$-2q$	$2q$	$-2q$
$R_{\mathbf{L}_6}^{\mathbf{G}}(g_2)$	q^2	$-q^2$	q^3	$-q^3$	0	0	0	0

Tabelle T.A.36: Werte Harish-Chandra-induzierter Klassenfunktionen, Teil 1

	$c_{7,3}$	$c_{7,4}$	$c_{7,6}$	$c_{7,7}$	$c_{7,10}$	$c_{7,11}$	$c_{7,13}$	$c_{7,14}$
$R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_1)$	$q^2\phi_2^2$	$-q^2\phi_2^2$	$q\phi_2$	$-q\phi_2$	$q^2\phi_2$	$-q^2\phi_2$	q	$-q$
$R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_2)$	$q^2\phi_2^2$	$-q^2\phi_2^2$	$q\phi_2$	$-q\phi_2$	$q^2\phi_2$	$-q^2\phi_2$	q	$-q$
$R_{\mathbf{L}_6}^{\mathbf{G}}(g_1)$	$2q^2\phi_2$	$-2q^2\phi_2$	$q(q+2)$	$-q(q+2)$	$(q+2)q^2$	$-(q+2)q^2$	$2q$	$-2q$
$R_{\mathbf{L}_6}^{\mathbf{G}}(g_2)$	$2q^3\phi_2$	$-2q^3\phi_2$	q^2	$-q^2$	q^3	$-q^3$	0	0

	$c_{7,15}$	$c_{7,16}$	$c_{12,3}$	$c_{12,4}$	$c_{12,6}$	$c_{12,7}$	$c_{13,3}$	$c_{13,4}$
$R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_1)$	q	$-q$	$2q^2\phi_2$	$-2q^2\phi_2$	$2q$	$-2q$	0	0
$R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_2)$	q	$-q$	$2q^2\phi_2$	$-2q^2\phi_2$	$2q$	$-2q$	0	0
$R_{\mathbf{L}_6}^{\mathbf{G}}(g_1)$	$2q$	$-2q$	$(q+3)q^2$	$-(q+3)q^2$	$3q$	$-3q$	$q^2\phi_2$	$-q^2\phi_2$
$R_{\mathbf{L}_6}^{\mathbf{G}}(g_2)$	0	0	$q^2(3q+1)$	$-q^2(3q+1)$	q	$-q$	$-q^2\phi_2$	$q^2\phi_2$

	$c_{13,6}$	$c_{13,7}$	$c_{14,3}$	$c_{14,4}$	$c_{14,6}$	$c_{14,7}$	$c_{15,3}$	$c_{15,4}$
$R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_1)$	0	0	0	0	0	0	$2q^2\phi_2$	$-2q^2\phi_2$
$R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_2)$	0	0	0	0	0	0	$2q^2\phi_2$	$-2q^2\phi_2$
$R_{\mathbf{L}_6}^{\mathbf{G}}(g_1)$	q	$-q$	$q^2\phi_2$	$-q^2\phi_2$	q	$-q$	$(q+3)q^2$	$-(q+3)q^2$
$R_{\mathbf{L}_6}^{\mathbf{G}}(g_2)$	$-q$	q	$-q^2\phi_2$	$q^2\phi_2$	$-q$	q	$q^2(3q+1)$	$-q^2(3q+1)$

	$c_{15,6}$	$c_{15,7}$	$c_{18,6}$	$c_{18,7}$	$c_{18,9}$	$c_{18,10}$	$c_{19,6}$	$c_{19,7}$
$R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_1)$	$2q$	$-2q$	$2q\phi_2$	$-2q\phi_2$	$2q$	$-2q$	0	0
$R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_2)$	$2q$	$-2q$	$2q\phi_2$	$-2q\phi_2$	$2q$	$-2q$	0	0
$R_{\mathbf{L}_6}^{\mathbf{G}}(g_1)$	$3q$	$-3q$	$q(q+3)$	$-q(q+3)$	$3q$	$-3q$	$q\phi_2$	$-q\phi_2$
$R_{\mathbf{L}_6}^{\mathbf{G}}(g_2)$	q	$-q$	$q(3q+1)$	$-q(3q+1)$	q	$-q$	$-q\phi_2$	$q\phi_2$

	$c_{19,9}$	$c_{19,10}$	$c_{20,2}$	$c_{20,3}$	$c_{20,5}$	$c_{20,6}$	$c_{21,2}$	$c_{21,3}$
$R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_1)$	0	0	$2q\phi_2$	$-2q\phi_2$	$2q$	$-2q$	0	0
$R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_2)$	0	0	$2q\phi_2$	$-2q\phi_2$	$2q$	$-2q$	0	0
$R_{\mathbf{L}_6}^{\mathbf{G}}(g_1)$	q	$-q$	$q(q+3)$	$-q(q+3)$	$3q$	$-3q$	$q\phi_2$	$-q\phi_2$
$R_{\mathbf{L}_6}^{\mathbf{G}}(g_2)$	$-q$	q	$q(3q+1)$	$-q(3q+1)$	q	$-q$	$-q\phi_2$	$q\phi_2$

	$c_{21,5}$	$c_{21,6}$	$c_{22,7}$	$c_{22,8}$	$c_{22,11}$	$c_{22,12}$	$c_{23,7}$	$c_{23,8}$
$R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_1)$	0	0	$(q+3)q^2$	$-(q+3)q^2$	$3q$	$-3q$	$q^2\phi_2$	$-q^2\phi_2$
$R_{\mathbf{L}_8}^{\mathbf{G}}(f_2)$	0	0	$q^2(3q+1)$	$-q^2(3q+1)$	q	$-q$	$-q^2\phi_2$	$q^2\phi_2$
$R_{\mathbf{L}_6}^{\mathbf{G}}(g_1)$	q	$-q$	$2q^2\phi_2$	$-2q^2\phi_2$	$2q$	$-2q$	0	0
$R_{\mathbf{L}_6}^{\mathbf{G}}(g_2)$	$-q$	q	$2q^2\phi_2$	$-2q^2\phi_2$	$2q$	$-2q$	0	0

Tabelle T.A.37: Werte Harish-Chandra-induzierter Klassenfunktionen, Teil 2

	$c_{23,11}$	$c_{23,12}$	$c_{43,4}$	$c_{43,5}$	$c_{45,4}$	$c_{45,5}$	$c_{46,4}$	$c_{46,5}$	$c_{48,2}$	$c_{48,3}$
$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_8}(f_1)$	q	$-q$	$4q$	$-4q$	$2q$	$-2q$	0	0	$4q$	$-4q$
$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_8}(f_2)$	$-q$	q	$4q$	$-4q$	$-2q$	$2q$	0	0	$4q$	$-4q$
$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_6}(g_1)$	0	0	$4q$	$-4q$	0	0	$2q$	$-2q$	$4q$	$-4q$
$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_6}(g_2)$	0	0	$4q$	$-4q$	0	0	$-2q$	$2q$	$4q$	$-4q$

	$c_{50,2}$	$c_{50,3}$	$c_{51,2}$	$c_{51,3}$
$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_8}(f_1)$	$2q$	$-2q$	0	0
$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_8}(f_2)$	$-2q$	$2q$	0	0
$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_6}(g_1)$	0	0	$2q$	$-2q$
$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_6}(g_2)$	0	0	$-2q$	$2q$

Tabelle T.A.38: Werte Harish-Chandra-induzierter Klassenfunktionen, Teil 3

A.19 Gel′fand-Graev-Charaktere von $F_4(q)$

In der folgenden Tabelle geben wir die verallgemeinerten Gel′fand-Graev-Charaktere für die Chevalleygruppen $F_4(q)$ mit $2,3 \nmid q$ an. Die Nummerierung der Charaktere entspricht der Nummerierung der unipotenten Konjugiertenklassen von $F_4(q)$. Vergleiche dazu auch Satz IV.(1.5) und A.8

	x_1	x_2	x_3
Γ_1	$q^{24}\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	.	.
Γ_2	$q^{16}\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-q^{16}\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	.
Γ_3	$q^{13}\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$q^{13}\phi_1^4\phi_2^3\phi_3^2\phi_4\phi_6$	$-2q^{13}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4$
Γ_4	$q^{13}\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-q^{13}\phi_1^3\phi_2^3\phi_3^2\phi_4\phi_6^2$	.
Γ_5	$q^{10}\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-q^{10}\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-q^{10}\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
Γ_6	$q^9\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-q^9\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6\phi_8$	$q^9\phi_1^4\phi_2^2\phi_3^2\phi_4$
Γ_7	$q^9\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-q^9\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6\phi_8$	$-q^9\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
Γ_8	$q^9\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$q^9\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4\phi_6^2$	$-q^9\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
Γ_9	$q^7\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-q^7\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6\phi_8$	$-q^7\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
Γ_{10}	$q^6\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$(q^6-q^4-1)q^6\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-(q^3+q^2-q+1)q^6\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
Γ_{11}	$q^6\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$(q^6-q^4-1)q^6\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$(q^4-q^3-q^2+q-1)q^6\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
Γ_{12}	$q^6\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-(q^6+q^4+1)q^6\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$q^6\phi_1^4\phi_2^2\phi_3\phi_4\phi_5$
Γ_{13}	$q^5\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$(2q^4+q^2+1)q^5\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4\phi_6$	$(q^3-3q^2+2q-1)q^5\phi_1^3\phi_2^4\phi_3\phi_4$
Γ_{14}	$q^5\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-q^5\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6\phi_8$	$(q^5-q^4-q^3-1)q^5\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
Γ_{15}	$q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$(3q^6-q^4-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$(2q^4-3q^3-q^2+q-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
Γ_{16}	$q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$(q^6-q^4-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-(q^3+q^2-q+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
Γ_{17}	$q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-(q^6+q^4+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$(2q^4+q^3+q^2+q+1)q^4\phi_1^4\phi_2^2\phi_3\phi_4$
Γ_{18}	$q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6\phi_8$	$-(q^4+q^2-q+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
Γ_{19}	$q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-(q^6+q^4+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-q^4\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4\phi_8$
Γ_{20}	$q^3\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$(q^6-q^4-1)q^3\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-(q^3+q^2-q+1)q^3\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
Γ_{21}	$q^3\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-q^3\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6\phi_8$	$(q^5-q^4-q^2+q-1)q^3\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
Γ_{22}	$q^2\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6\phi_8$	$(q^5-q^4-q^2+q-1)q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
Γ_{23}	$q^2\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6\phi_8$	$-(q^6+q^4+q^3+1)q^2\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4$
Γ_{24}	$q\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$(q^7-q^4-1)q\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-(2q^4+q^3+1)q\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
Γ_{25}	$q\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-(q^7+q^4+1)q\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-q\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
Γ_{26}	$\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6\phi_8$	$-\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6\phi_8$

Tabelle T.A.39: Gel′fand-Graev-Charaktere, Teil 1

	x_4	x_5	x_6	x_7
Γ_1	.	.	.	.
Γ_2	.	.	.	.
Γ_3	.	.	.	.
Γ_4	$2q^{13}\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$	.	.	.
Γ_5	$-q^{10}\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$q^{10}\phi_1^2\phi_2^2$	.	.
Γ_6	$-q^9\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-q^9\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$2q^9\phi_1^2\phi_2\phi_3$	.
Γ_7	$q^9\phi_1^2\phi_2^4\phi_4\phi_6^2$	$q^9\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$	.	$-2q^9\phi_1\phi_2^2\phi_6$
Γ_8	$q^9\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-q^9\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_6$	.	.
Γ_9	$-q^7\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$q^7\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$q^7\phi_1^2\phi_2^2\phi_3$	$q^7\phi_1^2\phi_2^2\phi_6$
Γ_{10}	$(q^3-q^2-q-1)q^6\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-(q^6-q^4-q^2-1)q^6\phi_1^2\phi_2^2$	$-q^6\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$q^6\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
Γ_{11}	$(q^4+q^3-q^2-q-1)q^6\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-q^6\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$	$-q^6\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$-q^6\phi_1^3\phi_2^3\phi_6$
Γ_{12}	$q^6\phi_1^2\phi_2^4\phi_4\phi_6\phi_{10}$	$-q^6\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$	$q^6\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_4$	$q^6\phi_1^2\phi_2^2\phi_4\phi_6$
Γ_{13}	$(q^3+3q^2+2q+1)q^5\phi_1^4\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-(3q^6-q^2-1)q^5\phi_1^2\phi_2^2$	$q^5\phi_1^4\phi_2^3\phi_3$	$-q^5\phi_1^3\phi_2^4\phi_6$
Γ_{14}	$(q^5+q^4-q^3+1)q^5\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-(q^6-q^2-1)q^5\phi_1^2\phi_2^2$	$-q^5\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4$	$q^5\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$
Γ_{15}	$(2q^4+3q^3-q^2-q-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-(6q^6+q^4-q^2-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2$	$(3q^3-2q^2-q+1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3$	$-(3q^3+2q^2-q-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_6$
Γ_{16}	$(q^3-q^2-q-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-(2q^6-q^4-q^2-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2$	$-(q^3+q+1)q^4\phi_1^3\phi_2\phi_3$	$(q^3+q-1)q^4\phi_1\phi_2^3\phi_6$
Γ_{17}	$(2q^4-q^3+q^2-q+1)q^4\phi_1^2\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$-(2q^6+q^4-q^2-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2$	$-(q^3-2q^2+q-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3$	$(q^3+2q^2+q+1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_6$
Γ_{18}	$-(q^4+q^2+q+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$(2q^4+q^2+1)q^4\phi_1^2\phi_2^2$	$q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$
Γ_{19}	$q^4\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6\phi_8$	$q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$(q^4+q^3+q^2+1)q^4\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$-(q^4-q^3+q^2+1)q^4\phi_1\phi_2^2\phi_6$
Γ_{20}	$(q^3-q^2-q-1)q^3\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-(2q^6-q^4-q^2-1)q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$-q^3\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_6$	$-q^3\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_6$
Γ_{21}	$-(q^5+q^4+q^2+q+1)q^3\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-(2q^6-q^4-q^2-1)q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$-(q^4-q^3-q^2+q-1)q^3\phi_1^2\phi_2^2\phi_3$	$-(q^4+q^3-q^2-q-1)q^3\phi_1^2\phi_2^2\phi_6$
Γ_{22}	$-(q^5+q^4+q^2+q+1)q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-(2q^6-q^4-q^2-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-(q^4-q^3-q^2+q-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_3$	$-(q^4+q^3-q^2-q-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_6$
Γ_{23}	$(q^6+q^4-q^3+1)q^2\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$-q^2\phi_1^3\phi_2\phi_3\phi_5$	$-q^2\phi_1\phi_2^3\phi_6\phi_{10}$
Γ_{24}	$-q\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-(q^5+q^4+q^3+q^2+1)q\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$-q\phi_1^3\phi_2^2\phi_3^2\phi_6$	$-q\phi_1^3\phi_2^2\phi_3^2\phi_6$
Γ_{25}	$(2q^4-q^3+1)q\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-(q^5-q^4+q^3-q^2-1)q\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$	$q\phi_1^2\phi_2^3\phi_3\phi_6^2$	$q\phi_1^2\phi_2^3\phi_3\phi_6^2$
Γ_{26}	$-\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6\phi_8$	$\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$

Tabelle T.A.40: Gel′fand-Graev-Charaktere, Teil 2

	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}
Γ_1	.	.	.	.	.	.
Γ_2	.	.	.	.	.	.
Γ_3	.	.	.	.	.	.
Γ_4	.	.	.	.	.	.
Γ_5	.	.	.	.	.	.
Γ_6	.	.	.	.	.	.
Γ_7	.	.	.	.	.	.
Γ_8	$q^9\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	.	.	.	.	.
Γ_9	.	$-q^7\phi_1\phi_2$	.	.	.	.
Γ_{10}	$q^6\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$q^6\phi_1^2\phi_2^2$	$-q^6\phi_1\phi_2$	.	.	.
Γ_{11}	.	$-q^6\phi_2^3\phi_2^3$	.	$2q^6\phi_1^2\phi_2^2$	.	.
Γ_{12}	.	$q^6\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	.	.	$-2q^6\phi_1\phi_2\phi_4$	.
Γ_{13}	$2q^5\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$-(2q^2-1)q^5\phi_1^2\phi_2^2$	$2q^5\phi_1^2\phi_2^2$	$2q^5\phi_1^2\phi_2^2$	.	$-2q^5\phi_1\phi_2$
Γ_{14}	.	$q^5\phi_1^2\phi_2^2$	.	$2q^5\phi_1^2\phi_2^2$	.	.
Γ_{15}	$4q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$-(2q^2-1)(3q^2-1)q^4\phi_1\phi_2$	$4(2q^2-1)q^4\phi_1\phi_2$	$6q^4\phi_1^2\phi_2^2$	.	$-12q^4\phi_1\phi_2$
Γ_{16}	$2q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$q^4\phi_1^2\phi_2^2$	$-2q^4\phi_1\phi_2$	$2q^4\phi_1^2\phi_2^2$	.	$-2q^4\phi_1\phi_2$
Γ_{17}	.	$(2q^2-1)q^4\phi_1\phi_2\phi_4$	.	$2q^4\phi_1^2\phi_2^2$	$-4q^4\phi_1\phi_2\phi_4$	.
Γ_{18}	$q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$-q^4\phi_1\phi_2\phi_4$	$-q^4\phi_1\phi_2\phi_4$	.	.	.
Γ_{19}	.	$-q^4\phi_1\phi_2\phi_4$	.	.	$-2q^4\phi_1\phi_2\phi_4$	.
Γ_{20}	$-(q^2-2)q^3\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$2q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$2q^3\phi_1^2\phi_2^2$	.	$3q^3\phi_1^2\phi_2^2$
Γ_{21}	$-q^3\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$q^3\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$q^3\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$q^3\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$q^3\phi_1^2\phi_2^2$
Γ_{22}	$-(2q^2-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$(2q^2-1)q^2\phi_1\phi_2$	$q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$(3q^2-1)q^2\phi_1\phi_2$
Γ_{23}	$q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$-q^2\phi_1\phi_2$	$q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$q^2\phi_1^2\phi_2^2$
Γ_{24}	$q\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$(q^4+q^3-1)q\phi_1\phi_2$	$q\phi_1^2\phi_2^2\phi_3$	$(2q^2+q+1)q\phi_1^2\phi_2^2$	$q\phi_1^2\phi_2\phi_4$	$(q^3-q-1)q\phi_1\phi_2^2$
Γ_{25}	$-q\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$(q^4-q^3-1)q\phi_1\phi_2$	$q\phi_1^2\phi_2^2\phi_6$	$(2q^2-q+1)q\phi_1^2\phi_2^2$	$-q\phi_1\phi_2^2\phi_4$	$(q^3-q+1)q\phi_1^2\phi_2$
Γ_{26}	$\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$-\phi_1\phi_2$	$-\phi_1\phi_2$	$\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$

Tabelle T.A.41: Gel′fand-Graev-Charaktere, Teil 3

	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}
Γ_1	.	.	.	.	.	.
Γ_2	.	.	.	.	.	.
Γ_3	.	.	.	.	.	.
Γ_4	.	.	.	.	.	.
Γ_5	.	.	.	.	.	.
Γ_6	.	.	.	.	.	.
Γ_7	.	.	.	.	.	.
Γ_8	.	.	.	.	.	.
Γ_9	.	.	.	.	.	.
Γ_{10}	.	.	.	.	.	.
Γ_{11}	.	.	.	.	.	.
Γ_{12}	.	.	.	.	.	.
Γ_{13}	.	.	.	.	.	.
Γ_{14}	$-2q^5\phi_1\phi_2$	.	.	.	.	.
Γ_{15}	.	$q^4(q^2+23)$	$-q^4\phi_1\phi_2$	$q^4\phi_1\phi_2$	$q^4\phi_1\phi_2$	$-q^4\phi_1\phi_2$
Γ_{16}	$-2q^4\phi_1\phi_2$	$-q^4\phi_1\phi_2$	$q^4(q^2+3)$	$-q^4\phi_1\phi_2$	$-q^4\phi_1\phi_2$	$q^4\phi_1\phi_2$
Γ_{17}	$-4q^4\phi_1\phi_2$	$q^4\phi_1\phi_2$	$-q^4\phi_1\phi_2$	$q^4(q^2+7)$	$q^4\phi_1\phi_2$	$-q^4\phi_1\phi_2$
Γ_{18}	.	$q^4\phi_1\phi_2$	$-q^4\phi_1\phi_2$	$q^4\phi_1\phi_2$	$q^4(q^2+2)$	$-q^4\phi_1\phi_2$
Γ_{19}	.	$-q^4\phi_1\phi_2$	$q^4\phi_1\phi_2$	$-q^4\phi_1\phi_2$	$-q^4\phi_1\phi_2$	$q^4(q^2+3)$
Γ_{20}	$q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$4q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$2q^3\phi_1^2\phi_2^2$	.	$q^3\phi_1^2\phi_2^2$	.
Γ_{21}	$q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$q^3\phi_1^2\phi_2^2$
Γ_{22}	$q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$(5q^2-1)q^2\phi_1\phi_2$	$(3q^2-1)q^2\phi_1\phi_2$	$q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$(2q^2-1)q^2\phi_1\phi_2$	$q^2\phi_1^2\phi_2^2$
Γ_{23}	$-q^2\phi_1\phi_2\phi_4$	$(3q^2-1)q^2\phi_1\phi_2$	$q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-q^2\phi_1\phi_2\phi_4$	$-q^2\phi_1\phi_2$	$-q^2\phi_1\phi_2\phi_4$
Γ_{24}	$(q^3+2q^2+q+1)q\phi_1^2\phi_2$	$(q^3-2q^2-3q-1)q\phi_1\phi_2$	$(q^3-q-1)q\phi_1\phi_2$	$(q^3-2q^2+q-1)q\phi_1\phi_2$	$(q^3+q^2-1)q\phi_1\phi_2$	$(q^3+q-1)q\phi_1\phi_2$
Γ_{25}	$(q^3-2q^2+q-1)q\phi_1\phi_2^2$	$-(q^3+2q^2-3q+1)q\phi_1\phi_2$	$-(q^3-q+1)q\phi_1\phi_2$	$-(q^3+2q^2+q+1)q\phi_1\phi_2$	$-(q^3-q^2+1)q\phi_1\phi_2$	$-(q^3+q+1)q\phi_1\phi_2$
Γ_{26}	$\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$(2q^4-1)\phi_1\phi_2$	$-\phi_1\phi_2$	$(2q^4-1)\phi_1\phi_2$	$-\phi_1\phi_2\phi_8$	$-\phi_1\phi_2$

Tabelle T.A.42: Gel′fand-Graev-Charaktere, Teil 4

	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}
Γ_1	.	.	.	.	.	.	.
Γ_2	.	.	.	.	.	.	.
Γ_3	.	.	.	.	.	.	.
Γ_4	.	.	.	.	.	.	.
Γ_5	.	.	.	.	.	.	.
Γ_6	.	.	.	.	.	.	.
Γ_7	.	.	.	.	.	.	.
Γ_8	.	.	.	.	.	.	.
Γ_9	.	.	.	.	.	.	.
Γ_{10}	.	.	.	.	.	.	.
Γ_{11}	.	.	.	.	.	.	.
Γ_{12}	.	.	.	.	.	.	.
Γ_{13}	.	.	.	.	.	.	.
Γ_{14}	.	.	.	.	.	.	.
Γ_{15}	.	.	.	.	.	.	.
Γ_{16}	.	.	.	.	.	.	.
Γ_{17}	.	.	.	.	.	.	.
Γ_{18}	.	.	.	.	.	.	.
Γ_{19}	.	.	.	.	.	.	.
Γ_{20}	$-q^3\phi_1\phi_2$	.	.	.	.	.	.
Γ_{21}	.	$-q^3\phi_1\phi_2$	.	.	.	.	.
Γ_{22}	$-q^2\phi_1\phi_2$	$-2q^2\phi_1\phi_2$	$2q^2$	.	.	.	.
Γ_{23}	$-q^2\phi_1\phi_2$	.	.	$2q^2$	.	.	.
Γ_{24}	$-q\phi_1\phi_2^2$	$-q\phi_1\phi_2$	$-q\phi_1\phi_2$	$-q\phi_1\phi_2$	$2q$	.	.
Γ_{25}	$q\phi_1^2\phi_2$	$-q\phi_1\phi_2$	$-q\phi_1\phi_2$	$-q\phi_1\phi_2$	.	$2q$	.
Γ_{26}	$-\phi_1\phi_2$	$-\phi_1\phi_2$	$-\phi_1\phi_2$	$-\phi_1\phi_2$	$-\phi_1\phi_2$	$-\phi_1\phi_2$	1

Tabelle T.A.43: Gel′fand-Graev-Charaktere, Teil 5

A.20 Werte projektiver Charaktere

Es seien $\varepsilon_3 := \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3})$ und $\varepsilon_4 := \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{4})$. Vergleiche Lemma IV.(3.2).

	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	$c_{1,3}$
K_1	$q^{24}\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	.	.
K_2	$\frac{1}{2}q^{13}\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$\frac{1}{2}q^{13}\phi_1^4\phi_2^3\phi_3^2\phi_4\phi_6$	$-q^{13}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4$
K_3	$\frac{1}{2}q^{13}\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$\frac{1}{2}q^{13}\phi_1^4\phi_2^3\phi_3^2\phi_4\phi_6$	$-q^{13}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4$
K_4	$\frac{1}{2}q^{13}\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-\frac{1}{2}q^{13}\phi_1^3\phi_2^4\phi_3\phi_4\phi_6^2$	.
K_5	$\frac{1}{2}q^{13}\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-\frac{1}{2}q^{13}\phi_1^3\phi_2^4\phi_3\phi_4\phi_6^2$	.
K_6	$q^{10}\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-q^{10}\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-q^{10}\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
K_7	$q^9\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-q^9\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6\phi_8$	$q^9\phi_1^4\phi_2^2\phi_3^2\phi_4$
K_8	$q^9\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$q^9\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4\phi_6^2$	$-q^9\phi_1^3\phi_2^4\phi_3\phi_4\phi_6$
K_9	$\frac{1}{24}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$\frac{1}{24}(3q^6-q^4-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{24}(2q^4-3q^3-q^2+q-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
K_{10}	$\frac{1}{8}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-\frac{1}{8}(q^6+q^4+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{8}(2q^4+q^3+q^2+q+1)q^4\phi_1^4\phi_2^2\phi_3\phi_4$
K_{11}	$\frac{1}{8}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-\frac{1}{8}(q^6+q^4+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{8}(2q^4+q^3+q^2+q+1)q^4\phi_1^4\phi_2^2\phi_3\phi_4$
K_{12}	$\frac{1}{24}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$\frac{1}{24}(3q^6-q^4-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{24}(2q^4-3q^3-q^2+q-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
K_{13}	$\frac{1}{12}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$\frac{1}{12}(3q^6-q^4-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{12}(2q^4-3q^3-q^2+q-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
K_{14}	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$\frac{1}{4}(q^6-q^4-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}(q^3+q^2-q+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
K_{15}	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$\frac{1}{4}(q^6-q^4-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}(q^3+q^2-q+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
K_{16}	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-\frac{1}{4}(q^6+q^4+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4\phi_8$
K_{17}	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-\frac{1}{4}(q^6+q^4+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4\phi_8$
K_{18}	$\frac{1}{8}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$\frac{1}{8}(3q^6-q^4-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{8}(2q^4-3q^3-q^2+q-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
K_{19}	$\frac{1}{8}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-\frac{1}{8}(q^6+q^4+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{8}(2q^4+q^3+q^2+q+1)q^4\phi_1^4\phi_2^2\phi_3\phi_4$
K_{20}	$\frac{1}{8}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$\frac{1}{8}(3q^6-q^4-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{8}(2q^4-3q^3-q^2+q-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
K_{21}	$\frac{1}{8}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-\frac{1}{8}(q^6+q^4+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{8}(2q^4+q^3+q^2+q+1)q^4\phi_1^4\phi_2^2\phi_3\phi_4$
K_{22}	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-\frac{1}{4}(q^6+q^4+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{4}(2q^4+q^3+q^2+q+1)q^4\phi_1^4\phi_2^2\phi_3\phi_4$
K_{23}	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6\phi_8$	$-\frac{1}{3}(q^4+q^2-q+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
K_{24}	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6\phi_8$	$-\frac{1}{3}(q^4+q^2-q+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
K_{25}	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6\phi_8$	$-\frac{1}{3}(q^4+q^2-q+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
K_{26}	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$\frac{1}{4}(q^6-q^4-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}(q^3+q^2-q+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
K_{27}	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$\frac{1}{4}(q^6-q^4-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}(q^3+q^2-q+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
K_{28}	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-\frac{1}{4}(q^6+q^4+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4\phi_8$
K_{29}	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-\frac{1}{4}(q^6+q^4+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4\phi_8$
K_{30}	$q^3\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-q^3\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6\phi_8$	$(q^5-q^4-q^2+q-1)q^3\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
K_{31}	$q^3\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$(q^6-q^4-1)q^3\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-(q^3+q^2-q+1)q^3\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
K_{32}	$q^2\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6\phi_8$	$(q^5-q^4-q^2+q-1)q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4$
K_{33}	$\frac{1}{2}q\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$\frac{1}{2}(q^7-q^4-1)q\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}(2q^4+q^3+1)q\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4$
K_{34}	$\frac{1}{2}q\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$\frac{1}{2}(q^7-q^4-1)q\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}(2q^4+q^3+1)q\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4$
K_{35}	$\frac{1}{2}q\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-\frac{1}{2}(q^7+q^4+1)q\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{36}	$\frac{1}{2}q\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-\frac{1}{2}(q^7+q^4+1)q\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{37}	$\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6\phi_8$	$-\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6\phi_8$

Tabelle T.A.44: Werte projektiver Charaktere, Teil 1

	$c_{1,4}$	$c_{1,5}$
K_1	.	.
K_2	.	.
K_3	.	.
K_4	$q^{13}\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$	.
K_5	$q^{13}\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$	.
K_6	$-q^{10}\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$q^{10}\phi_1^2\phi_2^2$
K_7	$-q^9\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-q^9\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$
K_8	$q^9\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-q^9\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_6$
K_9	$\frac{1}{24}(2q^4+3q^3-q^2-q-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{24}(6q^6+q^4-q^2-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2$
K_{10}	$\frac{1}{8}(2q^4-q^3+q^2-q+1)q^4\phi_1^2\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{8}(2q^6+q^4-q^2-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2$
K_{11}	$\frac{1}{8}(2q^4-q^3+q^2-q+1)q^4\phi_1^2\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{8}(2q^6+q^4-q^2-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2$
K_{12}	$\frac{1}{24}(2q^4+3q^3-q^2-q-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{24}(6q^6+q^4-q^2-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2$
K_{13}	$\frac{1}{12}(2q^4+3q^3-q^2-q-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{12}(6q^6+q^4-q^2-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2$
K_{14}	$\frac{1}{4}(q^3-q^2-q-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}(2q^6-q^4-q^2-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2$
K_{15}	$\frac{1}{4}(q^3-q^2-q-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}(2q^6-q^4-q^2-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2$
K_{16}	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$
K_{17}	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$
K_{18}	$\frac{1}{8}(2q^4+3q^3-q^2-q-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{8}(6q^6+q^4-q^2-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2$
K_{19}	$\frac{1}{8}(2q^4-q^3+q^2-q+1)q^4\phi_1^2\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{8}(2q^6+q^4-q^2-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2$
K_{20}	$\frac{1}{8}(2q^4+3q^3-q^2-q-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{8}(6q^6+q^4-q^2-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2$
K_{21}	$\frac{1}{8}(2q^4-q^3+q^2-q+1)q^4\phi_1^2\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{8}(2q^6+q^4-q^2-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2$
K_{22}	$\frac{1}{4}(2q^4-q^3+q^2-q+1)q^4\phi_1^2\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}(2q^6+q^4-q^2-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2$
K_{23}	$-\frac{1}{3}(q^4+q^2+q+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{3}(2q^4+q^2+1)q^4\phi_1^2\phi_2^2$
K_{24}	$-\frac{1}{3}(q^4+q^2+q+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{3}(2q^4+q^2+1)q^4\phi_1^2\phi_2^2$
K_{25}	$-\frac{1}{3}(q^4+q^2+q+1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{3}(2q^4+q^2+1)q^4\phi_1^2\phi_2^2$
K_{26}	$\frac{1}{4}(q^3-q^2-q-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}(2q^6-q^4-q^2-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2$
K_{27}	$\frac{1}{4}(q^3-q^2-q-1)q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}(2q^6-q^4-q^2-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2$
K_{28}	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$
K_{29}	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$
K_{30}	$-(q^5+q^4+q^2+q+1)q^3\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-(2q^6-q^4-q^2-1)q^3\phi_1^2\phi_2^2$
K_{31}	$(q^3-q^2-q-1)q^3\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-(2q^6-q^4-q^2-1)q^3\phi_1^2\phi_2^2$
K_{32}	$-(q^5+q^4+q^2+q+1)q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-(2q^6-q^4-q^2-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$
K_{33}	$-\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}(q^5+q^4+q^3+q^2+1)q\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$
K_{34}	$-\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}(q^5+q^4+q^3+q^2+1)q\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$
K_{35}	$\frac{1}{2}(2q^4-q^3+1)q\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}(q^5-q^4+q^3-q^2-1)q\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{36}	$\frac{1}{2}(2q^4-q^3+1)q\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}(q^5-q^4+q^3-q^2-1)q\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{37}	$-\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6\phi_8$	$\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$

Tabelle T.A.45: Werte projektiver Charaktere, Teil 2

	$c_{1,6}$	$c_{1,7}$	$c_{1,8}$
K_1	.	.	.
K_2	.	.	.
K_3	.	.	.
K_4	.	.	.
K_5	.	.	.
K_6	.	.	.
K_7	$2q^9\phi_1^2\phi_2\phi_3$	.	.
K_8	.	.	$q^9\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$
K_9	$\frac{1}{24}(3q^3-2q^2-q+1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3$	$-\frac{1}{24}(3q^3+2q^2-q-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{6}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$
K_{10}	$-\frac{1}{8}(q^3-2q^2+q-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3$	$\frac{1}{8}(q^3+2q^2+q+1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_6$	.
K_{11}	$-\frac{1}{8}(q^3-2q^2+q-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3$	$\frac{1}{8}(q^3+2q^2+q+1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_6$	.
K_{12}	$\frac{1}{24}(3q^3-2q^2-q+1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3$	$-\frac{1}{24}(3q^3+2q^2-q-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{6}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$
K_{13}	$\frac{1}{12}(3q^3-2q^2-q+1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3$	$-\frac{1}{12}(3q^3+2q^2-q-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$
K_{14}	$-\frac{1}{4}(q^3+q+1)q^4\phi_1^3\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{4}(q^3+q-1)q^4\phi_1\phi_2^3\phi_6$	$\frac{1}{2}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$
K_{15}	$-\frac{1}{4}(q^3+q+1)q^4\phi_1^3\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{4}(q^3+q-1)q^4\phi_1\phi_2^3\phi_6$	$\frac{1}{2}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$
K_{16}	$\frac{1}{4}(q^4+q^3+q^2+1)q^4\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{4}(q^4-q^3+q^2+1)q^4\phi_1\phi_2^2\phi_6$	.
K_{17}	$\frac{1}{4}(q^4+q^3+q^2+1)q^4\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{4}(q^4-q^3+q^2+1)q^4\phi_1\phi_2^2\phi_6$	.
K_{18}	$\frac{1}{8}(3q^3-2q^2-q+1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3$	$-\frac{1}{8}(3q^3+2q^2-q-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$
K_{19}	$-\frac{1}{8}(q^3-2q^2+q-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3$	$\frac{1}{8}(q^3+2q^2+q+1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_6$	.
K_{20}	$\frac{1}{8}(3q^3-2q^2-q+1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3$	$-\frac{1}{8}(3q^3+2q^2-q-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$
K_{21}	$-\frac{1}{8}(q^3-2q^2+q-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3$	$\frac{1}{8}(q^3+2q^2+q+1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_6$	.
K_{22}	$-\frac{1}{4}(q^3-2q^2+q-1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3$	$\frac{1}{4}(q^3+2q^2+q+1)q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_6$	.
K_{23}	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$
K_{24}	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$
K_{25}	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$
K_{26}	$-\frac{1}{4}(q^3+q+1)q^4\phi_1^3\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{4}(q^3+q-1)q^4\phi_1\phi_2^3\phi_6$	$\frac{1}{2}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$
K_{27}	$-\frac{1}{4}(q^3+q+1)q^4\phi_1^3\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{4}(q^3+q-1)q^4\phi_1\phi_2^3\phi_6$	$\frac{1}{2}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$
K_{28}	$\frac{1}{4}(q^4+q^3+q^2+1)q^4\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{4}(q^4-q^3+q^2+1)q^4\phi_1\phi_2^2\phi_6$	.
K_{29}	$\frac{1}{4}(q^4+q^3+q^2+1)q^4\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{4}(q^4-q^3+q^2+1)q^4\phi_1\phi_2^2\phi_6$	.
K_{30}	$-(q^4-q^3-q^2+q-1)q^3\phi_1^2\phi_2^2\phi_3$	$-(q^4+q^3-q^2-q-1)q^3\phi_1^2\phi_2^2\phi_6$	$-q^3\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_6$
K_{31}	$-q^3\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_6$	$-q^3\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_6$	$-(q^2-2)q^3\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$
K_{32}	$-(q^4-q^3-q^2+q-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_3$	$-(q^4+q^3-q^2-q-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_6$	$-(2q^2-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$
K_{33}	$-\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_2^2\phi_3^2\phi_6$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_2^2\phi_3^2\phi_6$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^3\phi_3\phi_6$
K_{34}	$-\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_2^2\phi_3^2\phi_6$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_2^2\phi_3^2\phi_6$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^3\phi_3\phi_6$
K_{35}	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^3\phi_3\phi_6^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^3\phi_3\phi_6^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_6$
K_{36}	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^3\phi_3\phi_6^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^3\phi_3\phi_6^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_6$
K_{37}	$\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$

Tabelle T.A.46: Werte projektiver Charaktere, Teil 3

	$c_{1,9}$	$c_{1,10}$	$c_{1,11}$	$c_{1,12}$
K_1	.	.	.	.
K_2	.	.	.	.
K_3	.	.	.	.
K_4	.	.	.	.
K_5	.	.	.	.
K_6	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.
K_9	$-\frac{1}{24}(2q^2-1)(3q^2-1)q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{6}(2q^2-1)q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	.
K_{10}	$\frac{1}{8}(2q^2-1)q^4\phi_1\phi_2\phi_4$	.	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2\phi_4$
K_{11}	$\frac{1}{8}(2q^2-1)q^4\phi_1\phi_2\phi_4$	.	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2\phi_4$
K_{12}	$-\frac{1}{24}(2q^2-1)(3q^2-1)q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{6}(2q^2-1)q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	.
K_{13}	$-\frac{1}{12}(2q^2-1)(3q^2-1)q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}(2q^2-1)q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	.
K_{14}	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	.
K_{15}	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	.
K_{16}	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2\phi_4$	.	.	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2\phi_4$
K_{17}	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2\phi_4$	.	.	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2\phi_4$
K_{18}	$-\frac{1}{8}(2q^2-1)(3q^2-1)q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q^2-1)q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{3}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	.
K_{19}	$\frac{1}{8}(2q^2-1)q^4\phi_1\phi_2\phi_4$	.	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2\phi_4$
K_{20}	$-\frac{1}{8}(2q^2-1)(3q^2-1)q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q^2-1)q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{3}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	.
K_{21}	$\frac{1}{8}(2q^2-1)q^4\phi_1\phi_2\phi_4$	.	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2\phi_4$
K_{22}	$\frac{1}{4}(2q^2-1)q^4\phi_1\phi_2\phi_4$	.	$\frac{1}{2}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	$-q^4\phi_1\phi_2\phi_4$
K_{23}	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2\phi_4$	.	.
K_{24}	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2\phi_4$	.	.
K_{25}	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2\phi_4$	.	.
K_{26}	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	.
K_{27}	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	.
K_{28}	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2\phi_4$	.	.	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2\phi_4$
K_{29}	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2\phi_4$	.	.	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2\phi_4$
K_{30}	$q^3\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$q^3\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$q^3\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
K_{31}	$q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$2q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$2q^3\phi_1^2\phi_2^2$	.
K_{32}	$q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$(2q^2-1)q^2\phi_1\phi_2$	$q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
K_{33}	$\frac{1}{2}(q^4+q^3-1)q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^2\phi_3$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)q\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2\phi_4$
K_{34}	$\frac{1}{2}(q^4+q^3-1)q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^2\phi_3$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)q\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2\phi_4$
K_{35}	$\frac{1}{2}(q^4-q^3-1)q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}(2q^2-q+1)q\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2^2\phi_4$
K_{36}	$\frac{1}{2}(q^4-q^3-1)q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}(2q^2-q+1)q\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2^2\phi_4$
K_{37}	$-\phi_1\phi_2$	$-\phi_1\phi_2$	$\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$

Tabelle T.A.47: Werte projektiver Charaktere, Teil 4

	$c_{1,13}$	$c_{1,14}$	$c_{1,15}$	$c_{1,16}$
K_1	.	.	.	.
K_2	.	.	.	.
K_3	.	.	.	.
K_4	.	.	.	.
K_5	.	.	.	.
K_6	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.
K_9	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	.	$\frac{1}{24}q^4(q^2+23)$	$-\frac{1}{24}q^4\phi_1\phi_2$
K_{10}	.	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$
K_{11}	.	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$
K_{12}	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	.	$\frac{1}{24}q^4(q^2+23)$	$-\frac{1}{24}q^4\phi_1\phi_2$
K_{13}	$-q^4\phi_1\phi_2$	.	$\frac{1}{12}q^4(q^2+23)$	$-\frac{1}{12}q^4\phi_1\phi_2$
K_{14}	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4(q^2+3)$
K_{15}	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4(q^2+3)$
K_{16}	.	.	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$
K_{17}	.	.	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$
K_{18}	$-\frac{3}{2}q^4\phi_1\phi_2$	.	$\frac{1}{8}q^4(q^2+23)$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$
K_{19}	.	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$
K_{20}	$-\frac{3}{2}q^4\phi_1\phi_2$	.	$\frac{1}{8}q^4(q^2+23)$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$
K_{21}	.	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$
K_{22}	.	$-q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$
K_{23}	.	.	$\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$
K_{24}	.	.	$\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$
K_{25}	.	.	$\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$
K_{26}	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4(q^2+3)$
K_{27}	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4(q^2+3)$
K_{28}	.	.	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$
K_{29}	.	.	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$
K_{30}	$q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$q^3\phi_1^2\phi_2^2$
K_{31}	$3q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$4q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$2q^3\phi_1^2\phi_2^2$
K_{32}	$(3q^2-1)q^2\phi_1\phi_2$	$q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$(5q^2-1)q^2\phi_1\phi_2$	$(3q^2-1)q^2\phi_1\phi_2$
K_{33}	$\frac{1}{2}(q^3-q-1)q\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{2}(q^3+2q^2+q+1)q\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^3-2q^2-3q-1)q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^3-q-1)q\phi_1\phi_2$
K_{34}	$\frac{1}{2}(q^3-q-1)q\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{2}(q^3+2q^2+q+1)q\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^3-2q^2-3q-1)q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^3-q-1)q\phi_1\phi_2$
K_{35}	$\frac{1}{2}(q^3-q+1)q\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^3-2q^2+q-1)q\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}(q^3+2q^2-3q+1)q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^3-q+1)q\phi_1\phi_2$
K_{36}	$\frac{1}{2}(q^3-q+1)q\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^3-2q^2+q-1)q\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}(q^3+2q^2-3q+1)q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^3-q+1)q\phi_1\phi_2$
K_{37}	$\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$(2q^4-1)\phi_1\phi_2$	$-\phi_1\phi_2$

Tabelle T.A.48: Werte projektiver Charaktere, Teil 5

	$c_{1,17}$	$c_{1,18}$	$c_{1,19}$	$c_{1,20}$	$c_{1,21}$
K_1	.	.	.	.	.
K_2	.	.	.	.	.
K_3	.	.	.	.	.
K_4	.	.	.	.	.
K_5	.	.	.	.	.
K_6	.	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.	.
K_9	$\frac{1}{24}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{24}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{24}q^4\phi_1\phi_2$	.	.
K_{10}	$\frac{1}{8}q^4(q^2+7)$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	.	.
K_{11}	$\frac{1}{8}q^4(q^2+7)$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	.	.
K_{12}	$\frac{1}{24}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{24}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{24}q^4\phi_1\phi_2$	.	.
K_{13}	$\frac{1}{12}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{12}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{12}q^4\phi_1\phi_2$	.	.
K_{14}	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	.	.
K_{15}	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	.	.
K_{16}	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4(q^2+3)$	.	.
K_{17}	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4(q^2+3)$	.	.
K_{18}	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	.	.
K_{19}	$\frac{1}{8}q^4(q^2+7)$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	.	.
K_{20}	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	.	.
K_{21}	$\frac{1}{8}q^4(q^2+7)$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	.	.
K_{22}	$\frac{1}{4}q^4(q^2+7)$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	.	.
K_{23}	$\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}q^4(q^2+2)$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	.	.
K_{24}	$\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}q^4(q^2+2)$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	.	.
K_{25}	$\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}q^4(q^2+2)$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	.	.
K_{26}	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	.	.
K_{27}	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	.	.
K_{28}	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4(q^2+3)$	.	.
K_{29}	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4(q^2+3)$	.	.
K_{30}	$q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$q^3\phi_1^2\phi_2^2$	.	$-q^3\phi_1\phi_2$
K_{31}	.	$q^3\phi_1^2\phi_2^2$	.	$-q^3\phi_1\phi_2$	.
K_{32}	$q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$(2q^2-1)q^2\phi_1\phi_2$	$q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-q^2\phi_1\phi_2$	$-2q^2\phi_1\phi_2$
K_{33}	$\frac{1}{2}(q^3-2q^2+q-1)q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^3+q^2-1)q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^3+q-1)q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$
K_{34}	$\frac{1}{2}(q^3-2q^2+q-1)q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^3+q^2-1)q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^3+q-1)q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$
K_{35}	$-\frac{1}{2}(q^3+2q^2+q+1)q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^3-q^2+1)q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^3+q+1)q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$
K_{36}	$-\frac{1}{2}(q^3+2q^2+q+1)q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^3-q^2+1)q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^3+q+1)q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$
K_{37}	$(2q^4-1)\phi_1\phi_2$	$-\phi_1\phi_2\phi_8$	$-\phi_1\phi_2$	$-\phi_1\phi_2$	$-\phi_1\phi_2$

Tabelle T.A.49: Werte projektiver Charaktere, Teil 6

	$c_{1,22}$	$c_{1,23}$	$c_{1,24}$	$c_{1,25}$	$c_{1,26}$	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	$c_{2,3}$
K_1	.	.	.	.	.	.	.	.
K_2	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}q^6\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}q^6\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$	.
K_3	.	.	.	.	.	$-\frac{1}{2}q^6\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{2}q^6\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$	.
K_4	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}q^6\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}q^6\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$	.
K_5	.	.	.	.	.	$-\frac{1}{2}q^6\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{2}q^6\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$	.
K_6	.	.	.	.	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.	.	.	.	.
K_9	.	.	.	.	.	$\frac{1}{4}q\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{4}q\phi_1^4\phi_2^4\phi_4$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^4$
K_{10}	.	.	.	.	.	$\frac{1}{4}q\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^2\phi_4$
K_{11}	.	.	.	.	.	$-\frac{1}{4}q\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$	$\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^2\phi_4$
K_{12}	.	.	.	.	.	$-\frac{1}{4}q\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^4\phi_2^4\phi_4$	$\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^4$
K_{13}	.	.	.	.	.	.	.	.
K_{14}	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}q\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$
K_{15}	.	.	.	.	.	$-\frac{1}{2}q\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$
K_{16}	.	.	.	.	.	.	.	.
K_{17}	.	.	.	.	.	.	.	.
K_{18}	.	.	.	.	.	$\frac{1}{4}q\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{4}q\phi_1^4\phi_2^4\phi_4$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^4$
K_{19}	.	.	.	.	.	$-\frac{1}{4}q\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$	$\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^2\phi_4$
K_{20}	.	.	.	.	.	$-\frac{1}{4}q\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^4\phi_2^4\phi_4$	$\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^4$
K_{21}	.	.	.	.	.	$\frac{1}{4}q\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^2\phi_4$
K_{22}	.	.	.	.	.	.	.	.
K_{23}	.	.	.	.	.	.	.	.
K_{24}	.	.	.	.	.	.	.	.
K_{25}	.	.	.	.	.	.	.	.
K_{26}	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}q^3\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1^3\phi_2^2$
K_{27}	.	.	.	.	.	.	$-\frac{1}{2}q^3\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1^3\phi_2^2$
K_{28}	.	.	.	.	.	.	.	.
K_{29}	.	.	.	.	.	.	.	.
K_{30}	.	.	.	.	.	.	.	.
K_{31}	.	.	.	.	.	.	.	.
K_{32}	$2q^2$	.	.	.	.	.	.	.
K_{33}	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	q	.	.	.	.	.
K_{34}	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	q	.	.	.	.	.
K_{35}	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	.	q	.	.	.	.
K_{36}	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	.	q	.	.	.	.
K_{37}	$-\phi_1\phi_2$	$-\phi_1\phi_2$	$-\phi_1\phi_2$	$-\phi_1\phi_2$	1	.	.	.

Tabelle T.A.50: Werte projektiver Charaktere, Teil 7

	$c_{2,4}$	$c_{2,5}$	$c_{2,6}$	$c_{2,7}$	$c_{2,8}$	$c_{2,9}$	$c_{2,10}$
K_1	.	.	.	.	.	.	.
K_2	.	.	.	.	.	.	.
K_3	.	.	.	.	.	.	.
K_4	.	.	.	.	.	.	.
K_5	.	.	.	.	.	.	.
K_6	.	.	.	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.	.	.	.
K_9	$\frac{1}{4}q\phi_1^4\phi_2^3$	$-\frac{1}{4}(2q^2-1)q\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	.	.
K_{10}	$\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^3\phi_4$	$\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^2$	.	$\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^2$	.	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	.
K_{11}	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^3\phi_4$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^2$	.	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^2$	.	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	.
K_{12}	$-\frac{1}{4}q\phi_1^4\phi_2^3$	$\frac{1}{4}(2q^2-1)q\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	.	.
K_{13}	.	.	.	.	.	.	.
K_{14}	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_2^3$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	.
K_{15}	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$	$\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_2^3$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	.
K_{16}	.	.	.	.	.	.	.
K_{17}	.	.	.	.	.	.	.
K_{18}	$\frac{1}{4}q\phi_1^4\phi_2^3$	$-\frac{1}{4}(2q^2-1)q\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	.	.
K_{19}	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^3\phi_4$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^2$	.	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^2$	.	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	.
K_{20}	$-\frac{1}{4}q\phi_1^4\phi_2^3$	$\frac{1}{4}(2q^2-1)q\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	.	.
K_{21}	$\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^3\phi_4$	$\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^2$	.	$\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^2$	.	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	.
K_{22}	.	.	.	.	.	.	.
K_{23}	.	.	.	.	.	.	.
K_{24}	.	.	.	.	.	.	.
K_{25}	.	.	.	.	.	.	.
K_{26}	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1^2\phi_2^3$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^2$	.	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	.
K_{27}	$\frac{1}{2}q^2\phi_1^2\phi_2^3$	$\frac{1}{2}q^3\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^2$	.	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	.
K_{28}	.	.	.	.	.	.	.
K_{29}	.	.	.	.	.	.	.
K_{30}	.	.	.	.	.	.	.
K_{31}	.	.	.	.	.	.	.
K_{32}	.	.	.	.	.	.	.
K_{33}	.	.	.	.	.	.	.
K_{34}	.	.	.	.	.	.	.
K_{35}	.	.	.	.	.	.	.
K_{36}	.	.	.	.	.	.	.
K_{37}	.	.	.	.	.	.	.

Tabelle T.A.51: Werte projektiver Charaktere, Teil 8

	$c_{2,11}$	$c_{2,12}$	$c_{2,13}$	$c_{2,14}$	$c_{2,15}$	$c_{2,16}$
K_1	.	.	.	.	.	.
K_2	$-\frac{1}{2}q^6\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{2}q^6\phi_1^2\phi_2^3\phi_4$	$-\frac{1}{2}q^6\phi_1^3\phi_2^2\phi_4$	.	.	.
K_3	$\frac{1}{2}q^6\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}q^6\phi_1^2\phi_2^3\phi_4$	$\frac{1}{2}q^6\phi_1^3\phi_2^2\phi_4$	.	.	.
K_4	$-\frac{1}{2}q^6\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}q^6\phi_1^3\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{2}q^6\phi_1^2\phi_2^3\phi_4$	.	.	.
K_5	$\frac{1}{2}q^6\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{2}q^6\phi_1^3\phi_2^2\phi_4$	$-\frac{1}{2}q^6\phi_1^2\phi_2^3\phi_4$	.	.	.
K_6	.	.	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.	.	.
K_9	$-\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$	$\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^3$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^2$	$\frac{1}{4}(q^2+q-1)q\phi_1\phi_2^2$
K_{10}	$-\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^2\phi_4^2$	$\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^2\phi_4^2$	$\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2^2\phi_4$	$-\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2^2\phi_6$
K_{11}	$\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^2\phi_4^2$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^2\phi_4^2$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2^2\phi_6$
K_{12}	$\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$	$\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^3$	$\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}(q^2+q-1)q\phi_1\phi_2^2$
K_{13}	.	.	.	.	.	.
K_{14}	$-\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^2$
K_{15}	$\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^2$
K_{16}	.	.	.	.	.	.
K_{17}	.	.	.	.	.	.
K_{18}	$-\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$	$\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^3$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^2$	$\frac{1}{4}(q^2+q-1)q\phi_1\phi_2^2$
K_{19}	$\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^2\phi_4^2$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^2\phi_4^2$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2^2\phi_6$
K_{20}	$\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$	$\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^3$	$\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}(q^2+q-1)q\phi_1\phi_2^2$
K_{21}	$-\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^2\phi_4^2$	$\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2^2\phi_4^2$	$\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2^2\phi_4$	$-\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2^2\phi_6$
K_{22}	.	.	.	.	.	.
K_{23}	.	.	.	.	.	.
K_{24}	.	.	.	.	.	.
K_{25}	.	.	.	.	.	.
K_{26}	.	$-\frac{1}{2}q^3\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_1^2\phi_2$
K_{27}	.	$\frac{1}{2}q^3\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{2}q^3\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q^3\phi_1^2\phi_2$
K_{28}	.	.	.	.	.	.
K_{29}	.	.	.	.	.	.
K_{30}	.	.	.	.	.	.
K_{31}	.	.	.	.	.	.
K_{32}	.	.	.	.	.	.
K_{33}	.	.	.	.	.	.
K_{34}	.	.	.	.	.	.
K_{35}	.	.	.	.	.	.
K_{36}	.	.	.	.	.	.
K_{37}	.	.	.	.	.	.

Tabelle T.A.52: Werte projektiver Charaktere, Teil 9

	$c_{2,17}$	$c_{2,18}$	$c_{2,19}$	$c_{2,20}$	$c_{2,21}$ ($q \equiv 1 \bmod 4$)	$c_{2,21}$ ($q \equiv 3 \bmod 4$)
K_1	.	.	.	.	.	.
K_2	.	.	.	.	.	.
K_3	.	.	.	.	.	.
K_4	.	.	.	.	.	.
K_5	.	.	.	.	.	.
K_6	.	.	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.	.	.
K_9	$-\frac{1}{4}(q^2-q-1)q\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q(q^2+q+2)$	$-\frac{1}{4}(q-2)q\phi_2$
K_{10}	$\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2^2$	.	$\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_2$
K_{11}	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2^2$	.	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2$
K_{12}	$\frac{1}{4}(q^2-q-1)q\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q(q^2+q+2)$	$\frac{1}{4}(q-2)q\phi_2$
K_{13}	.	.	.	.	.	.
K_{14}	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_4$
K_{15}	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_4$
K_{16}	.	.	.	.	.	.
K_{17}	.	.	.	.	.	.
K_{18}	$-\frac{1}{4}(q^2-q-1)q\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q(q^2+q+2)$	$-\frac{1}{4}(q-2)q\phi_2$
K_{19}	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2^2$	.	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2$
K_{20}	$\frac{1}{4}(q^2-q-1)q\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q(q^2+q+2)$	$\frac{1}{4}(q-2)q\phi_2$
K_{21}	$\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2^2$	.	$\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_2$
K_{22}	.	.	.	.	.	.
K_{23}	.	.	.	.	.	.
K_{24}	.	.	.	.	.	.
K_{25}	.	.	.	.	.	.
K_{26}	$\frac{1}{2}q^3\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$
K_{27}	$-\frac{1}{2}q^3\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_1$
K_{28}	.	.	.	.	.	.
K_{29}	.	.	.	.	.	.
K_{30}	.	.	.	.	.	.
K_{31}	.	.	.	.	.	.
K_{32}	.	.	.	.	.	.
K_{33}	.	.	.	.	.	.
K_{34}	.	.	.	.	.	.
K_{35}	.	.	.	.	.	.
K_{36}	.	.	.	.	.	.
K_{37}	.	.	.	.	.	.

Tabelle T.A.53: Werte projektiver Charaktere, Teil 10

	$c_{2,22}$ ($q \equiv 1 \bmod 4$)	$c_{2,22}$ ($q \equiv 3 \bmod 4$)	$c_{2,23}$ ($q \equiv 1 \bmod 4$)	$c_{2,23}$ ($q \equiv 3 \bmod 4$)
K_1	.	.	.	.
K_2	.	.	.	.
K_3	.	.	.	.
K_4	.	.	.	.
K_5	.	.	.	.
K_6	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.
K_9	$-\frac{1}{4}(q+2)q\phi_1$	$\frac{1}{4}q(q^2-q+2)$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2$
K_{10}	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}(q+2)q\phi_1$	$\frac{1}{4}q(q^2-q+2)$
K_{11}	$\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_2$	$\frac{1}{4}(q+2)q\phi_1$	$-\frac{1}{4}q(q^2-q+2)$
K_{12}	$\frac{1}{4}(q+2)q\phi_1$	$-\frac{1}{4}q(q^2-q+2)$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_2$
K_{13}	.	.	.	.
K_{14}	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$
K_{15}	$-\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$
K_{16}	.	.	.	.
K_{17}	.	.	.	.
K_{18}	$-\frac{1}{4}(q+2)q\phi_1$	$\frac{1}{4}q(q^2-q+2)$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2$
K_{19}	$\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_2$	$\frac{1}{4}(q+2)q\phi_1$	$-\frac{1}{4}q(q^2-q+2)$
K_{20}	$\frac{1}{4}(q+2)q\phi_1$	$-\frac{1}{4}q(q^2-q+2)$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_2$
K_{21}	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}(q+2)q\phi_1$	$\frac{1}{4}q(q^2-q+2)$
K_{22}	.	.	.	.
K_{23}	.	.	.	.
K_{24}	.	.	.	.
K_{25}	.	.	.	.
K_{26}	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$
K_{27}	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$
K_{28}	.	.	.	.
K_{29}	.	.	.	.
K_{30}	.	.	.	.
K_{31}	.	.	.	.
K_{32}	.	.	.	.
K_{33}	.	.	.	.
K_{34}	.	.	.	.
K_{35}	.	.	.	.
K_{36}	.	.	.	.
K_{37}	.	.	.	.

Tabelle T.A.54: Werte projektiver Charaktere, Teil 11

	$c_{2,24}$ ($q \equiv 1 \bmod 4$)	$c_{2,24}$ ($q \equiv 3 \bmod 4$)	$c_{2,25}$	$c_{2,26}$	$c_{3,1}$	$c_{3,2}$
K_1	.	.	.	.	.	.
K_2	.	.	.	.	.	.
K_3	.	.	.	.	.	.
K_4	.	.	.	.	.	.
K_5	.	.	.	.	.	.
K_6	.	.	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.	.	.
K_9	$\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_2$	.	.	$\frac{1}{8}q^2\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{10}	$\frac{1}{4}q(q^2+q+2)$	$-\frac{1}{4}(q-2)q\phi_2$	.	.	$\frac{3}{8}q^2\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$-\frac{3}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{11}	$-\frac{1}{4}q(q^2+q+2)$	$\frac{1}{4}(q-2)q\phi_2$	.	.	$\frac{3}{8}q^2\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$-\frac{3}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{12}	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2$	.	.	$\frac{1}{8}q^2\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{13}	.	.	.	.	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{14}	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	.	.	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{15}	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_4$	.	.	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{16}	.	.	.	.	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{17}	.	.	.	.	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{18}	$\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_2$	.	.	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{19}	$-\frac{1}{4}q(q^2+q+2)$	$\frac{1}{4}(q-2)q\phi_2$	.	.	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{20}	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2$	.	.	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{21}	$\frac{1}{4}q(q^2+q+2)$	$-\frac{1}{4}(q-2)q\phi_2$	.	.	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{22}	.	.	.	.	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{23}	.	.	.	.	.	.
K_{24}	.	.	.	.	.	.
K_{25}	.	.	.	.	.	.
K_{26}	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	.	.	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{27}	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.	.	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{28}	.	.	.	.	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{29}	.	.	.	.	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{30}	.	.	.	.	.	.
K_{31}	.	.	.	.	.	.
K_{32}	.	.	.	.	.	.
K_{33}	.	.	.	.	$\frac{1}{2}\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$-\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{34}	.	.	.	.	$-\frac{1}{2}\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{35}	.	.	.	.	$\frac{1}{2}\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$-\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{36}	.	.	.	.	$-\frac{1}{2}\phi_1^4\phi_2^4\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
K_{37}	.	.	.	.	.	.

Tabelle T.A.55: Werte projektiver Charaktere, Teil 12

	$c_{3,3}$	$c_{3,4}$	$c_{3,5}$
K_1	.	.	.
K_2	.	.	.
K_3	.	.	.
K_4	.	.	.
K_5	.	.	.
K_6	.	.	.
K_7	.	.	.
K_8	.	.	.
K_9	$\frac{1}{8}q^2\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4$	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{8}(3q^4+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
K_{10}	$\frac{3}{8}q^2\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4$	$-\frac{3}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$-\frac{3}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$
K_{11}	$\frac{3}{8}q^2\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4$	$-\frac{3}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$-\frac{3}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$
K_{12}	$\frac{1}{8}q^2\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4$	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{8}(3q^4+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
K_{13}	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{4}(3q^4+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
K_{14}	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4^2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^3\phi_4^2\phi_6$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4\phi_8$
K_{15}	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4^2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^3\phi_4^2\phi_6$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4\phi_8$
K_{16}	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4^2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^3\phi_4^2\phi_6$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$
K_{17}	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4^2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^3\phi_4^2\phi_6$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$
K_{18}	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{8}(3q^4+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
K_{19}	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$
K_{20}	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{8}(3q^4+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
K_{21}	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$
K_{22}	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$
K_{23}	.	.	.
K_{24}	.	.	.
K_{25}	.	.	.
K_{26}	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4^2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^3\phi_4^2\phi_6$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4\phi_8$
K_{27}	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4^2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^3\phi_4^2\phi_6$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4\phi_8$
K_{28}	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4^2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^3\phi_4^2\phi_6$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$
K_{29}	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4^2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^3\phi_4^2\phi_6$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$
K_{30}	.	.	.
K_{31}	.	.	.
K_{32}	.	.	.
K_{33}	$-\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_{10}$
K_{34}	$\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_{10}$
K_{35}	$-\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^2\phi_4\phi_5$
K_{36}	$\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^2\phi_4\phi_5$
K_{37}	.	.	.

Tabelle T.A.56: Werte projektiver Charaktere, Teil 13

	$c_{3,6}$	$c_{3,7}$	$c_{3,8}$
K_1	.	.	.
K_2	.	.	.
K_3	.	.	.
K_4	.	.	.
K_5	.	.	.
K_6	.	.	.
K_7	.	.	.
K_8	.	.	.
K_9	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$	$-\frac{1}{8}(2q^3-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{8}(2q^3+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$
K_{10}	$\frac{1}{8}(q^4+3)q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$-\frac{1}{8}(6q^4+2q^3-3q-3)q^2\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{8}(6q^4-2q^3+3q-3)q^2\phi_1\phi_2^2$
K_{11}	$\frac{1}{8}(q^4+3)q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$-\frac{1}{8}(6q^4+2q^3-3q-3)q^2\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{8}(6q^4-2q^3+3q-3)q^2\phi_1\phi_2^2$
K_{12}	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$	$-\frac{1}{8}(2q^3-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{8}(2q^3+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$
K_{13}	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$	$-\frac{1}{4}(2q^3-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}(2q^3+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$
K_{14}	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4\phi_8$	$\frac{1}{4}(2q^2+q+1)q^2\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}(2q^2-q+1)q^2\phi_1\phi_2^2$
K_{15}	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4\phi_8$	$\frac{1}{4}(2q^2+q+1)q^2\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}(2q^2-q+1)q^2\phi_1\phi_2^2$
K_{16}	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$	$\frac{1}{4}(2q^2+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}(2q^2+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$
K_{17}	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$	$\frac{1}{4}(2q^2+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}(2q^2+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$
K_{18}	$\frac{1}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$	$\frac{1}{8}(2q^3-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{8}(2q^3+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$
K_{19}	$\frac{1}{8}(5q^4-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{8}(2q^4-2q^3-q-1)q^2\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{8}(2q^4+2q^3+q-1)q^2\phi_1\phi_2^2$
K_{20}	$\frac{1}{8}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$	$\frac{1}{8}(2q^3-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{8}(2q^3+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$
K_{21}	$\frac{1}{8}(5q^4-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{8}(2q^4-2q^3-q-1)q^2\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{8}(2q^4+2q^3+q-1)q^2\phi_1\phi_2^2$
K_{22}	$-\frac{1}{4}(3q^4+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{4}(2q^3-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}(2q^3+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$
K_{23}	.	.	.
K_{24}	.	.	.
K_{25}	.	.	.
K_{26}	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4\phi_8$	$-\frac{1}{4}(2q^2+q+1)q^2\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{4}(2q^2-q+1)q^2\phi_1\phi_2^2$
K_{27}	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_4\phi_8$	$-\frac{1}{4}(2q^2+q+1)q^2\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{4}(2q^2-q+1)q^2\phi_1\phi_2^2$
K_{28}	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$	$-\frac{1}{4}(2q^2+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}(2q^2+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$
K_{29}	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3\phi_4^2$	$-\frac{1}{4}(2q^2+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}(2q^2+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$
K_{30}	.	.	.
K_{31}	.	.	.
K_{32}	.	.	.
K_{33}	$-\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^2\phi_4\phi_5$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
K_{34}	$\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^2\phi_4\phi_5$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
K_{35}	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_{10}$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
K_{36}	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_{10}$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
K_{37}	.	.	.

Tabelle T.A.57: Werte projektiver Charaktere, Teil 14

	$c_{3,9}$	$c_{3,10}$	$c_{3,11}$	$c_{3,12}$	$c_{3,13}$
K_1	.	.	.	.	.
K_2	.	.	.	.	.
K_3	.	.	.	.	.
K_4	.	.	.	.	.
K_5	.	.	.	.	.
K_6	.	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.	.
K_9	$-\frac{1}{8}(q^2-q-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{8}(q^2+q-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{8}(3q^2-1)q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	.
K_{10}	$\frac{1}{8}(q^2+3q+3)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{8}(q^2-3q+3)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{8}(5q^2-3)q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2\phi_4$
K_{11}	$\frac{1}{8}(q^2+3q+3)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{8}(q^2-3q+3)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{8}(5q^2-3)q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2\phi_4$
K_{12}	$-\frac{1}{8}(q^2-q-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{8}(q^2+q-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{8}(3q^2-1)q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	.
K_{13}	$-\frac{1}{4}(q^2-q-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}(q^2+q-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}(3q^2-1)q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	.
K_{14}	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2^3\phi_6$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	.
K_{15}	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2^3\phi_6$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	.
K_{16}	$\frac{1}{4}(q^3+2q^2+1)q^2\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{4}(q^3-2q^2-1)q^2\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2\phi_4$	.	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2\phi_4$
K_{17}	$\frac{1}{4}(q^3+2q^2+1)q^2\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{4}(q^3-2q^2-1)q^2\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2\phi_4$	.	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2\phi_4$
K_{18}	$\frac{1}{8}(q^2-q-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{8}(q^2+q-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{8}(3q^2-1)q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	.
K_{19}	$-\frac{1}{8}(3q^2+q+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{8}(3q^2-q+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2\phi_4$
K_{20}	$\frac{1}{8}(q^2-q-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{8}(q^2+q-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{8}(3q^2-1)q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	.
K_{21}	$-\frac{1}{8}(3q^2+q+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{8}(3q^2-q+1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2\phi_4$
K_{22}	$\frac{1}{4}(q^2-q-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}(q^2+q-1)q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}(3q^2-1)q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	.
K_{23}	.	.	.	.	.
K_{24}	.	.	.	.	.
K_{25}	.	.	.	.	.
K_{26}	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2^3\phi_6$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	.
K_{27}	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2^3\phi_6$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	.
K_{28}	$-\frac{1}{4}(q^3+2q^2+1)q^2\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}(q^3-2q^2-1)q^2\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2\phi_4$	.	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2\phi_4$
K_{29}	$-\frac{1}{4}(q^3+2q^2+1)q^2\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}(q^3-2q^2-1)q^2\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2\phi_4$	.	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2\phi_4$
K_{30}	.	.	.	.	.
K_{31}	.	.	.	.	.
K_{32}	.	.	.	.	.
K_{33}	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
K_{34}	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
K_{35}	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
K_{36}	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
K_{37}	.	.	.	.	.

Tabelle T.A.58: Werte projektiver Charaktere, Teil 15

	$c_{3,14}$	$c_{3,15}$	$c_{3,16}$	$c_{3,17}$	$c_{3,18}$	$c_{3,19}$
K_1	.	.	.	.	.	.
K_2	.	.	.	.	.	.
K_3	.	.	.	.	.	.
K_4	.	.	.	.	.	.
K_5	.	.	.	.	.	.
K_6	.	.	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.	.	.
K_9	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{8}(q+3)q^2\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$
K_{10}	$\frac{1}{4}(q-3)q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}(q+3)q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{8}(q+5)q^2\phi_1$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$
K_{11}	$\frac{1}{4}(q-3)q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}(q+3)q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{8}(q+5)q^2\phi_1$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$
K_{12}	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{8}(q+3)q^2\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$
K_{13}	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{4}(q+3)q^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$
K_{14}	.	.	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2(q^2+3)$
K_{15}	.	.	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2(q^2+3)$
K_{16}	.	.	.	.	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$
K_{17}	.	.	.	.	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$
K_{18}	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{8}(q+3)q^2\phi_2$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$
K_{19}	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{8}(3q-1)q^2\phi_1$	$-\frac{3}{8}q^2\phi_1\phi_2$
K_{20}	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{8}(q+3)q^2\phi_2$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$
K_{21}	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{8}(3q-1)q^2\phi_1$	$-\frac{3}{8}q^2\phi_1\phi_2$
K_{22}	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}(q-3)q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$
K_{23}	.	.	.	.	.	.
K_{24}	.	.	.	.	.	.
K_{25}	.	.	.	.	.	.
K_{26}	.	.	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2(q^2+3)$
K_{27}	.	.	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2(q^2+3)$
K_{28}	.	.	.	.	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$
K_{29}	.	.	.	.	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$
K_{30}	.	.	.	.	.	.
K_{31}	.	.	.	.	.	.
K_{32}	.	.	.	.	.	.
K_{33}	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}(2q^2+1)\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$
K_{34}	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}(2q^2+1)\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$
K_{35}	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{2}(2q^2-1)\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$
K_{36}	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{2}(2q^2-1)\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$
K_{37}	.	.	.	.	.	.

Tabelle T.A.59: Werte projektiver Charaktere, Teil 16

	$c_{3,20}$	$c_{3,21}$	$c_{3,22}$	$c_{3,23}$	$c_{3,24}$	$c_{3,25}$	$c_{3,26}$
K_1	.	.	.	.	.	.	.
K_2	.	.	.	.	.	.	.
K_3	.	.	.	.	.	.	.
K_4	.	.	.	.	.	.	.
K_5	.	.	.	.	.	.	.
K_6	.	.	.	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.	.	.	.
K_9	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}(q-3)q^2\phi_1$	.	.	.	.
K_{10}	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^2(q^2+7)$	$-\frac{1}{8}(q-5)q^2\phi_2$	.	.	.	.
K_{11}	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^2(q^2+7)$	$-\frac{1}{8}(q-5)q^2\phi_2$	.	.	.	.
K_{12}	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}(q-3)q^2\phi_1$	.	.	.	.
K_{13}	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}(q-3)q^2\phi_1$	.	.	.	.
K_{14}	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	.	.	.	.
K_{15}	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	.	.	.	.
K_{16}	$\frac{1}{4}q^2(q^2+3)$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	.	.	.	.
K_{17}	$\frac{1}{4}q^2(q^2+3)$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	.	.	.	.
K_{18}	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}(q-3)q^2\phi_1$	.	.	.	.
K_{19}	$\frac{3}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^2(3q^2+5)$	$\frac{1}{8}(3q+1)q^2\phi_2$	.	.	.	.
K_{20}	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}(q-3)q^2\phi_1$	.	.	.	.
K_{21}	$\frac{3}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^2(3q^2+5)$	$\frac{1}{8}(3q+1)q^2\phi_2$	.	.	.	.
K_{22}	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}(q+3)q^2\phi_2$	.	.	.	.
K_{23}	.	.	.	.	.	.	.
K_{24}	.	.	.	.	.	.	.
K_{25}	.	.	.	.	.	.	.
K_{26}	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	.	.	.	.
K_{27}	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	.	.	.	.
K_{28}	$-\frac{1}{4}q^2(q^2+3)$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	.	.	.	.
K_{29}	$-\frac{1}{4}q^2(q^2+3)$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	.	.	.	.
K_{30}	.	.	.	.	.	.	.
K_{31}	.	.	.	.	.	.	.
K_{32}	.	.	.	.	.	.	.
K_{33}	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q^2-1)\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$
K_{34}	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}(2q^2-1)\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$
K_{35}	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}(2q^2+1)\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$
K_{36}	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q^2+1)\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
K_{37}	.	.	.	.	.	.	.

Tabelle T.A.60: Werte projektiver Charaktere, Teil 17

	$c_{4,1}$	$c_{5,1}$	$c_{4,2}$	$c_{5,2}$
K_1	.	.	.	.
K_2	.	.	.	.
K_3	.	.	.	.
K_4	.	.	.	.
K_5	.	.	.	.
K_6	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.
K_9	$\frac{1}{3}\phi_1^4\phi_2^2\phi_3^2$	$\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2^4\phi_6^2$	$-\frac{1}{3}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{10}	.	.	.	.
K_{11}	.	.	.	.
K_{12}	$\frac{1}{3}\phi_1^4\phi_2^2\phi_3^2$	$\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2^4\phi_6^2$	$-\frac{1}{3}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{13}	$-\frac{1}{3}\phi_1^4\phi_2^2\phi_3^2$	$-\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2^4\phi_6^2$	$\frac{1}{3}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$-\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{14}	.	.	.	.
K_{15}	.	.	.	.
K_{16}	.	.	.	.
K_{17}	.	.	.	.
K_{18}	.	.	.	.
K_{19}	.	.	.	.
K_{20}	.	.	.	.
K_{21}	.	.	.	.
K_{22}	.	.	.	.
K_{23}	$\frac{2}{3}\phi_1^4\phi_2^2\phi_3^2$	$\frac{2}{3}\phi_1^2\phi_2^4\phi_6^2$	$-\frac{2}{3}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$\frac{2}{3}\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{24}	$\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1^4\phi_2^2\phi_3^2$	$\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1^2\phi_2^4\phi_6^2$	$-\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{25}	$\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1^4\phi_2^2\phi_3^2$	$\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1^2\phi_2^4\phi_6^2$	$-\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{26}	.	.	.	.
K_{27}	.	.	.	.
K_{28}	.	.	.	.
K_{29}	.	.	.	.
K_{30}	.	.	.	.
K_{31}	.	.	.	.
K_{32}	.	.	.	.
K_{33}	.	.	.	.
K_{34}	.	.	.	.
K_{35}	.	.	.	.
K_{36}	.	.	.	.
K_{37}	.	.	.	.

Tabelle T.A.61: Werte projektiver Charaktere, Teil 18

	$c_{4,3}$	$c_{5,3}$	$c_{4,4}$	$c_{5,4}$
K_1	.	.	.	.
K_2	.	.	.	.
K_3	.	.	.	.
K_4	.	.	.	.
K_5	.	.	.	.
K_6	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.
K_9	$\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{3}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{10}	.	.	.	.
K_{11}	.	.	.	.
K_{12}	$\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{3}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{13}	$-\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{3}\phi_1\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{3}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$-\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{14}	.	.	.	.
K_{15}	.	.	.	.
K_{16}	.	.	.	.
K_{17}	.	.	.	.
K_{18}	.	.	.	.
K_{19}	.	.	.	.
K_{20}	.	.	.	.
K_{21}	.	.	.	.
K_{22}	.	.	.	.
K_{23}	$\frac{2}{3}\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$-\frac{2}{3}\phi_1\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{2}{3}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$\frac{2}{3}\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{24}	$\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{25}	$\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{26}	.	.	.	.
K_{27}	.	.	.	.
K_{28}	.	.	.	.
K_{29}	.	.	.	.
K_{30}	.	.	.	.
K_{31}	.	.	.	.
K_{32}	.	.	.	.
K_{33}	.	.	.	.
K_{34}	.	.	.	.
K_{35}	.	.	.	.
K_{36}	.	.	.	.
K_{37}	.	.	.	.

Tabelle T.A.62: Werte projektiver Charaktere, Teil 19

	$c_{4,5}, c_{5,5}$	$c_{4,6}, c_{5,6}$	$c_{4,7}$	$c_{5,7}$
K_1	.	.	.	.
K_2	.	.	.	.
K_3	.	.	.	.
K_4	.	.	.	.
K_5	.	.	.	.
K_6	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.
K_9	$\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2^2\phi_6$
K_{10}	.	.	.	.
K_{11}	.	.	.	.
K_{12}	$\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2^2\phi_6$
K_{13}	$-\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{3}\phi_1\phi_2^2\phi_6$
K_{14}	.	.	.	.
K_{15}	.	.	.	.
K_{16}	.	.	.	.
K_{17}	.	.	.	.
K_{18}	.	.	.	.
K_{19}	.	.	.	.
K_{20}	.	.	.	.
K_{21}	.	.	.	.
K_{22}	.	.	.	.
K_{23}	$\frac{2}{3}\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{2}{3}\phi_1\phi_2$	$\frac{2}{3}\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$-\frac{2}{3}\phi_1\phi_2^2\phi_6$
K_{24}	$\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1\phi_2^2\phi_6$
K_{25}	$\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1\phi_2^2\phi_6$
K_{26}	.	.	.	.
K_{27}	.	.	.	.
K_{28}	.	.	.	.
K_{29}	.	.	.	.
K_{30}	.	.	.	.
K_{31}	.	.	.	.
K_{32}	.	.	.	.
K_{33}	.	.	.	.
K_{34}	.	.	.	.
K_{35}	.	.	.	.
K_{36}	.	.	.	.
K_{37}	.	.	.	.

Tabelle T.A.63: Werte projektiver Charaktere, Teil 20

	$c_{4,8}, c_{5,8}$	$c_{4,9}, c_{5,9}$	$c_{4,10}, c_{5,10}$	$c_{4,11}, c_{5,11}$
K_1	.	.	.	.
K_2	.	.	.	.
K_3	.	.	.	.
K_4	.	.	.	.
K_5	.	.	.	.
K_6	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.
K_9	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}(2q^2+1)$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$
K_{10}	.	.	.	.
K_{11}	.	.	.	.
K_{12}	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}(2q^2+1)$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$
K_{13}	$\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{3}(2q^2+1)$	$\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$
K_{14}	.	.	.	.
K_{15}	.	.	.	.
K_{16}	.	.	.	.
K_{17}	.	.	.	.
K_{18}	.	.	.	.
K_{19}	.	.	.	.
K_{20}	.	.	.	.
K_{21}	.	.	.	.
K_{22}	.	.	.	.
K_{23}	$-\frac{2}{3}\phi_1\phi_2$	$-\frac{2}{3}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}(q^2+2)$	$\frac{1}{3}(q^2+2)$
K_{24}	$-\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{3}\varepsilon_3(q^2\varepsilon_3-2q^2-\varepsilon_3-1)$	$\frac{1}{3}\varepsilon_3(2q^2\varepsilon_3-q^2+\varepsilon_3+1)$
K_{25}	$-\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{3}\varepsilon_3(1+\varepsilon_3)\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}\varepsilon_3(2q^2\varepsilon_3-q^2+\varepsilon_3+1)$	$-\frac{1}{3}\varepsilon_3(q^2\varepsilon_3-2q^2-\varepsilon_3-1)$
K_{26}	.	.	.	.
K_{27}	.	.	.	.
K_{28}	.	.	.	.
K_{29}	.	.	.	.
K_{30}	.	.	.	.
K_{31}	.	.	.	.
K_{32}	.	.	.	.
K_{33}	.	.	.	.
K_{34}	.	.	.	.
K_{35}	.	.	.	.
K_{36}	.	.	.	.
K_{37}	.	.	.	.

Tabelle T.A.64: Werte projektiver Charaktere, Teil 21

	$c_{6,1}$	$c_{7,1}$	$c_{6,2}$	$c_{7,2}$
K_1	.	.	.	.
K_2	.	.	.	.
K_3	.	.	.	.
K_4	.	.	.	.
K_5	.	.	.	.
K_6	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.
K_9	$\frac{1}{4}\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{10}	$\frac{1}{4}\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{11}	$-\frac{1}{4}\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{12}	$-\frac{1}{4}\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{13}	.	.	.	.
K_{14}	.	.	.	.
K_{15}	.	.	.	.
K_{16}	$-\frac{1}{2}\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{17}	$\frac{1}{2}\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{18}	$-\frac{1}{4}\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{19}	$\frac{1}{4}\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{20}	$\frac{1}{4}\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{21}	$-\frac{1}{4}\phi_1^4\phi_2^3\phi_3\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$
K_{22}	.	.	.	.
K_{23}	.	.	.	.
K_{24}	.	.	.	.
K_{25}	.	.	.	.
K_{26}	.	.	.	.
K_{27}	.	.	.	.
K_{28}	.	.	.	.
K_{29}	.	.	.	.
K_{30}	.	.	.	.
K_{31}	.	.	.	.
K_{32}	.	.	.	.
K_{33}	.	.	.	.
K_{34}	.	.	.	.
K_{35}	.	.	.	.
K_{36}	.	.	.	.
K_{37}	.	.	.	.

Tabelle T.A.65: Werte projektiver Charaktere, Teil 22

	$c_{6,3}$	$c_{7,3}$	$c_{6,4}$	$c_{7,4}$
K_1	.	.	.	.
K_2	.	.	.	.
K_3	.	.	.	.
K_4	.	.	.	.
K_5	.	.	.	.
K_6	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.
K_9	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^3$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^3$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
K_{10}	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^3$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^3$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
K_{11}	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^3$	$\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^3$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
K_{12}	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^3$	$\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^3$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
K_{13}	.	.	.	.
K_{14}	.	.	.	.
K_{15}	.	.	.	.
K_{16}	$\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^3$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^3$
K_{17}	$-\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^3$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^3$
K_{18}	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^3$	$\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^3$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
K_{19}	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^3$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^3$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
K_{20}	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^3$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^3$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
K_{21}	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^3$	$\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^3$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
K_{22}	.	.	.	.
K_{23}	.	.	.	.
K_{24}	.	.	.	.
K_{25}	.	.	.	.
K_{26}	.	.	.	.
K_{27}	.	.	.	.
K_{28}	.	.	.	.
K_{29}	.	.	.	.
K_{30}	.	.	.	.
K_{31}	.	.	.	.
K_{32}	.	.	.	.
K_{33}	.	.	.	.
K_{34}	.	.	.	.
K_{35}	.	.	.	.
K_{36}	.	.	.	.
K_{37}	.	.	.	.

Tabelle T.A.66: Werte projektiver Charaktere, Teil 23

	$c_{6,5}$	$c_{7,5}$	$c_{6,6}$	$c_{7,6}$
K_1	.	.	.	.
K_2	.	.	.	.
K_3	.	.	.	.
K_4	.	.	.	.
K_5	.	.	.	.
K_6	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.
K_9	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$
K_{10}	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$
K_{11}	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$
K_{12}	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$
K_{13}	.	.	.	.
K_{14}	.	.	.	.
K_{15}	.	.	.	.
K_{16}	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2^2$
K_{17}	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2^2$
K_{18}	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$
K_{19}	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$
K_{20}	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$
K_{21}	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$
K_{22}	.	.	.	.
K_{23}	.	.	.	.
K_{24}	.	.	.	.
K_{25}	.	.	.	.
K_{26}	.	.	.	.
K_{27}	.	.	.	.
K_{28}	.	.	.	.
K_{29}	.	.	.	.
K_{30}	.	.	.	.
K_{31}	.	.	.	.
K_{32}	.	.	.	.
K_{33}	.	.	.	.
K_{34}	.	.	.	.
K_{35}	.	.	.	.
K_{36}	.	.	.	.
K_{37}	.	.	.	.

Tabelle T.A.67: Werte projektiver Charaktere, Teil 24

	$c_{6,7}$	$c_{7,7}$	$c_{6,8}$	$c_{7,8}$
K_1	.	.	.	.
K_2	.	.	.	.
K_3	.	.	.	.
K_4	.	.	.	.
K_5	.	.	.	.
K_6	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.
K_9	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$
K_{10}	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$
K_{11}	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$
K_{12}	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$
K_{13}	.	.	.	.
K_{14}	.	.	.	.
K_{15}	.	.	.	.
K_{16}	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$
K_{17}	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$
K_{18}	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$
K_{19}	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$
K_{20}	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$
K_{21}	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2^2\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$
K_{22}	.	.	.	.
K_{23}	.	.	.	.
K_{24}	.	.	.	.
K_{25}	.	.	.	.
K_{26}	.	.	.	.
K_{27}	.	.	.	.
K_{28}	.	.	.	.
K_{29}	.	.	.	.
K_{30}	.	.	.	.
K_{31}	.	.	.	.
K_{32}	.	.	.	.
K_{33}	.	.	.	.
K_{34}	.	.	.	.
K_{35}	.	.	.	.
K_{36}	.	.	.	.
K_{37}	.	.	.	.

Tabelle T.A.68: Werte projektiver Charaktere, Teil 25

	$c_{6,9}$	$c_{7,9}$	$c_{6,10}$	$c_{7,10}$
K_1	.	.	.	.
K_2	.	.	.	.
K_3	.	.	.	.
K_4	.	.	.	.
K_5	.	.	.	.
K_6	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.
K_9	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$
K_{10}	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$
K_{11}	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$
K_{12}	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$
K_{13}	.	.	.	.
K_{14}	.	.	.	.
K_{15}	.	.	.	.
K_{16}	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2\phi_4$
K_{17}	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2\phi_4$
K_{18}	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$
K_{19}	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$
K_{20}	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$
K_{21}	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$
K_{22}	.	.	.	.
K_{23}	.	.	.	.
K_{24}	.	.	.	.
K_{25}	.	.	.	.
K_{26}	.	.	.	.
K_{27}	.	.	.	.
K_{28}	.	.	.	.
K_{29}	.	.	.	.
K_{30}	.	.	.	.
K_{31}	.	.	.	.
K_{32}	.	.	.	.
K_{33}	.	.	.	.
K_{34}	.	.	.	.
K_{35}	.	.	.	.
K_{36}	.	.	.	.
K_{37}	.	.	.	.

Tabelle T.A.69: Werte projektiver Charaktere, Teil 26

	$c_{6,11}$	$c_{7,11}$	$c_{6,12}$	$c_{7,12}$
K_1	.	.	.	.
K_2	.	.	.	.
K_3	.	.	.	.
K_4	.	.	.	.
K_5	.	.	.	.
K_6	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.
K_9	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$
K_{10}	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$
K_{11}	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$
K_{12}	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$
K_{13}	.	.	.	.
K_{14}	.	.	.	.
K_{15}	.	.	.	.
K_{16}	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$
K_{17}	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$
K_{18}	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$
K_{19}	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$
K_{20}	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$
K_{21}	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$
K_{22}	.	.	.	.
K_{23}	.	.	.	.
K_{24}	.	.	.	.
K_{25}	.	.	.	.
K_{26}	.	.	.	.
K_{27}	.	.	.	.
K_{28}	.	.	.	.
K_{29}	.	.	.	.
K_{30}	.	.	.	.
K_{31}	.	.	.	.
K_{32}	.	.	.	.
K_{33}	.	.	.	.
K_{34}	.	.	.	.
K_{35}	.	.	.	.
K_{36}	.	.	.	.
K_{37}	.	.	.	.

Tabelle T.A.70: Werte projektiver Charaktere, Teil 27

	$c_{6,13}$	$c_{7,13}$	$c_{6,14}$	$c_{7,14}$
K_1	.	.	.	.
K_2	.	.	.	.
K_3	.	.	.	.
K_4	.	.	.	.
K_5	.	.	.	.
K_6	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.
K_9	$\frac{1}{4}(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{4}(2q-1)\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_1$	$-\frac{1}{4}\phi_2$
K_{10}	$-\frac{1}{4}(2q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{4}(2q^2-q+1)$	$-\frac{1}{4}\phi_1$	$-\frac{1}{4}\phi_2$
K_{11}	$\frac{1}{4}(2q+1)\phi_1$	$\frac{1}{4}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{4}\phi_1$	$\frac{1}{4}\phi_2$
K_{12}	$-\frac{1}{4}(2q^2+q+1)$	$-\frac{1}{4}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_1$	$\frac{1}{4}\phi_2$
K_{13}	.	.	.	.
K_{14}	.	.	.	.
K_{15}	.	.	.	.
K_{16}	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$
K_{17}	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$
K_{18}	$-\frac{1}{4}(2q^2+q+1)$	$-\frac{1}{4}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_1$	$\frac{1}{4}\phi_2$
K_{19}	$-\frac{1}{4}(2q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{4}(2q^2-q+1)$	$-\frac{1}{4}\phi_1$	$-\frac{1}{4}\phi_2$
K_{20}	$\frac{1}{4}(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{4}(2q-1)\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_1$	$-\frac{1}{4}\phi_2$
K_{21}	$\frac{1}{4}(2q+1)\phi_1$	$\frac{1}{4}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{4}\phi_1$	$\frac{1}{4}\phi_2$
K_{22}	.	.	.	.
K_{23}	.	.	.	.
K_{24}	.	.	.	.
K_{25}	.	.	.	.
K_{26}	.	.	.	.
K_{27}	.	.	.	.
K_{28}	.	.	$q^2\varepsilon_4$	$q^2\varepsilon_4$
K_{29}	.	.	$-q^2\varepsilon_4$	$-q^2\varepsilon_4$
K_{30}	.	.	.	.
K_{31}	.	.	.	.
K_{32}	.	.	.	.
K_{33}	.	.	.	.
K_{34}	.	.	.	.
K_{35}	.	.	.	.
K_{36}	.	.	.	.
K_{37}	.	.	.	.

Tabelle T.A.71: Werte projektiver Charaktere, Teil 28

	$c_{6,15}$	$c_{7,15}$	$c_{6,16}$	$c_{7,16}$
K_1	.	.	.	.
K_2	.	.	.	.
K_3	.	.	.	.
K_4	.	.	.	.
K_5	.	.	.	.
K_6	.	.	.	.
K_7	.	.	.	.
K_8	.	.	.	.
K_9	$-\frac{1}{4}(2q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{4}(2q^2-q+1)$	$-\frac{1}{4}\phi_1$	$-\frac{1}{4}\phi_2$
K_{10}	$\frac{1}{4}(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{4}(2q-1)\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_1$	$-\frac{1}{4}\phi_2$
K_{11}	$-\frac{1}{4}(2q^2+q+1)$	$-\frac{1}{4}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_1$	$\frac{1}{4}\phi_2$
K_{12}	$\frac{1}{4}(2q+1)\phi_1$	$\frac{1}{4}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{4}\phi_1$	$\frac{1}{4}\phi_2$
K_{13}	.	.	.	.
K_{14}	.	.	.	.
K_{15}	.	.	.	.
K_{16}	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$
K_{17}	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$
K_{18}	$\frac{1}{4}(2q+1)\phi_1$	$\frac{1}{4}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{4}\phi_1$	$\frac{1}{4}\phi_2$
K_{19}	$\frac{1}{4}(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{4}(2q-1)\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_1$	$-\frac{1}{4}\phi_2$
K_{20}	$-\frac{1}{4}(2q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{4}(2q^2-q+1)$	$-\frac{1}{4}\phi_1$	$-\frac{1}{4}\phi_2$
K_{21}	$-\frac{1}{4}(2q^2+q+1)$	$-\frac{1}{4}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_1$	$\frac{1}{4}\phi_2$
K_{22}	.	.	.	.
K_{23}	.	.	.	.
K_{24}	.	.	.	.
K_{25}	.	.	.	.
K_{26}	.	.	.	.
K_{27}	.	.	.	.
K_{28}	.	.	$-q^2\varepsilon_4$	$-q^2\varepsilon_4$
K_{29}	.	.	$q^2\varepsilon_4$	$q^2\varepsilon_4$
K_{30}	.	.	.	.
K_{31}	.	.	.	.
K_{32}	.	.	.	.
K_{33}	.	.	.	.
K_{34}	.	.	.	.
K_{35}	.	.	.	.
K_{36}	.	.	.	.
K_{37}	.	.	.	.

Tabelle T.A.72: Werte projektiver Charaktere, Teil 29

A.21 Die unipotenten Charaktere von $F_4(q)$

In der folgenden Tabelle sind die in Abschnitt V.4 beschriebenen Parametrisierungen der 37 unipotenten Charaktere von $F_4(q)$ angegeben und ihre Charaktergrade angegeben. Diese Parametrisierungen sind unabhängig von q. Die Charaktergrade lassen sich als Polynome in q schreiben, so dass die Spezialisierung dieser Polynome für alle Primzahlpotenzen q die Charaktergrade der entsprechenden Charaktere liefert. Vergleiche [Car85, Seite 479].

Nr.	Name	Familie $\mathcal{F}$	$X(\Gamma_{\mathcal{F}})$	Charaktergrad
1	$\phi_{1,0}$	$\mathcal{F}_1$	$(1,1)$	1
2	$\phi_{4,1}$	$\mathcal{F}_9$	$(1,1)$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2\phi_6^2\phi_8$
3	$\phi''_{2,4}$	$\mathcal{F}_9$	$(g_2,1)$	$\frac{1}{2}q\phi_4\phi_8\phi_{12}$
4	$\phi'_{2,4}$	$\mathcal{F}_9$	$(1,\varepsilon)$	$\frac{1}{2}q\phi_4\phi_8\phi_{12}$
5	$B_{2,1}$	$\mathcal{F}_9$	(g_2,ε)	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_3^2\phi_8$
6	$\phi_{9,2}$	$\mathcal{F}_2$	$(1,1)$	$q^2\phi_3^2\phi_6^2\phi_{12}$
7	$\phi'_{8,3}$	$\mathcal{F}_3$	$(1,1)$	$q^3\phi_4^2\phi_8\phi_{12}$
8	$\phi''_{8,3}$	$\mathcal{F}_4$	$(1,1)$	$q^3\phi_4^2\phi_8\phi_{12}$
9	$\phi_{12,4}$	$\mathcal{F}_{11}$	$(1,1)$	$\frac{1}{24}q^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_8\phi_{12}$
10	$\phi'_{9,6}$	$\mathcal{F}_{11}$	$(1,\lambda^1)$	$\frac{1}{8}q^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_8\phi_{12}$
11	$\phi'_{1,12}$	$\mathcal{F}_{11}$	$(1,\lambda^2)$	$\frac{1}{8}q^4\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$
12	$F_4^{II}[1]$	$\mathcal{F}_{11}$	$(1,\lambda^3)$	$\frac{1}{24}q^4\phi_1^4\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$
13	$\phi''_{6,6}$	$\mathcal{F}_{11}$	$(1,\sigma)$	$\frac{1}{12}q^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8$
14	$\phi_{16,5}$	$\mathcal{F}_{11}$	$(g_2,1)$	$\frac{1}{4}q^4\phi_2^4\phi_4^2\phi_6^2\phi_{12}$
15	$F_4[-1]$	$\mathcal{F}_{11}$	(g_2,ε)	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_{12}$
16	$B_{2,\epsilon''}$	$\mathcal{F}_{11}$	(g_2,ε')	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_3^2\phi_4\phi_8\phi_{12}$
17	$\phi'_{4,7}$	$\mathcal{F}_{11}$	(g_2,ε'')	$\frac{1}{4}q^4\phi_2^2\phi_4\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$
18	$\phi''_{9,6}$	$\mathcal{F}_{11}$	$(g'_2,1)$	$\frac{1}{8}q^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_8\phi_{12}$
19	$F_4^I[1]$	$\mathcal{F}_{11}$	(g'_2,ε)	$\frac{1}{8}q^4\phi_1^4\phi_3^2\phi_8\phi_{12}$
20	$\phi''_{1,12}$	$\mathcal{F}_{11}$	(g'_2,ε')	$\frac{1}{8}q^4\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$
21	$\phi_{4,8}$	$\mathcal{F}_{11}$	(g'_2,ε'')	$\frac{1}{8}q^4\phi_2^4\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$
22	$B_{2,r}$	$\mathcal{F}_{11}$	(g'_2,r)	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3^2\phi_6^2\phi_8$
23	$\phi'_{6,6}$	$\mathcal{F}_{11}$	$(g_3,1)$	$\frac{1}{3}q^4\phi_3^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$
24	$F_4[\theta]$	$\mathcal{F}_{11}$	(g_3,θ)	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_4^2\phi_8$
25	$F_4[\theta^2]$	$\mathcal{F}_{11}$	(g_3,θ^2)	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_4^2\phi_8$
26	$\phi''_{4,7}$	$\mathcal{F}_{11}$	$(g_4,1)$	$\frac{1}{4}q^4\phi_2^2\phi_4\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$
27	$B_{2,\epsilon'}$	$\mathcal{F}_{11}$	$(g_4,-1)$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_3^2\phi_4\phi_8\phi_{12}$
28	$F_4[i]$	$\mathcal{F}_{11}$	(g_4,i)	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_6^2$
29	$F_4[-i]$	$\mathcal{F}_{11}$	$(g_4,-i)$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_6^2$
30	$\phi'_{8,9}$	$\mathcal{F}_5$	$(1,1)$	$q^9\phi_4^2\phi_8\phi_{12}$
31	$\phi''_{8,9}$	$\mathcal{F}_6$	$(1,1)$	$q^9\phi_4^2\phi_8\phi_{12}$
32	$\phi_{9,10}$	$\mathcal{F}_7$	$(1,1)$	$q^{10}\phi_3^2\phi_6^2\phi_{12}$
33	$\phi_{4,13}$	$\mathcal{F}_{10}$	$(1,1)$	$\frac{1}{2}q^{13}\phi_2^2\phi_6^2\phi_8$
34	$\phi''_{2,16}$	$\mathcal{F}_{10}$	$(g_2,1)$	$\frac{1}{2}q^{13}\phi_4\phi_8\phi_{12}$
35	$\phi'_{2,16}$	$\mathcal{F}_{10}$	$(1,\varepsilon)$	$\frac{1}{2}q^{13}\phi_4\phi_8\phi_{12}$
36	$B_{2,\epsilon}$	$\mathcal{F}_{10}$	(g_2,ε)	$\frac{1}{2}q^{13}\phi_1^2\phi_3^2\phi_8$
37	$\phi_{1,24}$	$\mathcal{F}_8$	$(1,1)$	q^{24}

Tabelle T.A.73: Die unipotenten Charaktere von $F_4(q)$

A.22 Die kuspidalen unipotenten Fastcharaktere von $F_4(q)$

In der folgenden Tabelle sind die sieben kuspidalen unipotenten Fastcharaktere von $F_4(q)$ mit $2,3 \nmid q$ angegeben. Dabei sind $\epsilon := \mathrm{ggT}(4, q-1) - 3$ und $\varepsilon_3 := \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3})$ und weiter $\varepsilon_4 := \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{4})$. Vergleiche Abschnitt V.6.

Name	$c_{1,15}$	$c_{1,16}$	$c_{1,17}$	$c_{1,18}$	$c_{1,19}$	$c_{2,21}$	$c_{2,22}$	$c_{2,23}$	$c_{2,24}$
$R_{(1,\lambda^3),\mathcal{F}_{11}}$	q^4	$-q^4$	q^4	$-q^4$	q^4	.	.	.	.
$R_{(g_2,\varepsilon),\mathcal{F}_{11}}$	.	.	.	.	.	ϵq^3	$-\epsilon q^3$	$-\epsilon q^3$	ϵq^3
$R_{(g_2',\varepsilon),\mathcal{F}_{11}}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$R_{(g_3,\theta),\mathcal{F}_{11}}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$R_{(g_3,\theta^2),\mathcal{F}_{11}}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$R_{(g_4,i),\mathcal{F}_{11}}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$R_{(g_4,-i),\mathcal{F}_{11}}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Name	$c_{3,18}$	$c_{3,19}$	$c_{3,20}$	$c_{3,21}$	$c_{3,22}$	$c_{4,9}$	$c_{4,10}$	$c_{4,11}$	$c_{5,9}$	$c_{5,10}$	$c_{5,10}$
$R_{(1,\lambda^3),\mathcal{F}_{11}}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$R_{(g_2,\varepsilon),\mathcal{F}_{11}}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$R_{(g_2',\varepsilon),\mathcal{F}_{11}}$	q^4	$-q^4$	q^4	$-q^4$	q^4	.	.	.	.	.	.
$R_{(g_3,\theta),\mathcal{F}_{11}}$	.	.	.	.	.	q^2	$\varepsilon_3 q^2$	$\varepsilon_3^2 q^2$	q^2	$\varepsilon_3 q^2$	$\varepsilon_3^2 q^2$
$R_{(g_3,\theta^2),\mathcal{F}_{11}}$	.	.	.	.	.	q^2	$\varepsilon_3^2 q^2$	$\varepsilon_3 q^2$	q^2	$\varepsilon_3^2 q^2$	$\varepsilon_3 q^2$
$R_{(g_4,i),\mathcal{F}_{11}}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$R_{(g_4,-i),\mathcal{F}_{11}}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Name	$c_{6,13}$	$c_{6,14}$	$c_{6,15}$	$c_{6,16}$	$c_{7,13}$	$c_{7,14}$	$c_{7,15}$	$c_{7,16}$
$R_{(1,\lambda^3),\mathcal{F}_{11}}$	.	.	.	.	.	.	.	.
$R_{(g_2,\varepsilon),\mathcal{F}_{11}}$	.	.	.	.	.	.	.	.
$R_{(g_2',\varepsilon),\mathcal{F}_{11}}$	.	.	.	.	.	.	.	.
$R_{(g_3,\theta),\mathcal{F}_{11}}$	.	.	.	.	.	.	.	.
$R_{(g_3,\theta^2),\mathcal{F}_{11}}$	.	.	.	.	.	.	.	.
$R_{(g_4,i),\mathcal{F}_{11}}$	q^2	$\varepsilon_4 q^2$	$-q^2$	$-\varepsilon_4 q^2$	q^2	$\varepsilon_4 q^2$	$-q^2$	$-\varepsilon_4 q^2$
$R_{(g_4,-i),\mathcal{F}_{11}}$	q^2	$-\varepsilon_4 q^2$	$-q^2$	$\varepsilon_4 q^2$	q^2	$-\varepsilon_4 q^2$	$-q^2$	$\varepsilon_4 q^2$

Tabelle T.A.74: Die kuspidalen unipotenten Fastcharaktere von $F_4(q)$

A.23 Die Charaktertafel der Hecke-Algebra $\mathcal{H}(F_4(q), P_8)$

In der folgenden Tabelle ist die Charaktertafel von $\mathcal{H}(F_4(q), P_8)$ angegeben. Die Charaktere sind durch die bezüglich der Fittingkorrespondenz korrespondierenden irreduziblen Charaktere von $\mathrm{Irr}(F_4(q))$ bezeichnet.

ζ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$\phi_{1,0}$	1	$q\phi_6\phi_4\phi_2^2$	$\phi_2\phi_3\phi_6q^5$	$q^8\phi_6\phi_4\phi_2^2$	q^{15}
$\phi_{4,1}$	1	$\phi_2\phi_4(q^2+q-1)$	$q^2\phi_1\phi_3^2$	$q^4\phi_2\phi_4(q^2-q-1)$	$-q^9$
$\phi'_{2,4}$	1	$-\phi_2\phi_6\phi_4$	$q^2\phi_2\phi_3\phi_6$	$-\phi_2\phi_6\phi_4q^4$	q^9
$\phi_{9,2}$	1	$\phi_1\phi_2\phi_4$	$-q^3\phi_2$	$-q^3\phi_1\phi_2\phi_4$	q^7
$\phi'_{8,3}$	1	$-\phi_2\phi_6$	0	$q^3\phi_2\phi_6$	$-q^6$

Tabelle T.A.75: Die Charaktertafel der Hecke-Algebra $\mathcal{H}(F_4(q), P_8)$

A.24 Berechnete Charakterwerte

In der folgenden Tabelle geben wir die Charakterwerte unipotenter Charaktere an, die wir explizit mit Hilfe der Charakterformel V.(8.2) berechnet haben.

Charakter	Klassentyp	Charakterwert
$\phi_{4,1}$	$c_{3,5}$	$\frac{1}{2}(q^4+q^3+1)\phi_2$
$\phi'_{2,4}$	$c_{3,5}$	$-\frac{1}{2}(q^4+q^3-1)\phi_1$
$\phi_{4,1}$	$c_{2,12}$	$\frac{1}{2}(q^3+q^2+1)\phi_2$
$\phi'_{2,4}$	$c_{2,12}$	$-\frac{1}{2}(q^3+q^2+2q+1)\phi_1$
$\phi_{4,1}$	$c_{3,5}$	$\frac{1}{2}(q^4+q^3+1)\phi_2$
$\phi'_{2,4}$	$c_{3,5}$	$-\frac{1}{2}(q^4+q^3-1)\phi_1$

Tabelle T.A.76: Berechnete Charakterwerte

A.25 Die Schnittzahlen zur Anwendung der Ree-Formel

In dieser Tabelle geben wir die in Abschnitt V.8 benötigten Summen an. Die Bezeichnungen sind dort erklärt. Hierbei ist $q \equiv 1$ modulo 12. Die Zeilen sind durch die Elemente aus $D_{\emptyset,J}$ indiziert. In der jeweiligen Spalte steht der Wert für die Summe V.1 für das entsprechende i.

$D_{\emptyset J}$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
1	1	0	0	0	0
s_1	q^2	0	q^4-q^2	0	0
s_2s_1	q^3	0	0	0	0
$s_3s_2s_1$	q^6	q^8-q^6	$3q^{10}-q^9-2q^8$	$2q^{12}-q^{11}-3q^{10}+q^9+q^8$	$q^{13}-2q^{12}+q^{11}$
$s_4s_3s_2s_1$	q^2	0	0	0	0
$s_2s_3s_2s_1$	0	0	0	0	q^{11}
$s_2s_4s_3s_2s_1$	0	0	$2q^9$	$2q^{11}-2q^9$	$q^{12}-2q^{11}$
$s_1s_2s_3s_2s_1$	q^3	q^4-q^3	q^6-q^4	0	0
$s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	0	q^4	0	0	0
$s_1s_2s_4s_3s_2s_1$	0	q^3	q^5-q^3	0	0
$s_2s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	0	q^6	q^8-q^6	$q^{10}-q^8$	0
$s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	0	$2q^7-q^6$	$q^8-2q^7+q^6$	q^9-q^8	0
$s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	0	$2q^6$	q^7-2q^6	q^8-q^7	0
$s_1s_2s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	0	$2q^9$	$q^{10}-2q^9$	$2q^{13}-q^{12}-q^{10}$	$q^{14}+q^{12}-2q^{13}$
$s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	q^4	q^5-q^4	q^7-q^5	0	0
$s_1s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	q	0	0	0	0
$s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	0	q^5	0	0	0
$s_1s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	0	q^4	q^6-q^4	0	0
$s_2s_1s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	q^4	q^5-q^4	q^7-q^5	0	0
$s_1s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	0	q^7	q^9-q^7	$q^{11}-q^9$	0
$s_2s_1s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	0	$2q^8-q^7$	$q^9-2q^8+q^7$	$q^{10}-q^9$	0
$s_3s_2s_1s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	0	$2q^7$	q^8-2q^7	q^9-q^8	0
$s_2s_3s_2s_1s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	0	$2q^{10}$	$q^{11}-2q^{10}$	$2q^{14}-q^{13}-q^{11}$	$q^{15}-2q^{14}+q^{13}$
$s_1s_2s_3s_2s_1s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	q^5	q^6-q^5	q^8-q^6	0	0

Tabelle T.A.77: Die Schnittzahlen zur Anwendung der Ree-Formel

A.26 Die Werte der Senkrechtfunktionen δ_i von L_i

In dieser Tabelle geben wir die Werte der Senkrechtfunktionen δ_i der Leviuntergruppen L_i für $1 \leqslant i \leqslant 5$ an. Zur Definition von δ_i vergleiche Abschnitt V.7. Die Werte auf den nicht angegebenen Klassentypen sind Null. Der halbeinfache Anteil der Klassentypen wird durch das Tupel (Π, w) beschrieben. Für den unipotenten Anteil geben wir Vertreter an. Die Spalte Anzahl gibt die Anzahl der Klassen im jeweiligen Klassentyp an.

L_i	Name	Π	w	Anzahl	unipotenter Anteil	Wert
L_1	δ_1	$[2,9]$	1	$\frac{1}{2}(q-1)^2$	$x_2(1)x_9(1)$	q
L_1	δ_1	$[2,9]$	1	$\frac{1}{2}(q-1)^2$	$x_2(1)x_9(\eta)$	$-q$
L_1	δ_1	$[2,9]$	s_3	$\frac{1}{2}(q-1)^2$	$x_2(1)x_9(1)$	q
L_1	δ_1	$[2,9]$	s_3	$\frac{1}{2}(q-1)^2$	$x_2(\gamma)x_9(\gamma^q)$	$-q$
L_2	δ_2	$[2,9]$	$s_1s_2s_3s_2s_1s_4(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^2$	$\frac{1}{2}(q+1)^2$	$x_2(1)x_9(1)$	q
L_2	δ_2	$[2,9]$	$s_1s_2s_3s_2s_1s_4(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^2s$	$\frac{1}{2}(q+1)^2$	$x_2(1)x_9(\eta)$	$-q$
L_2	δ_2	$[2,9]$	$s_1s_2s_3s_2s_1s_3s_4(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^2$	$\frac{1}{2}(q+1)^2$	$x_2(1)x_9(1)$	q
L_2	δ_2	$[2,9]$	$s_1s_2s_3s_2s_1s_3s_4(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^2$	$\frac{1}{2}(q+1)^2$	$x_2(\gamma)x_9(\gamma^q)$	$-q$
L_3	δ_3	$[2,9]$	$s_4s_3s_2s_3s_4$	$\frac{1}{2}(q^2-1)$	$x_2(1)x_9(1)$	q
L_3	δ_3	$[2,9]$	$s_4s_3s_2s_3s_4$	$\frac{1}{2}(q^2-1)$	$x_2(1)x_9(\eta)$	$-q$
L_3	δ_3	$[2,9]$	$s_3s_4s_3s_2s_3s_4$	$\frac{1}{2}(q^2-1)$	$x_2(1)x_9(1)$	q
L_3	δ_3	$[2,9]$	$s_3s_4s_3s_2s_3s_4$	$\frac{1}{2}(q^2-1)$	$x_2(\gamma)x_9(\gamma^q)$	$-q$
L_4	δ_4	$[2,9]$	$s_1s_2s_3s_2s_1$	$\frac{1}{2}(q^2-1)$	$x_2(1)x_9(1)$	q
L_4	δ_4	$[2,9]$	$s_1s_2s_3s_2s_1$	$\frac{1}{2}(q^2-1)$	$x_2(1)x_9(\eta)$	$-q$
L_4	δ_4	$[2,9]$	$s_1s_2s_3s_2s_1s_3$	$\frac{1}{2}(q^2-1)$	$x_2(1)x_9(1)$	q
L_4	δ_4	$[2,9]$	$s_1s_2s_3s_2s_1s_3$	$\frac{1}{2}(q^2-1)$	$x_2(\gamma)x_9(\gamma^q)$	$-q$
L_5	δ_5	$[2,9]$	$s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	$\frac{1}{2}(q^2+1)$	$x_2(1)x_9(1)$	q
L_5	δ_5	$[2,9]$	$s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	$\frac{1}{2}(q^2+1)$	$x_2(1)x_9(\eta)$	$-q$
L_5	δ_5	$[2,9]$	$s_3s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	$\frac{1}{2}(q^2+1)$	$x_2(1)x_9(1)$	q
L_5	δ_5	$[2,9]$	$s_3s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	$\frac{1}{2}(q^2+1)$	$x_2(\gamma)x_9(\gamma^q)$	$-q$

Tabelle T.A.78: Die Werte der Senkrechtfunktionen δ_i von L_i

A.27 Die Werte von ξ_i

In der folgenden Tabelle sind die Werte der Senkrechtfunktionen ξ_i für $1 \leqslant i \leqslant 5$ angegeben. Vergleiche dazu V.9.

	$c_{2,12}$	$c_{2,13}$	$c_{2,16}$	$c_{2,17}$	$c_{2,18}$	$c_{2,19}$	$c_{2,21}$	$c_{2,22}$	$c_{2,23}$	$c_{2,24}$	$c_{2,25}$
ξ_1	q^3	$-q^3$	q^2	$-q^2$	q^2	$-q^2$	.	.	.	.	q
ξ_2	q^7	$-q^7$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
ξ_3	q^5	$-q^5$	q^4	$-q^4$	.	.	.	.	.	.	.
ξ_4	q^5	$-q^5$	.	.	q^2	$-q^2$	q^2	$-q^2$	q^2	$-q^2$	.
ξ_5	$q^4\phi_4$	$-q^4\phi_4$	q^3	$-q^3$	q^3	$-q^3$	.	.	.	.	.

	$c_{2,26}$	$c_{3,5}$	$c_{3,6}$	$c_{3,14}$	$c_{3,15}$	$c_{3,16}$	$c_{3,17}$	$c_{3,18}$	$c_{3,22}$	$c_{3,25}$	$c_{3,26}$
ξ_1	$-q$	q^5	$-q^5$	q^2	$-q^2$	q^2	$-q^2$	$2q^2$	$-2q^2$	q	$-q$
ξ_2	.	q^9	$-q^9$	.	.	.	.	.	.	.	.
ξ_3	.	q^7	$-q^7$	q^4	$-q^4$	.	.	.	.	.	.
ξ_4	.	q^7	$-q^7$	.	.	q^4	$-q^4$	.	.	.	.
ξ_5	.	$q^6\phi_4$	$-q^6\phi_4$	q^3	$-q^3$	q^3	$-q^3$	$2q^3$	$-2q^3$	.	.

	$c_{6,3}$	$c_{6,4}$	$c_{6,6}$	$c_{6,7}$	$c_{6,10}$	$c_{6,11}$	$c_{6,13}$	$c_{6,14}$	$c_{6,15}$	$c_{6,16}$	$c_{7,3}$	$c_{7,4}$
ξ_1	q^2	$-q^2$	q	$-q$	q^2	$-q^2$	q	$-q$	q	$-q$	q^2	$-q^2$
ξ_2	q^4	$-q^4$	.	.	.	.	.	.	.	.	q^4	$-q^4$
ξ_3	q^2	$-q^2$	q	$-q$	q^2	$-q^2$	q	$-q$	q	$-q$	q^2	$-q^2$
ξ_4	q^4	$-q^4$	.	.	.	.	.	.	.	.	q^4	$-q^4$
ξ_5	$2q^3$	$-2q^3$	q^2	$-q^2$	q^3	$-q^3$	.	.	.	.	$2q^3$	$-2q^3$

	$c_{7,6}$	$c_{7,7}$	$c_{7,10}$	$c_{7,11}$	$c_{7,13}$	$c_{7,14}$	$c_{7,15}$	$c_{7,16}$	$c_{12,3}$	$c_{12,4}$	$c_{12,6}$
ξ_1	q	$-q$	q^2	$-q^2$	q	$-q$	q	$-q$	q^2	$-q^2$	q
ξ_2	.	.	.	.	.	.	.	.	q^3	$-q^3$	.
ξ_3	q	$-q$	q^2	$-q^2$	q	$-q$	q	$-q$	q^2	$-q^2$	q
ξ_4	.	.	.	.	.	.	.	.	q^3	$-q^3$	.
ξ_5	q^2	$-q^2$	q^3	$-q^3$	.	.	.	.	$q^2\phi_2$	$-q^2\phi_2$	q

	$c_{12,7}$	$c_{13,3}$	$c_{13,4}$	$c_{13,6}$	$c_{13,7}$	$c_{14,3}$	$c_{14,4}$	$c_{14,6}$	$c_{14,7}$	$c_{15,3}$	$c_{15,4}$
ξ_1	$-q$	q^2	$-q^2$	q	$-q$	q^2	$-q^2$	q	$-q$	q^2	$-q^2$
ξ_2	.	$-q^3$	q^3	.	.	$-q^3$	q^3	.	.	q^3	$-q^3$
ξ_3	$-q$	q^2	$-q^2$	q	$-q$	q^2	$-q^2$	q	$-q$	q^2	$-q^2$
ξ_4	.	$-q^3$	q^3	.	.	$-q^3$	q^3	.	.	q^3	$-q^3$
ξ_5	$-q$	$q^2\phi_1$	$-q^2\phi_1$	$-q$	q	$q^2\phi_1$	$-q^2\phi_1$	$-q$	q	$q^2\phi_2$	$-q^2\phi_2$

Tabelle T.A.79: Die Werte der ξ_i, Teil 1

	$c_{15,6}$	$c_{15,7}$	$c_{18,6}$	$c_{18,7}$	$c_{18,9}$	$c_{18,10}$	$c_{19,6}$	$c_{19,7}$	$c_{19,9}$	$c_{19,10}$	$c_{20,2}$	$c_{20,3}$
ξ_1	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$
ξ_2	.	.	q^2	$-q^2$	.	.	$-q^2$	q^2	.	.	q^2	$-q^2$
ξ_3	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$
ξ_4	.	.	q^2	$-q^2$	.	.	$-q^2$	q^2	.	.	q^2	$-q^2$
ξ_5	q	$-q$	$q\phi_2$	$-q\phi_2$	q	$-q$	$q\phi_1$	$-q\phi_1$	$-q$	q	$q\phi_2$	$-q\phi_2$

	$c_{20,5}$	$c_{20,6}$	$c_{21,2}$	$c_{21,3}$	$c_{21,5}$	$c_{21,6}$	$c_{22,7}$	$c_{22,8}$	$c_{22,11}$	$c_{22,12}$	$c_{23,7}$
ξ_1	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$	q^2	$-q^2$	q	$-q$	q^2
ξ_2	.	.	$-q^2$	q^2	.	.	q^3	$-q^3$	.	.	$-q^3$
ξ_3	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$	q^3	$-q^3$	.	.	$-q^3$
ξ_4	.	.	$-q^2$	q^2	.	.	q^2	$-q^2$	q	$-q$	q^2
ξ_5	q	$-q$	$q\phi_1$	$-q\phi_1$	$-q$	q	$q^2\phi_2$	$-q^2\phi_2$	q	$-q$	$q^2\phi_1$

	$c_{23,8}$	$c_{23,11}$	$c_{23,12}$	$c_{43,4}$	$c_{43,5}$	$c_{44,4}$	$c_{44,5}$	$c_{45,4}$	$c_{45,5}$	$c_{46,4}$	$c_{46,5}$
ξ_1	$-q^2$	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$
ξ_2	q^3	.	.	q	$-q$	q	$-q$	$-q$	q	$-q$	q
ξ_3	q^3	.	.	q	$-q$	q	$-q$	$-q$	q	q	$-q$
ξ_4	$-q^2$	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$	$-q$	q
ξ_5	$-q^2\phi_1$	$-q$	q	$2q$	$-2q$	$-2q$	$2q$	.	.	.	.

	$c_{47,4}$	$c_{47,5}$	$c_{48,2}$	$c_{48,3}$	$c_{49,2}$	$c_{49,3}$	$c_{50,2}$	$c_{50,3}$	$c_{51,2}$	$c_{51,3}$	$c_{52,2}$	$c_{52,3}$
ξ_1	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$
ξ_2	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$	$-q$	q	$-q$	q	q	$-q$
ξ_3	$-q$	q	q	$-q$	q	$-q$	$-q$	q	q	$-q$	$-q$	q
ξ_4	$-q$	q	q	$-q$	q	$-q$	q	$-q$	$-q$	q	$-q$	q
ξ_5	.	.	$2q$	$-2q$	$-2q$	$2q$	.	.	.	.	.	.

Tabelle T.A.80: Die Werte der ξ_i, Teil 2

A.28 Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$

In der folgenden Tabelle sind die unipotenten Charaktere von $F_4(q)$ für Primzahlpotenzen q mit $2, 3 \nmid q$ aufgelistet.

	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	$c_{1,3}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2\phi_6^2\phi_8$	$\frac{1}{2}(q^4+q^3+1)q\phi_2\phi_6$	$\frac{1}{2}q(q^6+2q^4+2q^3+1)$
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}q\phi_{12}\phi_4\phi_8$	$\frac{1}{2}q(q^7+q^6+q^4+1)$	$\frac{1}{2}q\phi_{12}\phi_4$
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}q\phi_{12}\phi_4\phi_8$	$-\frac{1}{2}q(q^7-q^6-q^4-1)$	$\frac{1}{2}q(q^6+2q^4+1)$
$B_2,1$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_3^2\phi_8$	$-\frac{1}{2}(q^4-q^3+1)q\phi_1\phi_3$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_3^2$
$\phi_{9,2}$	$q^2\phi_3^2\phi_6^2\phi_{12}$	$q^2\phi_3\phi_6\phi_8$	$(q^4+q^2-q+1)q^2\phi_3$
$\phi'_{8,3}$	$q^3\phi_4^2\phi_8\phi_{12}$	$q^3\phi_4\phi_8$	$(q^4+q^3+1)q^3\phi_4$
$\phi''_{8,3}$	$q^3\phi_4^2\phi_8\phi_{12}$	$(q^6+q^4+1)q^3\phi_4$	$q^3\phi_4\phi_8$
$\phi_{12,4}$	$\frac{1}{24}q^4\phi_2^4\phi_3^2\phi_8\phi_{12}$	$\frac{1}{24}(3q^5-q^3+q^2+2q+1)q^4\phi_2^3\phi_3$	$\frac{1}{24}(2q+1)q^4\phi_2^3\phi_3\phi_4$
$\phi'_{9,6}$	$\frac{1}{8}q^4\phi_2^2\phi_4^2\phi_8\phi_{12}$	$-\frac{1}{8}(q^3-q^2-q-1)q^4\phi_2\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{8}(2q^2-q+1)q^4\phi_2^2\phi_3\phi_4$
$\phi'_{1,12}$	$\frac{1}{8}q^4\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-\frac{1}{8}(q^3+q^2-q+1)q^4\phi_1\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{8}(2q^6+q^5-2q^4+q^3+3q^2-2q+1)q^4\phi_4$
$F_4^{II}[1]$	$\frac{1}{24}q^4\phi_1^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$\frac{1}{24}(3q^5-q^3-q^2+2q-1)q^4\phi_1^3\phi_6$	$\frac{1}{24}(2q^5+3q^4-q^3-4q^2+3q-1)q^4\phi_1^3$
$\phi''_{6,6}$	$\frac{1}{12}q^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8$	$\frac{1}{12}(3q^4+2q^2+1)q^4\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{12}(2q^4+q^3+3q^2-q+1)q^4\phi_3\phi_4$
$\phi_{16,5}$	$\frac{1}{4}q^4\phi_2^4\phi_4^2\phi_6^2\phi_{12}$	$\frac{1}{4}q^4\phi_2^4\phi_6^2$	$\frac{1}{4}(3q^3+1)q^4\phi_2^2\phi_4$
$F_4[-1]$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_{12}$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^4\phi_3^2\phi_4$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1^3\phi_3\phi_4$
B_2,ϵ''	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_3^2\phi_4\phi_8\phi_{12}$	$-\frac{1}{4}(q^7+q^4-q^3+1)q^4\phi_1\phi_3$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2\phi_3\phi_4$
$\phi'_{4,7}$	$\frac{1}{4}q^4\phi_2^2\phi_4\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-\frac{1}{4}(q^7-q^4-q^3-1)q^4\phi_2\phi_6$	$\frac{1}{4}q^4(q^7+4q^6+3q^4+3q^3+1)$
$\phi''_{9,6}$	$\frac{1}{8}q^4\phi_3^2\phi_4^2\phi_8\phi_{12}$	$\frac{1}{8}(3q^6+q^5+q^4+q^2+q+1)q^4\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{8}(2q^4-q^3+q^2+q+1)q^4\phi_3\phi_4$
$F_4^I[1]$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1^4\phi_3^2\phi_8\phi_{12}$	$-\frac{1}{8}(q^5+2q^4-q^3-q^2+1)q^4\phi_1^3\phi_3$	$\frac{1}{8}(2q^3+q^2-1)q^4\phi_1^3\phi_3$
$\phi''_{1,12}$	$\frac{1}{8}q^4\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$\frac{1}{8}(3q^6-q^5+q^4+q^2-q+1)q^4\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{8}(2q^2-q+1)q^4\phi_1^2\phi_3\phi_4$
$\phi_{4,8}$	$\frac{1}{8}q^4\phi_2^4\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$-\frac{1}{8}(q^5-2q^4-q^3+q^2-1)q^4\phi_3^2\phi_6$	$\frac{1}{8}(2q^6-3q^5+4q^4+q^3-q^2+1)q^4\phi_2^2$
B_2,r	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_3^2\phi_6^2\phi_8$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2\phi_3\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{4}(2q^4+q^3+q^2+q+1)q^4\phi_1^2\phi_3$
$\phi'_{6,6}$	$\frac{1}{3}q^4\phi_3^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$\frac{1}{3}(2q^4+1)q^4\phi_3\phi_6$	$-\frac{1}{3}(q^6-q^5-2q^4-q^2+q-1)q^4\phi_3$
$F_4[\theta]$	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_8$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$
$F_4[\theta^2]$	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^4\phi_2^4\phi_8$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$
$\phi''_{4,7}$	$\frac{1}{4}q^4\phi_2^2\phi_4^2\phi_6^2\phi_8\phi_{12}$	$\frac{1}{4}(q^7+2q^6+q^4+q^3+1)q^4\phi_2\phi_6$	$-\frac{1}{4}(q^5-2q^4-q^3+q^2-1)q^4\phi_4$
B_2,ϵ'	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_3^2\phi_4\phi_8\phi_{12}$	$\frac{1}{4}(q^7-2q^6-q^4+q^3-1)q^4\phi_1\phi_3$	$-\frac{1}{4}(q^3-q^2-q-1)q^4\phi_1^2\phi_3$
$F_4[i]$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^4\phi_2^2\phi_3^2\phi_6^2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_6$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3$
$F_4[-i]$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^4\phi_2^2\phi_3^2\phi_6^2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_6$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_3$
$\phi'_{8,9}$	$q^9\phi_4^2\phi_8\phi_{12}$	$q^9\phi_4$	$q^9\phi_2\phi_4$
$\phi''_{8,9}$	$q^9\phi_4^2\phi_8\phi_{12}$	$q^9\phi_4\phi_8$	$q^9\phi_4$
$\phi_{9,10}$	$q^{10}\phi_3^2\phi_6^2\phi_{12}$	$q^{10}\phi_3\phi_6$	$q^{10}\phi_3$
$\phi_{4,13}$	$\frac{1}{2}q^{13}\phi_2^2\phi_6^2\phi_8$	$\frac{1}{2}q^{13}\phi_2\phi_6$	q^{13}
$\phi''_{2,16}$	$\frac{1}{2}q^{13}\phi_4\phi_8\phi_{12}$	$\frac{1}{2}q^{13}\phi_2\phi_6$	.
$\phi'_{2,16}$	$\frac{1}{2}q^{13}\phi_4\phi_8\phi_{12}$	$-\frac{1}{2}q^{13}\phi_1\phi_3$	q^{13}
B_2,ϵ	$\frac{1}{2}q^{13}\phi_1^2\phi_3^2\phi_8$	$-\frac{1}{2}q^{13}\phi_1\phi_3$	.
$\phi_{1,24}$	q^{24}	.	.

Tabelle T.A.81: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 1

	$c_{1,4}$	$c_{1,5}$	$c_{1,6}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}q\phi_5^2\phi_6^2$	$\frac{1}{2}(q^3+q^2-q+1)q\phi_2$	$\frac{1}{2}q(2q^4+q^3+1)$
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}q(q^6+2q^4+1)$	$\frac{1}{2}q\phi_8$	$\frac{1}{2}q(2q^4+q^3+1)$
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}q\phi_{12}\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_8$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_3$
$B_2,1$	$\frac{1}{2}q(q^6+2q^4-2q^3+1)$	$\frac{1}{2}(q^3-q^2-q-1)q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_3$
$\phi_{9,2}$	$(q^4+q^2+q+1)q^2\phi_6$	$q^2(2q^4+q^2+1)$	$q^2\phi_3\phi_6$
$\phi'_{8,3}$	$(q^4-q^3+1)q^3\phi_4$	$q^3\phi_3\phi_6$	q^3
$\phi''_{8,3}$	$q^3\phi_4\phi_8$	$q^3\phi_3\phi_6$	$q^3(q^4+q^3+q^2+1)$
$\phi_{12,4}$	$\frac{1}{24}(2q^5-3q^4-q^3+4q^2+3q+1)q^4\phi_2^3$	$\frac{1}{24}(2q+1)(3q^2+2q+1)q^4\phi_2^2$	$\frac{1}{24}(3q+1)q^4\phi_2^2\phi_3$
$\phi'_{9,6}$	$\frac{1}{8}(2q^6-q^5-2q^4-q^3+3q^2+2q+1)q^4\phi_4$	$\frac{1}{8}(2q^2+q+1)q^4\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2^2\phi_3$
$\phi'_{1,12}$	$\frac{1}{8}(2q^2+q+1)q^4\phi_4^2\phi_6$	$-\frac{1}{8}(2q^2-q+1)q^4\phi_1\phi_4$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1^3\phi_3$
$F_4^{II}[1]$	$\frac{1}{24}(2q-1)q^4\phi_1^3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{24}(2q-1)(3q^2-2q+1)q^4\phi_1^2$	$\frac{1}{24}(3q^3+4q^2-4q+1)q^4\phi_1^2$
$\phi''_{6,6}$	$\frac{1}{12}(2q^4-q^3+3q^2+q+1)q^4\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{12}q^4(7q^4+4q^2+1)$	$\frac{1}{12}(3q^2-2q+1)q^4\phi_2\phi_3$
$\phi_{16,5}$	$\frac{1}{4}q^4\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{4}(2q^2-q+1)q^4\phi_2^3$	$-\frac{1}{4}(q^4-3q^3-q-1)q^4\phi_2$
$F_4[-1]$	$-\frac{1}{4}(3q^3-1)q^4\phi_1^2\phi_4$	$-\frac{1}{4}(2q^2+q+1)q^4\phi_1^3$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1^3\phi_3$
B_2,ϵ''	$-\frac{1}{4}q^4(q^7-4q^6-3q^4+3q^3-1)$	$\frac{1}{4}(q^3-q^2-q-1)q^4\phi_1$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2\phi_3$
$\phi'_{4,7}$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2^2\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{4}(q^3+q^2-q+1)q^4\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2\phi_3$
$\phi''_{9,6}$	$\frac{1}{8}(2q^2+q+1)q^4\phi_2^2\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{8}(2q^2+q+1)q^4\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{8}(3q^2+1)q^4\phi_2\phi_3$
$F_4'[1]$	$\frac{1}{8}(2q^6+3q^5+4q^4-q^3-q^2+1)q^4\phi_1^2$	$-\frac{1}{8}(2q^3+q^2-1)q^4\phi_1^2$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1^3\phi_3$
$\phi''_{1,12}$	$\frac{1}{8}(2q^4+q^3+q^2-q+1)q^4\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{8}(2q^2-q+1)q^4\phi_1\phi_4$	$\frac{1}{8}q^4(3q^5+2q^4-q^3+5q^2-2q+1)$
$\phi_{4,8}$	$\frac{1}{8}(2q^3-q^2+1)q^4\phi_2^3\phi_6$	$\frac{1}{8}(2q^3-q^2+1)q^4\phi_2^2$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2^2\phi_3$
B_2,r	$\frac{1}{4}(2q^4-q^3+q^2-q+1)q^4\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_3\phi_4$
$\phi'_{6,6}$	$-\frac{1}{3}(q^6+q^5-2q^4-q^2-q-1)q^4\phi_6$	$\frac{1}{3}q^4(4q^4+q^2+1)$	$\frac{1}{3}q^4\phi_3\phi_6$
$F_4[\theta]$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^2\phi_2^2$
$F_4[\theta^2]$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1^3\phi_2^3\phi_4$	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^2\phi_2^2$
$\phi''_{4,7}$	$\frac{1}{4}(q^3+q^2-q+1)q^4\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{4}(q^3+q^2-q+1)q^4\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4(q^5-4q^4-3q^3-q^2-1)$
B_2,ϵ'	$\frac{1}{4}(q^5+2q^4-q^3-q^2+1)q^4\phi_4$	$\frac{1}{4}(q^3-q^2-q-1)q^4\phi_1$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_3\phi_4$
$F_4[i]$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2\phi_3$
$F_4[-i]$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2\phi_2\phi_3$
$\phi'_{8,9}$	$-q^9\phi_1\phi_4$	q^9	$\cdot$
$\phi''_{8,9}$	$q^9\phi_4$	q^9	q^9
$\phi_{9,10}$	$q^{10}\phi_6$	q^{10}	$\cdot$
$\phi_{4,13}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi''_{2,16}$	q^{13}	$\cdot$	$\cdot$
$\phi'_{2,16}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
B_2,ϵ	q^{13}	$\cdot$	$\cdot$
$\phi_{1,24}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Tabelle T.A.82: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 2

	$c_{1,7}$	$c_{1,8}$	$c_{1,9}$	$c_{1,10}$	$c_{1,11}$	$c_{1,12}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}q\phi_2\phi_6$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}q\phi_2\phi_6$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{2}q(q^3+q^2-q+1)$
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}q\phi_2\phi_6$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_3$	$\frac{1}{2}q\phi_2\phi_6$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q(q^3+q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}q\phi_2\phi_4$
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}q(2q^4-q^3+1)$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_3$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q(q^3-q^2-q-1)$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_4$
$B_2,1$	$\frac{1}{2}q(2q^4-q^3+1)$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_3$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_3$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_4$	$-\frac{1}{2}q(q^3-q^2-q-1)$
$\phi_{9,2}$	$q^2\phi_3\phi_6$	$q^2\phi_3\phi_6$	$q^2\phi_4$	$q^2\phi_4$	$q^2(2q^2+1)$	q^2
$\phi'_{8,3}$	q^3	$q^3(q^4+q^2+2)$	q^3	$2q^3$	$2q^3$	$\cdot$
$\phi''_{8,3}$	$q^3(q^4-q^3+q^2+1)$	q^3	$q^3\phi_4$	q^3	$q^3\phi_4$	$q^3\phi_4$
$\phi_{12,4}$	$-\frac{1}{24}(3q^3-4q^2-4q-1)q^4\phi_2^2$	$\frac{1}{6}q^4\phi_2^2\phi_3$	$\frac{1}{24}(2q+1)(3q+1)q^4\phi_2$	$\frac{1}{6}(2q+1)q^4\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4\phi_2^2$	$\cdot$
$\phi'_{9,6}$	$\frac{1}{8}q^4\phi_2^3\phi_6$	$\frac{1}{2}q^4\phi_2^3\phi_4$	$-\frac{1}{8}(2q+1)q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q^4\phi_2$	$-\frac{1}{4}(q-3)q^4\phi_2$	$\cdot$
$\phi'_{1,12}$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1^2\phi_2\phi_6$	$\frac{1}{2}q^4\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{8}(2q-1)q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1$	$-\frac{1}{4}(q+3)q^4\phi_1$	$\cdot$
$F_4^{II}[1]$	$-\frac{1}{24}(3q-1)q^4\phi_1^2\phi_6$	$\frac{1}{6}q^4\phi_1^2\phi_6$	$-\frac{1}{24}(3q-1)(2q-1)q^4\phi_1$	$\frac{1}{6}(2q-1)q^4\phi_1$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2$	$\cdot$
$\phi''_{6,6}$	$-\frac{1}{12}(3q^2+2q+1)q^4\phi_1\phi_6$	$\frac{1}{3}q^4\phi_3\phi_6$	$-\frac{1}{12}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q^4\phi_4$	$\cdot$
$\phi_{16,5}$	$\frac{1}{4}(q^4+3q^3+q-1)q^4\phi_1$	$\frac{1}{4}q^4\phi_2^3\phi_6$	$\frac{1}{4}q^4\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q^4\phi_2$	$\frac{1}{2}q^4\phi_2^2$	$\cdot$
$F_4[-1]$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}q^4\phi_1^2\phi_3$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1$	$\frac{1}{2}q^4\phi_1^2$	$\cdot$
B_2,ϵ''	$\frac{1}{8}q^4\phi_1^2\phi_2\phi_6$	$\frac{1}{2}q^4\phi_1^2\phi_3$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	$\cdot$
$\phi'_{4,7}$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}q^4\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q^4\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	$\cdot$
$\phi''_{9,6}$	$-\frac{1}{8}q^4(3q^5-2q^4-q^3-5q^2-2q-1)$	$\cdot$	$\frac{1}{8}(2q^2+q+1)q^4\phi_2$	$\cdot$	$\frac{1}{4}q^4\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q^4\phi_4$
$F_4'[1]$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1^2\phi_2\phi_6$	$\cdot$	$\frac{1}{8}(2q-1)q^4\phi_1\phi_2$	$\cdot$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$
$\phi''_{1,12}$	$-\frac{1}{8}(3q^2+1)q^4\phi_1\phi_6$	$\cdot$	$-\frac{1}{8}(2q^2-q+1)q^4\phi_1$	$\cdot$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q^4\phi_4$
$\phi_{4,8}$	$\frac{1}{8}q^4\phi_2^3\phi_6$	$\cdot$	$-\frac{1}{8}(2q+1)q^4\phi_1\phi_2$	$\cdot$	$\frac{1}{4}q^4\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$
B_2,r	$\frac{1}{4}q^4\phi_2\phi_4\phi_6$	$\cdot$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\cdot$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	q^4
$\phi'_{6,6}$	$\frac{1}{3}q^4\phi_3\phi_6$	$\frac{1}{3}q^4\phi_3\phi_6$	$\frac{1}{3}q^4(2q^2+1)$	$\frac{1}{3}q^4(2q^2+1)$	$\cdot$	$\cdot$
$F_4[\theta]$	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	$\cdot$	$\cdot$
$F_4[\theta^2]$	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{3}q^4\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi''_{4,7}$	$\frac{1}{4}q^4\phi_2\phi_4\phi_6$	$\cdot$	$\frac{1}{4}(2q^2-q+1)q^4\phi_2$	$\cdot$	$\cdot$	$\frac{1}{2}q^4\phi_4$
B_2,ϵ'	$\frac{1}{4}q^4(q^5+4q^4-3q^3+q^2+1)$	$\cdot$	$-\frac{1}{4}(2q^2+q+1)q^4\phi_1$	$\cdot$	$\cdot$	$\frac{1}{2}q^4\phi_4$
$F_4[i]$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2^2\phi_6$	$\cdot$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\cdot$	$\cdot$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$
$F_4[-i]$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2^2\phi_6$	$\cdot$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\cdot$	$\cdot$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$
$\phi'_{8,9}$	$\cdot$	q^9	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi''_{8,9}$	q^9	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi_{9,10}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi_{4,13}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi''_{2,16}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi'_{2,16}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
B_2,ϵ	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi_{1,24}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Tabelle T.A.83: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 3

	$c_{1,13}$	$c_{1,14}$	$c_{1,15}$	$c_{1,16}$	$c_{1,17}$	$c_{1,18}$	$c_{1,19}$	$c_{1,20}$	$c_{1,21}$	$c_{1,22}$	$c_{1,23}$	$c_{1,24}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}(2q+1)q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q(2q^2-q+1)$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	q
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}(2q-1)q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q(2q^2+q+1)$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}(2q+1)q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q(2q^2-q+1)$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	q
$B_2,1$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}(2q-1)q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q(2q^2+q+1)$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	.
$\phi_{9,2}$	$q^2\phi_4$	$q^2\phi_4$	q^2	q^2	q^2	q^2	q^2	q^2	q^2	q^2	q^2	.
$\phi'_{8,3}$	$3q^3$	q^3	$4q^3$	$2q^3$	.	q^3	.	q^3	.	.	.	.
$\phi''_{8,3}$	q^3	q^3	q^3	q^3	q^3	q^3	q^3	.	q^3	.	.	.
$\phi_{12,4}$	$\frac{1}{2}q^4\phi_2$	.	$\frac{1}{24}q^4(q^2+23)$	$-\frac{1}{24}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{24}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{24}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{24}q^4\phi_1\phi_2$	.	.	.	.	.
$\phi'_{9,6}$	$\frac{1}{2}q^4(q+3)$	.	$\frac{1}{8}q^4(q^2+23)$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	.	.	.	.	.
$\phi'_{1,12}$	$-\frac{1}{2}q^4(q-3)$	.	$\frac{1}{8}q^4(q^2+23)$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	.	.	.	.	.
$F_4^{II}[1]$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1$	.	$\frac{1}{24}q^4(q^2+23)$	$-\frac{1}{24}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{24}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{24}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{24}q^4\phi_1\phi_2$	.	.	.	.	.
$\phi''_{6,6}$	q^4	.	$\frac{1}{12}q^4(q^2+23)$	$-\frac{1}{12}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{12}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{12}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{12}q^4\phi_1\phi_2$	.	.	.	.	.
$\phi_{16,5}$	$\frac{1}{2}q^4\phi_2$	$\frac{1}{2}q^4\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4(q^2+3)$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	.	.	.	.	.
$F_4[-1]$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4(q^2+3)$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	.	.	.	.	.
B_2,ϵ''	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1$	$\frac{1}{2}q^4\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4(q^2+3)$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	.	.	.	.	.
$\phi'_{4,7}$	$\frac{1}{2}q^4\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4(q^2+3)$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	.	.	.	.	.
$\phi''_{9,6}$	.	$\frac{1}{2}q^4\phi_2$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^4(q^2+7)$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	.	.	.	.	.
$F_4'[1]$	.	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^4(q^2+7)$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	.	.	.	.	.
$\phi''_{1,12}$	.	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^4(q^2+7)$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	.	.	.	.	.
$\phi_{4,8}$	.	$\frac{1}{2}q^4\phi_2$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^4(q^2+7)$	$\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^4\phi_1\phi_2$	.	.	.	.	.
B_2,r	.	q^4	$\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4(q^2+7)$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	.	.	.	.	.
$\phi'_{6,6}$	.	.	$\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}q^4(q^2+2)$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	.	.	.	.	.
$F_4[\theta]$	.	.	$\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}q^4(q^2+2)$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	$\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}q^4(q^2+2)$	$-\frac{1}{3}q^4\phi_1\phi_2$	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	.	.	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4(q^2+3)$	.	.	.	.	.
B_2,ϵ'	.	.	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4(q^2+3)$	.	.	.	.	.
$F_4[i]$	.	.	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4(q^2+3)$	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	.	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^4\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^4(q^2+3)$	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{8,9}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi_{9,10}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi_{4,13}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{2,16}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{2,16}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
B_2,ϵ	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi_{1,24}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Tabelle T.A.84: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 4

	$c_{1,25}$	$c_{1,26}$	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	$c_{2,3}$	$c_{2,4}$	$c_{2,5}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	.	.	$\frac{1}{2}\phi_2^3\phi_6$	$\frac{1}{2}(q^3+q+1)\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q+1)\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$
$\phi''_{2,4}$	q	.	$\frac{1}{2}(q^5+q^3+q^2+2q-1)$	$\frac{1}{2}(q^4+q^3+q^2+2q-1)$	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$\frac{1}{2}(2q^3+q^2+2q-1)$	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$
$\phi'_{2,4}$	.	.	$\frac{1}{2}(q^5+q^3-q^2+2q+1)$	$-\frac{1}{2}(q^4-q^3+q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}(2q^3-q^2+2q+1)$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$
$B_2,1$	q	.	$\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_3$	$-\frac{1}{2}(q^3+q-1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$
$\phi_{9,2}$	.	.	$(2q^2+1)\phi_3\phi_6$	$(2q^2+1)\phi_4$	$q^4+q^3+3q^2+1$	$q^4-q^3+3q^2+1$	$3q^2+1$
$\phi'_{8,3}$	.	.	$(q^4+q^2+2)q\phi_4$	$2q\phi_4$	$(q+2)q\phi_4$	$-(q-2)q\phi_4$	$q(q^2+2)$
$\phi''_{8,3}$	.	.	$q\phi_4^3$	$(2q^2+1)q\phi_4$	$q(3q^2+1)$	$q(3q^2+1)$	$q(2q^2+1)$
$\phi_{12,4}$	.	.	$\frac{1}{4}q\phi_2^4\phi_3\phi_6$	$\frac{1}{4}(q^3+q+1)q\phi_2^3$	$\frac{1}{4}(2q+1)q\phi_2^3$	$\frac{1}{4}q\phi_2^3$	$\frac{1}{4}(2q+1)q\phi_2^2$
$\phi'_{9,6}$	.	.	$\frac{1}{4}(q^4+q^3+3q+1)q\phi_3\phi_4$	$-\frac{1}{4}(q^3-3q-1)q\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{4}(2q+1)q\phi_2^3$	$\frac{1}{4}q(q^3-q^2+3q+1)$	$\frac{1}{4}(3q+1)q\phi_2$
$\phi'_{1,12}$	.	.	$-\frac{1}{4}(q^4-q^3-3q+1)q\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{4}(q^3-3q+1)q\phi_1\phi_4$	$\frac{1}{4}q(q^3+q^2+3q-1)$	$-\frac{1}{4}(2q-1)q\phi_1^3$	$-\frac{1}{4}(3q-1)q\phi_1$
$F_4^{II}[1]$	.	.	$-\frac{1}{4}q\phi_1^4\phi_3\phi_6$	$-\frac{1}{4}(q^3+q-1)q\phi_1^3$	$\frac{1}{4}q\phi_1^3$	$-\frac{1}{4}(2q-1)q\phi_1^3$	$\frac{1}{4}(2q-1)q\phi_1^2$
$\phi''_{6,6}$	.	.	$q^2\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{2}(q^2+2)q^2\phi_4$	$\frac{1}{2}(q+2)q^2\phi_4$	$-\frac{1}{2}(q-2)q^2\phi_4$	q^2
$\phi_{16,5}$	.	.	$\frac{1}{2}q\phi_2^4\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{2}q\phi_2^3\phi_4$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_2^3$	$\frac{1}{2}q\phi_2^3$
$F_4[-1]$	.	.	$-\frac{1}{2}q\phi_1^4\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1^3$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1^3$
B_2,ϵ''	.	.	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1^3\phi_3$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	.	$q^2\phi_6$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$
$\phi'_{4,7}$	.	.	$\frac{1}{2}q^2\phi_2^3\phi_6$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$q^2\phi_3$	.	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$
$\phi''_{9,6}$	.	.	$\frac{1}{4}(q^4+3q^3+q+1)q\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{4}(q^4+5q^3+3q^2+2q+1)q\phi_4$	$\frac{1}{4}q(7q^3+3q^2+q+1)$	$\frac{1}{4}(2q^2+q+1)q\phi_2^2$	$\frac{1}{4}(2q^2+q+1)q\phi_2$
$F_4^I[1]$	.	.	$-\frac{1}{4}q\phi_1^4\phi_3^2$	$\frac{1}{4}(q^3+2q^2+q+1)q\phi_1^3$	$\frac{1}{4}q\phi_1^3$	$-\frac{1}{4}(2q^2+q+1)q\phi_1^2$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2$
$\phi''_{1,12}$	.	.	$-\frac{1}{4}(q^4-3q^3-q+1)q\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}(q^4-5q^3+3q^2-2q+1)q\phi_4$	$-\frac{1}{4}(2q^2-q+1)q\phi_1^2$	$\frac{1}{4}q(7q^3-3q^2+q-1)$	$\frac{1}{4}(2q^2-q+1)q\phi_1$
$\phi_{4,8}$	.	.	$\frac{1}{4}q\phi_2^4\phi_6^2$	$-\frac{1}{4}(q^3-2q^2+q-1)q\phi_2^3$	$\frac{1}{4}(2q^2-q+1)q\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q\phi_2^3$	$\frac{1}{4}q\phi_2^2$
B_2,r	.	.	.	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q^3\phi_2^2$	.
$\phi'_{6,6}$	.	.	$q^2\phi_3\phi_4\phi_6$	$q^2\phi_3\phi_6$	$q^2\phi_3$	$q^2\phi_6$	$q^2\phi_4$
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	.	.	$\frac{1}{2}q^3\phi_2^3\phi_6$	$\frac{1}{2}(q^3+q+1)q^3\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^3(q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}q^3\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q^3\phi_2$
B_2,ϵ'	.	.	$\frac{1}{2}q^3\phi_1^3\phi_3$	$-\frac{1}{2}(q^3+q-1)q^3\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q^3(q^2+2q-1)$	$\frac{1}{2}q^3\phi_1$
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	.	.	$q^3\phi_4^3$	$q^3\phi_4$	$q^3\phi_2^2$	$q^3\phi_1^2$	q^3
$\phi''_{8,9}$	.	.	$(2q^4+q^2+1)q^3\phi_4$	$q^3\phi_4^2$	$q^3\phi_4$	$q^3\phi_4$	q^3
$\phi_{9,10}$	.	.	$(q^2+2)q^4\phi_3\phi_6$	$q^4(q^2+2)$	$q^4(q+2)$	$-q^4(q-2)$	q^4
$\phi_{4,13}$	.	.	$\frac{1}{2}q^5\phi_3^2\phi_6$	$\frac{1}{2}q^5\phi_2$	q^5	.	.
$\phi''_{2,16}$	.	.	$\frac{1}{2}q^5(q^5+2q^4-q^3+q^2+1)$	$\frac{1}{2}q^5\phi_2$	.	q^5	.
$\phi'_{2,16}$	.	.	$-\frac{1}{2}q^5(q^5-2q^4-q^3-q^2-1)$	$-\frac{1}{2}q^5\phi_1$	q^5	.	.
B_2,ϵ	.	.	$-\frac{1}{2}q^5\phi_1^3\phi_3$	$-\frac{1}{2}q^5\phi_1$	.	q^5	.
$\phi_{1,24}$	.	.	q^{10}	.	.	.	.

Tabelle T.A.85: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 5

	$c_{2,6}$	$c_{2,7}$	$c_{2,8}$	$c_{2,9}$	$c_{2,10}$	$c_{2,11}$	$c_{2,12}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2\phi_3\phi_6$	$\frac{1}{2}(q^3+q^2+1)\phi_2$
$\phi_{2,4}''$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^5+q^4+q^3+q^2+q-1)$	$\frac{1}{2}(q^3-q^2+2q-1)\phi_2$
$\phi_{2,4}'$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^5-q^4+q^3-q^2+q+1)$	$-\frac{1}{2}(q^3+q^2+2q+1)\phi_1$
$B_2,1$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_3\phi_6$	$-\frac{1}{2}(q^3-q^2-1)\phi_1$
$\phi_{9,2}$	$2q^2+1$	$2q^2+1$	ϕ_4	ϕ_4	1	$\phi_3\phi_4\phi_6$	ϕ_4^2
$\phi_{8,3}'$	$q(q^2+3)$	$2q$	$3q$	q	q	$q\phi_4^2$	$q\phi_4$
$\phi_{8,3}''$	q	$q\phi_4$	q	q	$.$	$q\phi_3\phi_4\phi_6$	$q\phi_4^2$
$\phi_{12,4}$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$.$	$.$	$\frac{1}{4}q\phi_2^3\phi_3\phi_6$	$\frac{1}{4}(2q^3+q+1)q\phi_2^2$
$\phi_{9,6}'$	$\frac{1}{2}q(q^2+4q+1)$	$\frac{1}{4}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q(3q+1)$	$.$	$.$	$\frac{1}{4}q\phi_2\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}(2q^2+2q+1)q\phi_1\phi_4$
$\phi_{1,12}'$	$-\frac{1}{2}q(q^2-4q+1)$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q(3q-1)$	$.$	$.$	$\frac{1}{4}q\phi_1\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}(2q^2-2q+1)q\phi_2\phi_4$
$F_4^{II}[1]$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$.$	$.$	$\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_3\phi_6$	$\frac{1}{4}(2q^3+q-1)q\phi_1^2$
$\phi_{6,6}''$	q^2	q^2	q^2	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^2\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{2}(2q^2+1)q^2\phi_4$
$\phi_{16,5}$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$.$	$\frac{1}{2}q\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2\phi_4$
$F_4[-1]$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$.$	$\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_3\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_4$
B_2,ϵ''	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$.$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$.$	$\frac{1}{2}q^3\phi_1\phi_3$	$\frac{1}{2}q^4\phi_1$
$\phi_{4,7}'$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$.$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$.$	$\frac{1}{2}q^3\phi_2\phi_6$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_2$
$\phi_{9,6}''$	$.$	$\frac{1}{4}q\phi_2^2$	$.$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$.$	$\frac{1}{4}(3q^3+1)q\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{4}(2q^2+1)q\phi_2\phi_4$
$F_4'[1]$	$.$	$-\frac{1}{4}q\phi_2^2$	$.$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$.$	$\frac{1}{4}q\phi_1^3\phi_3^2$	$-\frac{1}{4}(2q^2+1)q\phi_1^2\phi_2$
$\phi_{1,12}''$	$.$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2$	$.$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$.$	$\frac{1}{4}(3q^3-1)q\phi_2\phi_6$	$\frac{1}{4}(2q^2+1)q\phi_1\phi_4$
$\phi_{4,8}$	$.$	$\frac{1}{4}q\phi_2^2$	$.$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$.$	$\frac{1}{4}q\phi_2^3\phi_6^2$	$-\frac{1}{4}(2q^2+1)q\phi_1\phi_2^2$
B_2,r	$.$	$.$	$.$	q^2	$.$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2\phi_3\phi_6$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$
$\phi_{6,6}'$	q^2	$.$	$.$	$.$	$.$	$q^2\phi_3\phi_6$	q^2
$F_4[\theta]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[\theta^2]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi_{4,7}''$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^3\phi_2\phi_3\phi_6$	$\frac{1}{2}q^3\phi_2$
B_2,ϵ'	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^3\phi_1\phi_3\phi_6$	$\frac{1}{2}q^3\phi_1$
$F_4[i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[-i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi_{8,9}'$	q^3	$.$	$.$	$.$	$.$	$q^5\phi_4$	$.$
$\phi_{8,9}''$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$q^3\phi_4\phi_8$	$q^3\phi_4$
$\phi_{9,10}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$q^4\phi_3\phi_6$	q^4
$\phi_{4,13}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^6\phi_2\phi_6$	$\frac{1}{2}q^6\phi_2$
$\phi_{2,16}''$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^6\phi_2\phi_6$	$-\frac{1}{2}q^6\phi_1$
$\phi_{2,16}'$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^6\phi_1\phi_3$	$-\frac{1}{2}q^6\phi_2$
B_2,ϵ	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^6\phi_1\phi_3$	$\frac{1}{2}q^6\phi_1$
$\phi_{1,24}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$

Tabelle T.A.86: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 6

	$c_{2,13}$	$c_{2,14}$	$c_{2,15}$	$c_{2,16}$	$c_{2,17}$	$c_{2,18}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}(q^4+q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}(q^4+2q^3+q^2+q-1)$	$\frac{1}{2}(q^3+q^2+q-1)$	$\frac{1}{2}(q^3+q^2+q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi'_{2,4}$	$-\frac{1}{2}(q^4-2q^3+q^2-q-1)$	$\frac{1}{2}(q^3-q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}(q^3-q^2+q+1)$	$-\frac{1}{2}(2q+1)\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(2q+1)\phi_1$
$B_2,1$	$-\frac{1}{2}(q^4+q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi_{9,2}$	ϕ_4^2	q^3+2q^2+1	$-(q^3-2q^2-1)$	$2q^2+1$	$2q^2+1$	ϕ_4
$\phi'_{8,3}$	$q\phi_4$	$q\phi_3$	$q\phi_6$	q	q	q
$\phi''_{8,3}$	$q\phi_4^2$	$q(2q^2+1)$	$q(2q^2+1)$	$q\phi_4$	$q\phi_4$	q
$\phi_{12,4}$	$\frac{1}{4}q\phi_2^3$	$\frac{1}{4}(2q+1)q\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q\phi_2^3$	$-\frac{1}{4}(q^2-2q-1)q\phi_2$	$\frac{1}{4}q\phi_2^2$
$\phi'_{9,6}$	$\frac{1}{4}q\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{4}(2q^2+q+1)q\phi_2$	$-\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2$
$\phi'_{1,12}$	$\frac{1}{4}q\phi_1\phi_4$	$\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}(2q^2-q+1)q\phi_1$	$\frac{1}{4}q\phi_1\phi_4$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}q\phi_2^2$
$F_4^{II}[1]$	$\frac{1}{4}q\phi_1^3$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2$	$\frac{1}{4}(2q-1)q\phi_1^2$	$-\frac{1}{4}(q^2+2q-1)q\phi_1$	$\frac{1}{4}q\phi_1^3$	$\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2$
$\phi''_{6,6}$	$\frac{1}{2}q^2\phi_4$	$\frac{1}{2}q^2\phi_4$	$\frac{1}{2}q^2\phi_4$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$
$\phi_{16,5}$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$
$F_4[-1]$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}(2q^2-q+1)q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$
B_2,ϵ''	$-\frac{1}{2}q^4\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{4,7}$	$\frac{1}{2}q^4\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$.$	$.$	$-q^2$
$\phi''_{9,6}$	$\frac{1}{4}(4q^3+2q^2+q+1)q\phi_4$	$\frac{1}{4}(4q^2-q+1)q\phi_2$	$\frac{1}{4}(2q^2+q+1)q\phi_2$	$\frac{1}{4}q\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{4}q(q^3-3q^2-q-1)$	$-\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2$
$F_4'[1]$	$-\frac{1}{4}(2q^2+q+1)q\phi_1^2$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2$	$\frac{1}{4}(2q^2+q+1)q\phi_1$	$\frac{1}{4}q\phi_1\phi_4$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2$
$\phi''_{1,12}$	$\frac{1}{4}(4q^3-2q^2+q-1)q\phi_4$	$\frac{1}{4}(2q^2-q+1)q\phi_1$	$\frac{1}{4}(4q^2+q+1)q\phi_1$	$-\frac{1}{4}q(q^3+3q^2-q+1)$	$\frac{1}{4}q\phi_1\phi_4$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2$
$\phi_{4,8}$	$\frac{1}{4}(2q^2-q+1)q\phi_2^2$	$\frac{1}{4}(2q^2-q+1)q\phi_2$	$\frac{1}{4}q\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2$
B_2,r	$-\frac{1}{2}q^2(2q^4+q^2+1)$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$
$\phi'_{6,6}$	q^2	$q^2\phi_2$	$-q^2\phi_1$	q^2	q^2	$.$
$F_4[\theta]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[\theta^2]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{4,7}$	$\frac{1}{2}q^3(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}q^3\phi_2$	$\frac{1}{2}q^3\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_1$	$\frac{1}{2}q^3\phi_2$	$.$
B_2,ϵ'	$-\frac{1}{2}q^3(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}q^3\phi_1$	$\frac{1}{2}q^3\phi_1$	$\frac{1}{2}q^3\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_2$	$.$
$F_4[i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[-i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{8,9}$	$.$	q^4	$-q^4$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{8,9}$	$q^3\phi_4$	q^3	q^3	q^3	q^3	$.$
$\phi_{9,10}$	q^4	q^4	q^4	$.$	$.$	$.$
$\phi_{4,13}$	$-\frac{1}{2}q^6\phi_1$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{2,16}$	$\frac{1}{2}q^6\phi_2$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{2,16}$	$\frac{1}{2}q^6\phi_1$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
B_2,ϵ	$-\frac{1}{2}q^6\phi_2$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi_{1,24}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$

Tabelle T.A.87: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 7

	$c_{2,19}$	$c_{2,20}$	$c_{2,21}(q \equiv 1 mod 4)$	$c_{2,21}(q \equiv 3 mod 4)$	$c_{2,22}(q \equiv 1 mod 4)$	$c_{2,22}(q \equiv 3 mod 4)$	$c_{2,23}(q \equiv 1 mod 4)$	$c_{2,23}(q \equiv 3 mod 4)$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$B_2,1$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi_{9,2}$	ϕ_4	ϕ_4	1	1	1	1	1	1
$\phi'_{8,3}$	q	$2q$	$2q$	$2q$	$2q$	$2q$	.	.
$\phi''_{8,3}$	q	q	q	q	q	q	q	q
$\phi_{12,4}$	$-\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{4}q(q^2+q+2)$	$-\frac{1}{4}(q-2)q\phi_2$	$-\frac{1}{4}(q+2)q\phi_1$	$\frac{1}{4}q(q^2-q+2)$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2$
$\phi'_{9,6}$	$\frac{1}{4}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{4}q(q^2+q+2)$	$-\frac{1}{4}(q-2)q\phi_2$	$-\frac{1}{4}(q+2)q\phi_1$	$\frac{1}{4}q(q^2-q+2)$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2$
$\phi'_{1,12}$	$\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{4}q(q^2+q+2)$	$\frac{1}{4}(q-2)q\phi_2$	$\frac{1}{4}(q+2)q\phi_1$	$-\frac{1}{4}q(q^2-q+2)$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_2$
$F_4^{II}[1]$	$-\frac{1}{4}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{4}q(q^2+q+2)$	$\frac{1}{4}(q-2)q\phi_2$	$\frac{1}{4}(q+2)q\phi_1$	$-\frac{1}{4}q(q^2-q+2)$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_2$
$\phi''_{6,6}$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	.	.	.	.	.	.	.
$\phi_{16,5}$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$
$F_4[-1]$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$
B_2,ϵ''	$-q^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$
$\phi'_{4,7}$	.	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$
$\phi''_{9,6}$	$\frac{1}{4}q\phi_2^2$	.	$\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}(q+2)q\phi_1$	$\frac{1}{4}q(q^2-q+2)$
$F_4[1]$	$\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2$	.	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_2$	$\frac{1}{4}(q+2)q\phi_1$	$-\frac{1}{4}q(q^2-q+2)$
$\phi''_{1,12}$	$\frac{1}{4}q\phi_1\phi_2$	.	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_2$	$\frac{1}{4}(q+2)q\phi_1$	$-\frac{1}{4}q(q^2-q+2)$
$\phi_{4,8}$	$\frac{1}{4}q\phi_2^2$	.	$\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}(q+2)q\phi_1$	$\frac{1}{4}q(q^2-q+2)$
B_2,r	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{6,6}$	.	q^2						
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	.	.	.	.	.	.	.	.
B_2,ϵ'	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{8,9}$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi_{9,10}$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi_{4,13}$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{2,16}$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{2,16}$	.	.	.	.	.	.	.	.
B_2,ϵ	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi_{1,24}$	.	.	.	.	.	.	.	.

Tabelle T.A.88: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 8

	$c_{2,24}(q\equiv 1 mod 4)$	$c_{2,24}(q\equiv 3 mod 4)$	$c_{2,25}$	$c_{2,26}$	$c_{3,1}$	$c_{3,2}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2^2\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{2}(q^4+q^3+1)\phi_2$
$\phi_{2,4}''$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q^2-q-1)\phi_4\phi_8$	$\frac{1}{2}(q^5+q^3+q+1)$
$\phi_{2,4}'$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^2+q-1)\phi_4\phi_8$	$\frac{1}{2}(q^5+q^3+q-1)$
$B_2,1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_3\phi_8$	$\frac{1}{2}(q^4-q^3+1)\phi_1$
$\phi_{9,2}$	1	1	1	1	$(q^4+2)q^2\phi_3\phi_6$	$2q^2\phi_3\phi_6$
$\phi_{8,3}'$	.	.	.	.	$q^3\phi_4^2\phi_8$	$q^3\phi_4^2$
$\phi_{8,3}''$	q	q	.	.	$q\phi_4^2\phi_8$	$q\phi_3\phi_4\phi_6$
$\phi_{12,4}$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_2$	.	.	$\frac{1}{8}q^2\phi_2^4\phi_3\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{8}(2q^4+q^3+q^2+q+1)q^2\phi_2^3$
$\phi_{9,6}'$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_2$	.	.	$\frac{1}{8}(3q^2+q-1)q^2\phi_3\phi_4^2\phi_8$	$\frac{1}{8}(2q^4+3q^3+q^2+q-1)q^2\phi_2\phi_4$
$\phi_{1,12}'$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2$	.	.	$\frac{1}{8}(3q^2-q-1)q^2\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$-\frac{1}{8}(2q^4-3q^3+q^2-q-1)q^2\phi_1\phi_4$
$F_4^{II}[1]$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2$	.	.	$\frac{1}{8}q^2\phi_1^4\phi_3\phi_6\phi_8$	$-\frac{1}{8}(2q^4-q^3+q^2-q+1)q^2\phi_1^3$
$\phi_{6,6}''$	.	.	.	.	$\frac{1}{4}q^2\phi_3\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{4}(3q^4+2q^2+1)q^2\phi_4$
$\phi_{16,5}$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	.	.	$\frac{1}{4}q^2\phi_4^2\phi_6^2$	$\frac{1}{4}(2q^2-q+1)q^2\phi_3^2\phi_4$
$F_4[-1]$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_4$	.	.	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^4\phi_3^2\phi_4^2$	$-\frac{1}{4}(2q^2+q+1)q^2\phi_1^3\phi_4$
B_2,ϵ''	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.	.	$\frac{1}{4}(q^2-q-1)q^2\phi_1^2\phi_3\phi_4\phi_8$	$\frac{1}{4}(q^5-q^4+q+1)q^2\phi_1$
$\phi_{4,7}'$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	.	.	$\frac{1}{4}(q^2+q-1)q^2\phi_2^2\phi_4\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{4}(q^5+q^4+q-1)q^2\phi_2$
$\phi_{9,6}''$	$\frac{1}{4}q(q^2+q+2)$	$-\frac{1}{4}(q-2)q\phi_2$	.	.	$-\frac{1}{8}(q^2-q-3)q^2\phi_3\phi_4^2\phi_8$	$\frac{1}{8}(2q^5+5q^4+4q^3+6q^2+4q+3)q^2\phi_4$
$F_4^I[1]$	$-\frac{1}{4}q(q^2+q+2)$	$\frac{1}{4}(q-2)q\phi_2$	.	.	$-\frac{1}{8}(q^2+3q+1)q^2\phi_1^4\phi_3\phi_8$	$-\frac{1}{8}(2q^4+q^3-q^2-3q-1)q^2\phi_1^3$
$\phi_{1,12}''$	$-\frac{1}{4}q(q^2+q+2)$	$\frac{1}{4}(q-2)q\phi_2$	.	.	$-\frac{1}{8}(q^2+q-3)q^2\phi_4^2\phi_6\phi_8$	$-\frac{1}{8}(2q^5-5q^4+4q^3-6q^2+4q-3)q^2\phi_4$
$\phi_{4,8}$	$\frac{1}{4}q(q^2+q+2)$	$-\frac{1}{4}(q-2)q\phi_2$	.	.	$-\frac{1}{8}(q^2-3q+1)q^2\phi_2^4\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{8}(2q^4-q^3-q^2+3q-1)q^2\phi_2^3$
B_2,r	.	.	.	.	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2\phi_8$
$\phi_{6,6}'$	.	.	.	.	$q^4\phi_3\phi_6\phi_8$	$q^4\phi_3\phi_6$
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.
$\phi_{4,7}''$	.	.	.	.	$-\frac{1}{4}(q^2-q-1)q^2\phi_2^2\phi_4\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{4}(q^5+q^4+2q^3+q+1)q^2\phi_2$
B_2,ϵ'	.	.	.	.	$-\frac{1}{4}(q^2+q-1)q^2\phi_1^2\phi_3\phi_4\phi_8$	$\frac{1}{4}(q^5-q^4+2q^3+q-1)q^2\phi_1$
$F_4[i]$	.	.	.	.	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^4\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3$
$F_4[-i]$	.	.	.	.	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^4\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3$
$\phi_{8,9}'$	.	.	.	.	$q^7\phi_4^2\phi_8$	$q^7\phi_4$
$\phi_{8,9}''$	.	.	.	.	$q^5\phi_4^2\phi_8$	$q^5\phi_4^2$
$\phi_{9,10}$	.	.	.	.	$(2q^4+1)q^6\phi_3\phi_6$	$q^6\phi_3\phi_6$
$\phi_{4,13}$	.	.	.	.	$\frac{1}{2}q^8\phi_2^2\phi_6\phi_8$	$\frac{1}{2}q^8\phi_2$
$\phi_{2,16}''$	.	.	.	.	$-\frac{1}{2}(q^2-q-1)q^8\phi_4\phi_8$	$\frac{1}{2}q^8\phi_2$
$\phi_{2,16}'$	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(q^2+q-1)q^8\phi_4\phi_8$	$\frac{1}{2}q^8\phi_1$
B_2,ϵ	.	.	.	.	$-\frac{1}{2}q^8\phi_1^2\phi_3\phi_8$	$\frac{1}{2}q^8\phi_1$
$\phi_{1,24}$	.	.	.	.	q^{16}	.

Tabelle T.A.89: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 9

	$c_{3,3}$	$c_{3,4}$	$c_{3,5}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}(2q^3-q^2+1)\phi_3$	$\frac{1}{2}\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}(q^4+q^3+1)\phi_2$
$\phi''_{2,4}$	$-\frac{1}{2}(q^2-q-1)\phi_4$	$\frac{1}{2}(2q^5-q^4+q^3+q+1)$	$-\frac{1}{2}(q^4-q^3-1)\phi_2$
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}(2q^5+q^4+q^3+q-1)$	$\frac{1}{2}(q^2+q-1)\phi_4$	$-\frac{1}{2}(q^4+q^3-1)\phi_1$
$B_2,1$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_3$	$\frac{1}{2}(2q^3+q^2-1)\phi_6$	$\frac{1}{2}(q^4-q^3+1)\phi_1$
$\phi_{9,2}$	$(q^2-q+2)q^2\phi_3$	$(q^2+q+2)q^2\phi_6$	$q^2(q^4+q^2+2)$
$\phi'_{8,3}$	$q^3\phi_3\phi_4$	$q^3\phi_4\phi_6$	$q^3\phi_4$
$\phi''_{8,3}$	$q\phi_4^2$	$q\phi_4^2$	$q\phi_4^2$
$\phi_{12,4}$	$\frac{1}{8}q^2\phi_2^3\phi_3\phi_4$	$-\frac{1}{8}(q^2-2q-1)q^2\phi_2^3\phi_6$	$\frac{1}{8}(3q^4+2q^2+2q+1)q^2\phi_2^2$
$\phi'_{9,6}$	$\frac{1}{8}(3q-1)q^2\phi_2^2\phi_3\phi_4$	$-\frac{1}{8}(3q^5-4q^4-3q^3-q^2+1)q^2\phi_4$	$-\frac{1}{8}(3q^3+q^2-q-1)q^2\phi_1\phi_4$
$\phi'_{1,12}$	$\frac{1}{8}(3q^5+4q^4-3q^3+q^2-1)q^2\phi_4$	$-\frac{1}{8}(3q+1)q^2\phi_1^2\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{8}(3q^3-q^2-q+1)q^2\phi_2\phi_4$
$F_4^{I'}[1]$	$\frac{1}{8}(q^2+2q-1)q^2\phi_1^3\phi_3$	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1^3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{8}(3q^4+2q^2-2q+1)q^2\phi_1^2$
$\phi''_{6,6}$	$\frac{1}{4}(q^3+q^2-q+1)q^2\phi_3\phi_4$	$-\frac{1}{4}(q^3-q^2-q-1)q^2\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{4}(3q^4+2q^2+1)q^2\phi_4$
$\phi_{16,5}$	$-\frac{1}{4}(q^3-4q^2-1)q^2\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2^3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2^2\phi_4^2$
$F_4[-1]$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{4}(q^3+4q^2+1)q^2\phi_1^2\phi_4$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_4^2$
B_2,ϵ''	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{4}(q^5+5q^4-q-1)q^2\phi_6$	$-\frac{1}{4}(q^5-q^4-q-1)q^2\phi_1$
$\phi'_{4,7}$	$-\frac{1}{4}(q^5-5q^4-q+1)q^2\phi_3$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2^2\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}(q^5+q^4-q+1)q^2\phi_2$
$\phi''_{9,6}$	$-\frac{1}{8}(q^3-q^2-q-3)q^2\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{8}(q+3)q^2\phi_2^2\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{8}(3q^3-5q^2-q-3)q^2\phi_2\phi_4$
$F_4^{I}[1]$	$-\frac{1}{8}(q^2-2q-1)q^2\phi_1^3\phi_3$	$\frac{1}{8}(q^5+2q^4+3q^3+5q^2-2q-1)q^2\phi_1^2$	$\frac{1}{8}(q^3+3q^2-q-1)q^2\phi_1^2\phi_2$
$\phi''_{1,12}$	$-\frac{1}{8}(q-3)q^2\phi_1^2\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{8}(q^3+q^2-q+3)q^2\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{8}(3q^3+5q^2-q+3)q^2\phi_1\phi_4$
$\phi_{4,8}$	$-\frac{1}{8}(q^5-2q^4+3q^3-5q^2-2q+1)q^2\phi_2^2$	$\frac{1}{8}(q^2+2q-1)q^2\phi_2^3\phi_6$	$\frac{1}{8}(q^3-3q^2-q+1)q^2\phi_1\phi_2^2$
B_2,r	$-\frac{1}{4}(q^3-q^2+q+1)q^2\phi_1^2\phi_3$	$\frac{1}{4}(q^3+q^2+q-1)q^2\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2\phi_8$
$\phi'_{6,6}$	$q^4\phi_3$	$q^4\phi_6$	q^4
$F_4[\theta]$	$.$	$.$	$.$
$F_4[\theta^2]$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{4,7}$	$\frac{1}{4}(q^5-3q^3+q^2+2q+1)q^2\phi_4$	$-\frac{1}{4}(q^3-q^2-q-1)q^2\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{4}(q^5+q^4-2q^3-q-1)q^2\phi_2$
B_2,ϵ'	$\frac{1}{4}(q^3+q^2-q+1)q^2\phi_1^2\phi_3$	$-\frac{1}{4}(q^5-3q^3-q^2+2q-1)q^2\phi_4$	$-\frac{1}{4}(q^5-q^4-2q^3-q+1)q^2\phi_1$
$F_4[i]$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_3$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^3\phi_6$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3$
$F_4[-i]$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^2\phi_3$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3$
$\phi'_{8,9}$	$q^6\phi_2\phi_4$	$q^6\phi_1\phi_4$	$.$
$\phi''_{8,9}$	$q^5\phi_4$	$q^5\phi_4$	$q^5\phi_4$
$\phi_{9,10}$	$q^6\phi_3$	$q^6\phi_6$	q^6
$\phi_{4,13}$	q^9	$.$	$\frac{1}{2}q^8\phi_2$
$\phi''_{2,16}$	$.$	q^9	$-\frac{1}{2}q^8\phi_1$
$\phi'_{2,16}$	q^9	$.$	$-\frac{1}{2}q^8\phi_2$
B_2,ϵ	$.$	q^9	$\frac{1}{2}q^8\phi_1$
$\phi_{1,24}$	$.$	$.$	$.$

Tabelle T.A.90: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 10

	$c_{3,6}$	$c_{3,7}$	$c_{3,8}$	$c_{3,9}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$-\frac{1}{2}(q^5-2q^4-q^3-q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}(2q^3+q+1)$
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}(q^5+q^3+q+1)$	$-\frac{1}{2}(q^2-q-1)\phi_4$	$-\frac{1}{2}(q^2-q-1)\phi_4$	$\frac{1}{2}(2q^3+q+1)$
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}(q^5+q^3+q-1)$	$\frac{1}{2}(q^2+q-1)\phi_4$	$\frac{1}{2}(q^2+q-1)\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$B_2,1$	$-\frac{1}{2}(q^5+2q^4-q^3-q+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_3$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_3$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi_{9,2}$	$q^2(q^4+q^2+2)$	$q^2(q^2+q+2)$	$q^2(q^2-q+2)$	$q^2(q^2+2)$
$\phi'_{8,3}$	$q^3\phi_4$	$q^3\phi_3$	$q^3\phi_6$	q^3
$\phi''_{8,3}$	$q\phi_4^2$	$q(2q^2+1)$	$q(2q^2+1)$	$q(q^3+2q^2+1)$
$\phi_{12,4}$	$-\frac{1}{8}(q^3-q^2-q-1)q^2\phi_2^3$	$\frac{1}{8}(3q^2+2q+1)q^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{8}(q^2-2q-1)q^2\phi_2^2$	$\frac{1}{8}(3q+1)q^2\phi_2^2$
$\phi'_{9,6}$	$\frac{1}{8}(q^3+q^2+q-1)q^2\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{8}(5q^3+3q^2+q-1)q^2\phi_2$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2^2$
$\phi'_{1,12}$	$\frac{1}{8}(q^3-q^2+q+1)q^2\phi_1\phi_4$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{8}(5q^3-3q^2+q+1)q^2\phi_1$	$-\frac{1}{8}(3q+1)q^2\phi_1^2$
$F_4^{II}[1]$	$-\frac{1}{8}(q^3+q^2-q+1)q^2\phi_1^3$	$-\frac{1}{8}(q^2+2q-1)q^2\phi_1^2$	$\frac{1}{8}(3q^2-2q+1)q^2\phi_1^2$	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1^3$
$\phi''_{6,6}$	$-\frac{1}{4}(q^4-2q^2-1)q^2\phi_4$	$\frac{1}{4}q^2\phi_4^2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_4^2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2\phi_4$
$\phi_{16,5}$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2^2\phi_4^2$	$\frac{1}{4}(q^3+5q^2+q+1)q^2\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{4}(3q^2+1)q^2\phi_2$
$F_4[-1]$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_4^2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_4$	$\frac{1}{4}(q^3-5q^2+q-1)q^2\phi_1$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^3$
B_2,ϵ''	$-\frac{1}{4}(q^5+q^4-q+1)q^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}(q^3-q^2-q-1)q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}(3q^3+q^2+q+1)q^2\phi_1$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2$
$\phi'_{4,7}$	$-\frac{1}{4}(q^5-q^4-q-1)q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}(3q^3-q^2+q-1)q^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}(q^3+q^2-q+1)q^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2$
$\phi''_{9,6}$	$\frac{1}{8}(q^4+2q^3+6q^2+4q+3)q^2\phi_4$	$-\frac{1}{8}(3q^3-7q^2-q-3)q^2\phi_2$	$\frac{1}{8}(q+3)q^2\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{8}(5q^2+4q+3)q^2\phi_2$
$F_4^I[1]$	$\frac{1}{8}(5q^4+4q^3+2q^2-2q-1)q^2\phi_1^2$	$\frac{1}{8}(q^2-2q-1)q^2\phi_1^2$	$-\frac{1}{8}(3q+1)(q^2+2q-1)q^2\phi_1$	$-\frac{1}{8}(3q+1)q^2\phi_1^2$
$\phi''_{1,12}$	$\frac{1}{8}(q^4-2q^3+6q^2-4q+3)q^2\phi_4$	$\frac{1}{8}(q-3)q^2\phi_1\phi_4$	$-\frac{1}{8}(3q^3+7q^2-q+3)q^2\phi_1$	$\frac{1}{8}q^2(q^3+5q^2-q+3)$
$\phi_{4,8}$	$\frac{1}{8}(5q^4-4q^3+2q^2+2q-1)q^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{8}(3q-1)(q^2-2q-1)q^2\phi_2$	$\frac{1}{8}(q^2+2q-1)q^2\phi_2^2$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2^2$
B_2,r	$-\frac{1}{4}q^2(3q^6+5q^4-q^2+1)$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}(q^2-2q-1)q^2\phi_1$
$\phi'_{6,6}$	q^4	$q^4\phi_2$	$-q^4\phi_1$	q^4
$F_4[\theta]$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$F_4[\theta^2]$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi''_{4,7}$	$-\frac{1}{4}q^2(q^6-2q^5-q^4-2q^3-q^2-2q-1)$	$-\frac{1}{4}(q^3-q^2-q-1)q^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}(q^3-q^2-q-1)q^2\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2(q^3+5q^2+q+1)$
B_2,ϵ'	$-\frac{1}{4}q^2(q^6+2q^5-q^4+2q^3-q^2+2q-1)$	$-\frac{1}{4}(q^3+q^2-q+1)q^2\phi_1$	$-\frac{1}{4}(q^3+q^2-q+1)q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}(q^2+2q-1)q^2\phi_1$
$F_4[i]$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2$
$F_4[-i]$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^3\phi_2^3$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2\phi_2$
$\phi'_{8,9}$	$\cdot$	q^6	$-q^6$	$\cdot$
$\phi''_{8,9}$	$q^5\phi_4$	q^5	q^5	q^5
$\phi_{9,10}$	q^6	q^6	q^6	$\cdot$
$\phi_{4,13}$	$-\frac{1}{2}q^8\phi_1$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi''_{2,16}$	$\frac{1}{2}q^8\phi_2$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi'_{2,16}$	$\frac{1}{2}q^8\phi_1$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
B_2,ϵ	$-\frac{1}{2}q^8\phi_2$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi_{1,24}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Tabelle T.A.91: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 11

	$c_{3,10}$	$c_{3,11}$	$c_{3,12}$	$c_{3,13}$	$c_{3,14}$	$c_{3,15}$	$c_{3,16}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{2}(q^3-q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^3-q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$-\frac{1}{2}(2q+1)\phi_1$
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}(2q^3+q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^3+q^2+q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_4$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$B_2,1$	$\frac{1}{2}(2q^3+q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_4$	$\frac{1}{2}(q^3+q^2+q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi_{9,2}$	$q^2(q^2+2)$	$2q^2$	$3q^2$	q^2	q^2	q^2	$2q^2$
$\phi'_{8,3}$	q^3	q^3	$2q^3$	$.$	$.$	$.$	q^3
$\phi''_{8,3}$	$-q(q^3-2q^2-1)$	$q\phi_4$	$q\phi_4$	$q\phi_4$	$q\phi_4$	$q\phi_4$	q
$\phi_{12,4}$	$\frac{1}{8}q^2\phi_2^3$	$\frac{1}{8}(3q+1)q^2\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2^2$	$.$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2^2$
$\phi'_{9,6}$	$\frac{1}{8}(3q-1)q^2\phi_2^2$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}(3q-1)q^2\phi_2$	$.$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$
$\phi'_{1,12}$	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}(3q+1)q^2\phi_1$	$.$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_2^2$
$F_4^I[1]$	$-\frac{1}{8}(3q-1)q^2\phi_1^2$	$\frac{1}{8}(3q-1)q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2$	$.$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$
$\phi''_{6,6}$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_4$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_4$	$.$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$
$\phi_{16,5}$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2^3$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2^2$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$
$F_4[-1]$	$-\frac{1}{4}(3q^2+1)q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1^2$	$.$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$
B_2,ϵ''	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$
$\phi'_{4,7}$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$.$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_4$
$\phi''_{9,6}$	$-\frac{1}{8}q^2(q^3-5q^2-q-3)$	$\frac{1}{8}(q+3)q^2\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_4$	$\frac{1}{4}q^2(q^2+3)$	$-\frac{1}{4}(q-3)q^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$
$F_4^I[1]$	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2$
$\phi''_{1,12}$	$-\frac{1}{8}(5q^2-4q+3)q^2\phi_1$	$\frac{1}{8}(q-3)q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_4$	$-\frac{1}{4}(q+3)q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}q^2(q^2+3)$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2$
$\phi_{4,8}$	$\frac{1}{8}(3q-1)q^2\phi_2^2$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$
B_2,r	$\frac{1}{4}(q^2+2q-1)q^2\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	q^4	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$
$\phi'_{6,6}$	q^4	q^4	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[\theta]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[\theta^2]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{4,7}$	$-\frac{1}{4}(q^2-2q-1)q^2\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2^2$	$.$	$\frac{1}{2}q^2\phi_4$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_1$	$\frac{1}{2}q^3\phi_2$	$.$
B_2,ϵ'	$-\frac{1}{4}q^2(q^3-5q^2+q-1)$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2$	$.$	$\frac{1}{2}q^2\phi_4$	$\frac{1}{2}q^3\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_2$	$.$
$F_4[i]$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$.$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$.$	$.$	$.$
$F_4[-i]$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$.$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{8,9}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{8,9}$	q^5	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi_{9,10}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi_{4,13}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{2,16}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{2,16}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
B_2,ϵ	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi_{1,24}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$

Tabelle T.A.92: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 12

	$c_{3,17}$	$c_{3,18}$	$c_{3,19}$	$c_{3,20}$	$c_{3,21}$	$c_{3,22}$	$c_{3,23}$	$c_{3,24}$	$c_{3,25}$	$c_{3,26}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(4q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(2q+1)\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(2q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q+1)\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_2$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$B_2,1$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(4q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi_{9,2}$	$2q^2$	q^2	q^2	q^2	q^2	q^2	q	$-q$	.	.
$\phi'_{8,3}$	q^3	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{8,3}$	q	q	q	q	q	q	q	q	.	.
$\phi_{12,4}$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}(q+3)q^2\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}(q-3)q^2\phi_1$	.	.	.	.
$\phi'_{9,6}$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1^2$	$-\frac{1}{8}(q+3)q^2\phi_2$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}(q-3)q^2\phi_1$	.	.	.	.
$\phi'_{1,12}$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}(q+3)q^2\phi_2$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}(q-3)q^2\phi_1$	.	.	.	.
$F_4^{II}[1]$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1^2$	$\frac{1}{8}(q+3)q^2\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}(q-3)q^2\phi_1$	.	.	.	.
$\phi''_{6,6}$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}(q+3)q^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}(q-3)q^2\phi_1$	.	.	.	.
$\phi_{16,5}$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2(q^2+3)$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	.	.	.	.
$F_4[-1]$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2(q^2+3)$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	.	.	.	.
B_2,ϵ''	$-\frac{1}{2}q^2\phi_4$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2(q^2+3)$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	.	.	.	.
$\phi'_{4,7}$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2(q^2+3)$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	.	.	.	.
$\phi''_{9,6}$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2^2$	$-\frac{1}{8}(q+5)q^2\phi_1$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^2(q^2+7)$	$-\frac{1}{8}(q-5)q^2\phi_2$	.	.	.	.
$F_4^I[1]$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}(3q-1)q^2\phi_1$	$-\frac{3}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{3}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^2(3q^2+5)$	$\frac{1}{8}(3q+1)q^2\phi_2$	.	.	.	.
$\phi''_{1,12}$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}(q+5)q^2\phi_1$	$\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{8}q^2(q^2+7)$	$-\frac{1}{8}(q-5)q^2\phi_2$	.	.	.	.
$\phi_{4,8}$	$\frac{1}{4}q^2\phi_2^2$	$\frac{1}{8}(3q-1)q^2\phi_1$	$-\frac{3}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{3}{8}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{8}q^2(3q^2+5)$	$\frac{1}{8}(3q+1)q^2\phi_2$	.	.	.	.
B_2,r	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}(q-3)q^2\phi_1$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}(q+3)q^2\phi_2$	.	.	.	.
$\phi'_{6,6}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	.	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2(q^2+3)$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	.	.	.	.
B_2,ϵ'	.	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2(q^2+3)$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	.	.	.	.
$F_4[i]$	.	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2(q^2+3)$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2(q^2+3)$	$\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}q^2\phi_1\phi_2$	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{8,9}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi_{9,10}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi_{4,13}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{2,16}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{2,16}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
B_2,ϵ	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi_{1,24}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Tabelle T.A.93: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 13

	$c_{4,1}$	$c_{4,2}$	$c_{4,3}$	$c_{4,4}$	$c_{4,5}$	$c_{4,6}$	$c_{4,7}$	$c_{4,8}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$2q\phi_2$	$q(q+2)$	$q\phi_2$	$q(q+2)$	$2q$	q	$q\phi_2$	q
$\phi''_{2,4}$	$q\phi_2$	$q\phi_2$	$q\phi_2$	q	q	q	$.$	$.$
$\phi'_{2,4}$	$q\phi_2$	q	$.$	$q\phi_2$	q	$.$	$q\phi_2$	q
$B_2,1$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi_{9,2}$	ϕ_3^2	$\phi_2\phi_3$	ϕ_3	$\phi_2\phi_3$	ϕ_2^2	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_2
$\phi'_{8,3}$	$(q^3+2q^2+1)\phi_2$	$\phi_2\phi_4$	1	$(2q^2+1)\phi_2$	ϕ_3	1	$\phi_2\phi_4$	ϕ_2
$\phi''_{8,3}$	$(q^3+2q^2+1)\phi_2$	$(2q^2+1)\phi_2$	$\phi_2\phi_4$	$\phi_2\phi_4$	ϕ_3	ϕ_2	1	1
$\phi_{12,4}$	$\frac{1}{3}\phi_2^2\phi_3^2$	$\frac{1}{3}(2q+1)\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{3}\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{3}(2q+1)\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{3}(2q+1)^2$	$\frac{1}{3}(2q+1)$	$\frac{1}{3}\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{3}(2q+1)$
$\phi'_{9,6}$	$q\phi_3^2$	$q\phi_3$	$.$	$q\phi_2\phi_3$	$q\phi_2$	$.$	$q\phi_3$	q
$\phi'_{1,12}$	q^3	$.$	$.$	q^3	$.$	$.$	q^3	$.$
$F_4^{II}[1]$	$\frac{1}{3}\phi_1^4\phi_2^2$	$-\frac{1}{3}\phi_1^3\phi_2$	$\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{3}\phi_1^3\phi_2$	$\frac{1}{3}\phi_1^2$	$-\frac{1}{3}\phi_1$	$\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{3}\phi_1$
$\phi''_{6,6}$	$-\frac{1}{3}(q^2-4q+1)\phi_3^2$	$\frac{1}{3}(q^2+3q-1)\phi_3$	$\frac{1}{3}(2q-1)\phi_3$	$\frac{1}{3}(q^2+3q-1)\phi_3$	$\frac{1}{3}(2q^2+2q-1)$	$\frac{1}{3}\phi_1$	$\frac{1}{3}(2q-1)\phi_3$	$\frac{1}{3}\phi_1$
$\phi_{16,5}$	$2q\phi_2^2\phi_4$	$(q^2+q+2)q\phi_2$	$q\phi_2$	$(q^2+q+2)q\phi_2$	$2q\phi_2$	q	$q\phi_2$	q
$F_4[-1]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
B_2,ϵ''	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{4,7}$	$q\phi_2^2\phi_6$	q	$.$	$q(q^3+q+1)$	q	$.$	$q\phi_2$	q
$\phi''_{9,6}$	$q\phi_3^2$	$q\phi_2\phi_3$	$q\phi_3$	$q\phi_3$	$q\phi_2$	q	$.$	$.$
$F_4^I[1]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{1,12}$	q^3	q^3	q^3	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi_{4,8}$	$q^2\phi_2^2$	$q^2\phi_2$	$.$	$q^2\phi_2$	q^2	$.$	$.$	$.$
B_2,r	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{6,6}$	$\frac{2}{3}\phi_3^2\phi_6$	$\frac{1}{3}(q^2+2)\phi_3$	$-\frac{1}{3}(q-2)\phi_3$	$\frac{1}{3}(q^2+2)\phi_3$	$\frac{2}{3}\phi_3$	$\frac{1}{3}(q+2)$	$-\frac{1}{3}(q-2)\phi_3$	$\frac{1}{3}(q+2)$
$F_4[\theta]$	$-\frac{1}{3}\phi_1^4\phi_2^2$	$\frac{1}{3}\phi_1^3\phi_2$	$-\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{3}\phi_1^3\phi_2$	$-\frac{1}{3}\phi_1^2$	$\frac{1}{3}\phi_1$	$-\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{3}\phi_1$
$F_4[\theta^2]$	$-\frac{1}{3}\phi_1^4\phi_2^2$	$\frac{1}{3}\phi_1^3\phi_2$	$-\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{3}\phi_1^3\phi_2$	$-\frac{1}{3}\phi_1^2$	$\frac{1}{3}\phi_1$	$-\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{3}\phi_1$
$\phi''_{4,7}$	$q\phi_2^2\phi_6$	$q(q^3+q+1)$	$q\phi_2$	q	q	q	$.$	$.$
B_2,ϵ'	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[-i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{8,9}$	$(q^3+2q+1)q^2\phi_2$	$q^2\phi_2$	$.$	$q^2\phi_2^2$	q^2	$.$	q^3	$.$
$\phi''_{8,9}$	$(q^3+2q+1)q^2\phi_2$	$q^2\phi_2^2$	q^3	$q^2\phi_2$	q^2	$.$	$.$	$.$
$\phi_{9,10}$	$q^2\phi_3^2$	$q^2\phi_3$	$.$	$q^2\phi_3$	q^2	$.$	$.$	$.$
$\phi_{4,13}$	$2q^4\phi_2$	q^4	$.$	q^4	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{2,16}$	$q^4\phi_2$	q^4	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{2,16}$	$q^4\phi_2$	$.$	$.$	q^4	$.$	$.$	$.$	$.$
B_2,ϵ	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi_{1,24}$	q^6	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$

Tabelle T.A.94: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 14

	$c_{4,9}$	$c_{4,10}$	$c_{4,11}$	$c_{5,1}$	$c_{5,2}$	$c_{5,3}$	$c_{5,4}$	$c_{5,5}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{2,4}$	.	.	.	$-q\phi_1$	q	.	$-q\phi_1$	q
$\phi'_{2,4}$	.	.	.	$-q\phi_1$	$-q\phi_1$	$-q\phi_1$	q	q
$B_2,1$	.	.	.	$-2q\phi_1$	$-q(q-2)$	$-q\phi_1$	$-q(q-2)$	$2q$
$\phi_{9,2}$	1	1	1	ϕ_6^2	$-\phi_1\phi_6$	ϕ_6	$-\phi_1\phi_6$	ϕ_1^2
$\phi'_{8,3}$	1	1	1	$-(q^3-2q^2-1)\phi_1$	$\phi_1\phi_4$	-1	$(2q^2+1)\phi_1$	$-\phi_6$
$\phi''_{8,3}$	1	1	1	$-(q^3-2q^2-1)\phi_1$	$(2q^2+1)\phi_1$	$\phi_1\phi_4$	$\phi_1\phi_4$	$-\phi_6$
$\phi_{12,4}$	$\frac{1}{3}(2q^2+1)$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2^4$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2^3$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2^3$	$\frac{1}{3}\phi_2^2$
$\phi'_{9,6}$	.	.	.	$-q^3$	.	.	$-q^3$	.
$\phi'_{1,12}$	.	.	.	$-q\phi_6^2$	$-q\phi_6$	.	$q\phi_1\phi_6$	$q\phi_1$
$F_4^{II}[1]$	$\frac{1}{3}(2q^2+1)$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_6^2$	$\frac{1}{3}(2q-1)\phi_1\phi_6$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_6$	$\frac{1}{3}(2q-1)\phi_1\phi_6$	$\frac{1}{3}(2q-1)^2$
$\phi''_{6,6}$	$-\frac{1}{3}(2q^2+1)$	$\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{3}(q^2+4q+1)\phi_6^2$	$\frac{1}{3}(q^2-3q-1)\phi_6$	$-\frac{1}{3}(2q+1)\phi_6$	$\frac{1}{3}(q^2-3q-1)\phi_6$	$\frac{1}{3}(2q^2-2q-1)$
$\phi_{16,5}$	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-1]$	.	.	.	$-2q\phi_1^2\phi_4$	$(q^2-q+2)q\phi_1$	$q\phi_1$	$(q^2-q+2)q\phi_1$	$2q\phi_1$
B_2,ϵ''	.	.	.	$-q\phi_1^2\phi_3$	$-q$	.	$q(q^3+q-1)$	$-q$
$\phi'_{4,7}$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{9,6}$	.	.	.	$-q^3$	$-q^3$	$-q^3$	.	.
$F_4'[1]$	.	.	.	$q^2\phi_1^2$	$-q^2\phi_1$	.	$-q^2\phi_1$	q^2
$\phi''_{1,12}$	.	.	.	$-q\phi_6^2$	$q\phi_1\phi_6$	$-q\phi_6$	$-q\phi_6$	$q\phi_1$
$\phi_{4,8}$	.	.	.	.	.	.	.	.
B_2,r	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{6,6}$	$-\frac{2}{3}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}(q^2+2)$	$\frac{1}{3}(q^2+2)$	$\frac{2}{3}\phi_3\phi_6^2$	$\frac{1}{3}(q^2+2)\phi_6$	$\frac{1}{3}(q+2)\phi_6$	$\frac{1}{3}(q^2+2)\phi_6$	$\frac{2}{3}\phi_6$
$F_4[\theta]$	$\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{3}\varepsilon_3^2q^2+\frac{2}{3}\varepsilon_3-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\varepsilon_3^2q^2-\frac{1}{3}\varepsilon_3-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2^4$	$\frac{1}{3}\phi_1\phi_2^3$	$\frac{1}{3}\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{3}\phi_1\phi_2^3$	$-\frac{1}{3}\phi_2^2$
$F_4[\theta^2]$	$\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$\frac{2}{3}\varepsilon_3^2q^2-\frac{1}{3}\varepsilon_3-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}\varepsilon_3^2q^2+\frac{2}{3}\varepsilon_3-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}\phi_1^2\phi_2^4$	$\frac{1}{3}\phi_1\phi_2^3$	$\frac{1}{3}\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{3}\phi_1\phi_2^3$	$-\frac{1}{3}\phi_2^2$
$\phi''_{4,7}$	.	.	.	.	.	.	.	.
B_2,ϵ'	.	.	.	$-q\phi_1^2\phi_3$	$q(q^3+q-1)$	$q\phi_1$	$-q$	$-q$
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	.	.	.	$-(q^3+2q-1)q^2\phi_1$	$q^2\phi_1$	.	$-q^2\phi_1^2$	$-q^2$
$\phi''_{8,9}$	.	.	.	$-(q^3+2q-1)q^2\phi_1$	$-q^2\phi_1^2$	q^3	$q^2\phi_1$	$-q^2$
$\phi_{9,10}$	.	.	.	$q^2\phi_6^2$	$q^2\phi_6$	.	$q^2\phi_6$	q^2
$\phi_{4,13}$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{2,16}$	.	.	.	$q^4\phi_1$	.	.	$-q^4$	.
$\phi'_{2,16}$	.	.	.	$q^4\phi_1$	$-q^4$	.	.	.
B_2,ϵ	.	.	.	$2q^4\phi_1$	$-q^4$	.	$-q^4$	.
$\phi_{1,24}$	.	.	.	q^6	.	.	.	.

Tabelle T.A.95: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 15

	$c_{5,6}$	$c_{5,7}$	$c_{5,8}$	$c_{5,9}$	$c_{5,10}$	$c_{5,11}$	$c_{6,1}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}(q^3+2q+1)\phi_2$
$\phi''_{2,4}$	$.$	$-q\phi_1$	q	$.$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}(q^4-q^3-3q-1)$
$\phi'_{2,4}$	q	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}(q^3+2q-1)\phi_2$
$B_2,1$	q	$-q\phi_1$	q	$.$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_3$
$\phi_{9,2}$	$-\phi_1$	ϕ_6	$-\phi_1$	1	1	1	$(2q^2+1)\phi_3$
$\phi'_{8,3}$	-1	$\phi_1\phi_4$	ϕ_1	-1	-1	-1	$(2q^2+q+1)q\phi_4$
$\phi''_{8,3}$	ϕ_1	-1	-1	-1	-1	-1	$\phi_2^2\phi_4$
$\phi_{12,4}$	$\frac{1}{3}\phi_2$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{3}\phi_2$	$\frac{1}{3}(2q^2+1)$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_2^3\phi_3\phi_4$
$\phi'_{9,6}$	$.$	$-q^3$	$.$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{4}(q^3+5q^2+q-1)\phi_3\phi_4$
$\phi'_{1,12}$	$.$	$-q\phi_6$	$-q$	$.$	$.$	$.$	$-\frac{1}{4}(q^5-4q^4-q^3+q^2+2q-1)\phi_4$
$F_4^{II}[1]$	$-\frac{1}{3}(2q-1)$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_6$	$-\frac{1}{3}(2q-1)$	$\frac{1}{3}(2q^2+1)$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_1^4\phi_2\phi_3$
$\phi''_{6,6}$	$-\frac{1}{3}\phi_2$	$-\frac{1}{3}(2q+1)\phi_6$	$-\frac{1}{3}\phi_2$	$-\frac{1}{3}(2q^2+1)$	$\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2\phi_3\phi_4$
$\phi_{16,5}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$q\phi_2^3\phi_4$
$F_4[-1]$	$-q$	$q\phi_1$	$-q$	$.$	$.$	$.$	$.$
B_2,ϵ''	$.$	$q\phi_1$	$-q$	$.$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_1^2\phi_3$
$\phi'_{4,7}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}(q^3+2q+1)q^3\phi_2$
$\phi''_{9,6}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$-\frac{1}{4}(q^3-q^2-5q-1)\phi_3\phi_4$
$F_4^I[1]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{4}\phi_1^4\phi_2\phi_3$
$\phi''_{1,12}$	$-q$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{4}(q^5-2q^4-q^3+q^2+4q-1)\phi_4$
$\phi_{4,8}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$-\frac{1}{4}(q^2-3q+1)\phi_2^3\phi_4$
B_2,r	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2\phi_3$
$\phi'_{6,6}$	$-\frac{1}{3}(q-2)$	$\frac{1}{3}(q+2)\phi_6$	$-\frac{1}{3}(q-2)$	$-\frac{2}{3}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{3}(q^2+2)$	$\frac{1}{3}(q^2+2)$	$q\phi_2\phi_3\phi_6$
$F_4[\theta]$	$-\frac{1}{3}\phi_2$	$\frac{1}{3}\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{3}\phi_2$	$\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{3}\varepsilon_3^2q^2+\frac{2}{3}\varepsilon_3-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\varepsilon_3^2q^2-\frac{1}{3}\varepsilon_3-\frac{1}{3}$	$.$
$F_4[\theta^2]$	$-\frac{1}{3}\phi_2$	$\frac{1}{3}\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{3}\phi_2$	$\frac{1}{3}\phi_1\phi_2$	$\frac{2}{3}\varepsilon_3^2q^2-\frac{1}{3}\varepsilon_3-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}\varepsilon_3^2q^2+\frac{2}{3}\varepsilon_3-\frac{1}{3}$	$.$
$\phi''_{4,7}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}(q^3+2q^2+1)\phi_2$
B_2,ϵ'	$-q$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_3$
$F_4[i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[-i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{8,9}$	$.$	q^3	$.$	$.$	$.$	$.$	$q^3\phi_2^2\phi_4$
$\phi''_{8,9}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$(q^2+q+2)q^2\phi_4$
$\phi_{9,10}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$(q^2+2)q^3\phi_3$
$\phi_{4,13}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}(q^3+2q^2+1)q^3\phi_2$
$\phi''_{2,16}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}(q^3-2q^2-1)q^3\phi_2$
$\phi'_{2,16}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^3(q^4+3q^3+q-1)$
B_2,ϵ	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_1^2\phi_3$
$\phi_{1,24}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	q^7

Tabelle T.A.96: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 16

	$c_{6,2}$	$c_{6,3}$	$c_{6,4}$	$c_{6,5}$	$c_{6,6}$	$c_{6,7}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}(2q+1)\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q+1)\phi_2$	$\frac{1}{2}(3q+1)$	$\frac{1}{2}(3q+1)$	$\frac{1}{2}(3q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}(3q+1)$	$-\frac{1}{2}(2q^2-3q-1)$	$\frac{1}{2}(3q+1)$	$\frac{1}{2}(3q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(3q+1)$
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$B_2,1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi_{9,2}$	q^3+3q^2+q+1	$2q^2+q+1$	$2q^2+q+1$	ϕ_3	1	1
$\phi'_{8,3}$	$q(2q^2+q+1)$	$q\phi_4$	$q\phi_4$	q	$\cdot$	$\cdot$
$\phi''_{8,3}$	$\phi_2\phi_3$	ϕ_2^2	ϕ_2^2	ϕ_2^2	ϕ_2	ϕ_2
$\phi_{12,4}$	$\frac{1}{4}(3q^2+2q+1)\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_2^4$	$-\frac{1}{4}(q^2-2q-1)\phi_2^2$	$\frac{1}{4}(3q+1)\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$
$\phi'_{9,6}$	$\frac{1}{4}(3q^3+3q^2+q-1)\phi_2$	$\frac{1}{4}(q^3-q^2+q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{4}(q^3-3q^2-q+1)\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$
$\phi'_{1,12}$	$\frac{1}{4}(q^3+q^2+q-1)\phi_1$	$-\frac{1}{4}(q^4+4q^3-2q^2+2q-1)$	$\frac{1}{4}(q^3+q^2+q-1)\phi_1$	$\frac{1}{4}\phi_1^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_1^2$
$F_4^{II}[1]$	$\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2$
$\phi''_{6,6}$	$\frac{1}{2}q(3q^2+2q+1)$	$\frac{1}{2}q(3q^2+2q+1)$	$-\frac{1}{2}q(q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$
$\phi_{16,5}$	$q\phi_2^3$	$q\phi_2^3$	$q\phi_2^2$	$q\phi_2$	$\cdot$	$\cdot$
$F_4[-1]$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
B_2,ϵ''	$\frac{1}{2}q^3\phi_1$	$\frac{1}{2}q^3\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_2$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi'_{4,7}$	$\frac{1}{2}q^3\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_2$	$\frac{1}{2}q^3\phi_1$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi''_{9,6}$	$\frac{1}{4}(q^4+8q^3+8q^2+6q+1)$	$-\frac{1}{4}(q^3-q^2-5q-1)\phi_2$	$\frac{1}{4}(q^4+4q^3+4q^2+6q+1)$	$\frac{1}{4}(5q+1)\phi_2$	$-\frac{1}{4}(q^2-4q-1)$	$\frac{1}{4}\phi_2^2$
$F_4^I[1]$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_1^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_1^2$
$\phi''_{1,12}$	$-\frac{1}{4}(q^4-2q^3-4q+1)$	$\frac{1}{4}(q^3-q^2-3q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{4}(q^4-2q^3-4q+1)$	$\frac{1}{4}(q^2+4q-1)$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2$	$\frac{1}{4}(q^2+4q-1)$
$\phi_{4,8}$	$\frac{1}{4}(q^2+2q-1)\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$	$\frac{1}{4}(q^2+2q-1)\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$
B_2,r	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q(3q^2+1)$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$
$\phi'_{6,6}$	$q(q^3+q+1)$	q	q	q	$\cdot$	$\cdot$
$F_4[\theta]$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$F_4[\theta^2]$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi''_{4,7}$	$\frac{1}{2}(2q^2+1)\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$
B_2,ϵ'	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$F_4[i]$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$F_4[-i]$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi'_{8,9}$	$q^3\phi_2$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi''_{8,9}$	$q^2(q^2+q+2)$	$2q^2$	$2q^2$	q^2	$\cdot$	$\cdot$
$\phi_{9,10}$	$q^3(q+2)$	q^3	q^3	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi_{4,13}$	$\frac{1}{2}q^3\phi_2$	$\frac{1}{2}q^3\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_1$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi''_{2,16}$	$\frac{1}{2}q^3\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_1$	$\frac{1}{2}q^3\phi_2$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi'_{2,16}$	$\frac{1}{2}q^3\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_2$	$\frac{1}{2}q^3\phi_1$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
B_2,ϵ	$\frac{1}{2}q^3\phi_1$	$\frac{1}{2}q^3\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_2$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi_{1,24}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Tabelle T.A.97: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 17

	$c_{6,8}$	$c_{6,9}$	$c_{6,10}$	$c_{6,11}$	$c_{6,12}$	$c_{6,13}$	$c_{6,14}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi''_{2,4}$	$-\frac{1}{2}(q^2-q-1)\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(2q+1)\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}(q^3+2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$B_2,1$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_3$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi_{9,2}$	$\phi_3\phi_4$	$2q^2+q+1$	ϕ_3	ϕ_3	ϕ_2	1	1
$\phi'_{8,3}$	$q\phi_3\phi_4$	$q\phi_3$	q	q	q	$.$	$.$
$\phi''_{8,3}$	$\phi_2\phi_4$	ϕ_3	ϕ_2	ϕ_2	ϕ_2	1	1
$\phi_{12,4}$	$\frac{1}{4}\phi_2^2\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{4}(3q^2+2q+1)\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_2^3$	$-\frac{1}{4}(q^2-2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{4}(3q+1)$	$\frac{1}{4}(2q^2+q+1)$	$-\frac{1}{4}\phi_1$
$\phi'_{9,6}$	$\frac{1}{4}(3q-1)\phi_2\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{4}(5q^3+3q^2+q-1)$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{4}(q^2+2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_1$	$-\frac{1}{4}(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{4}\phi_1$
$\phi'_{1,12}$	$\frac{1}{4}(3q^4+q^3-2q^2-q+1)\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_1$	$\frac{1}{4}(2q^2+q+1)$	$-\frac{1}{4}\phi_1$
$F_4^{II}[1]$	$\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_1$	$-\frac{1}{4}(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{4}\phi_1$
$\phi''_{6,6}$	$\frac{1}{2}q^2\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$.$	$.$	$.$
$\phi_{16,5}$	$q\phi_2^2\phi_4$	$q\phi_2^2$	$q\phi_2$	$q\phi_2$	q	$.$	$.$
$F_4[-1]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
B_2,ϵ''	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{4,7}$	$q^3\phi_3$	q^3	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{9,6}$	$-\frac{1}{4}(q^2-2q-1)\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_2^3$	$-\frac{1}{4}(q^2-2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{4}(q^3-q^2+3q+1)$	$\frac{1}{4}(3q+1)$	$-\frac{1}{4}(2q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{4}\phi_1$
$F_4'[1]$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_1$	$-\frac{1}{4}(2q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{4}\phi_1$
$\phi''_{1,12}$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_4$	$-\frac{1}{4}(q^3+3q^2-q+1)$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_1$	$\frac{1}{4}(2q+1)\phi_1$	$\frac{1}{4}\phi_1$
$\phi_{4,8}$	$-\frac{1}{4}(q^2-3q+1)\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{4}(q^2+2q-1)\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{4}(q^2+2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_1$	$\frac{1}{4}(2q+1)\phi_1$	$\frac{1}{4}\phi_1$
B_2,r	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1^2\phi_3$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{6,6}$	$q\phi_3$	$q\phi_2$	q	q	q	$.$	$.$
$F_4[\theta]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[\theta^2]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{4,7}$	$-\frac{1}{2}(q^2-q-1)\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(2q+1)\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$
B_2,ϵ'	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_3$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$F_4[i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$q^2\varepsilon_4$
$F_4[-i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$-q^2\varepsilon_4$
$\phi'_{8,9}$	$q^3\phi_2\phi_4$	q^3	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{8,9}$	$q^2\phi_4$	q^2	q^2	q^2	$.$	$.$	$.$
$\phi_{9,10}$	$q^3\phi_3$	q^3	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi_{4,13}$	q^6	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{2,16}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{2,16}$	q^6	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
B_2,ϵ	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi_{1,24}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$

Tabelle T.A.98: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 18

	$c_{6,14}$	$c_{6,16}$	$c_{7,1}$	$c_{7,2}$	$c_{7,3}$	$c_{7,4}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^3+2q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q+1)\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^4+q^3+3q-1)$	$\frac{1}{2}(3q-1)$	$\frac{1}{2}(3q-1)$	$\frac{1}{2}(2q^2+3q-1)$
$B_2,1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^3+2q-1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q-1)\phi_1$	$\frac{1}{2}(3q-1)$	$-\frac{1}{2}(2q-1)\phi_1$
$\phi_{9,2}$	1	1	$(2q^2+1)\phi_6$	$-(q^3-3q^2+q-1)$	$2q^2-q+1$	$2q^2-q+1$
$\phi'_{8,3}$	$.$	$.$	$(2q^2-q+1)q\phi_4$	$q(2q^2-q+1)$	$q\phi_4$	$q\phi_4$
$\phi''_{8,3}$	1	1	$-\phi_1^2\phi_4$	$\phi_1\phi_6$	$-\phi_1^2$	$-\phi_1^2$
$\phi_{12,4}$	$-\frac{1}{4}\phi_1$	$-\frac{1}{4}\phi_1$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^4\phi_6$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^3$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^3$	$-\frac{1}{4}\phi_2^2\phi_4$
$\phi'_{9,6}$	$\frac{1}{4}\phi_1$	$\frac{1}{4}\phi_1$	$\frac{1}{4}(q^5+4q^4-q^3-q^2+2q+1)\phi_4$	$\frac{1}{4}(q^3-q^2+q+1)\phi_2$	$\frac{1}{4}(q^3-q^2+4q^3-2q^2-2q-1)\phi_2$	$-\frac{1}{4}(q^4-4q^3-2q^2-2q-1)$
$\phi'_{1,12}$	$-\frac{1}{4}\phi_1$	$-\frac{1}{4}\phi_1$	$-\frac{1}{4}(q^3-5q^2+q+1)\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{4}(3q^3-3q^2+q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{4}(q^3+3q^2-q-1)\phi_1$	$\frac{1}{4}(q^3+q^2+q-1)\phi_2$
$F_4^{I\,I}[1]$	$\frac{1}{4}\phi_1$	$\frac{1}{4}\phi_1$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{4}(3q^2-2q+1)\phi_1^2$	$-\frac{1}{4}(q^2+2q-1)\phi_1^2$	$\frac{1}{4}\phi_1^4$
$\phi''_{6,6}$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}q(3q^2-2q+1)$	$\frac{1}{2}q(q^2+2q-1)$	$-\frac{1}{2}q(3q^2-2q+1)$
$\phi_{16,5}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[-1]$	$.$	$.$	$q\phi_1^3\phi_4$	$q\phi_1^3$	$-q\phi_1^2$	$-q\phi_1^2$
B_2,ϵ''	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}(q^3+2q-1)q^3\phi_1$	$\frac{1}{2}q^3\phi_1$	$\frac{1}{2}q^3\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_1$
$\phi'_{4,7}$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^3\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}q^3\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_1$	$\frac{1}{2}q^3\phi_2$
$\phi''_{9,6}$	$-\frac{1}{4}\phi_1$	$-\frac{1}{4}\phi_1$	$-\frac{1}{4}(q^5+2q^4-q^3-q^2+4q+1)\phi_4$	$-\frac{1}{4}(q^4+2q^3+4q+1)$	$-\frac{1}{4}(q^4+2q^3+4q+1)$	$\frac{1}{4}(q^3+q^2-3q-1)\phi_2$
$F_4^I[1]$	$-\frac{1}{4}\phi_1$	$-\frac{1}{4}\phi_1$	$\frac{1}{4}(q^2+3q+1)\phi_1^3\phi_4$	$\frac{1}{4}(q^2-2q-1)\phi_1^2$	$\frac{1}{4}(q^2-2q-1)\phi_1^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_2^2$
$\phi''_{1,12}$	$\frac{1}{4}\phi_1$	$\frac{1}{4}\phi_1$	$\frac{1}{4}(q^3+q^2-5q+1)\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{4}(q^4-8q^3+8q^2-6q+1)$	$\frac{1}{4}(q^4-4q^3+4q^2-6q+1)$	$-\frac{1}{4}(q^3+q^2-5q+1)\phi_1$
$\phi_{4,8}$	$\frac{1}{4}\phi_1$	$\frac{1}{4}\phi_1$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^4\phi_6$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^3$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^3$	$\frac{1}{4}\phi_2^2\phi_4$
B_2,r	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q(3q^2+1)$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$
$\phi'_{6,6}$	$.$	$.$	$q\phi_1\phi_3\phi_6$	$q(q^3+q-1)$	$-q$	$-q$
$F_4[\theta]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[\theta^2]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{4,7}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
B_2,ϵ'	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^3-2q^2-1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q^2+1)\phi_1$	$\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1$
$F_4[i]$	$q^2\varepsilon_4$	$-q^2\varepsilon_4$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[-i]$	$-q^2\varepsilon_4$	$q^2\varepsilon_4$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{8,9}$	$.$	$.$	$q^3\phi_1^2\phi_4$	$-q^3\phi_1$	$.$	$.$
$\phi''_{8,9}$	$.$	$.$	$-(q^2-q+2)q^2\phi_4$	$-q^2(q^2-q+2)$	$-2q^2$	$-2q^2$
$\phi_{9,10}$	$.$	$.$	$-(q^2+2)q^3\phi_6$	$q^3(q-2)$	$-q^3$	$-q^3$
$\phi_{4,13}$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_2$	$\frac{1}{2}q^3\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_2$
$\phi''_{2,16}$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^3(q^4-3q^3-q-1)$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_2$	$\frac{1}{2}q^3\phi_1$
$\phi'_{2,16}$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}(q^3+2q^2+1)q^3\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_1$	$\frac{1}{2}q^3\phi_2$
B_2,ϵ	$.$	$.$	$\frac{1}{2}(q^3-2q^2-1)q^3\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_1$	$\frac{1}{2}q^3\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_1$
$\phi_{1,24}$	$.$	$.$	$-q^7$	$.$	$.$	$.$

Tabelle T.A.99: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 19

	$c_{7,5}$	$c_{7,6}$	$c_{7,7}$	$c_{7,8}$	$c_{7,9}$	$c_{7,10}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^3+2q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q+1)\phi_1$
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}(3q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(3q-1)$	$\frac{1}{2}(q^2+q-1)\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$B_2,1$	$\frac{1}{2}(3q-1)$	$\frac{1}{2}(3q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi_{9,2}$	ϕ_6	1	1	$\phi_4\phi_6$	$2q^2-q+1$	ϕ_6
$\phi'_{8,3}$	q	$.$	$.$	$q\phi_4\phi_6$	$q\phi_6$	q
$\phi''_{8,3}$	$-\phi_1^2$	ϕ_1	ϕ_1	$\phi_1\phi_4$	$-\phi_6$	ϕ_1
$\phi_{12,4}$	$-\frac{1}{4}\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^3\phi_6$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$
$\phi'_{9,6}$	$\frac{1}{4}\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_2^2$	$\frac{1}{4}(3q^4-q^3-2q^2+q+1)\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$
$\phi'_{1,12}$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}(3q+1)\phi_1\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}(5q^3-3q^2+q+1)$	$-\frac{1}{4}(q^2-2q-1)\phi_1$
$F_4^{II}[1]$	$\frac{1}{4}(3q-1)\phi_1$	$\frac{1}{4}\phi_1^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_1^2\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}(3q^2-2q+1)\phi_1$	$\frac{1}{4}(q^2+2q-1)\phi_1$
$\phi''_{6,6}$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$
$\phi_{16,5}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[-1]$	$q\phi_1$	$.$	$.$	$-q\phi_1^2\phi_4$	$-q\phi_1^2$	$q\phi_1$
B_2,ϵ''	$.$	$.$	$.$	$-q^3\phi_6$	$-q^3$	$.$
$\phi'_{4,7}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{9,6}$	$\frac{1}{4}(q^2-4q-1)$	$-\frac{1}{4}\phi_2^2$	$\frac{1}{4}(q^2-4q-1)$	$-\frac{1}{4}\phi_2^2\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_2\phi_4$
$F_4'[1]$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_1^2$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{4}(q^2+3q+1)\phi_1^2\phi_4$	$-\frac{1}{4}(q^2-2q-1)\phi_1$	$-\frac{1}{4}(q^2-2q-1)\phi_1$
$\phi''_{1,12}$	$\frac{1}{4}(5q-1)\phi_1$	$-\frac{1}{4}(q^2+4q-1)$	$\frac{1}{4}\phi_1^2$	$-\frac{1}{4}(q^2+2q-1)\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3$	$-\frac{1}{4}(q^3+q^2+3q-1)$
$\phi_{4,8}$	$\frac{1}{4}\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^3\phi_6$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$
B_2,r	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$
$\phi'_{6,6}$	$-q$	$.$	$.$	$-q\phi_6$	$q\phi_1$	$-q$
$F_4[\theta]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[\theta^2]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{4,7}$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$
B_2,ϵ'	$\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q^2+q-1)\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$
$F_4[i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[-i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{8,9}$	$.$	$.$	$.$	$-q^3\phi_1\phi_4$	q^3	$.$
$\phi''_{8,9}$	$-q^2$	$.$	$.$	$-q^2\phi_4$	$-q^2$	$-q^2$
$\phi_{9,10}$	$.$	$.$	$.$	$-q^3\phi_6$	$-q^3$	$.$
$\phi_{4,13}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{2,16}$	$.$	$.$	$.$	$-q^6$	$.$	$.$
$\phi'_{2,16}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
B_2,ϵ	$.$	$.$	$.$	$-q^6$	$.$	$.$
$\phi_{1,24}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$

Tabelle T.A.100: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 20

	$c_{7,11}$	$c_{7,12}$	$c_{7,13}$	$c_{7,14}$	$c_{7,15}$	$c_{7,16}$	$c_{8,1}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)\phi_2\phi_6$
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2\phi_6$
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^5-q^4+2q^3-q^2+q+2)$
$B_2,1$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_3$
$\phi_{9,2}$	ϕ_6	$-\phi_1$	1	1	1	1	$\phi_3^2\phi_6$
$\phi'_{8,3}$	q	q	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\phi_2^2\phi_4\phi_6$
$\phi''_{8,3}$	ϕ_1	ϕ_1	-1	-1	-1	-1	$(q^4+q^2+q+1)q\phi_4$
$\phi_{12,4}$	$-\frac{1}{4}\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{4}\phi_2$	$\frac{1}{4}(2q-1)\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_2$	$-\frac{1}{4}(2q^2-q+1)$	$-\frac{1}{4}\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2^3\phi_3\phi_6$
$\phi'_{9,6}$	$\frac{1}{4}\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_2$	$-\frac{1}{4}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_2$	$\frac{1}{4}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{4}\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^3+2)q\phi_3\phi_4$
$\phi'_{1,12}$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_2$	$\frac{1}{4}(2q-1)\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_2$	$-\frac{1}{4}(2q^2-q+1)$	$-\frac{1}{4}\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_4\phi_6$
$F_4^{II}[1]$	$-\frac{1}{4}\phi_1^3$	$-\frac{1}{4}(3q-1)$	$-\frac{1}{4}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_2$	$\frac{1}{4}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{4}\phi_2$	$\cdot$
$\phi''_{6,6}$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\frac{1}{2}q\phi_2\phi_3\phi_4\phi_6$
$\phi_{16,5}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$q\phi_2^3\phi_4\phi_6$
$F_4[-1]$	$q\phi_1$	$-q$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
B_2,ϵ''	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_3$
$\phi'_{4,7}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)q\phi_2\phi_6$
$\phi''_{9,6}$	$\frac{1}{4}(q^3-3q^2-q-1)$	$-\frac{1}{4}\phi_2$	$-\frac{1}{4}(2q^2-q+1)$	$-\frac{1}{4}\phi_2$	$\frac{1}{4}(2q-1)\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q^3+1)q\phi_3\phi_4$
$F_4^I[1]$	$\frac{1}{4}\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{4}\phi_2$	$-\frac{1}{4}(2q^2-q+1)$	$-\frac{1}{4}\phi_2$	$\frac{1}{4}(2q-1)\phi_2$	$-\frac{1}{4}\phi_2$	$\cdot$
$\phi''_{1,12}$	$\frac{1}{4}(q^2+2q-1)\phi_1$	$-\frac{1}{4}(3q-1)$	$\frac{1}{4}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{4}\phi_2$	$-\frac{1}{4}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_2$	$\frac{1}{2}q^4\phi_4\phi_6$
$\phi_{4,8}$	$\frac{1}{4}\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{4}\phi_2$	$\frac{1}{4}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{4}\phi_2$	$-\frac{1}{4}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{4}\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2^3\phi_6^2$
B_2,r	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2\phi_3\phi_6$
$\phi'_{6,6}$	$-q$	$-q$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$q^2\phi_2\phi_3\phi_6$
$F_4[\theta]$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$F_4[\theta^2]$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi''_{4,7}$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)q^3\phi_2\phi_6$
B_2,ϵ'	$-\frac{1}{2}(2q-1)\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}q^4\phi_1^2\phi_3$
$F_4[i]$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$q^2\varepsilon_4$	$\cdot$	$-q^2\varepsilon_4$	$\cdot$
$F_4[-i]$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$-q^2\varepsilon_4$	$\cdot$	$q^2\varepsilon_4$	$\cdot$
$\phi'_{8,9}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$(q^4+q^3+q^2+1)q^2\phi_4$
$\phi''_{8,9}$	$-q^2$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$q^3\phi_2^2\phi_4\phi_6$
$\phi_{9,10}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$q^3\phi_3^2\phi_6$
$\phi_{4,13}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)q^4\phi_2\phi_6$
$\phi''_{2,16}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\frac{1}{2}q^4(2q^5+q^4-q^3+2q^2-q+1)$
$\phi'_{2,16}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\frac{1}{2}q^4\phi_2^2\phi_6$
B_2,ϵ	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\frac{1}{2}q^4\phi_1^2\phi_3$
$\phi_{1,24}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	q^9

Tabelle T.A.101: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 21

	$c_{8,2}$	$c_{8,3}$	$c_{8,4}$	$c_{8,5}$	$c_{8,6}$	$c_{8,7}$	$c_{8,8}$	$c_{8,9}$	$c_{8,10}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}(q^4+q^3+q^2+q+2)$	$\frac{1}{2}(q+2)\phi_4$	$\frac{1}{2}(q^2-q+2)\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)$	ϕ_2	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)$	ϕ_2	1	1
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}q\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	.	$\frac{1}{2}q\phi_2$	.	q	.
$\phi'_{2,4}$	$-\frac{1}{2}(q^4-q^3+q^2-q-2)$	$\frac{1}{2}(q^2-q+2)\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^3-2q^2+q+2)$	$-\frac{1}{2}(q-2)\phi_2$	ϕ_2	$-\frac{1}{2}(q-2)\phi_2$	ϕ_2	1	1
$B_2,1$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.	q	.
$\phi_{9,2}$	$\phi_3\phi_4$	$(2q^2+1)\phi_2$	$2q^2+q+1$	$2q^2+q+1$	ϕ_3	ϕ_3	ϕ_2	ϕ_2	1
$\phi'_{8,3}$	$\phi_2\phi_4$	$(2q^2+1)\phi_2$	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_2^2	ϕ_2	$2q+1$	1	1
$\phi''_{8,3}$	$q\phi_3\phi_4$	$q(2q^2+q+1)$	$q(2q^2+q+1)$	$q\phi_3$	q	$q\phi_2$	q	q	.
$\phi_{12,4}$	$\frac{1}{2}(q^3+q+1)q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}(2q+1)q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}(2q+1)q\phi_2$	$q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	q	.	.
$\phi'_{9,6}$	$-\frac{1}{2}(q^3-2q-2)q\phi_4$	$q\phi_2\phi_3$	q	$q\phi_2$	$q(q+2)$	q	$2q$	.	.
$\phi'_{1,12}$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	q	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	q	.	.
$F_4^I[1]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{6,6}$	$\frac{1}{2}(q^3+q+1)q\phi_4$	$\frac{1}{2}(2q+1)q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	q	$\frac{1}{2}q\phi_2$	q	.	.
$\phi_{16,5}$	$q\phi_2^2\phi_4$	$(2q^2+q+1)q\phi_2$	$q\phi_2^2$	$q\phi_2^2$	$q\phi_2$	$q\phi_2$	q	q	.
$F_4[-1]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
B_2,ϵ''	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.	q	.
$\phi'_{4,7}$	$-\frac{1}{2}q(q^3-q^2-q-1)$	$\frac{1}{2}q(3q^2+2q+1)$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	q	.	.
$\phi''_{9,6}$	$\frac{1}{2}(2q^2+1)q\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{2}q(2q^3+3q^2+1)$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)q\phi_2$	$\frac{1}{2}q(2q^2+q+1)$	.	$\frac{1}{2}q\phi_2$	.	q	.
$F_4^I[1]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{1,12}$	$\frac{1}{2}q^4\phi_4$	.	q^4	.	.	.	.	.	.
$\phi_{4,8}$	$-\frac{1}{2}(q^3-2q^2+q-1)q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}(2q^2-q+1)q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	.	$\frac{1}{2}q\phi_2$	.	q	.
B_2,r	$-\frac{1}{2}(q^4+q^3+q^2+1)q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}(2q^2-q+1)q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.	q	.
$\phi'_{6,6}$	$q^2(q^3+q+1)$	$q^2(2q+1)$	q^2	$q^2\phi_2$	q^2	.	.	.	.
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	$\frac{1}{2}(q+2)q^3\phi_4$	q^3	$q^3\phi_2$	q^3	.	.	.	.	.
B_2,ϵ'	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	.	q^4	.	.	.	.	.	.
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	$q^2\phi_4$	$q^2(2q^2+q+1)$	$-q^2\phi_1$	q^2	q^2	.	.	.	.
$\phi''_{8,9}$	$q^3\phi_2\phi_4$	$q^3\phi_2$	$q^3\phi_2$	q^3	.	.	.	.	.
$\phi_{9,10}$	$q^3\phi_3$	$q^3(2q+1)$	q^3	q^3	.	.	.	.	.
$\phi_{4,13}$	$\frac{1}{2}q^4\phi_4$	q^4	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{2,16}$	$\frac{1}{2}q^4\phi_4$	.	q^4	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{2,16}$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	q^4	.	.	.	.	.	.	.
B_2,ϵ	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	.	q^4	.	.	.	.	.	.
$\phi_{1,24}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Tabelle T.A.102: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 22

	$c_{9,1}$	$c_{9,2}$	$c_{9,3}$	$c_{9,4}$	$c_{9,5}$	$c_{9,6}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}q\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$.$
$\phi_{2,4}''$	$\frac{1}{2}(q^5+q^4+2q^3+q^2+q-2)$	$\frac{1}{2}(q^4+q^3+q^2+q-2)$	$\frac{1}{2}(q^3+2q^2+q-2)$	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)\phi_1$	$\frac{1}{2}(q+2)\phi_1$	ϕ_1
$\phi_{2,4}'$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_3$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$.$
$B_2,1$	$\frac{1}{2}(q^2-q+2)\phi_1\phi_3$	$-\frac{1}{2}(q^4-q^3+q^2-q+2)$	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)\phi_1$	$\frac{1}{2}(q-2)\phi_4$	$-\frac{1}{2}(q^2-q+2)$	ϕ_1
$\phi_{9,2}$	$\phi_3\phi_6^2$	$\phi_4\phi_6$	$2q^2-q+1$	$-(2q^2+1)\phi_1$	$2q^2-q+1$	ϕ_6
$\phi_{8,3}'$	$-\phi_1^2\phi_3\phi_4$	$\phi_1\phi_4$	ϕ_1	$(2q^2+1)\phi_1$	$-\phi_6$	$-\phi_1^2$
$\phi_{8,3}''$	$(q^4+q^2-q+1)q\phi_4$	$q\phi_4\phi_6$	$q(2q^2-q+1)$	$q(2q^2-q+1)$	$q\phi_6$	q
$\phi_{12,4}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi_{9,6}'$	$-\frac{1}{2}q\phi_3\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$-q$
$\phi_{1,12}'$	$\frac{1}{2}(q^3-2q+2)q\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}(q^3-2q+2)q\phi_4$	$-q$	$q\phi_1\phi_6$	$q\phi_1$	$q(q-2)$
$F_4^{II}[1]$	$\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_3\phi_6$	$\frac{1}{2}(q^3+q-1)q\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}(2q-1)q\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}(2q-1)q\phi_1$	$q\phi_1$
$\phi_{6,6}''$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_3\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{2}(q^3+q-1)q\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}(2q-1)q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-q$
$\phi_{16,5}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[-1]$	$q\phi_1^3\phi_3\phi_4$	$-q\phi_1^2\phi_4$	$-q\phi_1^2$	$(2q^2-q+1)q\phi_1$	$-q\phi_1^2$	$q\phi_1$
B_2,ϵ''	$\frac{1}{2}(2q^2-q+1)q\phi_1\phi_3$	$-\frac{1}{2}q(q^3+q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q(3q^2-2q+1)$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$q\phi_1$
$\phi_{4,7}'$	$-\frac{1}{2}q\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{2}q\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$.$
$\phi_{9,6}''$	$\frac{1}{2}q^4\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{2}q^4\phi_4$	q^4	$.$	$.$	$.$
$F_4^I[1]$	$\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_3^2$	$-\frac{1}{2}(q^3+2q^2+q+1)q\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$.$
$\phi_{1,12}''$	$\frac{1}{2}(2q^3-1)q\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{2}(2q^2+1)q\phi_1\phi_4$	$\frac{1}{2}(2q^2-q+1)q\phi_1$	$\frac{1}{2}q(2q^3-3q^2-1)$	$-\frac{1}{2}q(2q^2-q+1)$	$.$
$\phi_{4,8}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
B_2,r	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$-\frac{1}{2}(q^4-q^3+q^2+1)q\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$.$
$\phi_{6,6}'$	$-q^2\phi_1\phi_3\phi_6$	$-q^2(q^3+q-1)$	q^2	$-q^2(2q-1)$	$-q^2\phi_1$	q^2
$F_4[\theta]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[\theta^2]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi_{4,7}''$	$\frac{1}{2}q^4\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	q^4	$.$	$.$	$.$
B_2,ϵ'	$\frac{1}{2}(q^2-q+2)q^3\phi_1\phi_3$	$\frac{1}{2}(q-2)q^3\phi_4$	$q^3\phi_1$	$-q^3$	$-q^3$	$.$
$F_4[i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[-i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi_{8,9}'$	$-(q^4-q^3+q^2+1)q^2\phi_4$	$-q^2\phi_4$	$-q^2\phi_2$	$-q^2(2q^2-q+1)$	$-q^2$	$-q^2$
$\phi_{8,9}''$	$q^3\phi_1^2\phi_3\phi_4$	$-q^3\phi_1\phi_4$	$-q^3\phi_1$	$-q^3\phi_1$	q^3	$.$
$\phi_{9,10}$	$-q^3\phi_3\phi_6^2$	$-q^3\phi_6$	$-q^3$	$q^3(2q-1)$	$-q^3$	$.$
$\phi_{4,13}$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	$-q^4$	$.$	$.$	$.$
$\phi_{2,16}''$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1^2\phi_3$	$\frac{1}{2}q^4\phi_1\phi_2$	$.$	$-q^4$	$.$	$.$
$\phi_{2,16}'$	$\frac{1}{2}q^4(2q^5-q^4-q^3-2q^2-q-1)$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_4$	$-q^4$	$.$	$.$	$.$
B_2,ϵ	$\frac{1}{2}(2q^2-q+1)q^4\phi_1\phi_3$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_4$	$.$	$-q^4$	$.$	$.$
$\phi_{1,24}$	$-q^9$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$

Tabelle T.A.103: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 23

	$c_{9,7}$	$c_{9,8}$	$c_{9,9}$	$c_{9,10}$	$c_{10,1}$	$c_{10,2}$	$c_{10,3}$	$c_{10,4}$	$c_{10,5}$	$c_{10,6}$	$c_{11,1}$	$c_{11,2}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$.$	q	$.$	ϕ_2^2	$2q+1$	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_2	1	$.$	$.$
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}(q+2)\phi_1$	ϕ_1	-1	-1	$q\phi_2$	q	$.$	$q\phi_2$	q	$.$	ϕ_1	ϕ_1
$\phi'_{2,4}$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$.$	q	$.$	ϕ_2	ϕ_2	ϕ_2	1	1	1	$-q\phi_1$	q
$B_2,1$	$-\frac{1}{2}(q^2-q+2)$	ϕ_1	-1	-1	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$-\phi_1^2$	$2q-1$
$\phi_{9,2}$	ϕ_6	$-\phi_1$	$-\phi_1$	1	$(q+2)\phi_3$	$(q+2)\phi_2$	$q+2$	$2\phi_3$	$2\phi_2$	2	$-(q-2)\phi_6$	$(q-2)\phi_1$
$\phi'_{8,3}$	ϕ_1	$2q-1$	-1	-1	$(q^2+q+2)\phi_2$	$(q+2)\phi_2$	$2\phi_2$	q^2+q+2	$q+2$	2	$(q^2-q+2)\phi_1$	$-(q-2)\phi_1$
$\phi''_{8,3}$	$-q\phi_1$	q	q	$.$	$(2q^2+q+1)\phi_2$	ϕ_2^2	1	$\phi_2\phi_3$	$2q+1$	1	$(2q^2-q+1)\phi_1$	$-\phi_1^2$
$\phi_{12,4}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$\phi_2^2\phi_3$	$(2q+1)\phi_2$	ϕ_2	$\phi_2\phi_3$	$2q+1$	1	$.$	$.$
$\phi'_{9,6}$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$-q$	$.$	$.$	$(2q+1)\phi_3$	$(2q+1)\phi_2$	$2q+1$	ϕ_3	ϕ_2	1	$-q$	$-q$
$\phi'_{1,12}$	$-q$	$-2q$	$.$	$.$	q	q	q	$.$	$.$	$.$	$-(2q-1)\phi_6$	$(2q-1)\phi_1$
$F_4^{II}[1]$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-q$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$\phi_1^2\phi_6$	$(2q-1)\phi_1$
$\phi''_{6,6}$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-q$	$.$	$.$	$2q\phi_3$	$q(q+2)$	q	$q\phi_3$	q	$.$	$-2q\phi_6$	$q(q-2)$
$\phi_{16,5}$	$.$	$.$	$.$	$.$	ϕ_2^4	$(3q+1)\phi_2$	ϕ_2	ϕ_2^3	$3q+1$	1	$.$	$.$
$F_4[-1]$	$q\phi_1$	$-q$	$-q$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	ϕ_1^4	$(3q-1)\phi_1$
B_2,ϵ''	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$-q$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$-\phi_1\phi_4$	ϕ_6
$\phi'_{4,7}$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$.$	$-q$	$.$	$\phi_2\phi_4$	ϕ_3	ϕ_2	1	1	1	$.$	$.$
$\phi''_{9,6}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$(q+2)q\phi_3$	$q(q+2)$	$.$	$2q\phi_3$	$2q$	$.$	$-q^3$	$.$
$F_4'[1]$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$.$	$-q$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$-q\phi_1^2$	$q\phi_1$
$\phi''_{1,12}$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$.$	$-q$	$.$	q^3	$.$	$.$	q^3	$.$	$.$	$(q-2)q\phi_6$	$q(q-2)$
$\phi_{4,8}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$q\phi_2^2$	$q\phi_2$	$.$	$q\phi_2$	q	$.$	$.$	$.$
B_2,r	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$.$	$-q$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{6,6}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$\phi_3\phi_4$	ϕ_3	1	ϕ_3	ϕ_2	1	$\phi_4\phi_6$	ϕ_6
$F_4[\theta]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[\theta^2]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{4,7}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$q\phi_2\phi_4$	q	$.$	$q\phi_3$	q	$.$	$.$	$.$
B_2,ϵ'	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$q\phi_1\phi_4$	$-q$
$F_4[i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[-i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{8,9}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$(q^2+q+2)q\phi_2$	$2q\phi_2$	q	$q\phi_2$	q	$.$	$-(q^2-q+2)q\phi_1$	$-2q\phi_1$
$\phi''_{8,9}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$(2q^2+q+1)q\phi_2$	$q\phi_2$	$.$	$q(2q^2+q+1)$	q	$.$	$-(2q^2-q+1)q\phi_1$	$-q\phi_1$
$\phi_{9,10}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$(2q+1)q\phi_3$	$q(2q+1)$	$.$	$q\phi_3$	q	$.$	$(2q-1)q\phi_6$	$q(2q-1)$
$\phi_{4,13}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$q^2\phi_2^2$	q^2	$.$	q^3	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{2,16}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$q^3\phi_2$	$.$	$.$	q^3	$.$	$.$	$q^2\phi_1$	$-q^2$
$\phi'_{2,16}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$q^2\phi_2$	q^2	$.$	$.$	$.$	$.$	$-q^3\phi_1$	$.$
B_2,ϵ	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$-q^2\phi_1^2$	$-q^2$
$\phi_{1,24}$	$.$	$.$	$.$	$.$	q^4	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	q^4	$.$

Tabelle T.A.104: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 24

	$c_{11,3}$	$c_{11,4}$	$c_{11,5}$	$c_{11,6}$	$c_{12,1}$	$c_{12,2}$	$c_{12,3}$	$c_{12,4}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(q^4+q^3+2q^2+q+3)$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+3)$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+3)$	$\frac{1}{2}(q+3)$
$\phi''_{2,4}$	ϕ_1	-1	-1	-1	$-\frac{1}{2}(q^3-2q^2+2q-3)\phi_2$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}(2q-3)\phi_2$	$\frac{1}{2}(q+3)$
$\phi'_{2,4}$	.	$-q\phi_1$	q	.	$\frac{1}{2}(q^3+2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_2$
$B_2,1$	ϕ_1	$-\phi_6$	ϕ_1	-1	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_3$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$
$\phi_{9,2}$	$-(q-2)$	$2\phi_6$	$-2\phi_1$	2	ϕ_3^2	$3q^2+2q+1$	ϕ_2^2	ϕ_2^2
$\phi'_{8,3}$	$2\phi_1$	$-(q^2-q+2)$	$q-2$	-2	$q\phi_2^2\phi_4$	$q\phi_2^2$	$q\phi_2$	$q\phi_2$
$\phi''_{8,3}$	-1	$\phi_1\phi_6$	$2q-1$	-1	$2\phi_2\phi_4$	$2\phi_3$	$2\phi_2$	$2\phi_2$
$\phi_{12,4}$	.	.	.	.	$\frac{1}{2}\phi_2^2\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{2}(3q^2+2q+1)\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2^3$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)\phi_2$
$\phi'_{9,6}$	$-q$	.	.	.	$\frac{1}{2}(2q^2+2q-1)\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{2}(4q^3+2q^2+q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_2$
$\phi'_{1,12}$	$-(2q-1)$	ϕ_6	$-\phi_1$	1	$\frac{1}{2}(q^2+q-1)q^2\phi_4$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$
$F_4^{II}[1]$	$-\phi_1$	$-\phi_1\phi_6$	$-(2q-1)$	1	.	.	.	.
$\phi''_{6,6}$	$-q$	$-q\phi_6$	$-q$	.	$\frac{1}{2}\phi_3\phi_4^2$	$\frac{1}{2}(q^3+3q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}(q^3+3q^2+q+1)$	$-\frac{1}{2}(q^3-q^2-q-1)$
$\phi_{16,5}$	.	.	.	.	$2q\phi_2^2\phi_4$	$2q\phi_2^2$	$2q\phi_2$	$2q\phi_2$
$F_4[-1]$	$-\phi_1$	$-\phi_1^3$	$-(3q-1)$	1	.	.	.	.
B_2,ϵ''	$-\phi_1$	1	1	1	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1^2\phi_3$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$
$\phi'_{4,7}$	.	.	.	.	$\frac{1}{2}q^2(q^4+3q^3+2q^2+3q-1)$	$\frac{1}{2}q^2(3q-1)$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$
$\phi''_{9,6}$	.	$-q^3$	.	.	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-2)\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{2}(q^3+5q^2+4q+2)$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-2)\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^3+q^2+4q+2)$
$F_4'[1]$	.	$q\phi_1$	$-q$	.	.	.	.	.
$\phi''_{1,12}$	.	$-2q\phi_6$	$-2q$	.	$-\frac{1}{2}(q^2-q-1)\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(2q+1)\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi_{4,8}$	.	.	.	.	$-\frac{1}{2}(q^2-3q+1)\phi_2^2\phi_4$	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)\phi_2$
B_2,r	.	.	.	.	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_4$	$-\frac{1}{2}(q^3+3q^2-q+1)$
$\phi'_{6,6}$	1	ϕ_6	$-\phi_1$	1	$q\phi_3\phi_4$	$q\phi_3$	q	q
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	.	.	.	.	$-\frac{1}{2}(q^4-3q^3-2q^2-3q-1)$	$\frac{1}{2}(2q+1)\phi_2$	$-\frac{1}{2}(2q^2-3q-1)$	$\frac{1}{2}(3q+1)$
B_2,ϵ'	.	$-q\phi_6$	$-q$	.	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_3$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	q	$-q\phi_1$	q	.	$2q^3\phi_2\phi_4$	$2q^3$	.	.
$\phi''_{8,9}$	.	$q(2q^2-q+1)$	q	.	$q\phi_2^2\phi_4$	$q\phi_2^2$	$q\phi_2$	$q\phi_2$
$\phi_{9,10}$	.	$-q\phi_6$	$-q$	.	$q^2\phi_3^2$	$q^2(2q+1)$	q^2	q^2
$\phi_{4,13}$	.	.	.	.	$\frac{1}{2}q^2(3q^4+q^3+2q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$
$\phi''_{2,16}$	.	.	.	.	$-\frac{1}{2}(q^3-2q^2-1)q^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$
$\phi'_{2,16}$	.	q^3	.	.	$\frac{1}{2}(3q^3-2q^2+2q-1)q^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$
B_2,ϵ	.	q^3	.	.	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1^2\phi_3$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$
$\phi_{1,24}$	.	.	.	.	q^6	.	.	.

Tabelle T.A.105: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 25

	$c_{12,5}$	$c_{12,6}$	$c_{12,7}$	$c_{13,1}$	$c_{13,2}$	$c_{13,3}$	$c_{13,4}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}(q^3+2q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q+1)\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^3+2q^2+2q+3)\phi_1$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(2q+3)\phi_1$
$B_2,1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^4-q^3+2q^2-q+3)$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+3)$
$\phi_{9,2}$	$2q+1$	1	1	ϕ_6^2	$3q^2-2q+1$	ϕ_1^2	ϕ_1^2
$\phi'_{8,3}$	q	$.$	$.$	$q\phi_1^2\phi_4$	$q\phi_1^2$	$-q\phi_1$	$-q\phi_1$
$\phi''_{8,3}$	$2\phi_2$	2	2	$2\phi_1\phi_4$	$-2\phi_6$	$2\phi_1$	$2\phi_1$
$\phi_{12,4}$	$\frac{1}{2}(3q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{9,6}$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^2-q-1)q^2\phi_4$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$
$\phi'_{1,12}$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}(2q^2-2q-1)\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}(4q^3-2q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}(2q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$F_4^{II}[1]$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}(3q^2-2q+1)\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1^3$
$\phi''_{6,6}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_4^2\phi_6$	$-\frac{1}{2}(q^3-3q^2+q-1)$	$\frac{1}{2}(q^3+q^2-q+1)$	$-\frac{1}{2}(q^3-3q^2+q-1)$
$\phi_{16,5}$	$2q$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[-1]$	$.$	$.$	$.$	$-2q\phi_1^2\phi_4$	$-2q\phi_1^2$	$2q\phi_1$	$2q\phi_1$
B_2,ϵ''	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^2(q^4-3q^3+2q^2-3q-1)$	$-\frac{1}{2}q^2(3q+1)$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$
$\phi'_{4,7}$	$.$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$
$\phi''_{9,6}$	$2q+1$	1	1	$-\frac{1}{2}(q^2+q-1)\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q-1)\phi_2$
$F_4'[1]$	$.$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}(q^2+3q+1)\phi_1^2\phi_4$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2^2$
$\phi''_{1,12}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^2+2q-2)\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}(q^3-5q^2+4q-2)$	$-\frac{1}{2}(q^3-q^2+4q-2)$	$\frac{1}{2}(q^2+2q-2)\phi_1$
$\phi_{4,8}$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$.$	$.$	$.$	$.$
B_2,r	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{2}(q^3-3q^2-q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2\phi_4$
$\phi'_{6,6}$	q	$.$	$.$	$-q\phi_4\phi_6$	$-q\phi_6$	$-q$	$-q$
$F_4[\theta]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[\theta^2]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{4,7}$	$\frac{1}{2}(3q+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
B_2,ϵ'	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^4+3q^3-2q^2+3q-1)$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}(3q-1)$	$-\frac{1}{2}(2q^2+3q-1)$
$F_4[i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[-i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{8,9}$	$.$	$.$	$.$	$-2q^3\phi_1\phi_4$	$2q^3$	$.$	$.$
$\phi''_{8,9}$	q	$.$	$.$	$q\phi_1^2\phi_4$	$q\phi_1^2$	$-q\phi_1$	$-q\phi_1$
$\phi_{9,10}$	$.$	$.$	$.$	$q^2\phi_6^2$	$-q^2(2q-1)$	q^2	q^2
$\phi_{4,13}$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$
$\phi''_{2,16}$	$.$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}(3q^3+2q^2+2q+1)q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$
$\phi'_{2,16}$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}(q^3+2q^2+1)q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$
B_2,ϵ	$.$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}q^2(3q^4-q^3+2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$
$\phi_{1,24}$	$.$	$.$	$.$	q^6	$.$	$.$	$.$

Tabelle T.A.106: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 26

	$c_{13,5}$	$c_{13,6}$	$c_{13,7}$	$c_{14,1}$	$c_{14,2}$	$c_{14,3}$	$c_{14,4}$	$c_{14,5}$	$c_{14,6}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^3+2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_3$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(q^3+2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$B_2,1$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_3$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi_{9,2}$	$-(2q-1)$	1	1	$\phi_3\phi_6$	ϕ_4	ϕ_4	ϕ_4	1	1
$\phi'_{8,3}$	q	$.$	$.$	$q\phi_4^2$	$q\phi_4$	$-q\phi_1$	$-q\phi_1$	q	$.$
$\phi''_{8,3}$	$2\phi_1$	-2	-2	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi_{12,4}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{9,6}$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^2\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$.$	$.$
$\phi'_{1,12}$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q^4-q^2-q+1)\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$F_4^{II}[1]$	$-\frac{1}{2}(3q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2\phi_3$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi''_{6,6}$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{2}(q^3-q^2-q-1)$	$\frac{1}{2}(q^3-q^2-q-1)$	$-\frac{1}{2}(q^3-q^2+q+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi_{16,5}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[-1]$	$-2q$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
B_2,ϵ''	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1^2\phi_3$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$.$	$.$
$\phi'_{4,7}$	$.$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}(q^3-2q^2-1)q^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$.$	$.$
$\phi''_{9,6}$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_3\phi_4$	$-\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$F_4'[1]$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi''_{1,12}$	$-(2q-1)$	1	1	$-\frac{1}{2}(q^4-q^3-q^2+2)\phi_4$	$\frac{1}{2}(q^3-q^2-2)$	$-\frac{1}{2}(q^3+q^2+2)$	$\frac{1}{2}(q^3-q^2-2)$	-1	-1
$\phi_{4,8}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
B_2,r	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi'_{6,6}$	$-q$	$.$	$.$	$-q\phi_1\phi_2\phi_3$	$-q(q^2-q-1)$	q	q	q	$.$
$F_4[\theta]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[\theta^2]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{4,7}$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q^3+2q-1)\phi_2$	$-\frac{1}{2}(2q-1)\phi_2$	$-\frac{1}{2}(2q-1)\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$
B_2,ϵ'	$-\frac{1}{2}(3q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_3$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$F_4[i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[-i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{8,9}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{8,9}$	q	$.$	$.$	$-q\phi_4^2$	$-q\phi_4$	$q\phi_1$	$q\phi_1$	$-q$	$.$
$\phi_{9,10}$	$.$	$.$	$.$	$-q^2\phi_3\phi_6$	$-q^2$	$-q^2$	$-q^2$	$.$	$.$
$\phi_{4,13}$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}(q^3-2q^2-1)q^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$.$	$.$
$\phi''_{2,16}$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}(q^3-2q^2-1)q^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$.$	$.$
$\phi'_{2,16}$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1^2\phi_3$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$.$	$.$
B_2,ϵ	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1^2\phi_3$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$.$	$.$
$\phi_{1,24}$	$.$	$.$	$.$	$-q^6$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$

Tabelle T.A.107: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 27

	$c_{14,7}$	$c_{15,1}$	$c_{15,2}$	$c_{15,3}$	$c_{15,4}$	$c_{15,5}$	$c_{15,6}$	$c_{15,7}$	$c_{16,1}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	ϕ_2^2
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q^3+2q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q+1)\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	ϕ_2
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$q\phi_2$
$B_2,1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^3+2q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q+1)\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(2q+1)\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	.
$\phi_{9,2}$	1	$\phi_3\phi_6$	ϕ_4	ϕ_4	ϕ_4	1	1	1	$(q+2)\phi_3$
$\phi'_{8,3}$	.	$q\phi_4^2$	$q\phi_4$	$q\phi_2$	$q\phi_2$	q	.	.	$(2q^2+q+1)\phi_2$
$\phi''_{8,3}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$(q^2+q+2)\phi_2$
$\phi_{12,4}$	.	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2^3\phi_6$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\phi_2^2\phi_3$
$\phi'_{9,6}$	.	$\frac{1}{2}(2q^4-q^2+q+1)\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$(q+2)q\phi_3$
$\phi'_{1,12}$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	.	.	.	q^3
$F_4'^{I}[1]$	$\frac{1}{2}\phi_1$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{6,6}$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}(q^3+q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}(q^3+q^2+q-1)$	$-\frac{1}{2}(q^3+q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$2q\phi_3$
$\phi_{16,5}$	.	.	.	.	.	.	.	.	ϕ_2^4
$F_4[-1]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
B_2,ϵ''	.	$-\frac{1}{2}(q^3+2q^2+1)q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	.	.	.	.
$\phi'_{4,7}$	.	$\frac{1}{2}q^2\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	.	.	.	$q\phi_2\phi_4$
$\phi''_{9,6}$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^4+q^3-q^2+2)\phi_4$	$-\frac{1}{2}(q^3+q^2+2)$	$-\frac{1}{2}(q^3+q^2+2)$	$\frac{1}{2}(q^3-q^2-2)$	-1	-1	-1	$(2q+1)\phi_3$
$F_4'[1]$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{1,12}$	-1	$-\frac{1}{2}\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	q
$\phi_{4,8}$	.	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2^3\phi_6$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$q\phi_2^2$
B_2,r	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2^3\phi_6$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	.
$\phi'_{6,6}$	.	$q\phi_1\phi_2\phi_6$	$q(q^2+q-1)$	$-q$	$-q$	$-q$	.	.	$\phi_3\phi_4$
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\phi_2\phi_4$
B_2,ϵ'	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^3+2q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q+1)\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(2q+1)\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	.
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$(2q^2+q+1)q\phi_2$
$\phi''_{8,9}$	.	$-q\phi_4^2$	$-q\phi_4$	$-q\phi_2$	$-q\phi_2$	$-q$	.	.	$(q^2+q+2)q\phi_2$
$\phi_{9,10}$	.	$-q^2\phi_3\phi_6$	$-q^2$	$-q^2$	$-q^2$	.	.	.	$(2q+1)q\phi_3$
$\phi_{4,13}$	.	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	.	.	.	$q^2\phi_2^2$
$\phi''_{2,16}$	.	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	.	.	.	$q^2\phi_2$
$\phi'_{2,16}$	.	$-\frac{1}{2}(q^3+2q^2+1)q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	.	.	.	$q^3\phi_2$
B_2,ϵ	.	$-\frac{1}{2}(q^3+2q^2+1)q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	.	.	.	.
$\phi_{1,24}$	.	$-q^6$	.	.	.	.	.	.	q^4

Tabelle T.A.108: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 28

	$c_{16,2}$	$c_{16,3}$	$c_{16,4}$	$c_{16,5}$	$c_{16,6}$	$c_{17,1}$	$c_{17,2}$	$c_{17,3}$	$c_{17,4}$	$c_{17,5}$	$c_{17,6}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$2q+1$	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_2	1	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{2,4}$	ϕ_2	ϕ_2	1	1	1	$-q\phi_1$	q	.	$-q\phi_1$	q	.
$\phi'_{2,4}$	q	.	$q\phi_2$	q	.	ϕ_1	ϕ_1	ϕ_1	-1	-1	-1
$B_2,1$	.	.	.	.	.	$-\phi_1^2$	$2q-1$	ϕ_1	$-\phi_6$	ϕ_1	-1
$\phi_{9,2}$	$(q+2)\phi_2$	$q+2$	$2\phi_3$	$2\phi_2$	2	$-(q-2)\phi_6$	$(q-2)\phi_1$	$-(q-2)$	$2\phi_6$	$-2\phi_1$	2
$\phi'_{8,3}$	ϕ_2^2	1	$\phi_2\phi_3$	$2q+1$	1	$(2q^2-q+1)\phi_1$	$-\phi_1^2$	-1	$\phi_1\phi_6$	$2q-1$	-1
$\phi''_{8,3}$	$(q+2)\phi_2$	$2\phi_2$	q^2+q+2	$q+2$	2	$(q^2-q+2)\phi_1$	$-(q-2)\phi_1$	$2\phi_1$	$-(q^2-q+2)$	$q-2$	-2
$\phi_{12,4}$	$(2q+1)\phi_2$	ϕ_2	$\phi_2\phi_3$	$2q+1$	1	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{9,6}$	$q(q+2)$	.	$2q\phi_3$	$2q$	.	$-q^3$	.	.	$-q^3$	.	.
$\phi'_{1,12}$	.	.	q^3	.	.	$(q-2)q\phi_6$	$q(q-2)$	.	$-2q\phi_6$	$-2q$	.
$F_4^{II}[1]$	.	.	.	.	.	$\phi_1^2\phi_6$	$(2q-1)\phi_1$	$-\phi_1$	$-\phi_1\phi_6$	$-(2q-1)$	1
$\phi''_{6,6}$	$q(q+2)$	q	$q\phi_3$	q	.	$-2q\phi_6$	$q(q-2)$	$-q$	$-q\phi_6$	$-q$	.
$\phi_{16,5}$	$(3q+1)\phi_2$	ϕ_2	ϕ_2^3	$3q+1$	1	.	.	.	.	.	.
$F_4[-1]$	.	.	.	.	.	ϕ_1^4	$(3q-1)\phi_1$	$-\phi_1$	$-\phi_1^3$	$-(3q-1)$	1
B_2,ϵ''	.	.	.	.	.	$q\phi_1\phi_4$	$-q$	.	$-q\phi_6$	$-q$	.
$\phi'_{4,7}$	q	.	$q\phi_3$	q	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{9,6}$	$(2q+1)\phi_2$	$2q+1$	ϕ_3	ϕ_2	1	$-q$	$-q$	$-q$	.	.	.
$F_4^I[1]$	.	.	.	.	.	$-q\phi_1^2$	$q\phi_1$	.	$q\phi_1$	$-q$	.
$\phi''_{1,12}$	q	q	.	.	.	$-(2q-1)\phi_6$	$(2q-1)\phi_1$	$-(2q-1)$	ϕ_6	$-\phi_1$	1
$\phi_{4,8}$	$q\phi_2$	.	$q\phi_2$	q	.	.	.	.	.	.	.
B_2,r	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{6,6}$	ϕ_3	1	ϕ_3	ϕ_2	1	$\phi_4\phi_6$	ϕ_6	1	ϕ_6	$-\phi_1$	1
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	ϕ_3	ϕ_2	1	1	1	.	.	.	.	.	.
B_2,ϵ'	.	.	.	.	.	$-\phi_1\phi_4$	ϕ_6	$-\phi_1$	1	1	1
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	$q\phi_2$	.	$q(2q^2+q+1)$	q	.	$-(2q^2-q+1)q\phi_1$	$-q\phi_1$	.	$q(2q^2-q+1)$	q	.
$\phi''_{8,9}$	$2q\phi_2$	q	$q\phi_2$	q	.	$-(q^2-q+2)q\phi_1$	$-2q\phi_1$	q	$-q\phi_1$	q	.
$\phi_{9,10}$	$q(2q+1)$	.	$q\phi_3$	q	.	$(2q-1)q\phi_6$	$q(2q-1)$	.	$-q\phi_6$	$-q$	.
$\phi_{4,13}$	q^2	.	q^3	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{2,16}$	q^2	.	.	.	.	$-q^3\phi_1$	.	.	q^3	.	.
$\phi'_{2,16}$	.	.	q^3	.	.	$q^2\phi_1$	$-q^2$	.	.	.	.
B_2,ϵ	.	.	.	.	.	$-q^2\phi_1^2$	$-q^2$	.	q^3	.	.
$\phi_{1,24}$	.	.	.	.	.	q^4	.	.	.	.	.

Tabelle T.A.109: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 29

	$c_{18.1}$	$c_{18.2}$	$c_{18.3}$	$c_{18.4}$	$c_{18.5}$	$c_{18.6}$	$c_{18.7}$	$c_{18.8}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}(q+3)\phi_2$	$\frac{3}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^2+2q+3)$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{3}{2}\phi_2$	$\frac{3}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}(q+3)$
$\phi''_{2,4}$	$-\frac{1}{2}(q^2-4q-1)$	$\frac{1}{2}(3q+1)$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(3q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(3q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$B_2,1$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi_{9,2}$	$3\phi_3$	q^2+2q+3	q^2+2q+3	$q+3$	q^2+2q+3	$q+3$	$q+3$	$q+3$
$\phi'_{8,3}$	q^3+q^2+5q+1	$3q+1$	q^2+4q+1	$2q+1$	$3q+1$	ϕ_2	ϕ_2	$2q+1$
$\phi''_{8,3}$	$2\phi_2^2$	$(q+2)\phi_2$	$2\phi_2$	$q+2$	$(q+2)\phi_2$	$2\phi_2$	$2\phi_2$	$q+2$
$\phi_{12,4}$	$\frac{3}{2}\phi_2^3$	$\frac{3}{2}\phi_2^2$	$\frac{3}{2}\phi_2^2$	$\frac{3}{2}\phi_2$	$\frac{3}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}(q+3)\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q-3)\phi_2$	$\frac{3}{2}\phi_2$
$\phi'_{9,6}$	$\frac{1}{2}(2q+1)(q^2+4q+1)$	$\frac{1}{2}(2q+1)\phi_2$	$\frac{1}{2}(5q+1)\phi_2$	$\frac{1}{2}(3q+1)$	$\frac{1}{2}(2q+1)\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(3q+1)$
$\phi'_{1,12}$	$-\frac{1}{2}q(q^2-4q+1)$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	q^2	$.$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$.$
$F_4^{II}[1]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{6,6}$	$\frac{1}{2}(q^2+4q+1)\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^2+4q+1)$	$\frac{1}{2}(3q^2+2q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^2+4q+1)$	$\frac{1}{2}(q^2+4q+1)$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi_{16,5}$	$2\phi_2^3$	$2\phi_2^2$	$2\phi_2^2$	$2\phi_2$	$2\phi_2^2$	$2\phi_2$	$2\phi_2$	$2\phi_2$
$F_4[-1]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
B_2,ϵ''	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$.$
$\phi'_{4,7}$	$\frac{1}{2}(q+3)q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$q(q+2)$	q	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	q
$\phi''_{9,6}$	$\frac{1}{2}(q+2)(q^2+4q+1)$	$\frac{1}{2}(q+2)(3q+1)$	$2q+1$	ϕ_2	$\frac{1}{2}(q+2)(3q+1)$	$-\frac{1}{2}(q^2-5q-2)$	$\frac{1}{2}(q^2+5q+2)$	ϕ_2
$F_4'[1]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{1,12}$	$-\frac{1}{2}(q^2-4q+1)$	$\frac{1}{2}(3q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(3q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(3q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi_{4,8}$	$\frac{1}{2}\phi_2^3$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2$
B_2,r	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi'_{6,6}$	$\phi_2\phi_3$	ϕ_3	$2q+1$	ϕ_2	ϕ_3	1	1	ϕ_2
$F_4[\theta]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[\theta^2]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{4,7}$	$\frac{1}{2}(3q+1)\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q+1)\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q+1)\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(3q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$
B_2,ϵ'	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$F_4[i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[-i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{8,9}$	$2q\phi_2^2$	$q\phi_2$	$2q\phi_2$	q	$q\phi_2$	$.$	$.$	q
$\phi''_{8,9}$	q^3+5q^2+q+1	$2q^2+q+1$	ϕ_4	1	$2q^2+q+1$	ϕ_2	ϕ_2	1
$\phi_{9,10}$	$3q\phi_3$	$q(q+2)$	$q(q+2)$	q	$q(q+2)$	q	q	q
$\phi_{4,13}$	$\frac{1}{2}(3q+1)q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	q^2	$.$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$.$
$\phi''_{2,16}$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$.$
$\phi'_{2,16}$	$\frac{1}{2}q(q^2+4q-1)$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	q^2	$.$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$.$
B_2,ϵ	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$.$
$\phi_{1,24}$	q^3	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$

Tabelle T.A.110: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 30

	$c_{18,9}$	$c_{18,10}$	$c_{19,1}$	$c_{19,2}$	$c_{19,3}$	$c_{19,4}$	$c_{19,5}$	$c_{19,6}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi''_{2,4}$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi'_{2,4}$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^2+4q-1)$	$\frac{1}{2}(3q-1)$	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(3q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$B_2,1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q-3)\phi_1$	$\frac{3}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{3}{2}\phi_1$	$\frac{3}{2}\phi_1$
$\phi_{9,2}$	3	3	$3\phi_6$	q^2-2q+3	q^2-2q+3	$-(q-3)$	q^2-2q+3	$-(q-3)$
$\phi'_{8,3}$	1	1	q^3-q^2+5q-1	$3q-1$	$-(q^2-4q+1)$	$2q-1$	$3q-1$	ϕ_1
$\phi''_{8,3}$	2	2	$-2\phi_1^2$	$-(q-2)\phi_1$	$2\phi_1$	$q-2$	$-(q-2)\phi_1$	$2\phi_1$
$\phi_{12,4}$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}(q-3)$	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{9,6}$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}q(q^2+4q+1)$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	q^2	.	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$
$\phi'_{1,12}$	.	.	$-\frac{1}{2}(2q-1)(q^2-4q+1)$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_1$	$\frac{1}{2}(5q-1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}(3q-1)$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$F_4^{II}[1]$	.	.	$-\frac{3}{2}\phi_1^3$	$\frac{3}{2}\phi_1^2$	$\frac{3}{2}\phi_1^2$	$-\frac{3}{2}\phi_1$	$\frac{3}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}(q-3)\phi_1$
$\phi''_{6,6}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q^2-4q+1)\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^2-4q+1)$	$\frac{1}{2}(3q^2-2q+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^2-4q+1)$	$\frac{1}{2}(q^2-4q+1)$
$\phi_{16,5}$	2	2	.	.	.	.	.	.
$F_4[-1]$	.	.	$-2\phi_1^3$	$2\phi_1^2$	$2\phi_1^2$	$-2\phi_1$	$2\phi_1^2$	$-2\phi_1$
B_2,ϵ''	.	.	$-\frac{1}{2}(q-3)q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$q(q-2)$	$-q$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$
$\phi'_{4,7}$	.	.	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	.	.	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$
$\phi''_{9,6}$	1	1	$-\frac{1}{2}(q^2+4q+1)$	$-\frac{1}{2}(3q+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(3q+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$F_4^I[1]$	.	.	$-\frac{1}{2}\phi_1^3$	$\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$
$\phi''_{1,12}$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q-2)(q^2-4q+1)$	$\frac{1}{2}(3q-1)(q-2)$	$-(2q-1)$	$-\phi_1$	$\frac{1}{2}(3q-1)(q-2)$	$-\frac{1}{2}(q^2+5q-2)$
$\phi_{4,8}$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	.	.	.	.	.	.
B_2,r	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$
$\phi'_{6,6}$	1	1	$-\phi_1\phi_6$	ϕ_6	$-(2q-1)$	$-\phi_1$	ϕ_6	1
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
B_2,ϵ'	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(3q-1)\phi_1$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	.	.	$2q\phi_1^2$	$-q\phi_1$	$-2q\phi_1$	q	$-q\phi_1$	.
$\phi''_{8,9}$	1	1	q^3-5q^2+q-1	$-(2q^2-q+1)$	$-\phi_4$	-1	$-(2q^2-q+1)$	ϕ_1
$\phi_{9,10}$	.	.	$-3q\phi_6$	$q(q-2)$	$q(q-2)$	$-q$	$q(q-2)$	$-q$
$\phi_{4,13}$	.	.	$-\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	.	.	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$
$\phi''_{2,16}$	.	.	$\frac{1}{2}q(q^2-4q-1)$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$-q^2$	.	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$
$\phi'_{2,16}$	.	.	$\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.	.	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_2$
B_2,ϵ	.	.	$\frac{1}{2}(3q-1)q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$-q^2$	.	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$
$\phi_{1,24}$	.	.	$-q^3$	.	.	.	.	.

Tabelle T.A.111: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 31

	$c_{19,7}$	$c_{19,8}$	$c_{19,9}$	$c_{19,10}$	$c_{20,1}$	$c_{20,2}$	$c_{20,3}$	$c_{20,4}$	$c_{20,5}$	$c_{20,6}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^2+3)$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(q^2+3)$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}(q-3)$
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}(3q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(3q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$B_2,1$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}(3q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi_{9,2}$	$-(q-3)$	$-(q-3)$	3	3	ϕ_3	ϕ_2	ϕ_2	ϕ_4	1	1
$\phi'_{8,3}$	ϕ_1	$2q-1$	-1	-1	$\phi_2\phi_4$	ϕ_2	ϕ_2	ϕ_4	1	1
$\phi''_{8,3}$	$2\phi_1$	$q-2$	-2	-2	.	.	.	.	.	.
$\phi_{12,4}$	.	.	.	.	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi'_{9,6}$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	.	.	.	$\frac{1}{2}(2q+1)\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(3q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi'_{1,12}$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(3q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	.	.	.
$F_4^{II}[1]$	$-\frac{1}{2}(q+3)\phi_1$	$-\frac{3}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(q+3)$	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{6,6}$	$-\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_4$	$-\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi_{16,5}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-1]$	$-2\phi_1$	$-2\phi_1$	2	2	.	.	.	.	.	.
B_2,ϵ''	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-q$	.	.	$\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$-q^2$	.	.
$\phi'_{4,7}$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.	.	.	$\frac{1}{2}q(3q^2+1)$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	.	.	.
$\phi''_{9,6}$	$-\frac{1}{2}(3q+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q+2)\phi_4$	$-\frac{1}{2}(q^2+q+2)$	$\frac{1}{2}(q-2)\phi_2$	$-\phi_4$	-1	-1
$F_4'[1]$	$\frac{1}{2}\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{1,12}$	$\frac{1}{2}(q^2-5q+2)$	$-\phi_1$	1	1	$-\frac{1}{2}\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi_{4,8}$	.	.	.	.	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$
B_2,r	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1^3$	$\frac{1}{2}(q^2+4q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}(3q^2+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi'_{6,6}$	1	$-\phi_1$	1	1	$\phi_1\phi_3$	-1	-1	-1	-1	-1
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q^2+3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(q^2+3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$
B_2,ϵ'	$-\frac{1}{2}(3q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}(3q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	.	q	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{8,9}$	ϕ_1	-1	-1	-1	$-\phi_2\phi_4$	$-\phi_2$	$-\phi_2$	$-\phi_4$	-1	-1
$\phi_{9,10}$	$-q$	$-q$	.	.	$-q\phi_3$	$-q$	$-q$	$-q^2$	.	.
$\phi_{4,13}$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	.	.	.	$-\frac{1}{2}q(3q^2+1)$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	.	.	.
$\phi''_{2,16}$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	.	.	.	$-\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-q^2$	.	.
$\phi'_{2,16}$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.	.	.	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	.	.	.
B_2,ϵ	$\frac{1}{2}q\phi_2$	.	.	.	$\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$-q^2$	.	.
$\phi_{1,24}$	.	.	.	.	$-q^3$	.	.	.	.	.

Tabelle T.A.112: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 32

	$c_{21,1}$	$c_{21,2}$	$c_{21,3}$	$c_{21,4}$	$c_{21,5}$	$c_{21,6}$	$c_{22,1}$	$c_{22,2}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}(3q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(2q^2-q+3)\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^2+2q+3)$
$\phi''_{2,4}$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(3q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(2q^3-q^2+2q+1)$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$
$B_2,1$	$-\frac{1}{2}(q^2+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}(q^2+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$
$\phi_{9,2}$	ϕ_6	$-\phi_1$	$-\phi_1$	ϕ_4	1	1	$(q^2+2)\phi_3$	$2\phi_3$
$\phi'_{8,3}$	$\phi_1\phi_4$	ϕ_1	ϕ_1	$-\phi_4$	-1	-1	$\phi_2^2\phi_4$	ϕ_2^2
$\phi''_{8,3}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$(3q+1)\phi_4$	q^3+q^2+3q+1
$\phi_{12,4}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}\phi_2^3\phi_3$	$\frac{1}{2}(2q+1)\phi_2^2$
$\phi'_{9,6}$	$-\frac{1}{2}q\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}(q+2)^2q\phi_4$	$q(q+2)$
$\phi'_{1,12}$	$-\frac{1}{2}(2q-1)\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(3q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$
$F_4^{II}[1]$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$.$	$.$
$\phi''_{6,6}$	$\frac{1}{2}\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_4$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{2}(3q^2+2q+1)$
$\phi_{16,5}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$\phi_2^3\phi_4$	ϕ_2^3
$F_4[-1]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
B_2,ϵ''	$-\frac{1}{2}q(3q^2+1)$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$.$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$
$\phi'_{4,7}$	$-\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$-q^2$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}(2q^3+3q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$
$\phi''_{9,6}$	$-\frac{1}{2}\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q+1)^2\phi_4$	$\frac{1}{2}(2q+1)\phi_2^2$
$F_4'[1]$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$.$	$.$
$\phi''_{1,12}$	$\frac{1}{2}(q-2)\phi_4$	$-\frac{1}{2}(q^2-q+2)$	$\frac{1}{2}(q+2)\phi_1$	$-\phi_4$	-1	-1	$-\frac{1}{2}(q-2)q^2\phi_4$	q^2
$\phi_{4,8}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}\phi_2^3\phi_6$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$
B_2,r	$-\frac{1}{2}\phi_2^3$	$\frac{1}{2}(q^2-4q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}(3q^2+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2\phi_6$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$
$\phi'_{6,6}$	$-\phi_2\phi_6$	-1	-1	-1	-1	-1	$q\phi_2\phi_3$	$q\phi_3$
$F_4[\theta]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[\theta^2]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{4,7}$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}(3q+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q^3-3q^2-2)q\phi_2$	$q\phi_3$
B_2,ϵ'	$-\frac{1}{2}(q^2+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}(q^2+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_1^2$	$.$
$F_4[i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[-i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{8,9}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$(q+3)q^2\phi_4$	$2q^2$
$\phi''_{8,9}$	$-\phi_1\phi_4$	$-\phi_1$	$-\phi_1$	ϕ_4	1	1	$q\phi_2^2\phi_4$	$q\phi_2^2$
$\phi_{9,10}$	$q\phi_6$	q	q	$-q^2$	$.$	$.$	$(2q^2+1)q\phi_3$	$q\phi_3$
$\phi_{4,13}$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	q^2	$.$	$.$	$\frac{1}{2}(3q^2-q+2)q^2\phi_2$	q^2
$\phi''_{2,16}$	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$.$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^2(q^3+2q^2-q+2)$	q^2
$\phi'_{2,16}$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	q^2	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^3\phi_2^2$	$.$
B_2,ϵ	$-\frac{1}{2}q(3q^2+1)$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$.$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_1^2$	$.$
$\phi_{1,24}$	q^3	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	q^5	$.$

Tabelle T.A.113: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 33

	$c_{22,3}$	$c_{22,4}$	$c_{22,5}$	$c_{22,6}$	$c_{22,7}$	$c_{22,8}$	$c_{22,9}$	$c_{22,10}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}(q^2+2q+3)$	$-\frac{1}{2}(q-3)\phi_2$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}(q^3+q^2+q+3)$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+3)$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}(q+3)$
$\phi''_{2,4}$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^3-q^2+q+1)$	$-\frac{1}{2}(2q+1)\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$B_2,1$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi_{9,2}$	$(q+2)\phi_2$	q^2+q+2	$q+2$	$(q+2)\phi_4$	q^2+q+2	q^2+q+2	$2\phi_2$	2
$\phi'_{8,3}$	$(2q+1)\phi_2$	ϕ_2	ϕ_2	$\phi_2\phi_4$	ϕ_2	ϕ_2	$2q+1$	1
$\phi''_{8,3}$	$3q+1$	$3q+1$	ϕ_2	$(2q+1)\phi_4$	ϕ_2^2	ϕ_2^2	$2q+1$	$2q+1$
$\phi_{12,4}$	$\frac{1}{2}(5q+1)\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2^2\phi_3$	$\frac{1}{2}\phi_2^3$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}(5q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi'_{9,6}$	$3q\phi_2$	q	q	$\frac{1}{2}(q+2)q\phi_4$	$-\frac{1}{2}(q+2)q\phi_1$	$\frac{1}{2}q(q^2-q+2)$	$2q$	.
$\phi'_{1,12}$	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_4$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$F_4^{II}[1]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{6,6}$	$\frac{1}{2}(3q^2+2q+1)$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{2}(q^3+3q^2+q+1)$	$-\frac{1}{2}(q^3-q^2-q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi_{16,5}$	$(3q+1)\phi_2$	ϕ_2^2	ϕ_2	$\phi_2^2\phi_4$	ϕ_2^2	ϕ_2^2	$3q+1$	ϕ_2
$F_4[-1]$	.	.	.	.	.	.	.	.
B_2,ϵ''	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi'_{4,7}$	$\frac{1}{2}(3q^2+4q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^3+q^2+q-1)$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(3q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi''_{9,6}$	$\frac{1}{2}(q^2+4q+1)$	$\frac{1}{2}(3q+1)\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q+1)\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{2}(2q+1)\phi_2$	$\frac{1}{2}(4q^2+3q+1)$	$\frac{1}{2}(3q+1)$	$\frac{1}{2}(3q+1)$
$F_4'[1]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{1,12}$	.	q^2	.	$\frac{1}{2}q^2\phi_4$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	.	.
$\phi_{4,8}$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$
B_2,r	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}(3q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^3+2q^2+1)\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_4$	$-\frac{1}{2}(q^3+3q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi'_{6,6}$	$q(q+2)$	q^2	.	$q\phi_3$	q	q	$2q$	.
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	q	$q\phi_2$	.	$\frac{1}{2}(q+2)q\phi_4$	$-\frac{1}{2}(q-2)q\phi_2$	$\frac{1}{2}q(q^2+q+2)$	q	q
B_2,ϵ'	.	q^2	.	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	.	.
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	$q(3q+1)$	$q\phi_1$	.	$q^2\phi_4$	.	.	q	$-q$
$\phi''_{8,9}$	$q\phi_2$	$q\phi_2$	.	$q\phi_2\phi_4$	$q\phi_2$	$q\phi_2$	q	q
$\phi_{9,10}$	$q(2q+1)$	q	.	$q(q^3+q^2+1)$	q	q	q	q
$\phi_{4,13}$	q^2	.	.	$\frac{1}{2}q^2\phi_4$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	.	.
$\phi''_{2,16}$	.	q^2	.	$\frac{1}{2}q^2\phi_4$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	.	.
$\phi'_{2,16}$	q^2	.	.	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	.	.
B_2,ϵ	.	q^2	.	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	.	.
$\phi_{1,24}$	.	.	.	.	.	.	.	.

Tabelle T.A.114: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 34

	$c_{22,11}$	$c_{22,12}$	$c_{23,1}$	$c_{23,2}$	$c_{23,3}$	$c_{23,4}$	$c_{23,5}$	$c_{23,6}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2\phi_4$
$\phi''_{2,4}$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q^3+q^2+2q-1)$	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^3+q^2+q-1)$
$\phi'_{2,4}$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_4$
$B_2,1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+3)\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q+3)$	$\frac{1}{2}(q+3)\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(q^3-q^2+q-3)$
$\phi_{9,2}$	2	2	$(q^2+2)\phi_6$	$2\phi_6$	q^2-q+2	$(q-2)\phi_1$	$-(q-2)$	$-(q-2)\phi_4$
$\phi'_{8,3}$	1	1	$-\phi_1^2\phi_4$	$-\phi_1^2$	ϕ_1	$-(2q-1)\phi_1$	ϕ_1	$\phi_1\phi_4$
$\phi''_{8,3}$	1	1	$(3q-1)\phi_4$	q^3-q^2+3q-1	$3q-1$	$3q-1$	ϕ_1	$(2q-1)\phi_4$
$\phi_{12,4}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{9,6}$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}(2q+1)\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2\phi_4$
$\phi'_{1,12}$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q-2)^2q\phi_4$	$q(q-2)$	$-q$	$3q\phi_1$	$-q$	$\frac{1}{2}(q-2)q\phi_4$
$F_4^{II}[1]$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_6$	$-\frac{1}{2}(2q-1)\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}(5q-1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_6$
$\phi''_{6,6}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{2}(3q^2-2q+1)$	$-\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$\frac{1}{2}(3q^2-2q+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_4\phi_6$
$\phi_{16,5}$	1	1	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[-1]$	$.$	$.$	$-\phi_1^3\phi_4$	$-\phi_1^3$	ϕ_1^2	$(3q-1)\phi_1$	$-\phi_1$	$\phi_1^2\phi_4$
B_2,ϵ''	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q^3+3q+1)\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}(3q^2-4q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^3-q^2+q+1)$
$\phi'_{4,7}$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2\phi_4$
$\phi''_{9,6}$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(q+2)q^2\phi_4$	q^2	q^2	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^2\phi_4$
$F_4^I[1]$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}\phi_1^3\phi_3$	$\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_3$
$\phi''_{1,12}$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}(2q-1)^2\phi_4$	$-\frac{1}{2}(2q-1)\phi_1^2$	$\frac{1}{2}(3q-1)\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^2-4q+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_1\phi_4$
$\phi_{4,8}$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
B_2,r	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2^2\phi_3$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}(3q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^3-2q^2-1)\phi_2$
$\phi'_{6,6}$	$.$	$.$	$q\phi_1\phi_6$	$-q\phi_6$	q^2	$q(q-2)$	$.$	$-q\phi_6$
$F_4[\theta]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[\theta^2]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{4,7}$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^3\phi_2^2$	$.$	q^2	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$
B_2,ϵ'	$.$	$.$	$\frac{1}{2}(q^3+3q^2+2)q\phi_1$	$-q\phi_6$	$q\phi_1$	$-q$	$.$	$\frac{1}{2}(q-2)q\phi_4$
$F_4[i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[-i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{8,9}$	$.$	$.$	$(q-3)q^2\phi_4$	$-2q^2$	$-q\phi_2$	$-q(3q-1)$	$.$	$-q^2\phi_4$
$\phi''_{8,9}$	$.$	$.$	$q\phi_1^2\phi_4$	$q\phi_1^2$	$-q\phi_1$	$-q\phi_1$	$.$	$-q\phi_1\phi_4$
$\phi_{9,10}$	$.$	$.$	$-(2q^2+1)q\phi_6$	$-q\phi_6$	$-q$	$q(2q-1)$	$.$	$q(q^3-q^2-1)$
$\phi_{4,13}$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}q^3\phi_2^2$	$.$	$-q^2$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$
$\phi''_{2,16}$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^3\phi_1^2$	$.$	$.$	$-q^2$	$.$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1\phi_2$
$\phi'_{2,16}$	$.$	$.$	$\frac{1}{2}q^2(q^3-2q^2-q-2)$	$-q^2$	$-q^2$	$.$	$.$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_4$
B_2,ϵ	$.$	$.$	$\frac{1}{2}(3q^2+q+2)q^2\phi_1$	$-q^2$	$.$	$-q^2$	$.$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_4$
$\phi_{1,24}$	$.$	$.$	$-q^5$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$

Tabelle T.A.115: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 35

	$c_{23,7}$	$c_{23,8}$	$c_{23,9}$	$c_{23,10}$	$c_{23,11}$	$c_{23,12}$	$c_{24,1}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)\phi_2\phi_6$
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^5-q^4+2q^3-q^2+q+2)$
$\phi'_{2,4}$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2\phi_6$
$B_2,1$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_3$
$\phi_{9,2}$	q^2-q+2	q^2-q+2	2	$-2\phi_1$	2	2	$\phi_3^2\phi_6$
$\phi'_{8,3}$	ϕ_1	ϕ_1	-1	$2q-1$	-1	-1	$(q^4+q^2+q+1)q\phi_4$
$\phi''_{8,3}$	$-\phi_1^2$	$-\phi_1^2$	$2q-1$	$2q-1$	-1	-1	$\phi_2^2\phi_4\phi_6$
$\phi_{12,4}$	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}q\phi_2^3\phi_3\phi_6$
$\phi'_{9,6}$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(2q^3+1)q\phi_3\phi_4$
$\phi'_{1,12}$	$-\frac{1}{2}q(q^2+q+2)$	$\frac{1}{2}(q-2)q\phi_2$	.	$-2q$	.	.	$\frac{1}{2}q^4\phi_4\phi_6$
$F_4^{II}[1]$	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1^3$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(5q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	.
$\phi''_{6,6}$	$\frac{1}{2}(q^3+q^2-q+1)$	$-\frac{1}{2}(q^3-3q^2+q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2\phi_3\phi_4\phi_6$
$\phi_{16,5}$	.	.	.	.	.	.	$q\phi_2^3\phi_4\phi_6$
$F_4[-1]$	ϕ_1^2	ϕ_1^2	$-\phi_1$	$-(3q-1)$	1	1	.
B_2,ϵ''	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(3q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}q^4\phi_1^2\phi_3$
$\phi'_{4,7}$	$-\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)q^3\phi_2\phi_6$
$\phi''_{9,6}$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(q^3+2)q\phi_3\phi_4$
$F_4'[1]$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	.
$\phi''_{1,12}$	$\frac{1}{2}(4q^2-3q+1)$	$\frac{1}{2}(2q-1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}(3q-1)$	$-\frac{1}{2}(3q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_4\phi_6$
$\phi_{4,8}$	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}q\phi_2^3\phi_6^2$
B_2,r	$\frac{1}{2}(q^3-3q^2-q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_2\phi_3\phi_6$
$\phi'_{6,6}$	$-q$	$-q$	.	$-2q$	.	.	$q^2\phi_2\phi_3\phi_6$
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)q\phi_2\phi_6$
B_2,ϵ'	$-\frac{1}{2}q(q^2-q+2)$	$\frac{1}{2}(q+2)q\phi_1$	$-q$	$-q$	.	.	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_3$
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	.	.	$-q$	q	.	.	$q^3\phi_2^2\phi_4\phi_6$
$\phi''_{8,9}$	$-q\phi_1$	$-q\phi_1$	q	q	.	.	$(q^4+q^3+q^2+1)q^2\phi_4$
$\phi_{9,10}$	$-q$	$-q$	$-q$	$-q$	.	.	$q^3\phi_3^2\phi_6$
$\phi_{4,13}$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)q^4\phi_2\phi_6$
$\phi''_{2,16}$	$\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_1$	.	.	.	.	$\frac{1}{2}q^4\phi_2^2\phi_6$
$\phi'_{2,16}$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	.	.	.	.	$\frac{1}{2}q^4(2q^5+q^4-q^3+2q^2-q+1)$
B_2,ϵ	$-\frac{1}{2}q^2\phi_2$	$\frac{1}{2}q^2\phi_1$	.	.	.	.	$\frac{1}{2}q^4\phi_1^2\phi_3$
$\phi_{1,24}$	.	.	.	.	.	.	q^9

Tabelle T.A.116: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 36

	$c_{24,2}$	$c_{24,3}$	$c_{24,4}$	$c_{24,5}$	$c_{24,6}$	$c_{24,7}$	$c_{24,8}$	$c_{24,9}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}(2q^2-q+2)\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^2-q+2)\phi_2$	$\frac{1}{2}(q+2)\phi_4$	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)$	$-\frac{1}{2}(q-2)\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)$	1	ϕ_2
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}(2q^3-q^2+q+2)$	$\frac{1}{2}(q^2-q+2)\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^3-2q^2+q+2)$	$-\frac{1}{2}(q-2)\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q-2)\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)$	ϕ_2	1
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.	q
$B_2,1$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	q	.
$\phi_{9,2}$	$\phi_3\phi_4$	$\phi_2\phi_4$	q^3+3q^2+q+1	$2q^2+q+1$	ϕ_3	ϕ_3	1	$2q+1$
$\phi'_{8,3}$	$q(2q^2+q+1)$	$q\phi_4$	$q(3q^2+2q+1)$	$q\phi_3$	q	q	.	$2q$
$\phi''_{8,3}$	$(q^3+q^2+1)\phi_2$	$\phi_2\phi_4$	$\phi_2\phi_4$	ϕ_3	ϕ_2	$2q^2+q+1$	ϕ_2	ϕ_2
$\phi_{12,4}$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2\phi_3$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}(2q+1)q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}(2q+1)q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q(3q+1)$	.	q
$\phi'_{9,6}$	$\frac{1}{2}(2q^2+1)q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}(4q^2+q+1)q\phi_2$	$\frac{1}{2}q(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.	q
$\phi'_{1,12}$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1$	.	q^4	.	.	.	.	.
$F_4^{II}[1]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{6,6}$	.	.	.	.	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.	.	.
$\phi_{16,5}$	$\frac{1}{2}q\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}(2q+1)q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$q\phi_2$	$q\phi_2$	.	q
$F_4[-1]$	$q\phi_2^2\phi_4$	$q\phi_2\phi_4$	$q\phi_2^3$	$q\phi_2^2$	$q\phi_2$	$q\phi_2$	.	$2q$
B_2,ϵ''	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{4,7}$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1$	q^4	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{9,6}$	$-\frac{1}{2}(q-2)q^3\phi_2$	.	$q^3(q+2)$	q^3	.	.	.	.
$F_4^I[1]$	$\frac{1}{2}q(q^4+3q^3+4q^2+2q+2)$	$q\phi_2\phi_4$	$q\phi_3$	$q\phi_2$	q	$q(2q+1)$	q	q
$\phi''_{1,12}$	$\frac{1}{2}q(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	q	.
$\phi_{4,8}$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}(2q^2-q+1)q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.	q
B_2,r	$-\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2\phi_6$	$\frac{1}{2}(2q^2-q+1)q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	q	.
$\phi'_{6,6}$	$q^2\phi_3$	q^2	$q^2(2q+1)$	$q^2\phi_2$	q^2	q^2	.	.
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	$\frac{1}{2}(2q^2+1)q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q(3q+1)$	q	.
B_2,ϵ'	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	q	.
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	$q^3\phi_2$	.	$2q^3\phi_2$	q^3	.	.	.	.
$\phi''_{8,9}$	$q^2(q^3+2q^2+1)$	$q^2\phi_4$	$q^2\phi_4$	q^2	q^2	q^2	.	.
$\phi_{9,10}$	$q^3\phi_3$	q^4	$q^3(q+2)$	q^3	.	.	.	.
$\phi_{4,13}$	$\frac{1}{2}q^4\phi_2$	.	q^4	.	.	.	.	.
$\phi''_{2,16}$	$\frac{1}{2}q^4\phi_2$	q^4	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{2,16}$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1$	.	q^4	.	.	.	.	.
B_2,ϵ	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1$	q^4	.	.	.	.	.	.
$\phi_{1,24}$	.	.	.	.	.	.	.	.

Tabelle T.A.117: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 37

	$c_{24,10}$	$c_{25,1}$	$c_{25,2}$	$c_{25,3}$	$c_{25,4}$	$c_{25,5}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	1	$\frac{1}{2}q\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$
$\phi''_{2,4}$	1	$\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_3$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$
$\phi'_{2,4}$	.	$\frac{1}{2}(q^5+q^4+2q^3+q^2+q-2)$	$\frac{1}{2}(2q^3+q^2+q-2)$	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^3+2q^2+q-2)$	$\frac{1}{2}(q+2)\phi_1$
$B_2,1$	.	$\frac{1}{2}(q^2-q+2)\phi_1\phi_3$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+2)\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)\phi_1$	$\frac{1}{2}(q-2)\phi_4$	$-\frac{1}{2}(q^2-q+2)$
$\phi_{9,2}$	1	$\phi_3\phi_6^2$	$\phi_4\phi_6$	$-\phi_1\phi_4$	$-(q^3-3q^2+q-1)$	$2q^2-q+1$
$\phi'_{8,3}$	.	$(q^4+q^2-q+1)q\phi_4$	$q(2q^2-q+1)$	$q\phi_4$	$q(3q^2-2q+1)$	$q\phi_6$
$\phi''_{8,3}$	1	$-\phi_1^2\phi_3\phi_4$	$-(q^3-q^2-1)\phi_1$	$\phi_1\phi_4$	$\phi_1\phi_4$	$-\phi_6$
$\phi_{12,4}$	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{9,6}$	.	$\frac{1}{2}q^4\phi_3\phi_4$	$\frac{1}{2}q^4\phi_2$	.	q^4	.
$\phi'_{1,12}$	.	$\frac{1}{2}(2q^3-1)q\phi_4\phi_6$	$\frac{1}{2}(2q^2+1)q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}(4q^2-q+1)q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q(2q^2-q+1)$
$F_4^{II}[1]$	.	$\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_3\phi_6$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_6$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}(2q-1)q\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}(2q-1)q\phi_1$
$\phi''_{6,6}$	.	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_3\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}q\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}(2q-1)q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1$
$\phi_{16,5}$	.	.	.	.	.	.
$F_4[-1]$	.	$q\phi_1^3\phi_3\phi_4$	$-q\phi_1^2\phi_4$	$q\phi_1\phi_4$	$q\phi_1^3$	$-q\phi_1^2$
B_2,ϵ''	.	$\frac{1}{2}(q^2-q+2)q^3\phi_1\phi_3$	$\frac{1}{2}(q+2)q^3\phi_1$	.	$q^3(q-2)$	$-q^3$
$\phi'_{4,7}$	.	$\frac{1}{2}q^4\phi_2^2\phi_6$	$\frac{1}{2}q^4\phi_2$	q^4	.	.
$\phi''_{9,6}$	.	$-\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_3\phi_4$	$-\frac{1}{2}q(2q^2+q+1)$	$-\frac{1}{2}q\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$
$F_4'[1]$	.	$\frac{1}{2}q\phi_1^3\phi_3^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2\phi_3$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$
$\phi''_{1,12}$	.	$\frac{1}{2}(q^3-2)q\phi_4\phi_6$	$-\frac{1}{2}q(q^4-3q^3+4q^2-2q+2)$	$q\phi_1\phi_4$	$-q\phi_6$	$q\phi_1$
$\phi_{4,8}$	.	.	.	.	.	.
B_2,r	.	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2^2\phi_3\phi_6$	$\frac{1}{2}q\phi_1\phi_2\phi_3$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$
$\phi'_{6,6}$	.	$-q^2\phi_1\phi_3\phi_6$	$q^2\phi_6$	q^2	$-q^2(2q-1)$	$-q^2\phi_1$
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	.	$-\frac{1}{2}q\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$
B_2,ϵ'	.	$\frac{1}{2}(2q^2-q+1)q\phi_1\phi_3$	$\frac{1}{2}(2q^2+1)q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1$
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	.	$q^3\phi_1^2\phi_3\phi_4$	$-q^3\phi_1$	.	$-2q^3\phi_1$	q^3
$\phi''_{8,9}$	.	$-(q^4-q^3+q^2+1)q^2\phi_4$	$q^2(q^3-2q^2-1)$	$-q^2\phi_4$	$-q^2\phi_4$	$-q^2$
$\phi_{9,10}$	.	$-q^3\phi_3\phi_6^2$	$-q^3\phi_6$	q^4	$q^3(q-2)$	$-q^3$
$\phi_{4,13}$	.	$-\frac{1}{2}q^4\phi_2^2\phi_6$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_2$	$-q^4$	.	.
$\phi''_{2,16}$	.	$\frac{1}{2}q^4(2q^5-q^4-q^3-2q^2-q-1)$	$-\frac{1}{2}q^4\phi_2$	.	$-q^4$	.
$\phi'_{2,16}$	.	$-\frac{1}{2}q^4\phi_1^2\phi_3$	$\frac{1}{2}q^4\phi_1$	$-q^4$	.	.
B_2,ϵ	.	$\frac{1}{2}(2q^2-q+1)q^4\phi_1\phi_3$	$\frac{1}{2}q^4\phi_1$	.	$-q^4$	.
$\phi_{1,24}$	.	$-q^9$	.	.	.	.

Tabelle T.A.118: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 38

	$c_{25,6}$	$c_{25,7}$	$c_{25,8}$	$c_{25,9}$	$c_{25,10}$	$c_{26,1}$	$c_{26,2}$	$c_{26,3}$	$c_{27,1}$	$c_{27,2}$	$c_{27,3}$	$c_{28,1}$	$c_{28,2}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	$.$	q	$.$	q^2+q+2	$q+2$	2	$.$	$.$	$.$	$q\phi_2$	q
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	q	$.$	$.$	2	2	2	$-q\phi_1$	q	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{2,4}$	$-\frac{1}{2}(q^2-q+2)$	$\frac{1}{2}(q+2)\phi_1$	-1	ϕ_1	-1	$q\phi_2$	q	$.$	-2	-2	-2	$q\phi_2$	q
$B_2,1$	$-\frac{1}{2}(q^2-q+2)$	$\frac{1}{2}(q+2)\phi_1$	ϕ_1	-1	-1	$.$	$.$	$.$	$-(q^2-q+2)$	$q-2$	-2	$.$	$.$
$\phi_{9,2}$	ϕ_6	ϕ_6	$-(2q-1)$	1	1	$3\phi_3$	$3\phi_2$	3	$3\phi_6$	$-3\phi_1$	3	ϕ_3	ϕ_2
$\phi'_{8,3}$	q	q	$2q$	$.$	$.$	ϕ_2^3	$3q+1$	1	ϕ_1^3	$3q-1$	-1	$\phi_2\phi_4$	ϕ_2
$\phi''_{8,3}$	$-(2q^2-q+1)$	ϕ_1	ϕ_1	ϕ_1	-1	$2(q^2+q+2)$	$2(q+2)$	4	$-2(q^2-q+2)$	$2(q-2)$	-4	$.$	$.$
$\phi_{12,4}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$2\phi_2\phi_3$	$2(2q+1)$	2	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{9,6}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$3q\phi_3$	$3q$	$.$	$-q^3$	$.$	$.$	$q\phi_3$	q
$\phi'_{1,12}$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-q$	$.$	$.$	q^3	$.$	$.$	$-3q\phi_6$	$-3q$	$.$	q^3	$.$
$F_4^{II}[1]$	$\frac{1}{2}q(3q-1)$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-q$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$-2\phi_1\phi_6$	$-2(2q-1)$	2	$.$	$.$
$\phi''_{6,6}$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$-q$	$.$	$.$	$\phi_2\phi_3$	$2q+1$	1	$-\phi_1\phi_6$	$-(2q-1)$	1	$\phi_1\phi_3$	-1
$\phi_{16,5}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$2\phi_2^3$	$2(3q+1)$	2	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[-1]$	$q\phi_1$	$q\phi_1$	$-2q$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$-2\phi_1^3$	$-2(3q-1)$	2	$.$	$.$
B_2,ϵ''	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$-q(2q^2-q+1)$	$-q$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{4,7}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$q(2q^2+q+1)$	q	$.$	$.$	$.$	$.$	$q\phi_2$	q
$\phi''_{9,6}$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$.$	$-q$	$.$	$3\phi_3$	$3\phi_2$	3	1	1	1	$-\phi_3$	$-\phi_2$
$F_4^I[1]$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-q$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$2q\phi_1$	$-2q$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{1,12}$	$q(2q-1)$	$-q$	$-q$	$-q$	$.$	1	1	1	$3\phi_6$	$-3\phi_1$	3	-1	-1
$\phi_{4,8}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$2q\phi_2$	$2q$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
B_2,r	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$.$	$-q$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{6,6}$	q^2	q^2	$.$	$.$	$.$	$\phi_2\phi_3$	$2q+1$	1	$-\phi_1\phi_6$	$-(2q-1)$	1	$-\phi_1\phi_3$	1
$F_4[\theta]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[\theta^2]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{4,7}$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$.$	$-q$	$.$	q^2+q+2	$q+2$	2	$.$	$.$	$.$	$-q\phi_2$	$-q$
B_2,ϵ'	$\frac{1}{2}q(3q-1)$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$.$	$-q$	$.$	$.$	$.$	$.$	q^2-q+2	$-(q-2)$	2	$.$	$.$
$F_4[i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$F_4[-i]$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$
$\phi'_{8,9}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$2q(2q^2+q+1)$	$2q$	$.$	$2q(2q^2-q+1)$	$2q$	$.$	$.$	$.$
$\phi''_{8,9}$	$-q^2$	$-q^2$	$.$	$.$	$.$	ϕ_2^3	$3q+1$	1	ϕ_1^3	$3q-1$	-1	$-\phi_2\phi_4$	$-\phi_2$
$\phi_{9,10}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$3q\phi_3$	$3q$	$.$	$-3q\phi_6$	$-3q$	$.$	$-q\phi_3$	$-q$
$\phi_{4,13}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$q(2q^2+q+1)$	q	$.$	$.$	$.$	$.$	$-q\phi_2$	$-q$
$\phi''_{2,16}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$q\phi_2$	q	$.$	$2q^3$	$.$	$.$	$-q\phi_2$	$-q$
$\phi'_{2,16}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$2q^3$	$.$	$.$	$-q\phi_1$	q	$.$	$.$	$.$
B_2,ϵ	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	$q(2q^2-q+1)$	q	$.$	$.$	$.$
$\phi_{1,24}$	$.$	$.$	$.$	$.$	$.$	q^3	$.$	$.$	$-q^3$	$.$	$.$	$-q^3$	$.$

Tabelle T.A.119: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 39

	$c_{28,3}$	$c_{29,1}$	$c_{29,2}$	$c_{29,3}$	$c_{30,1}$	$c_{30,2}$	$c_{30,3}$	$c_{31,1}$	$c_{31,2}$	$c_{31,3}$	$c_{32,1}$	$c_{32,2}$	$c_{32,3}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	.	.	.	.	q^2+q-1	ϕ_1	-1	.	.	.	q^2+q+2	$q+2$	2
$\phi''_{2,4}$	.	$-q\phi_1$	q	.	-1	-1	-1	$-q\phi_1$	q	.	$q\phi_2$	q	.
$\phi'_{2,4}$	.	.	.	.	$q\phi_2$	q	.	1	1	1	2	2	2
$B_2,1$	.	$-q\phi_1$	q	.	.	.	.	$-(q^2-q-1)$	ϕ_2	1	.	.	.
$\phi_{9,2}$	1	ϕ_6	$-\phi_1$	1	.	.	.	.	.	.	$3\phi_3$	$3\phi_2$	3
$\phi'_{8,3}$	1	$\phi_1\phi_4$	ϕ_1	-1	$\phi_2\phi_6$	1	1	$\phi_1\phi_3$	-1	-1	$2(q^2+q+2)$	$2(q+2)$	4
$\phi''_{8,3}$	.	.	.	.	$-(q^2+q-1)$	$-\phi_1$	1	q^2-q-1	$-\phi_2$	-1	ϕ_2^3	$3q+1$	1
$\phi_{12,4}$	.	.	.	.	.	.	.	$-\phi_1\phi_2^2$	ϕ_2	1	$2\phi_2\phi_3$	$2(2q+1)$	2
$\phi'_{9,6}$	.	$-q^3$	.	.	.	.	.	$-q^3$	.	.	$3\phi_3$	$3\phi_2$	3
$\phi'_{1,12}$	.	$-q\phi_6$	$-q$	.	q^3	.	.	.	.	.	1	1	1
$F_4^{II}[1]$	.	.	.	.	$\phi_1^2\phi_2$	$-\phi_1$	1	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{6,6}$	-1	$-\phi_2\phi_6$	-1	-1	.	.	.	.	.	.	$\phi_2\phi_3$	$2q+1$	1
$\phi_{16,5}$	.	.	.	.	$-\phi_2\phi_6$	-1	-1	.	.	.	$2\phi_2^3$	$2(3q+1)$	2
$F_4[-1]$	.	.	.	.	.	.	.	$\phi_1\phi_3$	-1	-1	.	.	.
B_2,ϵ''	.	$q\phi_1$	$-q$	.	.	.	.	$q(q^2+q-1)$	$-q$	.	.	.	.
$\phi'_{4,7}$	.	.	.	.	$-q(q^2-q-1)$	q	.	.	.	.	q^2+q+2	$q+2$	2
$\phi''_{9,6}$	-1	-1	-1	-1	.	.	.	1	1	1	$3q\phi_3$	$3q$	.
$F_4[1]$	.	.	.	.	.	.	.	$-q\phi_1$	q	.	.	.	.
$\phi''_{1,12}$	-1	$-\phi_6$	ϕ_1	-1	1	1	1	.	.	.	q^3	.	.
$\phi_{4,8}$	.	.	.	.	$-q\phi_2$	$-q$	.	.	.	.	$2q\phi_2$	$2q$	.
B_2,r	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{6,6}$	1	$\phi_2\phi_6$	1	1	.	.	.	.	.	.	$\phi_2\phi_3$	$2q+1$	1
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	$-\phi_1^2\phi_2$	ϕ_1	-1	$\phi_1\phi_2^2$	$-\phi_2$	-1	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	$-\phi_1^2\phi_2$	ϕ_1	-1	$\phi_1\phi_2^2$	$-\phi_2$	-1	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	.	.	.	.	q^2+q-1	ϕ_1	-1	.	.	.	$q(2q^2+q+1)$	q	.
B_2,ϵ'	.	$-q\phi_1$	q	.	.	.	.	q^2-q-1	$-\phi_2$	-1	.	.	.
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	.	.	.	.	$q(q^2-q-1)$	$-q$	.	$q(q^2+q-1)$	$-q$	.	ϕ_2^3	$3q+1$	1
$\phi''_{8,9}$	-1	$-\phi_1\phi_4$	$-\phi_1$	1	$\phi_2\phi_6$	1	1	$\phi_1\phi_3$	-1	-1	$2q(2q^2+q+1)$	$2q$	.
$\phi_{9,10}$	.	$q\phi_6$	q	.	.	.	.	.	.	.	$3q\phi_3$	$3q$	.
$\phi_{4,13}$	.	.	.	.	$-q(q^2-q-1)$	q	.	.	.	.	$q(2q^2+q+1)$	q	.
$\phi''_{2,16}$	.	.	.	.	$q\phi_2$	q	.	$-q^3$	.	.	$2q^3$	.	.
$\phi'_{2,16}$	.	$q\phi_1$	$-q$	.	$-q^3$	.	.	$-q\phi_1$	q	.	$q\phi_2$	q	.
B_2,ϵ	.	$q\phi_1$	$-q$	.	.	.	.	$-q(q^2+q-1)$	q	.	.	.	.
$\phi_{1,24}$	.	q^3	.	.	q^3	.	.	$-q^3$	.	.	q^3	.	.

Tabelle T.A.120: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 40

	$c_{33,1}$	$c_{33,2}$	$c_{33,3}$	$c_{34,1}$	$c_{34,2}$	$c_{34,3}$	$c_{35,1}$	$c_{35,2}$	$c_{35,3}$	$c_{36,1}$	$c_{36,2}$	$c_{36,3}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	.	.	.	$q\phi_2$	q	.	.	.	.	q^2+q-1	ϕ_1	-1
$\phi''_{2,4}$	-2	-2	-2	$q\phi_2$	q	.	.	.	.	$q\phi_2$	q	.
$\phi'_{2,4}$	$-q\phi_1$	q	.	.	.	.	$-q\phi_1$	q	.	-1	-1	-1
$B_2,1$	$-(q^2-q+2)$	$q-2$	-2	.	.	.	$-q\phi_1$	q	.	.	.	.
$\phi_{9,2}$	$3\phi_6$	$-3\phi_1$	3	ϕ_3	ϕ_2	1	ϕ_6	$-\phi_1$	1	.	.	.
$\phi'_{8,3}$	$-2(q^2-q+2)$	$2(q-2)$	-4	.	.	.	.	.	.	$-(q^2+q-1)$	$-\phi_1$	1
$\phi''_{8,3}$	ϕ_1^3	$3q-1$	-1	$\phi_2\phi_4$	ϕ_2	1	$\phi_1\phi_4$	ϕ_1	-1	$\phi_2\phi_6$	1	1
$\phi_{12,4}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{9,6}$	1	1	1	$-\phi_3$	$-\phi_2$	-1	-1	-1	-1	.	.	.
$\phi'_{1,12}$	$3\phi_6$	$-3\phi_1$	3	-1	-1	-1	$-\phi_6$	ϕ_1	-1	1	1	1
$F_4^{II}[1]$	$-2\phi_1\phi_6$	$-2(2q-1)$	2	.	.	.	.	.	.	$\phi_1^2\phi_2$	$-\phi_1$	1
$\phi''_{6,6}$	$-\phi_1\phi_6$	$-(2q-1)$	1	$\phi_1\phi_3$	-1	-1	$-\phi_2\phi_6$	-1	-1	.	.	.
$\phi_{16,5}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$-\phi_2\phi_6$	-1	-1
$F_4[-1]$	$-2\phi_1^3$	$-2(3q-1)$	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.
B_2,ϵ''	q^2-q+2	$-(q-2)$	2	.	.	.	$-q\phi_1$	q	.	.	.	.
$\phi'_{4,7}$	.	.	.	$-q\phi_2$	$-q$	.	.	.	.	q^2+q-1	ϕ_1	-1
$\phi''_{9,6}$	$-q^3$	.	.	$q\phi_3$	q	.	$-q^3$	.	.	.	.	.
$F_4^I[1]$	$2q\phi_1$	$-2q$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{1,12}$	$-3q\phi_6$	$-3q$	.	q^3	.	.	$-q\phi_6$	$-q$	.	q^3	.	.
$\phi_{4,8}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$-q\phi_2$	$-q$	.
B_2,r	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{6,6}$	$-\phi_1\phi_6$	$-(2q-1)$	1	$-\phi_1\phi_3$	1	1	$\phi_2\phi_6$	1	1	.	.	.
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$-\phi_1^2\phi_2$	ϕ_1	-1
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$-\phi_1^2\phi_2$	ϕ_1	-1
$\phi''_{4,7}$	.	.	.	$q\phi_2$	q	.	.	.	.	$-q(q^2-q-1)$	q	.
B_2,ϵ'	$-q(2q^2-q+1)$	$-q$	.	.	.	.	$q\phi_1$	$-q$	.	.	.	.
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	ϕ_1^3	$3q-1$	-1	$-\phi_2\phi_4$	$-\phi_2$	-1	$-\phi_1\phi_4$	$-\phi_1$	1	$\phi_2\phi_6$	1	1
$\phi''_{8,9}$	$2q(2q^2-q+1)$	$2q$	.	.	.	.	.	.	.	$q(q^2-q-1)$	$-q$	.
$\phi_{9,10}$	$-3q\phi_6$	$-3q$	.	$-q\phi_3$	$-q$	.	$q\phi_6$	q	.	.	.	.
$\phi_{4,13}$	.	.	.	$-q\phi_2$	$-q$	.	.	.	.	$-q(q^2-q-1)$	q	.
$\phi''_{2,16}$	$-q\phi_1$	q	.	.	.	.	$q\phi_1$	$-q$	.	$-q^3$	.	.
$\phi'_{2,16}$	$2q^3$	.	.	$-q\phi_2$	$-q$	.	.	.	.	$q\phi_2$	q	.
B_2,ϵ	$q(2q^2-q+1)$	q	.	.	.	.	$q\phi_1$	$-q$	.	.	.	.
$\phi_{1,24}$	$-q^3$	.	.	$-q^3$	.	.	q^3	.	.	q^3	.	.

Tabelle T.A.121: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 41

	$c_{37,1}$	$c_{37,2}$	$c_{37,3}$	$c_{38,1}$	$c_{38,2}$	$c_{38,3}$	$c_{38,4}$	$c_{38,5}$	$c_{39,1}$	$c_{39,2}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	.	.	.	$\frac{1}{2}(q^3+2q^2+q+4)$	$\frac{1}{2}(q^2+q+4)$	$q+2$	2	2	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$
$\phi''_{2,4}$	1	1	1	$\frac{1}{2}(q^2-q+2)\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)$	1	ϕ_2	1	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)\phi_1$	$\frac{1}{2}(q+2)\phi_1$
$\phi'_{2,4}$	$-q\phi_1$	q	.	$\frac{1}{2}(q^2-q+2)\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q-2)\phi_2$	ϕ_2	1	1	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q^2-q+2)$
$B_2,1$	$-(q^2-q-1)$	ϕ_2	1	$\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.	q	.	$\frac{1}{2}(q^3-2q^2+q-4)$	$-\frac{1}{2}(q^2-q+4)$
$\phi_{9,2}$	.	.	.	$2q^3+2q^2+2q+3$	q^2+2q+3	$3\phi_2$	$q+3$	3	$-(2q^3-2q^2+2q-3)$	q^2-2q+3
$\phi'_{8,3}$	q^2-q-1	$-\phi_2$	-1	$2\phi_2\phi_4$	$2\phi_2$	$2(2q+1)$	2	2	$2\phi_1\phi_4$	$2\phi_1$
$\phi''_{8,3}$	$\phi_1\phi_3$	-1	-1	$2\phi_2\phi_4$	$2\phi_3$	$2\phi_2$	$2\phi_2$	2	$2\phi_1\phi_4$	$-2\phi_6$
$\phi_{12,4}$	$-\phi_1\phi_2^2$	ϕ_2	1	$\phi_2^2\phi_3$	$(2q+1)\phi_2$	$5q+1$	ϕ_2	1	.	.
$\phi'_{9,6}$	1	1	1	$\frac{1}{2}(2q+1)(q+2)\phi_4$	$-\frac{1}{2}(q^2-5q-2)$	$5q+1$	1	1	$-\frac{1}{2}q\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$
$\phi'_{1,12}$	.	.	.	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	q	.	.	$\frac{1}{2}(q-2)(2q-1)\phi_4$	$-\frac{1}{2}(q^2+5q-2)$
$F_4^{II}[1]$	.	.	.	.	.	.	.	.	$\phi_1^2\phi_6$	$(2q-1)\phi_1$
$\phi''_{6,6}$	.	.	.	$\phi_3\phi_4$	ϕ_3	$2q+1$	1	1	$\phi_4\phi_6$	ϕ_6
$\phi_{16,5}$	.	.	.	$2\phi_2^2\phi_4$	$2\phi_2^2$	$2(3q+1)$	$2\phi_2$	2	.	.
$F_4[-1]$	$\phi_1\phi_3$	-1	-1	.	.	.	.	.	$2\phi_1^2\phi_4$	$2\phi_1^2$
B_2,ϵ''	q^2-q-1	$-\phi_2$	-1	$\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.	q	.	$-\frac{1}{2}q(3q^2-2q+3)$	$-\frac{1}{2}q(q+3)$
$\phi'_{4,7}$	.	.	.	$\frac{1}{2}q(3q^2+2q+3)$	$-\frac{1}{2}q(q-3)$	$3q$	.	.	$-\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$
$\phi''_{9,6}$	$-q^3$	.	.	$\frac{1}{2}(2q+1)(q+2)\phi_4$	$\frac{1}{2}(5q^2+5q+2)$	$2q+1$	$3q+1$	1	$-\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1$
$F_4'[1]$	$-q\phi_1$	q	.	.	.	.	.	.	$\phi_1^2\phi_3$	$-\phi_1$
$\phi''_{1,12}$	.	.	.	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	.	q	.	$\frac{1}{2}(q-2)(2q-1)\phi_4$	$\frac{1}{2}(5q^2-5q+2)$
$\phi_{4,8}$	.	.	.	$\phi_2^2\phi_6$	ϕ_2	ϕ_2	ϕ_2	1	.	.
B_2,r	.	.	.	$q\phi_1^2$	$-q\phi_1$	.	$2q$	.	$-q\phi_2^2$	$-q\phi_2$
$\phi'_{6,6}$	.	.	.	$2q\phi_3$	$q(q+2)$	$3q$	q	.	$-2q\phi_6$	$q(q-2)$
$F_4[\theta]$	$\phi_1\phi_2^2$	$-\phi_2$	-1	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	$\phi_1\phi_2^2$	$-\phi_2$	-1	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	.	.	.	$\frac{1}{2}q(3q^2+2q+3)$	$\frac{3}{2}q\phi_2$	q	$2q$	.	$-\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$
B_2,ϵ'	$q(q^2+q-1)$	$-q$	.	$\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.	q	.	$-\frac{1}{2}q(3q^2-2q+3)$	$\frac{3}{2}q\phi_1$
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	$\phi_1\phi_3$	-1	-1	$2q\phi_2\phi_4$	$2q$	$4q$	.	.	$-2q\phi_1\phi_4$	$2q$
$\phi''_{8,9}$	$q(q^2+q-1)$	$-q$	.	$2q\phi_2\phi_4$	$2q\phi_2$	$2q$	$2q$	.	$-2q\phi_1\phi_4$	$-2q\phi_1$
$\phi_{9,10}$	.	.	.	$q(3q^3+2q^2+2q+2)$	$q(q+2)$	$3q$	q	.	$q(3q^3-2q^2+2q-2)$	$q(q-2)$
$\phi_{4,13}$	.	.	.	$\frac{1}{2}q(4q^3+q^2+2q+1)$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	q	.	.	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$
$\phi''_{2,16}$	$-q\phi_1$	q	.	$\frac{1}{2}(2q^2-q+1)q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	.	q	.	$-\frac{1}{2}(2q^2+q+1)q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_2$
$\phi'_{2,16}$	$-q^3$	.	.	$\frac{1}{2}(2q^2-q+1)q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	q	.	.	$-\frac{1}{2}(2q^2+q+1)q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$
B_2,ϵ	$-q(q^2+q-1)$	q	.	$\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.	q	.	$-\frac{1}{2}q(4q^3-q^2+2q-1)$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$
$\phi_{1,24}$	$-q^3$	.	.	q^4	.	.	.	.	q^4	.

Tabelle T.A.122: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 42

	$c_{39,3}$	$c_{39,4}$	$c_{39,5}$	$c_{40,1}$	$c_{40,2}$	$c_{40,3}$	$c_{40,4}$	$c_{40,5}$	$c_{41,1}$	$c_{41,2}$	$c_{41,3}$	$c_{41,4}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	q	.	.	$\frac{1}{2}(q^2-q+2)\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)$	1	ϕ_2	1	$\frac{1}{2}(q^2-q+2)\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q-2)\phi_2$	ϕ_2	1
$\phi''_{2,4}$	-1	ϕ_1	-1	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	q	.	.	$\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.	q
$\phi'_{2,4}$	ϕ_1	-1	-1	$\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.	q	.	$\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	q	.
$B_2,1$	-2	$q-2$	-2	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q^2-q+2)$	ϕ_1	-1	-1	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)\phi_1$	$\frac{1}{2}(q+2)\phi_1$	-1	ϕ_1
$\phi_{9,2}$	$-(q-3)$	$-3\phi_1$	3	$2q^2+1$	ϕ_4	ϕ_2	$-\phi_1$	1	$2q^2+1$	ϕ_4	ϕ_2	$-\phi_1$
$\phi'_{8,3}$	-2	$2(2q-1)$	-2	.	.	.	.	.	$2q\phi_4$	$2q$	$2q$	$2q$
$\phi''_{8,3}$	$2\phi_1$	$2\phi_1$	-2	$2q\phi_4$	$2q$	$2q$	$2q$	.	.	.	.	.
$\phi_{12,4}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{9,6}$	.	$-q$	.	$-\frac{1}{2}(q+2)\phi_4$	$-\frac{1}{2}(q^2+q+2)$	$-\phi_2$	-1	-1	$\frac{1}{2}(2q+1)q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	q	.
$\phi'_{1,12}$	1	$-(5q-1)$	1	$\frac{1}{2}(q-2)\phi_4$	$-\frac{1}{2}(q^2-q+2)$	-1	ϕ_1	-1	$\frac{1}{2}(2q-1)q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	.	$-q$
$F_4^{II}[1]$	$-\phi_1$	$-(5q-1)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{6,6}$	1	$-(2q-1)$	1	.	q^2	$-q$	q	.	.	$-q^2$	q	$-q$
$\phi_{16,5}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-1]$	$-2\phi_1$	$-2(3q-1)$	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.
B_2,ϵ''	.	$-3q$	.	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q^2-q+2)$	ϕ_1	-1	-1	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-q$	.
$\phi'_{4,7}$	$-q$	.	.	$-\frac{1}{2}(q^2-q+2)\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^2+q+2)$	-1	$-\phi_2$	-1	$\frac{1}{2}(2q^2-q+1)q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	.	q
$\phi''_{9,6}$	$-q$	.	.	$\frac{1}{2}(2q+1)q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	q	.	.	$-\frac{1}{2}(q+2)\phi_4$	$-\frac{1}{2}(q^2+q+2)$	$-\phi_2$	-1
$F_4'[1]$	$-\phi_1$	$-\phi_1$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{1,12}$	$-(3q-1)$	$-(2q-1)$	1	$\frac{1}{2}(2q-1)q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	.	$-q$	.	$\frac{1}{2}(q-2)\phi_4$	$-\frac{1}{2}(q^2-q+2)$	-1	ϕ_1
$\phi_{4,8}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
B_2,r	$-2q$	.	.	$\phi_1\phi_2\phi_4$	$-\phi_4$	ϕ_1	$-\phi_2$	-1	$\phi_1\phi_2\phi_4$	$\phi_1\phi_2$	$-\phi_2$	ϕ_1
$\phi'_{6,6}$	$-q$	$-3q$	.	.	$-q^2$	q	$-q$	.	.	q^2	$-q$	q
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	$-q$	.	.	$\frac{1}{2}(2q^2-q+1)q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	q	.	.	$-\frac{1}{2}(q^2-q+2)\phi_2$	$\frac{1}{2}(q-2)\phi_2$	$-\phi_2$	-1
B_2,ϵ'	$-2q$	$-q$	.	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	.	$-q$	.	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)\phi_1$	$\frac{1}{2}(q+2)\phi_1$	-1	ϕ_1
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	.	$4q$	.	$-2q\phi_4$	$-2q$	$-2q$	$-2q$	.	.	.	.	.
$\phi''_{8,9}$	$2q$	$2q$	.	.	.	.	.	.	$-2q\phi_4$	$-2q$	$-2q$	$-2q$
$\phi_{9,10}$	$-q$	$-3q$	.	$-q^2(q^2+2)$	$-q^2$	$-q$	q	.	$-q^2(q^2+2)$	$-q^2$	$-q$	q
$\phi_{4,13}$	q	.	.	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)q\phi_2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-q$	.	.	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)q\phi_2$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	.	$-q$
$\phi''_{2,16}$	.	q	.	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	.	$-q$	.	$-\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$-q$	.
$\phi'_{2,16}$	q	.	.	$-\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$-q$	.	.	$-\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	.	$-q$
B_2,ϵ	.	q	.	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)q\phi_1$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	.	$-q$	.	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)q\phi_1$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-q$	.
$\phi_{1,24}$	.	.	.	$-q^4$	.	.	.	.	$-q^4$	.	.	.

Tabelle T.A.123: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 43

	$c_{41,5}$	$c_{42,1}$	$c_{42,2}$	$c_{42,3}$	$c_{42,4}$	$c_{42,5}$	$c_{43,1}$	$c_{43,2}$	$c_{43,3}$	$c_{43,4}$	$c_{43,5}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	1	$\frac{1}{2}(q^3-2q^2+q+2)$	$-\frac{1}{2}(q-2)\phi_2$	1	ϕ_2	1	$\frac{1}{2}(q^2+2q+5)$	$\frac{1}{2}(q+5)$	$\frac{1}{2}(q+5)$	$\frac{1}{2}(q+5)$	$-\frac{1}{2}(q-5)$
$\phi''_{2,4}$	.	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	q	.	.	$-\frac{1}{2}(q-3)\phi_2$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(q+3)$
$\phi'_{2,4}$	.	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	.	q	.	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$B_2,1$	-1	$\frac{1}{2}(q^3+2q^2+q-2)$	$\frac{1}{2}(q+2)\phi_1$	ϕ_1	-1	-1	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi_{9,2}$	1	$2q^2-1$	$\phi_1\phi_2$	ϕ_1	$-\phi_2$	-1	$(q+2)^2$	$2(q+2)$	$2(q+2)$	4	4
$\phi'_{8,3}$	.	.	.	.	.	.	$2\phi_2^2$	$2\phi_2$	$2\phi_2$	2	2
$\phi''_{8,3}$	.	.	.	.	.	.	$4\phi_2$	$2(q+2)$	$2(q+2)$	4	4
$\phi_{12,4}$	.	$-\frac{1}{2}q\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	$-q$	.	.	$3\phi_2^2$	$3\phi_2$	$3\phi_2$	$q+3$	$-(q-3)$
$\phi'_{9,6}$	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(7q^2+10q+1)$	$\frac{1}{2}(5q+1)$	$\frac{1}{2}(5q+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi'_{1,12}$	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$F_4^{II}[1]$	.	$\frac{1}{2}q\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.	q	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{6,6}$	.	.	.	.	.	.	$2\phi_3$	$q+2$	$q+2$	$q+2$	$-(q-2)$
$\phi_{16,5}$	.	.	.	.	.	.	$4\phi_2^2$	$4\phi_2$	$4\phi_2$	4	4
$F_4[-1]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
B_2,ϵ''	.	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	q	.	.	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi'_{4,7}$	.	$-\frac{1}{2}q\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_2$	.	$-q$	.	$\frac{1}{2}(3q^2+6q-1)$	$\frac{1}{2}(3q-1)$	$\frac{1}{2}(3q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi''_{9,6}$	-1	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(q^2+10q+7)$	$\frac{1}{2}(5q+7)$	$\frac{1}{2}(5q+7)$	$-\frac{1}{2}(q-7)$	$\frac{1}{2}(q+7)$
$F_4'[1]$	.	$\frac{1}{2}(2q^2+3q+2)\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}(q+2)\phi_1$	$-\phi_1$	1	1	.	.	.	.	.
$\phi''_{1,12}$	-1	.	.	.	.	.	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi_{4,8}$	.	$\frac{1}{2}(2q^2-3q+2)\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}(q-2)\phi_2$	1	ϕ_2	1	ϕ_2^2	ϕ_2	ϕ_2	$-\phi_1$	ϕ_2
B_2,r	-1	ϕ_8	1	1	1	1	$-\phi_1^2$	ϕ_1	ϕ_1	ϕ_1	$-\phi_2$
$\phi'_{6,6}$	.	$-2q^2$	$-q^2$	$-q$	q	.	q^2+4q+1	$2q+1$	$2q+1$	1	1
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	-1	$-\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_1$	$-q$	.	.	$-\frac{1}{2}(q^2-6q-3)$	$\frac{3}{2}\phi_2$	$\frac{3}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(q+3)$
B_2,ϵ'	-1	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	.	q	.	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$F_4[i]$	.	$\phi_1^2\phi_2^2$	$-\phi_1\phi_2$	$-\phi_1$	ϕ_2	1	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	$\phi_1^2\phi_2^2$	$-\phi_1\phi_2$	$-\phi_1$	ϕ_2	1	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	.	.	.	.	.	.	$4q\phi_2$	$2q$	$2q$	.	.
$\phi''_{8,9}$	.	.	.	.	.	.	$2\phi_2^2$	$2\phi_2$	$2\phi_2$	2	2
$\phi_{9,10}$	.	$-q^2(q^2-2)$	q^2	q	$-q$	.	$(2q+1)^2$	$2q+1$	$2q+1$	1	1
$\phi_{4,13}$	.	$\frac{1}{2}q(2q^3+q^2-2q+1)$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	.	q	.	$\frac{1}{2}(5q^2+2q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi''_{2,16}$	.	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$-\frac{1}{2}q\phi_1$	q	.	.	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi'_{2,16}$	.	$\frac{1}{2}q\phi_4$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	.	q	.	$\frac{1}{2}(3q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$
B_2,ϵ	.	$-\frac{1}{2}q(2q^3-q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}q\phi_2$	q	.	.	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi_{1,24}$	.	q^4	.	.	.	.	q^2	.	.	.	.

Tabelle T.A.124: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 44

	$c_{44,1}$	$c_{44,2}$	$c_{44,3}$	$c_{44,4}$	$c_{44,5}$	$c_{45,1}$	$c_{45,2}$	$c_{45,3}$	$c_{45,4}$	$c_{45,5}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q-3)\phi_2$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}(q-3)$
$\phi''_{2,4}$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}(q+3)\phi_1$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$B_2,1$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q+5)$	$\frac{1}{2}(q-5)$	$\frac{1}{2}(q-5)$	$\frac{1}{2}(q-5)$	$-\frac{1}{2}(q+5)$	$\frac{1}{2}(q+3)\phi_1$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$
$\phi_{9,2}$	$(q-2)^2$	$-2(q-2)$	$-2(q-2)$	4	4	q^2+2	2	2	2	2
$\phi'_{8,3}$	$-2\phi_1^2$	$2\phi_1$	$2\phi_1$	-2	-2	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi''_{8,3}$	$4\phi_1$	$2(q-2)$	$2(q-2)$	-4	-4	$4q$	$2q$	$2q$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi_{12,4}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi'_{9,6}$	$\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^2+2q+3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$
$\phi'_{1,12}$	$\frac{1}{2}(7q^2-10q+1)$	$-\frac{1}{2}(5q-1)$	$-\frac{1}{2}(5q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$
$F_4^{II}[1]$	$3\phi_1^2$	$-3\phi_1$	$-3\phi_1$	$-(q-3)$	$q+3$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi''_{6,6}$	$2\phi_6$	$-(q-2)$	$-(q-2)$	$-(q-2)$	$q+2$	$-\phi_1\phi_2$	1	1	1	1
$\phi_{16,5}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$F_4[-1]$	$4\phi_1^2$	$-4\phi_1$	$-4\phi_1$	4	4	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
B_2,ϵ''	$\frac{1}{2}(3q^2-6q-1)$	$-\frac{1}{2}(3q+1)$	$-\frac{1}{2}(3q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(q+3)\phi_1$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$
$\phi'_{4,7}$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q-3)\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$
$\phi''_{9,6}$	$-\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(3q^2+2q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$F_4'[1]$	ϕ_1^2	$-\phi_1$	$-\phi_1$	ϕ_2	$-\phi_1$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi''_{1,12}$	$\frac{1}{2}(q^2-10q+7)$	$-\frac{1}{2}(5q-7)$	$-\frac{1}{2}(5q-7)$	$\frac{1}{2}(q+7)$	$-\frac{1}{2}(q-7)$	$\frac{1}{2}(3q^2-2q+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi_{4,8}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
B_2,r	$-\phi_2^2$	$-\phi_2$	$-\phi_2$	$-\phi_2$	ϕ_1	$2\phi_1\phi_2$	-2	-2	-2	-2
$\phi'_{6,6}$	q^2-4q+1	$-(2q-1)$	$-(2q-1)$	1	1	$\phi_1\phi_2$	-1	-1	-1	-1
$F_4[\theta]$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$F_4[\theta^2]$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi''_{4,7}$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(3q-1)\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
B_2,ϵ'	$-\frac{1}{2}(q^2+6q-3)$	$-\frac{3}{2}\phi_1$	$-\frac{3}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(3q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$F_4[i]$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$F_4[-i]$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi'_{8,9}$	$-4q\phi_1$	$2q$	$2q$	$\cdot$	$\cdot$	$-4q$	$-2q$	$-2q$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi''_{8,9}$	$-2\phi_1^2$	$2\phi_1$	$2\phi_1$	-2	-2	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\phi_{9,10}$	$(2q-1)^2$	$-(2q-1)$	$-(2q-1)$	1	1	$-(2q^2+1)$	-1	-1	-1	-1
$\phi_{4,13}$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(3q-1)\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi''_{2,16}$	$-\frac{1}{2}(3q+1)\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi'_{2,16}$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
B_2,ϵ	$-\frac{1}{2}(5q^2-2q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(3q+1)\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi_{1,24}$	q^2	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$-q^2$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Tabelle T.A.125: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 45

	$c_{46,1}$	$c_{46,2}$	$c_{46,3}$	$c_{46,4}$	$c_{46,5}$	$c_{47,1}$	$c_{47,2}$	$c_{47,3}$	$c_{47,4}$	$c_{47,5}$	$c_{48,1}$	$c_{48,2}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^2+3)$	$\frac{1}{2}(q+3)$
$\phi''_{2,4}$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^2+3)$	$-\frac{1}{2}(q-3)$
$B_2,1$	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi_{9,2}$	q^2+2	2	2	2	2	q^2	.	.	.	.	q^2+2	2
$\phi'_{8,3}$	$4q$	$2q$	$2q$	.	.	.	.	.	.	.	$2\phi_4$	2
$\phi''_{8,3}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi_{12,4}$	.	.	.	.	.	$-\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\phi_1\phi_2$	ϕ_1
$\phi'_{9,6}$	$\frac{1}{2}(3q^2+2q+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	.	.	.	.	.	$\frac{3}{2}\phi_4$	$-\frac{1}{2}(q-3)$
$\phi'_{1,12}$	$\frac{1}{2}(3q^2-2q+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1$
$F_4^{II}[1]$	.	.	.	.	.	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	.	.
$\phi''_{6,6}$	$\phi_1\phi_2$	-1	-1	-1	-1	.	.	.	.	.	.	q
$\phi_{16,5}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-1]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
B_2,ϵ''	$\frac{1}{2}\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi'_{4,7}$	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(3q^2+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi''_{9,6}$	$-\frac{1}{2}(q^2+2q+3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	.	.	.	.	.	$-\frac{3}{2}\phi_4$	$-\frac{1}{2}(q+3)$
$F_4^{I}[1]$	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	.	.
$\phi''_{1,12}$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	.	.	.	.	.	$-\frac{1}{2}\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi_{4,8}$	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}\phi_2^2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\phi_1\phi_2$	$-\phi_1$
B_2,r	.	.	.	.	.	ϕ_4	1	1	1	1	$-\phi_1\phi_2$	ϕ_2
$\phi'_{6,6}$	$-\phi_1\phi_2$	1	1	1	1	$-\phi_4$	-1	-1	-1	-1	$\phi_1\phi_2$	-1
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q^2+3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$
B_2,ϵ'	$-\frac{1}{2}\phi_1^2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{8,9}$	$-4q$	$-2q$	$-2q$	.	.	.	.	.	.	.	$-2\phi_4$	-2
$\phi_{9,10}$	$-(2q^2+1)$	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	$-(2q^2+1)$	-1
$\phi_{4,13}$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(3q^2+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi''_{2,16}$	$-\frac{1}{2}\phi_2^2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(3q^2+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi'_{2,16}$	$\frac{1}{2}\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$
B_2,ϵ	$\frac{1}{2}\phi_1^2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi_{1,24}$	$-q^2$	.	.	.	.	q^2	.	.	.	.	$-q^2$	.

Tabelle T.A.126: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 46

	$c_{48,3}$	$c_{49,1}$	$c_{49,2}$	$c_{49,3}$	$c_{50,1}$	$c_{50,2}$	$c_{50,3}$	$c_{51,1}$	$c_{51,2}$	$c_{51,3}$	$c_{52,1}$	$c_{52,2}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$-\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(q^2+3)$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(q^2-3)$	$\frac{1}{2}(q+3)$
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^2+3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$B_2,1$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q^2+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^2+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}(q^2-3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$
$\phi_{9,2}$	2	q^2+2	2	2	q^2	.	.	q^2	.	.	q^2-2	-2
$\phi'_{8,3}$	2	$-2\phi_4$	-2	-2	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{8,3}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi_{12,4}$	$-\phi_2$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi'_{9,6}$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	.	.
$\phi'_{1,12}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{3}{2}\phi_4$	$\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	.	.
$F_4^{II}[1]$	.	$\phi_1\phi_2$	$-\phi_2$	ϕ_1	.	.	.	.	.	.	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi''_{6,6}$	$-q$	.	$-q$	q	$-\phi_4$	-1	-1	ϕ_4	1	1	.	.
$\phi_{16,5}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-1]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
B_2,ϵ''	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(3q^2+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(3q^2+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi'_{4,7}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(3q^2+1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi''_{9,6}$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	.	.
$F_4^I[1]$	.	$-\phi_1\phi_2$	ϕ_2	$-\phi_1$	.	.	.	.	.	.	$-\frac{3}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q-3)$
$\phi''_{1,12}$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{3}{2}\phi_4$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	.	.
$\phi_{4,8}$	ϕ_2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$-\frac{3}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}(q+3)$
B_2,r	$-\phi_1$	$-\phi_1\phi_2$	$-\phi_1$	ϕ_2	.	.	.	$-2\phi_4$	-2	-2	$-\phi_1\phi_2$	1
$\phi'_{6,6}$	-1	$\phi_1\phi_2$	-1	-1	ϕ_4	1	1	$-\phi_4$	-1	-1	$-\phi_1\phi_2$	1
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q^2+3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}\phi_4$	$\frac{1}{2}\phi_1$
B_2,ϵ'	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}(q^2+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(q^2+3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	$-\frac{1}{2}\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$-2\phi_1\phi_2$	2
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$-2\phi_1\phi_2$	2
$\phi'_{8,9}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{8,9}$	-2	$2\phi_4$	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi_{9,10}$	-1	$-(2q^2+1)$	-1	-1	1	1	1	1	1	1	$2q^2-1$	-1
$\phi_{4,13}$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(3q^2+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(3q^2-1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$
$\phi''_{2,16}$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi'_{2,16}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}(3q^2+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_4$	$-\frac{1}{2}\phi_2$
B_2,ϵ	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(3q^2+1)$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$-\frac{1}{2}\phi_1\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$-\frac{1}{2}(3q^2+1)$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$\frac{1}{2}(3q^2-1)$	$\frac{1}{2}\phi_1$
$\phi_{1,24}$	.	$-q^2$	.	.	q^2	.	.	q^2	.	.	$-q^2$	.

Tabelle T.A.127: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 47

	$c_{52,3}$	$c_{53,1}$	$c_{53,2}$	$c_{53,3}$	$c_{53,4}$	$c_{54,1}$	$c_{54,2}$	$c_{54,3}$	$c_{54,4}$	$c_{55,1}$	$c_{55,2}$	$c_{55,3}$	$c_{55,4}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	$-\frac{1}{2}(q-3)$	$2\phi_2$	$q+2$	$q+2$	2	.	.	.	.	ϕ_2	1	ϕ_2	1
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	ϕ_2	1	ϕ_2	1	ϕ_1	ϕ_1	-1	-1	$2q$	q	q	.
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}\phi_1$	ϕ_2	ϕ_2	1	1	ϕ_1	-1	ϕ_1	-1	.	.	.	.
$B_2,1$	$-\frac{1}{2}(q+3)$	.	.	.	.	$2\phi_1$	$q-2$	$q-2$	-2	ϕ_1	ϕ_1	-1	-1
$\phi_{9,2}$	-2	$(q+2)^2$	$2(q+2)$	$2(q+2)$	4	$(q-2)^2$	$-2(q-2)$	$-2(q-2)$	4	q^2+2	2	2	2
$\phi'_{8,3}$	.	$(q+3)\phi_2$	$3\phi_2$	$q+3$	3	$-(q-3)\phi_1$	$3\phi_1$	$q-3$	-3	$-\phi_1^2$	ϕ_1	ϕ_1	-1
$\phi''_{8,3}$	.	$(q+3)\phi_2$	$q+3$	$3\phi_2$	3	$-(q-3)\phi_1$	$q-3$	$3\phi_1$	-3	ϕ_2^2	ϕ_2	ϕ_2	1
$\phi_{12,4}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$3\phi_2^2$	$3\phi_2$	$3\phi_2$	3	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{9,6}$	.	$(2q+1)(q+2)$	$2(2q+1)$	$q+2$	2	$-q$	$-q$	.	.	$-(2q+1)$	$-\phi_2$	$-\phi_2$	-1
$\phi'_{1,12}$	.	q	q	.	.	$(q-2)(2q-1)$	$-2(2q-1)$	$-(q-2)$	2	$q(q-2)$	$-q$	$-q$	.
$F_4^{II}[1]$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	.	.	.	.	$3\phi_1^2$	$-3\phi_1$	$-3\phi_1$	3	.	.	.	.
$\phi''_{6,6}$	.	q^2+4q+1	$2q+1$	$2q+1$	1	q^2-4q+1	$-(2q-1)$	$-(2q-1)$	1	.	$-q$	q	.
$\phi_{16,5}$	.	$4\phi_2^2$	$4\phi_2$	$4\phi_2$	4	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-1]$	.	.	.	.	.	$4\phi_1^2$	$-4\phi_1$	$-4\phi_1$	4	.	.	.	.
B_2,ϵ''	$\frac{1}{2}\phi_2$	.	.	.	.	ϕ_1^2	$-(2q-1)$	1	1	$q\phi_1$	.	$-q$	.
$\phi'_{4,7}$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	ϕ_2^2	$2q+1$	1	1	.	.	.	.	$-\phi_2$	-1	$-\phi_2$	-1
$\phi''_{9,6}$	.	$(2q+1)(q+2)$	$q+2$	$2(2q+1)$	2	$-q$	.	$-q$	.	$q(q+2)$	q	q	.
$F_4'[1]$	$\frac{1}{2}(q+3)$	.	.	.	.	ϕ_1^2	$-\phi_1$	$-\phi_1$	1	.	.	.	.
$\phi''_{1,12}$	.	q	.	q	.	$(q-2)(2q-1)$	$-(q-2)$	$-2(2q-1)$	2	$2q-1$	ϕ_1	ϕ_1	-1
$\phi_{4,8}$	$-\frac{1}{2}(q-3)$	ϕ_2^2	ϕ_2	ϕ_2	1	.	.	.	.	.	.	.	.
B_2,r	1	.	.	.	.	.	.	.	.	$\phi_1\phi_2$	ϕ_1	$-\phi_2$	-1
$\phi'_{6,6}$	1	$2\phi_3$	$q+2$	$q+2$	2	$2\phi_6$	$-(q-2)$	$-(q-2)$	2	.	q	$-q$	.
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	$-\frac{1}{2}\phi_2$	ϕ_2^2	1	$2q+1$	1	.	.	.	.	$q\phi_2$	q	.	.
B_2,ϵ'	$\frac{1}{2}\phi_1$	.	.	.	.	ϕ_1^2	1	$-(2q-1)$	1	ϕ_1	ϕ_1	-1	-1
$F_4[i]$	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	.	$(3q+1)\phi_2$	$3q+1$	ϕ_2	1	$-(3q-1)\phi_1$	$3q-1$	ϕ_1	-1	$-\phi_2^2$	$-\phi_2$	$-\phi_2$	-1
$\phi''_{8,9}$	.	$(3q+1)\phi_2$	ϕ_2	$3q+1$	1	$-(3q-1)\phi_1$	ϕ_1	$3q-1$	-1	ϕ_1^2	$-\phi_1$	$-\phi_1$	1
$\phi_{9,10}$	-1	$(2q+1)^2$	$2q+1$	$2q+1$	1	$(2q-1)^2$	$-(2q-1)$	$-(2q-1)$	1	$-(2q^2+1)$	-1	-1	-1
$\phi_{4,13}$	$-\frac{1}{2}\phi_1$	$2q\phi_2$	q	q	.	.	.	.	.	$-q\phi_2$	$-q$	.	.
$\phi''_{2,16}$	$\frac{1}{2}\phi_2$	$q\phi_2$	.	q	.	$-q\phi_1$	q	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{2,16}$	$\frac{1}{2}\phi_1$	$q\phi_2$	q	.	.	$-q\phi_1$	.	q	.	$-2q$	$-q$	$-q$	.
B_2,ϵ	$-\frac{1}{2}\phi_2$	.	.	.	.	$-2q\phi_1$	q	q	.	$q\phi_1$	.	$-q$	.
$\phi_{1,24}$	.	q^2	.	.	.	q^2	.	.	.	$-q^2$	.	.	.

Tabelle T.A.128: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 48

	$c_{56,1}$	$c_{56,2}$	$c_{56,3}$	$c_{56,4}$	$c_{57,1}$	$c_{57,2}$	$c_{58,1}$	$c_{58,2}$	$c_{59,1}$	$c_{59,2}$	$c_{60,1}$	$c_{60,2}$	$c_{61,1}$	$c_{61,2}$	$c_{62,1}$	$c_{62,2}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	ϕ_2	ϕ_2	1	1	$q+3$	3	.	.	2	2	ϕ_2	1	ϕ_2	1	1	1
$\phi''_{2,4}$	.	.	.	.	2	2	ϕ_1	-1	ϕ_2	1	.	.	.	.	q	.
$\phi'_{2,4}$	$2q$	q	q	.	ϕ_2	1	-2	-2	.	.	ϕ_1	-1	ϕ_2	1	1	1
$B_2,1$	ϕ_1	-1	ϕ_1	-1	.	.	$q-3$	-3	ϕ_1	-1	-2	-2	.	.	q	.
$\phi_{9,2}$	q^2+2	2	2	2	$3(q+2)$	6	$-3(q-2)$	6	$q+2$	2	$-(q-2)$	2	$q+2$	2	q	.
$\phi'_{8,3}$	ϕ_2^2	ϕ_2	ϕ_2	1	$4\phi_2$	4	$4\phi_1$	-4	.	.	.	.	$2\phi_2$	2	.	.
$\phi''_{8,3}$	$-\phi_1^2$	ϕ_1	ϕ_1	-1	$2(q+3)$	6	$2(q-3)$	-6	$2\phi_2$	2	$2\phi_1$	-2	.	.	.	.
$\phi_{12,4}$	.	.	.	.	$6\phi_2$	6	.	.	.	.	.	.	.	.	$-\phi_2$	-1
$\phi'_{9,6}$	$q(q+2)$	q	q	.	$3(2q+1)$	3	$-q$	.	$-(q+2)$	-2	-1	-1	$2q+1$	1	.	.
$\phi'_{1,12}$	$2q-1$	ϕ_1	ϕ_1	-1	q	.	$-3(2q-1)$	3	-1	-1	$q-2$	-2	q	.	.	.
$F_4^I[1]$	.	.	.	.	.	.	$-6\phi_1$	6	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{6,6}$	.	q	$-q$	.	$3\phi_2$	3	$-3\phi_1$	3	$-\phi_1$	1	ϕ_2	1	ϕ_1	-1	.	.
$\phi_{16,5}$	.	.	.	.	$8\phi_2$	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-1]$	.	.	.	.	.	.	$-8\phi_1$	8	.	.	.	.	.	.	.	.
B_2,ϵ''	ϕ_1	-1	ϕ_1	-1	.	.	$-(3q-1)$	1	ϕ_1	-1	-2	-2	.	.	q	.
$\phi'_{4,7}$	$q\phi_2$	.	q	.	$3q+1$	1	.	.	-2	-2	$-\phi_2$	-1	ϕ_2	1	-1	-1
$\phi''_{9,6}$	$-(2q+1)$	$-\phi_2$	$-\phi_2$	-1	$3(q+2)$	6	1	1	$2q+1$	1	$-q$	.	$-(q+2)$	-2	.	.
$F_4^I[1]$	.	.	.	.	.	.	$-2\phi_1$	2	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{1,12}$	$q(q-2)$	$-q$	$-q$	.	1	1	$-3(q-2)$	6	q	.	$-(2q-1)$	1	-1	-1	.	.
$\phi_{4,8}$	.	.	.	.	$2\phi_2$	2	.	.	.	.	.	.	.	.	ϕ_2	1
B_2,r	$\phi_1\phi_2$	$-\phi_2$	ϕ_1	-1	.	.	.	.	$2\phi_1$	-2	$-2\phi_2$	-2	.	.	ϕ_2	1
$\phi'_{6,6}$	.	$-q$	q	.	$3\phi_2$	3	$-3\phi_1$	3	ϕ_1	-1	$-\phi_2$	-1	$-\phi_1$	1	$-\phi_2$	-1
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	$-\phi_2$	$-\phi_2$	-1	-1	$q+3$	3	.	.	$2q$	.	$-\phi_2$	-1	$-\phi_2$	-1	$-q$	.
B_2,ϵ'	$q\phi_1$	$-q$	.	.	.	.	$-(q-3)$	3	ϕ_1	-1	$-2q$	.	.	.	1	1
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	ϕ_1^2	$-\phi_1$	$-\phi_1$	1	$2(3q+1)$	2	$2(3q-1)$	-2	$-2\phi_2$	-2	$-2\phi_1$	2	.	.	.	.
$\phi''_{8,9}$	$-\phi_2^2$	$-\phi_2$	$-\phi_2$	-1	$4\phi_2$	4	$4\phi_1$	-4	.	.	.	.	$-2\phi_2$	-2	.	.
$\phi_{9,10}$	$-(2q^2+1)$	-1	-1	-1	$3(2q+1)$	3	$-3(2q-1)$	3	$-(2q+1)$	-1	$2q-1$	-1	$-(2q+1)$	-1	1	1
$\phi_{4,13}$	$-q\phi_2$	.	$-q$	.	$3q+1$	1	.	.	$-2q$	.	ϕ_2	1	$-\phi_2$	-1	q	.
$\phi''_{2,16}$	$-2q$	$-q$	$-q$	.	ϕ_2	1	$2q$	.	.	.	$-\phi_1$	1	$-\phi_2$	-1	q	.
$\phi'_{2,16}$	.	.	.	.	$2q$	.	ϕ_1	-1	$-\phi_2$	-1	.	.	.	.	1	1
B_2,ϵ	$q\phi_1$	$-q$	.	.	.	.	$3q-1$	-1	ϕ_1	-1	$-2q$	.	.	.	1	1
$\phi_{1,24}$	$-q^2$	.	.	.	q	.	$-q$	.	$-q$	.	q	.	$-q$	.	q	.

Tabelle T.A.129: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 49

	$c_{63,1}$	$c_{63,2}$	$c_{64,1}$	$c_{64,2}$	$c_{65,1}$	$c_{65,2}$	$c_{66,1}$	$c_{66,2}$	$c_{67,1}$	$c_{67,2}$	$c_{68,1}$	$c_{68,2}$	$c_{69,1}$	$c_{69,2}$	$c_{70,1}$	$c_{70,2}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	.	.	q	.	q	.	.	.	$q+3$	3	.	.	2	2	ϕ_2	1
$\phi''_{2,4}$	ϕ_1	-1	-1	-1	-1	-1	ϕ_1	-1	ϕ_2	1	-2	-2	.	.	ϕ_1	-1
$\phi'_{2,4}$	.	.	q	.	ϕ_2	1	1	1	2	2	ϕ_1	-1	ϕ_2	1	.	.
$B_2,1$	ϕ_1	-1	-1	-1	.	.	q	.	.	.	$q-3$	-3	ϕ_1	-1	-2	-2
$\phi_{9,2}$	$-(q-2)$	2	$-q$	.	.	.	.	.	$3(q+2)$	6	$-3(q-2)$	6	$q+2$	2	$-(q-2)$	2
$\phi'_{8,3}$	$2\phi_1$	-2	.	.	ϕ_2	1	ϕ_1	-1	$2(q+3)$	6	$2(q-3)$	-6	$2\phi_2$	2	$2\phi_1$	-2
$\phi''_{8,3}$	.	.	.	.	$-q$	.	$-q$	.	$4\phi_2$	4	$4\phi_1$	-4	.	.	.	.
$\phi_{12,4}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$6\phi_2$	6	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{9,6}$	$-q$	.	.	.	.	.	$-q$	.	$3(q+2)$	6	1	1	$2q+1$	1	$-q$	.
$\phi'_{1,12}$	$-(2q-1)$	1	.	.	q	.	.	.	1	1	$-3(q-2)$	6	q	.	$-(2q-1)$	1
$F_4^{I'}[1]$	.	.	ϕ_1	-1	.	.	.	.	.	.	$-6\phi_1$	6	.	.	.	.
$\phi''_{6,6}$	$-\phi_2$	-1	.	.	.	.	.	.	$3\phi_2$	3	$-3\phi_1$	3	$-\phi_1$	1	ϕ_2	1
$\phi_{16,5}$	.	.	.	.	$-\phi_2$	-1	.	.	$8\phi_2$	8	.	.	.	.	.	.
$F_4[-1]$	.	.	.	.	.	.	ϕ_1	-1	.	.	$-8\phi_1$	8	.	.	.	.
B_2,ϵ''	$-\phi_1$	1	-1	-1	.	.	1	1	.	.	$-(q-3)$	3	ϕ_1	-1	$-2q$	.
$\phi'_{4,7}$	.	.	$-q$	.	1	1	.	.	$q+3$	3	.	.	$2q$	.	$-\phi_2$	-1
$\phi''_{9,6}$	-1	-1	.	.	.	.	1	1	$3(2q+1)$	3	$-q$	.	$-(q+2)$	-2	-1	-1
$F_4^{I}[1]$	.	.	$-\phi_1$	1	.	.	ϕ_1	-1	.	.	$-2\phi_1$	2	.	.	.	.
$\phi''_{1,12}$	$q-2$	-2	.	.	1	1	.	.	q	.	$-3(2q-1)$	3	-1	-1	$q-2$	-2
$\phi_{4,8}$	.	.	.	.	$-\phi_2$	-1	.	.	$2\phi_2$	2	.	.	.	.	.	.
B_2,r	.	.	$-\phi_1$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	$2\phi_1$	-2	$-2\phi_2$	-2
$\phi'_{6,6}$	ϕ_2	1	ϕ_1	-1	.	.	.	.	$3\phi_2$	3	$-3\phi_1$	3	ϕ_1	-1	$-\phi_2$	-1
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	.	.	1	1	q	.	.	.	$3q+1$	1	.	.	-2	-2	$-\phi_2$	-1
B_2,ϵ'	ϕ_1	-1	q	.	.	.	$-q$	.	.	.	$-(3q-1)$	1	ϕ_1	-1	-2	-2
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	.	.	.	.	-1	-1	1	1	$4\phi_2$	4	$4\phi_1$	-4	.	.	.	.
$\phi''_{8,9}$	$-2\phi_1$	2	.	.	ϕ_2	1	ϕ_1	-1	$2(3q+1)$	2	$2(3q-1)$	-2	$-2\phi_2$	-2	$-2\phi_1$	2
$\phi_{9,10}$	$2q-1$	-1	1	1	.	.	.	.	$3(2q+1)$	3	$-3(2q-1)$	3	$-(2q+1)$	-1	$2q-1$	-1
$\phi_{4,13}$	.	.	-1	-1	1	1	.	.	$3q+1$	1	.	.	$-2q$	.	ϕ_2	1
$\phi''_{2,16}$	.	.	-1	-1	ϕ_2	1	$-q$	.	$2q$	.	ϕ_1	-1	$-\phi_2$	-1	.	.
$\phi'_{2,16}$	$-\phi_1$	1	q	.	$-q$	.	ϕ_1	-1	ϕ_2	1	$2q$	.	.	.	$-\phi_1$	1
B_2,ϵ	$-\phi_1$	1	q	.	.	.	-1	-1	.	.	$3q-1$	-1	ϕ_1	-1	$-2q$	.
$\phi_{1,24}$	q	.	$-q$	.	q	.	$-q$	.	q	.	$-q$	.	$-q$	.	q	.

Tabelle T.A.130: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 50

	$c_{71,1}$	$c_{71,2}$	$c_{72,1}$	$c_{72,2}$	$c_{73,1}$	$c_{73,2}$	$c_{74,1}$	$c_{74,2}$	$c_{75,1}$	$c_{75,2}$	$c_{76,1}$	$c_{76,2}$	$c_{77,1}$	$c_{78,1}$	$c_{79,1}$	$c_{80,1}$	$c_{81,1}$	$c_{82,1}$	$c_{83,1}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	ϕ_2	1	.	.	1	1	q	.	q	.	.	.	4	.	2	2	2	.	1
$\phi''_{2,4}$	ϕ_2	1	.	.	1	1	q	.	ϕ_2	1	1	1	2	-2	2	.	.	.	2
$\phi'_{2,4}$	.	.	ϕ_1	-1	q	.	-1	-1	-1	-1	ϕ_1	-1	2	-2	.	2	.	.	-1
$B_2,1$	.	.	ϕ_1	-1	q	.	-1	-1	.	.	q	.	.	-4	.	.	-2	.	.
$\phi_{9,2}$	$q+2$	2	$-(q-2)$	2	q	.	$-q$	.	.	.	.	.	9	9	3	3	1	1	.
$\phi'_{8,3}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$-q$	.	$-q$	.	8	-8	.	4	.	.	-1
$\phi''_{8,3}$	$2\phi_2$	2	$2\phi_1$	-2	.	.	.	.	ϕ_2	1	ϕ_1	-1	8	-8	4	.	.	.	2
$\phi_{12,4}$	.	.	.	.	$-\phi_2$	-1	.	.	.	.	.	.	12	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{9,6}$	$-(q+2)$	-2	-1	-1	.	.	.	.	.	.	1	1	9	1	-3	3	-1	-1	.
$\phi'_{1,12}$	-1	-1	$q-2$	-2	.	.	.	.	1	1	.	.	1	9	-1	1	-1	-1	1
$F_4^{II}[1]$	.	.	.	.	.	.	ϕ_1	-1	.	.	.	.	.	12	.	.	.	.	.
$\phi''_{6,6}$	ϕ_1	-1	$-\phi_2$	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	6	6	.	.	2	-2	.
$\phi_{16,5}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$-\phi_2$	-1	.	.	16	.	.	.	.	.	-2
$F_4[-1]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	ϕ_1	-1	.	16	.	.	.	.	.
B_2,ϵ''	.	.	ϕ_1	-1	1	1	q	.	.	.	$-q$	.	.	4	.	.	-2	.	.
$\phi'_{4,7}$	$-\phi_2$	-1	.	.	$-q$	.	1	1	q	.	.	.	4	.	-2	2	-2	.	1
$\phi''_{9,6}$	$2q+1$	1	$-q$	.	.	.	.	.	.	.	$-q$	.	9	1	3	-3	-1	-1	.
$F_4^I[1]$	.	.	.	.	.	.	$-\phi_1$	1	.	.	ϕ_1	-1	.	4	.	.	.	.	.
$\phi''_{1,12}$	q	.	$-(2q-1)$	1	.	.	.	.	q	.	.	.	1	9	1	-1	-1	-1	1
$\phi_{4,8}$	.	.	.	.	ϕ_2	1	.	.	$-\phi_2$	-1	.	.	4	.	.	.	.	.	-2
B_2,r	.	.	.	.	ϕ_2	1	$-\phi_1$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	-4	.	.
$\phi'_{6,6}$	$-\phi_1$	1	ϕ_2	1	$-\phi_2$	-1	ϕ_1	-1	.	.	.	.	6	6	.	.	-2	2	.
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	ϕ_2	1	.	.	-1	-1	$-q$	.	1	1	.	.	4	.	2	-2	-2	.	1
B_2,ϵ'	.	.	$-\phi_1$	1	q	.	-1	-1	.	.	1	1	.	4	.	.	-2	.	.
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	$-2\phi_2$	-2	$-2\phi_1$	2	.	.	.	.	ϕ_2	1	ϕ_1	-1	8	-8	-4	.	.	.	2
$\phi''_{8,9}$	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	-1	1	1	8	-8	.	-4	.	.	-1
$\phi_{9,10}$	$-(2q+1)$	-1	$2q-1$	-1	1	1	1	1	.	.	.	.	9	9	-3	-3	1	1	.
$\phi_{4,13}$	$-\phi_2$	-1	.	.	q	.	-1	-1	1	1	.	.	4	.	-2	-2	2	.	1
$\phi''_{2,16}$	.	.	$-\phi_1$	1	1	1	q	.	$-q$	.	ϕ_1	-1	2	-2	.	-2	.	.	-1
$\phi'_{2,16}$	$-\phi_2$	-1	.	.	q	.	-1	-1	ϕ_2	1	$-q$	.	2	-2	-2	.	.	.	2
B_2,ϵ	.	.	$-\phi_1$	1	1	1	q	.	.	.	-1	-1	.	-4	.	.	-2	.	.
$\phi_{1,24}$	$-q$	.	q	.	q	.	$-q$	.	q	.	$-q$	.	1	1	-1	-1	1	1	1

Tabelle T.A.131: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 51

	$c_{84,1}$	$c_{85,1}$	$c_{86,1}$	$c_{87,1}$	$c_{88,1}$	$c_{89,1}$	$c_{90,1}$	$c_{91,1}$	$c_{92,1}$	$c_{93,1}$	$c_{94,1}$	$c_{95,1}$	$c_{96,1}$	$c_{97,1}$	$c_{98,1}$	$c_{99,1}$	$c_{100,1}$	$c_{101,1}$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{4,1}$	1	1	.	.	1	1	.	.	-1	-1	-2	-1	.	.	2	.	-1	.
$\phi''_{2,4}$	-1	1	.	-2	1	-1	.	1	-1	.	-1	-1	-2	1	.	.	.	1
$\phi'_{2,4}$	2	1	-2	.	-1	1	1	.	.	-1	-1	-1	1	-2	.	.	.	1
$B_2,1$	.	1	-2	-2	-1	-1	1	1	.	.	.	-1	-1	-1	-2	.	1	2
$\phi_{9,2}$	.	1	3	3	-1	-1	.	.	.	.	.	1	.	.	-3	-1	.	.
$\phi'_{8,3}$	2	.	.	-4	.	.	.	-1	.	1	2	.	-2	1	.	.	.	-2
$\phi''_{8,3}$	-1	.	-4	.	.	.	-1	.	1	.	2	.	1	-2	.	.	.	-2
$\phi_{12,4}$	.	-2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	3
$\phi'_{9,6}$	.	.	-1	1	.	.	-1	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1
$\phi'_{1,12}$	1	.	-3	3	.	.	.	.	-1	1	1	.	.	.	.	.	.	.
$F_4^{I'}[1]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	-2	.	.	1	.	.	.
$\phi''_{6,6}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
$\phi_{16,5}$	-2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-2	.	.	.	.	1	.	.
$F_4[-1]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-2	-2	.	1	.	-2
B_2,ϵ''	.	1	-2	2	1	-1	1	-1	.	.	.	-1	1	1	.	.	.	-2
$\phi'_{4,7}$	1	-1	.	.	1	-1	.	.	1	-1	-2	1	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{9,6}$	.	.	1	-1	.	.	1	-1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1
$F_4^{I}[1]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	-2	-2	3	.	.	1
$\phi''_{1,12}$	1	.	3	-3	.	.	.	.	1	-1	1	.	.	.	.	.	.	.
$\phi_{4,8}$	-2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	3	.	.	.
B_2,r	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	2	.	-1	.
$\phi'_{6,6}$	.	-2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-2	.	.	2	.	.	.
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-3	.	.	.	.	.	1	-3
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-3	.	.	.	.	.	1	-3
$\phi''_{4,7}$	1	-1	.	.	-1	1	-1	.	-1	1	-2	1	.	.	.	.	.	.
B_2,ϵ'	.	1	2	-2	-1	1	-1	1	.	.	.	-1	1	1	.	.	.	-2
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	-1	1	.
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	-1	1	.
$\phi'_{8,9}$	-1	.	4	.	.	.	1	.	.	.	2	.	1	-2	.	.	.	-2
$\phi''_{8,9}$	2	.	.	4	.	.	.	1	.	-1	2	.	-2	1	.	.	.	-2
$\phi_{9,10}$	.	1	-3	-3	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	-3	-1	.	.
$\phi_{4,13}$	1	1	.	.	-1	-1	.	.	1	1	-2	-1	.	.	2	.	-1	.
$\phi''_{2,16}$	2	1	2	.	1	-1	-1	.	.	1	-1	-1	1	-2	.	.	.	1
$\phi'_{2,16}$	-1	1	.	2	-1	1	.	-1	1	.	-1	-1	-2	1	.	.	.	1
B_2,ϵ	.	1	2	2	1	1	-1	-1	.	.	.	-1	-1	-1	-2	.	1	2
$\phi_{1,24}$	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabelle T.A.132: Charakterwerte der unipotenten Charaktere von $F_4(q)$, Teil 52

A.29 Charaktere in den unipotenten Blöcken von $F_4(q)$

In dieser Tabelle geben wir für die einzelnen Fälle von e die Parametrisierung der halbeinfachen Elemente $t \in G_l^*$ gemäß III.(4.17)(iv) an. Die Zahlen m_i geben jeweils die Anzahl der unipotenten Charaktere in $\mathcal{E}(G,t)$ an. Die Zahl $l^d \in \mathbb{N}$ wird in Abhängigkeit von e dadurch definiert, dass $l^d || \phi_e$, wobei ϕ_e das e-te Kreisteilungspolynom ist.

Typ	e	Π	w	m_i	Anzahl
1	1	[1, 2, 3, 4]	1	37	1
8	1	[2, 3, 4]	1	10	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
10	1	[1, 3, 4]	1	6	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
16	1	[1, 2, 4]	1	6	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
24	1	[1, 2, 3]	1	10	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
26	1	[1, 2]	1	3	$\frac{1}{12}(l^d-1)(l^d-5)$
32	1	[3, 4]	1	3	$\frac{1}{12}(l^d-1)(l^d-5)$
38	1	[2, 3]	1	5	$\frac{1}{8}(l^d-1)(l^d-3)$
53	1	[1, 3]	1	4	$\frac{1}{4}(l^d-1)(l^d-5)$
57	1	[1]	1	2	$\frac{1}{48}(l^d-1)(l^d-5)(l^d-7)$
67	1	[3]	1	2	$\frac{1}{48}(l^d-1)(l^d-5)(l^d-7)$
77	1	[]	1	1	$\frac{1}{1152}(l^d-1)(l^d-5)(l^d-7)(l^d-11)$
1	2	[1, 2, 3, 4]	1	37	1
9	2	[2, 3, 4]	$s_1s_2s_3s_2s_1s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	10	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
11	2	[1, 3, 4]	$(s_2s_1s_3)^2s_2(s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_3)^2s_3$	6	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
17	2	[1, 2, 4]	$(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^3s_4$	6	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
25	2	[1, 2, 3]	$s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4$	10	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
27	2	[1, 2]	$(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^3$	3	$\frac{1}{12}(l^d-1)(l^d-5)$
33	2	[3, 4]	$s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_3s_2(s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_3)^2s_3$	3	$\frac{1}{12}(l^d-1)(l^d-5)$
39	2	[2, 3]	$s_1s_2s_3s_2s_1s_4(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^2$	5	$\frac{1}{8}(l^d-1)(l^d-3)$
54	2	[1, 3]	$s_2s_1s_3s_2s_1s_3s_2s_4(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^2$	4	$\frac{1}{4}(l^d-1)(l^d-5)$
58	2	[1]	$s_2s_1(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^3$	2	$\frac{1}{48}(l^d-1)(l^d-5)(l^d-7)$
68	2	[3]	$s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_3s_2s_4(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^2$	2	$\frac{1}{48}(l^d-1)(l^d-5)(l^d-7)$
78	2	[]	$s_1s_2s_1(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4)^3$	1	$\frac{1}{1152}(l^d-1)(l^d-5)(l^d-7)(l^d-11)$
1	3	[1, 2, 3, 4]	1	37	1
30	3	[1, 2]	$s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4$	3	$\frac{1}{6}(l^d-1)$
36	3	[3, 4]	$s_1s_2s_3s_2s_1s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2$	3	$\frac{1}{6}(l^d-1)$
94	3	[]	$s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_3s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4s_3$	1	$\frac{1}{72}(l^d-1)(l^d-7)$
1	4	[1, 2, 3, 4]	1	37	1
42	4	[2, 3]	$s_4s_3s_2s_1s_3s_2s_4s_3s_2s_1$	5	$\frac{1}{4}(l^d-1)$
98	4	[]	$s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_3s_4s_3s_2s_3s_4$	1	$\frac{1}{96}(l^d-1)(l^d-5)$
1	6	[1, 2, 3, 4]	1	37	1
31	6	[1, 2]	$s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_4$	3	$\frac{1}{6}(l^d-1)$
37	6	[3, 4]	$s_1s_2s_3s_2s_4s_3s_2$	3	$\frac{1}{6}(l^d-1)$
101	6	[]	$s_1s_2s_1s_3s_2s_3s_4s_3$	1	$\frac{1}{72}(l^d-1)(l^d-7)$
1	8	[1, 2, 3, 4]	1	37	1
99	8	[]	$s_2s_1s_3s_2s_3s_4$	1	$\frac{1}{8}(l^d-1)$
1	12	[1, 2, 3, 4]	1	37	1
100	12	[]	$s_1s_2s_3s_4$	1	$\frac{1}{12}(l^d-1)$

Tabelle T.A.133: Die Parametrisierung der halbeinfachen $t \in G_l^*$.

A.30 Blockeinteilung

In dieser Tabelle geben wir die unipotenten Blöcke von $F_4(q)$ an. Die Parametrisierung der l-Elemente entspricht der in A.29. Die unipotenten Charaktere der Zentralisatoren werden gemäß [Car85, 13.8] parametrisiert. Mit der Bezeichnung $\{\chi_{8,(3,-)}\}$ meinen wir zum Beispiel die Menge aller Charaktere, die wir erhalten, wenn wir die halbeinfachen Elemente von G^* durchlaufen, die im Typ 8 der Tabelle A.29 liegen, und für jedes solche halbeinfache Element t, den Charakter aus $\mathcal{E}(G,t)$ nehmen, der bezüglich der Jordanzerlegung dem Charakter von $C_{G^*}(t)$ entspricht, der durch das Symbol $(3,-)$ beschrieben wird. Die Bezeichnung der Blöcke entspricht der in Lemma VI.(2.7). Wir geben hier nur die Blöcke mit mehr als einem irreduziblen Charakter an.

e	B	Charaktere
1	B_1	$\phi_{1,0}, \phi_{4,1}, \phi''_{2,4}, \phi'_{2,4}, \phi_{9,2}, \phi'_{8,3}, \phi''_{8,3}, \phi_{12,4}, \phi'_{9,6}, \phi'_{1,12}, \phi''_{6,6}, \phi_{16,5}, \phi'_{4,7}, \phi''_{9,6}, \phi''_{1,12}, \phi_{4,8}, \phi'_{6,6}, \phi''_{4,7}, \phi'_{8,9}, \phi''_{8,9}, \phi_{9,10}, \phi_{4,13}, \phi''_{2,16}, \phi'_{2,16}, \phi_{1,24}$ $\{\chi_{8,(3,-)}\}, \{\chi_{8,(03,1)}\}, \{\chi_{8,(13,0)}\}, \{\chi_{8,(01,3)}\}, \{\chi_{8,(02,2)}\}, \{\chi_{8,(12,1)}\}, \{\chi_{8,(013,12)}\}, \{\chi_{8,(123,01)}\}, \{\chi_{8,(012,13)}\}, \{\chi_{8,(0123,123)}\}, \{\chi_{10,(1^3,1^2)}\}, \{\chi_{10,(1^3,2)}\}, \{\chi_{10,(12,1^2)}\}, \{\chi_{10,(12,2)}\}, \{\chi_{10,(3,1^2)}\}, \{\chi_{10,(3,2)}\}, \{\chi_{16,(1^3,1^2)}\}, \{\chi_{16,(1^3,2)}\}, \{\chi_{16,(12,1^2)}\}, \{\chi_{16,(12,2)}\}, \{\chi_{16,(3,1^2)}\}, \{\chi_{16,(3,2)}\}, \{\chi_{24,(3,-)}\}, \{\chi_{24,(03,1)}\}, \{\chi_{24,(13,0)}\}, \{\chi_{24,(01,3)}\}, \{\chi_{24,(02,2)}\}, \{\chi_{24,(12,1)}\}, \{\chi_{24,(013,12)}\}, \{\chi_{24,(123,01)}\}, \{\chi_{24,(012,13)}\}, \{\chi_{24,(0123,123)}\}, \{\chi_{26,(1^3)}\}, \{\chi_{26,(12)}\}, \{\chi_{26,(3)}\}, \{\chi_{32,(1^3)}\}, \{\chi_{32,(12)}\}, \{\chi_{32,(3)}\}, \{\chi_{38,(2,-)}\}, \{\chi_{38,(02,1)}\}, \{\chi_{38,(12,0)}\}, \{\chi_{38,(01,2)}\}, \{\chi_{38,(012,12)}\}, \{\chi_{53,(1^2,1^2)}\}, \{\chi_{53,(1^2,2)}\}, \{\chi_{53,(2,1^2)}\}, \{\chi_{53,(2,2)}\}, \{\chi_{57,(1^2)}\}, \{\chi_{57,(2)}\}, \{\chi_{67,(1^2)}\}, \{\chi_{67,(2)}\}, \{\chi_{77}\}$
1	B_2	$B_{2,1}, B_{2,\epsilon''}, B_{2,r}, B_{2,\epsilon'}, B_{2,\epsilon},$ $\{\chi_{8,(013,-)}\}, \{\chi_{8,(0123,1)}\}, \{\chi_{24,(013,-)}\}, \{\chi_{24,(0123,1)}\}, \{\chi_{38,(012,-)}\}$
2	B_1	$\phi_{1,0}, \phi''_{2,4}, \phi'_{2,4}, B_{2,1}, \phi_{9,2}, \phi'_{8,3}, \phi''_{8,3}, \phi'_{9,6}, \phi'_{1,12}, F_4^{II}[1], \phi''_{6,6}, F_4[-1], B_{2,\epsilon''}, \phi''_{9,6}, F_4^{I}[1], \phi''_{1,12}, \phi'_{6,6}, B_{2,\epsilon'}, \phi'_{8,9}, \phi''_{8,9}, \phi_{9,10}, \phi''_{2,16}, \phi'_{2,16}, B_{2,\epsilon}, \phi_{1,24}$ $\{\chi_{9,(3,-)}\}, \{\chi_{9,(03,1)}\}, \{\chi_{9,(013,-)}\}, \{\chi_{9,(01,3)}\}, \{\chi_{9,(02,2)}\}, \{\chi_{9,(12,1)}\}, \{\chi_{9,(013,12)}\}, \{\chi_{9,(123,01)}\}, \{\chi_{9,(0123,1)}\}, \{\chi_{9,(0123,123)}\}, \{\chi_{11,(1^3,1^2)}\}, \{\chi_{11,(1^3,2)}\}, \{\chi_{11,(12,1^2)}\}, \{\chi_{11,(12,2)}\}, \{\chi_{11,(3,1^2)}\}, \{\chi_{11,(3,2)}\}, \{\chi_{17,(1^3,1^2)}\}, \{\chi_{17,(1^3,2)}\}, \{\chi_{17,(12,1^2)}\}, \{\chi_{17,(12,2)}\}, \{\chi_{17,(3,1^2)}\}, \{\chi_{17,(3,2)}\}, \{\chi_{25,(3,-)}\}, \{\chi_{25,(03,1)}\}, \{\chi_{25,(013,-)}\}, \{\chi_{25,(01,3)}\}, \{\chi_{25,(02,2)}\}, \{\chi_{25,(12,1)}\}, \{\chi_{25,(013,12)}\}, \{\chi_{25,(123,01)}\}, \{\chi_{25,(0123,1)}\}, \{\chi_{25,(0123,123)}\}, \{\chi_{27,(1^3)}\}, \{\chi_{27,(12)}\}, \{\chi_{27,(3)}\}, \{\chi_{33,(1^3)}\}, \{\chi_{33,(12)}\}, \{\chi_{33,(3)}\}, \{\chi_{39,(2,-)}\}, \{\chi_{39,(02,1)}\}, \{\chi_{39,(12,0)}\}, \{\chi_{39,(01,2)}\}, \{\chi_{39,(012,12)}\}, \{\chi_{54,(1^2,1^2)}\}, \{\chi_{54,(1^2,2)}\}, \{\chi_{54,(2,1^2)}\}, \{\chi_{54,(2,2)}\}, \{\chi_{58,(1^2)}\}, \{\chi_{58,(2)}\}, \{\chi_{68,(1^2)}\}, \{\chi_{68,(2)}\}, \{\chi_{78}\}$
2	B_2	$\phi_{4,1}, \phi'_{4,7}, B_{2,r}, \phi''_{4,7}, \phi_{4,13}$ $\{\chi_{9,(13,0)}\}, \{\chi_{9,(012,13)}\}, \{\chi_{25,(13,0)}\}, \{\chi_{25,(012,13)}\}, \{\chi_{39,(012,-)}\}$

Tabelle T.A.134: Die unipotenten Blöcke von $F_4(q)$, Teil 1

e	B	Charaktere
3	B_1	$\phi_{1,0}, \phi_{4,1}, \phi''_{2,4}, \phi'_{2,4}, \phi'_{8,3}, \phi''_{8,3}, \phi'_{1,12}, F_4^{II}[1], \phi_{16,5}, \phi'_{4,7}, \phi''_{1,12}, \phi_{4,8}$, $F_4[\theta], F_4[\theta^2], \phi''_{4,7}, \phi'_{8,9}, \phi''_{8,9}, \phi_{4,13}, \phi''_{2,16}, \phi'_{2,16}, \phi_{1,24}$ $\{\chi_{30,(3)}\}, \{\chi_{30,(12)}\}, \{\chi_{30,(1^3)}\}, \{\chi_{36,(3)}\}, \{\chi_{36,(12)}\}, \{\chi_{36,(1^3)}\}, \{\chi_{94}\}$
4	B_1	$\phi_{1,0}, \phi_{4,1}, B_{2,1}, \phi_{9,2}, \phi_{12,4}, F_4^{II}[1], F_4^{I}[1], \phi_{4,8}, B_{2,r}, \phi'_{6,6}, F_4[i], F_4[-i]$, $\phi_{9,10}, \phi_{4,13}, B_{2,\epsilon}, \phi_{1,24}$ $\{\chi_{42,(2,-)}\}, \{\chi_{42,(02,1)}\}, \{\chi_{42,(012,-)}\}, \{\chi_{42,(012,12)}\}, \{\chi_{98}\}$
4	B_2	$\phi''_{2,4}, B_{2,\epsilon''}, \phi''_{4,7}, \phi''_{2,16}$ $\{\chi_{42,(01,2)}\}$
4	B_3	$\phi'_{2,4}, \phi'_{4,7}, B_{2,\epsilon'}, \phi'_{2,16}$ $\{\chi_{42,(12,0)}\}$
6	B_1	$\phi_{1,0}, \phi''_{2,4}, \phi'_{2,4}, B_{2,1}, \phi'_{8,3}, \phi''_{8,3}, \phi_{12,4}, \phi'_{9,6}, F_4[-1], B_{2,\epsilon''}, \phi''_{9,6}, F_4^{I}[1]$, $F_4[\theta], F_4[\theta^2], B_{2,\epsilon'}, \phi'_{8,9}, \phi''_{8,9}, \phi''_{2,16}, \phi'_{2,16}, B_{2,\epsilon}, \phi_{1,24}$ $\{\chi_{31,(3)}\}, \{\chi_{31,(12)}\}, \{\chi_{31,(1^3)}\}, \{\chi_{37,(3)}\}, \{\chi_{37,(12)}\}, \{\chi_{37,(1^3)}\}, \{\chi_{101}\}$
8	B_1	$\phi_{1,0}, \phi_{9,2}, \phi_{16,5}, F_4[-1], F_4[i], F_4[-i], \phi_{9,10}, \phi_{1,24}$ $\{\chi_{99}\}$
12	B_1	$\phi_{1,0}, \phi_{4,1}, B_{2,1}, \phi''_{6,6}, B_{2,r}, F_4[\theta], F_4[\theta^2], F_4[i], F_4[-i], \phi_{4,13}, B_{2,\epsilon}, \phi_{1,24}$ $\{\chi_{101}\}$

Tabelle T.A.135: Die unipotenten Blöcke von $F_4(q)$, Teil 2

A.31 Basisrelationen

In den folgenden Tabellen geben wir jeweils die Basisrelationen für die nicht-unipotenten Charaktere in den unipotenten Blöcken an. Die Spalten sind durch die unipotenten Charaktere im entsprechenden Block indiziert. Die Nummerierung bezieht sich auf die Nummerierung der unipotenten Charaktere in A.21. Die Zeilen stehen für die nicht-unipotenten Charaktere im entsprechenden Block gemäß A.30. Die Einträge in den Zeilen bezeichnen die Koeffizienten $\alpha_{\chi\varphi}$ gemäß Definition VI.(1.8), bezüglich der durch die unipotenten Charaktere des Blocks gegebenen Basismenge. Diese Koeffizienten sind für alle Charaktere eines Typs gleich.

Charaktere	1	2	3	4	7	8	11	12	14	17	20	21	24	25	26	30	31	33	34	35	37
$\{\chi_{30,(3)}\}$	.	.	.	.	1	.	1	1	−1	−1	.	.	−1	−1	.	1	1	−1	.	−1	1
$\{\chi_{30,(12)}\}$	.	1	.	1	.	−1	.	−1	.	1	.	−1	1	1	1	−1	.	1	1	.	.
$\{\chi_{30,(1^3)}\}$	1	−1	−1	.	1	1	.	1	−1	.	1	.	−1	−1	−1	.	1	.	.	.	.
$\{\chi_{36,(3)}\}$	.	.	.	.	.	1	.	1	−1	.	1	.	−1	−1	−1	1	1	−1	−1	.	1
$\{\chi_{36,(12)}\}$	.	1	1	.	−1	.	.	−1	.	1	.	−1	1	1	1	.	−1	1	.	1	.
$\{\chi_{36,(1^3)}\}$	1	−1	.	−1	1	1	1	1	−1	−1	.	.	−1	−1	.	1	.	.	.	.	.
$\{\chi_{94}\}$	1	−2	−1	−1	2	2	1	3	−2	−2	1	1	−3	−3	−2	2	2	−2	−1	−1	1

Tabelle T.A.136: Basisrelationen für B_1 im Fall $e = 3$

Charaktere	1	2	5	6	9	12	19	21	22	23	28	29	32	33	36	37
$\{\chi_{42,(2,-)}\}$	1	1	−1	−1	.	.	1	1	1	.	1	1	.	.	.	.
$\{\chi_{42,(02,1)}\}$	.	.	1	1	−1	.	−1	.	.	−1	−1	−1	1	.	1	.
$\{\chi_{42,(012,-)}\}$	.	1	.	−1	.	1	.	1	.	1	1	1	−1	1	.	.
$\{\chi_{42,(012,12)}\}$	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	1	1	−1	1	−1	1
$\{\chi_{98}\}$	1	2	−2	−3	1	1	3	3	2	2	4	4	−3	2	−2	1

Tabelle T.A.137: Basisrelationen für B_1 im Fall $e = 4$

Charaktere	1	3	4	5	7	8	9	10	15	16	18	19	24	25	27	30	31	34	35	36	37
$\{\chi_{31,(3)}\}$	.	.	.	.	−1	.	1	1	−1	−1	.	.	−1	−1	.	−1	−1	1	.	1	1
$\{\chi_{31,(12)}\}$	.	1	.	1	.	−1	1	.	.	−1	.	1	−1	−1	−1	−1	.	.	1	1	.
$\{\chi_{31,(1^3)}\}$	−1	.	−1	−1	1	1	−1	.	1	.	−1	.	1	1	1	.	1	.	.	.	.
$\{\chi_{37,(3)}\}$	.	.	.	.	.	−1	1	.	−1	.	1	.	−1	−1	−1	−1	−1	.	1	1	1
$\{\chi_{37,(12)}\}$	.	.	1	1	−1	.	1	.	.	−1	.	1	−1	−1	−1	.	−1	1	.	1	.
$\{\chi_{37,(1^3)}\}$	−1	−1	.	−1	1	1	−1	−1	1	1	.	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.
$\{\chi_{101}\}$	1	1	1	2	−2	−2	3	1	−2	−2	1	1	−3	−3	−2	−2	−2	1	1	2	1

Tabelle T.A.138: Basisrelationen für B_1 im Fall $e = 6$

Charaktere	1	6	14	15	28	29	32	37
$\{\chi_{99}\}$	1	−1	1	1	−1	−1	−1	1

Tabelle T.A.139: Basisrelationen für B_1 im Fall $e = 8$

Charaktere	1	2	5	13	22	24	25	28	29	33	36	37
$\{\chi_{101}\}$	1	-1	1	1	-1	1	1	1	1	-1	1	1

Tabelle T.A.140: Basisrelationen für B_1 im Fall $e = 12$

Charaktere	5	16	22	27	36
$\{\chi_{8,(013,-)}\}$	1	1	1	.	.
$\{\chi_{8,(0123,1)}\}$	.	.	1	1	1
$\{\chi_{24,(013,-)}\}$	1	.	1	1	.
$\{\chi_{24,(0123,1)}\}$	.	1	1	.	1
$\{\chi_{38,(013,-)}\}$	1	1	2	1	1

Tabelle T.A.141: Basisrelationen für B_2 im Fall $e = 1$

Charaktere	2	17	22	26	33
$\{\chi_{9,(13,0)}\}$	-1	1	1	.	.
$\{\chi_{9,(012,13)}\}$	.	.	-1	-1	1
$\{\chi_{25,(13,0)}\}$	-1	.	1	1	.
$\{\chi_{25,(012,13)}\}$	.	-1	-1	.	1
$\{\chi_{39,(03,1)}\}$	1	-1	-2	-1	1

Tabelle T.A.142: Basisrelationen für B_2 im Fall $e = 2$

Charaktere	3	16	26	34
$\{\chi_{42,(01,2)}\}$	1	1	-1	1

Tabelle T.A.143: Basisrelationen für B_2 im Fall $e = 4$

Charaktere	4	17	27	35
$\{\chi_{42,(12,0)}\}$	1	-1	1	1

Tabelle T.A.144: Basisrelationen für B_3 im Fall $e = 4$

Charaktere	1	2	3	4	6	7	8	9	10	11	13	14	17	18	20	21	23	26	30	31	32	33	34	35	37
$\{\chi_{8,(3,-)}\}$	1	1	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{8,(03,1)}\}$	.	1	.	.	1	1	1	1	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{8,(13,0)}\}$	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{8,(01,3)}\}$	.	.	.	1	.	1	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{8,(02,2)}\}$	.	.	.	.	1	1	.	1	1	.	.	1	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{8,(12,1)}\}$	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	1	.	.	1	1	.	1	1	.	.	.	.
$\{\chi_{8,(013,12)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1	.	1	.	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.
$\{\chi_{8,(123,.1)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	.	1	.	.	1	.	.
$\{\chi_{8,(012,13)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.	1	.	.	1	.
$\{\chi_{8,(0123,123)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	.	1
$\{\chi_{1.,(1^3,1^2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	1	1	1	2	2	1	1	.	1
$\{\chi_{1.,(1^3,2)}\}$	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	1	.	2	1	.	.	1	.	2	1	1	1	.	.
$\{\chi_{1.,(12,1^2)}\}$	.	.	.	.	1	1	1	2	2	.	1	3	1	1	.	1	1	.	2	1	2	1	.	1	.
$\{\chi_{1.,(12,2)}\}$	.	1	1	.	2	1	2	2	1	.	1	3	.	2	.	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.
$\{\chi_{1.,(3,1^2)}\}$	.	1	.	1	1	2	.	1	2	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{1.,(3,2)}\}$	1	1	.	1	2	2	1	1	1	.	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{16,(1^3,1^2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	1	.	.	.	1	.	2	1	2	1	.	1	1
$\{\chi_{16,(1^3,2)}\}$	.	.	.	.	.	1	.	1	2	1	1	1	1	.	.	.	.	.	2	.	1	1	.	1	.
$\{\chi_{16,(12,1^2)}\}$	.	.	.	.	1	1	1	2	1	.	1	3	.	2	.	1	1	1	1	2	2	1	1	.	.
$\{\chi_{16,(12,2)}\}$	.	1	.	1	2	2	1	2	2	.	1	3	1	1	.	1	1	.	1	1	1	.	.	.	.
$\{\chi_{16,(3,1^2)}\}$	.	1	1	.	1	.	2	1	.	.	1	1	.	2	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.
$\{\chi_{16,(3,2)}\}$	1	1	1	.	2	1	2	1	.	.	.	1	.	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{24,(3,-)}\}$	1	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{24,(03,1)}\}$	.	1	.	.	1	1	1	1	.	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{24,(13,0)}\}$	.	.	.	1	1	1	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{24,(01,3)}\}$	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{24,(02,2)}\}$	.	.	.	.	1	.	1	1	.	.	.	1	.	1	.	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.
$\{\chi_{24,(12,1)}\}$	.	.	.	.	.	1	.	1	1	.	.	1	1	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.
$\{\chi_{24,(013,12)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.
$\{\chi_{24,(123,01)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.
$\{\chi_{24,(012,13)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	1	1	.	1	.	.
$\{\chi_{24,(0123,123)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	.	1	1
$\{\chi_{26,(1^3)}\}$	.	.	.	.	.	1	.	2	3	1	1	2	2	.	.	.	1	.	4	1	3	2	.	2	1
$\{\chi_{26,(12)}\}$	.	1	.	1	3	3	2	4	3	.	2	6	1	3	.	2	2	1	2	3	3	1	1	.	.
$\{\chi_{26,(3)}\}$	1	2	2	.	3	1	4	2	.	.	1	2	.	3	1	.	1	2	.	1	.	.	.	.	.
$\{\chi_{32,(1^3)}\}$	.	.	.	.	.	.	1	2	.	.	1	2	.	3	1	.	1	2	1	4	3	2	2	.	1
$\{\chi_{32,(12)}\}$	.	1	1	.	3	2	3	4	3	.	2	6	1	3	.	2	2	1	3	2	3	1	.	1	.
$\{\chi_{32,(3)}\}$	1	2	.	2	3	4	1	2	3	1	1	2	2	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{38,(2,-)}\}$	1	2	1	1	3	2	2	1	1	.	1	2	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{38,(02,1)}\}$	.	1	.	.	2	2	2	4	2	.	2	4	1	2	.	.	2	1	2	2	2	1	.	.	.
$\{\chi_{38,(12,0)}\}$	.	.	1	.	1	.	2	1	.	.	.	2	.	3	1	1	1	2	.	2	1	.	1	.	.
$\{\chi_{38,(01,2)}\}$	.	.	.	1	1	2	.	1	3	1	.	2	2	.	.	1	1	.	2	.	1	.	.	1	.
$\{\chi_{38,(012,12)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	1	2	.	1	.	1	.	.	2	2	3	2	1	1	1
$\{\chi_{53,(1^2,1^2)}\}$	.	.	.	.	1	1	1	3	2	.	1	4	1	2	.	1	2	1	3	3	4	2	1	1	1
$\{\chi_{53,(1^2,2)}\}$	.	1	.	1	2	3	1	3	4	1	2	4	2	1	.	1	1	.	3	1	2	1	.	1	.
$\{\chi_{53,(2,1^2)}\}$	.	1	1	.	2	1	3	3	1	.	2	4	.	4	1	1	1	2	1	3	2	1	1	.	.
$\{\chi_{53,(2,2)}\}$	1	2	1	1	4	3	3	3	2	.	1	4	1	2	.	1	2	1	1	1	1	.	.	.	.
$\{\chi_{57,(1^2)}\}$	.	1	.	1	3	4	2	6	6	1	3	8	3	3	.	2	3	1	6	4	6	3	1	2	1
$\{\chi_{57,(2)}\}$	1	3	2	1	6	4	6	6	3	.	3	8	1	6	1	2	3	3	2	4	3	1	1	.	.
$\{\chi_{67,(1^2)}\}$	.	1	1	.	3	2	4	6	3	.	3	8	1	6	1	2	3	3	4	6	6	3	2	1	1
$\{\chi_{67,(2)}\}$	1	3	1	2	6	6	4	6	6	1	3	8	3	3	.	2	3	1	4	2	3	1	.	1	.
$\{\chi_{77}\}$	1	4	2	2	9	8	8	12	9	1	6	16	4	9	1	4	6	4	8	8	9	4	2	2	1

Tabelle T.A.145: Basisrelationen für B_1 im Fall $e = 1$

Charaktere	1	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	15	16	18	19	20	23	27	30	31	32	34	35	36	37
$\{\chi_{9,(3,-)}\}$	−1	1	.	1	−1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{9,(03,1)}\}$	.	−1	.	.	.	−1	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{9,(013,-)}\}$	.	.	.	−1	1	−1	−1	.	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{9,(01,3)}\}$	.	.	−1	.	1	.	−1	.	.	.	.	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{9,(02,2)}\}$	.	.	.	.	−1	1	.	.	−1	−1	.	−1	−1	.	.	.	−1	.	1	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{9,(12,1)}\}$	.	.	.	.	.	.	−1	.	.	1	.	1	.	.	.	1	1	1	.	−1	1	.	.	.	.
$\{\chi_{9,(013,12)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	.	−1	.	−1	.	1	.	.	1	.	.
$\{\chi_{9,(123,01)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	−1	−1	.	.	.	−1	.	.	1	1	−1	.	.	1	.
$\{\chi_{9,(0123,1)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	.	.	−1	.	.	−1	.	.	.	1	.	−1	1	.	.	.
$\{\chi_{9,(0123,123)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	1	.	−1	−1	1
$\{\chi_{11,(1^3,1^2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	1	1	1	−1	−2	2	.	−1	−1	1
$\{\chi_{11,(1^3,2)}\}$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	−1	−1	−1	.	−1	.	−2	.	−1	.	2	−1	.	1	1	.
$\{\chi_{11,(12,1^2)}\}$	.	.	.	.	−1	1	1	.	−2	−2	−1	−3	−1	.	−1	−1	−1	.	2	1	−2	1	.	1	.
$\{\chi_{11,(12,2)}\}$	.	.	−1	−1	2	−1	−2	.	1	2	1	3	.	.	1	2	1	1	−1	−1	1	.	.	.	.
$\{\chi_{11,(3,1^2)}\}$	.	1	.	1	−1	2	.	−1	−2	−1	−1	−1	−1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{11,(3,2)}\}$	1	−1	.	−1	2	−2	−1	.	1	1	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{17,(1^3,1^2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	1	1	.	.	.	1	.	−2	−1	2	−1	.	−1	1
$\{\chi_{17,(1^3,2)}\}$	.	.	.	.	.	1	.	−1	−2	−1	−1	−1	−1	.	.	.	.	.	2	.	−1	1	.	1	.
$\{\chi_{17,(12,1^2)}\}$	.	.	.	.	−1	1	1	.	−1	−2	−1	−3	.	.	−1	−2	−1	−1	1	2	−2	.	1	1	.
$\{\chi_{17,(12,2)}\}$	.	−1	.	−1	2	−2	−1	.	2	2	1	3	1	.	1	1	1	.	−1	−1	1	.	.	.	.
$\{\chi_{17,(3,1^2)}\}$	.	.	1	1	−1	.	2	.	.	−1	−1	−1	.	−1	.	−2	.	−1	.	1	.	.	.	.	.
$\{\chi_{17,(3,2)}\}$	1	.	−1	−1	2	−1	−2	.	.	1	.	1	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{25,(3,-)}\}$	−1	.	1	1	−1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{25,(03,1)}\}$	.	.	−1	.	.	.	−1	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{25,(013,-)}\}$	.	.	.	−1	1	−1	−1	.	.	1	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{25,(01,3)}\}$	.	−1	.	.	1	−1	.	.	1	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{25,(02,2)}\}$	.	.	.	.	−1	.	1	.	.	−1	.	−1	.	.	.	−1	−1	−1	.	1	.	.	.	.	.
$\{\chi_{25,(12,1)}\}$	.	.	.	.	.	−1	.	.	1	1	.	1	1	.	.	.	1	.	−1	.	1	.	.	.	.
$\{\chi_{25,(013,12)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	−1	−1	.	.	.	−1	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.
$\{\chi_{25,(123,01)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	−1	−1	−1	.	.	.	.	.	.	1	1	−1	.	.	1	.
$\{\chi_{25,(0123,1)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	.	.	−1	−1	.	.	.	1	−1	.	1	.	.
$\{\chi_{25,(0123,123)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	.	1	−1	.	−1	1
$\{\chi_{27,(1^3)}\}$	.	.	.	.	.	−1	.	1	3	2	1	2	2	.	.	.	1	.	−4	−1	3	−2	.	−2	1
$\{\chi_{27,(12)}\}$	.	1	.	1	−3	3	2	.	−3	−4	−2	−6	−1	.	−2	−3	−2	−1	2	3	−3	.	1	1	.
$\{\chi_{27,(3)}\}$	−1	.	2	2	−3	1	4	.	.	−2	−1	−2	.	−1	.	−3	−1	−2	.	1	.	.	.	.	.
$\{\chi_{33,(1^3)}\}$	.	.	.	.	.	.	−1	.	.	2	1	2	.	1	.	3	1	2	−1	−4	3	.	−2	−2	1
$\{\chi_{33,(12)}\}$	.	.	1	1	−3	2	3	.	−3	−4	−2	−6	−1	.	−2	−3	−2	−1	3	2	−3	1	.	1	.
$\{\chi_{33,(3)}\}$	−1	2	.	2	−3	4	1	−1	−3	−2	−1	−2	−2	.	.	.	−1	.	1	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{39,(2,-)}\}$	1	−1	−1	−2	3	−2	−2	.	1	1	1	2	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\{\chi_{39,(02,1)}\}$	.	1	.	.	−1	2	.	−1	−3	−1	.	−2	−2	.	−1	.	−1	.	2	.	−1	1	.	.	.
$\{\chi_{39,(12,0)}\}$	.	.	1	.	−1	.	2	.	.	−1	.	−2	.	−1	−1	−3	−1	−2	.	2	−1	.	1	.	.
$\{\chi_{39,(01,2)}\}$	.	.	.	1	−2	2	2	.	−2	−4	−2	−4	−1	.	.	−2	−2	−1	2	2	−2	.	.	1	.
$\{\chi_{39,(012,12)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	2	.	.	1	1	.	.	−2	−2	3	−1	−1	−2	1
$\{\chi_{54,(1^2,1^2)}\}$	.	.	.	.	1	−1	−1	.	2	3	1	4	1	.	1	2	2	1	−3	−3	4	−1	−1	−2	1
$\{\chi_{54,(1^2,2)}\}$	.	1	.	1	−2	3	1	−1	−4	−3	−2	−4	−2	.	−1	−1	−1	.	3	1	−2	1	.	1	.
$\{\chi_{54,(2,1^2)}\}$	.	.	1	1	−2	1	3	.	−1	−3	−2	−4	.	−1	−1	−4	−1	−2	1	3	−2	.	1	1	.
$\{\chi_{54,(2,2)}\}$	1	−1	−1	−2	4	−3	−3	.	2	3	1	4	1	.	1	2	2	1	−1	−1	1	.	.	.	.
$\{\chi_{58,(1^2)}\}$	.	−1	.	−1	3	−4	−2	1	6	6	3	8	3	.	2	3	3	1	−6	−4	6	−2	−1	−3	1
$\{\chi_{58,(2)}\}$	−1	1	2	3	−6	4	6	.	−3	−6	−3	−8	−1	−1	−2	−6	−3	−3	2	4	−3	.	1	1	.
$\{\chi_{68,(1^2)}\}$	.	.	−1	−1	3	−2	−4	.	3	6	3	8	1	1	2	6	3	3	−4	−6	6	−1	−2	−3	1
$\{\chi_{68,(2)}\}$	−1	2	1	3	−6	6	4	−1	−6	−6	−3	−8	−3	.	−2	−3	−3	−1	4	2	−3	1	.	1	.
$\{\chi_{78}\}$	1	−2	−2	−4	9	−8	−8	1	9	12	6	16	4	1	4	9	6	4	−8	−8	9	−2	−2	−4	1

Tabelle T.A.146: Basisrelationen für B_1 im Fall $e = 2$

A.32 Skalarprodukte projektiver Charaktere

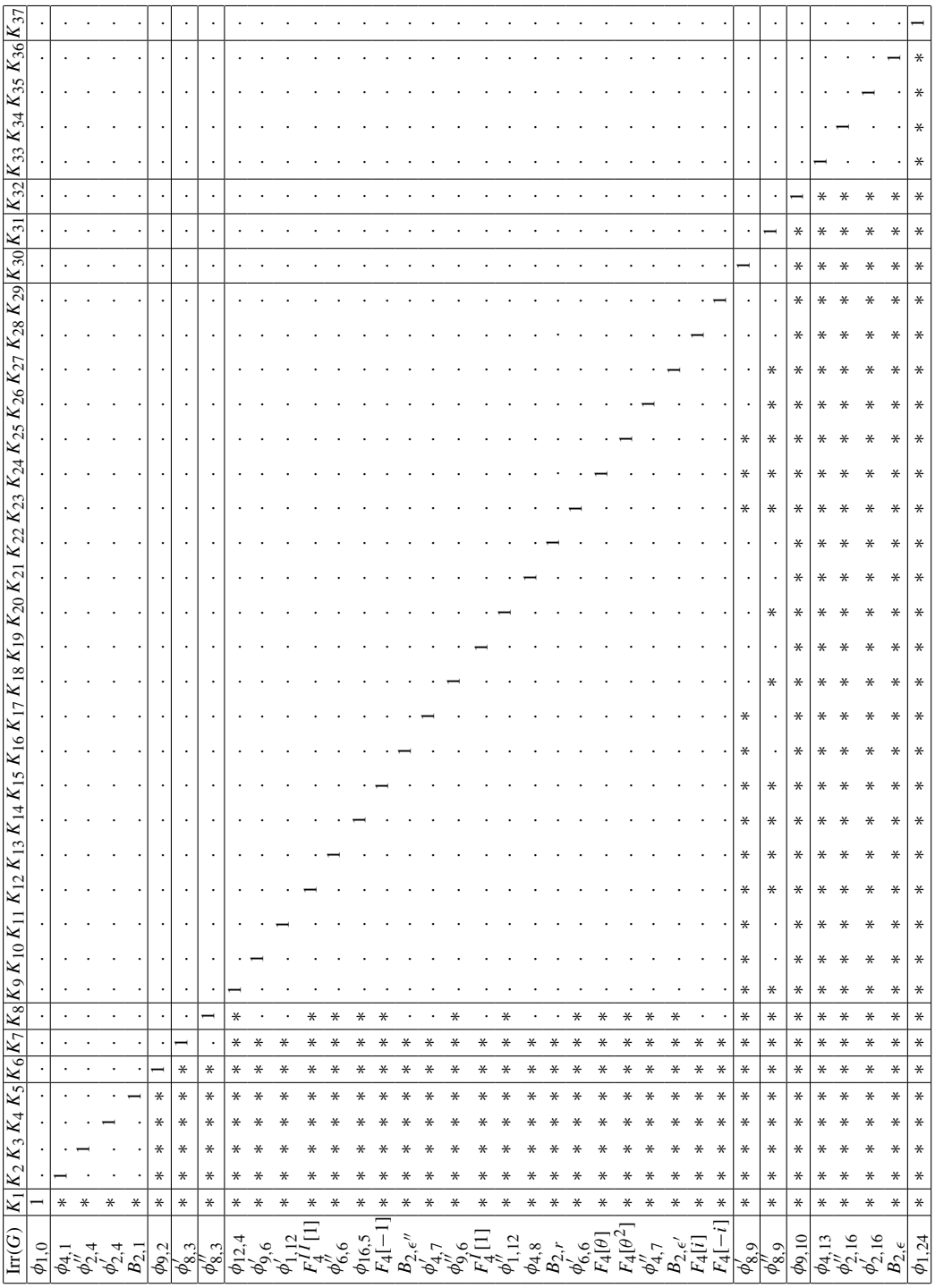


Tabelle T.A.147: Skalarprodukte projektiver Charaktere mit den unipotenten Charakteren

A.33 Harish-Chandra-induzierte Gelfand-Graev-Charaktere

In dieser Tabelle sind die Skalarprodukte der von Leviuntergruppen induzierten Gelfand-Graev-Charaktere mit den unipotenten Charaktere von $F_4(q)$ angegeben. Dabei ist $\Psi_i = R_{L_J}^G(\Gamma_{L_J}))$, wobei J die angegebene Teilmenge von Π ist. Vergleiche dazu Lemma VI.(4.13).

	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6	Ψ_7	Ψ_8	Ψ_9	Ψ_{10}	Ψ_{11}	Ψ_{12}
J	[]	[1]	[3]	[1, 2]	[1, 3]	[2, 3]	[3, 4]	[1, 2, 3]	[1, 2, 4]	[1, 3, 4]	[2, 3, 4]	[1, 2, 3, 4]
$\phi_{1,0}$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi_{4,1}$	4	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{2,4}$	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{2,4}$	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$B_{2,1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi_{9,2}$	9	3	3	.	1	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,3}$	8	4	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{8,3}$	8	2	4	.	1	.	1	.	.	.	.	.
$\phi_{12,4}$	12	6	6	2	3	1	2	.	1	1	.	.
$\phi'_{9,6}$	9	6	3	3	2	1	.	.	1	.	.	.
$\phi'_{1,12}$	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4^{II}[1]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{6,6}$	6	3	3	1	1	1	1	.	.	.	.	.
$\phi_{16,5}$	16	8	8	2	4	2	2	.	1	1	.	.
$F_4[-1]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$B_{2,\epsilon''}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{4,7}$	4	3	1	2	1	.	.	.	1	.	.	.
$\phi''_{9,6}$	9	3	6	.	2	1	3	.	.	1	.	.
$F_4^{I}[1]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{1,12}$	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
$\phi_{4,8}$	4	2	2	.	1	1	.	.	.	.	.	.
$B_{2,r}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{6,6}$	6	3	3	1	2	.	1	.	1	1	.	.
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi''_{4,7}$	4	1	3	.	1	.	2	.	.	1	.	.
$B_{2,\epsilon'}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi'_{8,9}$	8	6	4	4	3	2	1	1	2	1	.	.
$\phi''_{8,9}$	8	4	6	1	3	2	4	.	1	2	1	.
$\phi_{9,10}$	9	6	6	3	4	3	3	1	2	2	1	.
$\phi_{4,13}$	4	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	.
$\phi''_{2,16}$	2	1	2	.	1	1	2	.	.	1	1	.
$\phi'_{2,16}$	2	2	1	2	1	1	.	1	1	.	.	.
$B_{2,\epsilon}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\phi_{1,24}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabelle T.A.148: Harish-Chandra-induzierte Gelfand-Graev-Charaktere

A.34 Kuspidale Brauercharaktere echter Leviuntergruppen

In der folgenden Tabelle sind die kuspidalen Brauercharaktere der echten Leviuntergruppen von $F_4(q)$ aufgelistet. Vergleiche dazu Lemma VI.(5.2).

Typ	e	Anzahl kuspidaler Charaktere	kuspidale Charaktere
A_0	1	1	1
A_0	2	1	1
A_0	3	1	1
A_0	4	1	1
A_0	6	1	1
A_0	8	1	1
A_0	12	1	1
A_1	2	1	St
A_2	3	1	St
$A_1 \times A_1$	2	1	$St \times St$
B_2	1	1	δ
B_2	2	2	St, δ
B_2	3	1	δ
B_2	4	2	St, δ
B_2	6	1	δ
B_2	8	1	δ
B_2	12	1	δ
B_3	2	3	St, c_1, c_2
B_3	6	2	St, c
C_3	2	3	St, c_1, c_2
C_3	6	2	St, c

Tabelle T.A.149: Die kuspidalen Brauercharaktere der echten Leviuntergruppen von $F_4(q)$

A.35 Modulare Harish-Chandra-Serien von $F_4(q)$

In dieser Tabelle geben wir die modularen Harish-Chandra-Serien der Gruppen $F_4(q)$ an. Der Typ gibt den Dynkin-Typ der Leviuntergruppe an. Im Typ c sind die kuspidalen Charaktere zusammengefasst. Die unter Charaktere angegebenen Charaktere sind die gewöhnlichen unipotenten Charaktere, die bezüglich der durch die Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrix gegebenen kanonischen Parametrisierung den unipotenten Brauercharaktere in der entsprechenden Serie entsprechen. Vergleiche Lemma VI.(5.4).

e	Typ	J	θ	Anzahl	Charaktere
1	ps	[]	1	25	$\phi_{1,0}, \phi''_{1,12}, \phi'_{1,12}, \phi_{1,24}, \phi''_{2,4}, \phi'_{2,16}, \phi'_{2,4}, \phi''_{2,16}, \phi_{4,8}, \phi_{9,2}, \phi''_{9,6}, \phi'_{9,6}, \phi_{9,10}, \phi'_{6,6}, \phi''_{6,6}, \phi_{12,4}, \phi_{4,1}, \phi''_{4,7}, \phi'_{4,7}, \phi_{4,13}, \phi''_{8,3}, \phi'_{8,9}, \phi'_{8,3}, \phi''_{8,9}, \phi_{16,5}$
1	B_2	[2, 3]	δ	5	$B_{2,\epsilon}, B_{2,\epsilon'}, B_{2,\epsilon''}, B_{2,1}, B_{2,r}$
1	c			7	$F_4^I[1], F_4^{II}[1], F_4[-1], F_4[\theta], F_4[\theta^2], F_4[i], F_4[-i]$
2	ps	[]	1	8	$\phi_{1,0}, \phi_{4,1}, \phi''_{2,4}, \phi'_{2,4}, \phi_{9,2}, \phi_{12,4}, \phi_{16,5}, \phi_{4,8}$
2	A_1	[1]	St	3	$\phi'_{8,3}, \phi'_{9,6}, \phi'_{4,7}$
2	$\tilde{A}_1$	[3]	St	3	$\phi''_{8,3}, \phi''_{9,6}, \phi''_{4,7}$
2	$A_1 \times \tilde{A}_1$	[1, 3]	$St \times St$	1	$\phi'_{6,6}$
2	B_2	[2, 3]	St	2	$\phi_{4,13}, \phi''_{6,6}$
2	B_2	[2, 3]	δ	2	$B_{2,1}, B_{2,r}$
2	B_3	[1, 2, 3]	St	1	$\phi'_{8,9}$
2	B_3	[1, 2, 3]	c_1	1	$\phi'_{1,12}$
2	B_3	[1, 2, 3]	c_2	1	$B_{2,\epsilon''}$
2	C_3	[2, 3, 4]	St	1	$\phi''_{8,9}$
2	C_3	[2, 3, 4]	c_1	1	$\phi''_{1,12}$
2	C_3	[2, 3, 4]	c_2	1	$B_{2,\epsilon'}$
2	c			12	$\phi_{1,24}, B_{2,\epsilon}, \phi'_{2,16}, \phi''_{2,16}, \phi_{9,10}, F_4^I[1], F_4^{II}[1], F_4[-1], F_4[\theta], F_4[\theta^2], F_4[i], F_4[-i]$

Tabelle T.A.150: Modulare Harish-Chandra-Serien von $F_4(q)$, Teil 1

e	Typ	J	θ	Anzahl	Charaktere
3	ps	[]	1	15	$\phi_{1,0}$, $\phi''_{2,4}$, $\phi'_{2,4}$, $\phi_{4,8}$, $\phi_{9,2}$, $\phi''_{9,6}$, $\phi'_{9,6}$, $\phi_{9,10}$, $\phi'_{6,6}$, $\phi''_{6,6}$, $\phi_{12,4}$, $\phi_{4,1}$, $\phi''_{8,3}$, $\phi'_{8,3}$, $\phi_{16,5}$
3	A_2	[1, 2]	St	4	$\phi'_{1,12}$, $\phi'_{4,7}$, $\phi'_{8,9}$, $\phi'_{2,16}$
3	$\tilde{A}_2$	[3, 4]	St	4	$\phi''_{1,12}$, $\phi''_{4,7}$, $\phi''_{8,9}$, $\phi''_{2,16}$
3	B_2	[2, 3]	δ	5	$B_{2,\epsilon}$, $B_{2,\epsilon'}$, $B_{2,\epsilon''}$, $B_{2,1}$, $B_{2,r}$
3	c			9	$\phi_{1,24}$, $\phi_{4,13}$, $F_4^I[1]$, $F_4^{II}[1]$, $F_4[-1]$, $F_4[\theta]$, $F_4[\theta^2]$, $F_4[i]$, $F_4[-i]$
4	ps	[]	1	19	$\phi_{1,0}$, $\phi''_{1,12}$, $\phi'_{1,12}$, $\phi''_{2,4}$, $\phi'_{2,4}$, $\phi_{9,2}$, $\phi''_{9,6}$, $\phi'_{9,6}$, $\phi'_{6,6}$, $\phi''_{6,6}$, $\phi_{12,4}$, $\phi_{4,1}$, $\phi''_{4,7}$, $\phi'_{4,7}$, $\phi''_{8,3}$, $\phi'_{8,9}$, $\phi'_{8,3}$, $\phi''_{8,9}$, $\phi_{16,5}$
4	B_2	[2, 3]	St	4	$\phi''_{2,16}$, $\phi'_{2,16}$, $\phi_{4,8}$, $\phi_{9,10}$
4	B_2	[2, 3]	δ	4	$B_{2,1}$, $B_{2,r}$, $B_{2,\epsilon'}$, $B_{2,\epsilon''}$
4	c			10	$\phi_{1,24}$, $\phi_{4,13}$, $B_{2,\epsilon}$, $F_4^I[1]$, $F_4^{II}[1]$, $F_4[-1]$, $F_4[\theta]$, $F_4[\theta^2]$, $F_4[i]$, $F_4[-i]$
6	ps	[]	1	20	$\phi_{1,0}$, $\phi''_{1,12}$, $\phi'_{1,12}$, $\phi''_{2,4}$, $\phi'_{2,4}$, $\phi_{4,8}$, $\phi_{9,2}$, $\phi''_{9,6}$, $\phi'_{9,6}$, $\phi_{9,10}$, $\phi'_{6,6}$, $\phi''_{6,6}$, $\phi_{12,4}$, $\phi_{4,1}$, $\phi''_{4,7}$, $\phi'_{4,7}$, $\phi_{4,13}$, $\phi''_{8,3}$, $\phi'_{8,3}$, $\phi_{16,5}$
6	B_2	[2, 3]	δ	2	$B_{2,1}$, $B_{2,r}$
6	B_3	[1, 2, 3]	St	1	$\phi'_{8,9}$
6	B_3	[1, 2, 3]	c	1	$B_{2,\epsilon''}$
6	C_3	[2, 3, 4]	St	1	$\phi''_{8,9}$
6	C_3	[2, 3, 4]	c	1	$B_{2,\epsilon'}$
6	c			11	$\phi_{1,24}$, $\phi''_{2,16}$, $\phi'_{2,16}$, $B_{2,\epsilon}$, $F_4^I[1]$, $F_4^{II}[1]$, $F_4[-1]$, $F_4[\theta]$, $F_4[\theta^2]$, $F_4[i]$, $F_4[-i]$
8	ps	[]	1	24	$\phi_{1,0}$, $\phi''_{1,12}$, $\phi'_{1,12}$, $\phi''_{2,4}$, $\phi'_{2,16}$, $\phi'_{2,4}$, $\phi''_{2,16}$, $\phi_{4,8}$, $\phi_{9,2}$, $\phi''_{9,6}$, $\phi'_{9,6}$, $\phi_{9,10}$, $\phi'_{6,6}$, $\phi''_{6,6}$, $\phi_{12,4}$, $\phi_{4,1}$, $\phi''_{4,7}$, $\phi'_{4,7}$, $\phi_{4,13}$, $\phi''_{8,3}$, $\phi'_{8,9}$, $\phi'_{8,3}$, $\phi''_{8,9}$, $\phi_{16,5}$
8	B_2	[2, 3]	δ	5	$B_{2,\epsilon}$, $B_{2,\epsilon'}$, $B_{2,\epsilon''}$, $B_{2,1}$, $B_{2,r}$
8	c			9	$\phi_{1,24}$, $F_4^I[1]$, $F_4^{II}[1]$, $F_4[-1]$, $F_4[\theta]$, $F_4[\theta^2]$, $F_4[i]$, $F_4[-i]$
12	ps	[]	1	24	$\phi_{1,0}$, $\phi''_{1,12}$, $\phi'_{1,12}$, $\phi''_{2,4}$, $\phi'_{2,16}$, $\phi'_{2,4}$, $\phi''_{2,16}$, $\phi_{4,8}$, $\phi_{9,2}$, $\phi''_{9,6}$, $\phi'_{9,6}$, $\phi_{9,10}$, $\phi'_{6,6}$, $\phi''_{6,6}$, $\phi_{12,4}$, $\phi_{4,1}$, $\phi''_{4,7}$, $\phi'_{4,7}$, $\phi_{4,13}$, $\phi''_{8,3}$, $\phi'_{8,9}$, $\phi'_{8,3}$, $\phi''_{8,9}$, $\phi_{16,5}$
12	B_2	[2, 3]	δ	4	$B_{2,\epsilon'}$, $B_{2,\epsilon''}$, $B_{2,1}$, $B_{2,r}$
12	c			9	$\phi_{1,24}$, $B_{2,\epsilon}$, $F_4^I[1]$, $F_4^{II}[1]$, $F_4[-1]$, $F_4[\theta]$, $F_4[\theta^2]$, $F_4[i]$, $F_4[-i]$

Tabelle T.A.151: Modulare Harish-Chandra-Serien von $F_4(q)$, Teil 2

A.36 Zerlegungszahlen von $F_4(q)$

Im folgenden sind die l-modularen Zerlegungsmatrizen von $F_4(q)$ für Primzahlpotenzen q mit $2,3 \nmid q$ und $l \neq 2,3$ mit $l \nmid q$ angegeben. Vergleiche dazu Lemma VI.(5.4). Dort sind auch Abschätzungen für die noch fehlenden Zerlegungszahlen angegeben.

Nr.	26	27	28	29	30	Anzahl
Serie	B_2 δ	B_2 δ	B_2 δ	B_2 δ	B_2 δ	
$B_2, 1$	1	.	.	.	.	1
$B2, \epsilon''$	.	1	.	.	.	1
$B2, r$	.	.	1	.	.	1
$B2, \epsilon'$	.	.	.	1	.	1
$B2, \epsilon$	.	.	.	.	1	1
$\{\chi_{8,(013,-)}\}$	1	1	1	.	.	$\frac{1}{2}\left(l^d-1\right)$
$\{\chi_{8,(0123,1)}\}$	.	.	1	1	1	$\frac{1}{2}\left(l^d-1\right)$
$\{\chi_{24,(013,-)}\}$	1	.	1	1	.	$\frac{1}{2}\left(l^d-1\right)$
$\{\chi_{24,(0123,1)}\}$	.	1	1	.	1	$\frac{1}{2}\left(l^d-1\right)$
$\{\chi_{38,(012,-)}\}$	1	1	2	1	1	$\frac{1}{8}\left(l^d-1\right)\left(l^d-3\right)$

Tabelle T.A.152: Zerlegungszahlen für zweiten unipotenten Block für $2,3 \neq l|q-1$

Nr.	26	27	28	29	30	Anzahl
Serie	ps	A_1	B_2 δ	$\tilde{A}_1$	B_2 St	
$\chi_{(4,1)}$	1	.	.	.	.	1
$\chi_{(4,7)'}$	1	1	.	.	.	1
B_2, r	.	.	1	.	.	1
$\chi_{(4,7)''}$	1	.	.	1	.	1
$\chi_{(4,13)}$	1	1	2	1	1	1
$\{\chi_{9,(13,0)}\}$	.	1	1	.	.	$\frac{1}{2}\left(l^d-1\right)$
$\{\chi_{9,(012,13)}\}$	.	1	1	.	1	$\frac{1}{2}\left(l^d-1\right)$
$\{\chi_{25,(13,0)}\}$	.	.	1	1	.	$\frac{1}{2}\left(l^d-1\right)$
$\{\chi_{25,(012,13)}\}$	.	.	1	1	1	$\frac{1}{2}\left(l^d-1\right)$
$\{\chi_{39,(012,-)}\}$	.	.	.	.	1	$\frac{1}{8}\left(l^d-1\right)\left(l^d-3\right)$

Tabelle T.A.153: Zerlegungszahlen für zweiten unipotenten Block für $2,3 \neq l|q+1$

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	Anzahl
Serie	*ps*	*ps*	*ps*	*ps*	*ps*	*ps*	*ps*	*ps*	*ps*	*ps*	*ps*	*ps*	*ps*	*ps*	*ps*	*ps*	*ps*	*ps*	*ps*	*ps*	*ps*	*ps*	*ps*	*ps*	*ps*	
$\chi_{(1,0)}$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(4,1)}$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(2,4)''}$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(2,4)'}$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(9,2)}$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(8,3)'}$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(8,3)''}$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(12,4)}$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(9,6)'}$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(1,12)'}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(6,6)''}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(16,5)}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(4,7)'}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(9,6)''}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(1,12)''}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(4,8)}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(6,6')}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(4,7)''}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(8,9)'}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(8,9)''}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(9,10)}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1
$\chi_{(4,13)}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1
$\chi_{(2,16)''}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1
$\chi_{(2,16)'}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1
$\chi_{(1,24)}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1

Tabelle T.A.154: Zerlegungszahlen für den Hauptblock für $2, 3 \neq l|q-1$, Teil 1

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	Anzahl
$\{\chi_{8,(3,-)}\}$	1	1	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{8,(03,1)}\}$	.	1	.	.	1	1	1	1	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{8,(13,0)}\}$	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{8,(01,3)}\}$	.	.	.	1	.	1	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{8,(02,2)}\}$	.	.	.	.	1	1	.	1	1	.	.	1	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{8,(12,1)}\}$	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	1	.	.	1	1	.	1	1	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{8,(013,12)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1	.	1	.	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{8,(123,01)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	.	1	.	.	1	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{8,(012,13)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.	1	.	.	1	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{8,(0123,123)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	.	1	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{10,(1^3,1^2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	1	1	1	2	2	1	1	.	1	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{10,(1^3,2)}\}$	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	1	.	2	1	.	.	1	.	2	1	1	1	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{10,(12,1^2)}\}$	.	.	.	.	1	1	1	2	2	.	1	3	1	1	.	1	1	.	2	1	2	1	.	1	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{10,(12,2)}\}$	.	1	1	.	2	1	2	2	1	.	1	3	.	2	.	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{10,(3,1^2)}\}$	.	1	.	1	1	2	.	1	2	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{10,(3,2)}\}$	1	1	.	1	2	2	1	1	1	.	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{16,(1^3,1^2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	1	.	.	.	1	.	2	1	2	1	.	1	1	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{16,(1^3,2)}\}$	.	.	.	.	.	1	.	1	2	1	1	1	1	.	.	.	.	.	2	.	1	1	.	1	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{16,(12,1^2)}\}$	.	.	.	.	1	1	1	2	1	.	1	3	.	2	.	1	1	1	1	2	2	1	1	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{16,(12,2)}\}$	.	1	.	1	2	2	1	2	2	.	1	3	1	1	.	1	1	.	1	1	1	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{16,(3,1^2)}\}$	.	1	1	.	1	.	2	1	.	.	1	1	.	2	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{16,(3,2)}\}$	1	1	1	.	2	1	2	1	.	.	.	1	.	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{24,(3,-)}\}$	1	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{24,(03,1)}\}$	.	1	.	.	1	1	1	1	.	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{24,(13,0)}\}$	.	.	.	1	1	1	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{24,(01,3)}\}$	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{24,(02,2)}\}$	.	.	.	.	1	.	1	1	.	.	.	1	.	1	.	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{24,(12,1)}\}$	.	.	.	.	.	1	.	1	1	.	.	1	1	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{24,(013,12)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{24,(123,01)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{24,(012,13)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	1	1	.	1	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{24,(0123,123)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	.	1	1	$\frac{1}{2}(l^d-1)$

Tabelle T.A.155: Zerlegungszahlen für den Hauptblock für 2, $3 \neq l|q-1$, Teil 2

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	Anzahl
$\{\chi_{26,(1^3)}\}$	.	.	.	.	.	.	1	.	2	3	1	1	2	2	.	.	.	1	.	4	1	3	2	.	2	1	$\frac{1}{12}(l^d-1)(l^d-5)$
$\{\chi_{26,(12)}\}$	.	1	.	1	.	3	3	2	4	3	.	2	6	1	3	.	2	2	1	2	3	3	1	1	.	.	$\frac{1}{12}(l^d-1)(l^d-5)$
$\{\chi_{26,(3)}\}$	1	2	2	.	3	1	4	2	.	.	1	2	.	3	1	.	1	2	.	1	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{12}(l^d-1)(l^d-5)$
$\{\chi_{32,(1^3)}\}$	.	.	.	.	.	.	1	2	.	.	1	2	.	3	1	.	1	2	1	4	3	2	2	.	1	$\frac{1}{12}(l^d-1)(l^d-5)$
$\{\chi_{32,(12)}\}$	.	1	1	.	3	2	3	4	3	.	2	6	1	3	.	2	2	1	3	2	3	1	.	1	.	.	$\frac{1}{12}(l^d-1)(l^d-5)$
$\{\chi_{32,(3)}\}$	1	2	.	2	3	4	1	2	3	1	1	2	2	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{12}(l^d-1)(l^d-5)$
$\{\chi_{38,(2,-)}\}$	1	2	1	1	3	2	2	1	1	.	1	2	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{8}(l^d-1)(l^d-3)$
$\{\chi_{38,(02,1)}\}$	.	1	.	.	2	2	2	4	2	.	2	4	1	2	.	.	2	1	2	2	2	1	.	.	.	.	$\frac{1}{8}(l^d-1)(l^d-3)$
$\{\chi_{38,(12,0)}\}$	.	.	1	.	1	.	2	1	.	.	.	2	.	3	1	1	1	2	.	2	1	.	1	.	.	.	$\frac{1}{8}(l^d-1)(l^d-3)$
$\{\chi_{38,(01,2)}\}$	.	.	.	1	1	2	.	1	3	1	.	2	2	.	.	1	1	.	2	.	1	.	.	1	.	.	$\frac{1}{8}(l^d-1)(l^d-3)$
$\{\chi_{38,(012,12)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	1	2	.	1	.	1	.	.	2	2	3	2	1	1	1	1	$\frac{1}{8}(l^d-1)(l^d-3)$
$\{\chi_{53,(1^2,1^2)}\}$	.	.	.	.	.	1	1	1	3	2	.	1	4	1	2	.	1	2	1	3	3	4	2	1	1	1	$\frac{1}{4}(l^d-1)(l^d-5)$
$\{\chi_{53,(1^2,2)}\}$	.	1	.	1	2	3	1	3	4	1	2	4	2	1	.	1	1	.	3	1	2	1	.	1	.	.	$\frac{1}{4}(l^d-1)(l^d-5)$
$\{\chi_{53,(2,1^2)}\}$	.	1	1	.	2	1	3	3	1	.	2	4	.	4	1	1	1	2	1	3	2	1	1	.	.	.	$\frac{1}{4}(l^d-1)(l^d-5)$
$\{\chi_{53,(2,2)}\}$	1	2	1	1	4	3	3	3	2	.	1	4	1	2	.	1	2	1	1	1	1	.	.	.	.	.	$\frac{1}{4}(l^d-1)(l^d-5)$
$\{\chi_{57,(1^2)}\}$	.	1	.	1	3	4	2	6	6	1	3	8	3	3	.	2	3	1	6	4	6	3	1	2	1	$\frac{1}{48}(l^d-1)(l^d-5)(l^d-7)$
$\{\chi_{57,(2)}\}$	1	3	2	1	6	4	6	6	3	.	3	8	1	6	1	2	3	3	2	4	3	1	1	.	.	$\frac{1}{48}(l^d-1)(l^d-5)(l^d-7)$
$\{\chi_{67,(1^2)}\}$	.	1	1	.	3	2	4	6	3	.	3	8	1	6	1	2	3	3	4	6	6	3	2	1	1	$\frac{1}{48}(l^d-1)(l^d-5)(l^d-7)$
$\{\chi_{67,(2)}\}$	1	3	1	2	6	6	4	6	6	1	3	8	3	3	.	2	3	1	4	2	3	1	.	1	.	$\frac{1}{48}(l^d-1)(l^d-5)(l^d-7)$
$\{\chi_{77}\}$	1	4	2	2	9	8	8	12	9	1	6	16	4	9	1	4	6	4	8	8	9	4	2	2	1	$\frac{1}{1152}(l^d-1)(l^d-5)(l^d-7)(l^d-11)$

Tabelle T.A.156: Zerlegungszahlen für den Hauptblock für 2, $3 \neq l|q-1$, Teil 3

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	Anzahl
Serie	ps	ps	ps	B_2	ps	A_1	$\tilde{A}_1$	A_1	B_3	c	B_2	c	B_3	$\tilde{A}_1$	c	C_3	$A_1 \times \tilde{A}_1$	C_3	B_3	C_3	c	c	c	c	c	
				η					c_1		St		c_2			c_1		c_2	St	St						
$\phi_{1,0}$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\phi''_{2,4}$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\phi'_{2,4}$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$B_{2,1}$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\phi_{9,2}$	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\phi'_{8,3}$	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\phi''_{8,3}$	1	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\phi'_{9,6}$	.	1	1	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\phi'_{1,12}$	1	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$F_4^{II}[1]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\phi''_{6,6}$	1	.	.	2	1	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$F_4[-1]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$B_{2,\epsilon''}$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\phi''_{9,6}$	.	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$F_4^I[1]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\phi''_{1,12}$	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\phi'_{6,6}$	1	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$B_{2,\epsilon'}$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1
$\phi'_{8,9}$	1	1	.	2	1	2	1	1	$a+1$	*	1	*	b	.	*	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1
$\phi''_{8,9}$	1	.	1	2	1	1	2	.	.	*	1	*	.	1	*	$c+1$	1	d	.	1	.	.	.	.	.	1
$\phi_{9,10}$	.	1	1	2	1	1	1	1	a	*	1	*	b	1	*	c	1	d	1	1	1	.	.	.	.	1
$\phi''_{2,16}$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	*	.	*	.	1	*	$c+1$	.	d	.	1	1	1	.	.	.	1
$\phi'_{2,16}$	.	1	.	.	.	.	.	1	$a+1$	*	.	*	b	.	*	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	1
$B_{2,\epsilon}$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	*	.	*	1	.	*	.	.	1	.	.	f	.	.	1	.	1
$\phi_{1,24}$	1	.	.	2	.	1	1	.	$a+1$	*	1	*	b	.	*	$c+1$	1	d	1	1	g	h	i	j	1	1

Tabelle T.A.157: Zerlegungszahlen für den Hauptblock für 2, $3 \neq l|q+1$, Teil 1

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	Anzahl
$\{\chi_{9,(3,-)}\}$	.	.	.	1	.	1	.	.	.	*	.	*	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{9,(03,1)}\}$	.	.	.	1	.	1	.	1	1	*	.	*	1	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{9,(013,-)}\}$	.	.	.	1	.	1	.	.	1	*	1	*	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{9,(01,3)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	*	.	.	*	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{9,(02,2)}\}$	.	.	.	1	.	1	.	1	a	*	1	*	$b-1$	.	*	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{9,(12,1)}\}$	.	.	.	1	.	1	.	1	a	*	.	*	b	.	*	.	1	1	1	.	1	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{9,(013,12)}\}$	.	.	.	1	.	1	.	1	$a+1$	*	1	*	b	.	*	c	1	$d-1$	1	1	1	.	1	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{9,(123,01)}\}$	.	.	.	1	.	1	.	.	1	*	.	*	1	.	*	.	1	1	.	.	$f-1$	.	.	1	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{9,(0123,1)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	*	.	.	*	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{9,(0123,123)}\}$	.	.	.	1	.	1	.	.	a	*	1	*	$b-1$	.	*	c	1	$d-1$	1	1	$g-f$	h	$i-1$	$j-1$	1	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{11,(1^3,1^2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$a-1$	*	.	*	$b-1$	.	*	c	1	d	1	1	$g-f+1$	h	$i-1$	$j-1$	1	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{11,(1^3,2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	*	.	*	1	.	*	c	1	d	.	1	f	.	1	1	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{11,(12,1^2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	*	.	.	*	1	.	1	.	.	$f-1$	1	.	1	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{11,(12,2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	*	.	.	*	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{11,(3,1^2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$a-1$	*	.	*	$b-1$	.	*	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{11,(3,2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	*	.	*	1	.	*	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{17,(1^3,1^2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	a	*	.	*	b	.	*	$c-1$	1	$d-1$	1	1	$g-f+1$	$h-1$	i	$j-1$	1	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{17,(1^3,2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	a	*	.	*	b	.	*	1	1	1	1	.	f	1	.	1	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{17,(12,1^2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	*	.	*	1	.	*	.	.	.	.	.	$f-1$	.	1	1	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{17,(12,2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	*	.	*	1	.	*	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{17,(3,1^2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	*	.	.	*	$c-1$	1	$d-1$	.	1	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{17,(3,2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	*	.	.	*	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{25,(3,-)}\}$	.	.	.	1	.	.	1	.	.	*	.	*	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{25,(03,1)}\}$	.	.	.	1	.	.	1	.	.	*	.	*	.	1	*	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{25,(013,-)}\}$	.	.	.	1	.	.	1	.	.	*	1	*	.	.	*	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{25,(01,3)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	*	.	*	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{25,(02,2)}\}$	.	.	.	1	.	.	1	.	.	*	1	*	.	1	*	c	.	$d-1$	.	1	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{25,(12,1)}\}$	.	.	.	1	.	.	1	.	.	*	.	*	1	1	*	c	1	d	.	1	1	.	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{25,(013,12)}\}$	.	.	.	1	.	.	1	.	a	*	1	*	$b-1$	1	*	$c+1$	1	d	1	1	1	1	.	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{25,(123,01)}\}$	.	.	.	1	.	.	1	.	.	*	.	*	1	.	*	1	1	1	.	.	$f-1$	.	.	1	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{25,(0123,1)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	*	.	*	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	$\frac{1}{2}(l^d-1)$
$\{\chi_{25,(0123,123)}\}$	.	.	.	1	.	.	1	.	a	*	1	*	$b-1$	.	*	c	1	$d-1$	1	1	$g-f$	$h-1$	i	$j-1$	1	$\frac{1}{2}(l^d-1)$

Tabelle T.A.158: Zerlegungszahlen für den Hauptblock für $2,\ 3 \neq l|q+1$, Teil 2

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	Anzahl
$\{\chi_{27,(1^3)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	*	.	*	$c-2$	.	$d-2$	.	1	$g-2f+1$	$h-2$	i	$j-2$	1	$\frac{1}{12}(l^d-1)(l^d-5)$
$\{\chi_{27,(12)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	*	.	*	.	.	.	.	.	$f-2$	.	1	1	.	$\frac{1}{12}(l^d-1)(l^d-5)$
$\{\chi_{27,(3)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	*	.	*	$c-2$	.	$d-2$	.	1	.	.	.	.	.	$\frac{1}{12}(l^d-1)(l^d-5)$
$\{\chi_{33,(1^3)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$a-2$	*	.	*	$b-2$	.	*	.	.	.	1	.	$g-2f+1$	h	$i-2$	$j-2$	1	$\frac{1}{12}(l^d-1)(l^d-5)$
$\{\chi_{33,(12)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	*	.	*	.	.	.	.	.	$f-2$	1	.	1	.	$\frac{1}{12}(l^d-1)(l^d-5)$
$\{\chi_{33,(3)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$a-2$	*	.	*	$b-2$	.	*	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{12}(l^d-1)(l^d-5)$
$\{\chi_{39,(2,-)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	*	1	*	.	.	*	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{8}(l^d-1)(l^d-3)$
$\{\chi_{39,(02,1)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$a-1$	*	1	*	$b-2$	.	*	1	.	.	1	.	.	1	.	.	.	$\frac{1}{8}(l^d-1)(l^d-3)$
$\{\chi_{39,(12,0)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	*	1	*	.	.	*	$c-1$	.	$d-2$	.	1	.	.	1	.	.	$\frac{1}{8}(l^d-1)(l^d-3)$
$\{\chi_{39,(01,2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	*	.	.	*	.	.	.	.	.	$f-2$	.	.	1	.	$\frac{1}{8}(l^d-1)(l^d-3)$
$\{\chi_{39,(012,12)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$a-1$	*	1	*	$b-2$	.	*	$c-1$	.	$d-2$	1	1	$g-2f+1$	$h-1$	$i-1$	$j-2$	1	$\frac{1}{8}(l^d-1)(l^d-3)$
$\{\chi_{54,(1^2,1^2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$a-1$	*	.	*	$b-1$	.	*	$c-1$	1	$d-1$	1	1	$g-2f+2$	$h-1$	$i-1$	$j-2$	1	$\frac{1}{4}(l^d-1)(l^d-5)$
$\{\chi_{54,(1^2,2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$a-1$	*	.	*	$b-1$	.	*	1	1	1	1	.	$f-1$	1	.	1	.	$\frac{1}{4}(l^d-1)(l^d-5)$
$\{\chi_{54,(2,1^2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	*	.	*	1	.	*	$c-1$	1	$d-1$	.	1	$f-1$	.	1	1	.	$\frac{1}{4}(l^d-1)(l^d-5)$
$\{\chi_{54,(2,2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	*	.	*	1	.	*	1	1	1	.	.	1	.	.	.	.	$\frac{1}{4}(l^d-1)(l^d-5)$
$\{\chi_{58,(1^2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	*	.	.	*	$c-2$	.	$d-2$	.	1	$g-3f+3$	$h-2$	$i-1$	$j-3$	1	$\frac{1}{48}(l^d-1)(l^d-5)(l^d-7)$
$\{\chi_{58,(2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	*	.	.	*	$c-2$	.	$d-2$	.	1	$f-2$	.	1	1	.	$\frac{1}{48}(l^d-1)(l^d-5)(l^d-7)$
$\{\chi_{68,(1^2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$a-2$	*	.	*	$b-2$	.	*	.	.	.	1	.	$g-3f+3$	$h-1$	$i-2$	$j-3$	1	$\frac{1}{48}(l^d-1)(l^d-5)(l^d-7)$
$\{\chi_{68,(2)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$a-2$	*	.	*	$b-2$	.	*	.	.	.	1	.	$f-2$	1	.	1	.	$\frac{1}{48}(l^d-1)(l^d-5)(l^d-7)$
$\{\chi_{78}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	.	.	*	.	.	.	.	.	$g-4f+5$	$h-2$	$i-2$	$j-4$	1	$\frac{1}{1152}(l^d-1)(l^d-5)(l^d-7)(l^d-11)$

Tabelle T.A.159: Zerlegungszahlen für den Hauptblock für 2, $3 \neq l|q+1$, Teil 3

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	Anzahl
Serie	ps	ps	ps	ps	ps	ps	A_2	c	ps	A_2	$\tilde{A}_2$	ps	c	c	$\tilde{A}_2$	A_2	$\tilde{A}_2$	c	$\tilde{A}_2$	A_2	c	
$\chi_{(1,0)}$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(4,1)}$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(2,4)''}$	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(2,4)'}$	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(8,3)'}$	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(8,3)''}$	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(1,12)'}$	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$F_4^{II}[1]$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(16,5)}$	.	1	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(4,7)'}$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(1,12)''}$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(4,8)}$	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(4,7)''}$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(8,9)'}$	.	.	.	.	1	.	.	.	1	1	.	.	$*$	$*$	.	1	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(8,9)''}$	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	$*$	$*$	1	.	1	.	.	.	.	1
$\chi_{(4,13)}$	.	.	.	.	.	.	.	a	1	.	.	.	$*$	$*$	.	1	1	1	.	.	.	1
$\chi_{(2,16)''}$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	$*$	$*$	.	.	.	.	1	.	.	1
$\chi_{(2,16)'}$	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	1	$*$	$*$	.	.	.	.	.	1	.	1
$\chi_{(1,24)}$	.	.	.	.	.	.	.	b	.	.	.	1	$*$	$*$	.	.	.	c	1	1	1	1
$\{\chi_{30,(3)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	$1+b-a$	.	.	.	.	$*$	$*$	1	.	.	$c-1$	1	.	1	$\frac{1}{6}(l^d-1)$
$\{\chi_{30,(12)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	$a-1$	.	.	1	.	$*$	$*$	1	.	1	1	1	.	.	$\frac{1}{6}(l^d-1)$
$\{\chi_{30,(1^3)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	$*$	$*$	.	.	1	.	.	.	.	$\frac{1}{6}(l^d-1)$
$\{\chi_{36,(3)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	$1+b-a$	.	1	.	.	$*$	$*$	.	.	.	$c-1$	.	1	1	$\frac{1}{6}(l^d-1)$
$\{\chi_{36,(12)}\}$	.	.	.	.	.	.	1	$a-1$	.	1	.	.	$*$	$*$	.	1	.	1	.	1	.	$\frac{1}{6}(l^d-1)$
$\{\chi_{36,(1^3)}\}$	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	$*$	$*$	.	1	.	.	.	.	.	$\frac{1}{6}(l^d-1)$
$\{\chi_{94}\}$	.	.	.	.	.	.	.	$3+b-2a$	.	.	.	.	$*$	$*$	.	.	.	$c-2$	.	.	1	$\frac{1}{72}(l^d-1)(l^d-7)$

Tabelle T.A.160: Zerlegungszahlen für den Hauptblock für $3 \neq l|q^2+q+1$

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Anzahl
Serie	ps	ps	B_2 δ	ps	ps	c	c	B_2 St	B_2 δ	ps	c	c	B_2 St	c	c	c	1
$\chi_{(1,0)}$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(4,1)}$ $B_2, 1$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(9,2)}$	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(12,4)}$	.	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$F_4^{II}[1]$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$F_4^{I}[1]$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(4,8)}$	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1
B_2, r	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(6,6)'}$	1	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1
$F_4[i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1
$F_4[-i]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1
$\chi_{(9,10)}$	.	.	.	1	1	.	.	1	.	1	*	*	1	.	.	.	1
$\chi_{(4,13)}$	.	.	.	.	1	a	.	.	.	.	*	*	1	1	.	.	1
B_2, ϵ	.	.	.	.	.	.	c	.	1	.	*	*	.	.	1	.	1
$\chi_{(1,24)}$	.	.	.	.	.	b	d	.	.	1	*	*	1	f	g	1	1
$\{\chi_{42,(2,-)}\}$	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	1	1	.	.	.	.	$\frac{1}{4}\left(l^d-1\right)$
$\{\chi_{42,(02,1)}\}$	.	.	1	.	.	.	$c-1$	1	1	.	*	*	1	.	1	.	$\frac{1}{4}\left(l^d-1\right)$
$\{\chi_{42,(012,-)}\}$	.	.	.	.	.	$a+1$	.	.	.	.	*	*	.	1	.	.	$\frac{1}{4}\left(l^d-1\right)$
$\{\chi_{42,(012,12)}\}$	.	.	1	.	.	$a+b$	$c+d-1$	.	.	.	*	*	1	$f+1$	$g-1$	1	$\frac{1}{4}\left(l^d-1\right)$
$\{\chi_{98}\}$	.	.	.	.	.	$1+2a+b$	$-2c+d+3$	.	.	.	*	*	.	$f+2$	$g-2$	1	$\frac{1}{96}\left(l^d-1\right)\left(l^d-5\right)$

Tabelle T.A.161: Zerlegungszahlen für den Hauptblock für $2, 3 \neq l | q^2+1$

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	Anzahl
Serie	ps	ps	ps	B_2	ps	ps	ps	ps	c	B_3	ps	c	c	c	C_3	B_3	C_3	c	c	c	c	
				δ						c					c	St	St					
$\chi_{(1,0)}$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(2,4)''}$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(2,4)'}$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$B_2, 1$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(8,3)'}$	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(8,3)''}$	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(12,4)}$	1	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(9,6)'}$	.	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$F_4[-1]$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
B_2, ϵ''	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(9,6)''}$	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$F_4^1[1]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$F_4[\theta]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$F_4[\theta^2]$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1
B_2, ϵ'	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(8,9)'}$	.	.	.	.	1	.	1	1	.	.	.	.	*	*	.	1	.	.	.	.	.	1
$\chi_{(8,9)''}$	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	*	*	.	.	1	.	.	.	.	1
$\chi_{(2,16)''}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	*	*	.	.	1	1	.	.	.	1
$\chi_{(2,16)'}$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	*	*	.	1	.	.	1	.	.	1
B_2, ϵ	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	*	*	1	.	.	.	.	1	.	1
$\chi_{(1,24)}$	.	.	.	.	.	.	1	.	a	.	.	b	*	*	.	1	1	c	d	f	1	1
$\{\chi_{31,(3)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$a-1$	.	.	b	*	*	1	.	1	$c+1$	d	$f+1$	1	$\frac{1}{6}(l^d-1)$
$\{\chi_{31,(12)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	*	*	.	.	.	.	1	1	.	$\frac{1}{6}(l^d-1)$
$\{\chi_{31,(1^3)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	*	*	1	.	1	.	.	.	.	$\frac{1}{6}(l^d-1)$
$\{\chi_{37,(3)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$a-1$	1	.	b	*	*	.	1	.	c	$d+1$	$f+1$	1	$\frac{1}{6}(l^d-1)$
$\{\chi_{37,(12)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	*	*	.	.	.	1	.	1	.	$\frac{1}{6}(l^d-1)$
$\{\chi_{37,(1^3)}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	*	*	.	1	.	.	.	.	.	$\frac{1}{6}(l^d-1)$
$\{\chi_{101}\}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$a-2$	.	.	$b+1$	*	*	.	.	.	$c+1$	$d+1$	$f+2$	1	$\frac{1}{72}(l^d-1)(l^d-7)$

Tabelle T.A.162: Zerlegungszahlen für den Hauptblock für $3 \neq l | q^2-q+1$

Literaturverzeichnis

[Ack02] Bernd Ackermann. A short note on Howlett-Lehrer theory. *Arch. Math. (Basel)*, 79(3):161–166, 2002. 162

[AH] Jianbei An und Gerhard Hiß. Restricting the Steinberg Character in finite Symplectic Groups. *J. Group Theory*. erscheint demnächst. 165, 174, 175

[AL94] William W. Adams und Philippe Loustaunau. *An introduction to Gröbner bases*, Band 3 aus *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994. 50, 51

[Alp80] Jonathan L. Alperin. Local representation theory. In *The Santa Cruz Conference on Finite Groups (Univ. California, Santa Cruz, Calif., 1979)*, Band 37 aus *Proc. Sympos. Pure Math.*, Seiten 369–375. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980. 149

[Alp86] Jonathan L. Alperin. *Local representation theory*, Band 11 aus *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. Modular representations as an introduction to the local representation theory of finite groups. 152

[BC97] Wieb W. Bosma und John J. Cannon. *Handbook of Magma Functions*. School of Mathematics and Statistics, University of Sydney, Sydney, 1997. 26, 27, 39, 48, 53

[BM] Cédric Bonnafé und Jean Michel. The Mackey formula for Lusztig induction. in Vorbereitung. 140

[BM89] Michel Broué und Jean Michel. Blocs et séries de Lusztig dans un groupe réductif fini. *J. Reine Angew. Math.*, 395:56–67, 1989. 154

[BMM93] Michel Broué, Gunter Malle und Jean Michel. Generic blocks of finite reductive groups. *Astérisque*, (212):7–92, 1993. Représentations unipotentes génériques et blocs des groupes réductifs finis. 132, 138, 139, 140, 154, 155, 156, 158

[Bon98] Cédric Bonnafé. Formule de Mackey pour q grand. *J. Algebra*, 201(1):207–232, 1998. 140

[Bou02] Nicolas Bourbaki. *Lie groups and Lie algebras. Chapters 4–6*. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 2002. Translated from the 1968 French original by Andrew Pressley. 59, 60, 61

[BT65] Armand Borel und Jacques Tits. Groupes réductifs. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (27):55–150, 1965. 73

[Car72] Roger W. Carter. *Simple groups of Lie type*. John Wiley & Sons, London-New York-Sydney, 1972. Pure and Applied Mathematics, Vol. 28. 13, 20, 25, 26, 29, 35, 60, 61, 75, 76

[Car78] Roger W. Carter. Centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 37(3):491–507, 1978. 15, 67, 77, 78, 80, 81

[Car85] Roger W. Carter. *Finite groups of Lie type*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, 1985. Conjugacy classes and complex characters, A Wiley-Interscience Publication. 19, 21, 30, 31, 32, 48, 49, 59, 62, 68, 71, 72, 75, 86, 117, 118, 119, 120, 122, 123, 124, 128, 129, 130, 136, 139, 155, 161, 164, 245, 305

[CCN+85] John H. Conway, Robert T. Curtis, Simon P. Norton, Richard A. Parker und Robert A. Wilson. *Atlas of finite groups*. Oxford University Press, Eynsham, 1985. Maximal subgroups and ordinary characters for simple groups, With computational assistance from J. G. Thackray. 12, 13

[Che55] Claude Chevalley. Sur certains groupes simples. *Tôhoku Math. J. (2)*, 7:14–66, 1955. 63, 64

[Che58] Claude Chevalley. *Séminaire C. Chevalley, 1956–1958. Classification des groupes de Lie algébriques*, Band 1. Secrétariat mathématique, 11 rue Pierre Curie, Paris, 1958. 64

[CLO97] David Cox, John Little und Donal O'Shea. *Ideals, varieties, and algorithms*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2. Auflage, 1997. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. 42

[CMT04] Arjeh M. Cohen, Scott H. Murray und Don E. Taylor. Computing in groups of Lie type. *Math. Comp.*, 73(247):1477–1498 (electronic), 2004. 39

[Cox73] Harold Scott Macdonald Coxeter. *Regular polytopes*. Dover Publications Inc., New York, 3. Auflage, 1973. 61

[CR87] Charles W. Curtis und Irving Reiner. *Methods of representation theory. Vol. II*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, 1987. With applications to finite groups and orders, A Wiley-Interscience Publication. 164

[CR90] Charles W. Curtis und Irving Reiner. *Methods of representation theory. Vol. I*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1990. With applications to finite groups and orders, Reprint of the 1981 original, A Wiley-Interscience Publication. 119, 132, 140, 141

[DD93] Richard Dipper und Jie Du. Harish-Chandra vertices. *J. Reine Angew. Math.*, 437:101–130, 1993. 95, 120, 165

[Der84] Dimitrios I. Deriziotis. *Conjugacy classes and centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type*, Band 11 aus *Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematik der Universität GH Essen [Lecture Notes in Mathematics at the University of Essen]*. Universität Essen Fachbereich Mathematik, Essen, 1984. 79

[DGHM99] Richard Dipper, Meinolf Geck, Gerhard Hiß und Gunter Malle. Representations of Hecke algebras and finite groups of Lie type. In *Algorithmic algebra and number theory (Heidelberg, 1997)*, Seiten 331–378. Springer, Berlin, 1999. 150

[Dip90] Richard Dipper. On quotients of Hom-functors and representations of finite general linear groups. I. *J. Algebra*, 130(1):235–259, 1990. 163

[DL76] Pierre Deligne und George Lusztig. Representations of reductive groups over finite fields. *Ann. of Math. (2)*, 103(1):103–161, 1976. 117, 120, 121

[DM91] François Digne und Jean Michel. *Representations of finite groups of Lie type*, Band 21 aus *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991. 20, 21, 39, 48, 69, 70, 72, 73, 75, 108, 119, 120, 122, 123, 124, 125

[Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra*, Band 150 aus *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry. 52

[Fau99] Jean-Charles Faugère. A new efficient algorithm for computing Gröbner bases (F_4). *J. Pure Appl. Algebra*, 139(1-3):61–88, 1999. Effective methods in algebraic geometry (Saint-Malo, 1998). 53

[FS84] Paul Fong und Bhama Srinivasan. Brauer trees in GL(n, q). *Math. Z.*, 187(1):81–88, 1984. 164, 165

[FS90] Paul Fong und Bhama Srinivasan. Brauer trees in classical groups. *J. Algebra*, 131(1):179–225, 1990. 164, 165

[Gec91] Meinolf Geck. Generalized Gel′fand-Graev characters for Steinberg's triality groups and their applications. *Comm. Algebra*, 19(12):3249–3269, 1991. 40, 107, 108, 109, 114

[Gec98] Meinolf Geck. Finite groups of Lie type. In *Representations of reductive groups*, Publ. Newton Inst., Seiten 63–83. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998. 94, 120

[Gec99] Meinolf Geck. Character sheaves and generalized Gelfand-Graev characters. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 78(1):139–166, 1999. 109

[GH91] Meinolf Geck und Gerhard Hiß. Basic sets of Brauer characters of finite groups of Lie type. *J. Reine Angew. Math.*, 418:173–188, 1991. 155

[GH97] Meinolf Geck und Gerhard Hiß. Modular representations of finite groups of Lie type in non-defining characteristic. In *Finite reductive groups (Luminy, 1994)*, Band 141 aus *Progr. Math.*, Seiten 195–249. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997. 149, 159, 160, 161, 163, 168, 175

[GHL+96] Meinolf Geck, Gerhard Hiß, Frank Lübeck, Gunter Malle und Götz Pfeiffer. CHEVIE—a system for computing and processing generic character tables. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.*, 7(3):175–210, 1996. Computational methods in Lie theory (Essen, 1994). 14, 26, 27, 32, 35, 39, 48, 58, 60, 61, 67, 85, 92, 94, 131

[GHM96] Meinolf Geck, Gerhard Hiß und Gunter Malle. Towards a classification of the irreducible representations in non-describing characteristic of a finite group of Lie type. *Math. Z.*, 221(3):353–386, 1996. 161, 162, 169

[GL91] Meinolf Geck und Klaus Lux. The decomposition numbers of the Hecke algebra of type F_4. *Manuscripta Math.*, 70(3):285–306, 1991. 169, 173, 175

[Gol80] David M. Goldschmidt. *Lectures on character theory*. Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., 1980. 150

[Gom94] Yasushi Gomi. Character tables of commutative Hecke algebras associated with exceptional Weyl groups. *Comm. Algebra*, 22(1):123–138, 1994. 141

[GP92] Meinolf Geck und Götz Pfeiffer. Unipotent characters of the Chevalley groups $D_4(q)$, q odd. *Manuscripta Math.*, 76(3-4):281–304, 1992. 81, 143

[Hal00] Sergei Haller. Unipot–a system for computing with elements of unipotent subgroups of Chevalley groups, Version 1.1. Technical report, Justus-Liebig-Universität, Gießen, July, 2000. 27

[Him03] Frank Himstedt. *Charaktertafeln parabolischer Untergruppen der Steinbergschen Trialitätsgruppen und Anwendungen auf deren Darstellungstheorie*. Dissertation, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule Aachen, 2003. 27, 39, 40, 49, 76

[Hiß90] Gerhard Hiß. *Zerlegungszahlen endlicher Gruppen vom Lie-Typ in nicht-definierender Charakteristik*. Habilitationsschrift, RWTH Aachen, 1990. 14, 150, 152, 153, 154, 159, 163, 168

[Hiß93] Gerhard Hiß. Harish-Chandra series of Brauer characters in a finite group with a split BN-pair. *J. London Math. Soc. (2)*, 48(2):219–228, 1993. 149, 161, 162, 163, 173

[HL80] Robert B. Howlett und Gus I. Lehrer. Induced cuspidal representations and generalised Hecke rings. *Invent. Math.*, 58(1):37–64, 1980. 118

[HL98] Gerhard Hiß und Frank Lübeck. The Brauer trees of the exceptional Chevalley groups of types F_4 and ${}^2E_6$. *Arch. Math. (Basel)*, 70(1):16–21, 1998. 14, 159, 165, 168

[Hum72] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Springer-Verlag, New York, 1972. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 9. 32

[Hum75] James E. Humphreys. *Linear algebraic groups*. Springer-Verlag, New York, 1975. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 21. 21, 28, 73, 80

[Hum90] James E. Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups*, Band 29 aus *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. 34, 75

[Isa76] Martin Isaacs. *Character theory of finite groups*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1976. Pure and Applied Mathematics, No. 69. 95, 150, 151

[Kaw86] Noriaki Kawanaka. Generalized Gel′fand-Graev representations of exceptional simple algebraic groups over a finite field. I. *Invent. Math.*, 84(3):575–616, 1986. 107, 108, 109, 114, 133

[Kaw87] Noriaki Kawanaka. Shintani lifting and Gel′fand-Graev representations. In *The Arcata Conference on Representations of Finite Groups (Arcata, Calif., 1986)*, Band 47 aus *Proc. Sympos. Pure Math.*, Seiten 147–163. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987. 107, 109

[Kon65] Takeshi Kondo. The characters of the Weyl group of type F_4. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I*, 11:145–153 (1965), 1965. 61, 131, 179

[Kun85] Ernst Kunz. *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985. Translated from the German by Michael Ackerman, With a preface by David Mumford. 40, 41

[Kö05] Christoph Köhler. http://www.math.rwth-aachen.de/∼Christoph.Koehler/phd.html, 2005. 14, 108, 111, 133, 146

[LN94] Rudolf Lidl und Harald Niederreiter. *Introduction to finite fields and their applications*. Cambridge University Press, Cambridge, first Auflage, 1994. 112

[LS90] Larry Lambe und Bhama Srinivasan. A computation of Green functions for some classical groups. *Comm. Algebra*, 18(10):3507–3545, 1990. 131

[Lüb93] Frank Lübeck. *Charaktertafeln für die Gruppen $CSp_6(q)$ mit ungeradem q und $Sp_6(q)$ mit geradem q*. Dissertation, Universität Heidelberg, 1993. 40, 67, 77, 81, 83, 84, 85, 92, 93, 94, 104, 117, 121, 122, 131, 138, 143, 146, 158, 199, 207

[Lus76] George Lusztig. On the finiteness of the number of unipotent classes. *Invent. Math.*, 34(3):201–213, 1976. 86

[Lus77] George Lusztig. Irreducible representations of finite classical groups. *Invent. Math.*, 43(2):125–175, 1977. 124, 125

[Lus80] George Lusztig. On the unipotent characters of the exceptional groups over finite fields. *Invent. Math.*, 60(2):173–192, 1980. 128, 130

[Lus84] George Lusztig. *Characters of reductive groups over a finite field*, Band 107 aus *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1984. 117, 119, 124, 125, 126, 127, 128, 137

[Lus86] George Lusztig. Character sheaves. IV. *Adv. in Math.*, 59(1):1–63, 1986. 133, 134

[Lus92] George Lusztig. A unipotent support for irreducible representations. *Adv. Math.*, 94(2):139–179, 1992. 109

[MN89] Matthias Mecky und Joachim Neubüser. Some remarks on the computation of conjugacy classes of soluble groups. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 40(2):281–292, 1989. 56

[MS95] Reginaldo M. Marcelo und Ken-ichi Shinoda. Values of the unipotent characters of the Chevalley group of type F_4 at unipotent elements. *Tokyo J. Math.*, 18(2):303–340, 1995. 117, 140

[NT89] Hirosi Nagao und Yukio Tsushima. *Representations of finite groups*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1989. Translated from the Japanese. 151, 152

[OW98] Tetsuro Okuyama und Katsushi Waki. Decomposition numbers of $\mathrm{Sp}(4, q)$. *J. Algebra*, 199(2):544–555, 1998. 165, 174

[Ree61a] Rimhak Ree. A family of simple groups associated with the simple Lie algebra of type (F_4). *Bull. Amer. Math. Soc.*, 67:115–116, 1961. 65

[Ree61b] Rimhak Ree. A family of simple groups associated with the simple Lie algebra of type (F_4). *Amer. J. Math.*, 83:401–420, 1961. 65

[S+97] Martin Schönert et al. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming – version 3 release 4 patchlevel 4*. Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule Aachen, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule Aachen, 1997. 12, 26, 27, 39, 119, 137

[Shi97] Ken-ichi Shinoda. Values of the unipotent characters of the Chevalley group of type F_4. In *Proceedings of Algebraic Combinatorics and related Topics (Manilla 1994)*, Seiten 113–119. 1997. 131, 133, 134

[Sho74] Toshiaki Shoji. The conjugacy classes of Chevalley groups of type (F_4) over finite fields of characteristic $p \neq 2$. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 21:1–17, 1974. 59, 60, 62, 86, 112, 185

[Sho82] Toshiaki Shoji. On the Green polynomials of a Chevalley group of type F_4. *Comm. Algebra*, 10(5):505–543, 1982. 131

[Sho87] Toshiaki Shoji. Shintani descent for exceptional groups over a finite field. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 34(3):599–653, 1987. 137, 139, 140

[Sho95] Toshiaki Shoji. Character sheaves and almost characters of reductive groups. I, II. *Adv. Math.*, 111(2):244–313, 314–354, 1995. 133

[Sho01] Toshiaki Shoji. Representations of finite Chevalley groups. In *Groups and combinatorics—in memory of Michio Suzuki*, Band 32 aus *Adv. Stud. Pure Math.*, Seiten 369–378. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001. 146

[Sim94] Charles C. Sims. *Computation with finitely presented groups*, Band 48 aus *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. 27

[Spr98] Tonny A. Springer. *Linear algebraic groups*, Band 9 aus *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2. Auflage, 1998. 18, 19, 20, 22, 24, 25, 26, 28, 31, 62, 72

[Ste68a] Robert Steinberg. *Endomorphisms of linear algebraic groups*. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 80. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968. 64, 65, 68, 72, 86

[Ste68b] Robert Steinberg. *Lectures on Chevalley groups*. Yale University, New Haven, Conn., 1968. Notes prepared by John Faulkner and Robert Wilson. 64

[Win95] Elmar Wings. *Über die unipotenten Charaktere der Chevalley-Gruppen vom Typ F_4 in guter Charakteristik*. Dissertation, RWTH Aachen, 1995. 15, 86, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 114, 115, 131, 133, 159, 165

Lebenslauf Christoph Köhler

20.7.1974	Geboren als 2. Kind von Monique und Joachim Köhler in Toulouse (Frankreich)
1980-84	Besuch der Gemeinschaftsgrundschule Am Weyer in Dinslaken
1984-93	Besuch des Theodor-Heuß-Gymnasiums in Dinslaken
1993-94	Ableistung des Wehrdienstes in Coesfeld
Oktober 1994	Begin des Mathematik- und Pysikstudiums in Aachen
1995	Aufnahme in die Studienstiftung des Deutschen Volkes
Okt 1996	Vordiplom in Mathematik und Physik
Nov 1999	Diplom in Mathematik
Dez 1999 - Nov 2002	Mitglied des Graduiertenkollegs Analyse und Konstruktion in der Mathematik
Sep 2000 - Juli 2001	Aufenthalt an der University of Chicago
Dez 2002-Okt 2005	Angestellt am Lehrstuhl D für Mathematik
Seit Nov 2005	Wissenschaftlicher Angestellter am Center for Computational Engeneering Science der RWTH Aachen