

Polarisierte Photon- und geflavourte Lepton-Quantenboltzmanngleichungen im frühen Universum

Von der Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften der RWTH
Aachen University zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der
Naturwissenschaften genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Physiker

Christian Fidler

aus Aachen

Berichter:

Universitätsprofessor Dr. M. Beneke

Juniorprofessor Dr. B. Garbrecht

Tag der mündlichen Prüfung: 16.12.2011

Diese Dissertation ist auf den Internetseiten der Hochschulbibliothek online verfügbar.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	5
2. Boltzmann-Gleichungen zur Beschreibung der CMB Polarisation	7
2.0.1. Konventionen	8
2.1. Einleitung	8
2.1.1. Das homogene und isotrope Universum	8
2.1.2. Kosmologische Störungstheorie	9
2.1.3. Polarisation der Hintergrundstrahlung	10
2.2. Herleitung der polarisierten Quantenboltzmann-Gleichungen	11
2.2.1. Propagation polarisierter Photonen	12
2.2.2. Vereinfachungen zur zweiten Ordnung	13
2.2.3. Stoßterm	14
2.2.4. Fouriertransformation und Multipolentwicklung	16
2.3. Entwicklung des Propagationsterms zur zweiten Ordnung	18
2.3.1. Impulsableitungen	18
2.3.2. Multipoltransformation	19
2.3.3. Free-Streaming-Term	20
2.3.4. Impulsableitungsterme	22
2.4. Entwicklung des Stoßterms zur zweiten Ordnung	24
2.4.1. Nichtrelativistische Entwicklung	24
2.4.2. Entwicklung von $C_{ab}[f]$	25
2.4.3. Fourier- und Multipoltransformation	28
2.5. C_l^{BB} -Spektrum der B-Polarisation	30
2.6. Boltzmann-Gleichungen der verschiedenen Spezies erster Ordnung	32
3. Numerische Analyse der B-Polarisation in zweiter Ordnung	37
3.1. Quellen für B-Polarisation in zweiter Ordnung	37
3.2. Lösung der Gleichungen	39
3.2.1. Line-Of-Sight-Integration	41
3.2.2. Lösung mit Greenfunktionen	41
3.2.3. Powerspektrum	42
3.2.4. Non-Gaussianity	43
3.3. Numerische Rechnungen	44
3.3.1. Transferfunktionen erster Ordnung	44
3.3.2. Anfangsbedingungen	45
3.3.3. Berechnung der Greenfunktionen	46
3.3.4. Quellterme und Integration	50
3.3.5. Test im Tight-Coupling-Regime	53
3.3.6. Numerischer Stabilitätstest	54
3.4. Ausblick	56
4. Gefflavoured Quantenboltzmann-Gleichungen der Leptogenese	59
4.1. Einleitung	59
4.1.1. Ungefflavoured Beschreibung der Leptogenese	60
4.1.2. Gefflavoured Beschreibung der Leptogenese	62

4.2.	CTP-Formalismus für geflavourte Leptonen	63
4.2.1.	Schwinger-Dyson-Gleichungen	63
4.3.	Thermische Selbstenergien	65
4.3.1.	Thermische Selbstenergien aus der Kopplung an die rechtshändigen Neutrinos	66
4.4.	Zwangsgleichung und Kadanoff-Baym-Ansatz	74
4.5.	Kinetische Gleichungen der Leptonzahldichten	77
4.5.1.	Matrixleptonzahldichten	77
4.5.2.	Quell- und Washout-Beitrag	79
4.5.3.	Flavourblinde Wechselwirkungen	80
4.5.4.	Flavoursensitive Wechselwirkungen	81
4.5.5.	Unterdrückung der Flavouroszillationen	82
4.5.6.	Kinetische Gleichungen für die Anzahldichten	84
4.6.	Numerische Lösungen der kinetischen Gleichungen	85
4.7.	Ausblick	91
5.	Geflavourte Quantenboltzmanngleichungen im cQPA-Formalismus	93
5.1.	Einleitung	93
5.2.	cQPA für skalare Felder	93
5.2.1.	Näherungen	94
5.2.2.	Phasenraumstruktur	95
5.2.3.	Bewegungsgleichungen	96
5.2.4.	Resumierter skalarer Stoßterm	97
5.3.	Gradientenkorrekturen zur Phasenraumstruktur von $\Delta^{<, >}$	99
5.4.	Flavourkohärenz im Operatorformalismus	102
5.5.	Ausblick	105
A.	Zusammenfassung der Definitionen	107
A.1.	Vierbeinkomponenten	107
A.2.	Spingewichtete Kugelflächenfunktionen	107
A.3.	Einheitsvektor in der sphärischen Basis	108
A.4.	$\mathbf{Q}$ -Matrizen und ω -Koeffizienten	109
B.	Herleitung der Line-Of-Sight-Lösung	111
C.	Berechnung des Bispektrums zweiter Ordnung	113

1. Einleitung

In dieser Arbeit behandle ich Boltzmann-Gleichungen im frühen Universum, welche benötigt werden, um die Evolution des Universums zu beschreiben. Dabei betrachte ich zwei getrennte Probleme: Die Beschreibung der kosmischen Hintergrundstrahlung mit Polarisation und die Leptogenese mit Flavour-Effekten. Beide Beschreibungen gehen über klassische Boltzmann-Gleichungen für Teilchendichten hinaus; die Verteilungsfunktion wird zu einer Matrix verallgemeinert.

Die polarisierten Boltzmann-Gleichungen der Photonen zur Berechnung der Hintergrundstrahlung leite ich in einer gekrümmten Raumzeit aus der Hamilton-Entwicklung einer Dichtematrix ab. Die Gleichungen, welche in der Literatur nur in erster Ordnung bekannt waren, werden dann bis zur zweiten Ordnung in kosmologischer Störungstheorie (der Entwicklung um das homogene isotrope Universum) entwickelt. Diese Präzision ist nötig, um den Untergrund zur B-Polarisation erster Ordnung aus unterdrückten Tensorfluktuationen zu bestimmen.

In der Leptogenese reicht es aus, Raumzeiteffekte in führender Ordnung zu betrachten. Lokale Effekte spielen keine Rolle, die Expansion des Universums muss jedoch berücksichtigt werden. Zur systematischen Herleitung der Gleichungen mit Flavour, wird der CTP-Formalismus verwendet, in welchem die Evolutionsgleichungen aus den Schwinger-Dyson-Gleichungen des konturgeordneten Propagators hergeleitet werden. Dieser Ansatz ist deutlich allgemeiner als eine klassische Boltzmann-Gleichung, z.B. treten in den Gleichungen Gedächtniseffekte auf. Die Evolution des Systems hängt nicht nur von dem aktuellen Zustand ab, sondern von der gesamten Geschichte des Systems. Durch Anwendung der Gradientenentwicklung erhält man Quantenboltzmann-Gleichungen, welche Flavour auf eine natürliche Weise beschreiben.

Außerdem untersuche ich die Kadanoff-Baym-Gleichungen eines skalaren Feldes, ohne die Annahme der approximativen Translationsinvarianz, und entdecke neue spektrale Schalen, welche die nichtlokale Teilchen-Antiteilchen-Flavourkohärenz beschreiben. Im Operatorformalismus zeigt sich, dass diese Schalen für geflavourte Squeezed-States tatsächlich benötigt werden. Ich leite ihre Evolutionsgleichungen her, welche auf Quantenskalen oszillieren.

Diese Gleichungen werden zur Beschreibung des frühen Universum benötigt, welches für das Verständnis der Physik von entscheidender Bedeutung ist. Zur Übersicht stelle ich hier kurz die Entwicklung unseres Universums dar.

Nach unserer Vorstellung entsteht das Universum durch einen Urknall, gefolgt von einer Phase der exponentiellen Expansion, der Inflation. Diese löst folgende Probleme:

- 1) Flachheitsproblem: Das Universum heutzutage ist sehr flach. Um dies ohne Inflation zu realisieren, müsste das Universum zu frühen Zeiten eine deutlich kleinere Krümmung, von der Größenordnung $K \approx 10^{-54}$, gehabt haben; ein unnatürlich kleiner Wert. Eine exponentielle Expansion glättet das Universum nachträglich und löst so das Fine-Tuning-Problem.
- 2) Horizontproblem: In der kosmischen Hintergrundstrahlung finden sich nur kleine Fluktuationen von der Größenordnung 10^{-5} ; auf großen Skalen ist die CMB homogen. Das Problem ist, dass nur relativ kleine Gebiete der heute sichtbaren CMB zur Zeit der Entkopplung kausal verbunden waren, also keine großräumige Thermalisierung des Plasmas stattgefunden haben kann. Die Inflation löst dieses Problem, indem sie ehemals kausal verknüpfte Gebiete durch die Expansion stark vergrößert.

Das einfachste Inflationsszenario ist die Slow-Roll-Inflation mit einem skalaren Feld Φ , welches die Eigenschaft: $\rho + 3p < 0 \Leftrightarrow V(\Phi) > (\frac{d\Phi}{dt})^2$ erfüllt. Ein Feld, dessen potentielle Energie die kinetische Energie übersteigt, erzeugt eine beschleunigte Expansion des Universums. Dies gilt für ein Feld, welches in einem sehr flachen Potential langsam „herunterrollt“.

Die restlichen Eigenschaften des Inflavons und das genaue Modell der Inflation sind weitgehend unbekannt. Die Messung von Inflationsparametern, zum Beispiel die Amplitude der primordialen Gravitationswellen, ist daher für das Verständnis des Universums wichtig.

Ca. 10^{-32} Sekunden nach dem Urknall endet die Inflation und das durch die Expansion stark abgekühlte Universum heizt sich durch Zerfälle des Inflavons wieder auf. Die Quantenfluktuationen des Inflatonfeldes induzieren kleine Anisotropien in das sonst hochgradig homogene Universum, welche noch heute in der Hintergrundstrahlung zu sehen sind.

In unserem Universum finden wir heute fast keine Antimaterie mehr; es existiert eine deutliche Materie-Antimaterie-Asymmetrie. Aus Symmetriegründen wäre allerdings ein ausgeglichenes Verhältnis von Materie und Antimaterie zu erwarten. Um die Asymmetrie zu erklären, müssen im frühen Universum, nach der Inflation, Prozesse existieren, welche Materie gegenüber Antimaterie bevorzugen. Der genaue Mechanismus, welcher zur Erzeugung der Asymmetrie führt, ist unbekannt, es gibt allerdings verschiedene Szenarien. Die bedeutendsten sind die elektroschwache Baryogenese [55, 51, 14] und die Leptogenese [32, 83]. In dieser Arbeit gehe ich in Kapitel 4 auf die Leptogenese ein, in welcher Zerfälle von schweren rechtshändigen Majorananeutrinos im frühen Universum einen Überschuss an Materie erzeugen. Dabei behandle ich insbesondere Flavoureffekte, welche je nach Energieskala der Leptogenese eine wichtige Rolle spielen und bisher nur in gewissen Grenzfällen verstanden sind.

In der nachfolgenden Epoche kühlt sich das Quark-Gluon Plasma durch die Expansion des Universums ab. Innerhalb der ersten Sekunde nach dem Urknall binden sich Quarks und Gluonen zu Baryonen und Mesonen; ein Plasma aus leichten Atomkernen, Elektronen und Photonen entsteht.

Ca. 397.000 Jahre nach dem Urknall, wenn die Temperatur weit genug gesunken ist, bilden sich aus dem ionisierten Plasma neutrale Atome. Das Universum wird transparent für Photonen, welche seit der Rekombination fast ohne Wechselwirkungen durch das Universum propagieren. Heute bilden diese Photonen die kosmische Hintergrundstrahlung (CMB). Die CMB ermöglicht detaillierte Rückschlüsse über das Universum nach der Rekombination. Vor der Rekombination liefert sie allerdings kaum Informationen, da diese durch die häufigen Stöße der Photonen im geladenen Plasma verloren geht. In Kapitel 2 und 3 arbeite ich an einer Methode, welche es ermöglicht in der kosmischen Hintergrundstrahlung die Effekte primordialer Gravitationswellen zu messen und so neue Einsichten über die Inflation zu erhalten. In erster Ordnung kosmologischer Störungstheorie wird B-Polarisation nur durch Gravitationswellen induziert [79], allerdings existiert ein Untergrund aus Prozessen zweiter Ordnung, zu deren Berechnung die polarisierten Boltzmann-Gleichungen zweiter Ordnung benötigt werden. Diese leite ich in dieser Arbeit her und entdecke bislang unbekannte Quellterme im Stoßterm, welche von mir numerisch ausgewertet werden.

Die weitere Evolution des Universums wird schließlich von der dunklen Materie, welche den Großteil der im Universum vorhandenen Materie ausmacht, und im späteren Verlauf von der dunklen Energie bestimmt, die zu einer beschleunigten Expansion des Universums führt.

In dieser Arbeit leite ich in Kapitel 2 die Gleichungen, welche die Evolution der kosmischen Hintergrundstrahlung beschreiben, her. Numerische Lösungen werden in Kapitel 3 berechnet. Das Ziel der Rechnungen ist es, den Einfluss von primordialen Gravitationswellen auf die kosmische Hintergrundstrahlung und den Untergrund aus Quellen höherer Ordnung zu berechnen.

In Kapitel 4 beschäftige ich mich mit dem Einfluss von Flavoureffekten auf die Leptogenese, beispielsweise dem Effekt der Flavouroszillationen, ausgehend von dem Formalismus aus [10], welcher zu einer geflavourten Beschreibung verallgemeinert wird.

In Kapitel 5 verallgemeinere ich schließlich die in der Leptogenese verwendete Methode des CTP-Formalismus und entdecke weitere Lösungen, welche die nichtlokale Teilchen-Antiteilchen-Kohärenz beschreiben.

2. Boltzmann Gleichungen zur Beschreibung der CMB Polarisation

Die kosmische Hintergrundstrahlung besteht aus Photonen, welche seit der Rekombination bis heute fast ohne Wechselwirkungen durch das Universum propagieren. Ca. 397.000 Jahre nach dem Urknall, wenn das Universum eine Temperatur von $3000K$ hat, binden sich Elektronen und Protonen zu neutralen Atomen. Das Universum, welches vorher mit geladenen Teilchen gefüllt war, wird neutral und damit transparent für Photonen. Heute können die Photonen, welche zuletzt während der Rekombination gestreut haben, gemessen werden und erlauben uns Einblicke in das Universum zu früheren Zeiten.

In führender Ordnung ist die CMB eine homogene und isotrope Schwarzkörperstrahlung mit einer Temperatur von $2.725K \pm 0.001K$, 1965 entdeckt von Penzias und Willson [65]. Damit liefert sie als isotrope Strahlung ein starkes Argument für die Entstehung des Universums durch einen Urknall.

1992 wurden durch den COBE Satelliten kleine Fluktuationen in der Hintergrundstrahlung gemessen [27], welche, abgesehen von dem großen durch Translation verursachten Dipol, von der Größenordnung 10^{-5} sind. Diese Anisotropien können im Rahmen der Inflation durch Quantenfluktuationen des Inflatonfeldes erklärt werden. Die Messungen der Fluktuationen in Kombination mit anderen kosmologischen Messungen ermöglichen es, viele kosmologische Größen genau zu bestimmen, darunter unter anderem die Hubble-Konstante und die Anteile der verschiedenen Spezies am Universum.

Die Polarisation der Hintergrundstrahlung, welche durch theoretische Rechnungen vorhergesagt wird, wurde von DASI entdeckt [28]. Heute wird sie in mit WMAP und PLANK in großer Genauigkeit vermessen [25, 26]. Die Polarisation wird in zwei Moden zerlegt, in die E-Polarisation, welche ein Gradientenfeld ist, und die B-Polarisation, einem Rotationsfeld. Messungen der E-Polarisation sind in guter Übereinstimmung mit der theoretischen Vorhersage. Von besonderem Interesse ist aber auch die B-Polarisation, die in führender Ordnung nur durch primordiale Gravitationswellen induziert wird [45]. Daher kann das Spektrum der während der Inflation erzeugten Gravitationswellen aus einer Messung der B-Polarisation rekonstruiert werden. Bis heute wurde aber noch keine B-Polarisation gemessen, was darauf hindeutet, dass primordiale Gravitationswellen unterdrückt sind.

Neben der Polarisation ist auch die Abweichung von der gaußschen Verteilung der Fluktuationen interessant. Genau wie die Messung der B-Polarisation würde eine Messung der Non-Gaussianity neue Informationen über die Inflation liefern. In erster Ordnung kosmologischer Störungstheorie gibt es keine Quelle, welche Abweichungen vom gaußschen Spektrum erzeugt und eine gemessene Abweichung entspricht der primordialen Störung aus der Inflation.

Da sowohl das primordiale Spektrum der Gravitationswellen, als auch die Non-Gaussianity der primordialen Spektren klein ist, reicht eine Rechnung erster Ordnung in den Abweichungen vom homogenen Universum nicht aus. Als Untergrund können Effekte zweiter Ordnung, welche ebenfalls B-Polarisation oder Non-Gaussianity aus dem nicht unterdrückten skalaren Spektrum erzeugen, relevant sein. Deshalb berechne ich in diesem Kapitel die vollständigen Gleichungen zweiter Ordnung, um den Untergrund für zukünftige Messungen der B-Polarisation und Non-Gaussianity zu bestimmen. Dazu verwende ich die kosmologische Störungstheorie, eine Entwicklung um das homogene Universum, beschrieben in Abschnitt 2.1. Die Kapitel 2.2 bis 2.4 stellen die Rechnungen und Ergebnisse aus der Publikation [7] dar, welche zusammen mit Koautoren veröffentlicht wurde. Die Boltzmann Gleichung besteht aus einem Propagationsterm, berechnet in Abschnitt 2.3 und einem Stoßterm, berechnet in Abschnitt 2.4. In Abschnitt 2.5 leiten wir aus den Verteilungsfunktionen das experimentell messbare C_l -Spektrum her. Die benötigten Gleichungen der übrigen Spezies werden in Kapitel 2.6 angegeben.

Zeitgleich wurden analoge Gleichungen auch in [69] hergeleitet. Die Ergebnisse der Rechnungen

stimmen überein und liefern so einen unabhängigen Test der Resultate.

2.0.1. Konventionen

In den Rechnungen treten verschiedene Indizes auf. Um Verwechslungen zu vermeiden, verwenden wir die folgenden Konventionen: Allgemeine Indizes werden mit griechischen Buchstaben $\mu, \nu, \dots$ von 0 bis 3 bezeichnet, Indizes im lokalen Inertialsystem mit großen lateinischen Buchstaben $A, B, \dots = 0, 1, 2, 3$ und räumliche Indizes mit $i, j, \dots = 1, 2, 3$. Zusätzlich verwenden wir kleine lateinische Buchstaben $a, b, \dots = 1, 2$ auch um die Basis der Polarisationsvektoren zu bezeichnen. Um Verwechslungen der Impulse zu vermeiden nennen wir den kovarianten Impuls P^μ und den Impuls im lokalen Inertialsystem p^A .

Wir verwenden die Vorzeichenkonvention $(+, -, -, -)$ für die Metrik im lokalen Inertialsystem. Das inertielle Beobachtersystem ist durch die Vierbeine aus Anhang A.1 definiert. Es gibt zwei freie Parameter für die Wahl des Beobachtersystems, die Orientierung θ_k und die Beobachtergeschwindigkeit U_i . Wir fixieren die Orientierung, indem wir $\theta_k = 0$ wählen und in das Beobachtersystem $U_i = 0$ gehen.

2.1. Einleitung

2.1.1. Das homogene und isotrope Universum

Wir beginnen zunächst mit der Beschreibung des homogenen isotropen Universums, dem Ausgangspunkt der kosmologischen Störungsrechnung. Das homogene Universum ist bereits eine gute Näherung, da durch die Inflation Inhomogenitäten ausgewaschen werden und die einzigen Abweichungen durch die Quantenfluktuationen des Inflavons induziert werden. Daher ist die CMB in führender Ordnung homogen und isotrop. Materie klumpt durch Gravitation lokal, aber auch die Verteilung der Materie im Universum ist noch heute auf großen Skalen ($\geq 100 Mpc$) homogen.

Die Forderung nach Homogenität und Isotropie schränkt die Wahl der Metrik stark ein. Die allgemeine Metrik, welche die Forderungen erfüllt, ist die Friedmann-Robertson-Walker-Metrik (FRW):

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left(d\eta^2 + \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (2.1)$$

mit der konformen Zeit η ($d\eta = \frac{dt}{a}$) und dem Skalenfaktor $a(\eta)$. K beschreibt die Krümmung des Universums. Da alle bisherigen Messungen auf keine, oder sehr kleine Krümmungen des Raumes hindeuten, wird im Folgenden immer $K = 0$ verwendet.

Die Einsteingleichung

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

lässt sich, mit Hilfe der FRW-Metrik und dem homogenen isotropen Energie-Impuls-Tensor

$$T_{\mu\nu} = \rho \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} + p \gamma_{ij} \quad (2.3)$$

umschreiben zu den beiden Friedmann-Gleichungen:

$$H_c^2 = \frac{8\pi G a^2}{3} \rho = H_0^2 \left(\frac{\Omega_m}{a} + \frac{\Omega_r}{a^2} + \Omega_\Lambda a^2 \right), \quad (2.4)$$

$$\dot{H}_c = -\frac{4\pi G a^2}{3} (\rho + p). \quad (2.5)$$

Dabei ist $g_{\mu\nu}$ der metrische Tensor, $R_{\mu\nu}$ der Ricci-Tensor und R der Riemann-Skalar. γ_{ij} sind die räumlichen Komponenten der Metrik; $H_c = \frac{\dot{a}}{a}$ ist der mitbewegte Hubbleparameter. Die Dichte wird

mit ρ bezeichnet, der Druck mit p . Die Anteile der verschiedenen Spezies relativ zur kritischen Dichte des Universums ($\rho_c = \frac{3H_c^2}{8\pi G a^2}$) sind durch $\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}$ gegeben.

Die Friedmanngleichungen (2.4) beschreiben die Evolution des Universums in führender Ordnung und deuten, mit den gemessenen Parametern, auf ein flaches und durch dunkle Energie exponentiell expandierendes Universum hin.

2.1.2. Kosmologische Störungstheorie

Zur Beschreibung der Fluktuationen der kosmischen Hintergrundstrahlung reicht das homogene Universum aus Abschnitt 2.1.1 nicht aus. Wir benötigen kleine Störungen der Homogenität und Isotropie in der FRW-Metrik.

Es genügt allerdings nicht, nur die FRW-Metrik zu stören, da in einer gestörten Raumzeit auch die Verteilung der Materie und Strahlung vom homogenen Fall abweichen muss. Dies erreichen wir, indem wir analog einen gestörten Energie-Impuls-Tensor definieren.

Die gestörte Metrik lautet:

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left((1 + 2A)d\eta^2 + 2B_i d\eta dx^i - [(1 + 2D)\delta_{ij} + 2E_{ij}] dx^i dx^j \right). \quad (2.6)$$

Dies ist die allgemeinste Störung der FRW-Metrik. Insgesamt haben wir zehn neue Parameter eingeführt, zwei durch die beiden skalaren Störungen A und D , drei durch die vektorielle Störung B_i und fünf durch den symmetrischen spurfreien Tensor E_{ij} . In Analogie dazu erhalten wir für den gestörten Energie-Impuls-Tensor ebenfalls zehn neue Parameter. $\delta\rho$ und δp als skalare Störungen von Dichte und Druck, v_i als vektorielle Störung, welche die mittlere Teilchengeschwindigkeit beschreibt, und Σ_{ij} als anisotroper Spannungstensor. Im Gegensatz zu den Parametern des homogenen Universums können diese Störungen explizit von der Raumkoordinate und der Orientierung abhängen, da sie die Homogenität und Isotropie brechen.

Der Energie-Impuls-Tensor lautet:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} + \Sigma_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

mit der inhomogenen Dichte ρ , dem inhomogenen Druck p und der Vierergeschwindigkeit u , welche durch

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} + \delta\rho, \\ p &= \bar{p} + \delta p, \\ u^0 &= \frac{1}{a} \left(1 - A - B_i v^i + \frac{1}{2} v_i v^i \right), \\ u^i &= \frac{1}{a} v^i \end{aligned}$$

definiert sind.

Wir arbeiten in der konformen Newton-Eichung, in welcher die Vektormoden der Metrik B_i transversal sind und die Tensorkomponenten E_{ij} transversal und spurfrei sind.

Per Annahme sind die Störungen der Metrik klein und wir definieren mit ihnen die kosmologische Störungsrechnung. Terme nullter Ordnung sind homogen und isotrop, Terme erster Ordnung weichen linear von der Homogenität und Isotropie ab. Die Ordnung in kosmologischer Störungstheorie wird mit einem oberen Index in runden Klammern dargestellt, mit der Zerlegung $a = a^{(0)} + a^{(1)} + a^{(2)} + \dots$ für beliebige Größen a .

Die gestörte Metrik und den inhomogenen Energie-Impuls-Tensor können wir analog zu Abschnitt 2.1.1 in die Einsteingleichung einsetzen und erhalten die Metrikgleichungen erster Ordnung (siehe Gl. (2.162)).

Während die Einsteingleichung (2.2) die Evolution der Metrikfluktuationen aus den Materie- bzw. Strahlungsfluktuationen bestimmt, benötigen wir auf der anderen Seite noch die Boltzmann-Gleichung,

welche die Evolution der Materie im inhomogenen Universum beschreibt:

$$\frac{d}{d\eta}f(x, p) = \frac{\partial}{\partial\eta}f(x, p) + \frac{dx^i}{d\eta} \frac{\partial}{\partial x^i}f(x, p) + \frac{dp^i}{d\eta} \frac{\partial}{\partial p^i}f(x, p) = \frac{1}{P^0}C[f(x, p)], \quad (2.8)$$

mit der gestörten Phasenraumverteilungsfunktion $f(x, p) = \bar{f}(|p|) + \delta f(x, p)$.

- Die rechte Seite der Gleichung ist der Stoßterm. Dieser beschreibt Änderungen der Verteilungsfunktion f einer Teilchenspezies durch Stöße mit den Teilchen des Plasmas. In den Stoßterm geht nur der Wirkungsquerschnitt der betrachteten Streuung ein. Effekte der Metrik sind nur auf kosmologischen Skalen relevant und können auf der Skala einer Wechselwirkung vernachlässigt werden.
- Die linke Seite besteht aus einer totalen Zeitableitung. Die Ableitungen $\frac{dx^i}{d\eta}$ und $\frac{dp^i}{d\eta}$ beinhalten die Effekte des gekrümmten Raumes und beschreiben die Änderung der Verteilungsfunktionen durch Diffusion in einer expandierenden Raumzeit.

Einstein- und Boltzmann-Gleichung bilden ein geschlossenes Gleichungssystem, in welchem die Entwicklung der Anisotropien vollständig beschrieben werden kann.

Eine explizite Herleitung der Boltzmann-Gleichung folgt in Kapitel 2.4 und orientiert sich an [7].

2.1.3. Polarisation der Hintergrundstrahlung

Die CMB enthält mehr Information als nur die Intensitäts- bzw. Temperaturfluktuationen, da die Photonen zusätzlich eine Polarisation tragen. Wir verallgemeinern die klassische Boltzmann-Gleichung der Intensität auf eine polarisierte Quantenboltzmann-Gleichung. Aus den üblichen Stokesparametern zur Beschreibung von Polarisation leiten wir durch eine Multipoltransformation die Polarisationsmoden E und B ab (siehe Kapitel 2.2.4). In erster Ordnung stellt sich dabei heraus, dass die B-Polarisation nur eine einzige Quelle hat, die Tensormoden E_{ij} der gestörten Metrik. Da bis heute allerdings keine B-Polarisation gemessen wurde, müssen diese sehr klein sein. Es ist wahrscheinlich, dass mögliche Effekte zur B-Polarisation in zweiter Ordnung von ähnlicher Größenordnung sind, wie der Anteil aus den primordialen Tensorfluktuationen in erster Ordnung. Deshalb ist es wichtig, alle möglichen Quellen zweiter Ordnung für die B-Polarisation zu berechnen, um eine genaue Messung der primordialen Gravitationswellen zu ermöglichen¹. Es sind folgende Quellen der B-Mode in höherer Ordnung bekannt:

- Der wichtigste Beitrag ist das Weak-Lensing [57]: E-Polarisation wird durch die Propagation der Photonen in einem lokal gekrümmten Universum in B-Polarisation konvertiert. Zur Berechnung wird keine kosmologische Störungstheorie benötigt; es existiert ein alternativer Formalismus, in welchem der Ablenkungswinkel als klein angenommen wird. In der Störungstheorie tritt dieser Effekt erstmalig in der zweiten Ordnung auf, da sowohl die Metrikstörungen, als auch die E-Polarisation mindestens von erster Ordnung sind.
- Der zweite bekannte Beitrag ist die Induktion von B-Polarisation durch Metrikfluktuationen zweiter Ordnung. Dieser wird in [60] und [74] untersucht.
- Der letzte Beitrag stammt aus Stoßtermquellen und beschreibt die Erzeugung von Polarisation durch Comptonstreuung. Er wird in dieser Arbeit in Kapitel 3 und in [8] untersucht.

¹Die Einsteingleichung für die Tensorkomponenten der Metrik ist eine Wellengleichung, daher der Name Gravitationswellen

2.2. Herleitung der polarisierten Quantenboltzmann Gleichungen

Wir beschreiben die Polarisation der Photonen mit Hilfe einer Matrix aus Phasenraumverteilungsfunktionen $\hat{f}_{\mu\nu}(x^\lambda, q^i)$. Diese ist so definiert, dass $\hat{\epsilon}^\mu \hat{\epsilon}^{\nu*} \hat{f}_{\mu\nu}(x^\lambda, q^i) d^3p/(2\pi)^3$ die Anzahlldichte der Photonen mit Impuls $\mathbf{p}$ und Polarisation $\hat{\epsilon}$ ist.

Mit $\hat{f}_{\mu\nu}$ als Funktion des mitbewegten Impulses $q^i = ap^i$, ist die ungestörte Bose-Einstein-Verteilung $\hat{f}_{\mu\nu}^{(0)}$ in einem homogenen expandierenden Universum zeitunabhängig, da sich die Expansion im homogenen Universum nur durch die Rotverschiebung der Moden äußert. Diese Eigenschaft nutzen wir aus, indem wir die Verteilungsfunktionen als Funktion des mitbewegten Impulses betrachten.

Die Phasenraumverteilung ist durch den Erwartungswert $\langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle$ des Strahlungsfeldes definiert. In Lorentznotation folgt wegen $A^\mu{}_{;\mu} = 0$

$$P^\mu \hat{f}_{\mu\nu}(x^\lambda, q^i) = P^\nu \hat{f}_{\mu\nu}(x^\lambda, q^i) = 0 \quad (2.9)$$

und $\hat{f}_{\mu\nu}$ wird in Abwesenheit von Stößen paralleltransportiert:

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\lambda} \hat{f}_{\mu\nu} = \hat{C}_{\mu\nu}[\hat{f}], \quad (2.10)$$

mit der kovarianten Ableitung entlang der Photontrajektorie $\mathcal{D}/\mathcal{D}\lambda$ und dem Stoßterm $\hat{C}_{\mu\nu}[\hat{f}]$. Die Phasenraumverteilung im lokalen Inertialsystem ist durch die Vierbeine $[e_A]^\mu$ definiert:

$$\hat{f}^{\mu\nu} = [e_A]^\mu [e_B]^\nu \hat{f}^{AB}. \quad (2.11)$$

$\hat{f}_{\mu\nu}$ ist aber noch eichabhängig und transformiert unter Eichtransformationen mit $\hat{f}_{\mu\nu} \rightarrow \hat{f}_{\mu\nu} + \alpha_\mu P_\nu + \beta_\nu P_\mu$ für beliebige α_μ, β_ν . Diese Eichabhängigkeit ist nicht verwunderlich, da die Beschreibung als 4×4 Matrix zu viele Freiheitsgrade für masselose Photonen aufweist. Um eine physikalische Verteilungsfunktion zu erhalten, zerlegen wir den Viererimpuls in

$$P^\mu = E [e_0]^\mu - [e_i]^\mu p^i = E (u^\mu - n^\mu), \quad (2.12)$$

mit $u^\mu = [e_0]^\mu$ der Vierergeschwindigkeit des lokalen inertialen Beobachters, E der Energie, die durch diesen Beobachter gesehen wird und

$$n^\mu = [e_i]^\mu \frac{p^i}{E}, \quad (2.13)$$

der Richtung des Photon-Dreierimpulses. Es gilt $u_\mu n^\mu = 0$ und $n_\mu n^\mu = -1$. Wir definieren den Tensor

$$p_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu - n_\mu n_\nu, \quad (2.14)$$

welcher die Komponenten transversal zur Beobachtergeschwindigkeit und der Photongeschwindigkeit herausprojiziert:

$$u^\mu p_{\mu\nu} = u^\nu p_{\mu\nu} = n^\mu p_{\mu\nu} = n^\nu p_{\mu\nu} = 0. \quad (2.15)$$

Jetzt definieren wir die physikalische Phasenraumverteilung durch

$$f_{\mu\nu} = p_\mu{}^{\mu'} p_\nu{}^{\nu'} \hat{f}_{\mu'\nu'}, \quad (2.16)$$

welche orthogonal zu P^μ , u^μ und n^μ ist und keine Eichfreiheit mehr besitzt. Im Beobachterruesystem ist dies effektiv eine 3×3 Matrix, da dort $f^{00} = f^{0i} = f^{i0} = 0$ gilt. Außerdem ist diese Matrix orthogonal zum Photon-Dreierimpuls und liefert so die übliche Beschreibung von masselosen Photonen.

Wir wenden $\mathcal{D}/\mathcal{D}\lambda$ auf (2.16) an und erhalten aus (2.10)

$$p_\mu{}^{\mu'} p_\nu{}^{\nu'} \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\lambda} \hat{f}_{\mu'\nu'} = p_\mu{}^{\mu'} p_\nu{}^{\nu'} \hat{C}_{\mu'\nu'}[\hat{f}], \quad (2.17)$$

wobei wir verwendet haben, dass $p_{\mu\nu}$ und $\hat{f}_{\mu\nu}$ orthogonal zu P^μ sind.

Die Gleichungen bilden ein geschlossenes System für die Phasenraumverteilung, falls der projizierte Stoßterm $C_{\mu\nu}[\hat{f}] \equiv p_\mu^{\mu'} p_\nu^{\nu'} \hat{C}_{\mu'\nu'}[\hat{f}]$ nur von f und nicht von $\hat{f}$ abhängt.

Im Folgenden verwenden wir eine Polarisationsbasis ϵ_a^μ ($a = 1, 2$), welche orthogonal zu P^μ und u^μ ist und definieren

$$f^{\mu\nu} = \sum_{a,b} f_{ab} \epsilon_a^{\mu*} \epsilon_b^\nu. \quad (2.18)$$

Die Diagonalen von f_{ab} sind dabei die Verteilungsfunktion der beiden Polarisationsmoden ϵ_1 und ϵ_2 , die Nebendiagonalen beschreiben deren Korrelationen.

2.2.1. Propagation polarisierter Photonen

Die Boltzmann-Gleichung für f_{ab} in einer Polarisationsbasis, welche im Beobachtersystem definiert ist, erhalten wir, indem wir Gl. (2.17) mit $\epsilon_a^\mu \epsilon_b^{\nu*}$ multiplizieren und (2.18) einsetzen. Der Propagationsterm lautet dann

$$\epsilon_a^\mu \epsilon_b^{\nu*} p_{\mu\mu'} p_{\nu\nu'} \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\lambda} \sum_{c,d} f_{cd} \epsilon_c^{\mu'*} \epsilon_d^{\nu'}. \quad (2.19)$$

Die Wahl der Polarisationsbasis spielt eine entscheidende Rolle. Wenn $\hat{e}^\mu$ in Richtung der Photonfeldamplitude in der Lorentzzeichnung liegt, wird $\hat{e}^\mu$ entlang der Photontrajektorie parallel transportiert [59]. Dies gilt auch für den projizierten Vektor $\epsilon^\mu = p^\mu_{\mu'} \hat{e}^{\mu'}$ in dem Sinne, dass bei festem Photonimpuls $p^\mu_{\nu} \mathcal{D}\epsilon^\nu / \mathcal{D}\lambda = 0$ gilt. Wir können eine Basis aus zwei parallel transportierten Polarisationsvektoren ϵ_a^μ wählen, in welcher die Berechnung von (2.19) besonders einfach wird. Die korrespondierenden Vektoren ϵ_a^A im Beobachtersystem sind durch $\epsilon_a^\mu = [e_A]^\mu \epsilon_a^A$ gegeben, welche neben dem Impuls auch von der Position x in der Raumzeit abhängen. Die transversale Polarisationsbasis wird also kontinuierlich rotiert, während das Photon durch die Raumzeit propagiert.

Anstelle dessen ist es auch möglich, eine feste Basis ϵ_a^A im Beobachtersystem zu wählen, welche nicht von der Raumzeit, sondern nur vom Impuls abhängt. In dem Fall ist die kovariante Ableitung entlang des Pfades, welche auf den Polarisationsvektor wirkt, durch

$$\epsilon_{a\mu}^* \frac{\mathcal{D}\epsilon_c^\mu}{\mathcal{D}\lambda} = [e^B]_\mu [e_A]^\mu{}_{;\nu} P^\nu \epsilon_{aB} \epsilon_c^A + \epsilon_{aA} \frac{dq^i}{d\lambda} \frac{\partial \epsilon_c^A}{\partial q^i} \quad (2.20)$$

gegeben, wobei der erste Term auf der rechten Seite beschreibt, dass ϵ_c^μ in der festen Basis nicht parallel transportiert wird und der zweite, dass der Photonimpuls sich entlang des Pfades ändert.

Die Bedingung $u_\mu \epsilon_a^\mu = P_\mu \epsilon_a^\mu = 0$ erfordert $\epsilon_a^0 = 0$ und $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_a = 0$ im Beobachtersystem. Wir benutzen ein sphärisches Koordinatensystem mit

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \\ \mathbf{e}_\theta &= (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta), \\ \mathbf{e}_\varphi &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Aus dieser Basis konstruieren wir die beiden zirkularen Polarisationsvektoren

$$\boldsymbol{\epsilon}_\pm = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\theta \pm i\mathbf{e}_\varphi), \quad (2.22)$$

welche die geforderten Bedingungen erfüllen. Mit der konformen Zeit $x^0 = \eta$ erhalten wir aus (2.19) die polarisierte Boltzmann-Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{ab}}{\partial \eta} + \frac{1}{P^0} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial f_{ab}}{\partial x_i} + \frac{1}{P^0} \frac{dq^i}{d\lambda} \left(\frac{\partial f_{ab}}{\partial q^i} + \epsilon_{ak} \frac{\partial \epsilon_c^{k*}}{\partial q^i} f_{cb} + \epsilon_{bk}^* \frac{\partial \epsilon_c^k}{\partial q^i} f_{ac} \right) \\ + [e^i]_\mu [e_k]^\mu{}_{;\nu} \frac{P^\nu}{P^0} (\epsilon_{ai} \epsilon_c^{k*} f_{cb} + \epsilon_{bi}^* \epsilon_c^k f_{ac}) = \frac{1}{P^0} C_{ab}[f], \end{aligned} \quad (2.23)$$

mit $C_{ab}[f] = \epsilon_a^\mu \epsilon_b^{*\nu} C_{\mu\nu}[f]$, dem projizierten Stoßterm in der Polarisationsbasis, gegeben durch Gl. (2.45). Die Terme $[e^i]_\mu [e_k]^\mu{}_{;\nu} \frac{P^\nu}{P^0} (\epsilon_{ai} \epsilon_c^{*k} f_{cb} + \epsilon_{bi} \epsilon_c^k f_{ac})$ würden verschwinden, wenn wir eine parallel transportierte Polarisationsbasis gewählt hätten (siehe auch [21]).

Für unpolarisierte Strahlung ($f_{ab} = \delta_{ab} f$) können die Terme aus (2.23), welche explizit von den Polarisationsvektoren abhängen, vernachlässigt werden. Dies gilt wegen

$$\epsilon_{ak} \frac{\partial \epsilon_b^{*k}}{\partial q^i} + \epsilon_{bk}^* \frac{\partial \epsilon_a^k}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} (\epsilon_{ak} \epsilon_b^{*k}) = 0, \quad (2.24)$$

mit $\epsilon_{ak} \epsilon_b^{*k} = \delta_{ab}$ und

$$[e^i]_\mu [e_k]^\mu{}_{;\nu} (\epsilon_{ai} \epsilon_b^{*k} + \epsilon_{bi} \epsilon_a^k) = \epsilon_{ai} \epsilon_b^{*k} ([e^i]_\mu [e_k]^\mu)_{;\nu} = 0. \quad (2.25)$$

Damit reduziert sich Gl. (2.23) für unpolarisierte Strahlung auf die bekannten Standardgleichungen [44].

Aus demselben Grund sind die Terme, welche explizit von den Polarisationsvektoren abhängen, von mindestens zweiter Ordnung. Das liegt daran, dass $dq^i/d\lambda$ und $[e^i]_\mu [e_k]^\mu{}_{;\nu}$ in Gl. (2.23) beide von mindestens erster Ordnung sind, da sie die Isotropie brechen. In einer Rechnung erster Ordnung darf f_{ab} in Kombination mit diesen Termen gleich dem ungestörten $f_{ab}^{(0)}$ gesetzt werden, welches aber diagonal ist, weshalb die Terme wie oben gezeigt verschwinden. In zweiter Ordnung sind diese Terme allerdings vorhanden und müssen in der Rechnung berücksichtigt werden.

2.2.2. Vereinfachungen zur zweiten Ordnung

Die Gleichungen können zur zweiten Ordnung weiter vereinfacht werden. Im Folgenden zeigen wir, dass die Terme, welche durch die Wahl einer festen Polarisationsbasis entstehen (links vom Gleichheitszeichen in der zweiten Zeile von Gl. (2.23)), in zweiter Ordnung verschwinden, falls in erster Ordnung Vektor- und Tensorfluktuationen unterdrückt sind.

Nach Gleichung (2.23) besteht der entsprechende Term aus dem Produkt von

$$\epsilon_{ai} \epsilon_c^{*k} f_{cb}^{(1)} + \epsilon_{bi} \epsilon_c^k f_{ac}^{(1)} \quad (2.26)$$

und

$$[e^i]_\mu [e_k]^\mu{}_{;\nu} \left[\frac{P^\nu}{P^0} \right]^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\partial_i B_k^{(1)} - \partial_k B_i^{(1)} \right) - n_l \left(\partial_i E_{kl}^{(1)} - \partial_k E_{il}^{(1)} \right) + \dots \quad (2.27)$$

Die restlichen Terme sind proportional zu q_i oder q_k und verschwinden nach Multiplikation mit einem Polarisationsvektor aus (2.26).

In der Newtonrechnung verschwinden $B_i^{(1)}$ und $E_{ij}^{(1)}$, wenn es keine Vektor- und Tensorstörungen erster Ordnung gibt und die Terme liefern keinen Beitrag. Im Allgemeinen ist $B_i^{(1)}$ der Gradient einer skalaren Funktion, wenn es keine Vektormoden gibt, weshalb die Rotation von $B_i^{(1)}$ in (2.27) verschwindet. Genauso gilt in Abwesenheit von Tensorstörungen $E_{ij}^{(1)} = (\partial_i \partial_j - \delta_{ij} \partial^2) E^{(1)}$, weshalb

$$n_l \left(\partial_i E_{kl}^{(1)} - \partial_k E_{il}^{(1)} \right) = (n_i \partial_k - n_k \partial_i) \partial^2 E^{(1)} \quad (2.28)$$

nach Multiplikation mit einem Polarisationsvektor verschwindet. Das heißt, dass es in zweiter Ordnung keinen Unterschied macht, ob man eine feste Basis für die Polarisationsvektoren wählt, oder eine Paralleltransportierte, solange Tensor- und Vektormoden in erster Ordnung unterdrückt sind. Die bisherigen Messungen deuten auf unterdrückte Vektor- und Tensormoden hin, weshalb wir diese im Folgenden in erster Ordnung vernachlässigen und als Größen zweiter Ordnung auffassen.

Da die zusätzlichen Terme aus der Wahl der Polarisationsbasis bis zur zweiten Ordnung verschwinden, verwenden wir die feste zirkuläre Polarisationsbasis (2.22). Dies ist praktisch, da keine Ortsabhängigkeit in den Polarisationsvektoren auftritt.

2.2.3. Stoßterm

Um den polarisierten Stoßterm zu erhalten, berechnen wir die Quantenzeitentwicklung einer Einteilchendichtematrix. Dazu verwenden wir einen Formalismus für Neutrinomischung in einem Medium [81], welcher in [54] auf polarisierte Thomson-Streuung angewandt wurde. Ein allgemeinerer Ansatz, welcher höhere Mehrteilchenkorrelationen berücksichtigt, wird in [63] verwendet.

Wir entwickeln den Photonfeldoperator im lokalen Inertialsystem:

$$\mathbf{A}(\xi) = \sum_{a=\pm} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} (e^{-ip \cdot \xi} a_a(p) \epsilon_a(p) + e^{ip \cdot \xi} a_a^\dagger(p) \epsilon_a^*(p)). \quad (2.29)$$

Als Basisvektoren verwenden wir die zirkularen Polarisationsvektoren $\epsilon_\pm$. Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren folgen den üblichen Kommutationsrelationen:

$$[a_a(p), a_b^\dagger(p')] = \delta_{ab} (2\pi)^3 2p^0 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \equiv \delta_{ab} \delta(p - p'). \quad (2.30)$$

Die Dichtematrix ist durch den Erwartungswert $\langle a_b^\dagger(p) a_a(p') \rangle$ gegeben. Wegen der räumlichen Homogenität und Isotropie, welche angewendet werden darf, da Korrekturen aus den Metrikstörungen auf den mikroskopischen Skalen der Stöße vernachlässigbar sind, gilt

$$\langle a_b^\dagger(p) a_a(p') \rangle = \delta(p - p') \rho_{ab}(t, p). \quad (2.31)$$

Mit dem Anzahloperator

$$\hat{N} = \sum_{a=\pm} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} a_a^\dagger(p) a_a(p), \quad (2.32)$$

erhalten wir unter Verwendung von (2.31)

$$N = \langle \hat{N} \rangle = V \int d^3\mathbf{p} \operatorname{tr} \rho(t, p), \quad (2.33)$$

weshalb wir $\rho_{ab}(t, p)$ als Phasenraumverteilungsfunktion $f_{ba}(x^\lambda, q^i = ap^i)$ identifizieren. Da Stöße auf Längenskalen stattfinden, welche klein gegenüber den kosmologischen Skalen sind auf denen $f_{ba}(x^\lambda, q^i)$ variiert, kann die räumliche Abhängigkeit der Verteilungsfunktion im Stoßterm vernachlässigt werden.

Die Zeitentwicklung der Dichtematrix erhalten wir aus der Heisenberg-Gleichung für den Operator $D_{ab}(p) = a_b^\dagger(p) a_a(p)$:

$$\frac{d}{dt} D_{ab} = i [H, D_{ab}]. \quad (2.34)$$

Wir zerlegen den Hamiltonoperator in einen freien Anteil H_0 und einen wechselwirkenden Anteil H_I . Im Wechselwirkungsbild erhalten wir zur zweiten Ordnung in H_I [81]:

$$2p^0 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \frac{d}{dt} \rho_{ab}(t, p) = i \langle [H_I(t), D_{ab}(t, p)] \rangle - \int_0^t dt' \langle [H_I(t - t'), [H_I(t'), D_{ab}(t', p)]] \rangle. \quad (2.35)$$

Die elementare Wechselwirkung H_{QED} würde zur vierten Ordnung benötigt werden, um Comptonstreuung zu beschreiben. Wir arbeiten aber in einer effektiven Theorie, in der H_I durch

$$(-i) \int dt H_I(t) = \frac{(-i)^2}{2} \int d^4x d^4y T(H_{\text{QED}}(x) H_{\text{QED}}(y)) \quad (2.36)$$

gegeben ist. Nach einer kurzen Rechnung erhalten wir analog zu [54]

$$\begin{aligned} H_I(t) &= \sum_{a, a', s, s'} \int [dp][dp'] [dq][dq'] (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{q}' + \mathbf{p}' - \mathbf{q} - \mathbf{p}) e^{it(q^{0'} + p^{0'} - q^0 - p^0)} \\ &\quad \times M(pa; qs \rightarrow p'a'; q's') \alpha_{s'}^\dagger(q') a_{a'}^\dagger(p') a_a(p) \alpha_s(q). \end{aligned} \quad (2.37)$$

α und $\alpha^\dagger$ sind die Elektronerzeugungs- und Vernichtungsoperatoren; $[dp]$ ist das Integralmaß $\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0}$. $\mathbf{q}$ steht hier nicht für den mitbewegten Photonimpuls, sondern bezeichnet in diesem Abschnitt den Elektronimpuls. Das Matricelement für Comptonstreuung $\gamma(p, a) + e^-(q, s) \rightarrow \gamma(p', a') + e^-(q', s')$ ist gegeben durch

$$M(pa; qs \rightarrow p'a'; q's') = e^2 \bar{u}(q', s') \left[\not{\epsilon}_{a'}^*(p') \frac{\not{q} + \not{p}' + m_e}{(q+p)^2 - m_e^2} \not{\epsilon}_a(p) + \not{\epsilon}_a(p) \frac{\not{q} - \not{p}' + m_e}{(q-p')^2 - m_e^2} \not{\epsilon}_{a'}^*(p') \right] u(q, s). \quad (2.38)$$

Es gilt die nützliche Relation

$$M(pa; qs \rightarrow p'a'; q's') = M^*(p'a'; q's' \rightarrow pa; qs). \quad (2.39)$$

Der erste Term $\langle [H_I(t), D_{ab}(t, p)] \rangle$ in (2.35) verschwindet; für den Term zweiter Ordnung in H_I benötigen wir Erwartungswerte von vier Photon-Operatoren. Durch Stöße entstehen Korrelationen zwischen den beteiligten Teilchen, wir nehmen aber an, dass diese auf Zeitskalen zwischen zwei Comptonstreuungen durch Thermalisierung wieder zerfallen. Mit dieser Annahme lassen sich alle höheren Korrelationen durch die Einteilchenkorrelationen ausdrücken:

$$\begin{aligned} \langle a_{a'}^\dagger(q') a_a(q) a_{b'}^\dagger(p') a_b(p) \rangle &= \delta(q-p') \delta_{ab'} \langle a_{a'}^\dagger(q') a_b(p) \rangle + \langle a_{a'}^\dagger(q') a_{b'}^\dagger(p') a_a(q) a_b(p) \rangle \\ &\rightarrow \delta(q-p') \delta_{ab'} \langle a_{a'}^\dagger(q') a_b(p) \rangle + \langle a_{a'}^\dagger(q') a_a(q) \rangle \langle a_{b'}^\dagger(p') a_b(p) \rangle + \langle a_{a'}^\dagger(q') a_b(p) \rangle \langle a_{b'}^\dagger(p') a_a(q) \rangle \\ &= \delta(q-p') \delta(q'-p) \rho_{ba'}(p) [\delta_{ab'} + \rho_{ab'}(q)] + \delta(q-q') \delta(p-p') \rho_{aa'}(q) \rho_{bb'}(p). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Für die Elektronen sind die entsprechenden Ausdrücke einfacher, da wir annehmen, dass ihre Dichte hinreichend klein ist, um quadratische Terme zu vernachlässigen:

$$\langle \alpha_{s'}^\dagger(q') \alpha_s(q) \alpha_{r'}^\dagger(p') \alpha_r(p) \rangle \rightarrow \delta(q-p') \delta_{r's} \langle \alpha_{s'}^\dagger(q') \alpha_r(p) \rangle = \delta(q-p') \delta(q'-p) \delta_{sr'} \delta_{rs'} \frac{1}{2} g_e(q'), \quad (2.41)$$

mit $g_e(q)$, der Dichte über beide Elektronpolarisationen summiert.

Nach Berechnung des Erwartungswertes in (2.35) verbleibt das Zeitintegral

$$\int_0^t dt' e^{\pm i t' (q'^0 + p'^0 - q^0 - p^0)}. \quad (2.42)$$

Die Zeitskala einer Interaktion ist viel kürzer als die Zeit zwischen zwei Stößen. Dies ermöglicht es uns, die obere Grenze der Zeitintegration gegen unendlich zu schieben. Das Integral ergibt dann

$$\pm i \text{PV} \frac{1}{q'^0 + p'^0 - q^0 - p^0} + \pi \delta(q'^0 + p'^0 - q^0 - p^0). \quad (2.43)$$

Der imaginäre Principal-Value-Beitrag kann vernachlässigt werden, da er zu einem Selbstenergiebeitrag äquivalent ist. Nun muss nur noch ρ_{ba} durch f_{ab} ersetzt werden und wir erhalten aus (2.35)

$$2p^0 \frac{d}{dt} f_{ab}(p) = 2C_{ab}[f], \quad (2.44)$$

mit dem Stoßterm

$$\begin{aligned} C_{ab}[f] &= \frac{1}{4} \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2p'^0} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2q^0} \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3 2q'^0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q+p-q'-p') |\overline{M}|_{\lambda\lambda';\omega\omega'}^2 \\ &\times \left\{ g_e(q') f_{\lambda'\omega'}(p') \left[\delta_{a\lambda} (\delta_{\omega b} + f_{\omega b}(p)) + \delta_{\omega b} (\delta_{a\lambda} + f_{a\lambda}(p)) \right] \right. \\ &\quad \left. - g_e(q) \left[\delta_{a\lambda} f_{\omega b}(p) + \delta_{\omega b} f_{a\lambda}(p) \right] (\delta_{\lambda'\omega'} + f_{\lambda'\omega'}(p')) \right\}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Dabei haben wir die spingemittelte Comptonamplitude eingeführt:

$$|\overline{M}|_{\lambda\lambda';\omega\omega'}^2 = \frac{1}{2} \sum_{s,s'} M(p\lambda; qs \rightarrow p'\lambda'; q's') M^*(p\omega; qs \rightarrow p'\omega'; q's'). \quad (2.46)$$

Dies ist der Stoßterm, der auf der rechten Seite der Boltzmann-Gleichung (2.23) verwendet werden muss. Mittelt man über die Photonpolarisationen, erhält man den bekannten unpolarisierten Stoßterm.

Der Stoßterm lässt sich in einen Gewinn- und Verlustterm zerlegen, in denen die erwarteten Bose-Faktoren auftreten. Es gibt allerdings, im Vergleich zu den Rechnungen in [54] und [69], welche auf [71] basieren, Abweichungen im Verlustterm. Die Herleitung erfolgt dort durch eine Superposition reiner Polarisationszustände, allerdings ist der Verlustterm nichtlinear und das Superpositionsprinzip darf nicht angewendet werden. Es stellt sich heraus, dass die Differenzen in der zweiten Ordnung kosmologischer Störungstheorie für die frequenzintegrierten Resultate, welche zur Berechnung des C_l -Spektrums (siehe Gl. (2.157)) verwendet werden, keine Rolle spielen. In höheren Ordnungen erwarten wir allerdings Abweichungen.

2.2.4. Fouriertransformation und Multipolentwicklung

Um die partiellen Differentialgleichungen zu vereinfachen, führen wir eine Fouriertransformation des Ortes und eine Multipolzerlegung der Impulsrichtung durch. Wir definieren

$$A(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} A(\mathbf{k}). \quad (2.47)$$

In zweiter Ordnung treten Produkte von Größen erster Ordnung auf, welche nach der Fouriertransformation eine Faltung bilden. Wir führen die Kurznotation

$$A(\mathbf{k}_1)B(\mathbf{k}_2) \equiv \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) A(\mathbf{k}_1)B(\mathbf{k}_2) \quad (2.48)$$

ein.

Die Multipolzerlegung ist definiert durch

$$f_{ab}(\eta, \mathbf{k}, \mathbf{q}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (-i)^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} f_{ab,lm}(\eta, \mathbf{k}, \mathbf{q}) Y_{lm}^s(\mathbf{n}), \quad (2.49)$$

$$f_{ab,lm}(\eta, \mathbf{k}, \mathbf{q}) = i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int d\Omega Y_{lm}^{s*}(\mathbf{n}) f_{ab}(\eta, \mathbf{k}, q\mathbf{n}), \quad (2.50)$$

mit den Spinorkugelflächenfunktionen $Y_{lm}^s(\mathbf{n})$ (siehe Anhang (A.2)), welche aufgrund der Rotations-eigenschaften, die wir im Folgenden diskutieren, verwendet werden müssen.

Die zirkularen Polarisationsvektoren (2.22) transformieren unter einer Rotation des Koordinatensystems um die Achse der Photonpropagation mit dem Winkel $\Delta\Psi$ mit

$$\epsilon'_{a=\pm} = e^{\pm i\Delta\Psi} \epsilon_{a=\pm}, \quad (2.51)$$

also wie Spin ± 1 Größen. Die Phasenraumverteilungsfunktion f^{ij} ist invariant, so dass aus der Definition

$$f^{ij} = \sum_{ab} \epsilon_a^{i*} \epsilon_b^j f_{ab} \quad (2.52)$$

folgt, dass f_{++} und f_{--} ebenfalls invariant sind, während die Verteilungsfunktionen

$$f'_{\pm\mp} = e^{\pm 2i\Delta\Psi} f_{\pm\mp} \quad (2.53)$$

transformieren wie Spin ± 2 Größen. Um Multipolkoeffizienten zu erhalten, welche keinen Spin tragen, verwenden wir in (2.49) und (2.50) zur Multipolzerlegung die entsprechenden Spinorkugelflächenfunktionen mit entgegengesetztem Spin.

In der zirkularen Basis lautet die Relation zwischen Stokesparametern und den Helizitätskomponenten

$$f_{ab} = \begin{pmatrix} f_{++} & f_{+-} \\ f_{-+} & f_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_I - f_V & f_Q - if_U \\ f_Q + if_U & f_I + f_V \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Wir verwenden nun Spinorkugelflächenfunktionen mit passendem Spin und definieren aus den linearen Moden Q und U die neuen Polarisationsmoden E und B.

$$\begin{aligned} f_{I,lm} &= i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int d\Omega Y_{lm}^*(\mathbf{n}) f_I(\mathbf{n}), \\ f_{V,lm} &= i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int d\Omega Y_{lm}^*(\mathbf{n}) f_V(\mathbf{n}), \\ f_{E,lm} \pm if_{B,lm} &= i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int d\Omega Y_{lm}^{\mp 2*}(\mathbf{n}) [f_Q(\mathbf{n}) \pm if_U(\mathbf{n})]. \end{aligned} \quad (2.55)$$

f_I beschreibt, als Summe über f_{++} und f_{--} , die Photondichte gemittelt über beide Photonpolarisationen. f_V , die Differenz zwischen den Komponenten f_{--} und f_{++} , ist die zirkulare Polarisation. Die beiden linearen Polarisierungen bilden die E- und B-Polarisation, wobei die E-Polarisation ein Gradientenfeld auf der Kugel ist und die B-Polarisation ein Rotationsfeld. Beide Moden sind durch die Verwendung der spingewichteten Kugelflächenfunktionen, im Gegensatz zu den Moden Q und U, invariant unter Rotationen um die Achse der Photonpropagation. Die Verbindung dieser Moden zu den Helizitätskomponenten ist gegeben durch

$$f_{X,lm} = U_{X;[ab]} f_{ab,lm}, \quad (2.56)$$

mit $[ab]$ einem kombinierten Index, welcher die Werte $++$, $--$, $+-$, $-+$ annimmt und $X = I, V, E, B$. $U_{X;[ab]}$ und die inverse Matrix $U_{[ab];X}^{-1}$ sind gegeben durch

$$U_{X;[ab]} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2i} \end{pmatrix}, \quad U_{[ab];X}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Für die Matrix U gilt die nützliche Relation:

$$U_{[ab];X}^{-1} = U_{[ba];X}^{-1*} = 2U_{X;[ab]}^*. \quad (2.58)$$

Durch Verwendung der Multipole nehmen die Impulsableitungen in (2.23) eine einfache Form an, da die Abhängigkeit der Impulsorientierung in den Kugelflächenfunktionen isoliert wird. Für die Ableitung der Polarisationsvektoren erhalten wir mit Gl. (2.22)

$$\epsilon_{bk}^* \frac{\partial \epsilon_c^k}{\partial q^i} = \mp \frac{i}{q \tan \theta} e_{\varphi i} \delta_{bc}, \quad (2.59)$$

mit dem oberen (unteren) Vorzeichen für $b = c = +$ ($b = c = -$). Diese Terme ergeben in Kombination mit den Richtungsableitungen der Kugelflächenfunktionen, unter Verwendung von (A.9), die spinerhöhenden und -senkenden Operatoren $\bar{\partial}_s$ und $\bar{\partial}_s$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{ab}}{\partial q^i} + \epsilon_{ak} \frac{\partial \epsilon_c^{k*}}{\partial q^i} f_{cb} + \epsilon_{bk}^* \frac{\partial \epsilon_c^k}{\partial q^i} f_{ac} &= \frac{\partial f_{ab}}{\partial q^i} + \frac{2ie_{\varphi i}}{q \tan \theta} \begin{pmatrix} 0 & f_{+-} \\ -f_{-+} & 0 \end{pmatrix}_{ab} \\ &= \sum_{l,m} (-i)^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \left\{ Y_{lm}^s \frac{\partial f_{ab,lm}}{\partial q} n^i + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{f_{ab,lm}}{q} (\epsilon_-^i \bar{\partial}_s Y_{lm}^s + \epsilon_+^i \bar{\partial}_s Y_{lm}^s) \right\}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Hier sieht man, wie die Impulsableitungen mit den Ableitungen der Polarisationsvektoren zusammengefasst werden, welche dann in die Ableitung nach dem Betrag q und die Operatoren $\bar{\partial}_s$ und $\bar{\partial}_s$ zerfallen. In dieser Form ist es offensichtlich, dass jeder Term einen wohldefinierten Spin hat und keine unphysikalischen Mischungen des Spins auftreten, da die Polarisationsvektoren passend mit den Operatoren $\bar{\partial}_s$ und $\bar{\partial}_s$ kombiniert werden. Dies ist wichtig, um kovariante Gleichungen aufzuschreiben, welche die I-Mode mit den Polarisationsmoden E und B verbinden. Mit dem passenden s erhalten wir, wie beabsichtigt Multipolkomponenten, welche keinen Spin mehr tragen. Die auftretenden Ableitungen der Spinorkugelflächenfunktionen können nach (A.10) berechnet werden.

2.3. Entwicklung des Propagationsterms zur zweiten Ordnung

Nachdem wir die Boltzmann-Gleichung hergeleitet haben, beginnen wir nun mit der Entwicklung zur zweiten Ordnung in kosmologischer Störungstheorie. Diese Genauigkeit wird benötigt um den Untergrund zu unterdrückten Effekten erster Ordnung, wie z.B. B-Polarisation aus Tensormoden oder Abweichungen von der Gaußverteilung der Spektren, präzise bestimmen zu können. Mit den Vereinfachungen aus Kapitel 2.2.2, erhalten wir in erster und zweiter Ordnung

$$\left[\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{q^i}{aE} \frac{\partial}{\partial x^i} \right] f_{ab}^{(1)} + \left[\frac{1}{P^0} \frac{dq^i}{d\lambda} \right]^{(1)} \frac{q^i}{q} \frac{\partial f_{ab}^{(0)}}{\partial q} = \left[\frac{1}{P^0} C_{ab}[f] \right]^{(1)}, \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{q^i}{aE} \frac{\partial}{\partial x^i} \right] f_{ab}^{(2)} + \left[\frac{P^i}{P^0} \right]^{(1)} \frac{\partial f_{ab}^{(1)}}{\partial x^i} + \left[\frac{1}{P^0} \frac{dq^i}{d\lambda} \right]^{(1)} \left(\frac{\partial f_{ab}^{(1)}}{\partial q^i} + \epsilon_{ak} \frac{\partial \epsilon_c^{k*}}{\partial q^i} f_{cb}^{(1)} + \epsilon_{bk}^* \frac{\partial \epsilon_c^k}{\partial q^i} f_{ac}^{(1)} \right) \\ + \left[\frac{1}{P^0} \frac{dq^i}{d\lambda} \right]^{(2)} \frac{q^i}{q} \frac{\partial f_{ab}^{(0)}}{\partial q} = \left[\frac{1}{P^0} C_{ab}[f] \right]^{(2)}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

wobei wir verwendet haben, dass

$$\frac{1}{P^0} \frac{dx^i}{d\lambda} = \frac{P^i}{P^0} = \frac{q^i}{aE} \quad (2.63)$$

in nullter Ordnung gilt. Der Propagationsterm beschreibt nicht nur Photonen, sondern ist völlig allgemein gehalten, so dass er auch für Baryonen und kalte dunkle Materie verwendet werden kann. Für Photonen lässt er sich, durch Anwendung der Relation $E = |\mathbf{p}| = |\mathbf{q}|/a = q/a$ und $q^i/q = n^i$, weiter vereinfachen. Um die Ergebnisse allgemein zu halten, benutzen wir diese Vereinfachung aber noch nicht. Gleichung (2.61) ergibt die linke Seite der Boltzmann-Gleichung erster Ordnung. Durch die Fouriertransformation wird $\partial/\partial x^i$ durch ik^i ersetzt. Die Gleichungen zweiter Ordnung enthalten aber Produkte von Größen erster Ordnung. Diese werden durch die Fouriertransformation zu Faltungen (siehe Gl. (2.48)). Zum Beispiel ergibt der Term $\left[\frac{P^i}{P^0} \right]^{(1)} \frac{\partial f_{ab}^{(1)}}{\partial x^i}$ aus Gl. (2.62):

$$\left[\frac{P^i}{P^0} \right]^{(1)} \frac{\partial f_{ab}^{(1)}}{\partial x^i} \rightarrow \left[\frac{P^i}{P^0} \right]^{(1)} (k_1) ik_2^i f_{ab}^{(1)}(k_2) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \left[\frac{P^i}{P^0} \right]^{(1)} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') ik'^i f_{ab}^{(1)}(\mathbf{k}'). \quad (2.64)$$

2.3.1. Impulsableitungen

Um (2.62) zu berechnen, müssen wir den kovarianten Impuls durch den mitbewegten Impuls ausdrücken. Mit Hilfe der Vierbeine aus (A.1) und der Relation $P^\mu = [e_A]^\mu p^A$ erhalten wir

$$P^0 = \frac{E}{a} \left(1 - A + \frac{3A^2}{2} - \frac{q^i B_i}{aE} + \dots \right), \quad (2.65)$$

$$P^i = \frac{q^i}{a^2} \left(1 - D + \frac{3D^2}{2} \right) - \frac{q^k}{a^2} E_{ki} + \dots, \quad (2.66)$$

zur zweiten Ordnung. Dies ergibt in erster Ordnung den Zusammenhang

$$\left[\frac{P^i}{P^0} \right]^{(1)} = \frac{q^i}{aE} \left(A^{(1)} - D^{(1)} \right). \quad (2.67)$$

Die Ableitung $dq^i/d\lambda$ entlang der Teilchenbahn in Gl. (2.61) folgt aus der Geodätengleichung:

$$\frac{dp^i}{d\lambda} = \frac{d([e^i]_\mu P^\mu)}{d\lambda} = \frac{\partial[e^i]_\mu}{\partial x^\nu} P^\nu P^\mu + [e^i]_\mu (-\Gamma_{\nu\rho}^\mu P^\nu P^\rho) = [e^i]_{\mu;\nu} P^\mu P^\nu. \quad (2.68)$$

Mit Gl. (2.66) erhalten wir schließlich

$$\frac{1}{P^0} \frac{dq^i}{d\lambda} = \frac{dq^i}{d\eta} = \frac{da}{d\eta} p^i + \frac{a}{P^0} \frac{dp^i}{d\lambda} = H_c q^i + a [e^i]_{\mu;\nu} \frac{P^\mu P^\nu}{P^0}, \quad (2.69)$$

wobei $H_c = a^{-1} da/d\eta$ der konforme Hubble-Parameter ist. Die Ableitung verschwindet offensichtlich in nullter Ordnung; in den folgenden Ordnungen gilt:

$$\left[\frac{1}{P^0} \frac{dq^i}{d\lambda} \right]^{(1)} = -aE \partial^i A^{(1)} - q^i \dot{D}^{(1)} + \frac{q^j q^k}{aE} \left(\delta_{jk} \partial^i D^{(1)} - \delta_{ij} \partial^k D^{(1)} \right), \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{q^i}{q} \left[\frac{1}{P^0} \frac{dq^i}{d\lambda} \right]^{(2)} &= -\frac{aE}{q} q^i \partial^i A^{(2)} - q \dot{D}^{(2)} - \frac{q^i q^j}{q} \dot{B}_{ij}^{(2)} + \frac{aE}{q} q^i \dot{B}_i^{(2)} + \frac{(a^2 E^2 - q^2)}{qaE} q^i H_c B_i^{(2)} \\ &\quad + \frac{aE}{q} q^i \partial^i A^{(1)} \left(A^{(1)} + D^{(1)} \right) + 2q D^{(1)} \dot{D}^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Dabei bezeichnen wir die Ableitung nach der konformen Zeit mit einem Punkt und die räumliche Ableitung mit $\partial^i = \partial/\partial x^i$.

2.3.2. Multipoltransformation

Um die Multipolzerlegung von (2.61) und (2.62) zu erhalten, setzen wir (2.49) für die Phasenraumverteilungen ein. Der Richtungsvektor $\mathbf{n}$ und die Polarisationsvektoren ϵ werden ebenfalls in Kugelflächenfunktionen zerlegt:

$$\begin{aligned} n^i &= \sum_m \xi_m^i \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1m}, & n^i n^j &= \chi_0^{ij} \sqrt{4\pi} Y_{00} + \sum_m \chi_{2m}^{ij} \sqrt{\frac{4\pi}{5}} Y_{2m}, \\ \epsilon_+^i &= \sum_m \xi_m^i \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1m}^{+1}, & \epsilon_-^i &= -\sum_m \xi_m^i \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1m}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Die Multipolkoeffizienten ξ_m^i (für $m = 0, \pm 1$), $\chi_0^{ij} = \frac{1}{3} \delta^{ij}$ und χ_{2m}^{ij} (für $m = 0, \pm 1, \pm 2$) können explizit berechnet werden und sind in Gleichung (A.3) angegeben. Für Vektoren V und spurfreie symmetrische Tensoren T definieren wir sphärische Komponenten mit

$$\begin{aligned} V_{[0]} &= iV_3, & V_{[\pm 1]} &= \mp \frac{i}{\sqrt{2}} (V_1 \mp iV_2), \\ T_{[0]} &= -\frac{3}{2} T_{33}, & T_{[\pm 1]} &= \pm \sqrt{2} (T_{13} \mp iT_{23}), \\ T_{[\pm 2]} &= -\frac{1}{\sqrt{6}} (T_{11} - T_{22} \mp 2iT_{12}). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Dann ist die Kontraktion eines Vektors oder Tensors mit den Multipolkomponenten des Richtungsvektors gegeben durch

$$\begin{aligned} \xi_m^i V_i &= (-i) V_{[m]}, \\ \chi_{2m}^{ij} T_{ij} &= -\alpha_m T_{[m]}, \quad (\text{keine Summe über } m) \end{aligned} \quad (2.74)$$

mit $\alpha_0 = \frac{2}{3}$, $\alpha_{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $\alpha_2 = 1$. Nachdem wir diese Ersetzungen durchgeführt haben, ist die Abhängigkeit von $\hat{\mathbf{n}}$ allein durch Kugelflächenfunktionen gegeben. Mit Hilfe von Gl. (A.5) werden diese zu einer einzigen Kugelflächenfunktion zusammengefasst. Jetzt kann der Operator

$$L \equiv i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int d\Omega Y_{lm}^{s*}(\mathbf{n}) \quad (2.75)$$

problemlos angewandt werden, wodurch (2.61) und (2.62) auf die lm -Multipolkomponenten projiziert werden. Zuletzt transformieren wir noch von der Helizitätsbasis in die Stokesparameterbasis und erhalten die gesuchten Propagationsterme.

2.3.3. Free-Streaming-Term

Wir beginnen mit den drei Raumzeitableitungstermen in (2.62), welche nach Fouriertransformation zu

$$\frac{\partial f_{ab}^{(2)}}{\partial \eta}, \quad \frac{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}}{aE} f_{ab}^{(2)} \quad \text{und} \quad \left[\frac{P^i}{P^0} \right]^{(1)}(\mathbf{k}_1) i k_2^i f_{ab}^{(1)}(\mathbf{k}_2) \quad (2.76)$$

werden. Die Multipoltransformation der Zeitableitung ist trivial

$$L \left[\frac{\partial f_{ab}^{(2)}}{\partial \eta} \right] = \frac{\partial}{\partial \eta} f_{ab,lm}^{(2)}(\mathbf{k}). \quad (2.77)$$

Für die anderen Terme verwenden wir die Methode aus Kapitel 2.3.2. Wir entwickeln $q^i = qn^i$ und $f_{ab}^{(2)}$ in Multipolkomponenten und fassen die sphärische Abhängigkeit, nach Gl. (A.5), in einer einzigen Kugelflächenfunktion zusammen:

$$\begin{aligned} \frac{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}}{aE} f_{ab}^{(2)} &= \frac{iq}{aE} \sum_{m_2} \xi_{m_2}^i \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1m_2} k^i \sum_{l_1, m_1} (-i)^{l_1} \sqrt{\frac{4\pi}{2l_1+1}} f_{ab, l_1 m_1}^{(2)}(\mathbf{k}) Y_{l_1 m_1}^s \\ &= \sum_{m_2=-1}^1 \frac{q k^{[m_2]}}{aE} \sum_{l_1, m_1} (-i)^{l_1} \sqrt{\frac{4\pi}{2l_1+1}} \sum_{L=|l_1-1|}^{l_1+1} \sum_{S, M=-L}^L \\ &\quad \times \frac{\sqrt{2l_1+1}}{\sqrt{2L+1}} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & L \\ -s & 0 & -S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & L \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix} Y_{LM}^S f_{ab, l_1 m_1}^{(2)}(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Nun ist es einfach, den Operator L aus (2.75) anzuwenden, welcher $L = l$ und $M = m$ setzt. Um die Summen mit den Kronecker-Symbolen zu kontrahieren, formen wir die Summationen um:

$$\sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} \sum_{L=|l_1-1|}^{l_1+1} \sum_{M=-L}^L = \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{l_1=|L-1|}^{L+1} \sum_{M=-L}^L \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} \quad (2.79)$$

und erhalten

$$L \left[\frac{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}}{aE} f_{ab}^{(2)} \right] = \sum_{m_2=-1}^1 \frac{q k^{[m_2]}}{aE} \sum_{l_1=|l-1|}^{l+1} \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} i^{l-l_1} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l \\ -s & 0 & -s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} f_{ab, l_1 m_1}^{(2)}(\mathbf{k}), \quad (2.80)$$

mit der Kurznotation $m_2 = m - m_1$ in Analogie zu der Kurznotation der Faltungen. Der erste Clebsch-Gordan-Koeffizient verschwindet für $S \neq s$, was es ermöglicht, die Summe über S auszuführen. s ist für $ab = ++, --$ durch Null gegeben, für $ab = \pm\mp$ nimmt es die Werte $s = \pm 2$ an. Aufgrund der Eigenschaften der Clebsch-Gordan-Koeffizienten trägt im ersten Fall nur $l_1 = l \pm 1$ zur Summe bei, während für die Nichtdiagonalen $ab = \pm\mp$ auch $l_1 = l$ beiträgt. Gl. (2.80) reproduziert den bekannten Free-Streaming Term erster Ordnung.

Der unterschiedliche Spin der $+-$ und $-+$ Komponente führt zu einer Mischung der E- und B-Polarisation in der Stokesparameter-Basis. Die Gleichungen der E- und B-Polarisation bestehen aus einer Summe bzw. einer Differenz der $+-$ und $-+$ Komponenten (siehe Gl. 2.56). Aufgrund des entgegengesetzten Spins dieser Komponenten treten in der Summe oder Differenz Clebsch-Gordan-Koeffizienten mit entgegengesetzten m -Einträgen aus Gl. (2.80) auf. Für diese gilt die Relation:

$$\begin{pmatrix} l_1 & 1 & l \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^{l_1+1-l} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (2.81)$$

Bis auf dieses Vorzeichen sind die Vorfaktoren von f_{+-} und f_{-+} in Gl. (2.80) identisch. Ist $l_1 + 1 - l$ gerade, unterscheiden sich diese also nicht und es tritt keine Mischung in der IVEB-Basis auf. Ist $l_1 + 1 - l$ aber ungerade, erhalten wir in der Summe oder Differenz ein zusätzliches relatives Vorzeichen, welches die E-Mode $f_{E,lm} = \frac{1}{2}(f_{+-,lm} + f_{-+,lm})$ in $-i$ mal die B-Mode $-if_{B,lm} = \frac{1}{2}(f_{+-,lm} - f_{-+,lm})$, oder umgekehrt, umwandelt.

Um die Gleichungen in der IVEB-Basis kompakt aufzuschreiben, definieren wir die Mischungsmatrix $H_{XY}(l)$ mit

$$H_{XY}(l) = \delta_{XY} \quad \text{für } l \text{ gerade}, \quad H_{XY}(l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } l \text{ ungerade} \quad (2.82)$$

und

$$F_X = \begin{cases} 0 & X = I, V \\ -2 & X = E, B \end{cases}. \quad (2.83)$$

Wir benutzen (2.56) und erhalten:

$$\begin{aligned} L \left[\frac{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}}{aE} f_X^{(2)} \right] &= \sum_{m_2=-1}^1 \frac{qk^{[m_2]}}{aE} \sum_{l_1=|l-1|}^{l+1} \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} i^{l-l_1} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l \\ F_X & 0 & F_X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \\ &\times \sum_Y H_{XY}^*(l_1 + 1 - l) f_{Y,l_1 m_1}^{(2)}(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (2.84)$$

Die Mischung zwischen der E- und B-Polarisation ist in der Summe über Y enthalten, welche aufgrund der einfachen Struktur der Matrix H_{XY} für $Y = I, V$ trivial ist (es tritt in dem Fall keine Mischung auf). Für $Y = E, B$ und gerades Argument $l_1 + 1 - l$ ist die Matrix ebenfalls diagonal, für ungerades Argument erzeugt H_{XY} die benötigte Mischung der Moden.

Außerdem tritt die Mischung nur für nichtskalare Moden auf. Ist $\mathbf{k}$ in z-Richtung orientiert, trägt in der Summe, wegen dem Vorfaktor $k^{[m_2]}$, nur $m_2 = 0$ bei. In dieser Orientierung sind skalare Moden durch $m = 0$ gegeben. In Gl. (2.84) tritt also der Clebsch-Gordan-Koeffizient

$$\begin{pmatrix} l_1 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

auf, welcher für ungerades $l_1 + 1 - l$, also genau dann wenn Mischung auftreten würde, verschwindet.

Der letzte Term aus (2.76) lässt sich analog berechnen. Mit (2.67) erhalten wir

$$L \left[\left[\frac{P^i}{P^0} \right]^{(1)}(\mathbf{k}_1) i k_2^i f_{ab}^{(1)}(\mathbf{k}_2) \right] = (A^{(1)} - D^{(1)})(\mathbf{k}_1) L \left[\frac{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}_2}{aE} f_{ab}^{(1)} \right]. \quad (2.86)$$

Die Faltung ist hier nach (2.48) implizit geschrieben. Durch Anwendung des L -Operators ergibt dies Gleichung (2.80) mit den Ersetzungen $k^{[m_2]} \rightarrow k_2^{[m_2]}$ und $f_{ab,l_1 m_1}^{(2)}(\mathbf{k}) \rightarrow f_{ab,l_1 m_1}^{(1)}(\mathbf{k}_2)$.

Auch hier gibt es eine Umwandlung von E- in B-Polarisation. Der Term beruht auf der Metrikstörung A und D und wird Time-Delay genannt [43]. Das Besondere an diesem Term ist, dass er sogar für skalare Moden zu einer Mischung der Polarisationen führt. Die EB-Mischung ist in beiden Termen mit der Struktur

$$\begin{pmatrix} l & 1 & l \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & 1 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} = \delta_{m_1, m-m_2} \times \frac{1}{l(l+1)} \times \begin{cases} 2m & m_2 = 0 \\ \mp \sqrt{2(l+1 \mp m)(l \pm m)} & m_2 = \pm 1 \end{cases} \quad (2.87)$$

verbunden. Es stellt sich die Frage, warum bei gleicher Struktur, in Gl. (2.84) keine Mischung für skalare Moden auftritt. Der Unterschied liegt in dem relevanten Wellenvektor. In Gl. (2.84) ist dies $k^{[m_2]}$, während in (2.86) $k_2^{[m_2]}$ vorkommt. Im ersten Fall kann das Koordinatensystem immer so rotiert werden, dass nur $m_2 = 0$ beiträgt (wie vorher gezeigt). Dies ist im Time-Delay-Term wegen dem Faltungsintegral über k_2 nicht möglich. Für $m_2 = 0$ erhalten wir das bekannte Ergebnis, dass skalare Moden ($m = 0$ in dieser Basis) nicht mischen, während im Time-Delay-Term immer auch $m_2 \neq 0$ benötigt wird, weshalb auch skalare Moden mischen, solange die Metrikstörungen A und D nicht verschwinden.

Fassen wir die Terme zusammen erhalten wir insgesamt:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta} f_{X,lm}^{(2)}(\mathbf{k}) + \sum_{m_2=-1}^1 \sum_{l_1=|l-1|}^{l+1} \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} i^{l-l_1} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l \\ F_X & 0 & F_X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \\ & \times \sum_Y H_{XY}^*(l_1 + 1 - l) \left[\frac{q k^{[m_2]}}{aE} f_{Y,l_1 m_1}^{(2)}(\mathbf{k}) + (A^{(1)} - D^{(1)})(\mathbf{k}_1) \frac{q k_2^{[m_2]}}{aE} f_{Y,l_1 m_1}^{(1)}(\mathbf{k}_2) \right]. \end{aligned} \quad (2.88)$$

2.3.4. Impulsableitungsterme

Nun berechnen wir die Zerlegung der Terme mit einer Impulsableitung $dq^i/d\lambda$ aus (2.62). Mit (2.70) und (2.60) ist der erste Term gegeben durch:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{P^0} \frac{dq^i}{d\lambda} \right]^{(1)} \left(\frac{\partial f_{ab}^{(1)}}{\partial q^i} + \epsilon_{ak} \frac{\partial \epsilon_c^{k*}}{\partial q^i} f_{cb}^{(1)} + \epsilon_{bk}^* \frac{\partial \epsilon_c^k}{\partial q^i} f_{ac}^{(1)} \right) \\ & = (-1) \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} (-i)^{l_1} \sqrt{\frac{4\pi}{2l_1+1}} \left\{ \left[\frac{aE}{q} i \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_1 A^{(1)}(\mathbf{k}_1) + \dot{D}^{(1)}(\mathbf{k}_1) \right] Y_{l_1 m_1}^s q \frac{\partial}{\partial q} f_{ab, l_1 m_1}^{(1)}(\mathbf{k}_2) \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{aE}{q} i k_1^i A^{(1)}(\mathbf{k}_1) - \frac{q}{aE} i k_1^i D^{(1)}(\mathbf{k}_1) \right] \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_-^i \bar{\partial}_s Y_{l_1 m_1}^s + \epsilon_+^i \bar{\partial}_s Y_{l_1 m_1}^s) f_{ab, l_1 m_1}^{(1)}(\mathbf{k}_2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Wieder drücken wir $\mathbf{n}$ und die Polarisationsvektoren ϵ nach (2.72) durch Kugelflächenfunktionen aus. In Verbindung mit den spinerhöhenden und -senkenden Operatoren verwenden wir die Relation:

$$i k_1^i (\epsilon_-^i \bar{\partial}_s Y_{l_1 m_1}^s + \epsilon_+^i \bar{\partial}_s Y_{l_1 m_1}^s) = - \sum_{m_2=-1}^1 k_1^{[m_2]} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left([l_1]_s^+ Y_{1 m_2}^{-1} Y_{l_1 m_1}^{s+1} + [l_1]_s^- Y_{1 m_2}^{+1} Y_{l_1 m_1}^{s-1} \right), \quad (2.90)$$

wobei wir die Ableitungen der Spinorkugelflächenfunktionen nach Gl. (A.10) berechnet haben. Wir fassen alle Kugelflächenfunktionen unter Verwendung von Gl. (A.5) zusammen und wenden den Ope-

rator L (siehe Gl. (2.75)) an.

$$\begin{aligned}
 L\left[\text{Gl. (2.89)}\right]_{ab} &= -\dot{D}^{(1)}(\mathbf{k}_1) q \frac{\partial}{\partial q} f_{ab,lm}^{(1)}(\mathbf{k}_2) + \sum_{m_2=-1}^1 \sum_{l_1=|l-1|}^{l+1} \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} i^{l-l_1} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \\
 &\times \left\{ \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l \\ -s & 0 & -s \end{pmatrix} \left(-\frac{aE}{q}\right) k_1^{[m_2]} A^{(1)}(\mathbf{k}_1) q \frac{\partial}{\partial q} f_{ab,l_1 m_1}^{(1)}(\mathbf{k}_2) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ [l_1]_s^+ \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l \\ -(s+1) & 1 & -s \end{pmatrix} + [l_1]_s^- \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l \\ -(s-1) & -1 & -s \end{pmatrix} \right\} \right. \\
 &\quad \left. \times k_1^{[m_2]} \left[\frac{aE}{q} A^{(1)}(\mathbf{k}_1) - \frac{q}{aE} D^{(1)}(\mathbf{k}_1) \right] f_{ab,l_1 m_1}^{(1)}(\mathbf{k}_2) \right\}. \tag{2.91}
 \end{aligned}$$

Auch hier tritt, wie im Time-Delay-Term, eine Mischung zwischen E- und B-Polarisation auf. Die letzten beiden Zeilen dieser Gleichung, aus der Richtungsableitung der Photonfluktuation, sind die Weak-Lensing-Terme zur zweiten Ordnung [57]. Mit $\kappa(s)$, dem Ausdruck in geschweiften Klammern in der dritten Zeile von (2.91), gilt $\kappa(-2) = (-1)^{l_1+1-l} \kappa(2)$ analog zu der Relation der Clebsch-Gordan-Koeffizienten aus (2.81). Deshalb kann auch hier die Mischungsmatrix H_{XY} verwendet werden. In der IVEB-Basis erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
 L\left[\text{Gl. (2.89)}\right]_X &= -\dot{D}^{(1)}(\mathbf{k}_1) q \frac{\partial}{\partial q} f_{X,lm}^{(1)}(\mathbf{k}_2) + \sum_{m_2=-1}^1 \sum_{l_1=|l-1|}^{l+1} \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} i^{l-l_1} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \\
 &\times \left\{ \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l \\ F_X & 0 & F_X \end{pmatrix} \left(-\frac{aE}{q}\right) k_1^{[m_2]} A^{(1)}(\mathbf{k}_1) \sum_Y H_{XY}^*(l_1+1-l) q \frac{\partial}{\partial q} f_{Y,l_1 m_1}^{(1)}(\mathbf{k}_2) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ [l_1]_{F_X}^- \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l \\ F_X-1 & 1 & F_X \end{pmatrix} + [l_1]_{F_X}^+ \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l \\ F_X+1 & -1 & F_X \end{pmatrix} \right\} \right. \\
 &\quad \left. \times k_1^{[m_2]} \left[\frac{aE}{q} A^{(1)}(\mathbf{k}_1) - \frac{q}{aE} D^{(1)}(\mathbf{k}_1) \right] \sum_Y H_{XY}^*(l_1+1-l) f_{Y,l_1 m_1}^{(1)}(\mathbf{k}_2) \right\}. \tag{2.92}
 \end{aligned}$$

Die restlichen Terme der linken Seite der Boltzmanngleichung stammen aus Gl. (2.71):

$$\left[\frac{1}{P^0} \frac{dq^i}{d\lambda} \right]^{(2)} \frac{q^i}{q} \frac{\partial f_{ab}^{(0)}}{\partial q} = \left[X + Y_i \frac{q^i}{q} - \dot{E}_{ij}^{(2)} \frac{q^i q^j}{q^2} \right] \delta_{ab} q \frac{\partial f_I^{(0)}}{\partial q}, \tag{2.93}$$

wobei X und Y_i die q -unabhängigen, bzw. die Terme linear in q^i darstellen. Die einzige q -Abhängigkeit in diesen Termen ist explizit polynomial gegeben. Da der höchste Term quadratisch ist, tragen in der Multipolentwicklung nur $l = 0, 1, 2$ bei. Der quadratische Term ergibt

$$\dot{E}_{ij}^{(2)} \frac{q^i q^j}{q^2} = \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \sum_{m_2=-2}^2 \chi_{2m_2}^{ij} Y_{2m_2} \dot{E}_{ij}^{(2)} = -\sqrt{\frac{4\pi}{5}} \sum_{m_2=-2}^2 \alpha_{m_2} \dot{E}_{[m_2]}^{(2)} Y_{2m_2}, \tag{2.94}$$

mit (2.72), (2.74) und der Spurfreiheit von E_{ij} . Die übrigen Terme sind unproblematisch und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 L\left[\left[\frac{1}{P^0} \frac{dq^i}{d\lambda}\right]^{(2)} \frac{q^i}{q} \frac{\partial f_{ab}^{(0)}}{\partial q}\right] &= \left\{ \left[-\dot{D}^{(2)}(\mathbf{k}) + 2D^{(1)}(\mathbf{k}_1) \dot{D}^{(1)}(\mathbf{k}_2) \right] \delta_{l0} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{aE}{q} \left[-ik^{[m]} A^{(2)}(\mathbf{k}) + ik_1^{[m]} A^{(1)}(\mathbf{k}_1) \left(A^{(1)}(\mathbf{k}_2) + D^{(1)}(\mathbf{k}_2) \right) + \dot{B}_{[m]}^{(2)}(\mathbf{k}) + H_c \left(1 - \frac{q^2}{a^2 E^2} \right) B_{[m]}^{(2)}(\mathbf{k}) \right] \delta_{l1} \right\}
 \end{aligned}$$

$$- \alpha_m \dot{E}_{[m]}^{(2)}(\mathbf{k}) \delta_{l2} \left. \vphantom{\frac{\partial f_I^{(0)}}{\partial q}} \right\} \delta_{ab} q \frac{\partial f_I^{(0)}}{\partial q}. \quad (2.95)$$

Die Transformation in die IVEB-Polarisationsbasis entspricht aufgrund der einfachen Struktur lediglich der Vertauschung $\delta_{ab} \rightarrow \delta_{XI}$.

Die Boltzmann-Gleichung für $f_{X,lm}^{(2)}(\mathbf{k})$ zur zweiten Ordnung ist durch die Summe von Gl. (2.88), (2.92) und (2.95) gegeben. Der fehlende Stoßterm wird im folgenden Kapitel berechnet. Für Photonen können wir noch die Vereinfachung $aE/q = 1$ verwenden, wodurch der Term proportional zu H_c in der zweiten Zeile von Gl. (2.95) verschwindet.

2.4. Entwicklung des Stoßterms zur zweiten Ordnung

In diesem Kapitel berechnen wir die Entwicklung des Stoßterms. Zuerst entwickeln wir (2.45) zur zweiten Ordnung, dann wenden wir den Operator (2.75) an, welcher die Multipolkomponenten herausprojiziert. Dabei folgen wir der Rechnung aus [22], verallgemeinert auf polarisierte Verteilungsfunktionen.

2.4.1. Nichtrelativistische Entwicklung

Die letzten Wechselwirkungen der kosmischen Hintergrundstrahlung mit Elektronen stammen aus der Zeit der Rekombination, wenn das Universum eine Temperatur von ca. 1 eV hat. Die Elektronen sind dann bereits nichtrelativistisch mit thermischen Geschwindigkeiten von

$$\frac{|q|}{m_e} \sim \sqrt{\frac{T_e}{m_e}} \approx 10^{-3}. \quad (2.96)$$

Wir führen eine Entwicklung der Streumatrix in dieser Größe durch und zählen diese, aufgrund der ähnlichen Größenordnung, wie die Entwicklung in kosmologischer Störungstheorie.

Die Elektronen sind zur Zeit der Rekombination im thermischem Gleichgewicht und hinreichend verdünnt, um sie mit einer Maxwell-Boltzmann Verteilung zu beschreiben:

$$g_e(\mathbf{q}) = n_e \left(\frac{2\pi}{m_e T_e} \right)^{3/2} e^{-\frac{(\mathbf{q} - m\mathbf{v}_e)^2}{2m_e T_e}}. \quad (2.97)$$

T_e , v_e und n_e sind die Elektrontemperatur, die mittlere Geschwindigkeit und die Anzahldichte. Mit der Ionisationsquote x_e und der Baryondichte ρ_b kann n_e zur ersten Ordnung durch

$$n_e = n_e^{(0)} \left(1 + \left[\frac{\delta \rho_b}{\rho_b} \right]^{(1)} + \left[\frac{\delta x_e}{x_e} \right]^{(1)} + \dots \right) \quad (2.98)$$

berechnet werden. δx_e stellt eine Korrektur aus der gestörten Rekombinationsgeschichte dar, welche in der Rechnung zweiter Ordnung benötigt wird, wie in [80] diskutiert. In unseren Gleichungen vernachlässigen wir diesen Effekt, da δx_e nur zu einer Korrektur des Stoßterms erster Ordnung führt und keine neuen Effekte zweiter Ordnung erzeugt. Aus einer inhomogenen Störung der Rekombination kann allerdings in Kombination mit dem Stoßterm erster Ordnung trotzdem B-Polarisation induziert werden.

Das $\mathbf{q}'$ -Integral in (2.45) wird mithilfe der Deltafunktion gelöst, woraus $\mathbf{q}' = \mathbf{q} + \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ folgt. Die Elektronimpulse sind von der Ordnung $|\mathbf{q}| \sim (m_e T_e)^{1/2}$, während für die masselosen Photonen

$p, p' \sim T$ gilt. Dies erlaubt die Entwicklungen

$$\begin{aligned}
 g(\mathbf{q}') = g(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{p}') &= g(\mathbf{q}) \left[1 - \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')(\mathbf{q} - m_e \mathbf{v})}{m_e T} - \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2m_e T} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')(\mathbf{q} - m_e \mathbf{v})}{m_e T} \right)^2 + \dots \right], \\
 \delta(p^0 + q^0 - p'^0 - q'^0) &= \delta(p + E(\mathbf{q}) - p' - E(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{p}')) = \delta(p - p') + \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\mathbf{q}}{m_e} \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'} \\
 &\quad + \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2m_e} \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'} + \frac{1}{2} \left(\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\mathbf{q}}{m_e} \right)^2 \frac{\partial^2 \delta(p - p')}{\partial p'^2} + \dots, \quad (2.99)
 \end{aligned}$$

mit $p = |\mathbf{p}|$, $p' = |\mathbf{p}'|$ und der Abschätzung

$$E(\mathbf{q}) - E(\mathbf{q}') = \frac{\mathbf{q}^2}{2m_e} - \frac{\mathbf{q}'^2}{2m_e} = -\frac{\mathbf{q}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{m_e} - \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2m_e} \sim \frac{T_e^{3/2}}{m_e} \ll T_e. \quad (2.100)$$

Die vernachlässigten Terme in (2.99) sind von der Ordnung (2.96).

Setzt man diese Approximationen in nullter Ordnung in den Stoßterm (2.45) ein, verschwindet er wie erwartet unabhängig vom Matrixelement. Deshalb reicht es aus, das Compton-Matrixelement bis zur ersten Ordnung zu entwickeln. Die Entwicklung von (2.46) ergibt:

$$|\overline{M}|_{\lambda\lambda';\omega\omega'}^2 = 24\pi m_e^2 \sigma_T \left(S_{0,\lambda\lambda'\omega\omega'} + \frac{q^i}{m_e} S_{1,\lambda\lambda'\omega\omega'}^i + O\left(\frac{q^2}{m_e^2}\right) \right), \quad (2.101)$$

mit

$$S_{0,\lambda\lambda'\omega\omega'} = \boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\lambda'}^*(\mathbf{p}') \boldsymbol{\epsilon}_\omega^*(\mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\omega'}(\mathbf{p}'), \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned}
 S_{1,\lambda\lambda'\omega\omega'}^i &= \boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\lambda'}^*(\mathbf{p}') \left\{ \boldsymbol{\epsilon}_\omega^*(\mathbf{p}) \frac{\boldsymbol{\epsilon}_{\omega'}(\mathbf{p}') \cdot \mathbf{p}}{p} + \boldsymbol{\epsilon}_{\omega'}^i(\mathbf{p}') \frac{\boldsymbol{\epsilon}_\omega^*(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{p}'}{p'} \right\} \\
 &\quad + \boldsymbol{\epsilon}_\omega^*(\mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\omega'}(\mathbf{p}') \left\{ \boldsymbol{\epsilon}_\lambda^i(\mathbf{p}) \frac{\boldsymbol{\epsilon}_{\lambda'}^*(\mathbf{p}') \cdot \mathbf{p}}{p} + \boldsymbol{\epsilon}_{\lambda'}^*(\mathbf{p}') \frac{\boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{p}'}{p'} \right\} \quad (2.103)
 \end{aligned}$$

und $\sigma_T = 8\pi\alpha^2/(3m_e^2)$ der Thomsonrate. Außer in $g_e(\mathbf{q})$ ist die Abhängigkeit von $\mathbf{q}$ jetzt polynomial gegeben und das Integral über $\mathbf{q}$ in (2.45) kann durch Momente der Elektronverteilungsfunktion berechnet werden:

$$\int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} g_e(\mathbf{q}) \times \{1; q^i; q^i q^j\} = n_e \times \{1; m_e v_e^i; m_e T_e \delta^{ij} + m_e^2 v_e^i v_e^j\}. \quad (2.104)$$

2.4.2. Entwicklung von $C_{ab}[\mathbf{f}]$

Wir setzen die nichtrelativistische Entwicklung in den Stoßterm (2.45) ein und integrieren über die Elektronimpulse. Dabei geben wir die Ergebnisse als Koeffizienten des Gewinnterms (2.45) und der Differenz zwischen Gewinn- und Verlustterm an:

$$\begin{aligned}
 G_{\lambda\lambda'\omega\omega'}^{(i)} &= \left\{ f_{\lambda'\omega'}(p') \left[\delta_{a\lambda}(\delta_{\omega b} + f_{\omega b}(p)) + \delta_{\omega b}(\delta_{a\lambda} + f_{a\lambda}(p)) \right] \right\}^{(i)}, \\
 GL_{\lambda\lambda'\omega\omega'}^{(i)} &= 2\delta_{a\lambda}\delta_{\omega b} f_{\lambda'\omega'}^{(i)}(p') - \delta_{\lambda'\omega'} \left[\delta_{a\lambda} f_{\omega b}^{(i)}(p) + \delta_{\omega b} f_{a\lambda}^{(i)}(p) \right]. \quad (2.105)
 \end{aligned}$$

Dies vereinfacht die Rechnung, da die Differenz der Terme nur noch linear in der Phasenraumverteilungsfunktion ist, während Gewinn- und Verlustterm selber quadratisch sind. Außerdem tritt in

den meisten Termen nur die lineare Kombination von Gewinn- und Verlustterm auf; der quadratische Term $G_{\lambda\lambda'\omega\omega'}^{(i)}$ wird sogar nur in nullter Ordnung benötigt.

Wir zerlegen den Stoßterm in folgende Bestandteile:

$$C_{ab}[f] = \frac{3}{4}n_e\sigma_T \int_0^\infty dp'p' \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \left[c^{(1)} + c_\Delta^{(2)} + c_v^{(2)} + c_{\Delta v}^{(2)} + c_{vv}^{(2)} + c_K^{(2)} \right]_{ab}, \quad (2.106)$$

wobei Ω' der Winkel des gestreuten Elektronimpulses $\mathbf{p}'$ ist. Die Zerlegung beinhaltet den Term erster Ordnung

$$c_{ab}^{(1)} = S_{0,\lambda\lambda'\omega\omega'} \left[\delta(p-p') GL^{(1)} + \mathbf{v}_e^{(1)} \cdot (\mathbf{p}-\mathbf{p}') \frac{\partial \delta(p-p')}{\partial p'} GL^{(0)} \right]_{\lambda\lambda'\omega\omega'} \quad (2.107)$$

(Summationen über $\lambda, \lambda', \omega, \omega'$ implizit) und die Terme zweiter Ordnung

$$c_{\Delta,ab}^{(2)} = S_{0,\lambda\lambda'\omega\omega'} \delta(p-p') GL_{\lambda\lambda'\omega\omega'}^{(2)}, \quad (2.108)$$

$$c_{v,ab}^{(2)} = S_{0,\lambda\lambda'\omega\omega'} \mathbf{v}_e^{(2)} \cdot (\mathbf{p}-\mathbf{p}') \frac{\partial \delta(p-p')}{\partial p'} GL_{\lambda\lambda'\omega\omega'}^{(0)}, \quad (2.109)$$

$$c_{\Delta v,ab}^{(2)} = S_{0,\lambda\lambda'\omega\omega'} \mathbf{v}_e^{(1)} \cdot (\mathbf{p}-\mathbf{p}') \frac{\partial \delta(p-p')}{\partial p'} GL_{\lambda\lambda'\omega\omega'}^{(1)} + S_{1,\lambda\lambda'\omega\omega'}^i \delta(p-p') v_e^{(1)i} GL_{\lambda\lambda'\omega\omega'}^{(1)}, \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} c_{vv,ab}^{(2)} = & S_{0,\lambda\lambda'\omega\omega'} \frac{1}{2} \left[\mathbf{v}_e^{(1)} \cdot (\mathbf{p}-\mathbf{p}') \right]^2 \frac{\partial^2 \delta(p-p')}{\partial p'^2} GL_{\lambda\lambda'\omega\omega'}^{(0)} \\ & + S_{1,\lambda\lambda'\omega\omega'}^i \mathbf{v}_e^{(1)} \cdot (\mathbf{p}-\mathbf{p}') v_e^{(1)i} \frac{\partial \delta(p-p')}{\partial p'} GL_{\lambda\lambda'\omega\omega'}^{(0)}, \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned} c_{K,ab}^{(2)} = & S_{0,\lambda\lambda'\omega\omega'} \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}{2m_e} \left(\frac{\partial \delta(p-p')}{\partial p'} GL_{\lambda\lambda'\omega\omega'}^{(0)} - 2 \frac{\partial \delta(p-p')}{\partial p'} G_{\lambda\lambda'\omega\omega'}^{(0)} \right. \\ & \left. + T_e \frac{\partial^2 \delta(p-p')}{\partial p'^2} GL_{\lambda\lambda'\omega\omega'}^{(0)} \right) \end{aligned} \quad (2.112)$$

$$+ S_{1,\lambda\lambda'\omega\omega'}^i \frac{(p-p')^i}{m_e} \left(-\delta(p-p') G_{\lambda\lambda'\omega\omega'}^{(0)} + T_e \frac{\partial \delta(p-p')}{\partial p'} GL_{\lambda\lambda'\omega\omega'}^{(0)} \right). \quad (2.113)$$

Nach einigen partiellen Integrationen kann das Integral über p' mit Hilfe der Deltafunktionen ausgeführt werden. Wir definieren den Integraloperator

$$I[\dots] = \frac{1}{2p} \int_0^\infty dp'p' \int \frac{d\Omega'}{4\pi} [\dots], \quad (2.114)$$

so dass

$$C_{ab}[f] = \frac{3}{2}n_e\sigma_T p \times I \left[c^{(1)} + c_\Delta^{(2)} + c_v^{(2)} + c_{\Delta v}^{(2)} + c_{vv}^{(2)} + c_K^{(2)} \right]_{ab} \quad (2.115)$$

gilt. Der Term erster Ordnung ergibt nach partieller Integration

$$I[c_{ab}^{(1)}] = \frac{1}{2} \int \frac{d\Omega'}{4\pi} S_{0,\lambda\lambda'\omega\omega'} \left[GL_{|p=p'}^{(1)} - \mathbf{v}_e^{(1)} \cdot (\mathbf{n}-2\mathbf{n}') GL_{|p=p'}^{(0)} - \mathbf{v}_e^{(1)} \cdot (\mathbf{n}-\mathbf{n}') p \frac{\partial}{\partial p'} GL_{|p=p'}^{(0)} \right]_{\lambda\lambda'\omega\omega'}. \quad (2.116)$$

Nach Integration über die Deltafunktion gilt $\mathbf{p}' = p\mathbf{n}'$; der Index “ $p = p'$ ” bedeutet, dass $f_{ab}^{(i)}(\mathbf{p}') = f_{ab}^{(i)}(p\mathbf{n}')$ in (2.105) verwendet werden muss. Aufgrund der Isotropie und Homogenität hängt die Verteilungsfunktion nullter Ordnung nicht vom Impuls ab und ist unpolarisiert. Deshalb gilt

$$\left[GL_{|p=p'}^{(0)} \right]_{\lambda\lambda'\omega\omega'} = 0, \quad \left[p \frac{\partial}{\partial p'} GL_{|p=p'}^{(0)} \right]_{\lambda\lambda'\omega\omega'} = 2 \delta_{a\lambda} \delta_{\omega b} \delta_{\lambda'\omega'} p \frac{\partial f_I^{(0)}}{\partial p}. \quad (2.117)$$

Gleichung (2.116) wird mit $S_{0,\lambda\lambda'\omega\omega'}$ aus Gl. (2.102) zu

$$\begin{aligned}
 I[c_{ab}^{(1)}] &= \frac{1}{2} \delta^{ik} \delta^{jl} \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \left\{ 2 \epsilon_a^i(\mathbf{n}) \epsilon_b^{*j}(\mathbf{n}) \left[\epsilon_{\lambda'}^{*k}(\mathbf{n}') \epsilon_{\omega'}^l(\mathbf{n}') f_{\lambda'\omega'}^{(1)}(p\mathbf{n}') \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \mathbf{v}_e^{(1)} \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{n}') \epsilon_{\lambda'}^{*k}(\mathbf{n}') \epsilon_{\omega'}^l(\mathbf{n}') p \frac{\partial f_I^{(0)}}{\partial p} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \epsilon_{\lambda'}^i(\mathbf{n}) \epsilon_{\omega'}^{*j}(\mathbf{n}) \epsilon_{\lambda'}^{*k}(\mathbf{n}') \epsilon_{\omega'}^l(\mathbf{n}') \left[\delta_{a\lambda} f_{\omega b}^{(1)}(p) + \delta_{\omega b} f_{a\lambda}^{(1)}(p) \right] \right\}. \quad (2.118)
 \end{aligned}$$

Die Winkelabhängigkeit ist in den beiden hinteren Termen explizit durch Polarisationsvektoren gegeben und kann daher ausintegriert werden. Mit

$$\int \frac{d\Omega'}{4\pi} \epsilon_{\lambda'}^{*k}(\mathbf{n}') \epsilon_{\omega'}^l(\mathbf{n}') = \int \frac{d\Omega'}{4\pi} [\delta^{kl} - n'^k n'^l] = \frac{2}{3} \delta^{kl} \quad (2.119)$$

und $\epsilon_{\lambda'}^i(\mathbf{n}) \epsilon_{\omega'}^{*j}(\mathbf{n}) = \delta_{\lambda\omega}$ erhalten wir das Ergebnis

$$I[c_{ab}^{(1)}] = -\frac{2}{3} f_{ab}^{(1)}(p) - \frac{2}{3} \delta_{ab} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_e^{(1)} p \frac{\partial f_I^{(0)}(p)}{\partial p} + \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \epsilon_a^i(\mathbf{n}) \epsilon_b^{*j}(\mathbf{n}) \left[\epsilon_{\lambda'}^{*i}(\mathbf{n}') \epsilon_{\omega'}^j(\mathbf{n}') f_{\lambda'\omega'}^{(1)}(p\mathbf{n}') \right]. \quad (2.120)$$

Diese Gleichung ist identisch zu dem polarisierten Stoßterm erster Ordnung [12, 44].

An diesem Term erkennt man die Notwendigkeit der Multipolzerlegung. Das verbleibende Richtungsintegral läuft über die Verteilungsfunktion, welche wir berechnen wollen. Durch Anwendung der Multipoltransformation wird die Winkelabhängigkeit in den Kugelflächenfunktionen isoliert und die Integration kann ausgeführt werden. Der Nachteil der Methode ist allerdings die Erzeugung der Boltzmannhierarchie in den Multipolen.

Die Terme zweiter Ordnung können analog berechnet werden, sind aber komplizierter, insbesondere wenn S_1^i benötigt wird. Der Term quadratisch in den Verteilungsfunktionen wird nur in nullter Ordnung benötigt. Dann gilt

$$G_{\lambda\lambda'\omega\omega'}^{(0)} = 2 \delta_{a\lambda} \delta_{\omega b} \delta_{\lambda'\omega'} f_I^{(0)}(p) \left[1 + f_I^{(0)}(p) \right]. \quad (2.121)$$

Als Ergebnis erhalten wir für die integrierten Terme zweiter Ordnung

$$I[c_{\Delta,ab}^{(2)}] = -\frac{2}{3} f_{ab}^{(2)}(p) + \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \epsilon_a^i(\mathbf{n}) \epsilon_b^{*j}(\mathbf{n}) \left[\epsilon_{\lambda'}^{*i}(\mathbf{n}') \epsilon_{\omega'}^j(\mathbf{n}') f_{\lambda'\omega'}^{(2)}(p\mathbf{n}') \right], \quad (2.122)$$

$$I[c_{v,ab}^{(2)}] = -\frac{2}{3} \delta_{ab} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_e^{(2)} p \frac{\partial f_I^{(0)}(p)}{\partial p}, \quad (2.123)$$

$$\begin{aligned}
 I[c_{\Delta v,ab}^{(2)}] &= \frac{2}{3} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_e^{(1)} f_{ab}^{(1)}(p) + \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \epsilon_a^i(\mathbf{n}) \epsilon_b^{*j}(\mathbf{n}) \left[\epsilon_{\lambda'}^{*k}(\mathbf{n}') \epsilon_{\omega'}^l(\mathbf{n}') f_{\lambda'\omega'}^{(1)}(p\mathbf{n}') \right] \\
 &\quad \times \left\{ S_{1,ijkl}^m v_e^{(1)m} - \delta^{ik} \delta^{jl} \left[\mathbf{v}_e^{(1)} \cdot (\mathbf{n} - 2\mathbf{n}') + \mathbf{v}_e^{(1)} \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{n}') p \frac{\partial}{\partial p} \right] \right\}, \quad (2.124)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I[c_{vv,ab}^{(2)}] &= \delta_{ab} \left[\frac{2}{3} \mathbf{v}_e^{(1)2} + \frac{2}{3} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_e^{(1)})^2 \right] p \frac{\partial f_I^{(0)}(p)}{\partial p} + \delta_{ab} \left[\frac{2}{15} \mathbf{v}_e^{(1)2} + \frac{1}{3} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_e^{(1)})^2 \right] p^2 \frac{\partial^2 f_I^{(0)}(p)}{\partial p^2} \\
 &\quad - \epsilon_a^i(\mathbf{n}) \epsilon_b^{*j}(\mathbf{n}) \frac{1}{15} v_e^{(1)i} v_e^{(1)j} p^2 \frac{\partial^2 f_I^{(0)}(p)}{\partial p^2}, \quad (2.125)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I[c_{K,ab}^{(2)}] &= \frac{2}{3} \delta_{ab} \left\{ \frac{4p}{m_e} f_I^{(0)}(p) (1 + f_I^{(0)}(p)) + \left[\frac{4T_e}{m_e} + \frac{p}{m_e} (1 + 2f_I^{(0)}(p)) \right] p \frac{\partial f_I^{(0)}(p)}{\partial p} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{T_e}{m_e} p^2 \frac{\partial^2 f_I^{(0)}(p)}{\partial p^2} \right\}, \quad (2.126)
 \end{aligned}$$

wobei $S_{1,ijkl}^m$ der Matrix $S_{1,\lambda\lambda'\omega\omega'}^i$ ohne Polarisationsvektoren entspricht:

$$S_{1,ijkl}^m = \delta^{ik} (\delta^{jm} n^l + \delta^{lm} n'^j) + \delta^{jl} (\delta^{im} n^k + \delta^{km} n'^i). \quad (2.127)$$

2.4.3. Fourier- und Multipoltransformation

Nun müssen wir nur noch den Multipolzerlegungsoperator (2.75) anwenden, um die finalen Gleichungen zu erhalten. Mit der Entwicklung der Vorfaktoren $1/P^0$ aus (2.23) und der freien Elektronendichte n_e aus (2.106) ergibt die Boltzmann-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \eta} f_{X,lm}^{(1)}(\mathbf{k}) + \dots = L \left[\frac{1}{P^0} C_X[f] \right] = \frac{a}{E} L \left[C_X[f]^{(1)} \right] = \frac{3}{2} n_e^{(0)} \sigma_T a \times \hat{I}[c_X^{(1)}](\mathbf{k}) \quad (2.128)$$

in erster Ordnung und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} f_{X,lm}^{(2)}(\mathbf{k}) + \dots &= L \left[\frac{1}{P^0} C_X[f] \right] = \frac{a}{E} L \left[C_X[f]^{(2)} \right] + \frac{a}{E} A^{(1)} L \left[C_X[f]^{(1)} \right] \\ &= \frac{3}{2} n_e^{(0)} \sigma_T a \times \left\{ \hat{I} \left[c_{\Delta}^{(2)} + c_v^{(2)} + c_{\Delta v}^{(2)} + c_{vv}^{(2)} + c_K^{(2)} \right]_X(\mathbf{k}) \right. \\ &\quad \left. + \left(A^{(1)} + \left[\frac{\delta \rho_b}{\rho_b} \right]^{(1)} + \left[\frac{\delta x_e}{x_e} \right]^{(1)} \right)(\mathbf{k}_1) \hat{I}[c_X^{(1)}](\mathbf{k}_2) \right\} \end{aligned} \quad (2.129)$$

in zweiter Ordnung. Wir haben (2.115) für den Stoßterm und (2.98) für die Elektronendichte verwendet, sowie $E = p$ eingesetzt, was die Gleichung für Photonen vereinfacht. Dies ist keine Einschränkung, da der Stoßterm explizit nur für Photonen gilt. Außerdem haben wir den Operator $\hat{I}[\dots] = L[I[\dots]]$ definiert.

Die Fouriertransformation des Stoßterms ist trivial, da keine räumlichen Ableitungen auftreten. Wie auf der linken Seite erhalten wir aus Produkten von Größen erster Ordnung Faltungen. Im Folgenden vernachlässigen wir die Abhängigkeit vom Wellenvektor $\mathbf{k}, \mathbf{k}_1$ und $\mathbf{k}_2$ um die Notation kompakt zu halten; im konkreten Fall ist immer klar welcher Wellenvektor verwendet werden muss.

Zuletzt müssen wir die Multipolzerlegung von (2.120) und (2.122) – (2.126) durchführen. Mit (2.49) für $f_{\lambda'\omega'}^{(1)}(p\mathbf{n}')$ erhalten wir nach Anwendung von L (2.75) folgende Winkelintegrale

$$Q_{ab,lm}^{ij} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d\Omega \epsilon_b^{*i}(\mathbf{n}) \epsilon_a^j(\mathbf{n}) Y_{lm}^s(\mathbf{n}). \quad (2.130)$$

Die Matrizen Q^{ij} werden als Lösung dieses Integrals definiert. Sie sind nur für $l \leq 2$ von Null verschieden. Mit Gl. (2.57) definieren wir in der Stokesparameterbasis

$$Q_{X,lm}^{ij} = U_{X,[ab]} Q_{[ab],lm}, \quad (2.131)$$

in Analogie zu Gl. (2.56) für die Phasenraumverteilungsfunktionen. In der IVEB-Basis verschwinden die Q -Matrizen für $X = B$ bei beliebigen Werten von l . Die restlichen Q -Matrizen sind explizit in (A.14) angegeben. Die Spur

$$\text{tr} \left(Q_{ab,lm}^\dagger Q_{cd,l'm'} \right) = Q_{ab,lm}^{ij*} Q_{cd,l'm'}^{ij} \equiv \frac{1}{3} \omega_{ab;cd}^{(l)} \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (2.132)$$

welche in den Gleichungen benötigt wird, ist diagonal in den Multipolindizes und definiert die ω -Symbole. Analog gilt in der IVEB-Basis

$$\text{tr} \left(Q_{X,lm}^\dagger Q_{Y,l'm'} \right) = Q_{X,lm}^{ij*} Q_{Y,l'm'}^{ij} \equiv \frac{1}{3} \omega_{XY}^{(l)} \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (2.133)$$

mit der Definition

$$\omega_{XY}^{(l)} = U_{X,[ab]}^* U_{Y,[cd]} \omega_{ab;cd}^{(l)}. \quad (2.134)$$

Fast alle $\omega_{XY}^{(l)}$ verschwinden; $\omega_{IE}^{(2)} = \omega_{IE}^{(2)} = -\sqrt{3/50}$ ist das einzige nichtdiagonale ω -Symbol, welches Polarisation beinhaltet. Die nicht verschwindenden ω -Symbole sind in (A.15) angegeben.

Mit den Definitionen (2.130) und (2.132) erhalten wir aus (2.120):

$$\hat{I}[c_{ab}^{(1)}] = \frac{2}{3} \left\{ -f_{ab,lm}^{(1)}(p) - \delta_{ab} \delta_{l1} v_{e,[m]}^{(1)} p \frac{\partial f_I^{(0)}(p)}{\partial p} + \frac{1}{2} \omega_{ba;\omega'\lambda'}^{(l)} f_{\lambda'\omega',lm}^{(1)}(p) \right\}. \quad (2.135)$$

Die Transformation auf die Stokesparameterbasis ist gegeben durch $U_{X,[ab]} \hat{I}[c^{(1)}]_{ab}$. Wir verwenden

$$\begin{aligned} U_{X,[ab]} \omega_{ba;\omega'\lambda'}^{(l)} f_{\lambda'\omega',lm}^{(1)}(p) &= U_{X,[ab]} U_{[ba],X'}^{-1*} \omega_{X'Y'}^{(l)} U_{[\omega'\lambda'],Y'}^{-1} U_{[\lambda'\omega'],Y}^{-1} f_{Y,lm}^{(1)}(p) \\ &\stackrel{(2.58)}{=} 2 U_{X,[ab]} U_{[ab],X'}^{-1} \omega_{X'Y'}^{(l)} U_{[\lambda'\omega'],Y'}^{-1*} U_{Y,[\lambda'\omega']}^* f_{Y,lm}^{(1)}(p) = 2 \delta_{XX'} \omega_{X'Y'}^{(l)} \delta_{Y'Y} f_{Y,lm}^{(1)}(p) \\ &= 2 \omega_{XY}^{(l)} f_{Y,lm}^{(1)}(p) \end{aligned} \quad (2.136)$$

und erhalten

$$\hat{I}[c_X^{(1)}] = \frac{2}{3} \left\{ -f_{X,lm}^{(1)}(p) - \delta_{XI} \delta_{l1} v_{e,[m]}^{(1)} p \frac{\partial f_I^{(0)}(p)}{\partial p} + \omega_{XY}^{(l)} f_{Y,lm}^{(1)}(p) \right\}. \quad (2.137)$$

Der Stoßterm erster Ordnung (2.128) ist identisch zu dem bekannten Resultat [44]. Durch die Kopplung zwischen E- und I-Mode in ω_{XY} , wird die Erzeugung von E-Polarisation durch Thomson-Streuung beschrieben.

Bei den Termen zweiter Ordnung gehen wir ähnlich vor. Die ersten beiden, $I[c_{\Delta,ab}^{(2)}]$ und $I[c_{v,ab}^{(2)}]$ haben dieselbe Struktur wie der Term erster Ordnung und können direkt aus diesem abgeleitet werden:

$$\hat{I}[c_{\Delta,X}^{(2)}] = \frac{2}{3} \left\{ -f_{X,lm}^{(2)}(p) + \omega_{XY}^{(l)} f_{Y,lm}^{(2)}(p) \right\}, \quad (2.138)$$

$$\hat{I}[c_{v,X}^{(2)}] = -\frac{2}{3} \delta_{XI} \delta_{l1} v_{e,[m]}^{(2)} p \frac{\partial f_I^{(0)}(p)}{\partial p}. \quad (2.139)$$

Der komplizierteste Term ist $I[c_{\Delta v,ab}^{(2)}]$ aus Gl. (2.124). Mit den Q -Matrizen und ω -Symbolen erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{I}[c_{\Delta v,X}^{(2)}] &= \frac{2}{3} \sum_{m_2=-1}^1 \sum_{l_1=|l-1|}^{l+1} \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} i^{l-l_1-1} v_{e,[m_2]}^{(1)} \\ &\times \left\{ \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} l_1 & 1 & l \\ F_X & 0 & F_X \end{pmatrix} \sum_Y H_{XY}^*(l_1+1-l) f_{Y,l_1 m_1}^{(1)}(p) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{Y,Z} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l \\ F_Y & 0 & F_Y \end{pmatrix} \omega_{XZ}^{(l)} H_{ZY}^*(l_1+1-l) \left(2 f_{Y,l_1 m_1}^{(1)}(p) + p \frac{\partial}{\partial p} f_{Y,l_1 m_1}^{(1)}(p) \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - (-1)^{m_2} \frac{2l+1}{2l_1+1} \begin{pmatrix} l & 1 & l_1 \\ m & -m_2 & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & 1 & l_1 \\ F_X & 0 & F_X \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{Y,Z} H_{XZ}^*(l+1-l_1) \omega_{ZY}^{(l_1)} \left(f_{Y,l_1 m_1}^{(1)}(p) + p \frac{\partial}{\partial p} f_{Y,l_1 m_1}^{(1)}(p) \right) \right\} \\ &+ \frac{2}{3} \sum_{m_2=-1}^1 \sum_{l_1=|l-1|}^{l+1} \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} i^{l-l_1} \sum_{Y,Z} 3 f_{Y,l_1 m_1}^{(1)}(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left\{ (-1)^{m_2} \sum_{L=|l-1|}^{l+1} \sum_{M=-L}^L \frac{2l+1}{\sqrt{(2l_1+1)(2L+1)}} \begin{pmatrix} l & 1 & L \\ m & -m_2 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & 1 & L \\ F_X & 0 & F_X \end{pmatrix} \right. \\
 & \quad \times H_{XZ}^*(l+1-L) \left[v_e^{(1)j} \xi_{m_2}^k Q_{Z,LM}^{ij*} Q_{Y,l_1 m_1}^{ik} + v_e^{(1)i} \xi_{m_2}^k Q_{Z,LM}^{ij*} Q_{Y,l_1 m_1}^{kj} \right] \\
 & \quad + \sum_{L=|l_1-1|}^{l_1+1} \sum_{M=-L}^L \sqrt{\frac{2l+1}{2L+1}} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & L \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & L \\ F_Y & 0 & F_Y \end{pmatrix} \\
 & \quad \times \left[v_e^{(1)k} \xi_{m_2}^j Q_{X,lm}^{ij*} Q_{Z,LM}^{ik} + v_e^{(1)k} \xi_{m_2}^i Q_{X,lm}^{ij*} Q_{Z,LM}^{kj} \right] H_{ZY}^*(l_1+1-L) \left. \right\}. \quad (2.140)
 \end{aligned}$$

Die Struktur des Terms ist undurchsichtig; einige Eigenschaften lassen sich aber einfach ableiten. Da die Q -Matrizen und die ω -Symbole für $l, l_1, L > 2$ verschwinden und die auftretenden Clebsch-Gordan-Koeffizienten nur benachbarte Momente koppeln, muss $\hat{I}[c_{\Delta v, X}^{(2)}]$ für $l > 3$ verschwinden. Darüber hinaus gibt es, wenn man die Terme explizit berechnet, eine Kopplung zwischen I- und E-Mode, aber zusätzlich auch eine direkte Kopplung zwischen I- und B-Polarisation. Diese direkte Kopplung tritt in zweiter Ordnung nur in diesem Stoßtermbeitrag auf.

Die letzten beiden Terme $I[c_{vv, ab}^{(2)}]$ und $I[c_{K, ab}^{(2)}]$ sind relativ einfach, da sie nur von der ungestörten Phasenraumverteilung abhängen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 \hat{I}[c_{vv, X}^{(2)}] &= \frac{2}{3} \left\{ \delta_{XI} p \frac{\partial f_I^{(0)}(p)}{\partial p} \left[\delta_{l0} \delta_{m0} v_e^{(1)2} \right. \right. \\
 & \quad - \sum_{m_1, m_2=-1}^1 v_{e, [m_1]}^{(1)} v_{e, [m_2]}^{(1)} i^l \begin{pmatrix} 1 & 1 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left. \right] \\
 & \quad + \delta_{XI} p^2 \frac{\partial^2 f_I^{(0)}(p)}{\partial p^2} \left[\delta_{l0} \delta_{m0} \frac{1}{5} v_e^{(1)2} \right. \\
 & \quad - \sum_{m_1, m_2=-1}^1 \frac{1}{2} v_{e, [m_1]}^{(1)} v_{e, [m_2]}^{(1)} i^l \begin{pmatrix} 1 & 1 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left. \right] \\
 & \quad \left. - i^l \sqrt{2l+1} \frac{1}{10} v_e^{(1)i} v_e^{(1)j} Q_{X,lm}^{ij*} p^2 \frac{\partial^2 f_I^{(0)}(p)}{\partial p^2} \right\}, \quad (2.141)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{I}[c_{K, X}^{(2)}] &= \frac{2}{3} \delta_{XI} \delta_{l0} \delta_{m0} \left\{ \frac{4p}{m_e} f_I^{(0)}(p) (1 + f_I^{(0)}(p)) + \left[\frac{4T_e}{m_e} + \frac{p}{m_e} (1 + 2f_I^{(0)}(p)) \right] p \frac{\partial f_I^{(0)}(p)}{\partial p} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{T_e}{m_e} p^2 \frac{\partial^2 f_I^{(0)}(p)}{\partial p^2} \right\}. \quad (2.142)
 \end{aligned}$$

Damit haben wir die polarisierten Boltzmann-Gleichungen zweiter Ordnung für Photonen hergeleitet.

2.5. C_l^{BB} -Spektrum der B-Polarisation

Zum Vergleich mit diversen Experimenten benötigen wir das C_l^{BB} -Spektrum der B-Polarisation. Dieses berechnen wir nun aus den Multipolkomponenten $f_{X, lm}$.

Wir beschreiben die kosmische Hintergrundstrahlung mit der Phasenraumverteilungsfunktion

$$f_{ab}(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{q}) = \delta_{ab} f_I^{(0)}(q) + f_{ab}^{(1)}(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{q}) + f_{ab}^{(2)}(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{q}) + \dots, \quad (2.143)$$

welche wir um die unpolarisierte homogene Schwarzkörperstrahlung $f_I^{(0)}(q)$ entwickelt haben. Wenn wir im expandierenden Universum mitbewegte Impulse $\mathbf{q} = q\mathbf{n}$ verwenden, ist $f_I^{(0)}(q)$ zeitunabhängig

und entspricht einer Schwarzkörperverteilung mit der heutigen Temperatur des Universums T_0 . Wir definieren die Matrix der Temperaturfluktuationen $\Theta_{ab}(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{q})$ durch

$$f_{ab}(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{q}) = \left[\exp \left(\frac{q}{T_0 (1 + \Theta(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{q}))} \right) - 1 \right]_{ab}^{-1}, \quad (2.144)$$

wobei die „Eins“ in den eckigen Klammern und im Argument der Exponentialfunktion als 2×2 Einheitsmatrix aufgefasst werden muss. Wir entwickeln die Temperaturstörung bis zur zweiten Ordnung: $\Theta(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{q}) = \Theta^{(1)}(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{n}) + \Theta^{(2)}(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{q}) + \dots$

Der Begriff der Temperaturfluktuation ist dabei leicht missverständlich, da $f_{ab}(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{q})$ im Allgemeinen keine Bose-Einstein-Verteilungsfunktion mehr ist, da $\Theta(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{q})$ von der Photonenergie q abhängt. In erster Ordnung kosmologischer Störungstheorie ist $\Theta^{(1)}(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{n})$ allerdings unabhängig von q und das Spektrum entspricht einem Schwarzkörperspektrum mit positions- und richtungsabhängiger Temperatur, während es sich in zweiter Ordnung lediglich um ein verzerrtes Schwarzkörperspektrum handelt.

Unser Ziel ist es Observablen aufzuschreiben, welche unabhängig von q sind und als Temperaturstörungen interpretiert werden können. Um dies zu erfüllen, definieren wir die Photonenergiedichte normalisiert auf die ungestörte Energiedichte:

$$\Delta_{ab}(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{n}) = \frac{\int dq q^3 f_{ab}(\eta, \mathbf{x}, q\mathbf{n})}{\int dq q^3 f_I^{(0)}(q)}. \quad (2.145)$$

Wenn die Photonen unpolarisiert sind und wir ein Schwarzkörperspektrum mit Temperatur $T(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{n})$ annehmen, ist $\Delta(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{n})$ durch

$$\Delta(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{n}) = \left[\frac{T(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{n})}{T_0} \right]^4 = (1 + \Theta(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{n}))^4 \quad (2.146)$$

mit der Temperatur verbunden. In zweiter Ordnung erhalten wir aber Korrekturen aus der Impulsabhängigkeit der Verteilungsfunktion. Für impulsabhängige Störungen zweiter Ordnung und ein Schwarzkörperspektrum erster Ordnung erhalten wir zur zweiten Ordnung die Matrixgleichungen

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{n}) &= 4\Theta^{(1)}(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{n}), \\ \Delta^{(2)}(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{n}) &= 4\bar{\Theta}^{(2)}(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{n}) + 6 \left[\Theta^{(1)}(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{n}) \right]^2, \end{aligned} \quad (2.147)$$

mit

$$\bar{\Theta}^{(2)}(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{n}) = \frac{\int dq q^3 f_I^{(0)}(q) \left[\Theta^{(2)}(\eta, \mathbf{x}, q\mathbf{n}) + \frac{1}{4} q \frac{\partial}{\partial q} \Theta^{(2)}(\eta, \mathbf{x}, q\mathbf{n}) \right]}{\int dq q^3 f_I^{(0)}(q)}. \quad (2.148)$$

Dabei ist $\bar{\Theta}^{(2)}$ identisch zu $\Theta^{(2)}$, wenn die Temperaturstörung unabhängig von q ist. Ansonsten ist $\bar{\Theta}^{(2)}$ die Temperaturfluktuation eines Schwarzkörperspektrums, dessen Energiedichte der Energiedichte der tatsächlichen Verteilungsfunktion zweiter Ordnung entspricht.

Wir definieren die Multipolkoeffizienten a_{lm} in der üblichen Weise durch

$$a_{lm} = a_{lm}^{(1)} + a_{lm}^{(2)} + \dots = \int d\Omega(\mathbf{n}) Y_{lm}^{s*}(\mathbf{n}) \left[\Theta^{(1)}(\eta_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{n}) + \bar{\Theta}^{(2)}(\eta_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{n}) + \dots \right], \quad (2.149)$$

unter Verwendung der äquivalenten Schwarzkörperverteilung.

Der Spin der spingewichteten Kugelflächenfunktionen muss entsprechend der Helizitätskomponenten gewählt werden: $s = 0$ für die diagonalen Einträge $++$, $--$ und $s = \pm 2$ für $ab = \pm \mp$. B-Polarisation wird in der zirkularen Basis durch $i/2$ mal der Differenz der $+-$ und $-+$ Komponenten gebildet und wir definieren analog

$$a_{B,lm} = \frac{i}{2} (a_{+-,lm} - a_{-+,lm}). \quad (2.150)$$

Die Abwesenheit von B-Polarisation in erster Ordnung impliziert, dass die $+-$ und $-+$ Komponenten von $f_{ab}^{(1)}$ und $\Theta_{ab}^{(1)}$ identisch sind, so dass $a_{B,lm}^{(1)} = 0$ gilt. In zweiter Ordnung erhalten wir

$$\begin{aligned} a_{B,lm}^{(2)} &= \frac{1}{4} \int d\Omega(\mathbf{n}) \frac{i}{2} \left[Y_{lm}^{+2*}(\mathbf{n}) \Delta_{+-}^{(2)}(\eta_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{n}) - Y_{lm}^{-2*}(\mathbf{n}) \Delta_{-+}^{(2)}(\eta_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{n}) \right] \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0} (-i)^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \Delta_{B,lm}^{(2)}(\eta_0, \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (2.151)$$

wobei wir in der letzten Zeile die Fouriermoden und Multipolkoeffizienten von $\Delta_B^{(2)}(\eta_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{n})$, definiert in Abschnitt 2.2.4, verwendet haben.

Nun können wir das B-Moden Spektrum C_l^{BB} berechnen, welches durch das statistische Mittel

$$\langle a_{B,lm} a_{B,l'm'}^* \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l^{BB} \quad (2.152)$$

definiert ist, wenn die Störungen des FRW-Hintergrundes in erster Ordnung rein skalar sind. Wir verwenden Gl. (2.151) und die Definition

$$\langle \Delta_{B,lm}^{(2)}(\eta_0, \mathbf{k}) \Delta_{B,l'm'}^{(2)*}(\eta_0, \mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P_{ll',mm'}^{\Delta_B}(k, \hat{\mathbf{k}}), \quad (2.153)$$

um den Erwartungswert aus Gl. (2.152) zu berechnen:

$$\langle a_{B,lm} a_{B,l'm'}^* \rangle = \frac{1}{16} (-i)^l i^{l'} \frac{4\pi}{\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} P_{ll',mm'}^{\Delta_B}(k, \hat{\mathbf{k}}). \quad (2.154)$$

Das Powerspektrum von Δ_B hängt hier von der Richtung $\hat{\mathbf{k}}$ ab, da es sich auf das fixierte Beobachterkoordinatensystem, in welchem wir die Helizität definieren, bezieht. Wenn wir die Helizitätsachse als $\hat{\mathbf{k}}$ wählen, erhalten wir anstelle dessen die einfache Gleichung

$$\langle \Delta_{B,lm}^{(2)}(\eta_0, \mathbf{k}) \Delta_{B,l'm'}^{(2)*}(\eta_0, \mathbf{k}') \rangle_{|\hat{\mathbf{k}} \text{ axis}} = \delta_{mm'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P_{ll',m}^{\Delta_B}(k). \quad (2.155)$$

Die Form der rechten Seite der Gleichung folgt aus der statistischen Isotropie und Homogenität, bzw. durch explizite Rechnung (siehe auch Kapitel 3.2). Das Powerspektrum $P_{ll',m}^{\Delta_B}(k)$ hängt insbesondere nur vom Betrag $k = |\mathbf{k}|$ ab.

Beide Powerspektren sind durch die Transformationen (2.164) unter Rotation verbunden, woraus

$$P_{ll',mm'}^{\Delta_B}(k, \hat{\mathbf{k}}) = \frac{4\pi}{\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}} \sum_{\tilde{m}} Y_{lm}^{-\tilde{m}}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{l'm'}^{-\tilde{m}*}(\hat{\mathbf{k}}) P_{ll',\tilde{m}}^{\Delta_B}(k) \quad (2.156)$$

folgt. Dies verwenden wir in Gl. (2.154) zusammen mit der Orthogonalität der spingewichteten Kugelflächenfunktionen, um das gewohnte Ergebnis

$$C_l^{BB} = \frac{1}{16} \frac{2}{\pi} \sum_{m=\pm 1, \pm 2} \int_0^\infty dk k^2 \frac{P_{ll,m}^{\Delta_B}(k)}{(2l+1)^2} \quad (2.157)$$

herzuleiten. Die Summe ist auf Werte $|m| \leq 2$, beschränkt, da $\Delta_{X,lm}^{(2)}(\mathbf{k})$ in dem System, in welchem $\hat{\mathbf{k}}$ in Richtung der Helizitätsachse liegt, keine Quellterme für $|m| > 2$ enthält. Die Summe läuft auch nicht über $m = 0$, da es keine skalaren Beiträge zur B-Polarisation gibt.

2.6. Boltzmann-Gleichungen der verschiedenen Spezies erster Ordnung

Zur Berechnung der CMB reichen die Photongleichungen nicht aus, da Wechselwirkungen mit den anderen Spezies berücksichtigt werden müssen, insbesondere Stöße mit dem Elektron-Baryon-Plasma.

Zusätzlich sind aber auch gravitative Wechselwirkungen relevant, so dass wir die Gleichungen der dunklen Materie und der Neutrinos benötigen, welche den Raum krümmen und so indirekt mit den Photonen wechselwirken.

In diesem Abschnitt geben wir alle Gleichungen an, welche zur Berechnung der B-Polarisation benötigt werden. Dazu verwenden wir die energieintegrierten Gleichungen (2.145), da diese eine einfache Form annehmen und zur Berechnung des C_l^{BB} -Spektrums ausreichen.

Die Gleichungen erster Ordnung in konformer Newtonscheichung lauten:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta_{I,lm}^{(1)}(\mathbf{k}) + \sum_{\pm} (\mp i) \Delta_{I,(l\pm 1)m_1}^{(1)}(\mathbf{k}) k^{[m_2]} C_{m_1 m}^{\pm, l} + 4\delta_{l0} \dot{D}^{(1)}(\mathbf{k}) + 4\delta_{l1} i k^{[m]} A^{(1)}(\mathbf{k}) \\
 & \quad - 4\delta_{l1} \dot{B}_{[m]}^{(1)}(\mathbf{k}) + 4\delta_{l2} \alpha_m \dot{E}_{[m]}^{(1)}(\mathbf{k}) \\
 & = |\dot{\kappa}| \left\{ -\Delta_{I,lm}^{(1)}(\mathbf{k}) + \delta_{l0} \Delta_{I,00}^{(1)}(\mathbf{k}) + 4\delta_{l1} v_{e,[m]}^{(1)}(\mathbf{k}) + \delta_{l2} \frac{1}{10} \left(\Delta_{I,2m}^{(1)}(\mathbf{k}) - \sqrt{6} \Delta_{E,2m}^{(1)}(\mathbf{k}) \right) \right\}, \\
 & \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta_{E,lm}^{(1)}(\mathbf{k}) + \sum_{\pm} (\mp i) \Delta_{E,(l\pm 1)m_1}^{(1)}(\mathbf{k}) k^{[m_2]} D_{m_1 m}^{\pm, l} - i \Delta_{B,lm_1}^{(1)}(\mathbf{k}) k^{[m_2]} D_{m_1 m}^{0,l} \\
 & = |\dot{\kappa}| \left\{ -\Delta_{E,lm}^{(1)}(\mathbf{k}) - \delta_{l2} \frac{\sqrt{6}}{10} \left(\Delta_{I,2m}^{(1)}(\mathbf{k}) - \sqrt{6} \Delta_{E,2m}^{(1)}(\mathbf{k}) \right) \right\}, \\
 & \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta_{B,lm}^{(1)}(\mathbf{k}) + \sum_{\pm} (\mp i) \Delta_{B,(l\pm 1)m_1}^{(1)}(\mathbf{k}) k^{[m_2]} D_{m_1 m}^{\pm, l} + i \Delta_{E,lm_1}^{(1)}(\mathbf{k}) k^{[m_2]} D_{m_1 m}^{0,l} \\
 & = |\dot{\kappa}| \left\{ -\Delta_{B,lm}^{(1)}(\mathbf{k}) \right\}. \tag{2.158}
 \end{aligned}$$

Die Kopplungskoeffizienten $C_{m_1 m_2}^{\pm, l}$ und $D_{m_1 m_2}^{0,l}$, welche in den Boltzmann Gleichungen auftreten sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
 C_{m\pm 1, m}^{+, l} &= -\frac{\sqrt{(l+1\pm m)(l+2\pm m)}}{\sqrt{2}(2l+3)}, \\
 C_{m, m}^{+, l} &= \frac{\sqrt{(l+1)^2 - m^2}}{2l+3}, \\
 C_{m\pm 1, m}^{-, l} &= \frac{\sqrt{(l-1\mp m)(l\mp m)}}{\sqrt{2}(2l-1)}, \\
 C_{m, m}^{-, l} &= \frac{\sqrt{l^2 - m^2}}{2l-1}, \\
 D_{m\pm 1, m}^{0, l} &= \mp \frac{\sqrt{2(l+1\pm m)(l\mp m)}}{l(l+1)}, \\
 D_{m, m}^{0, l} &= -\frac{2m}{l(l+1)}. \tag{2.159}
 \end{aligned}$$

Die daraus abgeleiteten Koeffizienten $R_{m_1 m_2}^{\pm, l}$ und $K_{m_1 m_2}^{\pm, l}$ lauten:

$$\begin{aligned}
 R_{m_1 m}^{+, l} &= -(l+2)C_{m_1 m}^{+, l}, & R_{m_1 m}^{-, l} &= (l-1)C_{m_1 m}^{-, l}, \\
 K_{m_1 m}^{+, l} &= -(l+2)D_{m_1 m}^{+, l}, & K_{m_1 m}^{-, l} &= (l-1)D_{m_1 m}^{-, l}, \\
 K_{m_1 m}^{0, l} &= -D_{m_1 m}^{0, l}. \tag{2.160}
 \end{aligned}$$

Die Boltzmann Gleichungen für masselose Neutrinos $\Delta_{\nu, lm}^{(1)}(\mathbf{k})$ sind identisch zu den Gleichungen für

$\Delta_{I,lm}^{(1)}(\mathbf{k})$, wenn der Stoßterm vernachlässigt wird. Baryonen und Elektronen bilden ein stark gekoppeltes Fluid, mit den Parametern $\delta_b^{(1)}(\mathbf{k}) = [\delta\rho_b/\bar{\rho}_b]^{(1)}(\mathbf{k})$ und $v_{e,[m]}^{(1)}(\mathbf{k})$, bestimmt durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\eta}\delta_b^{(1)}(\mathbf{k}) - \sum_{m=-1}^1 (-1)^m i k^{[m]} v_{e,[-m]}^{(1)}(\mathbf{k}) + 3\dot{D}^{(1)}(\mathbf{k}) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial\eta} + H_C\right) v_{e,[m]}^{(1)}(\mathbf{k}) + i k^{[m]} A^{(1)}(\mathbf{k}) &= -\frac{|\dot{\kappa}|}{4R} \left\{ 4v_{e,[m]}^{(1)}(\mathbf{k}) - \Delta_{I,1m}^{(1)}(\mathbf{k}) \right\}, \end{aligned} \quad (2.161)$$

mit $R = 3\bar{\rho}_b/(4\bar{\rho}_\gamma)$.

Kalte dunkle Materie $\delta_c^{(1)}(\mathbf{k}) = [\delta\rho_c/\bar{\rho}_c]^{(1)}(\mathbf{k})$, $v_{c,[m]}^{(1)}(\mathbf{k})$ erfüllt die Gleichungen der Baryonen ohne Stoßterm.

Das Gleichungssystem ist zusammen mit den Einsteingleichungen der Metrikstörungen erster Ordnung geschlossen, welche die Form

$$\begin{aligned} k^2 D^{(1)}(\mathbf{k}) + 3H_C \dot{D}^{(1)}(\mathbf{k}) - 3H_C^2 A^{(1)}(\mathbf{k}) &= 4\pi G a^2 \delta\rho^{(1)}(\mathbf{k}), \\ C_{m_1 m}^{-,2} k_{[m_1]} k_{[m_2]} (A^{(1)} + D^{(1)})(\mathbf{k}) &= 8\pi G a^2 \alpha_m \Sigma_{[m]}^{(1)}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (2.162)$$

annehmen. Wir haben die Gleichungen der nichtskalaren Metrikstörungen erster Ordnung nicht angegeben, da wir annehmen, dass diese in erster Ordnung verschwinden. Die Dichtefluktuationen und die anisotrope Spannung sind durch

$$\begin{aligned} \delta\rho^{(1)}(\mathbf{k}) &= \bar{\rho}_b \delta_b^{(1)} + \bar{\rho}_c \delta_c^{(1)} + \bar{\rho}_\gamma \Delta_{I,00}^{(1)} + \bar{\rho}_\nu \Delta_{\nu,00}^{(1)}, \\ \Sigma_{[m]}^{(1)}(\mathbf{k}) &= \frac{2}{15\alpha_m} \left(\bar{\rho}_\gamma \Delta_{I,2m}^{(1)} + \bar{\rho}_\nu \Delta_{\nu,2m}^{(1)} \right) \end{aligned} \quad (2.163)$$

definiert.

Erzeugung von B-Polarisation in erster Ordnung

Diese Gleichungen beschreiben die Evolution des inhomogenen Universums in erster Ordnung. Da wir im folgenden Kapitel die Gleichungen zweiter Ordnung diskutieren, geben wir hier einen kurzen Überblick über die Effekte erster Ordnung, welche zu einer Erzeugung von Polarisation führen.

Die Evolution lässt sich in zwei Regimes aufteilen: Das Tight-Coupling-Regime und das Free-Streaming-Regime.

- Im Tight-Coupling, vor der Rekombination, werden die Gleichungen durch den Stoßterm dominiert. In Gl. (2.158) enthält der Stoßterm jedes Moments $\Delta_{X,lm}$ den Term $-|\dot{\kappa}|\Delta_{X,lm}$. Dieser sorgt für eine Unterdrückung aller Moden wenn $|\dot{\kappa}|$ groß ist. Für $\Delta_{I,00}$ wird der Term allerdings durch den zweiten Beitrag zum unpolarisierten Stoßterm $\delta_{l0}\Delta_{I,00}^{(1)}(\mathbf{k})$ aus Gl. (2.158) aufgehoben; die Dipole $\Delta_{I,11}$ und $v_{e,[m]}$ bilden ein stark gekoppeltes Fluid. Monopol und Dipol sind nicht unterdrückt und führen im Tight-Coupling phasenverschobene Oszillationen aus. Alle anderen Momente sind vor der Rekombination unterdrückt, insbesondere existiert keine Polarisation im Tight-Coupling.
- Nach der Rekombination fällt die Reaktionsrate sehr schnell ab und der Stoßterm kann vollständig vernachlässigt werden². Dann wird die Evolution von den Free-Streaming-Termen der linken Seite dominiert, welche Momente l an ihre Nachbarn $l \pm 1$ koppeln und nichtskalare E-Polarisation in B-Polarisation, und umgekehrt, umwandeln. Aus dem Monopol und Dipol bilden sich so im Laufe der Zeit immer höhere Momente, bis zu den Momenten der Ordnung $l \approx 1000$, welche

²Abgesehen von der später folgenden Reionisation, welche wir nicht betrachten.

wir heute beobachten. Die Terme skalieren mit dem Wellenvektor k , für größere Wellenvektoren werden die höheren Momente schneller generiert, so dass die heute gemessenen Moden l zu einem Wellenvektor $k \propto l$ korrespondieren.

Die einzige Möglichkeit B-Polarisation in erster Ordnung zu induzieren, ist durch die Umwandlung von nichtskalärer E-Polarisation im Free-Streaming. E-Polarisation ist im Tight-Coupling unterdrückt, sie ist allerdings im Stoßterm an den Quadrupol $\Delta_{I,2m}$ gekoppelt. Wenn nichtskalare Moden der unpolarisierten Strahlung existieren, erzeugen diese durch Stöße nichtskalare E-Polarisation, welche später im Free-Streaming in die gesuchte B-Polarisation konvertiert wird.

Dabei tritt allerdings ein Problem auf: Im Tight-Coupling ist sowohl der E-Quadrupol, als auch der unpolarisierte Quadrupol, unterdrückt. Nach der Rekombination, im Free-Streaming, werden Quadrupole generiert, aber der Stoßterm verschwindet und damit verschwindet auch die Kopplung zwischen der E- und I-Polarisation. Die Induktion der E-Mode aus dem unpolarisierten Quadrupol ist also nur während der kurzen Zeit der Rekombination möglich, wenn die Gleichungen weder in der Tight-Coupling-, noch in der Free-Streaming-Approximation behandelt werden können.

Die adiabatischen Startwerte erster Ordnung sind rein skalar und die Metrikquellen A und D induzieren durch die Quellterme $4\delta_{l0}\dot{D}^{(1)}(\mathbf{k})$ und $4\delta_{l1}ik^{[m]}A^{(1)}(\mathbf{k})$ aus Gl. (2.158) nur skalare Moden. Die einzigen nichtskalaren Quellterme sind die Metrikquellen B_i und E_{ij} . Die Einsteingleichungen der Tensorkomponenten sind einfache Wellengleichungen, weshalb diese auch Gravitationswellen genannt werden. Sie induzieren einen nichtskalaren unpolarisierten Quadrupol, welcher während der Rekombination an den E-Quadrupol koppelt. Dieser wird dann später im Free-Streaming in B-Polarisation umgewandelt.

In erster Ordnung existieren keine weiteren Quellen für B-Polarisation, weshalb eine Messung der B-Polarisation verwendet werden kann, um die primordialen Tensormoden der Metrikstörungen zu rekonstruieren. Da diese klein sind, können Effekte zweiter Ordnung, welche B-Polarisation erzeugen, von ähnlicher Ordnung sein. Im folgenden Kapitel berechnen wir daher Effekte, welche B-Polarisation in zweiter Ordnung induzieren.

Die vektoriellen Moden B_i werden in den meisten Szenarien nicht bevorzugt, weshalb wir sie nicht näher diskutieren. Im Wesentlichen induzieren sie, wenn sie während der Rekombination vorhanden sind, B-Polarisation genau wie die Tensormoden.

Rotationseigenschaften der Multipolkomponenten

Wir lösen die Gleichungen erster Ordnung für Wellenvektoren $\mathbf{k}$, welche in der z-Richtung liegen ($k^{[0]} = ik$ und $k^{[\pm 1]} = 0$). Ohne Vektor- und Tensormoden verschwinden die $m = \pm 1, \pm 2$ Komponenten für diese Wahl von $\mathbf{k}$, was die Rechnung deutlich vereinfacht.

Die Lösung für beliebige Orientierungen $\mathbf{k}$ kann aus der $m = 0$ Lösung für $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_3$ durch Rotationen generiert werden. Im Allgemeinen gilt für einen sphärischen Tensor $T_{lm}(\mathbf{k})$ von Rang l für $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}}$ die Relation

$$T_{lm}(\mathbf{k}) = \sum_{m'} T_{lm'}(k\mathbf{e}_3) D_{m'm}^{(l)}(R^{-1}) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_{m'} T_{lm'}(k\mathbf{e}_3) Y_{lm}^{-m'}(\hat{\mathbf{k}}), \quad (2.164)$$

mit $\hat{\mathbf{k}} = R\mathbf{e}_3$ und $D_{m'm}^{(l)}(R^{-1})$ der Wignerfunktion der Rotation R^{-1} , welche durch spingewichtete Kugelflächenfunktionen ausgedrückt werden kann [29]. Da es keine Vektor- und Tensormoden erster Ordnung gibt, trägt nur der $m' = 0$ Anteil in der Summe aus Gl. (2.164) bei.

Zusammen mit der Annahme der Isotropie kann diese Relation verwendet werden, um die kosmologischen Größen erster Ordnung für beliebiges $\mathbf{k}$ aus der Rechnung mit einem festen $\mathbf{k}$ zu extrahieren.

Gleichungen des Baryon-Elektron-Fluids zweiter Ordnung

Die Einsteingleichungen zweiter Ordnung werden in der Rechnung der B-Polarisation aus Stoßtermquellen nicht benötigt. Außer den Photongleichungen treten in zweiter Ordnung nur die Baryongleichungen auf, welche durch Stöße an die Photonen gekoppelt sind (siehe Kapitel 3.1). Der Vollständigkeit halber geben wir hier die kompletten Gleichungen des Baryon-Elektron-Fluids in zweiter

Ordnung an. Die Fluidvariablen sind durch den Energie-Impuls-Tensor im lokalen Ruhesystem definiert:

$$\begin{aligned} T_{AB} &= [e_A]^\mu [e_B]^\nu T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_A u_B - p\eta_{AB} + \Sigma_{AB} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} g(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \frac{p_A p_B}{E}, \end{aligned} \quad (2.165)$$

mit der Phasenraumverteilung $g(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{p})$, für welche wir die Maxwell-Boltzmann-Verteilung verwenden. Die Vierergeschwindigkeit wird dann durch $u^A = (1/\sqrt{1-\mathbf{v}^2}, \mathbf{v})$ parametrisiert. Mit

$$T_{00} = \rho + \bar{\rho}[\mathbf{v}^{(1)}]^2 + \dots, \quad T_{0i} = -\rho v^i + \dots, \quad (2.166)$$

zur zweiten Ordnung in den Störungen, erhalten wir die Gleichungen des Baryon-Elektron-Fluids:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\eta}\delta_b^{(2)}(\mathbf{k}) - \sum_{m=-1}^1 (-1)^m i k^{[m]} v_{e,[-m]}^{(2)}(\mathbf{k}) + 3\dot{D}^{(2)}(\mathbf{k}) \\ &- \sum_{m=-1}^1 (-1)^m \left(i k^{[m]} \delta_b^{(1)} + i k_2^{[m]} (A^{(1)} - D^{(1)}) + 2i k_1^{[m]} D^{(1)} \right) (\mathbf{k}_1) v_{e,[-m]}^{(1)}(\mathbf{k}_2) \\ &+ \sum_{m=-1}^1 (-1)^m H_C v_{e,[m]}^{(1)}(\mathbf{k}_1) v_{e,[-m]}^{(1)}(\mathbf{k}_2) - 6D^{(1)}(\mathbf{k}_1) \dot{D}^{(1)}(\mathbf{k}_2) + 3\dot{D}^{(1)}(\mathbf{k}_1) \delta_b^{(1)}(\mathbf{k}_2) \\ &= -\frac{|\dot{\kappa}|}{4R} \sum_{m=-1}^1 (-1)^m v_{e,[-m]}^{(1)}(\mathbf{k}_1) \left(4v_{e,[m]}^{(1)} - \Delta_{I,1m}^{(1)} \right) (\mathbf{k}_2), \end{aligned} \quad (2.167)$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial\eta} + H_C \right) (v_{e,[m]}^{(2)} - B_{[m]}^{(2)})(\mathbf{k}) + i k^{[m]} A^{(2)}(\mathbf{k}) \\ &- i k_1^{[m]} A^{(1)}(\mathbf{k}_1) (A^{(1)} + D^{(1)})(\mathbf{k}_2) + \dot{D}^{(1)}(\mathbf{k}_1) v_{e,[m]}^{(1)}(\mathbf{k}_2) \\ &- \sum_{m'=-1}^1 (-1)^{m'} i k_2^{[-m']} v_{e,[m']}^{(1)}(\mathbf{k}_1) v_{e,[m]}^{(1)}(\mathbf{k}_2) \\ &= -\frac{|\dot{\kappa}|}{4R} \left\{ 4v_{e,[m]}^{(2)}(\mathbf{k}) - \Delta_{I,1m}^{(2)}(\mathbf{k}) + \left(A^{(1)} + \left[\frac{\delta x_e}{x_e} \right]^{(1)} \right) (\mathbf{k}_1) \left(4v_{e,[m]}^{(1)}(\mathbf{k}_2) - \Delta_{I,1m}^{(1)}(\mathbf{k}_2) \right) \right. \\ &\quad \left. - v_{e,[m_2]}^{(1)}(\mathbf{k}_1) \Delta_{I,2m_1}^{(1)}(\mathbf{k}_2) C_{m_1 m}^{+,1} + 4v_{e,[m]}^{(1)}(\mathbf{k}_1) \Delta_{I,00}^{(1)}(\mathbf{k}_2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.168)$$

Die linke Seite wird aus den $l=0$ und $l=1$ Momenten der Boltzmann-Gleichung für massive Teilchen (siehe Abschnitt 2.3) berechnet. Da wir dort die möglichen Vereinfachungen für Photonen nicht verwendet haben, sind alle Terme der linken Seite auch für massive Teilchen gültig. Die rechte Seite wird aus dem Stoßterm der Photonen abgeleitet. Wir verwenden die starke Kopplung zwischen Baryonen und Elektronen durch Coulomb-Streuung und die Energie-Impuls-Erhaltung in der Compton-Streuung. Die Gleichungen (2.167) und (2.168) stimmen mit den Ergebnissen aus Ref. [70] überein.

3. Numerische Analyse der B-Polarisation in zweiter Ordnung

3.1. Quellen für B-Polarisation in zweiter Ordnung

Nachdem wir die Boltzmann-Gleichungen in Kapitel 2 hergeleitet haben, berechne ich nun in diesem Kapitel die relevanten Terme, welche zu einer Erzeugung von B-Polarisation führen. Diese Beiträge sind als Untergrund zur B-Polarisation aus primordialen Gravitationswellen relevant. In der Literatur fehlt insbesondere der Beitrag der Stoßtermquellen, welchen ich betrachte. Ich stelle die Ergebnisse aus der Publikation [8] vor, welche zusammen mit Koautoren veröffentlicht wurde.

Die Boltzmann-Gleichung der B-Polarisation kann direkt aus den Ergebnissen in Kapitel 2.3 und 2.4 abgeleitet werden. Ohne Vektor- und Tensormetrikstörungen erster Ordnung, und daher mit $\Delta_{B,lm}^{(1)}(\eta, \mathbf{k}) = 0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \eta} \Delta_{B,lm}^{(2)}(\mathbf{k}) &+ \sum_{\pm} (\mp i) \Delta_{B,(l\pm 1)m_1}^{(2)}(\mathbf{k}) k^{[m_2]} D_{m_1 m}^{\pm, l} + i \Delta_{E,lm_1}^{(2)}(\mathbf{k}) k^{[m_2]} D_{m_1 m}^{0,l} \\
&+ i k_1^{[m_2]} \left(A^{(1)} - D^{(1)} \right)(\mathbf{k}_1) \Delta_{E,lm_1}^{(1)}(\mathbf{k}_2) K_{m_1 m}^{0,l} \\
&+ \left(i k_2^{[m_2]} \left(A^{(1)} - D^{(1)} \right)(\mathbf{k}_1) + 4 i k_1^{[m_2]} A^{(1)}(\mathbf{k}_1) \right) \Delta_{E,lm_1}^{(1)}(\mathbf{k}_2) D_{m_1 m}^{0,l} \\
= |\dot{\kappa}| &\left\{ \begin{aligned} &- \Delta_{B,lm}^{(2)}(\mathbf{k}) + v_{e,[m_2]}^{(1)}(\mathbf{k}_1) \Delta_{E,lm_1}^{(1)}(\mathbf{k}_2) D_{m_1 m}^{0,l} \\ &- \delta_{l2} \frac{\sqrt{6}}{5} v_{e,[m_2]}^{(1)}(\mathbf{k}_1) \left(\Delta_{I,2m_1}^{(1)} - \sqrt{6} \Delta_{E,2m_1}^{(1)} \right)(\mathbf{k}_2) D_{m_1 m}^{0,2} \end{aligned} \right\}. \tag{3.1}
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten $D_{m_1 m}^{0,l}$ etc. sind in Gleichung (2.159) angegeben und leiten sich aus Clebsch-Gordan-Koeffizienten ab. Außerdem schreiben wir die Summationen über m_1 implizit, mit der Annahme $m_2 = m - m_1$. Gl. (3.1) und die entsprechenden Gleichungen der E-Polarisation, sowie der Intensität enthalten folgende Effekte:

- Die erste Zeile beschreibt die Propagation von Strahlung in einem homogenen Universum. Eine Umwandlung zwischen E- und B-Polarisation ist nur für Vektor- und Tensormoden möglich, für skalare Moden verschwindet die Kopplung dagegen (siehe Kapitel 2.3). Außerdem ist jeder Multipol an seine Nachbarn gekoppelt, wodurch die Anregungen eines niedrigen Multipoles im Laufe der Zeit auf immer höhere Moden übertragen werden. Dieser Effekt ist verantwortlich für Multipole der Größenordnung $l \approx 1000$, welche heute beobachtet werden, obwohl zu frühen Zeiten nur die niedrigsten Multipole $l = 0, 1, 2$ vorhanden sind. Um eine realistische Berechnung der B-Polarisation zu erhalten, müssen diese Terme mitgenommen werden, da sie insbesondere für die Umwandlung von E- in B-Polarisation verantwortlich sind.
- Die folgenden Terme auf der linken Seite sind die Weak-Lensing- und Time-Delay-Terme. Diese beschreiben die modifizierte Propagation der Photonen in einem inhomogenen Universum. Sie können skalare E-Polarisation erster Ordnung in B-Polarisation konvertieren und erzeugen daher selbst in Abwesenheit von Vektor- und Tensormoden B-Polarisation. Der Effekt steigt mit wachsendem Wellenvektor stark an und ist deshalb für große l der dominante Beitrag zur

B-Polarisation [87]. In unserer weiteren Rechnung vernachlässigen wir diese Terme, da wir an den neuen Stoßtermeffekten interessiert sind und nicht an möglichen Korrelationen zwischen den Weak-Lensing und Stoßtermeffekten.

- Die Gleichung für $\Delta_{I,lm}^{(2)}(\mathbf{k})$ enthält Terme, welche Faltungen von Metrikstörungen sind, wie z.B. $A^{(1)}(\mathbf{k}_1)D^{(1)}(\mathbf{k}_2)$. Außerdem treten die Metrikstörungen zweiter Ordnung $A^{(2)}(\mathbf{k})$, $\dot{B}_{[m]}^{(2)}(\mathbf{k})$ und $\dot{E}_{[m]}^{(2)}(\mathbf{k})$ auf. Diese Terme induzieren Vektor- und Tensormoden der Intensitätsstörungen, welche über Stöße in E-Polarisation konvertiert werden. Durch Free-Streaming kann nichtskalare E-Polarisation dann in B-Polarisation konvertiert werden. Da es sich nicht um einen Stoßtermeffekt handelt, vernachlässigen wir ihn im Folgenden. Der Effekt wurde bereits teilweise in [60] untersucht.
- Die rechte Seite von Gl. (3.1) ist der Stoßterm zweiter Ordnung. Der erste Term ist ein allgemeiner Unterdrückungsterm, welcher alle Moden auf den Gleichgewichtswert zwingt und Polarisation unterdrückt. Zusätzlich gibt es eine Vielzahl an Termen, welche Faltungen über Photonverteilungsfunktionen und Elektronengeschwindigkeiten sind. Diese Terme sind für die Berechnung der Stoßtermeffekte wesentlich. Auch die Stoßtermquellen für $\Delta_{I,lm}^{(2)}(\mathbf{k})$, $\Delta_{E,lm}^{(2)}(\mathbf{k})$ und $v_{e,[m]}^{(2)}(\mathbf{k})$ müssen mitgenommen werden, da sie über die Free-Streaming-Terme und über den Stoßterm zu einem Gleichungssystem gekoppelt sind. Wir verwenden deshalb den kompletten Stoßterm mit einer Ausnahme: $[\delta x_e/x_e]^{(1)}$, die Störung der Rekombination, wird vernachlässigt.

Nachdem wir die für uns relevanten Terme isoliert haben, erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta_{I,lm}^{(2)}(\mathbf{k}) &+ \sum_{\pm} (\mp i) \Delta_{I,(l\pm 1)m_1}^{(2)}(\mathbf{k}) k^{[m_2]} C_{m_1 m}^{\pm, l} \\
 &= |\dot{\kappa}| \left\{ \begin{aligned} &- \Delta_{I,lm}^{(2)}(\mathbf{k}) + \delta_{l0} \Delta_{I,00}^{(2)}(\mathbf{k}) + 4\delta_{l1} v_{e,[m]}^{(2)}(\mathbf{k}) + \delta_{l2} \frac{1}{10} \left(\Delta_{I,2m}^{(2)}(\mathbf{k}) - \sqrt{6} \Delta_{E,2m}^{(2)}(\mathbf{k}) \right) \\ &+ \left(A^{(1)}(\mathbf{k}_1) + \delta_b^{(1)}(\mathbf{k}_1) \right) \left(- \Delta_{I,lm}^{(1)}(\mathbf{k}_2) + \delta_{l0} \Delta_{I,00}^{(1)}(\mathbf{k}_2) + 4\delta_{l1} v_{e,[m]}^{(1)}(\mathbf{k}_2) \right. \\ &\quad \left. + \delta_{l2} \frac{1}{10} \left(\Delta_{I,2m}^{(1)} - \sqrt{6} \Delta_{E,2m}^{(1)} \right)(\mathbf{k}_2) \right) \\ &+ \sum_{\pm} (\mp 1) v_{e,[m_2]}^{(1)}(\mathbf{k}_1) \Delta_{I,(l\pm 1)m_1}^{(1)}(\mathbf{k}_2) C_{m_1 m}^{\pm, l} \\ &+ \delta_{l0} v_{e,[m_2]}^{(1)}(\mathbf{k}_1) \left(2\Delta_{I,1m_1}^{(1)} - 4v_{e,[m_1]}^{(1)} \right)(\mathbf{k}_2) C_{m_1 m}^{+, 0} \\ &+ 3\delta_{l1} v_{e,[m_2]}^{(1)}(\mathbf{k}_1) \Delta_{I,0m_1}^{(1)}(\mathbf{k}_2) C_{m_1 m}^{-, 1} \\ &+ \delta_{l2} v_{e,[m_2]}^{(1)}(\mathbf{k}_1) \left(7v_{e,[m_1]}^{(1)}(\mathbf{k}_2) - \frac{1}{2} \Delta_{I,1m_1}^{(1)}(\mathbf{k}_2) \right) C_{m_1 m}^{-, 2} \\ &+ \frac{1}{2} \delta_{l3} v_{e,[m_2]}^{(1)}(\mathbf{k}_1) \left(\Delta_{I,2m_1}^{(1)} - \sqrt{6} \Delta_{E,2m_1}^{(1)} \right)(\mathbf{k}_2) C_{m_1 m}^{-, 3} \end{aligned} \right\}, \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta_{E,lm}^{(2)}(\mathbf{k}) &+ \sum_{\pm} (\mp i) \Delta_{E,(l\pm 1)m_1}^{(2)}(\mathbf{k}) k^{[m_2]} D_{m_1 m}^{\pm, l} - i \Delta_{B,lm_1}^{(2)}(\mathbf{k}) k^{[m_2]} D_{m_1 m}^{0, l} \\
 &= |\dot{\kappa}| \left\{ \begin{aligned} &- \Delta_{E,lm}^{(2)}(\mathbf{k}) - \delta_{l2} \frac{\sqrt{6}}{10} \left(\Delta_{I,2m}^{(2)}(\mathbf{k}) - \sqrt{6} \Delta_{E,2m}^{(2)}(\mathbf{k}) \right) \\ &+ \left(A^{(1)}(\mathbf{k}_1) + \delta_b^{(1)}(\mathbf{k}_1) \right) \left(- \Delta_{E,lm}^{(1)}(\mathbf{k}_2) - \delta_{l2} \frac{\sqrt{6}}{10} \left(\Delta_{I,2m}^{(1)} - \sqrt{6} \Delta_{E,2m}^{(1)} \right)(\mathbf{k}_2) \right) \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\pm} (\mp 1) v_{e,[m_2]}^{(1)}(\mathbf{k}_1) \Delta_{E,(l \pm 1)m_1}^{(1)}(\mathbf{k}_2) D_{m_1 m}^{\pm, l} \\
& + \delta_{l2} \frac{\sqrt{6}}{2} v_{e,[m_2]}^{(1)}(\mathbf{k}_1) \left(\Delta_{I,1m_1}^{(1)}(\mathbf{k}_2) - 2v_{e,[m_1]}^{(1)}(\mathbf{k}_2) \right) C_{m_1 m}^{-, 2} \\
& - \delta_{l3} \frac{\sqrt{6}}{2} v_{e,[m_2]}^{(1)}(\mathbf{k}_1) \left(\Delta_{I,2m_1}^{(1)} - \sqrt{6} \Delta_{E,2m_1}^{(1)} \right) (\mathbf{k}_2) D_{m_1 m}^{-, 3} \Big\}, \tag{3.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \eta} \Delta_{B,lm}^{(2)}(\mathbf{k}) & + \sum_{\pm} (\mp i) \Delta_{B,(l \pm 1)m_1}^{(2)}(\mathbf{k}) k^{[m_2]} D_{m_1 m}^{\pm, l} + i \Delta_{E,lm_1}^{(2)}(\mathbf{k}) k^{[m_2]} D_{m_1 m}^{0, l} \\
= |\dot{\kappa}| \Big\{ & - \Delta_{B,lm}^{(2)}(\mathbf{k}) + v_{e,[m_2]}^{(1)}(\mathbf{k}_1) \Delta_{E,lm_1}^{(1)}(\mathbf{k}_2) D_{m_1 m}^{0, l} \\
& - \delta_{l2} \frac{\sqrt{6}}{5} v_{e,[m_2]}^{(1)}(\mathbf{k}_1) \left(\Delta_{I,2m_1}^{(1)} - \sqrt{6} \Delta_{E,2m_1}^{(1)} \right) (\mathbf{k}_2) D_{m_1 m}^{0, 2} \Big\} \tag{3.4}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial \eta} + H_C \right) v_{e,[m]}^{(2)}(\mathbf{k}) & = - \frac{|\dot{\kappa}|}{4R} \Big\{ 4v_{e,[m]}^{(2)}(\mathbf{k}) - \Delta_{I,1m}^{(2)}(\mathbf{k}) \\
& + A^{(1)}(\mathbf{k}_1) \left(4v_{e,[m]}^{(1)}(\mathbf{k}_2) - \Delta_{I,1m}^{(1)}(\mathbf{k}_2) \right) - v_{e,[m_2]}^{(1)}(\mathbf{k}_1) \Delta_{I,2m_1}^{(1)}(\mathbf{k}_2) C_{m_1 m}^{+, 1} \\
& + 4v_{e,[m]}^{(1)}(\mathbf{k}_1) \Delta_{I,00}^{(1)}(\mathbf{k}_2) \Big\}, \tag{3.5}
\end{aligned}$$

mit $R = 3\bar{\rho}_b/(4\bar{\rho}_\gamma)$. Für die Elektrongleichungen haben wir dieselben Approximationen verwendet und die Metrikstörung $B_{[m]}^{(2)}$ vernachlässigt. Aufgrund der Konsistenz müssen auch Produkte von Metrikstörungen erster Ordnung vernachlässigt werden, da $B_{[m]}^{(2)}$ in der Einsteingleichung selbst durch Faltungen von Metrikstörungen erster Ordnung angeregt wird. Die volle Gleichung für $v_{e,[m]}^{(2)}$ und die Baryondichte $\delta_b^{(2)} = [\delta\rho_b/\bar{\rho}_b]^{(2)}$ ist in Abschnitt 2.6 angegeben. Gl. (3.2) bis (3.5) bilden zusammen mit den Gleichungen erster Ordnung ein geschlossenes System von Differentialgleichungen. Die Vereinfachungen sind in dem Sinne systematisch, dass im Grenzfalle ($|\dot{\kappa}| \rightarrow 0$), alle Größen zweiter Ordnung verschwinden; wir uns also wie beabsichtigt nur auf Stoßtermeffekte beschränken.

3.2. Lösung der Gleichungen

In diesem Abschnitt entwickeln wir eine Methode, welche geeignet ist die Boltzmann-Gleichung numerisch zu lösen. Dabei stellen sich folgende Probleme:

- 1) Die Gleichungen bilden ein unendlich großes System von gekoppelten Differentialgleichungen, das zur numerischen Behandlung trunziert werden muss.
- 2) Die Quellterme aus Größen erster Ordnung und die Anfangswerte sind statistische Größen. Um die Gleichungen numerisch zu behandeln, müssen wir Gleichungen für die nicht statistischen Größen ableiten, an denen wir interessiert sind, wie z.B. das C_l^{BB} -Spektrum in Gl. (2.157).

Diese Probleme sind bereits aus erster Ordnung bekannt; wir betrachten die Ansätze erster Ordnung und verallgemeinern diese, um sie auf die zweite Ordnung anwenden zu können. Dazu entwickeln wir eine neue Methode, in welcher Greenfunktionen verwendet werden, um den statistischen und analytischen Teil der Rechnung zu separieren. Dies kombinieren wir mit der Line-Of-Sight-Integration, welche in erster Ordnung verwendet wird um die Boltzmannhierarchie zu lösen.

Die Evolution der CMB lässt sich in zwei Phasen unterteilen, dem Tight-Coupling vor der Rekombination und dem Free-Streaming nach der Rekombination. Im Tight-Coupling ist $|\dot{\kappa}|$ dominant, woraus die Tight-Coupling-Unterdrückung aller hohen Multipole folgt. Die Photonen sind stark an das Elektron-Proton Plasma gekoppelt, sämtliche Polarisation ist unterdrückt [7].

Nach der Rekombination kann der Stoßterm vernachlässigt werden. Dann sind die Free-Streaming-Terme relevant. Diese erzeugen aus den kleinen Multipolen sukzessive höhere Moden und wandeln nichtskalare E-Polarisation in B-Polarisation um.

Die Physik, welche zur Erzeugung von Polarisation im Stoßterm relevant ist, spielt sich, analog zur ersten Ordnung, komplett in der kurzen Übergangsphase während der Rekombination ab. Dann bricht die Unterdrückung der höheren Moden und der Polarisation zusammen. Aus den Stoßtermquellen wird Polarisation induziert, welche im folgenden Free-Streaming-Regime in B-Polarisation konvertiert werden kann.

Um die Notation kompakt zu halten, führen wir folgende Kurznotation für die Gleichungen (3.2) - (3.4) ein:

$$\dot{\Delta}_n^{(2)} + kC_{nm}\Delta_m^{(2)} = -|\dot{\kappa}|(\Delta_n^{(2)} - \varsigma_{nm}\Delta_m^{(2)} - S_n). \quad (3.6)$$

Die auftretenden Indizes sind Multiindizes mit $n = (X_n, l_n m_n)$, wobei $X = I, E, B, v_e$ zwischen den Photonpolarisationen und der Baryongeschwindigkeit unterscheidet; l und m sind die Multipolindizes. Wir schreiben die Summen nicht explizit aus; es muss über doppelte Indizes summiert werden. Der Wellenvektor $\mathbf{k}$ wird in z-Richtung gelegt, was die Gleichungen vereinfacht und eine unkomplizierte Zerlegung in Vektor- und Tensorkomponenten erlaubt. Die Abhängigkeit der Größen von $\mathbf{k}$ wird in der Notation unterdrückt.

Gl. (3.6) gilt in dieser Form nicht für Elektronen (siehe Gl. (3.5)), weshalb sie nicht für $n = (v_e, 1m)$ verwendet werden darf. Die Multiindizes, über welche summiert wird, laufen aber auch über v_e .

Die Matrix C_{nm} enthält die Free-Streaming-Terme, welche l an $l \pm 1$ koppeln, und so zu einer Anregung der höheren Moden führen. Auch die Umwandlung zwischen E- und B-Polarisation für Vektor- und Tensormoden wird über C_{nm} vermittelt.

Der erste Teil des Stoßterms $-|\dot{\kappa}|\Delta_n^{(2)}$ führt zu der Tight-Coupling-Unterdrückung. Im frühen Universum, wenn $|\dot{\kappa}|$ groß ist, induziert ein Moment $\Delta_n^{(2)}$ einen Gradienten, welcher dieses Moment wieder dämpft. Für einige Terme existieren aber Gegenterme $\varsigma_{nm}\Delta_m^{(2)} + S_n$, welche die Unterdrückung aufheben. ς_{nm} ist nur für den Monopol, den Dipol und den Quadrupol von Null verschieden. Beim Monopol der Photonen und Baryonen wird die Unterdrückung exakt durch ς_{nm} aufgehoben. Photon- und Baryondipol bilden ein stark gekoppeltes Fluid. Eine Linearkombination der Dipole ist im Tight-Coupling normal unterdrückt; die linear unabhängige Kombination kann sich frei entwickeln und verhält sich im Tight-Coupling wie ein einzelner Freiheitsgrad. Der Quadrupol $\Delta_{X,2m}$ ist ebenfalls unterdrückt, da ς_{nm} den Gegenterm nicht aufhebt, sondern nur abschwächt. Es existiert aber eine im Tight-Coupling nicht verschwindende Quelle S_n , so dass ein kleiner Quadrupol auch im Tight-Coupling existiert [7, 69, 6]. Die Struktur der Terme führt aber nur auf einen unpolarisierten Quadrupol; Polarisation existiert auch in zweiter Ordnung nicht im Tight-Coupling [7].

Die Quelle S_n besteht aus Faltungen von Größen erster Ordnung. Im Gegensatz zu den Metrikquellen erster Ordnung für die niedrigen unpolarisierten Momente, gibt es im Stoßterm zweiter Ordnung Quellen zu jedem l , insbesondere aber auch einen direkten Quellterm für B-Polarisation in Gl. (3.4):

$$S_{B,lm} = \dots - \delta_{l2} \frac{\sqrt{6}}{5} v_{e,[m_2]}^{(1)}(\mathbf{k}_1) \Delta_{I,2m_1}^{(1)}(\mathbf{k}_2) D_{m_1 m}^{0,2} \dots \quad (3.7)$$

Diese direkte Kopplung stellt eine zusätzliche Quelle für B-Polarisation, alternativ zur Umwandlung von E-Polarisation im Free-Streaming, dar. Sie ist aber gegenüber den indirekten Quellen nicht bevorzugt, da die Umwandlung der nichtskalaren Polarisationsmoden im Free-Streaming durch die lange Propagationszeit sehr effektiv ist.

3.2.1. Line-Of-Sight-Integration

Die Berechnung der Photonpropagation von der Rekombination bis heute stellt ein großes Problem dar, da hohe Multipolmomente l in der Boltzmannhierarchie angeregt werden. Diese kann daher nicht bei einem kleinen Moment trunziert werden, was die Rechnung numerisch aufwendig macht. In erster Ordnung wird zur Lösung der Gleichungen, anstelle der numerischen Berechnung aller Momente, die Line-Of-Sight-Methode verwendet [78, 45]. Das Line-Of-Sight-Integral löst die Gleichung

$$\dot{\Delta}_n + kC_{nm}\Delta_m = -|\dot{\kappa}|\Delta_n + \rho_n, \quad (3.8)$$

mit der Free-Streaming-Matrix C_{nm} aus Gl. (3.6) und der Summe über alle Quellen ρ_n . Die Lösung der Gleichung lautet

$$\Delta_n(\eta_0) = \int_0^{\eta_0} d\eta e^{-\kappa(\eta)} j_{nm}(k(\eta_0 - \eta)) \rho_m(\eta), \quad (3.9)$$

wobei die Free-Streaming-Funktionen j_{nm} Kombinationen aus sphärischen Besselfunktionen und Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind:

$$\begin{aligned} j_{nm}(x) &= \sum_{l_1} i^{l_n - l_1 - l_m} \frac{(2l_n + 1)(2l_1 + 1)}{2l_m + 1} j_{l_1}(x) H_{X_n X_m}^*(l_n - l_1 - l_m) \\ &\times \begin{pmatrix} l_n & l_1 & l_m \\ m_n & 0 & m_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_n & l_1 & l_m \\ F_{X_n} & 0 & F_{X_m} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Die Mischung der Polarisationsmoden ist in der Matrix $H_{XX'}$ (siehe Gl. (2.82)) enthalten; eine Herleitung der Lösung ist in Anhang B angegeben.

Wir vergleichen Gl. (3.6) mit Gl. (3.8) und interpretieren alle zusätzlichen Terme aus Gl. (3.6) als Quellterme für die Line-Of-Sight-Integration: $\rho_n = |\dot{\kappa}|(S_n + \varsigma_{nm}\Delta_m^{(2)})$. Damit erhalten wir die Integralgleichung

$$\Delta_n^{(2)}(\eta_0) = \int_0^{\eta_0} d\eta |\dot{\kappa}(\eta)| e^{-\kappa(\eta)} j_{nm}(k(\eta_0 - \eta)) (S_m + \varsigma_{mp}\Delta_p^{(2)})(\eta). \quad (3.11)$$

Der Stoßtermbeitrag der Gegenterme $\varsigma_{mp}\Delta_p^{(2)}(\eta)$ verhindert eine einfache Lösung dieser Gleichung, da er das gesuchte $\Delta_p^{(2)}(\eta)$ enthält, wodurch eine Integralgleichung vorliegt. ς_{mp} verschwindet aber für $l_p > 2$, so dass es ausreicht, eine explizite Lösung für $\Delta_p^{(2)}(\eta)$ mit $l_p \leq 2$ zu berechnen. Außerdem ist die Visibility-Function $|\dot{\kappa}|e^{-\kappa}$ aus der Line-Of-Sight-Integration scharf um die Rekombination lokalisiert, weshalb wir die explizite Lösung für $\Delta_p^{(2)}(\eta)$ nur zu frühen Zeiten $\eta \lesssim 500 \text{ Mpc}/c$ benötigen¹. Mit dieser Lösung können dann, durch die Line-Of-Sight-Integration, alle höheren Moden zu späteren Zeiten generiert werden.

3.2.2. Lösung mit Greenfunktionen

Um eine Lösung zur Zeit der Rekombination herzuleiten, verwenden wir Greenfunktionen. Die Anfangswerte der Gleichungen sind die stochastischen Quantenfluktuationen des Inflatonfeldes. In erster Ordnung führt dies nicht zu Problemen, da die Gleichungen linear in den statistischen Anfangsbedingungen sind. Es ist also möglich, nicht statistische Transferfunktionen zu berechnen, welche später mit den statistischen Fluktuationen multipliziert werden. Diese Zerlegung kann in zweiter Ordnung nicht mehr verwendet werden, da die Quellen Faltungen der statistischen Fluktuationen enthalten. Die Gleichungen besitzen also nicht nur statistische Anfangswerte, sondern auch statistische Quellterme. Greenfunktionen führen aber ebenfalls zu einer Zerlegung zwischen dem statistischen und dem analytischen Anteil der Gleichungen.

¹Wir bezeichnen die konforme Zeit mit Einheiten Mpc/c , aber setzen $c = 1$ in den Gleichungen.

Gl. (3.6) ist linear in den Größen zweiter Ordnung, weshalb wir sie in der Form

$$\dot{\Delta}_n^{(2)}(\eta) = A_{nm}(\eta)\Delta_m^{(2)}(\eta) + \sigma_n(\eta) \quad (3.12)$$

parametrisieren können, wobei A_{nm} neben der Free-Streaming-Matrix C_{nm} auch den Unterdrückungs- und Gegenterm aus dem Stoßterm enthält: $A_{nm} = |\dot{\kappa}|(\varsigma_{nm} - \delta_{nm}) - kC_{nm}$. Die Quelle ist gegeben durch $\sigma_n = |\dot{\kappa}|S_n$. Es ist möglich, die Elektrongleichung (3.5) in derselben Weise aufzuschreiben. Wegen der veränderten Struktur A_{nm} kann die Line-Of-Sight-Integration nicht angewandt werden; die Lösung der Gleichung kann aber, unter Ausnutzung der Linearität, durch Greenfunktionen angegeben werden:

$$\Delta_n^{(2)}(\eta) = G_{nm}(\eta, \eta_{\text{ini}})\Delta_m^{(2)}(\eta_{\text{ini}}) + \int_{\eta_{\text{ini}}}^{\eta} d\eta' G_{nm}(\eta, \eta')\sigma_m(\eta'), \quad (3.13)$$

wobei die Greenfunktion $\mathcal{G}_{nm}(\eta, \eta') = G_{nm}(\eta, \eta')\theta(\eta - \eta')$ die Gleichung

$$\partial_{\eta}\mathcal{G}_{nm}(\eta, \eta') = A_{np}(\eta)\mathcal{G}_{pm}(\eta, \eta') + \delta_{nm}\delta(\eta - \eta') \quad (3.14)$$

löst. Die Differentialgleichung, welche die Greenfunktionen bestimmt, enthält keine statistischen Größen mehr, da die statistischen Quellen durch einfache Deltafunktionen ersetzt werden und die Startwerte verschwinden.

$G_{nm}(\eta, \eta')$ kann durch lösen der Gleichung

$$\partial_{\eta}G_{nm}(\eta, \eta') = A_{np}(\eta)G_{pm}(\eta, \eta') \quad (3.15)$$

für $\eta > \eta'$ mit Anfangswerten $G_{nm}(\eta', \eta') = \delta_{nm}$ berechnet werden, wodurch die Verwendung der Deltafunktionen in einer numerischen Rechnung vermieden wird.

Die Greenfunktionen können verwendet werden, um beliebige Multipolmomente zu beliebigen Zeiten durch einfache Integration zu berechnen. Wegen der großen freien Propagationszeit, von der Rekombination zur heutigen Zeit, werden aber sehr viele Multipole benötigt, weshalb dies numerisch aufwendig ist. Für die Integration zu späten Zeiten verwenden wir deshalb die Line-Of-Sight-Integration (3.11) und bestimmen nur die Lösung zu frühen Zeiten und niedrigen Multipolen ($l \leq 2$) mit den Greenfunktionen. Durch Kombination beider Methoden erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Delta_n^{(2)}(\eta_0) &= \int_{\eta_{\text{ini}}}^{\eta_0} d\eta |\dot{\kappa}(\eta)|e^{-\kappa(\eta)} j_{nm}(k(\eta_0 - \eta)) \left[\varsigma_{mp}G_{pq}(\eta, \eta_{\text{ini}})\Delta_q^{(2)}(\eta_{\text{ini}}) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\eta_{\text{ini}}}^{\eta} d\eta' (\delta_{mq}\delta(\eta - \eta') + |\dot{\kappa}(\eta')|\varsigma_{mp}G_{pq}(\eta, \eta')) S_q(\eta') \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Abgesehen von $\Delta_q^{(2)}(\eta_{\text{ini}})$ hängt nur die Quelle $S_q(\eta')$ von den statistischen Anfangswerten ab, während die Evolution durch die nicht statistischen Funktionen j_{nm} und G_{pq} beschrieben wird.

3.2.3. Powerspektrum

Gl. (3.16) vereinfacht sich weiter, wenn die Anfangsbedingungen $\Delta_q^{(2)}(\eta_{\text{ini}})$ verschwinden. In Abschnitt 3.3.2 stellen wir fest, dass dies für die nichtskalaren Moden $m = \pm 1, \pm 2$ der Fall ist und nur diese werden in Gl. (2.157) benötigt.

Um das C_l^{BB} -Spektrums zu bestimmen, berechnen wir die Zweipunktfunktion

$$\begin{aligned} \langle \Delta_n^{(2)}(\mathbf{k}, \eta_0)\Delta_{n'}^{(2)*}(\mathbf{k}', \eta_0) \rangle &= \int_{\eta_{\text{ini}}}^{\eta_0} d\eta \int_{\eta_{\text{ini}}}^{\eta_0} d\eta' |\dot{\kappa}(\eta)||\dot{\kappa}(\eta')| e^{-\kappa(\eta)-\kappa(\eta')} j_{nm}(k(\eta_0 - \eta)) j_{n'm'}(k(\eta_0 - \eta')) \\ &\quad \times \int_{\eta_{\text{ini}}}^{\eta} d\eta_1 \int_{\eta_{\text{ini}}}^{\eta'} d\eta'_1 (\delta_{mq}\delta(\eta - \eta_1) + |\dot{\kappa}(\eta_1)|\varsigma_{mp}G_{pq}(\eta, \eta_1)) \\ &\quad \times \left(\delta_{m'q'}\delta(\eta' - \eta'_1) + |\dot{\kappa}(\eta'_1)|\varsigma_{m'p'}G_{p'q'}(\eta', \eta'_1) \right) \langle S_q(\mathbf{k}, \eta_1)S_{q'}^*(\mathbf{k}', \eta'_1) \rangle, \end{aligned} \quad (3.17)$$

wobei Gleichung (3.21) $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ im Integrand impliziert.

Die Korrelation der Quellterme $\langle S_q(\mathbf{k}, \eta_1) S_{q'}^*(\mathbf{k}', \eta'_1) \rangle$ beinhaltet nur Größen, die in erster Ordnung bekannt sind: Das primordiale Potential $\Phi(\mathbf{k}) \equiv A^{(1)}(\mathbf{k}, \eta_{\text{ini}})$ und die Transferfunktionen T_n . Die Quelle $S_n(\mathbf{k})$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} S_n(\mathbf{k}, \eta) &= \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} K_n^{pq} \Delta_p^{(1)}(\mathbf{k}_1, \eta) \Delta_q^{(1)}(\mathbf{k}_2, \eta) \\ &= \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} K_n^{pq} T_p^{(1)}(\mathbf{k}_1, \eta) T_q^{(1)}(\mathbf{k}_2, \eta) \Phi(\mathbf{k}_1) \Phi(\mathbf{k}_2), \end{aligned} \quad (3.18)$$

mit Koeffizienten K_n^{pq} , welche aus den Stoßtermen zweiter Ordnung (Gl. (3.2) bis (3.5)) abgeleitet werden. Da die Quellen aus Faltungen über Größen erster Ordnung bestehen, wird in Gl. (3.17) die Vierpunktfunktion des primordialen Spektrums benötigt. Mit der Annahme, dass die primordialen Fluktuationen $\Phi(k)$ gaußverteilt sind, gilt:

$$\begin{aligned} &\langle \Phi(\mathbf{k}_1) \Phi(\mathbf{k}_2) \Phi^*(\mathbf{k}'_1) \Phi^*(\mathbf{k}'_2) \rangle \\ &= \langle \Phi(\mathbf{k}_1) \Phi(\mathbf{k}_2) \rangle \langle \Phi^*(\mathbf{k}'_1) \Phi^*(\mathbf{k}'_2) \rangle + \langle \Phi(\mathbf{k}_1) \Phi^*(\mathbf{k}'_1) \rangle \langle \Phi(\mathbf{k}_2) \Phi^*(\mathbf{k}'_2) \rangle \\ &\quad + \langle \Phi(\mathbf{k}_1) \Phi^*(\mathbf{k}'_2) \rangle \langle \Phi(\mathbf{k}_2) \Phi^*(\mathbf{k}'_1) \rangle \\ &= (2\pi)^6 \left(P_\Phi(k_1) P_\Phi(k'_1) \delta^{(3)}(\mathbf{k}) \delta^{(3)}(\mathbf{k}') \right. \\ &\quad \left. + P_\Phi(k_1) P_\Phi(k_2) \left[\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_1) \delta^{(3)}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}'_2) + \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_2) \delta^{(3)}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}'_1) \right] \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

mit P_Φ dem primordialen Powerspektrum $\langle \Phi(\mathbf{k}) \Phi^*(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P_\Phi(k)$. Für $\mathbf{k} \neq 0$ oder $\mathbf{k}' \neq 0$ erhalten wir

$$\langle \Phi(\mathbf{k}_1) \Phi(\mathbf{k}_2) \Phi^*(\mathbf{k}'_1) \Phi^*(\mathbf{k}'_2) \rangle = (2\pi)^6 P_\Phi(k_1) P_\Phi(k_2) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left[\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_1) + \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_2) \right] \quad (3.20)$$

und der Erwartungswert der Quellen lautet:

$$\begin{aligned} \langle S_n(\mathbf{k}, \eta) S_{n'}^*(\mathbf{k}', \eta') \rangle &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} P_\Phi(k_1) P_\Phi(k_2) K_n^{pq} K_{n'}^{p'q'*} \\ &\quad \times \left[T_p^{(1)}(\mathbf{k}_1, \eta) T_q^{(1)}(\mathbf{k}_2, \eta) T_{p'}^{(1)*}(\mathbf{k}_1, \eta') T_{q'}^{(1)*}(\mathbf{k}_2, \eta') \right. \\ &\quad \left. + T_p^{(1)}(\mathbf{k}_1, \eta) T_q^{(1)}(\mathbf{k}_2, \eta) T_{p'}^{(1)*}(\mathbf{k}_2, \eta') T_{q'}^{(1)*}(\mathbf{k}_1, \eta') \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Mit Gl. (3.17) und Gl. (3.21) können wir das C_l^{BB} -Spektrum nach Gl. (2.157) berechnen, ohne die großen Multipole explizit numerisch zu berechnen und erreichen eine effektive Zerlegung zwischen den nicht statistischen Differentialgleichungen und der Berechnung von Erwartungswerten über statistischen Größen.

3.2.4. Non-Gaussianity

Die Methode kann analog auf die Non-Gaussianity angewendet werden. In erster Ordnung wird in der Evolution keine zusätzliche Non-Gaussianity induziert und das Bispektrum der CMB liefert das primordiale Bispektrum. Dies gilt in zweiter Ordnung nicht mehr, da nichtlineare Terme Non-Gaussianity induzieren, auch bei verschwindendem primordialen Bispektrum. Wir betrachten die Dreipunktfunktion

$$\langle \Delta_n \Delta_m \Delta_p \rangle = \langle \Delta_n^{(2)} \Delta_m^{(1)} \Delta_p^{(1)} \rangle + \text{sym.}, \quad (3.22)$$

welche für gaußsche Fluktuationen verschwinden muss. Wir ersetzen die Größen erster Ordnung durch Transferfunktionen und berechnen die Größen zweiter Ordnung nach Gl. (3.16):

$$\begin{aligned} \langle \Delta_n^{(2)}(\mathbf{k}, \eta_0) \Delta_q^{(1)}(\mathbf{k}', \eta_0) \Delta_r^{(1)}(\mathbf{k}'', \eta_0) \rangle &= T_q^{(1)}(\mathbf{k}', \eta_0) T_r^{(1)}(\mathbf{k}'', \eta_0) \\ &\times \int_{\eta_{\text{ini}}}^{\eta_0} d\eta |\dot{\kappa}| e^{-\kappa} j_{nm}(k(\eta_0 - \eta)) \left[\zeta_{mp} G_{pq}(\eta, \eta_{\text{ini}}) \langle \Delta_q^{(2)}(\mathbf{k}, \eta_{\text{ini}}) \Phi(\mathbf{k}') \Phi(\mathbf{k}'') \rangle \right. \\ &\quad \left. + \int_{\eta_{\text{ini}}}^{\eta} d\eta' (\delta_{mq} \delta(\eta - \eta') + |\dot{\kappa}(\eta')| \zeta_{mp} G_{pq}(\eta, \eta')) \langle S_q(\mathbf{k}, \eta') \Phi(\mathbf{k}') \Phi(\mathbf{k}'') \rangle \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Mit Gl. (3.18) und der Berechnung der Vierpunktfunktion analog zu Gl. (3.19) folgt

$$\begin{aligned} \langle S_n(\mathbf{k}, \eta') \phi(\mathbf{k}') \phi(\mathbf{k}'') \rangle &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'') P_\Phi(k') P_\Phi(k'') K_n^{pq} \\ &\times \left[T_p^{(1)}(-\mathbf{k}', \eta') T_q^{(1)}(-\mathbf{k}'', \eta') + T_p^{(1)}(-\mathbf{k}'', \eta') T_q^{(1)}(-\mathbf{k}', \eta') \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Wie gezeigt, wird durch Quellen zweiter Ordnung, welche Faltungen über Verteilungsfunktionen erster Ordnung sind, Non-Gaussianity induziert, auch wenn angenommen wird, dass das primordiale Spektrum gaußverteilt ist.

Alle benötigten Größen sind aus der ersten Ordnung bekannt; unsere Methode kann problemlos auf die Berechnung der Non-Gaussianity angewandt werden. Die explizite Berechnung des messbaren Bisppektrums aus diesen Erwartungswerten ist in Anhang C angegeben.

3.3. Numerische Rechnungen

In diesem Abschnitt beschreiben wir die numerischen Methoden und Schnitte, welche verwendet werden, um die Zweipunktfunktion (3.17) und das Spektrum C_l^{BB} aus Gl. (2.157) zu berechnen. Die benötigten Transferfunktionen erster Ordnung werden in Abschnitt 3.3.1 berechnet. Die Anfangswerte der Fluktuationen werden in Abschnitt 3.3.2 bestimmt. In Abschnitt 3.3.3 beschäftigen wir uns mit den Greenfunktionen und diskutieren Closing-Relations, welche verwendet werden, um diese effektiv zu berechnen. Die Quellen der modifizierten Line-Of-Sight-Integration werden schließlich in Abschnitt 3.3.4 diskutiert; in Abschnitt 3.3.5 und 3.3.6 testen wir die numerischen Parameter, um sicherzustellen, dass wir alle relevanten Effekte berücksichtigt haben.

Die Ergebnisse verwenden ein Λ CDM-Modell mit masselosen Neutrinos und $T_{\text{CBR}} = 2.726 \text{ K}$, $H_0 = 70 \text{ km/(s Mpc)}$, sowie $\Omega_{\text{CDM}} = 0.245$, $\Omega_{\text{baryon}} = 0.045$ und $\Omega_\Lambda = 0.71$. Wir benutzen ein skaleninvariantes primordiales Powerspektrum $P_\Phi(k) = 2\pi^2(9/25)\Delta_{\mathcal{R}}^2/k^3$ mit Amplitude $\Delta_{\mathcal{R}}^2 = 2.41 \times 10^{-9}$. Zur Berechnung der Rekombination verwenden wir RECFAST [77] mit einer Heliummassenfraktion $Y_p = 0.24$. Unsere Rechnung beschränkt sich auf Effekte im frühen Universum, späte Effekte wie der integrierte Sachs-Wolfe-Effekt (ISW) und Reionisation werden vernachlässigt. Stoßtermeffekte zu frühen Zeiten und der frühe ISW-Effekt werden bis $\eta = 500 \text{ Mpc}/c$ berechnet und danach vernachlässigt. Die Rekombination findet bei $\eta_{\text{rec}} = 286.7 \text{ Mpc}/c$ statt; dem Median der Visibility-Function.

3.3.1. Transferfunktionen erster Ordnung

Die Transferfunktionen werden durch die Lösung der Boltzmann-Gleichung erster Ordnung, mit nicht statistischen Anfangsbedingungen, berechnet. Daher können Standardmethoden zur Lösung von gekoppelten Differentialgleichungen verwendet werden (z.B. aus der GNU Scientific Library [30]). Alternativ kann auf diverse Programme, welche die erste Ordnung lösen, zurückgegriffen werden, z.B. CMBFAST [78], CAMB [58] oder CMBEASY [23]. Wir verwenden zur Berechnung der Transferfunktionen einen eigenen Code, der mit CAMB verglichen wurde.

Die Transferfunktionen, welche in den Stoßtermquellen auftreten, werden nur zu frühen Zeiten benötigt, wenn ihre Berechnung unproblematisch ist, da sich noch keine hohen Momente durch Free-Streaming aufgebaut haben. Deshalb trunkieren wir die Boltzmannhierarchie bei l_{cut} und vernachlässigen alle weiteren Momente. l_{cut} sollte so gewählt sein, dass das entsprechende Moment selber noch nicht angeregt wird. Die einfache Methode des Abschneidens lässt sich durch Closing-Relations weiter verbessern, wie in Abschnitt 3.3.3 genauer diskutiert.

Die Berechnung der Neutrino-Transferfunktionen ist deutlich problematischer, da Neutrinos nicht an die Elektronen gekoppelt sind. Photonen beginnen mit dem Free-Streaming erst wenn die Reaktionsrate klein ist, während in der Neutrino-Hierarchie sofort höhere Multipoles angeregt werden. Deshalb muss für die Neutrinos l_{cut} wesentlich größer gewählt werden.

3.3.2. Anfangsbedingungen

Wir nehmen an, dass die primordialen Fluktuationen erster Ordnung adiabatisch sind und berechnen die Startwerte der skalaren Störungen bei $a_{\text{ini}} = 10^{-6}$ (entspricht $\eta_{\text{ini}} = 0.464 \text{ Mpc}/c$) tief in der Strahlungsära [62]:

$$\begin{aligned} T_A^{(1)}(k) &\equiv T_\Phi^{(1)}(k) = 1, & T_D^{(1)}(k) &= -\left(1 + \frac{2}{5} \frac{\bar{\rho}_\nu}{\bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_\nu}\right), \\ T_{\delta_b}^{(1)}(k) &= T_{\delta_c}^{(1)}(k) = \frac{3}{4} T_{\Delta_{I,00}}^{(1)}(k) = \frac{3}{4} T_{\Delta_{\nu,00}}^{(1)}(k) = -\frac{3}{2}, \\ T_{v_{e,[0]}}^{(1)}(k) &= T_{v_{c,[0]}}^{(1)}(k) = \frac{1}{4} T_{\Delta_{I,10}}^{(1)}(k) = \frac{1}{4} T_{\Delta_{\nu,10}}^{(1)}(k) = \frac{k}{2H_C}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Für die Neutrinos verwenden wir zusätzlich einen initialen Quadrupol $T_{\Delta_{\nu,20}}^{(1)}(k) = 2k^2/(3H_C^2)$, welcher allerdings bei η_{ini} sehr klein ist, da für alle relevanten Wellenvektoren $k/H_C(\eta_{\text{ini}}) \ll 1$ gilt.

Da wir in Gl. (2.157) nur Vektor- und Tensorstörungen ($m = \pm 1, \pm 2$) benötigen, reicht es aus, die Anfangswerte der Vektor- und Tensormoden in zweiter Ordnung zu berechnen. Wir können annehmen, dass es keine unabhängigen Anfangsbedingungen für die Größen zweiter Ordnung gibt, da diese in die Anfangswerte erster Ordnung absorbiert werden können. Da die Einsteingleichungen aber auch Zwangsgleichungen liefern, können Anfangswerte, welche sich aus den Startwerten erster Ordnung quadriert berechnen, auftreten. Z.b. ist tief in der Strahlungsära, wenn $k/H_C \ll 1$ erfüllt ist, die Energiedichtefluktuation durch

$$\frac{\delta\rho^{(2)}}{\bar{\rho}} = -2A^{(2)} + 4H_C[A^{(1)}]^2 \quad (3.26)$$

gegeben. Diese Relation impliziert einen nicht verschwindenden Startwert für die Störungen zweiter Ordnung, welcher nicht in die Anfangswerte erster Ordnung absorbiert werden kann.

In den Gleichungen, die wir für $m = \pm 1, \pm 2$ lösen, tritt die Energiedichte allerdings nicht auf, weshalb wir deren Anfangsbedingung nicht benötigen.

Auch benötigen wir die Anfangsbedingung der $m = \pm 1$ Komponenten der Elektronengeschwindigkeit $v_{e,[m]}^{(2)}$ und des Photondipols nicht. Ihre Anfangswerte sind mit der Metrikstörung $B_{[m]}^{(2)}$ verknüpft. Da wir in dieser Arbeit nicht die Effekte der Metrikfluktuationen berechnen, muss die Anfangsbedingung der Dipole aufgrund der Konsistenz zu Null gesetzt werden. Im Tight-Coupling gibt es zusätzlich einen nicht verschwindenden Quadrupol $\Delta_{I,2m}^{(2)}$, welcher eine Anfangsbedingung aus der quadrierten Elektronengeschwindigkeit erhält. Diese ist aber, zusätzlich zur zweiten Ordnung in kosmologischer Störungstheorie, mit $(k/H_C)^2$ unterdrückt und kann problemlos vernachlässigt werden. In Kapitel 3.3.5 zeigen wir, dass Stöße den Quadrupol schnell auf seinen Gleichgewichtswert bringen, auch wenn der Startwert auf Null gesetzt wird.

Alle restlichen Multipoles sind Tight-Coupling unterdrückt. Eventuelle Anregungen zerfallen auf kurzen Zeitskalen; die Startwerte können auf Null gesetzt werden.

Neutrinoanfangswerte werden in unserer Rechnung zweiter Ordnung nicht benötigt, da sie nicht an Polarisation koppeln².

Zusammenfassend können wir die Gleichungen zweiter Ordnung mit allen Anfangswerten gleich Null lösen, solange wir nur an der Erzeugung von B-Polarisation interessiert sind.

3.3.3. Berechnung der Greenfunktionen

Die Differentialgleichungen (3.15) für die Greenfunktionen sind deutlich einfacher als die ursprünglichen Gleichungen zweiter Ordnung, da keine Faltungen mehr auftreten und die Gleichungen nicht mehr statistisch sind. Ihre Struktur ähnelt den Gleichungen erster Ordnung.

Die Greenfunktionen lassen sich in verschiedene Klassen einteilen, die sich qualitativ unterscheiden. Alle Multipole, außer Monopol, Dipol, Quadrupol und Elektrongeschwindigkeit sind im Tight-Coupling stark unterdrückt³. Diese Eigenschaft führt zu einer Unterdrückung der entsprechenden Greenfunktion $G_{nm}(\eta, \eta')$, wenn η' vor der Rekombination liegt (außer für $\eta \approx \eta'$). Dies erlaubt es die η' -Integration auf die Zeit um die Rekombination zu beschränken, da nach der Rekombination der Quellterm verschwindet⁴ und vor der Rekombination die Greenfunktion unterdrückt ist, sogar nach einer Multiplikation mit der großen Reaktionsrate $|\dot{\kappa}|$. Dieses Verhalten ist bereits von der Visibility-Function $|\dot{\kappa}|e^{-\kappa}$ bekannt, welche nur während der Rekombination von Null verschieden ist.

Greenfunktionen, die nicht Tight-Coupling unterdrückt sind, können zu numerischen Problemen führen, da sie die zu frühen Zeiten die große Quelle $\sigma_n = |\dot{\kappa}|S_n$ in Gl. (3.13) nicht unterdrücken. Vor der Rekombination ist die Reaktionsrate $|\dot{\kappa}|$ groß und kann mit dem numerischen Fehler von S_n einen großen absoluten Fehler in σ_n ergeben. In linearen Kombinationen von Größen zweiter Ordnung, die sich gegenseitig aufheben, kann so ein großer relativer Fehler entstehen. Genau dieses Problem tritt für den Elektrongeschwindigkeits- und den Strahlungsdipol auf, welche beide im Tight-Coupling nicht unterdrückt sind, in den Gleichungen aber in Kombinationen auftreten, welche sich im Tight-Coupling beinahe aufheben. Das Problem kann umgangen werden, indem wir eine Relation zwischen beiden entsprechenden Quelltermen ausnutzen. Die Elektrongeschwindigkeitsquelle kann in zwei Terme aufgeteilt werden: Einem Beitrag proportional zu der Photondipolquelle und dem verbleibenden Rest $\tilde{S}_{v_e,1m}$, in dem der Faktor $|\dot{\kappa}|$ durch die im Tight-Coupling unterdrückte Kombination $\left(4v_{e,[m]}^{(1)} - \Delta_{I,1m}^{(1)}\right)$ aufgehoben wird. Wir verwenden die Zerlegung

$$S_{v_e,1m} = -\frac{1}{4R} S_{I,1m} + \tilde{S}_{v_e,1m}, \quad (3.27)$$

mit

$$\tilde{S}_{v_e,1m} = \frac{1}{4R} \delta_b^{(1)}(\mathbf{k}_1) \left(4v_{e,[m]}^{(1)}(\mathbf{k}_2) - \Delta_{I,1m}^{(1)}(\mathbf{k}_2)\right). \quad (3.28)$$

Der erste Term auf der rechten Seite von Gl. (3.27) kann mit der Photonquelle in Gl. (3.13) kombiniert werden und wir erhalten

$$\begin{aligned} \Delta_n^{(2)}(\eta) &= \int_{\eta_{\text{ini}}}^{\eta} d\eta' |\dot{\kappa}(\eta')| \left(G_{n,(I,1m)}(\eta, \eta') S_{I,1m}(\eta') + G_{n,(v_e,1m)}(\eta, \eta') S_{v_e,1m}(\eta') \right) \\ &\quad + \sum_{\text{alle anderen } p} \int_{\eta_{\text{ini}}}^{\eta} d\eta' |\dot{\kappa}(\eta')| G_{np}(\eta, \eta') S_p(\eta') \\ &= \int_{\eta_{\text{ini}}}^{\eta} d\eta' |\dot{\kappa}(\eta')| \left(G_{n,(I,1m)}(\eta, \eta') - \frac{1}{4R} G_{n,(v_e,1m)}(\eta, \eta') \right) S_{I,1m}(\eta') \\ &\quad + \int_{\eta_{\text{ini}}}^{\eta} d\eta' |\dot{\kappa}(\eta')| G_{n,(v_e,1m)}(\eta, \eta') \tilde{S}_{v_e,1m}(\eta') \end{aligned}$$

²Dies betrifft nur die Größen zweiter Ordnung. Neutrino transferfunktionen erster Ordnung könnten in den Quellen auftreten.

³Dieses trifft nicht für Neutrinos zu, welche nicht Tight-Coupling unterdrückt sind.

⁴Da wir nur Stoßtermeffekte betrachten ist der Quellterm proportional zu der Reaktionsrate.

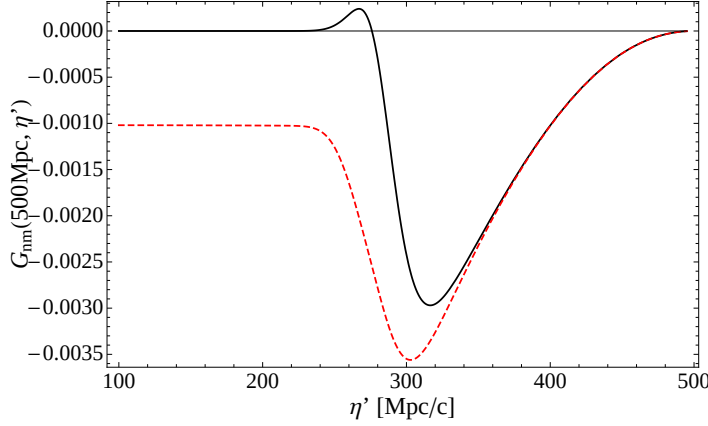


Abbildung 3.1.: In gestrichelt (rot) die Greenfunktion $G_{(E,21),(I,11)}(500 \text{ Mpc}/c, \eta')$ für $k = 0.02 \text{ Mpc}^{-1}$. Da der Dipol nicht Tight-Coupling unterdrückt ist, verschwindet die Greenfunktion vor der Rekombination nicht. Nach der Rekombination verschwindet die Greenfunktion, da $\Delta_{E,21}$ und $\Delta_{I,11}$ nur im Stoßterm gekoppelt sind. Die durchgezogene (schwarze) Linie ist die kombinierte Dipol- und Elektrongreenfunktion $G_{(E,21),(I,11)}(500 \text{ Mpc}/c, \eta') - \frac{1}{4R} G_{(E,21),(v_e,11)}(500 \text{ Mpc}/c, \eta')$, welche zu frühen Zeiten verschwindet.

$$+ \sum_{\text{alle anderen } p} \int_{\eta_{\text{ini}}}^{\eta} d\eta' |\dot{\kappa}(\eta')| G_{np}(\eta, \eta') S_p(\eta'). \quad (3.29)$$

Dort tritt zusammen mit der problematischen Quelle $S_{I,1m}$ die Kombination der Greenfunktionen $G_{n,(I,1m)} - \frac{1}{4R} G_{n,(v_e,1m)}$ auf, welche aber aufgrund der Struktur des Stoßterms zu frühen Zeiten verschwindet. Die Rechnung ist numerisch deutlich stabiler, wenn wir nicht die Subtraktion von zwei großen Termen berechnen, sondern direkt die kombinierte Greenfunktion verwenden.

In Abb. 3.1 ist diese Kombination der Greenfunktionen dargestellt und die Unterdrückung zu frühen Zeiten ist klar erkennbar.

Die restlichen Greenfunktionen, welche nach Multiplikation mit $|\dot{\kappa}|$ nicht verschwinden, und daher zu numerischen Instabilitäten führen können, sind: Die Greenfunktion des Photonmonopols, die Greenfunktion der Elektronrestquelle $\tilde{S}_{v_e,1m}$ und die Greenfunktionen der Quadrupole. Die Erste ist unproblematisch, da der Monopol nicht an Polarisation koppelt, die Zweite multipliziert lediglich die Restquelle $\tilde{S}_{v_e,1m}$, welche zu frühen Zeiten klein gegenüber $|\dot{\kappa}|$ ist. Die Greenfunktionen der Quadrupole sind für $m = \pm 1$ mit einem Faktor $|\dot{\kappa}|$ unterdrückt und verschwinden daher nicht in Kombination mit dem $|\dot{\kappa}|$ aus der Quelle, es tritt aber auch keine problematische große Kombination auf. Die Greenfunktionen der Quadrupole sind für $m = \pm 2$ exponentiell unterdrückt, da für Tensorstörungen keine Kopplung an den nicht unterdrückten Dipol existiert. Die η' -Integration in Gl. (3.13) kann daher für $|m| = 2$ auf Zeiten um die Rekombination beschränkt werden. Im Gegensatz dazu muss die Integration für $|m| = 1$ bei η_{ini} beginnen und kann nicht abgeschnitten werden. Dieser Unterschied liegt an der Existenz des Dipols im Tight-Coupling. Wird im Tight-Coupling ein Quadrupol angeregt, so wird dieser in jedem Fall schnell unterdrückt werden. Für $|m| = 1$ koppelt der Quadrupol aber noch an den Dipol und modifiziert diesen. Der Dipol selber ist nicht unterdrückt und nach der Rekombination entstehen aus dem modifizierten Dipol wieder höhere Multipole. So können frühe Vektorquellen in geringem Maße beitragen, während frühe Tensorquellen ausgewaschen werden, da es kein nicht unterdrücktes Moment gibt, an welches sie koppeln können.

Nach der Rekombination hängen die Eigenschaften der Greenfunktion von der Kopplung zwischen beiden Momenten ab. Sind beide nur im Stoßterm gekoppelt, fällt die Greenfunktion nach der Rekombination

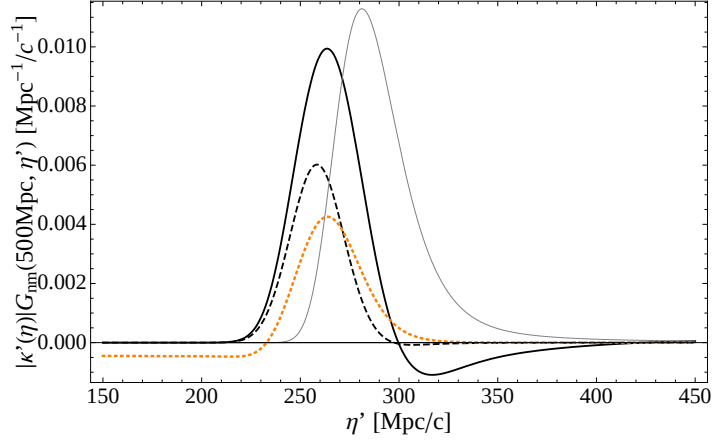


Abbildung 3.2.: Greenfunktionen $G_{(E,22),(E,22)}(500 \text{ Mpc}/c, \eta')$, $10 \times G_{(I,22),(E,22)}(500 \text{ Mpc}/c, \eta')$ und $G_{(I,21),(E,21)}(500 \text{ Mpc}/c, \eta')$ (durchgezogen/schwarz, gestrichelt/schwarz und gepunktet/orange) für $k = 0.03 \text{ Mpc}^{-1}$, multipliziert mit $|\dot{\kappa}(\eta')|$. Die Multipolmomente $\Delta_{E,2m}$ und $\Delta_{I,2m}$ sind nur im Stoßterm gekoppelt. Wie erwartet fällt deren Greenfunktion schneller ab, als Greenfunktionen deren Momente im Free-Streaming-Term gekoppelt sind. Die Greenfunktion des Quadrupols $\Delta_{I,21}$ ist zu frühen Zeiten nur mit $|\dot{\kappa}|$ unterdrückt und deshalb in Kombination mit $|\dot{\kappa}|$ konstant. Die Visibility-Function geteilt durch zwei ist in grau zum Vergleich dargestellt.

bination schnell ab; sind sie im Free-Streaming-Term gekoppelt, führt dies zu Oszillationen, da die Free-Streaming-Terme benachbarte Multipole ineinander umwandeln. In Kombination mit $|\dot{\kappa}(\eta')|$ in Gl. (3.16) verschwinden allerdings alle Greenfunktionen nach der Rekombination, die nur im Stoßterm gekoppelten allerdings mit einem zusätzlichen Faktor $|\dot{\kappa}|$, wie in Abb. 3.2 zu sehen.

Trunkierung der Hierarchie durch Closing-Relations

Genau wie die Gleichungen erster Ordnung, müssen die Gleichungen für die Greenfunktionen bei l_{cut} trunziert werden. Die einfachste Möglichkeit ist es, alle Momente mit $l > l_{\text{cut}}$ auf Null zu setzen. Zu frühen Zeiten ist dies eine gute Näherung, da höhere Momente erst im Laufe der Zeit angeregt werden. Sobald aber das Moment l_{cut} angeregt wird, ist die Lösung fehlerhaft. Das Moment $l_{\text{cut}} + 1$ kann nicht angeregt werden und die Rückkopplung auf das Moment l_{cut} wird vernachlässigt. Der Fehler betrifft aber zunächst nur Multipole nahe l_{cut} . Damit die niedrigen Momente ungenau werden, wird genauso viel Zeit benötigt, wie es anfänglich gedauert hat das Moment l_{cut} aus diesen anzuregen. Die Ergebnisse sind also auch noch einige Zeit nachdem $\Delta_{l_{\text{cut}}}$ angeregt wurde brauchbar.

Es muss also lediglich bei einem hinreichend großen l_{cut} trunziert werden, so dass die niedrigsten Momente, welche wir benötigen, nicht davon beeinflusst werden. Als Abschätzung für l_{cut} , bei gegebenem Wellenvektor k und einer freien Evolutionszeit η , kann $l_{\text{cut}} \approx l + k(\eta - \eta_{\text{rec}})/2$ verwendet werden, mit $l = 2$ für die niedrigen Momente, an denen wir interessiert sind. Wenn k oder η groß sind, müssen sehr viele Momente berechnet werden. Alternativ können Closing-Relations angewendet werden, um bei kleinerem l_{cut} genaue Ergebnisse zu erhalten [78].

Zur Herleitung dieser verwenden wir die Näherung, dass die Visibility-Function eine Deltafunktion bei η_{rec} ist. Dies erlaubt es uns, analytische Relationen zwischen den höheren Multipolen herzuleiten. In dieser Approximation ist die Reaktionsrate zu frühen Zeiten unendlich groß, so dass aufgrund der Tight-Coupling-Unterdrückung nur der Monopol und Dipol existiert. Nach der Rekombination ist die Reaktionsrate Null und damit verschwinden auch alle Quellen. Die Free-Streaming-Lösung Gl. (B.7)

gilt dann exakt und wir erhalten

$$\begin{aligned} \Delta_{X,lm}(\eta) &= \sum_{l_2=0,1} \sum_{X',l_1} i^{l-l_1-l_2} \frac{(2l+1)(2l_1+1)}{2l_2+1} j_{l_1}(k(\eta-\eta_{\text{rec}})) \\ &\quad \times \begin{pmatrix} l & l_1 & l_2 \\ m & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l_1 & l_2 \\ F_{X'} & 0 & F_{X'} \end{pmatrix} H_{XX'}^*(l-l_1-l_2) \Delta_{X',l_2m}(\eta_{\text{rec}}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Aus dieser Relation leiten wir die Closing-Relations her. Das Ziel ist es, eine Gleichung aufzuschreiben, welche das Moment l_{cut} als Funktion der nächsten niedrigeren Momente angibt.

Zunächst leiten wir die Closing-Relations für unpolarisierte Strahlung Δ_{I,l_0} und $l_{\text{cut}} = 9$ her. Dazu sind die folgenden Schritte nötig:

- 1) Wir schreiben Gl. (3.30) explizit für die zwei größten Multipole kleiner l_{cut} : $\Delta_{X,(l_{\text{cut}}-1)m}$ und $\Delta_{X,(l_{\text{cut}}-2)m}$ auf. Wir benötigen beide Gleichungen, um ein invertierbares Gleichungssystem mit dem nicht verschwindenden Monopol und Dipol zu erhalten.

$$\begin{pmatrix} \Delta_{I,80} \\ \Delta_{I,70} \end{pmatrix}(\eta) = M \begin{pmatrix} \Delta_{I,10} \\ \Delta_{I,00} \end{pmatrix}(\eta_0) = \begin{pmatrix} 8j_7 - 9j_9 & 17j_8 \\ 7j_7 - 8j_9 & 15j_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{I,10} \\ \Delta_{I,00} \end{pmatrix}(\eta_0). \quad (3.31)$$

Die Argumente der Besselfunktionen, welche immer $k(\eta - \eta_{\text{rec}})$ sind, werden in diesem Kapitel unterdrückt. Für $m \neq 0$, existiert der Monopol (und der Dipol für $m \neq 0, \pm 1$) nicht. Anstelle dessen verwenden wir dann die zwei niedrigsten existierenden Multipole.

- 2) Wir lösen die Gleichungen nach Monopol und Dipol auf, indem wir die Matrix M invertieren. Danach verwenden wir Gl. (3.30) für $\Delta_{X,l_{\text{cut}}m}$ und ersetzen den Monopol und Dipol mit der inversen Matrix M^{-1} durch die höheren Momente. Daraus erhalten wir die Closing-Relation:

$$\begin{aligned} \Delta_{I,90}(\eta) &= \frac{19j_9(-7j_6 + 8j_8) + 15j_7(9j_8 - 10j_{10})}{17j_8(-7j_6 + 8j_8) + 15j_7(8j_7 - 9j_9)} \Delta_{I,80}(\eta) \\ &\quad + \frac{19j_9(8j_7 - 9j_9) + 17j_8(-9j_8 + 10j_{10})}{17j_8(-7j_6 + 8j_8) + 15j_7(8j_7 - 9j_9)} \Delta_{I,70}(\eta). \end{aligned} \quad (3.32)$$

- 3) In der Boltzmannhierarchie ersetzen wir nun $\Delta_{X,l_{\text{cut}}m}$ durch die Closing-Relation und erhalten so ein geschlossenes System von Differentialgleichungen für die Multipole bis $\Delta_{X,(l_{\text{cut}}-1)m}$.

Für skalare Polarisationsmoden funktioniert das Verfahren analog, nichtskalare Polarisationsmoden mischen aber, weshalb E- und B-Polarisation nicht voneinander getrennt betrachtet werden kann. In dem Fall setzen wir $\Delta_{E,l_{\text{cut}}-1m}$ und $\Delta_{B,l_{\text{cut}}-1m}$ in Verbindung mit den beiden am schwächsten unterdrückten Polarisationsmoden im Tight-Coupling, $\Delta_{E,2m}$ und $\Delta_{B,2m}$:

$$\begin{pmatrix} \Delta_{E,8m} \\ \Delta_{B,8m} \end{pmatrix}(\eta) = M \begin{pmatrix} \Delta_{E,2m} \\ \Delta_{B,2m} \end{pmatrix}(\eta_0). \quad (3.33)$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir die entsprechenden Closing-Relations für Polarisation, welche deutlich komplizierter sind, da F_X , in den Clebsch-Gordan-Koeffizienten aus Gl. (3.30), nicht verschwindet. Für $m = 2$ erhalten wir explizit die Relation

$$\begin{pmatrix} \Delta_{E,8m} \\ \Delta_{B,8m} \end{pmatrix}(\eta) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}j_6 - \frac{119}{19}j_8 + \frac{14}{19}j_{10} & -5j_7 + \frac{7}{2}j_9 \\ 5j_7 - \frac{7}{2}j_9 & \frac{3}{2}j_6 - \frac{119}{19}j_8 + \frac{14}{19}j_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{E,2m} \\ \Delta_{B,2m} \end{pmatrix}(\eta_0) \quad (3.34)$$

und für $m = 1$

$$\begin{pmatrix} \Delta_{E,8m} \\ \Delta_{B,8m} \end{pmatrix}(\eta) = \sqrt{\frac{7}{10}} \begin{pmatrix} 3j_6 + \frac{17}{19}j_8 - \frac{40}{19}j_{10} & -5j_7 - 5j_9 \\ 5j_7 + 5j_9 & 3j_6 + \frac{17}{19}j_8 - \frac{40}{19}j_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{E,2m} \\ \Delta_{B,2m} \end{pmatrix}(\eta_0). \quad (3.35)$$

Durch Invertierung der Matrizen können wir nun analog zum unpolarisierten Fall die Closing-Relations für Polarisation erzeugen. Dazu verwenden wir Gl. (3.30) für $\Delta_{Xl_{cut}m}$ und ersetzen die polarisierten Quadrupole durch die invertierten Relationen (3.34) und (3.35). Als Beispiel geben wir hier die Closing-Relation für Δ_{E92} an. Das Argument der Besselfunktionen wird mit $x = k(\eta - \eta_{rec})$ abgekürzt und unterdrückt. Es taucht in der Closing-Relation aber polynomial auf, da zur Vereinfachung Relationen der Besselfunktionen untereinander verwendet wurden.

$$\begin{aligned}
 \Delta_{E92}(\eta) = & \left\{ \frac{171}{17x} \left[(x^6 - 12x^4 + 1904x^2)j_6^2 - (14x^5 - 404x^3 + 57120x)j_6j_7 \right. \right. \\
 & + (x^6 - 19x^4 - 3360x^2 + 428400)j_7^2 \left. \right] \Delta_{E82}(\eta) \\
 & - \frac{19}{17} \left[(x^6 - 52x^4 - 476x^2)j_6^2 - 14(x^5 - 56x^3 - 1020x)j_6j_7 \right. \\
 & + (x^6 - 59x^4 - 60x^2 - 107100)j_7^2 \left. \right] \Delta_{B82}(\eta) \left. \right\} \\
 & / \left\{ (x^6 - 7x^4 + 784x^2)j_6^2 - 14(x^5 - 11x^3 + 1680x)j_6j_7 \right. \\
 & \left. + (x^6 - 14x^4 - 735x^2 + 176400)j_7^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Die Güte der Approximation hängt von der Breite der Visibility-Function ab, bzw. davon, dass die Quellen nur während einer kurzen Zeit relevant sind. Dies ist für Photonen, welche durch Stoßeffekte dominiert werden, eine gute Abschätzung. Neutrino fluktuationen werden aber durch Metrikquellen über einen langen Zeitraum induziert, weshalb Closing-Relations dort nicht angewandt werden können. Wir benötigen Neutrinos aber nur in erster Ordnung, so dass alle Greenfunktionen mit Closing-Relations berechnet werden können.

In der Berechnung der Greenfunktionen trunkieren wir bei $l_{cut} = 9$, mit den Closing-Relations

$$\begin{aligned}
 \Delta_{I,9m}(\eta) &= h_{II,8m}(k(\eta - \eta_{rec}))\Delta_{I,8m}(\eta) + h_{II,7m}(k(\eta - \eta_{rec}))\Delta_{I,7m}(\eta). \\
 \Delta_{E,9m}(\eta) &= h_{EE,8m}(k(\eta - \eta_{rec}))\Delta_{E,8m}(\eta) + h_{EB,8m}(k(\eta - \eta_{rec}))\Delta_{B,8m}(\eta). \\
 \Delta_{B,9m}(\eta) &= h_{BE,8m}(k(\eta - \eta_{rec}))\Delta_{E,8m}(\eta) + h_{BB,8m}(k(\eta - \eta_{rec}))\Delta_{B,8m}(\eta).
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Im Allgemeinen sind die Koeffizienten $h_{XY,lm}$ Kombinationen aus sphärischen Besselfunktionen wie in Gl. (3.32); für $m \neq 0$ bzw. für Polarisation können diese aber deutlich komplizierter werden (siehe Gl. (3.36)). Solange das Argument $k(\eta - \eta_{rec})$ klein ist, kann eine polynomiale Entwicklung verwendet werden. Für größere Argumente beginnen die Closing-Relations zu oszillieren, wie in Abb. 3.3 zu sehen. Für sehr große Argumente kann die gedämpfte Oszillation wieder vernachlässigt werden und es können einfache Approximationen angewandt werden. Da die Funktionen relativ glatt sind und nicht von der Kosmologie abhängen, bietet es sich an sie durch eine interpolierende Funktion anzunähern, welche deutlich schneller numerisch ausgewertet werden kann.

Abbildung 3.4 zeigt, dass die Closing-Relations den Fehler deutlich reduzieren, fast ohne die CPU-Zeit zu erhöhen.

3.3.4. Quellterme und Integration

Um das C_l -Spektrum zweiter Ordnung zu berechnen, sind acht Integrationen nötig: Zwei Zeitintegrale aus der Line-Of-Sight-Lösung, zwei Zeitintegrale aus der Greenfunktionsmethode, drei Faltungsintegrale über $\mathbf{k}_1$ und ein k -Integral aus Gl. (2.157). Das Integral über den Winkel ϕ_1 des Vektors $\mathbf{k}_1$ kann analytisch ausgewertet werden, die restlichen Integrale werden mit Monte-Carlo-Methoden berechnet. Dabei müssen die Integrale bei geeigneten Werten abgeschnitten werden.

Die Integration über den Wellenvektor wird bei k_{max} trunkiert. Je größer k_{max} ist, desto mehr Multipoles müssen in den Transferfunktionen erster Ordnung und den Greenfunktionen mitgenommen

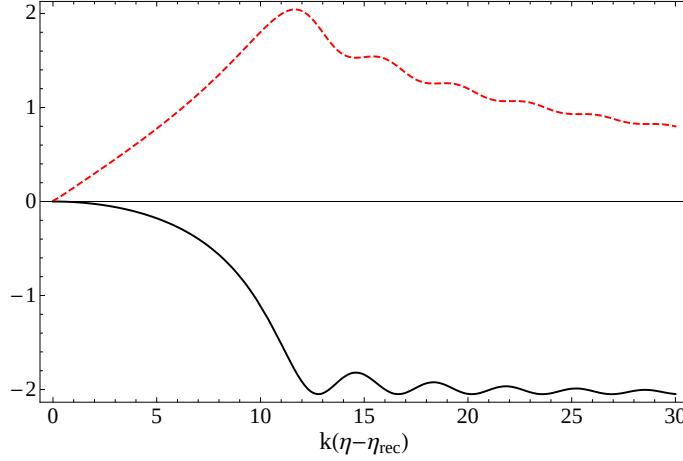


Abbildung 3.3.: Die Funktion $h_{I,72}$ (durchgezogen/schwarz) und $h_{I,82}$ (gestrichelt/rot), welche in der Closing-Relation (3.37) vorkommen.

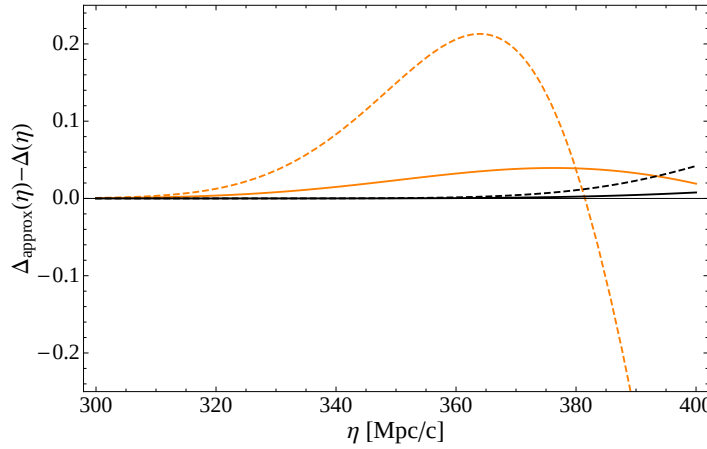


Abbildung 3.4.: Vergleich des absoluten Fehlers einer einfachen Trunkierung (gestrichelt) mit Closing-Relations (durchgezogen) für $\Delta_{I80}^{(1)}$ (schwarz) und $\Delta_{I20}^{(1)}$ (orange); mit $k = 0.1 \text{ Mpc}^{-1}$ und $l_{\text{cut}} = 9$. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Closing-Relations den Fehler deutlich reduzieren. Für kleinere Wellenvektoren ist die Übereinstimmung besser, aber auch für große Wellenvektoren steigt der Fehler, im Gegensatz zu einer einfachen Trunkierung, nicht exponentiell an.

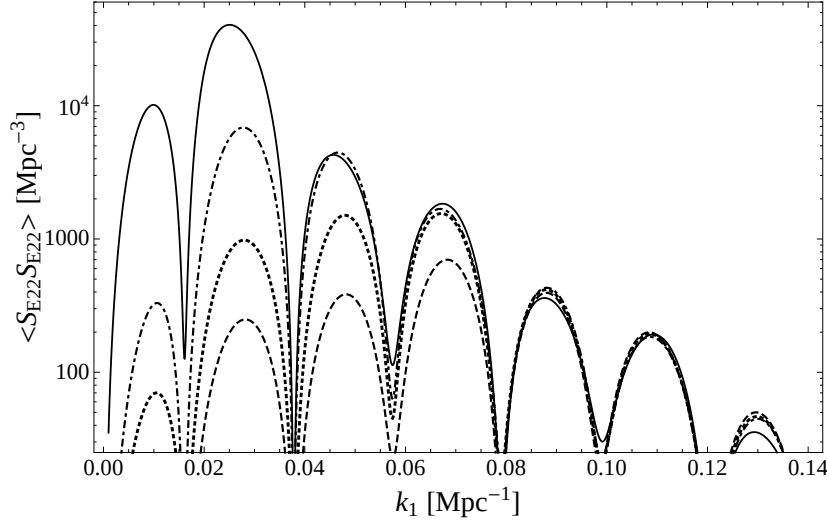


Abbildung 3.5.: Der k_1 -Integrand von $\langle S_{E,22}(\mathbf{k}, \eta) S_{E,22}^*(\mathbf{k}', \eta') \rangle$ (siehe Gl. (3.21)) integriert über $\mathbf{k}'$. In dem Faltungsintegral über $\mathbf{k}_1$ haben wir die Winkelintegrale ausgeführt, die Amplitude k_1 aber nicht ausintegriert, sondern auf der Abszisse aufgetragen. Wir verwenden $\eta = \eta' = 290 \text{ Mpc}/c$ und (von oben nach unten im zweiten Maximum) $k = 0.02 \text{ Mpc}^{-1}$, $k = 0.04 \text{ Mpc}^{-1}$, $k = 0.06 \text{ Mpc}^{-1}$ und $k = 0.08 \text{ Mpc}^{-1}$. Als primordiales Powerspektrum verwenden wir $P_\Phi(k) = 1/k^3$. Der Hauptbeitrag ist bei $k_1 \approx k$ lokalisiert. Für k_1 größer als k wird der Integrand durch das primordiale Powerspektrum unterdrückt. Dies erlaubt einen Schnitt der k_1 -Integration bei k_1 hinreichend größer als k .

werden, da Free-Streaming linear mit dem Wellenvektor skaliert. Es stellt sich aber heraus, dass der Integrand für k_1 oder k_2 größer als k schnell abfällt und das Abschneiden der Integration unproblematisch ist. Die k_1 -Abhängigkeit des Integranden ist in Abb. 3.5 dargestellt und die Unterdrückung für große k_1 ist klar erkennbar. Diese stammt aus dem primordialen Powerspektrum im Erwartungswert der Quellterme in Gl. (3.21). Da $k_2 = |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|$ gilt, ist der Integrand für große k_1 mit $\mathcal{O}(k_1^{-6})$ unterdrückt. Mit $k_{\text{max}} = 0.3 \text{ Mpc}^{-1}$ wird das Integral hinreichend genau berechnet (siehe Abschnitt 3.3.6) und wir können mit einer angemessenen Anzahl an Multipolen arbeiten. Die Grenzen der k -Integrale hängen auch von den heute betrachteten Multipolen l ab und sind gültig für $l \lesssim 2000$. Höhere Multipole korrespondieren zu größeren Wellenvektoren k und damit höheren Grenzen für k_1 .

Die meisten Zeitintegrale können durch die Visibility-Function auf Zeiten um die Rekombination, $200 \text{ Mpc}/c \lesssim \eta \lesssim 500 \text{ Mpc}/c$, beschränkt werden. Dies gilt auch für Integrationen über Greenfunktionen, welche im Tight-Coupling unterdrückt sind, wie in Kapitel 3.3.3 diskutiert. Zur numerischen Berechnung setzen wir aber, aufgrund der Terme, die zu frühen Zeiten nicht verschwinden, die untere Grenze der Zeitintegrale auf η_{ini} . Der adaptive Monte-Carlo-Algorithmus (VEGAS) [56] nimmt automatisch weniger Punkte zwischen η_{ini} und $200 \text{ Mpc}/c$, falls der Bereich nicht wesentlich beiträgt. Die obere Grenze der Zeitintegrationen η_{fs} ist problematischer, da eine höhere Wahl hier gleichzeitig bedeutet, dass mehr Multipole benötigt werden. Um zu zeigen, dass $\eta_{\text{fs}} = 500 \text{ Mpc}/c$ ausreichend ist, analysieren wir die Stabilität der Ergebnisse unter Variation der oberen Grenze η_{fs} in Kapitel 3.3.6.

In den Gleichungen treten Quellterme $S_{X,lm}$ zu allen Multipolen auf. Es reicht aber aus, nur die niedrigsten zu berechnen. Quellterme der höheren Moden $l > 3$ basieren auf den Transferfunktionen der Moden $l \pm 1$. Diese sind aber während des Tight-Couplings unterdrückt und werden erst später angeregt. Stoßtermeffekte, welche mit $|\dot{\kappa}|$ skalieren, sind aber zu späteren Zeiten nicht mehr relevant. Für typische Werte von k , erreicht der Oktopol sein erstes Maximum einige Zeit nach η_{rec} , so dass

X	Tight-Coupling-Lösung	Numerischer Wert
I	8063 ± 9	8128 ± 10
E	0	14.6 ± 2.9
B	0	0.01 ± 0.02

Tabelle 3.1.: Vergleich der Tight-Coupling-Lösung mit dem numerischen Ergebnis für das Powerspektrum $P_{22,2}^{X(2)}(k)$ mit $k = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$, $\eta = 200 \text{ Mpc}/c$ und $P_{\Phi}(k) = 1/k^3$.

sein Beitrag zu den Stoßtermeffekten klein ist. Quellen, welche nur auf dem Oktopol und höheren Moden basieren, können typischerweise vernachlässigt werden. In Gl. (3.16) existiert eine zusätzliche Unterdrückung der Polarisationsmoden, welche aus den Intensitätsquellen $S_{l,lm}$ berechnet werden. Da j_{nm} keine Polarisationsmoden mischt, muss die Intensitätsquelle über eine Greenfunktionen aus Gl. (3.16) an Polarisation koppeln. Die Greenfunktionen, welche I- und E-Polarisation mischen, sind aber nur im Stoßterm gekoppelt und verschwinden nach der Rekombination mit einem zusätzlichen Faktor $|\dot{\kappa}|$, wie in Kapitel 3.3.3 festgestellt. Deshalb sind diese Terme nach der Rekombination stärker unterdrückt, so dass unpolarisierte Moden, die im Tight-Coupling klein sind ($l > 2$), fast keinen Einfluss mehr haben.

Mit n_l bezeichnen wir den höchsten Quellterm, welchen wir noch mitnehmen; alle Quellen $S_{X,lm}$ mit $l > n_l$ werden vernachlässigt. Aus der obigen Argumentation entnehmen wir, dass $n_l = 3$ bereits gute Ergebnisse liefern sollte, da $S_{X,3m}$ die höchste Quelle ist, welche Quadrupole erster Ordnung beinhaltet. Um sicher zu gehen, dass diese Approximation ausreichend ist, führen wir in Kapitel 3.3.6 eine Variation in n_l durch.

Alle Transferfunktionen und Greenfunktionen werden berechnet und für weitere Verwendung abgespeichert. Im Integranden werden diese als Funktion der konformen Zeit und des Wellenvektors benötigt. Wir interpolieren die Lösungen auf einem Gitter mit n_k Stützstellen und äquidistantem Gitterabstand in dem Wellenvektor von $k_0 = 0, \dots, k_{n_k-1} = k_{\text{max}}$ und n_a Zeitschritten $\eta_0 = \eta_{\text{ini}}, \dots, \eta_{n_a-1} = \eta_{\text{fs}}$, welche im Skalenfaktor a äquidistant sind. So erhalten wir ein $n_k \times n_a$ Gitter für die Transferfunktionen und ein $n_k \times n_a \times n_a$ Gitter für die Greenfunktionen, welche zwei Zeitargumente besitzen. In der weiteren Rechnung verwenden wir Splines um die Funktionen auf dem Gitter zu interpolieren. Damit die Interpolation verlässliche Werte produziert, müssen die Gitterabstände klein gegenüber der Skala, auf welcher die Funktionen variieren, sein. Um sicherzustellen, dass dies der Fall ist, führen wir in Kapitel 3.3.6 eine Variation der Gitterabstände durch.

3.3.5. Test im Tight-Coupling-Regime

Im Tight-Coupling existieren analytische Lösungen für die Quadrupole. Um die Methode zu testen, versuchen wir diese numerisch zu reproduzieren. Im Tight-Coupling verschwindet die Polarisation und der Photon-Quadrupol ist durch $10C_{m_1,m}^{-,2} v_{e,[m_1]}^{(1)}(\mathbf{k}_1) v_{e,[m_2]}^{(1)}(\mathbf{k}_2)$ gegeben [7]. Tabelle 3.3.5 zeigt die analytischen und numerischen Werte des Tensor-Powerspektrums $P_{22,2}^{X(2)}(k)$ für $k = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ bei der konformen Zeit $\eta = 200 \text{ Mpc}/c$. Das primordiale Powerspektrum wurde als $P_{\Phi}(k) = 1/k^3$ angenommen.

Die polarisierten Moden sind auch in der numerischen Rechnung stark unterdrückt und der unpolarisierte Quadrupol nimmt den korrekten Wert an. Die kleinen Abweichungen zwischen dem analytischen Ergebnis und der numerischen Simulation liegen daran, dass die analytische Rechnung von einem unendlich großem $|\dot{\kappa}|$ ausgeht, in der numerischen Rechnung aber der echte finite Wert verwendet wird. Daher sind die numerischen Ergebnisse nicht Null, sondern nur stark unterdrückt. Die E-Polarisation, welche direkt an den unpolarisierten Quadrupol koppelt, ist daher klein; die B-Mode, welche nur an die bereits unterdrückte E-Mode koppelt, ist mit einer zusätzlichen Ordnung von $k/|\dot{\kappa}|$ unterdrückt.

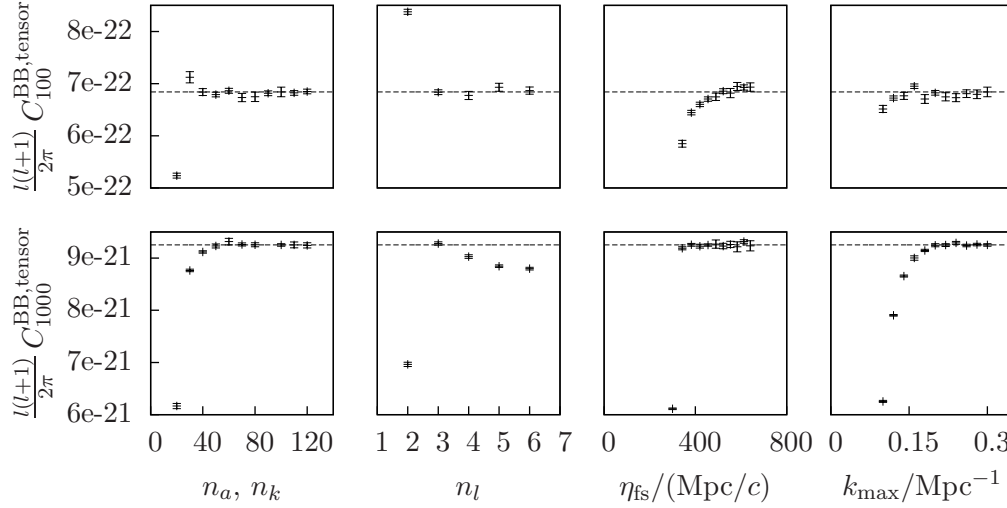


Abbildung 3.6.: Abhängigkeit der numerischen Ergebnisse von den Schnittparametern. Der Tensorbeitrag ($m = \pm 2$) des C_l^{BB} -Spektrums für $l = 100$ (obere Spalte) und für $l = 1000$ (untere Spalte) ist aufgetragen gegen (von links nach rechts) die Anzahl der Gitterpunkte der konformen Zeit n_a und des Wellenvektors n_k , die Anzahl der berücksichtigten Quellterme n_l , den Skalenfaktor a_{fs} , ab welchem wir die Free-Streaming-Lösung verwenden, und die Trunkierung des Wellenvektorintegrals k_{max} . In jedem Bild ist die Variation eines dieser Parameter gezeigt, während die Anderen auf den Standardwerten $n_a = n_k = 100$, $n_l = 3$, $\eta_{\text{fs}} = 500 \text{ Mpc}/c$ (entspricht $a_{\text{fs}} = 0.002064$) und $k_{\text{max}} = 0.3 \text{ Mpc}^{-1}$ gehalten werden. Die gestrichelte Line entspricht dem Resultat, wenn alle Parameter auf die Standardwerte gesetzt werden.

3.3.6. Numerischer Stabilitätstest

Der numerische Fehler ist durch den systematischen Fehler aus den angewandten Schnitten und dem statistischen Fehler aus der Monte-Carlo-Integration gegeben. Für Letzteren gibt VEGAS eine verlässliche Abschätzung an. Um den systematischen Fehler zu bestimmen, variieren wir die Parameter der Schnitte.

Diese sind: η_{fs} , k_{max} , n_a , n_k und n_l . Größere Werte dieser Parameter liefern bessere Ergebnisse, kosten aber auch mehr CPU-Zeit. Um den besten Kompromiss zu finden, betrachten wir die Variation des Ergebnisses mit den Parametern. Um einen Fehler im Prozentlevel zu erreichen, verwenden wir: $n_a = n_k = 100$, $n_l = 3$, $\eta_{\text{fs}} = 500 \text{ Mpc}/c$ und $k_{\text{max}} = 0.3 \text{ Mpc}^{-1}$.

Abbildung 3.6 zeigt die Stabilität des Ergebnisses der Tensorbeiträge ($m = \pm 2$) zum Powerspektrum. Dort sehen wir, dass der Parameter η_{fs} für kleine l den systematischen Fehler dominiert, während für große l höhere Quellterme wichtiger werden.

Ein Wert von l entspricht einem typischen Wert in k , da die sphärischen Besselfunktionen $j_l(k(\eta_0 - \eta))$ im Line-Of-Sight-Integral verschwinden, wenn $k(\eta_0 - \eta) \lesssim l$ gilt und für $k(\eta_0 - \eta) \gtrsim l$ oszillieren. Der Hauptbeitrag des Integrals stammt deshalb aus der Region $k(\eta_0 - \eta) \approx l$. In unserem Fall gilt $\eta_0 \gg \eta_{\text{fs}} \geq \eta$, weshalb das Integral durch den Bereich $k \approx l/\eta_0$ dominiert wird.

Die Bedingung für effektives Free-Streaming $|\dot{\kappa}| \ll k$ ist daher für großes l eher erfüllt als für ein kleines l . Wir benötigen in der Rechnung für kleine l also ein größeres η_{fs} , da Stöße länger relevant sind.

Mit steigendem l wird das Free-Streaming effektiver und höhere Momente werden früher generiert. Die höheren Quellterme können dann nicht mehr vernachlässigt werden, da die höheren Transferfunktionen erster Ordnung bereits früh angeregt werden. Dies zeigt auch Abb. 3.6, in welcher eine

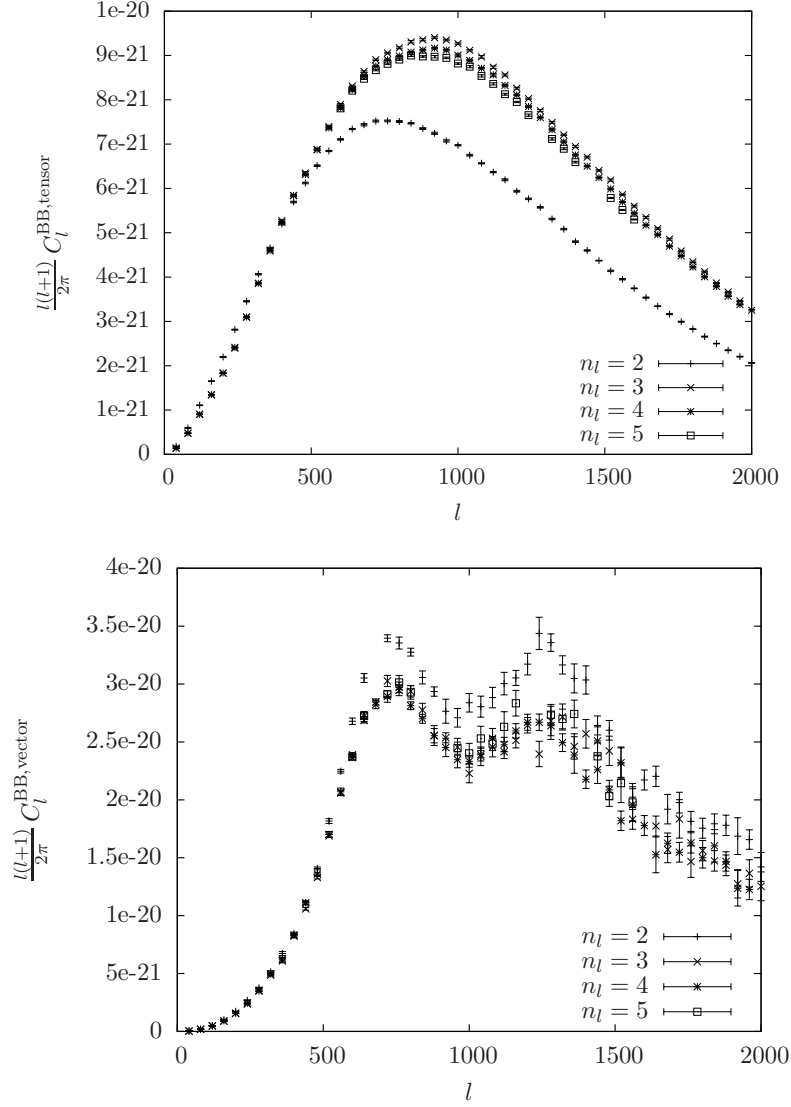


Abbildung 3.7.: Tensor- ($|m| = 2$, oben) und Vektorbeitrag ($|m| = 1$, unten) zum C_l^{BB} -Spektrum, berechnet mit verschiedenen Werten von n_l . Die größten Beiträge liegen in der Region $l \approx 1000$. Außerdem zeigt das Vektorspektrum die charakteristische Struktur mit zwei einzelnen Maxima.

Erhöhung von $n_l = 3$ auf $n_l = 4$ oder $n_l = 5$ das Ergebnis für $l = 1000$ signifikant ändert, für $l = 100$ aber invariant lässt. Abb. 3.7 zeigt aber sowohl für Tensor-, als auch für Vektormoden, dass der Beitrag zum C_l^{BB} -Spektrum bei noch größerem l nicht weiter anwächst. Die Spektren für $n_l = 3$ liegen für alle l nah an denen für $n_l = 4$ und $n_l = 5$, wohingegen $n_l = 2$ zu klein ist, um die gesamten Multipole bis $l \approx 2000$ zu beschreiben.

3.4. Ausblick

Das Hauptergebnis der Simulation ist das C_l^{BB} -Spektrum aus dem Stoßterm zweiter Ordnung in Abb. 3.8. Wie der Weak-Lensing-Beitrag, wächst auch der Stoßtermbeitrag stark mit l an und erreicht sein Maximum bei $l \approx 1000$. Bei $l \lesssim 200$ sind die Tensormoden ($|m| = 2$) größer als die Vektormoden ($|m| = 1$), aber die Vektormoden wachsen stärker mit l an und dominieren im Maximum bei $l \approx 1000$. Außerdem hat der Vektorbeitrag in dieser Region ein charakteristisches doppeltes Maximum.

Für $|m| = 1$ sind die Quellen S_n dominiert durch Terme, welche die Elektronengeschwindigkeit $v_{e,[m]}^{(1)}$ oder den Dipol $\Delta_{I,1m}^{(1)}$ (entspricht im Tight-Coupling bis auf einen Faktor der Elektronengeschwindigkeit) quadratisch enthalten. Vernachlässigt man alle andern Beiträge in S_n , erhält man ein qualitativ ähnliches Bild. Das erste Maximum erreicht ca. 80% und das zweite Maximum 60% der Höhe der vollen Rechnung aus Abb. 3.8. Dies zeigt, dass die Struktur der zwei Maxima mit der Elektronengeschwindigkeit, beziehungsweise dem Photondipol, zusammenhängt. Die Elektronengeschwindigkeit oszilliert vor der Rekombination, die Frequenz hängt dabei von dem Wellenvektor k_1 bzw. k_2 aus der Faltung im Quellterm ab. Für die Vektorbeiträge ist die Faltung durch die Region $k_1 \approx k$ und k_2 klein, oder umgekehrt, dominiert. Mit $\eta_0 \approx 14000 \text{ Mpc}/c$, entsprechen die l -Werte der Maxima $l \approx 750$ und $l \approx 1250$, den Wellenvektoren $k \approx 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ und $k \approx 0.09 \text{ Mpc}^{-1}$. Für beide k -Werte erreicht die Oszillation der Elektronengeschwindigkeit ein Extremum bei der Rekombination, wobei $k \approx 0.09 \text{ Mpc}^{-1}$ genau eine Oszillation mehr als $k \approx 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ durchgeführt hat. $k \approx 0.07 \text{ Mpc}^{-1}$, welches dem Minimum bei $l \approx 1000$ entspricht, ist genau eine halbe Phase verschoben. Im Tensorspektrum finden wir diese Struktur hingegen nicht, da dort im Faltungsintegral auch die Region $k_1 \approx k_2$ beiträgt und die Oszillationen ausintegriert werden.

Die Amplitude der stoßinduzierten B-Polarisation ist einige Ordnungen kleiner als das Weak-Lensing-Signal. Im Vergleich zu primordialen Tensorstörungen ist der Effekt äquivalent zu einem Tensor-to-Scalar-Ratio von $r \approx 10^{-6}$ bei $l \approx 200$ und $2 \cdot 10^{-4}$ bei $l \approx 1000$. Die Amplitude hängt mit der relativ kurzen Zeitspanne der Rekombination, in welcher die Polarisation entsteht, zusammen. Daher ist es denkbar, dass eine Zunahme der Reionisation den Effekt verstärken würde.

Vergleicht man das Stoßtermspektrum mit dem Spektrum induziert aus Vektor- und Tensormetrikstörungen zweiter Ordnung [60], sieht man, dass beide Terme eine ähnliche Größenordnung haben. Die Metrikstörungen induzieren zunächst nur unpolarisierte Fluktuationen, welche dann durch Stöße an E-Polarisation koppeln. Diese wird schließlich durch Free-Streaming in B-Polarisation konvertiert. Daher beruht auch dieser Effekt auf der kurzen Zeitspanne der Rekombination und ist von ähnlicher Größenordnung. Abgesehen vom dominanten Weak-Lensing sind diese beiden Beiträge der Untergrund zu dem B-Spektrum aus primordialen Tensormetrikstörungen. Sie sind bei einem Tensor-to-Scalar-Ratio von $r < 10^{-6} \dots 2 \cdot 10^{-4}$ (je nach beobachtetem l) relevant.

Mögliche Erweiterungen der Rechnung sind:

- Die Methode lässt sich, wie in Kapitel 3.2.4 gezeigt, problemlos auf die Berechnung der Non-Gaussianity anwenden. Die Gleichungen für das messbare Bispektrum haben wir in Anhang C hergeleitet.
- Wir planen zusätzlich die Metrikeffekte zu simulieren, wodurch wir die Korrelation zu den Stoßtermeffekten berechnen können. In [61] wurden außerdem die Quellen aus dem Propagationsterm zweiter Ordnung vernachlässigt, welche in unseren Rechnungen problemlos berücksichtigt werden können, da Metrikquellen zur selben Zeit wie Stoßtermeffekte B-Polarisation induzieren.

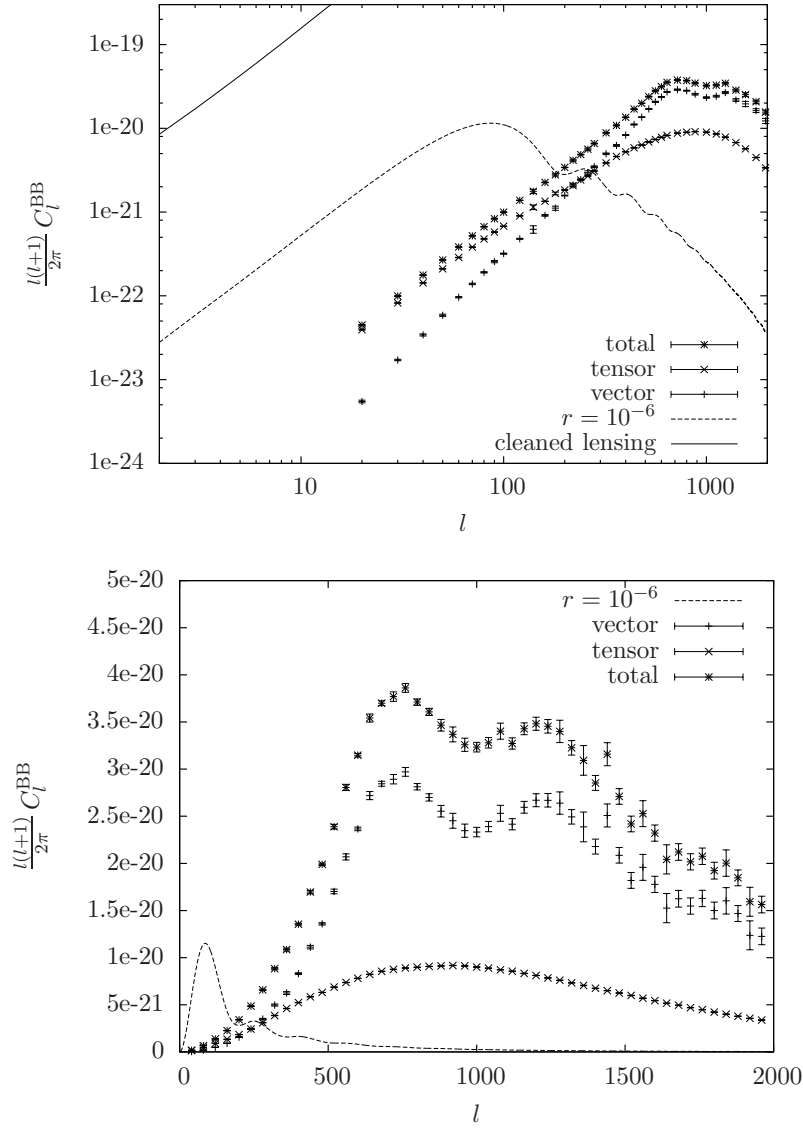


Abbildung 3.8.: Das C_l^{BB} -Spektrum für B-Moden aus Stoßquellen (gepunktet), verglichen mit dem Spektrum aus primordialen Tensorstörungen mit einem Tensor-To-Scalar-Ratio von $r = 10^{-6}$ (gestrichelt) und dem Weak-Lensing-Beitrag, bereinigt um einen Faktor 40 (durchgezogen). Gezeigt sind separat die Vektor- ($|m| = 1$) und Tensorbeiträge ($|m| = 2$), sowie ihre Summe. Beide Abbildungen stellen dieselben Daten dar, die Obere logarithmisch und die Untere linear. (Numerische Parameter sind $n_a = n_k = 100$, $n_l = 4$, $\eta_{fs} = 500 \text{ Mpc}/c$, und $k_{\text{max}} = 0.3 \text{ Mpc}^{-1}$.)

- Außerdem wäre es interessant, den Effekt der Reionisation zu berechnen, welcher vermutlich zu einer Verstärkung unseres Ergebnisses führt. Dieser Beitrag ist aber problematisch, da wir Quellen zu allen Multipolen berücksichtigen müssen. Diese können bei der Rekombination nicht ohne weiteres vernachlässigt werden, da das Free-Streaming zu der Zeit bereits hohe Momente angeregt hat.

4. Geflavourte Quantenboltzmannsgleichungen der Leptogenese

4.1. Einleitung

Aus Messungen der akustischen Peaks der kosmischen Hintergrundstrahlung kann der Materieüberschuss des heutigen Universums extrahiert werden: $\frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_\gamma} \approx 6.1 \times 10^{-10}$. Das *CPT*-Theorem besagt, dass Teilchen und Antiteilchen dieselbe Masse und genau entgegengesetzte Quantenzahlen haben. Daher ist es erstaunlich, dass diese nicht in gleicher Anzahl vorkommen. Folgende mögliche Szenarien können diesen Materieüberschuss erklären:

- 1) Es existiert bereits seit der Entstehung des Universums ein Materieüberschuss. Um den gemessenen Wert zu reproduzieren, muss dieser aber unnatürlich groß sein, da er durch die Inflation um viele Größenordnungen verdünnt wird.
- 2) Es handelt sich bei der Asymmetrie lediglich um einen lokalen Effekt, welcher durch einen Antimaterieüberschuss in anderen Regionen des Universums ausgeglichen wird. Die Größenordnung der gemessenen Asymmetrie macht diesen Ansatz aber unwahrscheinlich. Außerdem würde in diesem Szenario, in den Grenzgebieten, durch Teilchen-Antiteilchen-Annihilation energiereiche Strahlung entstehen, welche wir nicht beobachten.
- 3) Es existiert keine primordiale Asymmetrie zwischen Baryonen und Antibaryonen, diese entsteht erst während der Evolution des Universums dynamisch.

Um Fine-Tuning zu vermeiden, wird im Folgenden die dynamische Erzeugung der Asymmetrie betrachtet. Dazu sind die folgenden Sakharov-Bedingungen nötig:

- 1) *B*-Verletzung: Es muss einen Prozess geben, welcher die Baryonzahl verletzt.
- 2) *C*- und *CP*-Verletzung: Um zwischen Materie und Antimaterie zu unterscheiden, sind *C*-verletzende Terme erforderlich. Zusätzlich muss auch *CP* gebrochen sein, da sonst zwar ein Überschuss einer Helizität erzeugt werden kann, aber in der Summe über die Helizität kein Materieüberschuss erzeugt wird.
- 3) Prozesse außerhalb des thermischen Gleichgewichts: Im thermischen Gleichgewicht wird keine Asymmetrie erzeugt, da die Reaktionsrate für den Prozess, welcher die Asymmetrie erzeugt, und für den Umkehrprozess identisch sind.

Die zwei bekanntesten Theorien, welche diese Bedingungen erfüllen, sind elektroschwache Baryogenese [55, 51, 14] und Leptogenese [32, 83, 35, 36]. Im Folgenden beschäftige ich mich mit der Leptogenese, wobei insbesondere Flavoureffekte behandelt werden. Ich präsentiere die Ergebnisse aus der Veröffentlichung [9], in welcher mein Beitrag in der Berechnung der thermischen Massen, dargestellt in Kapitel 4.3, liegt. Ich präsentiere hier die gesamte Arbeit, um meine Rechnungen im Kontext der Leptogenese darzustellen.

In der Leptogenese wird zunächst eine Leptonasymmetrie erzeugt, welche dann über Sphaleronprozesse in eine Baryonasymmetrie umgewandelt wird. Sphalerons sind nicht perturbative Standardmodellprozesse, welche Baryon- und Leptonzahl verletzen, deren Differenz aber erhalten [50]. Durch die Sphalerons wird die erste Sakharov-Bedingung erfüllt, wenn zusätzlich die Leptonzahl verletzt wird.

Dies erfolgt in der Leptogenese durch die Majoranamasse eines schweren rechtshändigen Neutrinos. Die schweren Neutrinos stellen eine Erweiterung des Standardmodells dar, können aber zusätzlich in einem Typ 1 Seesaw-Modell die kleinen Massen der linkshändigen Neutrinos erklären.

Die benötigte C - und CP -Verletzung wird ebenfalls durch Zerfälle der schweren rechtshändigen Neutrinos induziert, bei denen geringfügig mehr Leptonen als Antileptonen entstehen.

Die letzte Sakharov-Bedingung wird durch die Expansion des Universums erfüllt. Mit der Temperatur des Universums sinkt auch die Zerfallsrate der rechtshändigen Neutrinos. Bei $T \approx M_1$ wird diese klein gegenüber der Hubblerate und ihre Verteilungsfunktion friert aus. Die Zerfallsprozesse laufen dann bevorzugt in eine Richtung ab und die Asymmetrie kann erzeugt werden.

Ich verwende in dieser Arbeit den Lagrangian:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \bar{\psi}_{N_i} (i\partial - M_i) \psi_{N_i} + \bar{\psi}_{\ell_a} i\partial \psi_{\ell_a} + \bar{\psi}_{Rb} i\partial \psi_{Rb} + (\partial^\mu \phi^\dagger)(\partial_\mu \phi) \\ & - Y_{ia}^* \bar{\psi}_{\ell_a} \tilde{\phi} \psi_{N_i} - Y_{ia} \bar{\psi}_{N_i} \tilde{\phi}^\dagger \psi_{\ell_a} - h_{ab} \phi^\dagger \bar{\psi}_{Ra} P_L \psi_{\ell b} - h_{ab}^* \phi \bar{\psi}_{\ell b} P_R \psi_{Ra} , \end{aligned} \quad (4.1)$$

mit ψ_{N_i} , dem Majorana-Spinor der rechtshändigen Neutrinos N_i und ψ_{ℓ_a} , dem $SU(2)_L$ doublet Spinor der linkshändigen Leptonen ℓ_a , wobei a ein Flavourindex ist. ψ_{Ra} sind die zugehörigen geladenen rechtshändigen Leptonen. Das $SU(2)_L$ doublet Higgs-Feld wird mit ϕ bezeichnet. Es gilt $\tilde{\phi} = (\epsilon\phi)^\dagger$, mit der antisymmetrischen 2×2 Matrix in den $SU(2)_L$ -Indizes ϵ und der Konvention $\epsilon_{12} = 1$. Der Lagrangian enthält die kinetischen Terme der rechts- und linkshändigen Neutrinos, der geladenen Leptonen und des skalaren Higgs-Feldes in der ersten Zeile. Dabei werden nur für das schwere Neutrino explizite Baumlevelmassen eingeführt. Alle anderen Massen werden thermisch auf Schleifenlevel erzeugt. Die zweite Zeile sind die Terme aus den Yukawakopplungen h_{ab} und Y_{ia} der geladenen Leptonen und schweren Neutrinos. $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Eichkopplungen sind im Lagrangian nicht explizit angegeben, müssen aber in der Rechnung der Leptogenese berücksichtigt werden.

Die Yukawakopplung Y_{ia} erzeugt die benötigte CP -Verletzung aus der Interferenz zwischen Baum- und Einschleifengraphen. Ich nehme an, dass die schweren Neutrinos hierarchisch sind, mit den Massen $M_1 \ll M_2 < M_3$. Dann reicht es aus, nur die Zerfälle des leichtesten rechtshändigen Neutrinos zu betrachten. Die CP -Asymmetrie entsteht aus der Interferenz von Baumgraphen eines Zerfalls des leichtesten rechtshändigen Neutrinos mit Schleifendiagrammen, welche N_2 und N_3 enthalten (siehe Abbildung 4.1).

4.1.1. Ungeflavourte Beschreibung der Leptogenese

Zunächst betrachten wir den einfachen Fall, in dem Leptonflavour vernachlässigt wird. Trotzdem gibt es eine Vielzahl an relevanten Reaktionen, z.B. Sphaleron-Prozesse, Eichwechselwirkungen und Zerfälle der rechtshändigen Neutrinos. Anstelle alle Reaktionen in Boltzmannsgleichungen zu behandeln, teilen wir diese zunächst in zwei Gruppen ein: Prozesse, welche schnell gegenüber der Hubblerate ablaufen und Prozesse, welche langsam sind. Schnelle Prozesse führen zu thermischem (elastische Prozesse) oder chemischem (unelastische Prozesse) Gleichgewicht. Diese schnellen Reaktionen müssen nicht in den Boltzmannsgleichungen berücksichtigt werden, sondern liefern Zwangsgleichungen für die Form der Verteilungsfunktionen, beispielsweise Relationen der chemischen Potentiale im chemischen Gleichgewicht. Im Gegensatz dazu müssen langsamere Prozesse explizit in den Boltzmannsgleichungen beschrieben werden.

In der Leptogenese können Sphalerons und Eichwechselwirkungen als schnell angenommen werden. Die Sphalerons erzeugen ein chemisches Gleichgewicht zwischen Baryonen und Leptonen, weshalb es ausreicht die L -Verletzung zu berechnen. Im hierarchischen Fall benötigen wir nur die Zerfälle des leichtesten rechtshändigen Neutrinos in der Boltzmannsgleichung, die Zerfälle von N_2 und N_3 können vernachlässigt werden. Sie sind nur in den Schleifenkorrekturen, welche zur CP -Verletzung führen, relevant und liefern die in einem Zerfall des leichtesten rechtshändigen Neutrinos generierte CP -Verletzung $\tilde{\epsilon}$. Wir schreiben einfache Boltzmannsgleichungen für N_1 und die Leptonzahlverletzung

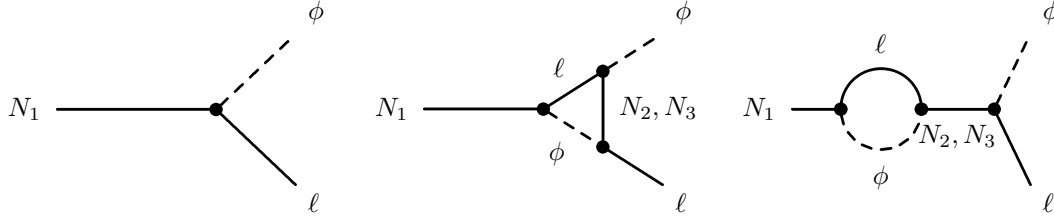


Abbildung 4.1.: Baumlevelzerfall des leichtesten rechtshändigen Neutrinos und Schleifenkorrekturen des Zerfalls, welche die schweren Neutrinos N_2 und N_3 enthalten. Die CP -Verletzung wird aus der Interferenz dieser Diagramme erzeugt.

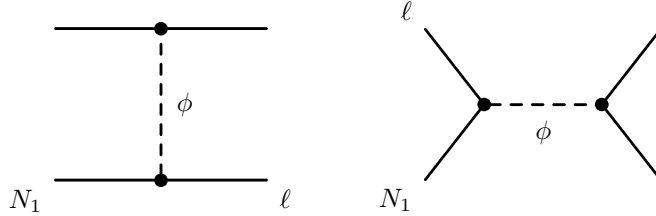


Abbildung 4.2.: Zwei mögliche Reaktionen, welche die Leptonzahl verletzen, aber CP erhalten. Diese Terme erzeugen keine Asymmetrie, waschen aber bestehende Asymmetrien aus. Die nicht spezifizierten Beine sind Teilchen aus dem primordialen Plasma.

auf [13]:

$$\frac{dN_{N_1}}{dz} = -(D + S)(N_{N_1} - N_{N_1}^{\text{eq}}), \quad (4.2)$$

$$\frac{dN_L}{dz} = -\tilde{\epsilon}D(N_{N_1} - N_{N_1}^{\text{eq}}) - WN_L, \quad (4.3)$$

mit $z = M_1/T$, der Anzahldichte des leichtesten rechtshändigen Neutrinos N_{N_1} und der Anzahldichte der L -Asymmetrie N_L .

D , S und W beschreiben die verschiedenen Reaktionen und werden als Matricelemente im klassischen In-Out-Formalismus berechnet. D ist die Reaktionsrate der Zerfälle der rechtshändigen Neutrinos, wobei der CP -brechende Anteil $\tilde{\epsilon}D$ aus der Interferenz zwischen Einschleifen- und Baumdiagrammen stammt. Die beitragenden Feynmandiagramme sind in Abb. 4.1 dargestellt. S sind die Prozesse, welche keine CP -Verletzung generieren, aber die Anzahl der schweren Neutrinos ändern. In der Gleichung für N_L haben wir den Quellterm $\tilde{\epsilon}D$ aus Zerfällen des rechtshändigen Neutrinos und weitere Washout-Terme, welche eine generierte Asymmetrie wieder unterdrücken. Dies sind Stöße des schweren Neutrinos, welche die Leptonzahl verletzen. Sie erzeugen aber selber keine Asymmetrie, da sie nicht zwischen Teilchen und Antiteilchen unterscheiden. Ist aber eine Asymmetrie vorhanden, waschen diese Terme die Asymmetrie wieder aus, da mehr Teilchen als Antiteilchen für die Reaktion zur Verfügung stehen. In Abb. 4.2 sind zwei leptonzahlverletzende Prozesse, welche zu W beitragen, dargestellt. Die Gleichgewichtsverteilung $N_{N_1}^{\text{eq}}$ beschreibt den Einfluss der inversen Reaktionen. Nur der Überschuss an rechtshändigen Neutrinos führt zu einer effektiven Erzeugung der Asymmetrie, welche nicht durch inverse Zerfälle rückgängig gemacht wird. Hier sieht man explizit, dass im thermischen Gleichgewicht keine Asymmetrie erzeugt wird.

Mit den Reaktionsraten der einzelnen Prozesse können die Boltzmann-Gleichungen (4.2) verwendet werden, um die Asymmetrie zu berechnen. In dieser einfachen Rechnung werden allerdings Flavour-Effekte vernachlässigt, welche je nach Masse des leichtesten rechtshändigen Neutrinos, und damit der Temperaturskala der Leptogenese, relevant sind. Außerdem sind die Boltzmann-Gleichungen rein klassisch und diverse Quanteneffekte, wie z.B. Flavourkohärenz, werden vernachlässigt.

4.1.2. Geflavourte Beschreibung der Leptogenese

In dem Temperaturbereich, in welchem sich die Lepton-Yukawakopplungen h dem Gleichgewicht annähern, wodurch die Degeneration des Flavours gebrochen wird, spielen Flavoureffekte eine wichtige Rolle und die ungeflavourte Beschreibung ist nicht mehr ausreichend [85, 68, 1, 2].

Es müssen drei mögliche Fälle unterschieden werden:

- 1) Sind während der Leptogenese alle Lepton-Yukawakopplungen im Gleichgewicht, ist eine Beschreibung ohne Flavour ausreichend. Wir transformieren in die Basis, in welcher h diagonal ist. In dieser Basis treten keine Korrelationen zwischen den Flavours auf; die erzeugte Asymmetrie wird in die Basis der geladenen Leptonen projiziert. Wir erhalten effektiv eine ungeflavourte Beschreibung. Dies ist der sogenannte vollständig geflavourte Grenzfall.
- 2) Wenn alle Lepton-Yukawakopplungen ausgefroren sind, verwenden wir zur Beschreibung der Leptogenese die Flavourbasis, in welcher die Asymmetrie generiert wird. Flavourkorrelationen treten nicht auf und wir erhalten eine Einflavour-Beschreibung. Diesen Grenzfall nennen wir den ungeflavourten Grenzfall.
- 3) Im letzten Fall findet die Leptogenese statt, wenn nicht alle Yukawakopplungen h im Gleichgewicht sind, diese aber auch nicht so klein sind, dass sie vernachlässigt werden können. Um dieses Regime zu beschreiben, benötigen wir einen allgemeinen Ansatz, in welchem Neutrinos durch eine Flavourmatrix beschrieben werden, die Flavourkorrelationen enthalten kann.

Zur Berechnung der Flavoureffekte müssen die Gleichungen der Leptogenese verallgemeinert werden. Durch die Hamiltonsche Evolution einer Dichtematrix (siehe auch Kapitel 2.2.3 für Photonen) können Gleichungen abgeleitet werden, welche die Evolution einer Flavourmatrix beschreiben [1]; numerische Rechnungen des Modells wurden durchgeführt [82].

Wir verwenden allerdings den Closed-Time-Path (CTP) Formalismus [76, 49], um eine systematische Herleitung der Gleichungen mit Flavour zu erhalten. Der CTP-Formalismus wurde bereits erfolgreich auf die Baryogenese angewendet [14, 83, 35, 36, 3, 10, 34]. Ein Vorteil dieses Formalismus ist es, dass keine Real-Intermediate-State Subtraction (RIS) benötigt wird. Diese muss in der klassischen Rechnung eingeführt werden, da sonst Stoßtermbeiträge aus $2 \leftrightarrow 2$ Streuung durch die Beiträge der $2 \leftrightarrow 1$ Streuung doppelt berücksichtigt werden. Diese Terme führen zu einer CP -Verletzung bereits im thermischen Gleichgewicht, welche von Hand wieder entfernt werden muss.

Im Gegensatz zum klassischen In-Out-Formalismus der Feldtheorie, in welchem Übergangsraten von einem Zustand $\langle \text{In} |$ in einen gegebenen Zustand $|\text{Out} \rangle$ berechnet werden, wollen wir die Operatorerwartungswerte eines sich zeitlich ändernden Zustandes berechnen. Dazu deformieren wir die Zeitkontur, so dass sie oberhalb der reellen Achse von $-\infty$ bis ∞ läuft und dann knapp unterhalb der reellen Achse wieder von ∞ nach $-\infty$ zurück (siehe Abb. 4.1.2). Anstelle des zeitgeordneten Propagators erhalten wir im In-Out-Formalismus einen konturgeordneten Propagator. Wir definieren die Greenfunktion

$$i\Delta(x, y) = \langle \tilde{T} \Phi(x) \Phi(y) \rangle$$

mit der Zeitordnung $\tilde{T}$ auf der deformierten Kontur. Diese Greenfunktion kann in ein Set aus vier Greenfunktionen zerlegt werden, welche sowohl die spektrale, als auch die statistische Information des Systems beinhalten. Aus den Schwinger-Dyson-Gleichungen der Greenfunktionen können mit dem Kadanoff-Baym-Ansatz die Quantenboltzmannsgleichungen der Verteilungsfunktionen abgeleitet werden.

Die Greenfunktionen im CTP-Formalismus beschreiben auf natürliche Weise Korrelationen zwischen den verschiedenen Flavours. Die ungeflavourte Kadanoff-Baym-Gleichung aus [10] kann ohne Komplikationen zu einer geflavourten Beschreibung verallgemeinert werden. Kadanoff-Baym-Gleichungen sind aber Integro-Differentialgleichungen, welche erst nach Anwendung von diversen Approximationen gelöst werden können. Die wichtigsten Näherungen sind: Die Gradientenentwicklung, eine Entwicklung in Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht und kleinen Kopplungen, sowie die Separation der Zeitskalen zwischen den Yukawakopplungen Y , h und den schnellen Eichwechselwirkungen, welche für das thermische Gleichgewicht verantwortlich sind.

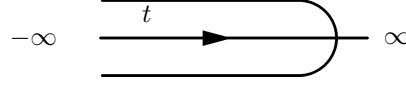


Abbildung 4.3.: Die Zeitkontur im CTP-Formalismus. Die Zeit läuft infinitesimal oberhalb der reellen Achse nach ∞ und dann unterhalb der reellen Achse wieder bis $-\infty$ zurück.

In Kapitel 4.2 leiten wir die Gleichungen der Greenfunktionen her und wenden die Gradientenentwicklung an, um die Hierarchie der Ableitungen zu trunkieren. Kapitel 4.3 enthält die Berechnung der thermischen Massen der Leptonen, welche in den Kadanoff-Baym-Gleichungen benötigt werden. In Kapitel 4.4 lösen wir die Zwangsgleichungen, indem wir den Kadanoff-Baym-Ansatz verwenden. Der Stoßterm wird in Kapitel 4.5 abgeschätzt. Schnelle Eichwechselwirkungen motivieren den Ansatz der verallgemeinerten chemischen Potentiale. Wir stellen auch fest, dass schnelle Eichwechselwirkungen Flavouroszillationen dämpfen. Numerische Lösungen werden in Kapitel 4.6 angegeben, welche zwischen den Grenzfällen der vollständig geflavourten und ungeflavourten Leptogenese approximieren.

4.2. CTP-Formalismus für geflavourte Leptonen

Im Folgenden verwenden wir die Schwinger-Dyson-Gleichungen für die Greenfunktion auf dem geschlossenen Zeitpfad und erhalten Gleichungen für den retardierten und avancierten Propagator, sowie die Kadanoff-Baym-Gleichungen.

Im Gegensatz zu [52, 53, 18], wo Massenterme auf Baumlevel induziert werden, betrachten wir Massen als Einschleifen-Korrektur, welche durch flavourblinde Eichwechselwirkungen und geflavourte Yukawawechselwirkungen induziert werden.

4.2.1. Schwinger-Dyson-Gleichungen

Wir verwenden die Notationen und Konventionen bezüglich des CTP-Formalismus und der Gradientenentwicklung aus [10, 72, 73].

Wir zerlegen den vollen CTP-Propagator der Leptonen in vier Propagatoren, welche durch die Lage ihrer Zeitargumente auf den Zweigen der Zeitkontur definiert sind. Der Index $\pm$ steht für den oberen bzw. unteren Zweig.

$$iS_{\ell\alpha\beta}^{+-}(u, v) = iS_{\ell\alpha\beta}^{<}(u, v) = -\langle \bar{\psi}_{\ell\beta}(v) \psi_{\ell\alpha}(u) \rangle, \quad (4.4a)$$

$$iS_{\ell\alpha\beta}^{-+}(u, v) = iS_{\ell\alpha\beta}^{>}(u, v) = \langle \psi_{\ell\alpha}(u) \bar{\psi}_{\ell\beta}(v) \rangle, \quad (4.4b)$$

$$iS_{\ell\alpha\beta}^{++}(u, v) = iS_{\ell\alpha\beta}^T(u, v) = \langle T(\psi_{\ell\alpha}(u) \bar{\psi}_{\ell\beta}(v)) \rangle, \quad (4.4c)$$

$$iS_{\ell\alpha\beta}^{--}(u, v) = iS_{\ell\alpha\beta}^{\bar{T}}(u, v) = \langle \bar{T}(\psi_{\ell\alpha}(u) \bar{\psi}_{\ell\beta}(v)) \rangle. \quad (4.4d)$$

Dabei ist der Propagator $iS_{\ell\alpha\beta}^{++}(u, v)$ gerade der normale zeitgeordnete Propagator, dessen Zeitargumente beide auf der oberen Kontur liegen. Nach dieser Zerlegung können die Zeitargumente wieder als reell angenommen werden, da ihre Lage auf dem CTP bereits durch die CTP-Indizes festgelegt ist.

Die Bewegungsgleichungen der Greenfunktionen folgen aus den Schwinger-Dyson-Gleichungen des Neutrinopropagators auf dem CTP:

$$i\partial_u S_{\ell ab}^{fg}(u, v) = f\delta^{fg}\delta_{ab}\delta^4(u-v)P_R + \sum_h \int d^4w \mathbb{F}_{\ell ac}^{fh}(u, w) S_{\ell cb}^{hg}(w, v), \quad (4.5)$$

beziehungsweise

$$i\partial S_{\ell}^{fg} = f\delta^{fg}\delta P_R + \sum_h \mathbb{F}_{\ell}^{fh} \odot S_{\ell}^{hg}, \quad (4.6)$$

in der im Folgenden verwendeten Kurznotation [72, 73], in welcher $\odot$ eine Faltung darstellt. $f, g, h = \pm$ sind CTP-Indizes; a, b, c sind Flavourindizes.

Wir zerlegen die Schwinger-Dyson-Gleichung in Gleichungen für die einzelnen Propagatoren:

$$i\not\partial S_\ell^{A,R} = \delta P_R + \Sigma_\ell^H \odot S_\ell^{A,R} \pm i\not\mathbb{Y}_\ell^A \odot S_\ell^{A,R}, \quad (4.7a)$$

$$i\not\partial S_\ell^{<, >} = \not\mathbb{Y}_\ell^H \odot S_\ell^{<, >} + \not\mathbb{Y}_\ell^{<, >} \odot S_\ell^H + \frac{1}{2} (\Sigma_\ell^> \odot S_\ell^< - \Sigma_\ell^< \odot S_\ell^>) . \quad (4.7b)$$

Dabei haben wir die avancierten, retardierten, hermiteschen und antihermiteschen Komponenten durch

$$\begin{aligned} G^A &= G^T - G^> = G^< - G^{\bar{T}} \quad (\text{avanciert}), \\ G^R &= G^T - G^< = G^> - G^{\bar{T}} \quad (\text{retardiert}), \\ G^H &= \frac{1}{2}(G^R + G^A) \quad (\text{hermitisch}), \\ G^A &= \frac{1}{2i}(G^A - G^R) = \frac{i}{2}(G^> - G^<) \quad (\text{antihermitisch, spektral}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

definiert, wobei G ein Propagator oder eine Selbstenergie sein kann.

Die Terme $\not\mathbb{Y}_\ell^H \odot S_\ell^{<, >}$ in Gl. (4.7) sind für thermische Korrekturen, wie etwa thermische Massen verantwortlich; finite Breite der Propagatoren wird durch $\not\mathbb{Y}_\ell^{<, >} \odot S_\ell^H$ induziert. Der Stoßterm im CTP-Formalismus ist durch die Kombination $\frac{1}{2} (\Sigma_\ell^> \odot S_\ell^< - \Sigma_\ell^< \odot S_\ell^>)$ gegeben.

Die Gleichungen sehen relativ einfach aus, dies täuscht aber, da die Selbstenergie $\Sigma_\ell^{<, >}$ selber ein kompliziertes Funktional der Propagatoren $S_\ell^{<, >}$ ist. Außerdem sind die Gleichungen der vier Propagatoren und die Gleichungen der unterschiedlichen Spezies gekoppelt.

Im nächsten Schritt wenden wir eine Wignertransformation (eine Fouriertransformation der relativen Koordinate bei konstantem Mittel der Koordinaten) an:

$$G(k, x) = \int d^4r e^{ik \cdot r} G(u, v), \quad \text{mit } r = u - v \text{ und } x = \frac{u + v}{2}. \quad (4.9)$$

Diese Transformation führt zu einer Separation zwischen den kurzen relativen Zeitskalen der Interaktionen und den langen Skalen der mittleren Evolution im Universum. Anstelle der Faltungsintegrale, erhalten wir eine Hierarchie der Zeitableitungen. Diese erlaubt eine systematische Trunkierung für langsam variierende Funktionen. Nach der Wigner-Transformation nimmt Gl. (4.7) folgende Form an:

$$e^{-i\odot} \{ \not{k} - \not\mathbb{Y}_\ell^H \mp \not\mathbb{Y}_\ell^A \} \{ S_\ell^{A,R} \} = P_R, \quad (4.10a)$$

$$e^{-i\odot} \{ \not{k} - \not\mathbb{Y}_\ell^H \} \{ S_\ell^{<, >} \} - e^{-i\odot} \{ \not\mathbb{Y}_\ell^{<, >} \} \{ S_\ell^H \} = \frac{1}{2} e^{-i\odot} (\{ \not\mathbb{Y}_\ell^> \} \{ S_\ell^< \} - \{ \not\mathbb{Y}_\ell^< \} \{ S_\ell^> \}), \quad (4.10b)$$

mit dem $\odot$ -Operator definiert durch

$$\odot \{ A(k, x) \} \{ B(k, x) \} = \frac{1}{2} \left([\partial_{(x)}^\mu A(k, x)] \partial_{(k)\mu} B(k, x) - [\partial_{(k)\mu} A(k, x)] \partial_{(x)}^\mu B(k, x) \right). \quad (4.11)$$

Die Gleichungen (4.10) sind Integro-Differentialgleichungen, in denen beliebige Ordnungen von Ableitungen auftreten. Wir verwenden nun die Gradientenentwicklung [16] um die Hierarchie der Ableitungen zu trunkieren. In der Leptogenese treten Gradienten durch die Abweichung vom thermischen Gleichgewicht auf, sind also proportional zur Hubblerate, welche die Verteilungsfunktionen durch Verdünnung aus dem thermischen Gleichgewicht bringt. Die Reaktionsrate $|Y_{1a}|^2 T$ für den Zerfall des leichtesten rechtshändigen Neutrinos muss ebenfalls von der Ordnung der Hubblerate sein, da Leptogenese nur stattfinden kann, wenn die rechtshändigen Neutrinos weder im Gleichgewicht, noch vollständig ausgefroren sind. Zusätzlich sind wir an der Parameterregion interessiert, in welcher die

τ -Yukawakopplung h_τ die Relation $h_\tau^2 T \sim H$ erfüllt, da wir sonst in dem trivialen vollständig geflavourten oder ungeflavourten Fall sind. Deshalb zählen wir die Yukawakopplungen Y und h in der folgenden Entwicklung von derselben Ordnung wie die Gradienten.

In erster Ordnung erhalten wir aus Gl. (4.10):

$$\frac{i}{2} \not{\partial} S_\ell^{A,R} + \left(\not{k} - \not{\Sigma}_\ell^H \mp \not{\Sigma}_\ell^A \right) S_\ell^{A,R} = P_R, \quad (4.12a)$$

$$\frac{i}{2} \not{\partial} S_\ell^{<, >} + (\not{k} - \not{\Sigma}_\ell^H) S_\ell^{<, >} - \not{\Sigma}_\ell^{<, >} S_\ell^H = \frac{1}{2} (\not{\Sigma}_\ell^> S_\ell^< - \not{\Sigma}_\ell^< S_\ell^>) . \quad (4.12b)$$

Die Herleitung der Gleichungen wurde in einer nicht expandierenden flachen Raumzeit durchgeführt. Um die Effekte der expandierenden Raumzeit zu berücksichtigen, folgen wir [10]. Die führende Korrektur aus der Expansion der Raumzeit ist die Rotverschiebung der Moden. Diese kann durch einen Übergang zu konformen Koordinaten beschrieben werden. Wir verwenden die Metrik

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \text{diag}(1, -1, -1, -1),$$

mit der konformen Zeit $\eta = x^0$ und dem Skalenfaktor $a(\eta)$. Der Lagrangian (4.1) beschreibt die Dynamik in einem expandierenden Universum, wenn wir $M_i \rightarrow a M_i$ ersetzen, mitbewegte Variablen verwenden und annehmen, dass das Higgs-Feld nicht an die skalare Krümmung R koppelt.

Daher werden im Folgenden alle expliziten Impulsvariablen in den Gleichungen für die wigner-transformierten Größen als konform angenommen. Der physikalische Impuls ist durch $k_{\text{ph}} = k/a(\eta)$ gegeben. Genauso ist auch T die mitbewegte Temperatur, welche durch $T_{\text{ph}} = T/a(\eta)$ mit der physikalischen Temperatur verbunden ist. Die Massen der rechtshändigen Neutrinos M_i sind physikalische Massen und multiplizieren in den Gleichungen einen Faktor $a(\eta)$.

Die Kadanoff-Baym-Gleichungen (4.12b) bestehen aus einem dynamischen Anteil und einer Zwangsgleichung. Um diese zu separieren, zerlegen wir sie in ihren hermiteschen und antihermiteschen Teil:

$$2k^0 i \gamma^0 S_\ell^{<, >} - \left\{ \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma} \gamma^0 + \not{\Sigma}_\ell^H \gamma^0, i \gamma^0 S_\ell^{<, >} \right\} - \{ i \not{\Sigma}_\ell^{<, >} \gamma^0, \gamma^0 S_\ell^H \} = -\frac{1}{2} (i \mathcal{C}_\ell - i \mathcal{C}_\ell^\dagger), \quad (4.13a)$$

$$i \partial_\eta i \gamma^0 S_\ell^{<, >} - \left[\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma} \gamma^0 + \not{\Sigma}_\ell^H \gamma^0, i \gamma^0 S_\ell^{<, >} \right] - [i \not{\Sigma}_\ell^{<, >} \gamma^0, \gamma^0 S_\ell^H] = -\frac{1}{2} (i \mathcal{C}_\ell + i \mathcal{C}_\ell^\dagger), \quad (4.13b)$$

mit dem Stoßterm

$$\mathcal{C}_\ell = i \not{\Sigma}_\ell^> i S_\ell^< - i \not{\Sigma}_\ell^< i S_\ell^>. \quad (4.14)$$

Die untere Gleichung ist die kinetische Gleichung der $<, >$ -Propagatoren, die obere Gleichung ist eine algebraische Zwangsgleichung, welche die Schalenstruktur der Propagatoren bestimmt.

4.3. Thermische Selbstenergien

Die Selbstenergie $\not{\Sigma}_\ell^H$ ist verantwortlich für thermische Korrekturen zur Dispersionsrelation. Wir verwenden die Annahme, dass die rechtshändigen Neutrinos hinreichend nah am Gleichgewicht sind, um die Selbstenergie in erster Ordnung mit thermischen Propagatoren zu berechnen. Die relevanten Prozesse erhalten wir aus dem Lagrangian Gl. (4.1) und $\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y$ -Eichwechselwirkungen. Wir parametrisieren die Selbstenergie durch:

$$\not{\Sigma}_\ell^H = P_R \left[\gamma^0 (\bar{\varsigma}^{\text{bl}} + \bar{\varsigma}^{\text{fl}}) + \frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}}{|\mathbf{k}|} (\varsigma^{\text{bl}} + \varsigma^{\text{fl}} - \text{sign}(k^0) [\bar{\varsigma}^{\text{bl}} + \bar{\varsigma}^{\text{fl}}]) \right] P_L, \quad (4.15)$$

mit einem flavourblinden Anteil aus $\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y$ -Eichwechselwirkungen

$$\bar{\varsigma}_{ab}^{\text{bl}}(k^0, \mathbf{k}) = \delta_{ab} \bar{\varsigma}^{\text{bl}}(k^0, \mathbf{k}), \quad \varsigma_{ab}^{\text{bl}}(k^0, \mathbf{k}) = \delta_{ab} \varsigma^{\text{bl}}(k^0, \mathbf{k}) \quad (4.16)$$

und einem flavoursensitiven Anteil aus den geladenen Lepton-Yukawawechselwirkungen und Singlet Neutrino-Yukawawechselwirkungen. Zur ersten Schleifenordnung schreiben wir diese als

$$\begin{aligned}\bar{\varsigma}_{ab}^{\text{fl}}(k^0, \mathbf{k}) &= h_{ac}^\dagger h_{cb} \bar{\varsigma}^{\text{fl},h}(k^0, \mathbf{k}) + \sum_i Y_{ia}^* Y_{ib} \bar{\varsigma}_i^{\text{fl},Y}(k^0, \mathbf{k}), \\ \varsigma_{ab}^{\text{fl}}(k^0, \mathbf{k}) &= h_{ac}^\dagger h_{cb} \varsigma^{\text{fl},h}(k^0, \mathbf{k}) + \sum_i Y_{ia}^* Y_{ib} \varsigma_i^{\text{fl},Y}(k^0, \mathbf{k}).\end{aligned}\quad (4.17)$$

Die Summen über die schweren Neutrinos können dabei auf das leichteste rechtshändige Neutrino beschränkt werden, da wir im hierarchischen Grenzfall arbeiten. Außerdem sind ς^{fl} und $\bar{\varsigma}^{\text{fl}}$ hermitesche Flavourmatrizen, da $\gamma^0 \mathbb{Y}_\ell^H$ ebenfalls hermitesch ist.

Die Selbstenergie $\mathbb{Y}_\ell^H$ enthält Beiträge proportional zu $\not{k}$ und $\not{u}$, mit $u^\mu = (1, 0, 0, 0)^T$ dem Plasmavektor. Daher müssen zwei unabhängige Funktionen $\varsigma(k^0, \mathbf{k})$ und $\bar{\varsigma}(k^0, \mathbf{k})$ zur Parametrisierung verwendet werden [86]. Dabei stellt der Term ς eine Modifikation der Dispersionsrelation dar, wohingegen $\bar{\varsigma}$ diese nach Gl. (4.52) invariant lässt. Beide Beiträge haben nützliche Eigenschaften unter der Transformation $k^0 \rightarrow -k^0$ (siehe Gl. (4.61)).

ς^{fl} wird durch eine unitäre Transformation U diagonalisiert:

$$\varsigma_D^{\text{fl}} = U^\dagger \varsigma^{\text{fl}} U. \quad (4.18)$$

Im folgenden Kapitel zeigen wir, dass bei Temperaturen $M_{2,3} \gg T/a(\eta) \gg M_1$ und Impulsen $|\mathbf{k}| \sim T$, sowohl $\varsigma^{\text{fl},h}$ als auch $\varsigma^{\text{fl},Y}$ näherungsweise proportional zu $T^2/|\mathbf{k}|$ sind, so dass die Matrix U nicht zeitabhängig ist. Fällt die Temperatur $T/a(\eta)$ aber unter M_1 , wird die Verteilung von N_1 Maxwell-unterdrückt. $\varsigma_i^{\text{fl},Y}$ geht dann wie $\sim [T/(aM_1)]^4$ gegen Null (siehe Gl. (4.35)) und U wird zeitabhängig. Danach bei Temperaturen $T/a(\eta) \ll M_1$ ist U aber wieder konstant und $U^\dagger h^\dagger h U$ diagonal. Die Herleitung dieser Temperaturabhängigkeit aus der Kopplung an das schwere Neutrino N_1 wird im folgenden Abschnitt 4.3.1 behandelt.

Alle Größen mit linkshändigen Flavourindizes transformieren mit U . Matrizen in der diagonalen Basis erhalten einen Index D:

$$\mathbb{Y}_{\ell D}^H = U^\dagger \mathbb{Y}_\ell^H U, \quad (4.19a)$$

$$iS_{\ell D}^{fg} = U^\dagger iS_\ell^{fg} U. \quad (4.19b)$$

Im Gegensatz zu ς_D^{fl} müssen diese aber nichtdiagonal in den Flavourindizes sein.

Wir setzen (4.19a) und (4.19b) in (4.13b) ein und transformieren mit U auf die diagonale Basis, um die kinetischen Gleichungen in der thermischen Leptonmassenbasis zu erhalten:

$$i\partial_\eta \gamma^0 S_{\ell D}^{<, >} + i[\Xi, i\gamma^0 S_{\ell D}^{<, >}] - [\mathbb{Y}_{\ell D}^H \gamma^0, i\gamma^0 S_{\ell D}^{<, >}] - [\mathbb{Y}_{\ell D}^{<, >} \gamma^0, i\gamma^0 S_{\ell D}^H] = \frac{1}{2} (i\mathcal{C}_{\ell D} + i\mathcal{C}_{\ell D}^\dagger), \quad (4.20)$$

mit $\mathcal{C}_{\ell D} = U^\dagger \mathcal{C}_\ell U$ und

$$\Xi = U^\dagger \partial_\eta U \quad (4.21)$$

der Kompensationsmatrix für die zeitabhängigen Rotationen. Im Folgenden verwenden wir diese Basis und lassen die Indizes D fallen.

4.3.1. Thermische Selbstenergien aus der Kopplung an die rechtshändigen Neutrinos

Die Zeitabhängigkeit der Rotationsmatrix U wird durch die Beiträge der rechtshändigen Neutrinos zur Leptonen-Selbstenergie bestimmt. Daher berechnen wir die thermischen Korrekturen der Dispersionsrelation der linkshändigen Leptonen ℓ aus der Yukawakopplung Y an das schwere rechtshändige Neutrino N_1 . Der wichtigste Beitrag entsteht aus der Einschleifenwellenfunktionskorrektur mit N_1 und ϕ in der Schleife. Eine ähnliche Rechnung wurde bereits für ein masseloses Fermion in der Schleife durchgeführt [86] und für eine Schleife mit einem leichten Teilchen und einem masselosen Eichboson in [66]. Wir verallgemeinern die dort verwendeten Techniken auf unseren Fall.

Zerlegung der Selbstenergie

Die Struktur der Selbstenergie und des vollen Propagators wird durch Lorentzinvarianz eingeschränkt. Diese erlaubt uns, die Selbstenergie durch zwei unabhängige Funktionen a und b zu beschreiben, welche durch explizite Rechnung bestimmt werden können [66]. Wir definieren a und b durch:

$$\Sigma_\ell^H = \frac{1}{2} \left[\Sigma_\ell^T + \gamma^0 (\Sigma_\ell^T)^\dagger \gamma^0 \right] = P_R [-a \not{k} - b \not{p}] P_L. \quad (4.22)$$

Nach Gl. (4.15, 4.16, 4.17) und (4.22) im Ruhesystem des thermischen Bades ($u = (1, 0, 0, 0)$) ist der Zusammenhang zwischen den Parametern ς^{fl} , $\bar{\varsigma}^{\text{fl}}$ und a , b gegeben durch:

$$\varsigma^{\text{fl}} = -k^0 a - b, \quad (4.23a)$$

$$\bar{\varsigma}^{\text{fl}} = -(|k^0| - |\mathbf{k}|)a - \text{sign}(k^0)b. \quad (4.23b)$$

Die Dispersionsrelation der linkshändigen Leptonen aus Wechselwirkungen mit den rechtshändigen Neutrinos ist durch

$$(\not{k} - \Sigma_\ell^H)^2 = 0 \quad (4.24)$$

gegeben. Für die Rechnung der Leptogenese ist diese aber nicht direkt relevant; es reicht aus ς^{fl} und $\bar{\varsigma}^{\text{fl}}$ zu bestimmen. Durch Anwendung von Gl. (4.22) erhalten wir in der diagonalen Flavourbasis die Dispersionsrelation erster Ordnung:

$$k^0 = \pm |\mathbf{k}| - \frac{1}{2}(b_{\text{D}aa} + b_{\text{D}bb}), \quad (4.25)$$

wobei $b_{\text{D}} \equiv U^\dagger b U$ ist. Die Dispersionsrelation erster Ordnung ist unabhängig von a , in der zweiten Ordnung treten aber Terme $a \cdot b$ auf. Das Verschwinden von a in der Dispersionsrelation erster Ordnung kann auch in Gl. (4.23) gesehen werden, wo a in ς^{fl} die Kombination $|k_0| - |\mathbf{k}|$ multipliziert, welche in führender Ordnung verschwindet.

Mit den Gleichungen (4.15, 4.16, 4.17) können a und b in Beiträge aus flavourblinden Eichwechselwirkungen und flavoursensitiven Yukawawechselwirkungen zerlegt werden:

$$\begin{aligned} a_{ab} &= \delta_{ab} a^{\text{bl}} + h_{ac}^\dagger h_{cb} a_i^{\text{fl},h} + \sum_i Y_{ia}^* Y_{ib} a_i^{\text{fl},Y}, \\ b_{ab} &= \delta_{ab} b^{\text{bl}} + h_{ac}^\dagger h_{cb} b_i^{\text{fl},h} + \sum_i Y_{ia}^* Y_{ib} b_i^{\text{fl},Y}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Nach den Gleichungen (4.25) und (4.26) sind verschiedene Beiträge zu den Dispersionsrelationen additiv. Es gibt aber Probleme, wenn die Terme eine nichttriviale Hierarchie untereinander besitzen. Dann können Terme, welche sowohl in den Eichkopplungen, als auch in den Yukawakopplungen von erster Ordnung sind, relevant werden. Im massiven Fall¹ $M_1 \gg T$, erhalten wir $b_1^{\text{fl},Y} \sim (T/M_1)^4$ und $a_1^{\text{fl},Y} \sim (T/M_1)^2$ (siehe Gl. (4.34)). Dann ist der Term, welcher Eich- und Y -Beiträge mischt ($b^{\text{bl}} a_1^{\text{fl},Y} \sim T^4/(\mathbf{k}^2 M_1^2)$), anstelle von $b_1^{\text{fl},Y}$, von führender Ordnung in der Y -induzierten Dispersionsrelation (4.25), wenn $\mathbf{k}^2/M_1^2 < \frac{15C(R)g^2}{128\pi^2}$ gilt. Dabei ist $C(R)$ der quadratische Casimir der Fermion-Repräsentation (siehe Ref. [86]) und g die Eichkopplungskonstante. Für die Werte $C(R) = 3/4$ und $\alpha_W = g^2/(4\pi) = 1/40$ und mit der Annahme $|\mathbf{k}| \sim T$, vereinfacht sich die Bedingung zu der Ungleichung $M_1/T \gtrsim 10$. Die Bedingung $|\mathbf{k}| \sim T$ ist für die meisten thermischen Leptonen ℓ erfüllt. Für $z = M_1/T \gtrsim 10$ ist die Leptogenese aber bereits abgeschlossen, weshalb wir den Fall, in dem die gemischten Beiträge dominieren, nicht betrachten.

Wir verwenden die additive Dispersionsrelation (4.25) und berechnen die für die Zeitabhängigkeit von U relevanten Y -induzierten Beiträge. In diesem Kapitel unterdrücken wir deshalb im Folgenden den Index „fl, Y “.

¹Mit T , der physikalischen Temperatur in diesem Kapitel.

Der Einschleifenbeitrag zur thermischen Leptonselfenergie aus der Yukawakopplung Y lautet

$$\Sigma_{\ell ab}^{T,Y}(k) = -iY_{1a}^* Y_{1b} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} i\Delta_\phi^T(p) P_R iS_{N1}^T(p+k), \quad (4.27)$$

mit $i\Delta_\phi^T(p)$ und $iS_{N1}^T(p+k)$, den zeitgeordneten thermischen Propagatoren des Higgs-Feldes und des schweren Neutrinos (siehe [10]). Dabei haben wir die Summe über die rechtshändigen Neutrinos auf das Leichteste beschränkt, da dies im hierarchischen Fall den relevanten Beitrag zur Selbstenergie liefert. In Ref. [66] wird nur der leichte massive Fall mit $T \gg M_1$ behandelt. In der Leptogenese benötigen wir aber zusätzlich zu späten Zeiten auch den Bereich $T \ll M_1$ und den Übergangsbereich, welchen wir numerisch behandeln.

Unsere Rechnung verläuft analog zu der in [66]². Wir bilden Spuren über die Selbstenergie (4.27) und erhalten:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\not{k} \Sigma_{\ell ab}^{H,Y}) &= \frac{Y_{1a}^* Y_{1b}}{2} \int_0^\infty \frac{d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}|^2}{(2\pi)^2} \left(\left(4 + \frac{k^2 + M_1^2}{2|\mathbf{p}||\mathbf{k}|} L_+^B(|\mathbf{p}|) \right) \frac{n_B(|\mathbf{p}|)}{|\mathbf{p}|} + \left(4 - \frac{k^2 + M_1^2}{2|\mathbf{p}||\mathbf{k}|} L_+^F(|\mathbf{p}|) \right) \frac{n_F(E)}{E} \right), \\ \text{tr}(\not{p} \Sigma_{\ell ab}^{H,Y}) &= \frac{Y_{1a}^* Y_{1b}}{2} \int_0^\infty \frac{d|\mathbf{p}|}{(2\pi)^2} \frac{|\mathbf{p}|}{|\mathbf{k}|} \left(\left(L_-^B(|\mathbf{p}|) + \frac{k_0}{|\mathbf{p}|} L_+^B(|\mathbf{p}|) \right) n_B(|\mathbf{p}|) + L_-^F(|\mathbf{p}|) n_F(E) \right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

mit $E^2 = |\mathbf{p}|^2 + M_1^2$ und der Bose-Einstein-Verteilung $n_B(|\mathbf{p}|)$, sowie der Fermi-Dirac-Verteilung $n_F(|\mathbf{p}|)$. In den Integralen treten die logarithmischen Funktionen

$$\begin{aligned} L_\pm^B(|\mathbf{p}|) &= \ln \left(\frac{k^2 - M_1^2 + 2|\mathbf{p}|(k_0 + |\mathbf{k}|)}{k^2 - M_1^2 + 2|\mathbf{p}|(k_0 - |\mathbf{k}|)} \right) \pm \ln \left(\frac{k^2 - M_1^2 - 2|\mathbf{p}|(k_0 + |\mathbf{k}|)}{k^2 - M_1^2 - 2|\mathbf{p}|(k_0 - |\mathbf{k}|)} \right), \\ L_\pm^F(|\mathbf{p}|) &= \ln \left(\frac{k^2 + M_1^2 + 2Ek_0 + 2|\mathbf{p}||\mathbf{k}|}{k^2 + M_1^2 + 2Ek_0 - 2|\mathbf{p}||\mathbf{k}|} \right) \pm \ln \left(\frac{k^2 + M_1^2 - 2Ek_0 + 2|\mathbf{p}||\mathbf{k}|}{k^2 + M_1^2 - 2Ek_0 - 2|\mathbf{p}||\mathbf{k}|} \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

auf. Die gesuchten Koeffizienten a_1 und b_1 können unter Verwendung von Gl. (4.22) aus den angegebenen Spuren der Selbstenergie berechnet werden:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2\mathbf{k}^2} \left(\text{tr}(\not{k} \Sigma_{\ell ab}^{H,Y}) - k_0 \text{tr}(\not{p} \Sigma_{\ell ab}^{H,Y}) \right), \\ b_1 &= \left(\frac{k_0^2}{\mathbf{k}^2} - 1 \right) \frac{1}{2} \text{tr}(\not{p} \Sigma_{\ell ab}^{H,Y}) - \frac{k_0}{\mathbf{k}^2} \frac{1}{2} \text{tr}(\not{k} \Sigma_{\ell ab}^{H,Y}). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Schwerer massiver Fall

Im schweren massiven Fall $T \ll M_1$, entwickeln wir die logarithmischen Funktionen $L_\pm^{B,F}(|\mathbf{p}|)$ aus Gl. (4.29) und die Neutrinoanzahldichte $n_F(E) = 1/(e^{E/T} + 1)$ in T/M_1 . Die Energie des schweren Neutrinos $E(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M_1^2}$ ist von der Ordnung M_1 , weshalb die Verteilungsfunktion $n_F(E)$ für $T \ll M_1$ exponentiell unterdrückt ist. Deshalb können die fermionischen Beiträge, welche $L_\pm^F(|\mathbf{p}|)$ multiplizieren, in Gl. (4.28) vernachlässigt werden. In den Funktionen $L_\pm^B$ zählen wir $|\mathbf{p}|$, k^0 und $|\mathbf{k}|$ von der Ordnung T und die Entwicklung bis zur Ordnung $(T/M_1)^2$ ergibt

$$\begin{aligned} L_+^B(|\mathbf{p}|) &= -\frac{8|\mathbf{p}||\mathbf{k}|}{M_1^2} \left(1 + \frac{k^2}{M_1^2} \right), \\ L_-^B(|\mathbf{p}|) &= 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

²Der Unterschied betrifft nur Vorfaktoren, aber nicht die Struktur der Integrationen.

Mit Gl. (4.31) ergeben die Gleichungen der Selbstenergie einfache Integrale und wir erhalten:

$$\text{tr}(\not{k} \Sigma_{\ell ab}^{H,Y}) = -Y_{1a}^* Y_{1b} \frac{k^2 T^2}{6M_1^2}, \quad (4.32a)$$

$$\text{tr}(\not{k} \Sigma_{\ell ab}^{H,Y}) = -Y_{1a}^* Y_{1b} \frac{k^0 T^2}{6M_1^2}. \quad (4.32b)$$

Diese werden nun nach Gl. (4.30) in die Lorentzinvarianten Funktionen a_1 und b_1 zerlegt:

$$a_1 = \frac{T^2}{12M_1^2}, \quad (4.33a)$$

$$b_1 = 0. \quad (4.33b)$$

Bis zur Ordnung $(T/M_1)^2$ entspricht die Dispersionsrelation (4.25) der masselosen Dispersionsrelation $k^0 = |\mathbf{k}|$, da b_1 verschwindet.

Die Rechnung zur folgenden Ordnung $(T/M_1)^4$ ergibt

$$a_1 = \frac{T^2}{12M_1^2} \left(1 + \frac{15k^2 - 4\pi^2 T^2}{15M_1^2} \right), \quad (4.34a)$$

$$b_1 = \frac{4\pi^2 k^0 T^4}{45M_1^4}. \quad (4.34b)$$

Hier erzeugt das nicht verschwindende b_1 die nichttriviale Dispersionsrelation

$$k^0 = \pm |\mathbf{k}| \left(1 - \tilde{Y}_{ab}^2 \frac{4\pi^2 T^4}{45M_1^4} \right), \quad (4.35)$$

mit $\tilde{Y}_{ab}^2 \equiv \frac{1}{2} (U_{ac}^\dagger Y_{1c}^* Y_{1d} U_{da} + U_{bc}^\dagger Y_{1c}^* Y_{1d} U_{db})$. + bezieht sich auf die negative und – auf die positive Helizität h . Zur führenden Ordnung $(T/M_1)^2$ implizieren Gl. (4.23) und (4.33)

$$\varsigma_1^{\text{fl},Y} = -\frac{4\pi^2 |k^0| T^4}{45M_1^4} \quad \text{und} \quad \varsigma_1^{\text{fl},Y} = -\frac{k^0 T^2}{12M_1^2}. \quad (4.36)$$

a ist gerade in k^0 , während b ungerade ist, so dass $\varsigma_1^{\text{fl},Y}$ und $\varsigma_1^{\text{fl},Y}$ die korrekten Symmetrieeigenschaften (4.61) haben. Diese Ergebnisse sind gültig für $|\mathbf{k}| \lesssim T \ll M_1$; $\varsigma_1^{\text{fl},Y}$ ist mit $\frac{T^4}{M_1^4}$ unterdrückt.

In der Region $|\mathbf{k}| \gg M_1 \gg T$, erhalten wir eine andere analytische Entwicklung:

$$\text{tr}(\not{k} \Sigma_{\ell ab}^{H,Y}) = -Y_{1a}^* Y_{1b} \frac{T^2}{12}, \quad (4.37)$$

während der Beitrag aus $\text{tr}(\not{k} \Sigma_{\ell ab}^{H,Y})$ zur Dispersionsrelation in führender Ordnung verschwindet. Die Dispersionsrelation lautet dann:

$$k^0 = \pm |\mathbf{k}| \left(1 + \tilde{Y}_{ab}^2 \frac{T^2}{24\mathbf{k}^2} \right), \quad (4.38)$$

aus welcher eine effektive Masse der Leptonen ℓ mit großem Impuls extrahiert werden kann:

$$m_{\text{heavy}}^Y = \frac{|\tilde{Y}_{ab}| T}{2\sqrt{3}}. \quad (4.39)$$

Leichter massiver Fall

Nun behandeln wir den leichten massiven Fall $M_1 \ll T$. Die Rechnung verläuft analog zu [66]. Mit $|\mathbf{k}| \gtrsim T$ und der Annahme, dass die thermischen Korrekturen klein sind, also $||k^0| - |\mathbf{k}|| \ll T$ gilt, erhalten wir in führender Ordnung

$$b_1 = \frac{T^2}{16\mathbf{k}^2} \left(\frac{k^2}{2|\mathbf{k}|} \ln \left(\frac{k^0 + |\mathbf{k}|}{k^0 - |\mathbf{k}|} \right) - k^0 \right). \quad (4.40)$$

Nun können wir, mit der Annahme $a \ll 1$, Gl. (4.25) verwenden, um die Dispersionsrelationen zu erhalten:

$$k^0 = \pm |\mathbf{k}| \left(1 + \tilde{Y}_{ab}^2 \frac{T^2}{16\mathbf{k}^2} \right), \quad (4.41)$$

wobei wir die logarithmischen Korrekturen proportional zu $\left(\tilde{Y}_{ab}^2 \frac{T^2}{16\mathbf{k}^2} \right)^2 \ln \left(\tilde{Y}_{ab}^2 \frac{T^2}{32\mathbf{k}^2} \right)$ vernachlässigt haben. Die thermische Masse im Fall $|\mathbf{k}| \gtrsim T$ kann durch Verwendung der Relation $m^{Y^2} = k^{0^2} - \mathbf{k}^2$ extrahiert werden:

$$m_{\text{light}}^Y = \frac{|\tilde{Y}_{ab}|T}{2\sqrt{2}}. \quad (4.42)$$

Im leichten massiven Fall kann die thermische Masse auch im Hard-Thermal-Loop (HTL) Schema, in welchem $k^0, |\mathbf{k}| \ll T$ angenommen wird, berechnet werden. Der analytische Ausdruck in der HTL-Näherung lautet nach Ref. [66]:

$$\text{Tr}(\not{k} \not{\Sigma}_{\ell ab}^{H,Y}) = Y_{1a}^* Y_{1b} \frac{T^2}{8}, \quad (4.43a)$$

$$\text{Tr}(\not{k} \not{\Sigma}_{\ell ab}^{H,Y}) = Y_{1a}^* Y_{1b} \frac{T^2}{16|\mathbf{k}|} \ln \left(\frac{k^0 + |\mathbf{k}|}{k^0 - |\mathbf{k}|} \right), \quad (4.43b)$$

woraus

$$a_1 = \frac{T^2}{16\mathbf{k}^2} \left(1 - \frac{k^0}{2|\mathbf{k}|} \ln \left(\frac{k^0 + |\mathbf{k}|}{k^0 - |\mathbf{k}|} \right) \right), \quad (4.44a)$$

$$b_1 = \frac{T^2}{16\mathbf{k}^2} \left(\frac{k^2}{2|\mathbf{k}|} \ln \left(\frac{k^0 + |\mathbf{k}|}{k^0 - |\mathbf{k}|} \right) - k^0 \right) \quad (4.44b)$$

folgt. In dieser Gleichung sieht man, dass die Unterdrückung von a aus kleinen Kopplungen und der Schleifenunterdrückung im Grenzfall $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$ zusammenbricht. Um die thermische Masse zu erhalten, entwickeln wir a und b zur niedrigsten Ordnung in $|\mathbf{k}|/|k^0|$ und erhalten $a_1 = -\frac{T^2}{48k^{0^2}}$, sowie $b_1 = -\frac{T^2}{24k^0}$.

Wir können die Relation (4.25) nicht verwenden, da sie unter der Annahme $a \ll 1$ hergeleitet wurde. Dies gilt aber im HTL-Schema für kleine $|\mathbf{k}|$ nicht. Wir betrachten der Einfachheit halber den Einflavourfall mit $\tilde{Y}_{ab}^2 \equiv |Y_1|^2 = 1$, indem wir die Dispersionsrelation aus [66] verwenden können: $(k^0 \mp |\mathbf{k}|)(1 + a) + b = 0$. Damit folgt:

$$k^0 - |Y_1|^2 \frac{T^2}{16k^0} = \pm |\mathbf{k}| \left(1 - |Y_1|^2 \frac{T^2}{48k^{0^2}} \right). \quad (4.45)$$

Die thermische Masse im Fall $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$ ist gegeben durch

$$m_{\text{HTL}}^Y = \frac{|Y_1|T}{4}. \quad (4.46)$$

Dies ist ein bekanntes Ergebnis der HTL-Approximation [86].

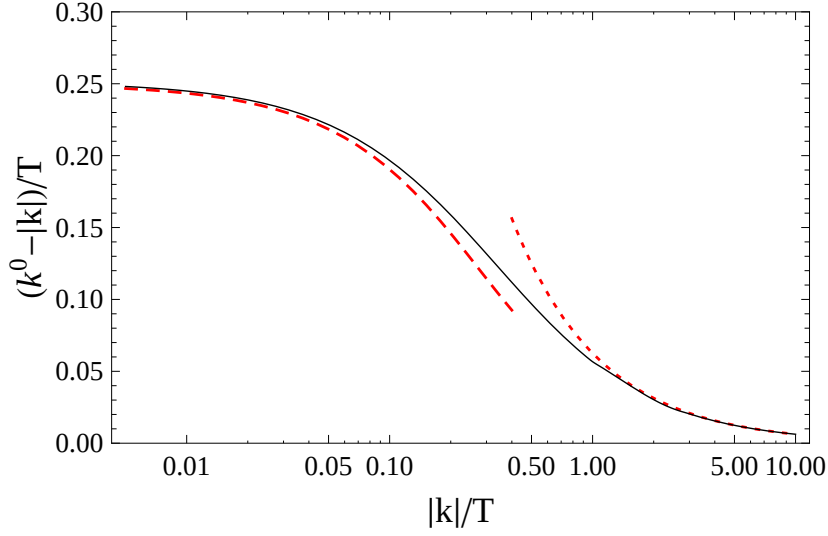


Abbildung 4.4.: Gezeigt ist die Einflavour-Dispersionsrelation $k^0 - |\mathbf{k}|$ als Funktion von $|\mathbf{k}|$ im leichten massiven Fall $M_1 \ll T$. Die durchgezogene schwarze Linie ist die numerische Lösung, die gestrichelte rote Linie die HTL-Näherung (4.45). Die gepunktete rote Linie ist die analytische Näherung (4.41).

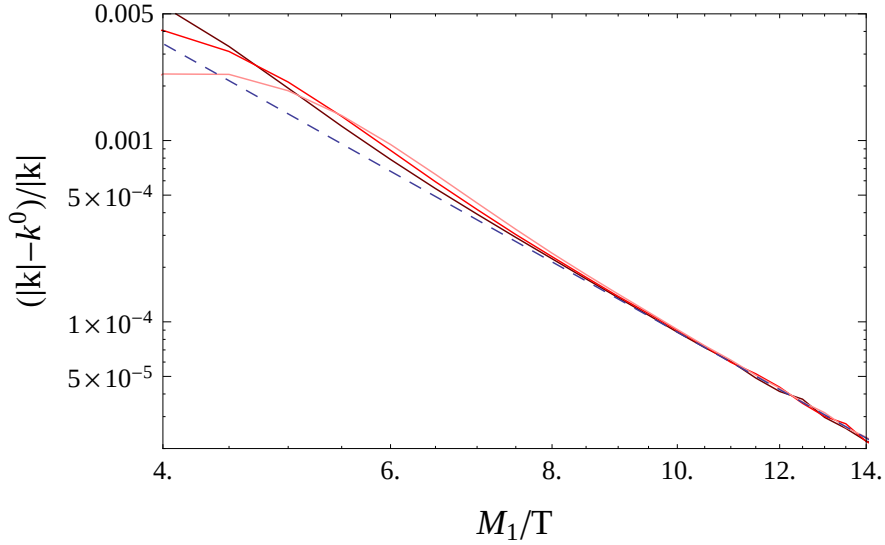


Abbildung 4.5.: Gezeigt ist die Dispersionsrelation der Leptonen ℓ , indem $|k^0 - |\mathbf{k}||/|\mathbf{k}|$ als Funktion von M_1/T für $|\mathbf{k}|/T = 0.7, 1.0, 1.3$ von dunkelrot (oben links) nach hellrot (unten links) dargestellt wird. Die gestrichelte Linie ist die analytische Näherung (4.35). Die Abbildung zeigt, dass die analytische Näherung im schweren massiven Fall ab $M_1/T \approx 8$ für die relevanten Wellenvektoren $|k| \approx T$ in guter Übereinstimmung ist.

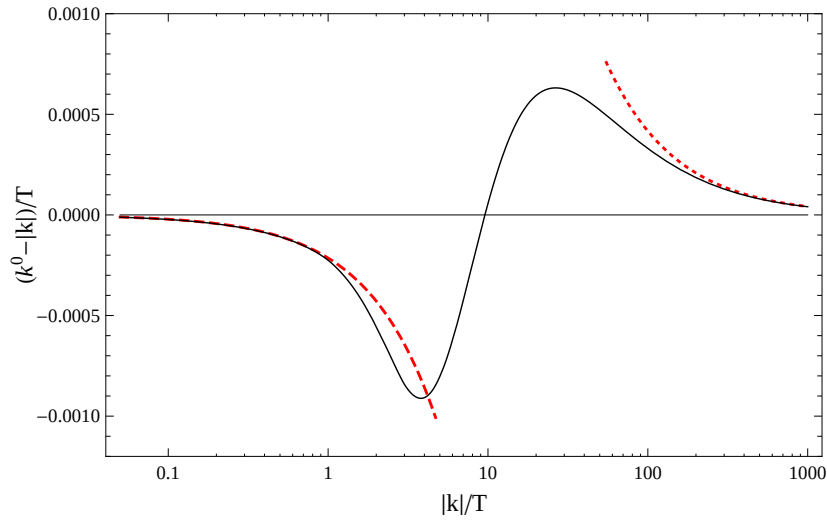


Abbildung 4.6.: Die Dispersionsrelation ist durch $k^0 - |\mathbf{k}|$ als Funktion von $|\mathbf{k}|$ im schweren massiven Fall $M_1/T = 8$ dargestellt. Die durchgezogene schwarze Linie entspricht der numerischen Lösung, die rote gestrichelte und die rote gepunktete Linie stellt die approximativen Lösungen (4.35) bzw. (4.38) dar. Außerdem ist der Lichtkegel $k^0 = |\mathbf{k}|$ angegeben. Die Approximationen stimmen in ihrem Gültigkeitsbereich mit der analytischen Lösung überein. Dazwischen muss ein Bereich liegen, in welchem der Lichtkegel, wie im Bild zu sehen, geschnitten wird.

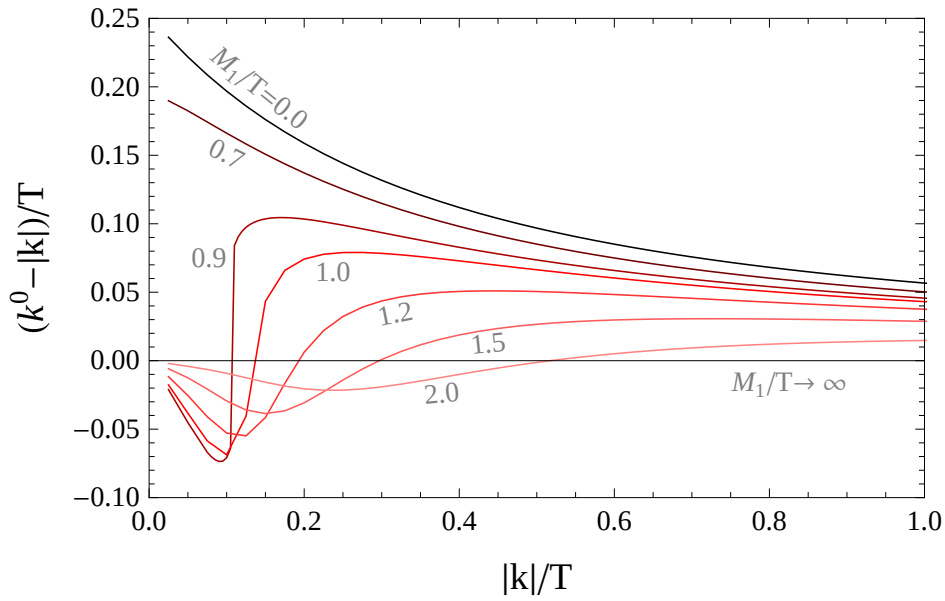


Abbildung 4.7.: Die numerisch berechneten Dispersionsrelationen $k^0 - |\mathbf{k}|$ als Funktion von $|\mathbf{k}|$, für $M_1/T = 0.7, 0.9, 1.0, 1.2, 1.5, 2.0$ von dunkelrot (oben) nach hellrot (unten). Außerdem ist der Fall $M_1/T = 0$ (oben, schwarz) und der Lichtkegel $k^0 = |\mathbf{k}|$ (mitte, schwarz) gezeigt. Bei $M_1/T \approx 0.9$ ändert sich das Verhalten der Dispersionsrelation qualitativ, indem ein Bereich mit Gruppengeschwindigkeit größer der Lichtgeschwindigkeit auftritt.

Numerische Lösungen

Im Übergangsbereich sind Entwicklungen problematisch, weshalb wir die Integrale numerisch lösen und die Ergebnisse mit den analytischen Näherungen (4.35), (4.38), (4.41) und (4.45) vergleichen.

In Abbildung 4.4 sind die analytischen Dispersionsrelationen (4.41) und (4.45) im leichten massiven Fall $M_1 \ll T$ und die numerische Lösung dargestellt. Die HTL-Näherung gilt nur für kleine $|\mathbf{k}|$, während die Approximation durch eine thermische Masse (4.42) in der Region $|\mathbf{k}| \gtrsim T$ verwendet werden kann. Die Abbildung zeigt eine gute Übereinstimmung in den jeweiligen Gültigkeitsbereichen.

Im schweren massiven Fall $M_1 \gg T$ vergleichen wir in Abbildung 4.5 die Approximation (4.35) mit der numerischen Lösung und stellen für $M_1/T \gtrsim 10$ eine gute Übereinstimmung fest. Außerdem bestätigt die Abbildung das asymptotische $(M_1/T)^4$ Verhalten.

Aus der approximativen Dispersionsrelation (4.35) folgt, dass $|k^0| < |\mathbf{k}|$ für kleine $|\mathbf{k}|$ gilt; aus (4.38) folgt für große $|\mathbf{k}|$ die Relation $|k^0| > |\mathbf{k}|$. Zwischen den Gültigkeitsgrenzen dieser Approximationen muss die Dispersionsrelation den Lichtkegel $k^0 = |\mathbf{k}|$ schneiden. Dies erfordert eine Region mit einer Gruppengeschwindigkeit $v_g = \frac{d|k^0|}{d|\mathbf{k}|} > 1$, was auf dissipative Effekte für die entsprechenden Impulse hindeutet. In Abbildung 4.6 sind die approximativen und numerischen Lösungen für $M_1/T = 8$ dargestellt. Die analytischen Näherungen (4.35) und (4.38) sind in den Regionen $|\mathbf{k}| \lesssim T$ und $|\mathbf{k}| \gg T$ anwendbar und stimmen mit der numerischen Rechnung überein. Die Abbildung bestätigt den Durchgang durch den Lichtkegel, welcher bei $|\mathbf{k}| \sim 10T$ auftritt.

Die Region zwischen großen und kleinen M_1/T wird numerisch behandelt. Abbildung 4.7 zeigt die numerischen Lösungen der Dispersionsrelation für verschieden Werte von M_1/T . Für $M_1/T \geq 0.9$ schneidet die Kurve den Lichtkegel. Es wäre interessant zu verstehen, wie die finite Breite und thermische Masse der Neutrinos und Higgs-Bosonen dieses Ergebnis beeinflusst.

Die für die Leptogenese relevante Impulsregion ist $|\mathbf{k}| \sim T$. Die Ergebnisse (4.35) und (4.41) zeigen, dass die Matrix U , welche die Leptonmasse diagonalisiert, für große $T \gg M_1$ approximativ konstant ist, da alle Beiträge proportional zu T^2 sind. Sie ist zeitabhängig im Bereich $T \approx M_1$, wenn die Verteilungsfunktion der schweren Neutrinos thermisch unterdrückt wird. Für kleine Temperaturen $T \ll M_1$ ist U wieder zeitunabhängig, da die Beiträge aus der Kopplung Y mit $(T/M_1)^4$ unterdrückt sind.

4.4. Zwangsgleichung und Kadanoff-Baym-Ansatz

Wir stellen den Weyl-Fermionpropagator durch einen Vektor- und Pseudovektoranteil dar:

$$i\gamma^0 S_\ell^{<, >} = \frac{1}{2} \sum_{h=\pm} \left[g_{h0}^{<, >} \left(\mathbb{1} + h\hat{\mathbf{k}} \cdot \gamma^5 \gamma^0 \gamma \right) + g_{h3}^{<, >} \left(\gamma^5 + h\hat{\mathbf{k}} \cdot \gamma^0 \gamma \right) \right], \quad (4.47)$$

mit $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$. Im Vergleich mit einem Dirac-Fermion gibt es keine skalaren oder pseudoskalaren Beiträge, da eine ungebrochene Eichsymmetrie die dynamische Erzeugung von skalaren und tensoriellen Dichten verbietet. Deshalb ist Gl. (4.47) die allgemeinste Form des Leptonpropagators, kompatibel mit der räumlichen Isotropie und der chiralen Symmetrie. Da es sich um linkshändige Leptonen handelt, muss

$$g_{h0}^{<, >} = g_{h3}^{<, >} \equiv g_h^{<, >} \quad (4.48)$$

gelten. Außerdem kommutieren $\mathbf{k} \cdot \gamma \gamma^0$ und $i\gamma^0 S_\ell^{<, >}$, weshalb sich die Zwangsgleichung (4.13a) und die kinetische Gleichung (4.13b) zu

$$2(k^0 - \mathbf{k} \cdot \gamma \gamma^0) i\gamma^0 S_\ell^{<, >} - \left\{ \Sigma_\ell^H \gamma^0, i\gamma^0 S_\ell^{<, >} \right\} - \left\{ i\Sigma_\ell^{<, >} \gamma^0, \gamma^0 S_\ell^H \right\} = -\frac{1}{2} (iC_\ell - iC_\ell^\dagger), \quad (4.49a)$$

$$i\partial_\eta i\gamma^0 S_\ell^{<, >} - \left[\Sigma_\ell^H \gamma^0, i\gamma^0 S_\ell^{<, >} \right] - [i\Sigma_\ell^{<, >} \gamma^0, \gamma^0 S_\ell^H] = -\frac{1}{2} (iC_\ell + iC_\ell^\dagger) \quad (4.49b)$$

vereinfachen. In führender Ordnung ist die Zwangsgleichung (4.13a) gegeben durch

$$\{\not{k}, iS_\ell^{<, >}\} = 0. \quad (4.50)$$

Mit dem Ansatz (4.47) erhalten wir die Gleichungen

$$g_{h0}^{<, >} k^0 + h|\mathbf{k}|g_{h3}^{<, >} = 0, \quad (4.51a)$$

$$g_{h3}^{<, >} k^0 + h|\mathbf{k}|g_{h0}^{<, >} = 0. \quad (4.51b)$$

Durch Anwendung der Bedingung (4.48) folgt schließlich, dass $g_h^{<, >}(k^0, \mathbf{k})$ verschwindet, wenn $k^0 \neq -h|\mathbf{k}|$ gilt. Dies entspricht der singulären Massenschale für masselose Teilchen; insbesondere erhalten wir für Leptonen ($k^0 > 0$) Helizität $h = -1$ und für Antileptonen ($k^0 < 0$) Helizität $h = 1$, wie erwartet. Diese Relation wird für Impulse von der Ordnung $|\mathbf{k}| \sim T$ durch thermische Korrekturen schwach gebrochen, da Lochmoden ein entgegengesetztes Verhältnis zwischen Frequenz und Helizität haben. Bei Impulsen $|\mathbf{k}| \ll T$ koppeln diese ähnlich stark an das Plasma wie Teilchen. Da diese Region allerdings nur ein kleiner Teil des Phasenraums ist, vernachlässigen wir sie. Mit der Parametrisierung der Selbstenergie (4.15), der Zerlegung des Propagators (4.47) und der Bedingung (4.48), ergibt die Spur über die Diracindizes der kinetischen Gleichung (4.49b)

$$i\partial_\eta g_h^{<, >} + i[\Xi, g_h^{<, >}] + h[\zeta^\text{fl}, g_h^{<, >}] = -\frac{1}{4}\text{tr}\left(i\mathcal{C}_\ell + i\mathcal{C}_\ell^\dagger\right), \quad (4.52)$$

in der diagonalen Massenbasis. Wir bestimmen die Helizität aus der Zwangsgleichung nullter Ordnung $h = -\text{sign}(k^0)$. Dies verringert die Genauigkeit der Gleichung nicht, da sie nur in Verbindung mit ζ^fl benötigt wird, welches selber von mindestens erster Ordnung in Gradienten ist.

Der Term $[i\mathbb{Y}_\ell^{<, >}\gamma^0, \gamma^0 S_\ell^H]$ aus Gl. (4.49b) trägt in erster Ordnung nicht zu Gl. (4.52) bei, da S_ℓ^H in nullter Ordnung unabhängig von der Teilchenverteilungsfunktion ist und deshalb proportional zur Einheitsmatrix im Flavourraum sein muss. Der Kommutator im Diracraum ergibt dann

$$[i\mathbb{Y}_\ell^{<, >}\gamma^0, \gamma^0 S_\ell^H] \propto -i[P_R(a^{<, >}\not{k} + b^{<, >}\gamma^0)P_L\gamma^0, \gamma^0 P_L\not{k}P_R] = 0. \quad (4.53)$$

Dies entspricht der Vernachlässigung der finiten Breite der Propagatoren im Transportterm.

In der verwendeten Flavourbasis ist ζ^fl diagonal, weshalb der entsprechende Kommutator in Gl. (4.52) einfach ausgewertet werden kann:

$$i\partial_\eta g_{hab}^{<, >} + i[\Xi, g_h^{<, >}]_{ab} + h(\zeta_{aa}^\text{fl} - \zeta_{bb}^\text{fl})g_{hab}^{<, >} = -\frac{1}{4}\left(\text{tr}\left[i\mathcal{C}_\ell + i\mathcal{C}_\ell^\dagger\right]\right)_{ab}. \quad (4.54)$$

Die thermischen Dispersionsrelationen haben also den selben Einfluss wie explizite Diracmassen [52, 53, 18].

Eine wichtige Eigenschaft von Gl. (4.52) ist der Vorzeichenwechsel des Kommutatorterms der thermischen Dispersionsrelation unter $h \rightarrow -h$ bzw. $k^0 \rightarrow -k^0$. Wir zeigen, dass zum Einschleifenlevel $h\zeta^\text{fl} = -\text{sign}(k^0)\zeta^\text{fl}(k^0, \mathbf{k})$ ungerade in k^0 ist.

Um dies zu zeigen, definieren wir zunächst den Ladungs- und Parit tswechsel durch

$$\psi^C(x) = C\bar{\psi}^T(x), \quad (4.55)$$

$$\psi^P(x) = P\psi(\bar{x}), \quad (4.56)$$

mit $\bar{u} \equiv (u_0, -\mathbf{u})$. Die Konjugationsmatrizen in der Weyl-Darstellung sind durch $C = i\gamma^0\gamma^2$ und $P = \gamma^0$ gegeben. Die konjugierten Propagatoren lauten dann

$$iS_{\ell ab}^{C, fg}(u, v) = \langle \psi_{\ell a}^C(u^f) \bar{\psi}_{\ell b}^C(v^g) \rangle = C \left[iS_{\ell ba}^{gf}(v, u) \right]^T C^\dagger, \quad (4.57a)$$

$$iS_{\ell ab}^{P, fg}(u, v) = \langle \psi_{\ell a}^P(u^f) \bar{\psi}_{\ell b}^P(v^g) \rangle = P iS_{\ell ab}^{fg}(\bar{u}, \bar{v}) P^\dagger. \quad (4.57b)$$

Die Transposition wirkt nur auf Dirac-Indizes, welche im Gegensatz zu Flavour- und CTP-Indizes nicht ausgeschrieben sind. Die CP -konjugierte hermitesche Selbstenergie lautet

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_{\ell ab}^{CP,H}(k, x) &= CP \left[\mathcal{Y}_{\ell ba}^H(-\bar{k}, \bar{x}) \right]^T (CP)^\dagger \\ &= P_R \left[-\gamma^0 (\bar{\varsigma}_{ba}^{\text{bl}}(-\bar{k}) + \bar{\varsigma}_{ba}^{\text{fl}}(-\bar{k})) + \hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\gamma} (\varsigma_{ba}^{\text{bl}}(-\bar{k}) + \varsigma_{ba}^{\text{fl}}(-\bar{k})) \right. \\ &\quad \left. + \text{sign}(k^0) [\bar{\varsigma}_{ba}^{\text{bl}}(-\bar{k}) + \bar{\varsigma}_{ba}^{\text{fl}}(-\bar{k})] \right] P_L.\end{aligned}\quad (4.58)$$

Alternativ kann diese aber auch direkt aus dem CP -konjugierten Lagrangian berechnet werden, in welchem die Kopplungskonstanten komplex konjugiert werden:

$$\mathcal{Y}_{\ell ab}^{CP,H}(k, x) = \mathcal{Y}_{\ell ab}^H(k, x) \Big|_{h \rightarrow h^*}^{Y \rightarrow Y^*}.\quad (4.59)$$

In Einschleifenordnung treten die Kopplungen als Faktoren $h^\dagger h$ und $Y^\dagger Y$ in der Selbstenergie $\mathcal{Y}_\ell^H$ (siehe Gl. (4.17)) auf. Die CP -Konjugation vertauscht also $[h^\dagger h]_{ab} \rightarrow [h^\dagger h]_{ab}^* = [h^\dagger h]_{ba}$ und $[Y^\dagger Y]_{ab} \rightarrow [Y^\dagger Y]_{ab}^* = [Y^\dagger Y]_{ba}$, woraus für die Selbstenergien

$$\mathcal{Y}_{\ell ab}^{CP,H}(k, x) = \mathcal{Y}_{\ell ba}^H(k, x)\quad (4.60)$$

folgt. Durch Vergleich von Gl. (4.60) mit Gl. (4.58) erhalten wir mit dem Ansatz (4.15) die Relationen

$$\bar{\varsigma}_{ab}^{\text{fl}}(-k^0, \mathbf{k}) = -\bar{\varsigma}_{ab}^{\text{fl}}(k^0, \mathbf{k}) \quad \text{und} \quad \varsigma_{ab}^{\text{fl}}(-k^0, \mathbf{k}) = \varsigma_{ab}^{\text{fl}}(k^0, \mathbf{k}).\quad (4.61)$$

Diese Symmetrieeigenschaften sind in Übereinstimmung mit den Gleichgewichtsergebnissen aus [86] und werden im Folgenden zur Vereinfachung der Impulsintegrale angewendet.

Die Zwangsgleichung wird außerdem im Stoßterm benötigt, um die auftretenden Impulsintegrale auszuführen. Da der Stoßterm selber von mindestens erster Ordnung in Gradienten (bzw. Kopplungen) ist, reicht es aus, die Zwangsgleichung in nullter Ordnung zu lösen. Dies wird auch in Ref. [18] verwendet, dort werden in der Zwangsgleichung aber kleine Baumlevel Massendifferenzen vernachlässigt. Die Zwangsgleichung (4.50) wird durch den Kadanoff-Baym-Ansatz gelöst:

$$iS_{\ell ab}^< = -2S_\ell^A [\vartheta(k^0) f_{\ell ab}^+(\mathbf{k}) - \vartheta(-k^0) (\mathbb{1}_{ab} - f_{\ell ab}^-(-\mathbf{k}))],\quad (4.62a)$$

$$iS_{\ell ab}^> = -2S_\ell^A [-\vartheta(k^0) (\mathbb{1}_{ab} - f_{\ell ab}^+(\mathbf{k})) + \vartheta(-k^0) f_{\ell ab}^-(-\mathbf{k})],\quad (4.62b)$$

mit der Spektralfunktion

$$S_\ell^A = \pi P_L \not{k} P_R \delta(k^2).\quad (4.63)$$

$f_{\ell ab}^\pm$ wird als Matrix der Leptonverteilungsfunktionen interpretiert. Mit Gleichung (4.47) erhalten wir die Relationen

$$g_-^< = -2\pi\delta(k^2)\vartheta(k^0)|\mathbf{k}|f_\ell^+(\mathbf{k}),\quad (4.64)$$

$$g_-^> = 2\pi\delta(k^2)\vartheta(k^0)|\mathbf{k}|(\mathbb{1} - f_\ell^+(\mathbf{k})),$$

$$g_+^< = -2\pi\delta(k^2)\vartheta(-k^0)|\mathbf{k}|(\mathbb{1} - f_\ell^-(-\mathbf{k})),$$

$$g_+^> = 2\pi\delta(k^2)\vartheta(-k^0)|\mathbf{k}|f_\ell^-(-\mathbf{k})$$

zwischen den Verteilungsfunktionen und den Propagatorkomponenten. Durch die Identifikation von $f_{\ell ab}^\pm$ als Erwartungswert des Anzahldichteoperators folgt mit Gl. (4.62) und der Operatordefinition von $iS_{\ell ab}^{<,>}$, dass $f_{\ell ab}^+ \sim \langle a_b^\dagger a_a \rangle$ zu der Leptondichtematrix korrespondiert, während $f_{\ell ab}^- \sim \langle b_a^\dagger b_b \rangle$ zu den transponierten Antileptondichten korrespondiert. Dies wird durch das Verhalten des Propagators

unter CP -Konjugation bestätigt:

$$\begin{aligned} iS_{\ell ab}^{CP,fg}(k, x) &= CP \left[iS_{\ell ba}^{gf}(-\bar{k}, \bar{x}) \right]^T (CP)^\dagger \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{h=\pm} g_{hba}^{gf}(-k) \left[(1 - \gamma^5) \gamma^0 - (1 - \gamma^5) h \hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\gamma} \right] = -iS_{\ell ba}^{gf}(-k, x), \end{aligned} \quad (4.65)$$

wobei wir den Ansatz (4.47) verwendet haben und räumliche Homogenität $g_h^{gf}(k) = g_h^{gf}(\bar{k})$ vorausgesetzt haben. Der Vorzeichenwechsel in k ergibt das Negative des Flavour- und CTP-transponierten und CP -konjugierten Propagators. Die Verwendung von $S_\ell^{<,>}(k, x)$ mit $k^0 < 0$, anstelle von $S_\ell^{CP,<,>}(k, x)$ mit $k^0 > 0$, hat den Vorteil, dass die kinetischen Gleichungen flavourkovariant sind, wie in [52, 53] für die elektroschwache Baryogenese gezeigt.

4.5. Kinetische Gleichungen der Leptonzahldichten

Wir vereinfachen nun die kinetischen Gleichungen (4.54), um sie numerisch zu lösen. Die wichtigste Approximation ist die Separation der Zeitskala des kinetischen Gleichgewichts von der Zeitskala der flavoursensitiven Wechselwirkungen. Durch die schnellen Eichwechselwirkungen können die Verteilungsfunktionen durch Bose-Einstein- oder Fermi-Dirac-Verteilungen approximiert werden, wobei wir eine Matrix der chemischen Potentiale einführen.

4.5.1. Matrixleptonzahldichten

Wir definieren die Matrixleptonzahldichten als

$$n_{\ell ab}^+ = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_{\ell ab}^+(\mathbf{k}) = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{dk^0}{2\pi} \text{tr} [i\gamma^0 S_{\ell ab}^{<}] , \quad (4.66a)$$

$$n_{\ell ab}^- = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_{\ell ab}^-(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^0 \frac{dk^0}{2\pi} \text{tr} [i\gamma^0 S_{\ell ab}^{>}] . \quad (4.66b)$$

Die Abweichungen vom Gleichgewicht sind durch $\delta n_{\ell ab}^\pm = n_{\ell ab}^\pm - n_{\ell ab}^{\pm \text{eq}}$ und $\delta f_{\ell ab}^\pm = f_{\ell ab}^\pm - f_{\ell ab}^{\pm \text{eq}}$ gegeben. Wir nehmen an, dass die Verteilungsfunktion eine Fermi-Dirac-Verteilung mit einer Matrix der chemischen Potentiale $\mu_{ab}^\pm$ für Teilchen und Antiteilchen ist:

$$f_{\ell ab}^\pm(\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{e^{\beta|\mathbf{k}| - \beta\mu_{ab}^\pm} + 1} \right)_{ab} . \quad (4.67)$$

Zur ersten Ordnung in den chemischen Potentialen gilt

$$\delta n_{\ell ab}^\pm = \mu_{ab}^\pm \frac{T^2}{12} \quad (4.68)$$

und für die Verteilungsfunktion folgt:

$$\delta f_{\ell ab}^\pm(\mathbf{k}) = 12\delta n_{\ell ab}^\pm \frac{\beta^3 e^{\beta|\mathbf{k}|}}{(e^{\beta|\mathbf{k}|} + 1)^2} . \quad (4.69)$$

Die Abweichung der $<, >$ -Propagatoren vom Gleichgewicht ist gegeben durch

$$i\delta S_{\ell ab} = -2S_\ell^A [\vartheta(k^0) \delta f_{ab}^+(\mathbf{k}) + \vartheta(-k^0) \delta f_{ab}^-(-\mathbf{k})] . \quad (4.70)$$

Für die rechtshändigen Leptonen des Standardmodells verfahren wir analog. Die Gleichungen sind nach Austausch von $\ell \rightarrow \bar{\ell}$ äquivalent.

Der Ansatz (4.67) ist gültig, wenn Eichwechselwirkungen und Paarerzeugung bzw. -vernichtung schnell gegenüber den flavoursensitiven Prozessen sind. In Abschnitt 4.5.3 zeigen wir, dass der Ansatz tatsächlich eine stationäre Lösung der kinetischen Gleichung ist, wenn flavoursensitive Wechselwirkungen vernachlässigt werden. Schnelle Eichwechselwirkungen erzwingen dann diese Form des Propagators.

Da $\mu^\pm$ hermitesch ist, kann Gl. (4.67) durch Flavourrotationen diagonalisiert werden. Flavorsensitive Wechselwirkungen ändern dann die Flavourorientierung von $\mu^\pm$ auf Zeitskalen, welche langsam gegenüber der Zeitskala der Thermalisierung sind.

Mit dem Kadanoff-Baym-Ansatz (4.62), der Spektralfunktion (4.63), der Zerlegung (4.47) und der Zwangsgleichung für Weyl-Spinoren (4.48) erhalten wir die Relationen

$$f_\ell^\pm(\mathbf{k}) = \mp 2 \int_{0,-\infty}^{\infty,0} \frac{dk^0}{2\pi} g_{\mp}^{<,>}(k^0, \mathbf{k}). \quad (4.71)$$

Die kinetischen Gleichungen der Verteilungsfunktionen sind durch die k^0 -Integration der Bewegungsgleichung (4.54) mit der Relation (4.71) gegeben:

$$\partial_\eta f_{\ell ab}^\pm(\mathbf{k}) = [\Xi, f_\ell^\pm(\mathbf{k})]_{ab} \mp i(\varsigma_{aa}^{\text{fl}} - \varsigma_{bb}^{\text{fl}})f_{\ell ab}^\pm(\mathbf{k}) \pm \frac{1}{2} \text{tr} \int_{0,-\infty}^{\infty,0} \frac{dk^0}{2\pi} (\mathcal{C}_{\ell ab} + \mathcal{C}_{\ell ab}^\dagger). \quad (4.72)$$

Für die Abweichung der Anzahldichten vom thermischen Gleichgewicht erhalten wir mit den flavour-diagonalen Gleichgewichtsverteilungen $n_{\ell ab}^{\pm \text{eq}} = \delta_{ab} n_{\ell aa}^{\pm \text{eq}}$

$$\partial_\eta \delta n_{\ell ab}^\pm = [\Xi^{\text{eff}}, \delta n_\ell^\pm]_{ab} \mp i\Delta\omega_{\ell ab}^{\text{eff}} \delta n_{\ell ab}^\pm \pm \frac{1}{2} \text{tr} \int_{0,-\infty}^{\infty,0} \frac{dk_0}{2\pi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\mathcal{C}_{\ell ab} + \mathcal{C}_{\ell ab}^\dagger). \quad (4.73)$$

Dabei haben wir die thermisch gemittelten Frequenzen der Flavouroszillationen und die Kompensationsmatrix durch

$$\Delta\omega_{\ell ab}^{\text{eff}}(\eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{12\beta^3 e^{\beta|\mathbf{k}|}}{(e^{\beta|\mathbf{k}|} + 1)^2} (\varsigma_{aa}^{\text{fl}}(|\mathbf{k}|, \mathbf{k}, \eta) - \varsigma_{bb}^{\text{fl}}(|\mathbf{k}|, \mathbf{k}, \eta)), \quad (4.74a)$$

$$\Xi^{\text{eff}}(\eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{12\beta^3 e^{\beta|\mathbf{k}|}}{(e^{\beta|\mathbf{k}|} + 1)^2} \Xi(|\mathbf{k}|, \mathbf{k}, \eta) \quad (4.74b)$$

definiert und verwendet, dass ς^{fl} und Σ symmetrisch im ersten Argument sind (siehe Gl. (4.61)). Die Hauptbeiträge zum Phasenraumintegral stammen von thermischen Impulsen $|\mathbf{k}| \sim T$, für welche $\varsigma_{ab}^{\text{fl}}$ durch

$$\varsigma_{ab}^{\text{fl}}(k^0, \mathbf{k}) = \frac{h_{ac}^\dagger h_{cb} T^2}{16|\mathbf{k}|} + \sum_i Y_{ia}^* Y_{ib} \varsigma_i^{\text{fl}, Y}(k^0, \mathbf{k}) \quad (4.75)$$

genähert werden kann [86]. Die Struktur $Y^\dagger Y \varsigma_i^{\text{fl}, Y}$ ist im Allgemeinen kompliziert (siehe Abschnitt 4.3), ist aber, wenn Flavoureffekte relevant sind, höchstens von derselben Größenordnung wie $h^\dagger h \varsigma^{\text{fl}, h}$. Deshalb verwenden wir die Abschätzung

$$\Delta\omega_{\ell ab}^{\text{eff}} = \mathcal{O}(h_\tau^2 T), \quad (4.76)$$

mit h_τ der τ -Yukawakopplung.

Der Stoßterm wird folgendermaßen zerlegt

$$\mathcal{C}_\ell = \mathcal{C}_\ell^Y + \mathcal{C}_\ell^{\text{fl}} + \mathcal{C}_\ell^{\text{bl}}. \quad (4.77)$$

$\mathcal{C}_\ell^Y$ beschreibt Zerfälle des rechtshändigen Neutrinos N_1 und stellt die Quelle der CP -Asymmetrie dar. $\mathcal{C}_\ell^Y$ trägt außerdem durch inverse Zerfälle und Stöße zum Washout der Asymmetrie bei. Flavour-sensitive Standardmodellwechselwirkungen werden durch $\mathcal{C}_\ell^{\text{fl}}$ dargestellt, während flavourblinde Eichwechselwirkungen mit $\mathcal{C}_\ell^{\text{bl}}$ bezeichnet werden. Im Folgenden zeigen wir, dass diese in der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta n_{\ell ab}^\pm}{\partial \eta} = & \Xi_{ac}^{\text{eff}} \delta n_{\ell cb}^\pm - \delta n_{\ell ac}^\pm \Xi_{cb}^{\text{eff}} \mp i \Delta \omega_{\ell ab}^{\text{eff}} \delta n_{\ell ab}^\pm \\ & - \sum_c [W_{ac} \delta n_{\ell cb}^\pm + \delta n_{\ell ca}^{\pm*} W_{bc}^*] \pm S_{ab} - \Gamma^{\text{bl}} (\delta n_{\ell ab}^+ + \delta n_{\ell ab}^-) - \Gamma_{\ell ab}^{\pm \text{fl}} \end{aligned} \quad (4.78)$$

parametrisiert werden können.

4.5.2. Quell- und Washout-Beitrag

Der Washout-Term für $\delta n_{\ell ab}^+$ zur Ordnung Y_{ia}^2 lautet in führender Ordnung [9]

$$\begin{aligned} - \sum_c W_{ac} \delta n_{\ell cb}^+ &= \frac{1}{2} \text{tr} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{dk_0}{2\pi} \mathcal{C}_{\ell ab}^Y \\ &= \sum_c \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{2} \text{tr} [\mathbb{Y}_{\ell ac}^>(k) \mathbb{S}_{\ell cb}^<(k) - \mathbb{Y}_{\ell ac}^<(k) \mathbb{S}_{\ell cb}^>(k)] . \end{aligned} \quad (4.79)$$

Er beinhaltet die Reaktionen des schweren rechtshändigen Neutrinos. Diese verletzen die Leptonzahl und tragen damit, wie in Abschnitt 4.1 gezeigt, zum Washout bei.

Nah am Gleichgewicht gilt

$$i \mathbb{Y}_{\ell ac}^>(k) \mathbb{S}_{\ell cb}^<(k) - i \mathbb{Y}_{\ell ac}^<(k) \mathbb{S}_{\ell cb}^>(k) = -i (\mathbb{Y}_{\ell ac}^<(k) - \mathbb{Y}_{\ell ac}^>(k)) i \delta S_{\ell cb}(k) \quad (4.80)$$

und die Differenz kann durch

$$\begin{aligned} i \mathbb{Y}_{\ell ac}^<(k) - i \mathbb{Y}_{\ell ac}^>(k) &= -Y_{1a}^* Y_{1c} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2 \sqrt{\mathbf{k}'^2 + (a(\eta) M_1)^2}} \frac{d^3 k''}{(2\pi)^3 2 |\mathbf{k}''|} (2\pi)^4 \delta^4(k' - k - k'') \\ &\quad \times \text{sign}(k_0) P_R(\not{k}' + a(\eta) M_1) P_L (f_{N1}(\mathbf{k}') + f_\phi(\mathbf{k}'')) \end{aligned} \quad (4.81)$$

berechnet werden.

Mit Gleichungen (4.69) und (4.70), identifizieren wir

$$\begin{aligned} W_{ac} &= \frac{1}{2} Y_{1a}^* Y_{1c} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2 |\mathbf{k}|} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2 \sqrt{\mathbf{k}'^2 + (a(\eta) M_1)^2}} \frac{d^3 k''}{(2\pi)^3 2 |\mathbf{k}''|} (2\pi)^4 \delta^4(k' - k - k'') \\ &\quad \times 2k \cdot k' (f_{N1}(\mathbf{k}') + f_\phi(\mathbf{k}'')) \frac{12\beta^3 e^{\beta|\mathbf{k}|}}{(e^{\beta|\mathbf{k}|} + 1)^2} . \end{aligned} \quad (4.82)$$

Der Washout-Term für $\delta n_{\ell ab}^-$ wird analog berechnet.

Der CP -verletzende Quellterm für $\delta n_{\ell ab}^+$ ist durch die Interferenz mit den rechtshändigen Neutrinos N_2 und N_3 gegeben:

$$\begin{aligned} S_{ab} &= \frac{3}{2} i \sum_c [Y_{1a}^* Y_{1c}^* Y_{2c} Y_{2b} - Y_{2a}^* Y_{2c}^* Y_{1c} Y_{1b}] \\ &\quad \times \left(-\frac{M_1}{M_2} \right) \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2 \sqrt{\mathbf{k}'^2 + (a(\eta) M_1)^2}} \frac{\Sigma_{N\mu}(\mathbf{k}') \Sigma_N^\mu(\mathbf{k}')}{g_w} \delta f_{N1}(\mathbf{k}') . \end{aligned} \quad (4.83)$$

Dies ist eine direkte Verallgemeinerung von [10] für den Multiflavourfall, mit $\Sigma_N^\mu(k)$ gegeben durch

$$\Sigma_N^\mu(k) = g_w \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2|\mathbf{p}|} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2|\mathbf{q}|} (2\pi)^4 \delta^4(k - p - q) p^\mu \left(1 - f_\ell^{\text{eq}}(\mathbf{p}) + f_\phi^{\text{eq}}(\mathbf{q})\right) \quad (4.84)$$

und $g_w = 2$. Wir haben außerdem angenommen, dass es nur zwei Flavour der rechtshändigen Neutrinos gibt; die Verallgemeinerung auf drei Flavour ist im hierarchischen Grenzfall trivial. Die Abweichung der Verteilungsfunktion der rechtshändigen Neutrinos vom thermischen Gleichgewicht ist durch $\delta f_{N1}(\mathbf{k}) = f_{N1}^{\text{eq}}(\mathbf{k}) - f_{N1}^{\text{eq}}(\mathbf{k})$ definiert.

Die Quelle der Antileptonen $\delta n_{\ell ab}^-$ ist durch $-S_{ab}$ gegeben, da es sich explizit um den CP -brechenden Anteil der Wechselwirkungen handelt. Der Quellterm enthält sowohl Wellenfunktions- als auch Vertexbeiträge. Es gibt einen weiteren Wellenfunktionsbeitrag, welcher den Leptonflavour bricht, aber die Leptonzahl erhält [85, 2]. Dieser Beitrag ist aber im Gegensatz zu den leptonzahlverletzenden Beiträgen mit einem Faktor M_1/M_2 unterdrückt, weshalb er im hierarchischen Grenzfall vernachlässigt werden kann.

4.5.3. Flavourblinde Wechselwirkungen

Der Beitrag der flavourblinden Eichwechselwirkungen zur Leptonselfstenergie ist gegeben durch

$$i\mathcal{Y}_{\ell ab}^{\text{bl}fg} = g^2 \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k''}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k - k' - k'') \gamma^\nu iS_{\ell ab}^{fg}(k') \gamma^\mu i\Delta_{A\mu\nu}^{fg}(k''), \quad (4.85)$$

mit dem Eichbosonpropagator $i\Delta_{A\mu\nu}^{fg}$. Wir erhalten den Stoßterm

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\ell ab}^{\text{bl}}(k) &= i\mathcal{Y}_{\ell ac}^{\text{bl} >}(k) iS_{\ell cb}^{\leq}(k) - i\mathcal{Y}_{\ell ac}^{\text{bl} <}(k) iS_{\ell cb}^{\geq}(k) \\ &= g^2 \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k''}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k - k' - k'') \left[\gamma^\nu iS_{\ell ac}^{\geq}(k') \gamma^\mu i\Delta_{A\mu\nu}^{\geq}(k'') iS_{\ell cb}^{\leq}(k) \right. \\ &\quad \left. - \gamma^\nu iS_{\ell ac}^{\leq}(k') \gamma^\mu i\Delta_{A\mu\nu}^{\leq}(k'') iS_{\ell cb}^{\geq}(k) \right], \end{aligned} \quad (4.86)$$

welcher die Eichwechselwirkungen beschreibt. Flavourblinde Wechselwirkungen sind im Gegensatz zu den gefflavourten Yukawawechselwirkungen dominant. Sie führen zu einer effektiven Zwangsgleichung für die Verteilungsfunktion im Gleichgewicht. Wir haben in (4.67) eine spezielle Form der Verteilungsfunktion, beschrieben durch ein verallgemeinertes chemisches Potential, angenommen. Dieser Ansatz muss konsistent mit der effektiven Zwangsgleichung aus starken Eichwechselwirkungen sein. Um dies zu testen zeigen wir, dass der Stoßterm (4.86) mit dem Ansatz (4.67) verschwindet und erhalten die neue Zwangsrelation: $\mu_{ab}^- = -\mu_{ab}^+$. Sind Eichwechselwirkungen schnell gegenüber gefflavourten Wechselwirkungen, müssen die chemischen Potentiale der Teilchen und Antiteilchen genau entgegengesetzt sein.

Wir stellen fest, dass $\mu_{ab}^- = -\mu_{ab}^+ \equiv -\mu_{ab}$ die verallgemeinerte KMS-Relation

$$S_{\ell ab}^{\geq}(k) = -\left(e^{\beta k_0 - \beta \mu}\right)_{ac} S_{\ell cb}^{\leq}(k) \quad (4.87)$$

impliziert. Mit dieser Relation und der Annahme, dass die Eichbosonen im thermischen Gleichgewicht sind ($\Delta_{A\mu\nu}^{\geq}(k) = e^{\beta k_0} \Delta_{A\mu\nu}^{\leq}(k)$), folgt aus Gl. (4.85) die Relation $\mathcal{Y}_{\ell ab}^{\text{bl} >} = -\left(e^{\beta k_0 - \beta \mu}\right)_{ac} \mathcal{Y}_{\ell cb}^{\text{bl} <}$ für die Leptonselfstenergie. Daher können wir schreiben

$$\mathcal{C}_\ell^{\text{bl}}(k) = \left[i\mathcal{Y}_\ell^{\text{bl} <}(k), e^{\beta k_0 - \beta \mu} \right] iS_\ell^{\leq}(k). \quad (4.88)$$

Wir setzen Gl. (4.85) ein und erhalten den Kommutator $[iS_\ell^{\text{bl} <}(k), e^{\beta k_0 - \beta \mu}]$, welcher verschwindet, wenn der Ansatz (4.67) mit $\mu_{ab}^- = -\mu_{ab}^+$ verwendet wird.

Da der Stoßterm für $\mu_{ab}^- = -\mu_{ab}^+$ verschwindet, ist die Gleichgewichtsverteilung (4.67) mit entgegengesetzten chemischen Potentialen eine stationäre Lösung der kinetischen Gleichung, wenn nur

schnelle Eichwechselwirkungen betrachtet werden. Dies rechtfertigt den Ansatz der verallgemeinerten chemischen Potentiale in der Gegenwart von starken Eichwechselwirkungen.

Der Stoßterm kann vereinfacht werden, wenn die Eichbosonen im Gleichgewicht sind und die Abweichung der Leptonen vom Gleichgewicht klein ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{lab}^{\text{bl}}(k) &\approx g^2 \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k''}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k - k' - k'') \\ &\times \left\{ \gamma^\nu i \delta S_{lab}(k') \gamma^\mu [i \Delta_{A\mu\nu}^>(k'') i S_{\ell bb}^<(k) - i \Delta_{A\mu\nu}^<(k'') i S_{\ell bb}^>(k)] \right. \\ &\quad \left. + [\gamma^\nu i S_{\ell aa}^>(k') \gamma^\mu i \Delta_{A\mu\nu}^>(k'') - \gamma^\nu i S_{\ell aa}^<(k') \gamma^\mu i \Delta_{A\mu\nu}^<(k'')] i \delta S_{lab}(k) \right\}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Die Terme in eckigen Klammern sind dabei ungerade unter einem Vorzeichenwechsel der Impulse, da in führender Ordnung die Gleichgewichtsverteilungsfunktionen verwendet werden können, für welche $i \Delta_{A\mu\nu}^{\text{eq}>}(k) = i \Delta_{A\mu\nu}^{\text{eq}<}(-k)$ und $i S_{\ell aa}^{\text{eq}>}(k) = i S_{\ell aa}^{\text{eq}<}(-k)$ gilt.

Der Stoßterm (4.89) verschwindet, wenn wir die Baumlevel-Propagatoren einsetzen. Dann sind alle Teilchen masselos und die finite Breite wird vernachlässigt, weshalb der Beitrag im Stoßterm kinematisch verboten ist. Daher ist es nötig, thermische Massen und die Effekte finiter Breiten zu berücksichtigen. Finite Breite ist aber nicht kompatibel mit den verwendeten singulären Massenschalen. In dieser Arbeit diskutieren wir also nur die generelle Form der Wechselwirkung und geben Abschätzungen an.

Besonders interessant sind in Gl. (4.89) Beiträge, für welche $\text{sign}(k''^0) = -\text{sign}(k'^0) = \text{sign}(k^0)$ gilt. Diese sind erlaubt, wenn finite Breite in der spektralen Funktion vorhanden ist und korrespondieren zu Lepton-Antilepton-Paarerzeugung oder -vernichtung. Nach Berechnung der Diracspur und Ausführen der Integrationen sind die Lepton- und Antileptonbeiträge identisch und wir können den flavourblinden Beitrag zu dem Stoßterm in Gl. (4.73) durch

$$\pm \frac{1}{2} \text{tr} \int_{0,-\infty}^{\infty,0} \frac{dk_0}{2\pi} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (\mathcal{C}_{lab}^{\text{bl}} + \mathcal{C}_{lab}^{\text{bl}\dagger}) = -\Gamma^{\text{bl}} (\delta n_{\ell ab}^+ + \delta n_{\ell ab}^-) \quad (4.90)$$

parametrisieren, wie bereits in Gl. (4.78) angenommen. Das unterschiedliche Vorzeichen für Teilchen und Antiteilchen aus Gl. (4.73) hebt sich aufgrund von Symmetrieeigenschaften des Integranden heraus. Wir verwenden die Abschätzung $\Gamma^{\text{bl}} \sim g_2^4 T$, mit g_2 der $SU(2)_L$ -Eichwechselwirkung und einem zusätzlichen Faktor g_2^2 im Vergleich zu der Baumlevel-Rechnung aus den Effekten finiter Breite [33].

Da der flavourblinde Stoßterm für δn_{ℓ}^+ und δn_{ℓ}^- identisch ist, folgt, dass in Abwesenheit von flavour-sensitiven Wechselwirkungen $\delta n_{\ell}^+ = \delta n_{\ell}^-$ gilt. Dies ist konsistent mit dem Ansatz des verallgemeinerten chemischen Potentials (4.67) für entgegengesetzte chemische Potentiale.

4.5.4. Flavoursensitive Wechselwirkungen

Die flavoursensitiven Lepton-Yukawawechselwirkungen tragen folgendermaßen zur Leptonselfstenergie bei:

$$i \mathcal{Y}_{lab}^{\text{fl}fg}(k) = h_{ac}^\dagger h_{db} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k''}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k - k' - k'') i S_{Rcd}^{\text{fg}}(k') i \Delta_\phi^{\text{fg}}(k''). \quad (4.91)$$

In erster Ordnung in Abweichungen vom Gleichgewicht ist der Stoßterm gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{lab}^{\text{fl}}(k) &= i \mathcal{Y}_{\ell ac}^{\text{fl}>}(k) i S_{\ell cb}^<(k) - i \mathcal{Y}_{\ell ac}^{\text{fl}<}(k) i S_{\ell cb}^>(k) \approx \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k''}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k - k' - k'') \\ &\times \left\{ h_{ac}^\dagger h_{de} i \delta S_{Rcd}(k') [i \Delta_\phi^>(k'') i S_{\ell eb}^<(k) - i \Delta_\phi^<(k'') i S_{\ell eb}^>(k)] \right. \\ &\quad \left. + h_{ac}^\dagger h_{de} [i S_{Rcd}^>(k') i \Delta_\phi^>(k'') - i S_{Rcd}^<(k') i \Delta_\phi^<(k'')] i \delta S_{\ell eb}(k) \right\} \end{aligned} \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k''}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k - k' - k'') \\
 &\quad \times \left\{ h_{ac}^\dagger h_{db} i \delta S_{Rcd}(k') \left[i \Delta_\phi^>(k'') i S_\ell^{\text{eq}<}(k) - i \Delta_\phi^<(k'') i S_\ell^{\text{eq}>}(k) \right] \right. \\
 &\quad \left. + h_{ac}^\dagger h_{ce} \left[i S_R^{\text{eq}>}(k') i \Delta_\phi^>(k'') - i S_R^{\text{eq}<}(k') i \Delta_\phi^<(k'') \right] i \delta S_{\ell eb}(k) \right\}.
 \end{aligned}$$

Auch hier müssen thermische Korrekturen der Propagatoren verwendet werden, da das Integral auf Baumlevel verschwindet. Wir unterscheiden zwei kinematische Situationen: Erstens, wenn $\text{sign}(k^0) = -\text{sign}(k'^0)$ ist, beschreibt der Stoßterm Paarerzeugung und -vernichtung der rechtshändigen Standardmodellleptonen. Zweitens, für $\text{sign}(k^0) = \text{sign}(k'^0)$ stoßen links- und rechtshändige Leptonen am Higgs-Boson. Beide Prozesse können nur durch die finite Breite der Spektralfunktion von ℓ , R und ϕ beschrieben werden. Zusammengefasst erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\ell ab}^{\pm \text{fl}} &= \pm \frac{1}{2} \text{tr} \int_{0, -\infty}^{\infty, 0} \frac{dk^0}{2\pi} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left(C_{\ell ab}^{\text{fl}}(k) + C_{\ell ab}^{\text{fl}\dagger}(k) \right) \\
 &= \Gamma^{\text{an}} \left([h^\dagger h]_{ac} \delta n_{\ell cb}^\pm + \delta n_{\ell ac}^\pm [h^\dagger h]_{cb} + h_{ac}^\dagger \delta n_{Rcd}^\mp h_{db} + h_{ad}^\dagger \delta n_{Rdc}^\mp h_{cb} \right) \\
 &\quad + \Gamma^{\text{sc}} \left([h^\dagger h]_{ac} \delta n_{\ell cb}^\pm + \delta n_{\ell ac}^\pm [h^\dagger h]_{cb} - h_{ac}^\dagger \delta n_{Rcd}^\pm h_{db} - h_{ad}^\dagger \delta n_{Rdc}^\pm h_{cb} \right)
 \end{aligned} \tag{4.93}$$

und für die rechtshändigen Leptonen analog

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{Rab}^{\pm \text{fl}} &= \Gamma^{\text{an}} \left([hh^\dagger]_{ac} \delta n_{Rcb}^\pm + \delta n_{Rac}^\pm [hh^\dagger]_{cb} + h_{ac} \delta n_{\ell cd}^\mp h_{db}^\dagger + h_{ad} \delta n_{\ell dc}^\mp h_{cb}^\dagger \right) \\
 &\quad + \Gamma^{\text{sc}} \left([hh^\dagger]_{ac} \delta n_{Rcb}^\pm + \delta n_{Rac}^\pm [hh^\dagger]_{cb} - h_{ac} \delta n_{\ell cd}^\pm h_{db}^\dagger - h_{ad} \delta n_{\ell dc}^\pm h_{cb}^\dagger \right).
 \end{aligned} \tag{4.94}$$

Die Faktoren Γ^{an} und Γ^{sc} werden, aufgrund der finiten Breite von ℓ und ϕ , bei endlicher Temperatur zu $\sim g_2^2 T$ abgeschätzt. Bei linkshändigen Flavourrotationen transformieren $\delta n_\ell^\pm$ und der zweite Index der Kopplung h , während $\delta n_R^\pm$ und der erste Index von h invariant sind. Wir haben außerdem verwendet, dass $hh^\dagger$ durch unitäre Transformationen der rechtshändigen Flavourbasis diagonalisiert werden kann.

Damit haben wir die Struktur aus Gl. (4.78) abgeleitet. Für die rechtshändigen Leptonen gilt eine analoge Gleichung, ohne Quell- und Washout-Beiträge.

4.5.5. Unterdrückung der Flavouroszillationen

Der dominante Beitrag im Stoßterm (4.78) ist $\Gamma^{\text{bl}} = O(g_2^4 T)$. Im Folgenden zeigen wir, dass dieser nah am Gleichgewicht zu folgender Bedingung führt:

$$\delta n_{ab}^+ = -\delta n_{ab}^-. \tag{4.95}$$

Im letzten Abschnitt haben wir bereits gesehen, dass diese Relation im flavourblinden Fall $h_{ab} \rightarrow 0$ gilt. Werden Flavoureffekte berücksichtigt, dämpft ein großes Γ^{bl} außerdem, durch das $\pm$ im ersten Term auf der rechten Seite der kinetischen Gleichung (4.78), Flavouroszillationen, welche ohne flavourblinde Wechselwirkungen auftreten würden. Um diesen Effekt zu verdeutlichen, betrachten wir folgende Modellgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \delta g^+(t) = -i \Delta \omega \delta g^+(t) - \Gamma [\delta g^+(t) + \delta g^-(t)], \tag{4.96a}$$

$$\frac{d}{dt} \delta g^-(t) = +i \Delta \omega \delta g^-(t) - \Gamma [\delta g^-(t) + \delta g^+(t)]. \tag{4.96b}$$

Die Parameter der gefflavourten Leptogenese können folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$\Gamma = \Gamma^{\text{bl}} \sim g_2^4 T, \quad \Delta \omega \sim h_\tau^2 T \ll \Gamma, \tag{4.97}$$

mit h_τ der τ -Yukawakopplung. Da $g_2^4 \gg h_\tau^2$ gilt, sind die Lösungen durch Linearkombination von zwei Eigenmoden gegeben, von denen eine die kurze Zerfallszeit $\tau_s = 1/(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - \Delta\omega^2}) \approx 1/(2\Gamma)$ besitzt und die zweite die lange Zerfallszeit $\tau_l = 1/(\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - \Delta\omega^2}) \approx 2\Gamma/\Delta\omega^2$. Die Eigenvektoren lauten

$$\delta g_{s,l} = \delta g^+ + \frac{-i\Delta\omega \pm \sqrt{\Gamma^2 - \Delta\omega^2}}{\Gamma} \delta g^- \approx \delta g^+ \pm \left(1 \mp i \frac{\Delta\omega}{\Gamma}\right) \delta g^-, \quad (4.98)$$

mit

$$\delta g_{s,l} = (\delta g_{s,l})_0 e^{-t/\tau_{s,l}}. \quad (4.99)$$

Die kurzlebige Mode $\delta g_s \approx \delta g^+ + \delta g^-$ wird schnell durch Paarvernichtung unterdrückt und führt zu der Relation

$$\delta g^+ \sim - \left(1 - i \frac{\Delta\omega}{\Gamma}\right) \delta g^-. \quad (4.100)$$

In der Gradientenentwicklung ist die erste Korrektur zu Gl. (4.95) deshalb von der Ordnung $\Delta\omega^{\text{eff}}/\Gamma^{\text{bl}}$.

Der Vorzeichenunterschied der $\Delta\omega$ -Terme in Gl. (4.96) ist entscheidend, da er die Oszillationen der langlebigen Mode $\delta g_{s,2} \approx \delta g^+ - \delta g^-$ dämpft:

$$\frac{d}{dt} (\delta g^+(t) - \delta g^-(t)) = -i\Delta\omega (\delta g^+(t) + \delta g^-(t)). \quad (4.101)$$

In der Evolutionsgleichung der langlebigen Mode tritt in Kombination mit dem für Oszillationen verantwortlichen $\Delta\omega$ die unterdrückte Mode δg_s auf. Ohne den Vorzeichenunterschied der $\Delta\omega$ -Terme würde jedoch die langlebige Mode δg_l auftreten und diese daher frei oszillieren.

Der langsame Zerfall der Mode δg_l beschreibt die Dämpfung der Flavourkohärenz in der Ladungsdichtenmatrix der Leptonen durch flavourblinde Interaktionen. Dieser Prozess ist deutlich langsamer als die Dämpfung durch flavoursensitive Terme. Mit der Relation (4.100) schätzen wir die Dämpfung aus Gl. (4.101), unter der Annahme $h_\tau \ll g_2^3$, durch $\Delta\omega^{\text{eff}^2}/\Gamma^{\text{bl}} \sim h_\tau^4 g_2^{-4} T \ll \Gamma^{\text{fl}} \sim g_2^2 h_\tau^2 T$ ab. Die Dämpfung aus flavoursensitiven Termen ist also dominant; flavourblinde Dämpfungen können im Vergleich vernachlässigt werden. Auf den ersten Blick ist es überraschend, dass die starken flavourblinden Wechselwirkungen hier vernachlässigt werden können. Dies bezieht sich aber lediglich auf Terme, welche die ihrerseits, durch flavourblinde Interaktionen, stark unterdrückte Mode δg_s multiplizieren. Die dominanten flavourblinden Wechselwirkungen führen auf eine effektive Zwangsgleichung. Flavour-sensitive Dämpfungen sind zwar relativ unterdrückt, müssen aber bei der Dämpfung der langlebigen Mode, welche nur schwach durch flavourblinde Wechselwirkungen unterdrückt wird, berücksichtigt werden.

Nun verallgemeinern wir die einfache Modellrechnung zu einer geflavourten Beschreibung. Dabei stellen wir fest, dass Flavouroszillationen unterdrückt werden, obwohl wir nur flavourblinde Interaktionen betrachten. Dies wurde auch im oszillatorischen Regime durch numerische Rechnungen [18] beobachtet. Die Oszillationen, welche durch $\Delta\omega$ induziert werden, sind für $\Gamma \gg \Delta\omega$ überdämpft und hängen nicht von der Wahl der Flavourbasis ab. Um dies zu zeigen, erweitern wir $g^\pm$ zu einem Vektor von Funktionen und betrachten die Matrixgleichungen

$$\frac{d}{dt} \delta g^+(t) = -i[\omega, \delta g^+(t)] - \Gamma[\delta g^+(t) + \delta g^-(t)], \quad (4.102a)$$

$$\frac{d}{dt} \delta g^-(t) = +i[\omega, \delta g^-(t)] - \Gamma[\delta g^-(t) + \delta g^+(t)]. \quad (4.102b)$$

Γ ist proportional zur Einheitsmatrix; $\omega = \omega^{\text{fl}} + \omega^{\text{bl}}$ wobei ω^{bl} proportional zur Einheitsmatrix ist und $\omega_{ab}^{\text{fl}} \ll \Gamma_{cc}$ für alle a, b, c gilt. Wir berechnen die Summe über die Gleichungen (4.102) und erhalten wieder $\delta g^+(t) + \delta g^-(t) \sim e^{-2\Gamma t}$. Die Differenz der Gleichungen (4.102) ergibt

$$\frac{d}{dt} [\delta g^+(t) - \delta g^-(t)] = 0 + [\delta g^+(t) - \delta g^-(t)] \times \mathcal{O}\left(\frac{\omega_{ab}^2}{\Gamma_{cc}}\right), \quad (4.103)$$

wobei die rechte Seite

$$[\omega, \delta g^+(t) + \delta g^-(t)] = [\delta g^+(t) - \delta g^-(t)] \times \mathcal{O}(\omega^2/\Gamma) , \quad (4.104)$$

mit einer Abschätzung analog zu Gl. (4.100) berechnet wird. Dies bestätigt die Unterdrückung von ζ^{fl} durch Γ^{bl} in einer beliebigen Flavourbasis.

Die Ergebnisse zeigen, dass die schnellen Eichwechselwirkungen bei der Dämpfung der langlebigen Mode im Vergleich zu den flavoursensitiven Dämpfungen vernachlässigt werden können. Außerdem überdämpfen sie die Flavouroszillationen, welche in der Leptogenese effektiv ausgefroren sind.

4.5.6. Kinetische Gleichungen für die Anzahldichten

Wir definieren die Ladungsdichtematrix als

$$q_{\ell ab} = \delta n_{\ell ab}^+ - \delta n_{\ell ab}^- . \quad (4.105)$$

Die schnellen Paarerzeugungs und Vernichtungsprozesse führen zu der Relation

$$\delta n_{\ell ab}^+ = -\delta n_{\ell ab}^- , \quad (4.106)$$

weshalb wir nur Gleichungen für die Ladungsdichtematrix (4.105) benötigen, welche in führender Ordnung die langlebige Mode ist. Wir definieren

$$\begin{aligned} \Gamma_{\ell ab}^{\text{fl}} = & \Gamma^{\text{an}} \left([h^\dagger h]_{ac} q_{\ell cb} + q_{\ell ac}^\dagger [h^\dagger h]_{cb} - h_{ac}^\dagger q_{\text{Rcd}} h_{db} - h_{ad}^\dagger q_{\text{Rdc}}^\dagger h_{cb} \right) \\ & + \Gamma^{\text{sc}} \left([h^\dagger h]_{ac} q_{\ell cb} + q_{\ell ac}^\dagger [h^\dagger h]_{cb} - h_{ac}^\dagger q_{\text{Rcd}} h_{db} - h_{ad}^\dagger q_{\text{Rdc}}^\dagger h_{cb} \right) \end{aligned} \quad (4.107)$$

für die flavoursensitiven Stöße. Damit erhalten wir die kinetischen Gleichungen

$$\frac{\partial q_{\ell ab}}{\partial \eta} = \sum_c [q_{\ell ac} \Xi_{cb} - \Xi_{ac} q_{\ell cb} - W_{ac} q_{\ell cb} - q_{\ell ac} W_{cb}] + 2S_{ab} - \Gamma_{\ell ab}^{\text{fl}} . \quad (4.108)$$

Genau wie im Modellsystem, sind die flavourblinden Wechselwirkungen Γ^{bl} für die langlebige Mode $q_{\ell ab}$ nicht relevant, während $\Delta\omega_{ab}^{\text{eff}}$ vernachlässigt werden kann, da es die stark unterdrückte Kombination $\delta n_{\ell ab}^+ + \delta n_{\ell ab}^-$ multipliziert. In einer zeitabhängigen Basis, in welcher ς_{ab} diagonal ist, müssen Ξ -Terme eingeführt werden, welche aus der Zeitabhängigkeit der Rotation entstehen.

Für rechtshändige Leptonen erhalten wir die analoge Gleichung

$$\frac{\partial q_{\text{Rab}}}{\partial \eta} = -\Gamma_{\text{Rab}}^{\text{fl}} , \quad (4.109)$$

mit

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{Rab}}^{\text{fl}} = & \Gamma^{\text{an}} \left([hh^\dagger]_{ac} q_{\text{Rcb}} + q_{\text{Rac}}^\dagger [hh^\dagger]_{cb} - h_{ac} q_{\ell cd} h_{db}^\dagger - h_{ad} q_{\ell dc}^\dagger h_{cb}^\dagger \right) \\ & + \Gamma^{\text{sc}} \left([hh^\dagger]_{ac} q_{\text{Rcb}} + q_{\text{Rac}}^\dagger [hh^\dagger]_{cb} - h_{ac} q_{\ell cd} h_{db}^\dagger - h_{ad} q_{\ell dc}^\dagger h_{cb}^\dagger \right) . \end{aligned} \quad (4.110)$$

Ähnliche Ergebnisse wurden in Ansätzen gefunden, welche die Dichtematrix in einer Besetzungsbasis betrachten [1]. Es gibt aber Unterschiede zu [1] in der kinetischen Gl. (4.108). Es ist jedoch nicht sicher, dass die Leptonladungsdichten zu unserem $q_{\ell ab}$ korrespondieren. Es sollten dieselben Argumente für die Flavourdämpfung gelten, wenn die Ladungsdichtematrix durch $\delta n_{\ell ab}^+ - \delta n_{\ell ba}^-$ gegeben ist. Die Unterschiede zeigen sich auch in der Arbeit von [82], in welcher die Gleichungen aus [1] numerisch gelöst werden und Flavouroszillationen eine wichtige Rolle spielen, insbesondere gegenüber den flavoursensitiven Dämpfungstermen.

4.6. Numerische Lösungen der kinetischen Gleichungen

Wir betrachten ein Szenario, in dem es nur zwei Leptonflavour gibt und nehmen an, dass h_τ die dominante Yukawakopplung ist. In der diagonalen Basis ist h dann gegeben durch

$$h = \begin{pmatrix} h_\tau & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.111)$$

Dies lässt sich trivial auf den Dreiflavourfall verallgemeinern, wenn die Muon- und Elektron-Yukawakopplungen klein gegenüber der Tau-Yukawakopplung sind. Dann kann das Elektron und Muon durch eine Linearkombination beschrieben werden, welche den zweiten Flavour unseres Modells bildet.

Gl. (4.108) ist invariant unter Flavourrotationen U , obwohl Gl. (4.72) und (4.73) nicht invariant sind, da in ihnen die Flavourszillationen in der diagonalen Basis beschrieben werden. Für q_{lab} sind Flavourszillationen aber durch flavourblinde Interaktionen überdämpft. Daher kann die Flavourbasis beliebig gewählt werden und wir verwenden im Folgenden die zeitunabhängige Basis der geladenen Leptonen, in welcher ς^{fl} diagonal ist.

In dieser Basis erhalten wir die Dämpfungsraten

$$\Gamma_\ell^{\text{fl}} = (\Gamma^{\text{an}} + \Gamma^{\text{sc}}) h_\tau^2 \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} q_\ell + q_\ell \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} q_{R11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right], \quad (4.112a)$$

$$\Gamma_R^{\text{fl}} = (\Gamma^{\text{an}} + \Gamma^{\text{sc}}) h_\tau^2 \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} q_R + q_R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} q_{\ell 11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (4.112b)$$

Im vollständig geflavourten Grenzfall, welcher durch $(\Gamma^{\text{an}} + \Gamma^{\text{sc}}) h_\tau^2 \gg H$ definiert ist, folgen aus den flavoursensitiven Dämpfungsraten die effektiven Zwangsgleichungen

$$q_{\ell 11} - q_{R11} = 0, \quad q_{\ell 12} = q_{\ell 21} = q_{R12} = q_{R21} = 0. \quad (4.113)$$

Dies entspricht der Erwartung, dass wenn alle Standardmodell-Yukawakopplungen im Gleichgewicht sind, die Leptonasymmetrien in die geladene Leptonbasis projiziert werden. In dieser Basis kann die Flavourkohärenz vernachlässigt werden.

Im ungeflavourten Grenzfall, wenn alle Yukawakopplungen ausgefroren sind $((\Gamma^{\text{an}} + \Gamma^{\text{sc}}) h_\tau^2 \ll H)$, verbleibt die Asymmetrie in der Basis, in welcher sie erzeugt wird. Flavourkohärenzen treten in dieser Basis nicht auf. In der Basis der geladenen Leptonen, in der wir arbeiten, müssen im ungeflavourten Grenzfall allerdings Flavourkohärenzen berücksichtigt werden.

Die Prozesse $\ell + \bar{R} \leftrightarrow \phi^*$ und $\ell + \phi \leftrightarrow R$ sind kinematisch verboten, wenn alle Teilchen masselos sind. Bei endlicher Temperatur gilt dies nicht mehr, da thermische Massen und finite Breiten induziert werden, oder alternativ Eichbosonenstrahlung auftritt. Dies wurde in Ref. [47] betrachtet um Γ^{sc} zu berechnen, aber wichtige t -Kanal Diagramme fehlen. Eine systematische Rechnung findet sich in Ref. [4]. Motiviert durch die Arbeit von [47], verwenden wir die Abschätzung

$$\Gamma^{\text{an}} + \Gamma^{\text{sc}} \approx 0.7 \alpha_W T / a(\eta) = 1.75 \times 10^{-2} T / a(\eta), \quad (4.114)$$

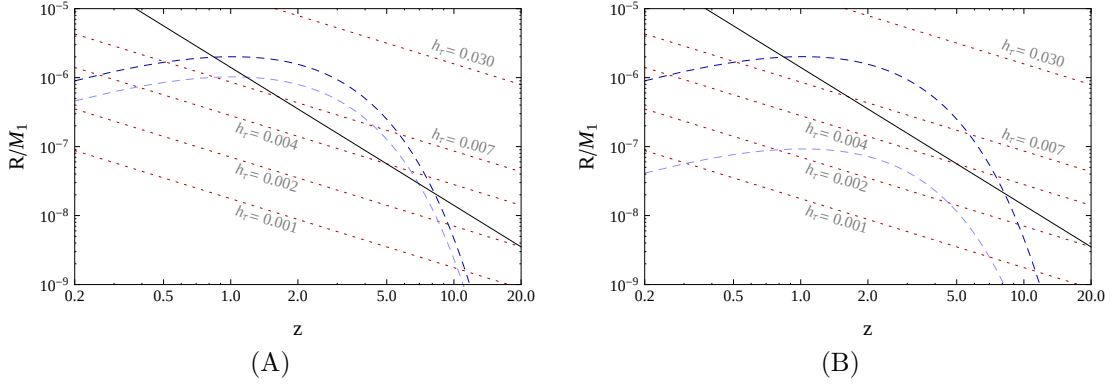
welche von der richtigen Größenordnung ist. Außerdem verwenden wir $\alpha_W = 1/40$ bei einer Skala von 10^{12} GeV.

Als Erstes lösen wir die Gleichungen für das rechthändige Neutrino N_1 , angegeben in Ref. [10]. Dazu ist eine klassische Boltzmann-Gleichungen analog zu Gl. (4.2) ausreichend. In [10] wird nur der Einflavour-Fall behandelt; die Verallgemeinerung auf den Multiflavour-Fall ist aber trivial durch Ersetzung von $|Y_1|^2 \rightarrow \sum_a |Y_{1a}|^2$ gegeben. Wir verwenden thermische Anfangsbedingungen für N_1 und die Massen $M_1 = 10^{12}$ GeV und $M_2 = 10^{14}$ GeV.

Für die Yukawakopplungen Y_{ia} betrachten wir zwei verschiedenen Szenarien:

$$Y = \begin{pmatrix} 1.4 \times 10^{-2} & 1 \times 10^{-2} \\ i \times 10^{-1} & 10^{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{Szenario (A)}, \quad (4.115)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1.4 \times 10^{-2} & 3 \times 10^{-3} \\ i \times 10^{-1} & 10^{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{Szenario (B)}.$$



Abbildungung 4.8.: Vergleich der Raten Γ_{ID}^a , H , $h_\tau^2(\Gamma^{\text{an}} + \Gamma^{\text{sc}})$ für die Szenarien (A) und (B). Die Farben sind H (durchgezogen, schwarz), Γ_{ID}^a (gestrichelt, dunkelblau), Γ_{ID}^2 (gestrichelt, hellblau) und $h_\tau^2(\Gamma^{\text{an}} + \Gamma^{\text{sc}})$ (von oben rechts nach unten links, gepunktet, rot), mit $h_\tau = 3 \times 10^{-2}$, 7×10^{-3} , 4×10^{-3} , 2×10^{-3} , 10^{-3} . Γ_{ID}^a ist die Washoutrate der individuellen Flavour, $h_\tau^2(\Gamma^{\text{an}} + \Gamma^{\text{sc}})$ die Rate der flavoursensitiven Dämpfung und H die Hubbletrate. Prozesse mit Raten deutlich größer als H sind im thermischen Gleichgewicht, Prozesse mit Raten wesentlich kleiner als H sind ausgefroren.

Zusätzlich variieren wir die Yukawakopplung h_τ , welche für die Relevanz der Flavoureffekte verantwortlich ist.

In Abbildung 4.8 sind die Reaktionsraten $\Gamma^{\text{fl}} = h_\tau^2(\Gamma^{\text{an}} + \Gamma^{\text{sc}})$ für verschiedene Werte von h_τ , der Washout der individuellen Flavour $\Gamma_{\text{ID}}^a = 2W_{aa}$ und die Expansionsrate des Universums H als Funktion des Verhältnisses von M_1 und der physikalischen Temperatur $z = a(\eta)M_1/T$ dargestellt.

In Szenario (A) entsteht ein mittlerer Washout in beiden Flavourn; der Hauptbeitrag der Asymmetrie entsteht zwischen $z \approx 3$ und dem Ausfrieren der Leptonasymmetrie bei $\Gamma_{\text{ID}} \approx H$. Wenn $\Gamma^{\text{fl}} \lesssim H \approx \Gamma_{\text{ID}}^a$ vor dem Ausfrieren gilt, sind wir im ungeflavourten Grenzfall und erwarten nur kleine generierte Asymmetrien [11]. Dies ist nach Abb. 4.8 der Fall für h_τ deutlich kleiner als 4×10^{-3} . Eine vollständig geflavourte Beschreibung sollte gelten, wenn $\Gamma^{\text{fl}} \gtrsim \Gamma_{\text{ID}}^a$ während der relevanten Zeiten, also h_τ größer als 7×10^{-3} , erfüllt ist.

Die numerischen Lösungen in Szenario (A) sind in Abbildung 4.9 dargestellt. Gezeigt werden die absoluten Werte der entropienormalisierten Asymmetrien

$$Y_{\ell ab} = 2g_w \frac{q_{\ell ab}}{2\pi^2 g_\star T^3}, \quad (4.116)$$

mit $g_\star = 106.75$. Die Ergebnisse bestätigen unsere Erwartungen bezüglich der vollständig geflavourten und ungeflavourten Beschreibung der Leptogenese. Für $h_\tau \lesssim 2 \times 10^{-3}$ ist die Leptonasymmetrie $\text{tr}[Y_\ell] = Y_{\ell 11} + Y_{\ell 22}$ fast unabhängig von h_τ und nichtdiagonale Elemente zerfallen erst nach dem Ausfrieren ($z \approx 10$). Im vollständig geflavourten Regime, für $h_\tau \gtrsim 3 \times 10^{-2}$ sind die Nichtdiagonalen bereits vor dem Ausfrieren stark unterdrückt. Dies rechtfertigt ihre Vernachlässigung, eine Abschätzung die im vollständig geflavourten Regime oft angewandt wird. In dem Übergangsbereich werden die vollen Gleichungen (4.108) benötigt.

Szenario (B) zeigt einen starken Washout für Y_{11} und einen schwachen Washout für Y_{12} . Die Ergebnisse sind in Abb. 4.10 angegeben. Da Γ_{ID}^2 deutlich kleiner ist, nimmt es auch Werte kleiner als h_τ an bevor die ungeflavourte Approximation gültig ist (siehe Abb. 4.8).

Im vollständig geflavourten Regime beobachten wir, dass ein Neutrino flavour durch den starken Washout gedämpft wird, während der Andere nur einen leichten Washout spürt. Im ungeflavourten Fall werden beide Flavour stark ausgewaschen. Dieses Verhalten der Flavoureffekte im Washout ist

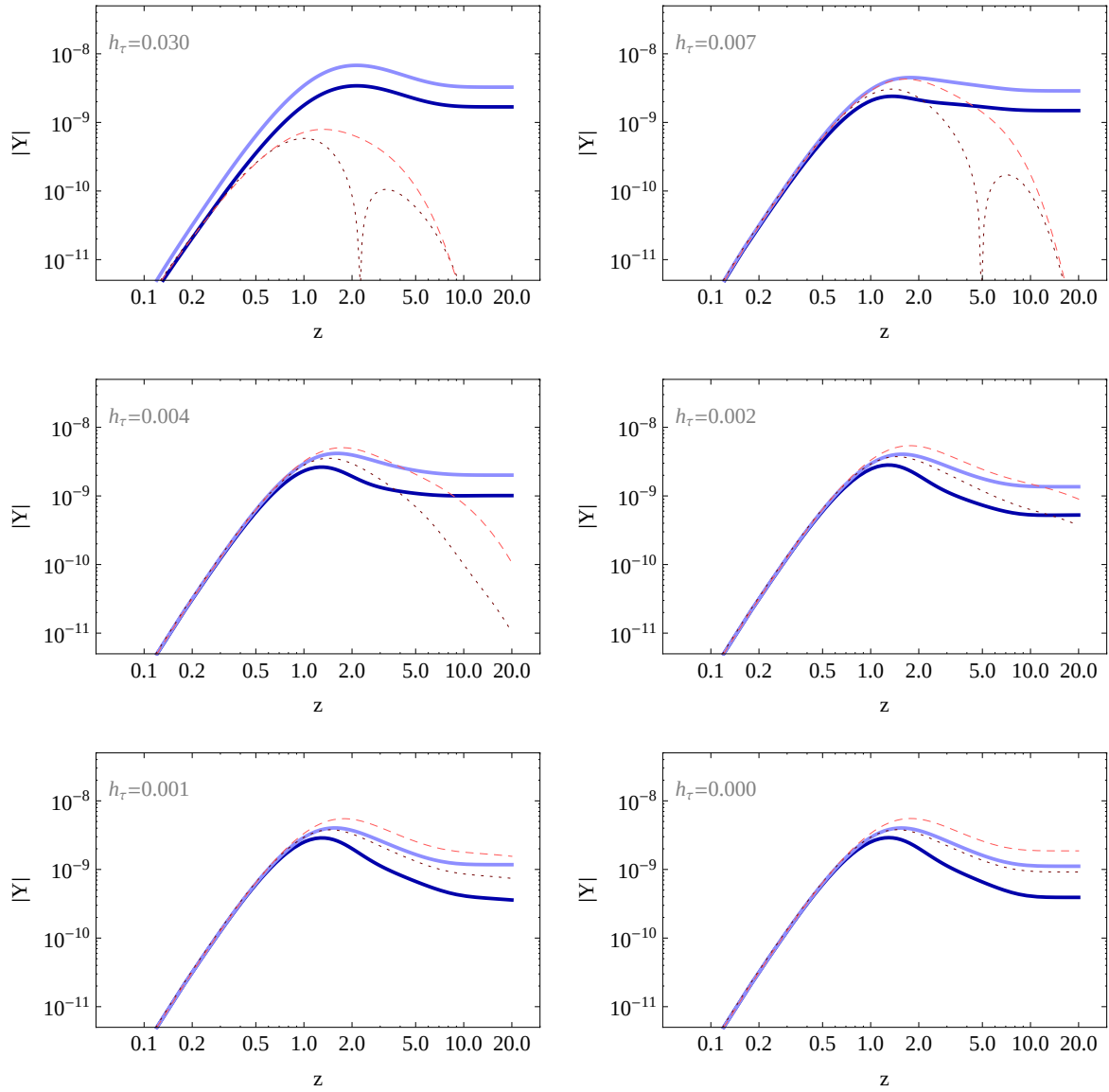


Abbildung 4.9.: Ergebnisse für Szenario (A) mit $h_\tau = 3 \times 10^{-2}$, 7×10^{-3} , 4×10^{-3} , 2×10^{-3} , 10^{-3} , 0 , von oben links nach unten rechts. Dabei sind $Y_{\ell 11}$ (durchgezogen, dunkelblau), $Y_{\ell 22}$ (durchgezogen, hellblau), $\text{Re}[Y_{\ell 12}]$ (gepunktet, dunkelrot), $\text{Im}[Y_{\ell 12}]$ (gestrichelt, hellrot). Die Dichten werden in der Flavoureigenbasis berechnet, in welcher aus starken Flavoureffekten kleine Nichtdiagonalen folgen.

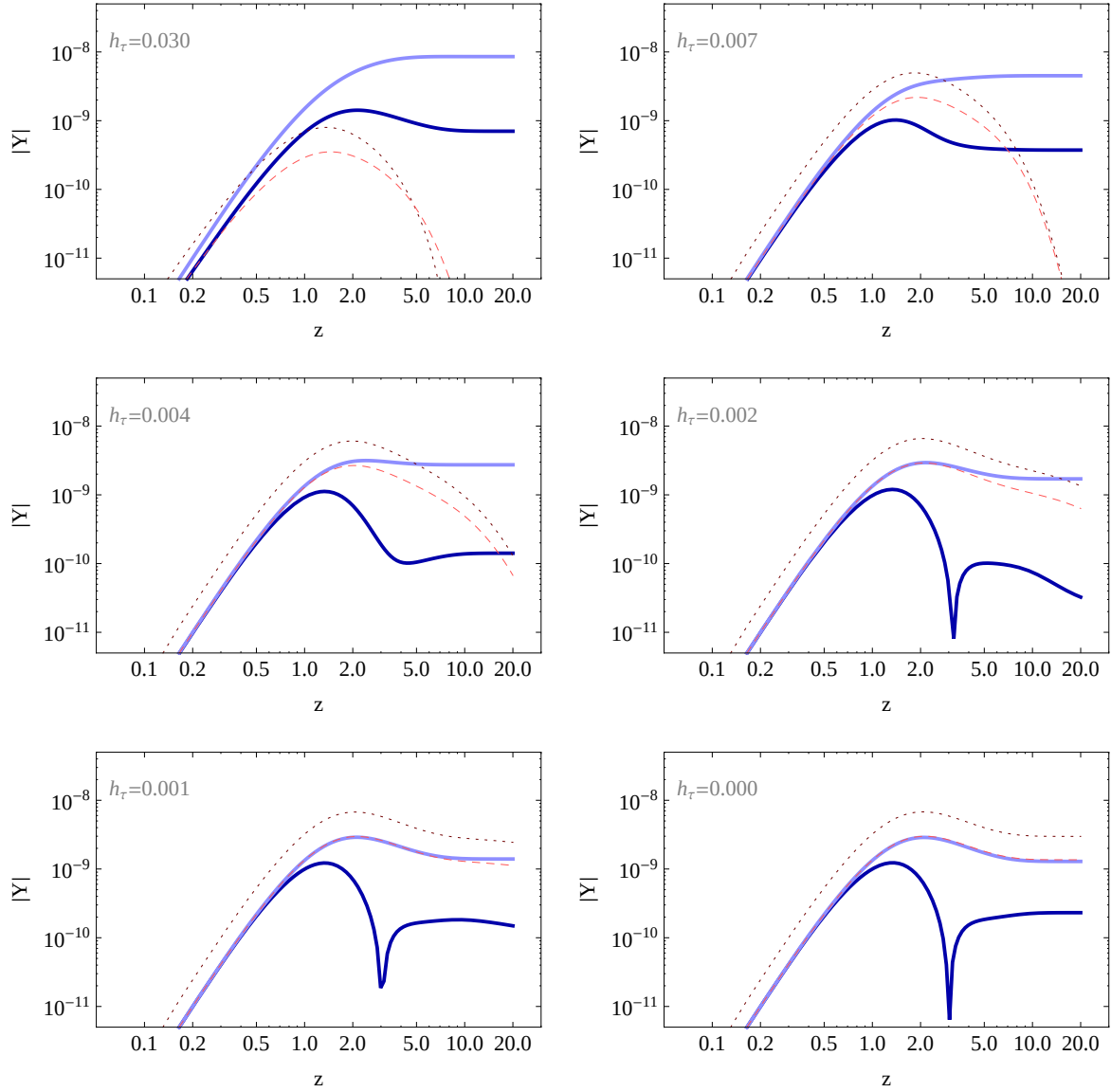


Abbildung 4.10.: Ergebnisse für Szenario (B) mit $h_\tau = 3 \times 10^{-2}$, 7×10^{-3} , 4×10^{-3} , 2×10^{-3} , 10^{-3} , 0 von oben links nach unten rechts. Die Farben sind $Y_{\ell 11}$ (durchgezogen, dunkelblau), $Y_{\ell 22}$ (durchgezogen, hellblau), $\text{Re}[Y_{\ell 12}]$ (gepunktet, dunkelrot), $\text{Im}[Y_{\ell 12}]$ (gestrichelt, hellrot).

bekannt [68, 1, 2] und kann durch die Beschreibung im vollständig geflavourten und ungeflavourten Regime verstanden werden.

Im vollständig geflavourten Fall werden nichtdiagonale Einträge durch flavoursensitive Wechselwirkungen schnell gedämpft. Daher sind die Washout-Raten proportional zu dem großen $|Y_{11}^2|$ bzw. dem kleinen $|Y_{12}^2|$.

Im ungeflavourten Fall, kann Y auf Dreiecksform gebracht werden

$$Y_{ia}^\Delta = Y_{ib} V_{ba}, \quad (4.117)$$

mit

$$V = \frac{1}{\sqrt{|Y_{21}|^2 + |Y_{22}|^2}} \begin{pmatrix} Y_{22} & Y_{21}^* \\ -Y_{21} & Y_{22}^* \end{pmatrix}. \quad (4.118)$$

Die Asymmetrie wird nicht in die Basis der geladenen Leptonen projiziert sondern verbleibt in der Linearkombination

$$\frac{1}{\sqrt{|Y_{21}|^2 + |Y_{22}|^2}} (Y_{21} \ell_1 + Y_{22} \ell_2), \quad (4.119)$$

in welcher sie erzeugt wird. Die Washout-Rate dieser Kombination ist durch

$$|Y_{12}^\Delta|^2 = \frac{1}{|Y_{21}|^2 + |Y_{22}|^2} (|Y_{11}|^2 |Y_{21}|^2 + |Y_{12}|^2 |Y_{22}|^2 + 2 \operatorname{Re} [Y_{11} Y_{21}^* Y_{12}^* Y_{22}]) \quad (4.120)$$

gegeben, weshalb beide Flavour stark ausgewaschen werden. Der Wechsel zwischen vollständig geflavourter und ungeflavourter Beschreibung erklärt so den Unterschied der Washout-Raten.

Zwischen dem vollständig geflavourten und ungeflavourten Regime müssen die vollen Gleichungen gelöst werden. Um die Größe des intermediären Regimes in Abhängigkeit von M_1 abzuschätzen, fixieren wir die τ -Yukawakopplung auf $h_\tau = 0.007$ und variieren die Masse $M_1 \rightarrow \alpha M_1$. Außerdem skalieren wir $Y_{11} \rightarrow \sqrt{\alpha} Y_{11}$, $Y_{12} \rightarrow \sqrt{\alpha} Y_{12}$ und $M_2 \rightarrow \alpha M_2$, um den Effekt des Quell- und Washout-Terms konstant zu halten. Diese Skalierung folgt aus Gl. (4.108), welche wir in der Form

$$zH \frac{\partial q_{\ell ab}}{\partial z} = \frac{1}{a} \left\{ \sum_c [q_{\ell ac} \Xi_{cb} - \Xi_{ac} q_{\ell cb} - W_{ac} q_{\ell cb} - q_{ac} W_{cb}] + 2S_{ab} - \Gamma_{\ell ab}^{\text{fl}} \right\} \quad (4.121)$$

aufschreiben. Die Terme auf der rechten Seite korrespondieren zu physikalischen und nicht konformen Reaktionsraten pro Einheitsvolumen. Bei festem z , $T/a(\eta) \rightarrow \alpha T/a(\eta)$, $H \rightarrow \alpha^2 H$ und $q_\ell \rightarrow \alpha^3 q_\ell$, skalieren alle Terme mit α^5 , außer dem Term $1/a \times \Gamma_{\ell}^{\text{fl}}$, welcher wie α^4 skaliert. Daher eignet sich diese Skalierung, um den Einfluss des flavoursensitiven Dämpfungsterms zu isolieren.

Wir lösen die Gleichungen für $10^{10} \text{ GeV} < M_1 < 2 \times 10^{14} \text{ GeV}$. Dieser Bereich enthält die Region, in welcher die Leptonen maximal ungeflavourt sind [11]. Außerdem berechnen wir die vollständig geflavourte Approximation, indem wir die Nichtdiagonalen zu Null setzen. Die beiden analytischen Grenzfälle werden mit der numerischen Simulation verglichen.

Die Ergebnisse sind in Abb 4.11 dargestellt. Wir stellen fest, dass beide Approximationen in ihrem Gültigkeitsbereich zu genauen Ergebnissen führen. Das intermediäre Regime, in dem die vollen Gleichungen gelöst werden müssen, ist gegeben durch $5 \times 10^{11} \text{ GeV} - 10^{13} \text{ GeV}$ in Szenario (A). Für Szenario (B), in welchem das ungeflavourte Verhalten erst für $M_1 \gtrsim 10^{14} \text{ GeV}$ gilt, ist der Übergangsbereich etwas größer. Dies liegt daran, dass die Bedingung für die ungeflavourte Beschreibung $\Gamma_{\text{ID}}^a \gtrsim h_\tau^2 (\Gamma^{\text{an}} + \Gamma^{\text{sc}})$ für $a = 1, 2$ in Szenario (B) erst für größere Werte von M_1 erfüllt ist. In der vollständig geflavourten Beschreibung von Szenario (B) wird der Flavour $a = 2$ nur schwach ausgewaschen. Deshalb entstehen relevante Beiträge schon zu früheren Zeiten und die vollständig geflavourte Beschreibung von Szenario (B) benötigt kleinere Werte von M_1 als Szenario (A). Die absoluten Grenzen können aber ungefähr eine Größenordnung durch die Unsicherheit in Γ^{fl} abweichen. Dies ist wahrscheinlich die Ursache für die numerische Abweichung zu Ref. [11], wo für $\Gamma^{\text{an}} + \Gamma^{\text{sc}} \approx 5 \times 10^{-3} T/a(\eta)$ die ungeflavourte Beschreibung bereits ab $M_1 \geq 5 \times 10^{11} \text{ GeV}$ gültig ist.

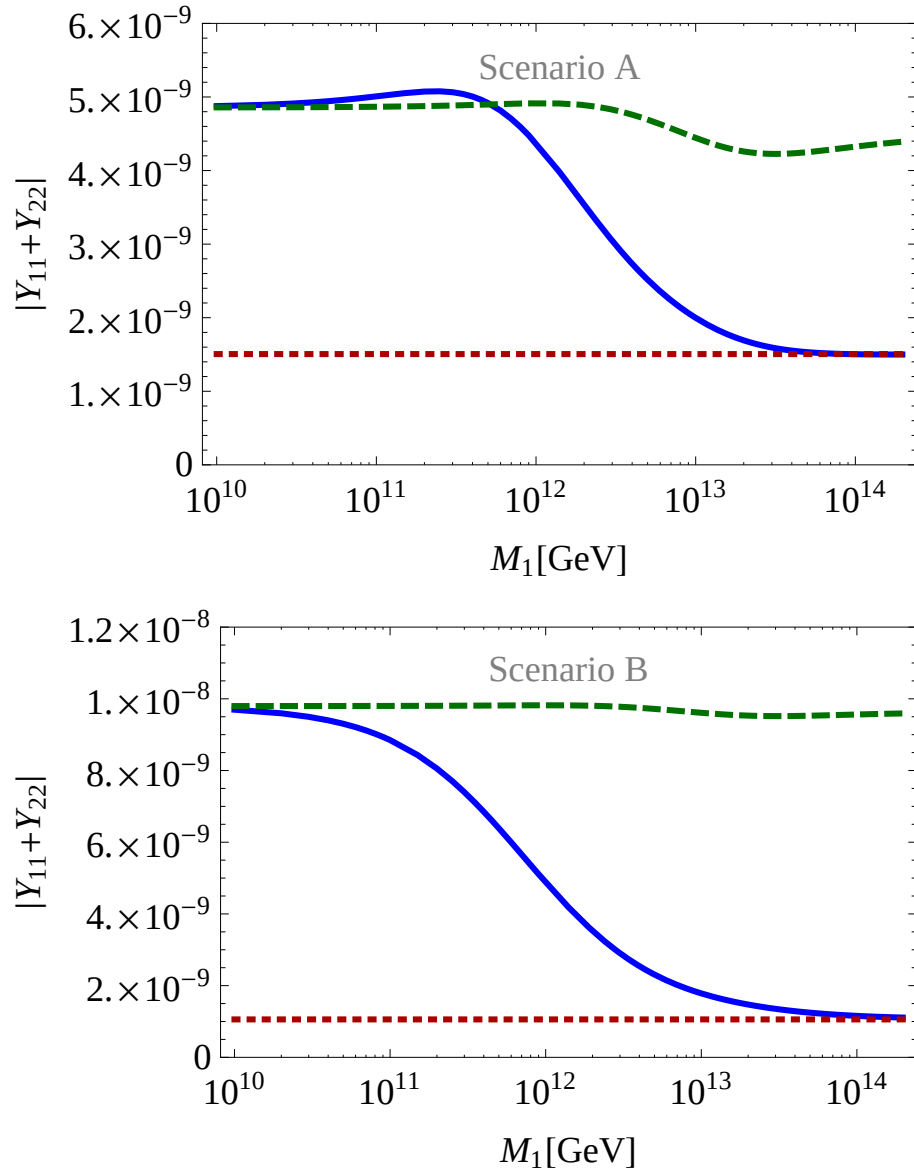


Abbildung 4.11.: Gezeigt ist die totale Leptonasymmetrie $\text{tr}[Y_\ell] = Y_{\ell 11} + Y_{\ell 22}$ als Funktion der rechtshändigen Neutrinomasse M_1 , für Parameter die Szenario (A) und (B) entsprechen. Das Ergebnis der vollen kinetischen Gleichungen (durchgezogen, blau) wird verglichen mit der ungeflavoured Approximation $h_\tau = 0$ (gepunktet, rot) und der vollständig gefflavoured Approximation (gestrichelt, grün).

4.7. Ausblick

Die kinetischen Gleichungen der Leptogenese inklusive Flavour wurden aus dem CTP-Formalismus abgeleitet und gelöst. Dies ermöglicht eine Berechnung der Leptonasymmetrie auch in Regionen, die weder vollständig geflavourt noch ungeflavourt sind. Vorher waren in dieser Region nur Extrapolationen aus Modellrechnungen bekannt [1]. Das Hauptergebnis Gl. (4.108) ist innerhalb des CTP-Formalismus aus dem Lagrangian (4.1) hergeleitet und entspricht den Gleichungen aus [1]. Unser Ergebnis beinhaltet die folgenden Verbesserungen:

- Der Effekt der thermischen Dispersionsrelationen, welche Flavouroszillationen induzieren, wird berücksichtigt.
- Schnelle Paarerzeugungs- und Vernichtungsreaktionen aus Eichwechselwirkungen überdämpfen die Flavouroszillationen, im Gegensatz zu den Ergebnissen aus [1, 82].
- Die Washout-, Quell- und Dämpfungsterme werden im CTP-Formalismus abgeleitet. Manche beruhen auf den Effekten finiter Breiten, was die Berechnung problematisch macht. Diese haben wir für die numerischen Studien abgeschätzt.

Um genauere Vorhersagen machen zu können, müssen einige Punkte der Rechnung erweitert werden. Es müssen sogenannte Beobachterprozesse [15, 64], welche Ladungen zwischen ℓ_a und ϕ und anderen Standardmodellteilchen transferieren, berücksichtigt werden. Außerdem werden finite Breiten nur in einer Abschätzung behandelt. Diese thermischen Effekte sind aber notwendig, da sie wichtige Prozesse kinematisch erst ermöglichen. Der CTP-Formalismus erlaubt es, diese Effekte systematisch zu beschreiben.

5. Geflavourte Quantenboltzmannsgleichungen im cQPA-Formalismus

5.1. Einleitung

Ein neuer Formalismus zum Transport von kohärenten Quantenfeldern, basierend auf einer Entwicklung der dynamischen Zweipunktkorrelationsfunktion, wurde in [42, 38, 39, 40, 41] eingeführt. In [40] wurde außerdem beobachtet, dass in Systemen mit speziellen Raumzeitsymmetrien die Information der nichtlokalen Teilchen-Antiteilchen-Kohärenz in spektralen Schalen der Zweipunktfunktion mit Impulsen jenseits der Massenschalen enthalten ist. In der führenden Ordnung der Gradientenentwicklung wird der Ansatz der singulären Schalen coherent Quasi Particle Approximation (cQPA) genannt. Mit ihr können konsistente Transportgleichungen für die Momente der Korrelationsfunktionen aufgeschrieben werden.

Eine vollständige Beschreibung der Theorie existiert bisher nur für nicht mischende skalare oder fermionische Felder [41]. In der Natur gibt es allerdings viele Probleme, welche mischende Felder, deren Massenbasis nicht mit der Wechselwirkungsbasis übereinstimmt, benötigen. Zum Beispiel Neutrinooszillationen im frühen Universum [5], elektroschwache Baryogenese [48, 19, 46, 72, 73] und geflavourte Leptogenese [9, 24, 32, 35, 67]. Wir fügen dem cQPA-Formalismus Multiflavourmischung hinzu und erhalten geflavourte Quantentransportgleichungen.

In diesem Abschnitt präsentiere ich die Ergebnisse aus der Veröffentlichung mit Koautoren [31]. Die Publikation beschreibt den geflavourten cQPA-Formalismus im Allgemeinen. Mein Beitrag sind die Rechnungen im skalaren Fall, welche in dieser Arbeit beschrieben werden. In Kapitel 5.2 betrachte ich die Schalenstruktur der cQPA für skalare Felder und leite die kinetischen Gleichungen ab; die Rechnungen für fermionische Felder sind in [31] zu finden. Stoßintegrale, welche Kohärenzfunktionen beinhalten, müssen resumiert werden, da diese schnell oszillieren und ihre Ableitungen nicht, wie in der Gradientenentwicklung üblich, trunziert werden können [37, 42]. Deshalb leite ich einen resumpten Stoßterm her. In Kapitel 5.3 berechne ich Gradientenkorrekturen zu der singulären Schalenstruktur der cQPA. In Kapitel 5.4 werden schließlich die Zustände, welche Quantenkohärenz beinhalten, explizit im Operatorformalismus konstruiert.

5.2. cQPA für skalare Felder

Zunächst stellen wir den theoretischen Hintergrund vor, wobei wir uns hier kurz fassen, da die Herleitung weitestgehend analog zu Kapitel 4.2.1 ist. Wir verwenden den Schwinger-Keldysh-Ansatz [76, 49] der Nichtgleichgewichtsquantenfeldtheorie [17] und stellen die Kadanoff-Baym-Gleichungen für die Wightmanfunktionen $i\Delta^<(u, v) = \langle \phi^\dagger(v)\phi(u) \rangle$ und $i\Delta^>(u, v) = \langle \phi(u)\phi^\dagger(v) \rangle$ auf. Um die Hierarchie der Ableitungen zu erhalten, transformieren wir in den Wigner-Raum:

$$\Delta(k, x) \equiv \int d^4r e^{ik \cdot r} \Delta(x + \frac{r}{2}, x - \frac{r}{2}), \quad (5.1)$$

mit $x \equiv (u + v)/2$, der gemittelten Koordinate und k , dem internen Impuls, welcher der relativen Koordinate $r \equiv u - v$ entspricht. Die Bewegungsgleichungen sind nun, analog zur Rechnung der Leptogenese in Kapitel 4.2.1 durch die Kadanoff-Baym-Gleichungen [72]

$$\left(k^2 - \frac{1}{4} \partial_x^2 + ik \cdot \partial_x - m^2 e^{-\frac{i}{2} \overleftrightarrow{\partial}_x \partial_k} \right) \Delta^{<,>} - e^{-i\Diamond} \{ \Pi_H \} \{ \Delta^{<,>} \} - e^{-i\Diamond} \{ \Pi^{<,>} \} \{ \Delta_H \} = \mathcal{C}_{\text{coll}} \quad (5.2)$$

gegeben, mit $\Delta_H = \Delta_F - (\Delta^> + \Delta^<)/2$ und $\Pi_H = \Pi_F - (\Pi^> + \Pi^<)/2$, wobei Δ_F und Π_F die zeitgeordnete Greenfunktion und Selbstenergie bezeichnen. Der Stoßterm lautet

$$\mathcal{C}_{\text{coll}} = \frac{1}{2} e^{-i\Diamond} (\{\Pi^>\}\{\Delta^<\} - \{\Pi^<\}\{\Delta^>\}) , \quad (5.3)$$

mit dem $\Diamond$ -Operator:

$$\Diamond\{f\}\{g\} = \frac{1}{2} [\partial_x f \cdot \partial_k g - \partial_k f \cdot \partial_x g] , \quad (5.4)$$

welcher eine Verallgemeinerung der Poissonklammer ist. Die Komponenten der Selbstenergie Π sind im Allgemeinen komplizierte Funktionale der Korrelatoren $\Delta^{<,>}$, welche in einem Trunkierungsschema berechnet werden müssen.

5.2.1. Näherungen

Im Vergleich zu dem Standardansatz [17, 72, 20, 84] ist die Idee der cQPA, die Annahme der approximativen Translationsinvarianz aufzugeben. Dies erlaubt singuläre Schalen, deren Lösungen auf Quantenskalen $\sim k$ oszillieren und nichtlokale Quantenkohärenz beschreiben. Wir verwenden die folgenden Approximationen der Kadanoff-Baym-Gleichungen (5.2):

- 1) Wir vernachlässigen Terme $\propto \Delta_h$. Diese Näherung wird in der Standardtheorie ebenfalls verwendet und gilt im schwach wechselwirkenden Grenzfall. Das Vernachlässigen dieser Terme entspricht der Vernachlässigung der finiten Breite.
- 2) Wir vernachlässigen Terme $\propto \Pi_h$, welche die Dispersionsrelation der Quasiteilchen modifizieren, wie in Kapitel 4.3 gezeigt.
- 3) Wir nehmen $\vec{\nabla} S^< = 0$, also den räumlich homogenen Fall an. Diese Näherung ist wichtig, da die einfachen kohärenten Lösungen nur in einem System mit speziellen Raumzeitsymmetrien auftreten [40].

Nach Anwendung dieser Approximationen zerlegen wir die Kadanoff-Baym-Gleichungen (5.2) in ihren hermiteschen und antihermiteschen Anteil:

$$\left(k^2 - \frac{1}{4} \partial_t^2 - \cos\left(\frac{1}{2} \partial_t^m \partial_{k_0}^\Delta\right) \frac{1}{2} \{m^2, \circ\} + \sin\left(\frac{1}{2} \partial_t^m \partial_{k_0}^\Delta\right) \frac{i}{2} [m^2, \circ] \right) i\Delta^{<,>} = -\mathcal{C}_A , \quad (5.5)$$

$$\left(k_0 \partial_t + \cos\left(\frac{1}{2} \partial_t^m \partial_{k_0}^\Delta\right) \frac{i}{2} [m^2, \circ] + \sin\left(\frac{1}{2} \partial_t^m \partial_{k_0}^\Delta\right) \frac{1}{2} \{m^2, \circ\} \right) i\Delta^{<,>} = \mathcal{C}_H , \quad (5.6)$$

mit $\mathcal{C}_H \equiv (\mathcal{C}_{\text{coll}} + \mathcal{C}_{\text{coll}}^\dagger)/2$ und $\mathcal{C}_A \equiv (\mathcal{C}_{\text{coll}} - \mathcal{C}_{\text{coll}}^\dagger)/(2i)$ und der Definition $[X, \circ]Y \equiv [X, Y]$. Die Masse m^2 und $i\Delta^{<,>}$, sowie $i\Pi^{<,>}$ sind dabei hermitesche $N \times N$ Matrizen in den Flavourindizes.

Um die singuläre Schalenstruktur zu bestimmen, wenden wir weitere Näherungen an:

- 4) Wir entwickeln die Gleichungen (5.5) und (5.6) in nullter Ordnung in Π und den Massengradienten, um die singulären Schalen zu bestimmen. Dabei sind Terme $\propto \partial_t \Delta^{<,>}$ von führender Ordnung, da wir nicht annehmen, dass die Wightmanfunktionen nur langsam variieren.
- 5) Die singuläre cQPA-Struktur wird dann als Ansatz in die Gleichungen (5.5) und (5.6) eingesetzt. Diese entwickeln wir zur ersten Ordnung in Kopplungen und den Massengradienten, um die Bewegungsgleichungen abzuleiten.

Dies sind die Standardnäherungen, welche in der kinetischen Theorie verwendet werden. Wir nehmen aber zusätzlich auch keine Translationsinvarianz an, weshalb wir die singuläre cQPA-Phasenraumstruktur mit den Onshell-Funktionen $f_{ijh\pm}^\phi$ und $f_{ijhc\pm}^\phi$ erhalten.

5.2.2. Phasenraumstruktur

Wir berechnen die Kadanoff-Baym-Gleichungen (5.5-5.6) in nullter Ordnung in Kopplungen und $\partial_t m$, um die singuläre Phasenraumstruktur zu berechnen. Ableitungen $\partial_t \Delta^{<, >}$ werden nicht vernachlässigt, da wir nicht annehmen, dass die Wightmanfunktionen approximativ translationsinvariant sind. Ohne diese Ableitungsterme würden wir lediglich die bekannten Massenschalen finden.

Sowohl die hermitesche als auch die antihermitesche Gleichung enthält für skalare Felder in nullter Ordnung Zeitableitungen. Wir müssen beide Gleichungen kombinieren, um eine algebraische Zwangsgleichung zu erhalten. Dazu lösen wir die stoßfreie hermitesche Gleichung (5.6) in führender Ordnung nach der Zeitableitung auf und erhalten $\partial_t \Delta^{<, >} = -\frac{i}{2k_0} [m^2, \Delta^{<, >}]$. Dies verwenden wir um die zweite Ableitung $\partial_t^2 \Delta^{<, >}$ in Gl. (5.5) zu berechnen und erhalten in führender Ordnung die Zwangsgleichung:

$$\left(k_0^2 - \mathbf{k}^2 - \frac{1}{2} \{m^2, \circ\} + \frac{1}{16k_0^2} [m^2, [m^2, \circ]] \right) i\Delta^{<, >} = 0. \quad (5.7)$$

Jetzt transformieren wir in die Massenbasis: $m^2 \rightarrow m_d^2 = U m^2 U^\dagger$, mit der unitären Matrix, welche die hermitesche Massenmatrix diagonalisiert, U . Die Korrelatoren transformieren dann mit $\Delta \rightarrow \Delta_d = U \Delta U^\dagger$. Die Zwangsgleichung (5.7) in der Massenbasis lautet

$$\left((k_0^2 - \mathbf{k}^2 - M_{ij}^2) k_0^2 + \frac{1}{4} (\Delta m_{ij}^2)^2 \right) i\Delta_{ij}^{<, >} = 0, \quad (5.8)$$

mit $M_{ij}^2 \equiv (m_i^2 + m_j^2)/2$ und $\Delta m_{ij}^2 \equiv (m_i^2 - m_j^2)/2$. Wir erhalten die Dispersionsrelationen:

$$k_0 = \pm \frac{1}{2} (\omega_i + \omega_j) \equiv \pm \bar{\omega}_{ij}, \quad \text{oder} \quad k_0 = \pm \frac{1}{2} (\omega_i - \omega_j) \equiv \pm \Delta \omega_{ij}, \quad (5.9)$$

mit $\omega_i \equiv (\mathbf{k}^2 + m_i^2)^{1/2}$. Die Lösung von Gleichung (5.8) für $\Delta_{ij}^{<, >} \equiv (\Delta_d^{<, >})_{ij}$ ist also entweder proportional zu $\delta(k_0 \mp \bar{\omega}_{ij})$ oder $\delta(k_0 \mp \Delta \omega_{ij})$, wobei die Schalen $\delta(k_0 \mp \bar{\omega}_{ij})$ die klassischen Massenschalen sind und die Schalen $\delta(k_0 \mp \Delta \omega_{ij})$ die neuen kohärenten Schalen darstellen, welche die Teilchen-Antiteilchen-Flavourkohärenz beschreiben. Da es keine weiteren algebraischen Einschränkungen gibt, können wir die cQPA-Propagatoren $\Delta_{ij}^{<, >}$ durch

$$i\Delta_{ij}^{<, >}(k, t) = \frac{2\pi \bar{\omega}_{ij}}{2\omega_i \omega_j} \sum_{\pm} \left(\pm f_{ijm\pm}^{\phi <, >} \delta(k_0 \mp \bar{\omega}) + f_{ijc\pm}^{\phi <, >} \delta(k_0 \mp \Delta \omega) \right) \quad (5.10)$$

parametrisieren, mit den Onshell-Funktionen $f_{ijm\pm}^{\phi <, >}$ und $f_{ijc\pm}^{\phi <, >}$. Diese Schalenstruktur für skalare Felder wurde auch in [18] beobachtet.

In führender Ordnung folgt die Spektralfunktion $\mathcal{A}^\phi = \frac{i}{2} (\Delta^> - \Delta^<)$ den selben Kadanoff-Baym-Gleichungen (5.5, 5.6) und die Lösung ist von der gleichen Form wie Gl. (5.10). Zusätzlich erfüllt die Spektralfunktion aber auch die spektrale Summenregel

$$\int \frac{dk_0}{\pi} \left(k_0 + \frac{i}{2} \partial_t \right) \mathcal{A}_{ij}^\phi(k, t) = \delta_{ij}, \quad (5.11)$$

welche aus den Equal-Time-Kommutationsrelationen der skalaren Felder ϕ_i folgt. Diese Relation fixiert die Werte der Onshell-Funktionen vollständig (siehe Ref. [39]): $f_{ijm\pm}^{\phi \mathcal{A}} = \frac{1}{2} \delta_{ij}$, $f_{ijc\pm}^{\phi \mathcal{A}} = 0$. Die Spektralfunktion nimmt dann ihre Standardform

$$\mathcal{A}_{ij}^\phi = \pi \operatorname{sgn}(k_0) \delta(k^2 - m_i^2) \delta_{ij} \quad (5.12)$$

an. Dies liefert zusammen mit der Definition $2i\mathcal{A}^\phi = \Delta^< - \Delta^>$ eine Relation zwischen den Funktionen $f_{ij\pm}^{\phi >}$ und $f_{ij\pm}^{\phi <}$:

$$f_{ijm\pm}^{\phi >} = \delta_{ij} + f_{ijm\pm}^{\phi <}, \quad f_{ijc\pm}^{\phi >} = f_{ijc\pm}^{\phi <}, \quad (5.13)$$

welche wir im Stoßterm verwenden. Diese Form der Spektralfunktion bestätigt die Interpretation der kohärenten Schalen, welche die Teilchen-Antiteilchen-Kohärenz beschreiben.

5.2.3. Bewegungsgleichungen

Wir leiten die Bewegungsgleichungen der Onshell-Funktionen f_α ab, indem wir die cQPA-Schalen (5.10) als Ansatz in die Kadanoff-Baym-Gleichungen (5.5-5.6) einsetzen. Die Onshell-Funktionen können durch Integration mit verschiedenen Gewichtsfunktionen aus $\Delta_{ij}^<$ extrahiert werden. Wir verwenden dazu die Momente:

$$\rho_n(k, t) = \int \frac{dk_0}{2\pi} k_0^n i \Delta_d^<(k, t). \quad (5.14)$$

Mit der Parametrisierung (5.10) erhalten wir folgende Relationen zwischen den Momenten und den Onshell-Funktionen:

$$\rho_n = \frac{\bar{\omega}}{2(\bar{\omega}^2 - \Delta\omega^2)} \left(\bar{\omega}^n f_{m+}^\phi - (-\bar{\omega})^n f_{m-}^\phi + \Delta\omega^n f_{c+}^\phi + (-\Delta\omega)^n f_{c-}^\phi \right). \quad (5.15)$$

Um die Notation kompakt zu halten unterdrücken wir die Flavourindizes. Ihre Multiplikation ist trivial durch $(AB)_{ij} = A_{ij}B_{ij}$ ohne Summationen über wiederholte Flavourindizes definiert.

Anstatt die Bewegungsgleichungen der Wightmanfunktionen $\Delta^{<, >}$ zu lösen, ist es praktisch, die Bewegungsgleichungen der Momente ρ_n zu verwenden. Diese erhalten wir, indem wir das erste Moment von Gl. (5.5) und die Momente von Gl. (5.6) berechnen. Anstelle der partiellen Differentialgleichungen für $\Delta^{<, >}$, erhalten wir eine Hierarchie von normalen Differentialgleichungen der Momente. Die Gleichungen der niedrigsten Momente bilden ein geschlossenes System, unabhängig von den höheren Momenten:

$$\begin{aligned} D_t^2 \rho_0 - 4\rho_2 + 4(\bar{\omega}^2 + \Delta\omega^2)\rho_0 &= 4\langle \mathcal{C}_{Ad} \rangle, \\ D_t \rho_1 + 2i\Delta\omega\bar{\omega}\rho_0 &= \langle \mathcal{C}_{Hd} \rangle, \\ D_t \rho_2 + 2i\Delta\omega\bar{\omega}\rho_1 - (\bar{\omega}\bar{\omega}' + \Delta\omega\Delta\omega')\rho_0 &= \langle k_0 \mathcal{C}_{Hd} \rangle, \end{aligned} \quad (5.16)$$

mit $\mathcal{C}_{(H,A)d} \equiv U\mathcal{C}_{H,A}U^\dagger$ und der kovarianten Ableitung D_t aus der Transformation in die Massenbasis:

$$D_t \rho_n \equiv \partial_t \rho_n - i[\Theta', \rho_n] \quad \text{mit} \quad \Theta' \equiv iU\partial_t U^\dagger. \quad (5.17)$$

Wir müssen nur das geschlossene Differentialgleichungssystem der niedrigsten Momente lösen. Die höheren Momente hängen ihrerseits nur von niedrigeren Momenten ab und können rekursiv durch Integration aus den Momenten ρ_0 , ρ_1 und ρ_2 berechnet werden.

Die vollständige Information des Systems entspricht der Kenntnis aller Momente. Anstelle diese explizit zu berechnen, kann aus der algebraischen Zwangsgleichung, durch Integration mit verschiedenen Gewichten, eine analytische und rekursive Relation zwischen niedrigen und höheren Momenten abgeleitet werden (siehe Kapitel 5.3). Diese Relation wird implizit angenommen, wenn wir die singulären Schalen verwenden, welche die Zwangsgleichung (5.8) erfüllen. Dies benutzen wir, indem wir die Onshell-Funktionen nach Gl. (5.15) aus den Momenten berechnen und die Phasenraumparametrisierung (5.10) annehmen.

Anstelle Gleichungen für die Momente aufzustellen und danach die f -Funktionen zu berechnen, können wir auch direkt die Evolutionsgleichungen der Onshell-Funktionen ableiten. Um ein geschlossenes Gleichungssystem für die vier Onshell-Funktionen zu erhalten, benötigen wir mindestens vier Momente, oder drei Momente und die Ableitung eines Moments. Da Gleichung (5.16) von zweiter Ordnung in Zeitableitungen ist, ist die natürliche Wahl die Verwendung der drei niedrigsten Momente $\rho_{0,1,2}$ und der Ableitung $\partial_t \rho_0$.

Die Verbindung zwischen den Momenten und Onshell-Funktionen ist in Gl. (5.15) angegeben. Die Relation der Onshell-Funktion zur Ableitung $\partial_t \rho_0$ ist problematischer, da wir die Ableitungen $\partial_t f_\alpha$ benötigen. Dabei reicht es aus, die führende Ordnung der Ableitungen zu betrachten, da wir auch die Zwangsgleichung nur in dieser Ordnung berechnet haben.

Die Gleichungen führender Ordnung können durch Lösung der Bewegungsgleichungen (5.16) in nullter Ordnung für vier beliebige Momente, zum Beispiel $\rho_{1,2,3,4}$, unter Benutzung der Relation (5.15) abgeleitet werden:

$$\partial_t f_{ijm\pm}^\phi = \mp 2i\Delta\omega_{ij} f_{ijm\pm}^\phi + \mathcal{O}^1 \quad \text{und} \quad \partial_t f_{ijc\pm}^\phi = \mp 2i\bar{\omega}_{ij} f_{ijc\pm}^\phi + \mathcal{O}^1. \quad (5.18)$$

In nullter Ordnung oszilliert $f_{ijc\pm}^\phi$ mit der großen Frequenz $\bar{\omega}_{ij}$, während $f_{ijm\pm}^\phi$ nur mit der kleinen Frequenz $\Delta\omega_{ij}$ oszilliert und näherungsweise translationsinvariant ist.

Mit den Bewegungsgleichungen nullter Ordnung für $\partial_t f$ erhalten wir schließlich die Relation

$$\begin{pmatrix} \rho_0 \\ \partial_t \rho_0 \\ \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \frac{\bar{\omega}}{2(\bar{\omega}^2 - \Delta\omega^2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2i\Delta\omega & -2i\Delta\omega & -2i\bar{\omega} & 2i\bar{\omega} \\ \bar{\omega} & \bar{\omega} & \Delta\omega & -\Delta\omega \\ \bar{\omega}^2 & -\bar{\omega}^2 & \Delta\omega^2 & \Delta\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{m+}^\phi \\ f_{m-}^\phi \\ f_{c+}^\phi \\ f_{c-}^\phi \end{pmatrix} + \mathcal{O}^1, \quad (5.19)$$

welche die niedrigen Momente invertierbar mit den Onshell-Funktionen verbindet. Dabei ist jeder Eintrag der Matrix selber eine $N \times N$ -Matrix in den Flavourindizes ij ; die Matrixmultiplikation ist trivial definiert (z.B. $(\rho_1)_{ij} = (\bar{\omega}_{ij}^2 / (2(\bar{\omega}_{ij}^2 - \Delta\omega_{ij}^2))) f_{ijm+}^\phi + \dots$).

Jetzt kann die Relation (5.19) verwendet werden, um aus den Gleichungen für die Momente, Gleichungen für die Onshell-Funktionen herzuleiten. Dazu setzen wir die Relationen in die Bewegungsgleichungen (5.16) ein. Dieser Wechsel der Variablen ist allerdings problematisch, da die Gleichungen der Momente exakt in der Gradientenentwicklung sind, während die Relation (5.15) nur in nullter Ordnung gilt. Um den Verlust an Genauigkeit zu vermeiden, können einerseits die Bewegungsgleichungen der Momente, anstelle der Gleichungen der f -Funktionen gelöst werden oder andererseits die Relation zwischen den Onshell-Funktionen und den Momenten in erster Ordnung hergeleitet werden. Der Einfachheit halber berechnen wir im Folgenden die Momente und benutzen die f -Funktionen nur im Stoßterm, in welchem die Relationen in nullter Ordnung ausreichend sind, da dieser selbst von mindestens erster Ordnung in den Kopplungen ist.

Außerdem existiert eine inhärente Ambiguität in der Wahl der Momente, welche für die Invertierung verwendet werden, oder allgemeiner, in der Wahl der Gewichtsfunktionen. Leitet man die Gleichungen für die f -Funktionen aus höheren Momenten her, z.B. $\rho_{1,2,3,4}$, sind diese nur bis zur nullten Ordnung in Gradienten und Kopplungen konsistent, da der singuläre Korrelator (5.10) und die Relationen (5.19) zwischen den f -Funktionen und den Momenten nur in nullter Ordnung gültig sind. Die Wahl der niedrigsten Momente ist aber im folgendem Sinne natürlich: Die Verwendung des nullten Moments zur Integration der Kadanoff-Baym-Gleichungen (5.5-5.6) korrespondiert dazu, keine externe Information in die Gleichungen einzubinden (siehe auch die Diskussion in Kapitel 5 aus Ref. [40]), da als Gewichtsfunktion die Konstante verwendet wird. Daraus erhalten wir die beiden ersten Gleichungen aus (5.16). Diese Integration generiert aber das Moment ρ_2 in den integrierten antihermiteschen Gleichungen und der einzige Weg ein geschlossenes Gleichungssystem zu erhalten ist es, das erste Moment der hermiteschen Gleichung zu betrachten. Dies liefert die letzte Gleichung in (5.16).

Um konsistente Bewegungsgleichungen der Onshell-Funktionen in erster Ordnung aufzuschreiben, benötigen wir die Relation (5.19) in linearer Ordnung. Um diese abzuleiten ist es nötig, die singulären cQPA-Schalen zu verlassen und allgemeinere Phasenraumstrukturen des Propagators zu betrachten, wie in Kapitel 5.3 gezeigt. Hier reicht es aus, vorerst nur die singulären cQPA-Schalen zu betrachten, da wir die f -Funktionen nur im Stoßterm verwenden.

5.2.4. Resumierter skalarer Stoßterm

Wir müssen die Stoßintegrale aus Gl. (5.16) durch die Onshell-Funktionen $f_\pm^\phi$ und $f_{c\pm}^\phi$ ausdrücken, um den Stoßterm zu berechnen. Mit den Relationen (5.19) können diese dann durch Momente ausgedrückt werden, so dass wir ein geschlossenes System erhalten. Das α -te Moment des Stoßintegrals in der Massenbasis lautet vor der Gradientenentwicklung:

$$\langle \mathcal{C}_\alpha \rangle = \int \frac{dk_0}{2\pi} k_0^\alpha U(t) \frac{1}{2} e^{-i\Diamond} (\{\Pi^>(k, t)\} \{\Delta^<(k, t)\} - \{\Pi^<(k, t)\} \{\Delta^>(k, t)\}) U^\dagger(t), \quad (5.20)$$

mit $\alpha = 0, 1$. Hier tritt folgendes Problem auf: Die schnell oszillierenden Kohärenzfunktionen erzeugen einen Term führender Ordnung $\mathcal{O}^1$ in jeder Ordnung der naiven $\Diamond$ -Gradientenentwicklung des Stoßterms.

Um die oszillatorischen Gradienten in der $\diamond$ -Entwicklung zu resumieren, ist es nützlich, den Stoßterm vorübergehend in der Two-Time-Repräsentation aufzuschreiben:

$$\langle \mathcal{C}_\alpha \rangle = \frac{1}{2} \int dw_0 (i\partial_{r_0})^\alpha \left[\Pi_d^>(t + \frac{r_0}{2}, w_0) \Delta_d^<(w_0, t - \frac{r_0}{2}) - \Pi_d^<(t + \frac{r_0}{2}, w_0) \Delta_d^>(w_0, t - \frac{r_0}{2}) \right]_{r_0=0}. \quad (5.21)$$

Dabei haben wir die Zeitgradienten der Mischungsmatrix $U(t)$ vernachlässigt.

Der spektrale Propagator (5.10) lautet in der Two-Time-Repräsentation

$$\begin{aligned} i\Delta_d^<(w_0, w'_0, \mathbf{k}) &= \int \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0(w_0-w'_0)} i\Delta_d^<(k_0, \mathbf{k}, \frac{w_0+w'_0}{2}) \\ &= \frac{\bar{\omega}_{ij}}{2\omega_i\omega_j} \sum_{\pm} \left[\pm e^{\mp i\bar{\omega}(w_0-w'_0)} f_{\pm}(\mathbf{k}, \frac{w_0+w'_0}{2}) \right. \\ &\quad \left. + e^{\mp i\Delta\omega(w_0-w'_0)} f_{c\pm}(\mathbf{k}, \frac{w_0+w'_0}{2}) \right] \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\bar{\omega}_{ij}}{2\omega_i\omega_j} \sum_{\pm} \left[\pm e^{\mp i\bar{\omega}(w_0-w'_0)} \mp i\Delta\omega(w_0+w'_0-2t) f_{\pm}^{<, >}(\mathbf{k}, t) \right. \\ &\quad \left. + e^{\mp i\Delta\omega(w_0-w'_0)} \mp i\bar{\omega}(w_0+w'_0-2t) f_{c\pm}^{<, >}(\mathbf{k}, t) \right] + \mathcal{O}^1, \end{aligned} \quad (5.23)$$

mit der Taylorentwicklung um die externe Zeit t

$$f_x\left(k_0, \mathbf{k}, \frac{w_0+w'_0}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{w_0-w'_0}{2} - t \right)^n \partial_t^n f_x(k_0, \mathbf{k}, t) \quad (5.24)$$

und den Bewegungsgleichungen nullter Ordnung (5.18), welche verwendet werden, um die Ableitungen in der Taylorentwicklung zu berechnen.

Wir setzen den entwickelten Propagator (5.23) in die Stoßtermintegrale (5.21) ein und erhalten nach einiger Rechnung:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{C}_\alpha \rangle_{ij} &= -\frac{1}{2} \sum_{\pm, k} \frac{\bar{\omega}_{kj}}{2\omega_k\omega_j} \left(\pm \left(\pm \bar{\omega}_{kj} + \frac{i}{2} \partial_t \right)^\alpha i\Pi_{\text{eff}, ik}^>(\pm\omega_k) f_{kj\pm}^{<} \right. \\ &\quad \left. + \left(\pm \Delta\omega_{kj} + \frac{i}{2} \partial_t \right)^\alpha i\Pi_{\text{eff}, ik}^>(\pm\omega_k) f_{kj\pm}^{<} \right) - (>\leftrightarrow<), \end{aligned} \quad (5.25)$$

mit der effektiven Selbstenergie, definiert durch

$$\Pi_{\text{eff}, ij}^{<, >}(k_0, \mathbf{k}, t) = \int dw_0 e^{ik_0(t-w_0)} \Pi_{ij}^{<, >}(t, w_0, \mathbf{k}). \quad (5.26)$$

Um das Stoßtermintegral für ein beliebiges Moment zu erhalten, müssen wir nur die generische Funktion $\Pi_{\text{eff}, ik}^{<, >}(\pm\omega_k)$ auswerten. In dieser Form sind alle schnellen Ableitungen der Funktionen $f_{ijc}^{<, >}$ durch die Verwendung der effektiven Größen resumiert und wir können wie gewohnt in Gradienten und Kopplungen entwickeln.

Die Stoßtermintegrale, welche in den Bewegungsgleichungen (5.16) auftreten, sind die hermiteschen und antihermiteschen Anteile der Gleichungen (5.25): $\langle C_{Hd} \rangle = \frac{1}{2}(\langle C_0 \rangle + \langle C_0^\dagger \rangle)$, $\langle C_{Ad} \rangle = \frac{1}{2i}(\langle C_0 \rangle - \langle C_0^\dagger \rangle)$ und $\langle k_0 C_{Hd} \rangle = \frac{1}{2}(\langle C_1 \rangle + \langle C_1^\dagger \rangle)$.

Wir verwenden die Konventionen

$$[O_s, f_s]^m \equiv O_s f_s - (O_s f_s)^\dagger, \quad \{O_s, f_s\}^m \equiv O_s f_s + (O_s f_s)^\dagger, \quad (5.27)$$

$$[O_s, f_s]^c \equiv O_s f_s - (O_{-s} f_{-s})^\dagger, \quad \{O_s, f_s\}^c \equiv O_s f_s + (O_{-s} f_{-s})^\dagger \quad (5.28)$$

für die verallgemeinerten (Anti)-Kommutatoren im Flavourraum und die Kurznotation

$$f_{\pm}^{\pm} \equiv \frac{1}{2}(f_{\pm}^{\leq} \pm f_{c\pm}^{\leq}) \quad , \quad f_{\pm}^{\mp} \equiv \frac{1}{2}(f_{\pm}^{\leq} \mp f_{c\pm}^{\leq}) \quad \text{und} \quad \Pi_{\text{eff}\pm,ij}^{<,>} \equiv \Pi_{\text{eff},ij}^{<,>}(\pm\omega_j), \quad (5.29)$$

sowie $(\omega)_{ij} = \delta_{ij}\omega_i$ und $(1/\omega)_{ij} = \delta_{ij}/\omega_i$.

Mit diesen Definitionen erhalten wie die expliziten Ergebnisse

$$\begin{aligned} \langle C_{Hd} \rangle_{ij} = & -\frac{1}{8} \sum_{\pm} \pm \left(\{i\Pi_{\text{eff}\pm}^>, \frac{1}{\omega} f_{\pm}^{\pm}\}_{ij}^m + \frac{\bar{\omega}_{ij}}{\omega_i\omega_j} \{i\Pi_{\text{eff}\pm}^>, f_{\pm}^{\pm}\}_{ij}^m \right. \\ & \left. - \frac{i\Delta\omega_{ij}}{\omega_i\omega_j} i [i\Pi_{\text{eff}\pm}^>, f_{\pm}^{\pm}]_{ij}^m - [>\leftrightarrow<] \right), \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \langle C_{Ad} \rangle_{ij} = & -\frac{1}{8} \sum_{\pm} \mp \left(i [i\Pi_{\text{eff}\pm}^>, \frac{1}{\omega} f_{\pm}^{\pm}]_{ij}^m + \frac{\bar{\omega}_{ij}}{\omega_i\omega_j} i [i\Pi_{\text{eff}\pm}^>, f_{\pm}^{\pm}]_{ij}^m \right. \\ & \left. + \frac{i\Delta\omega_{ij}}{\omega_i\omega_j} \{i\Pi_{\text{eff}\pm}^>, f_{\pm}^{\pm}\}_{ij}^m - [>\leftrightarrow<] \right) \end{aligned} \quad (5.31)$$

und

$$\begin{aligned} \langle k_0 C_{Hd} \rangle_{ij} = & -\frac{1}{16} \sum_{\pm} \left(\{i\Pi_{\text{eff}\pm}^>, (f_{\pm}^{\pm} + f_{\pm}^{\mp})\}_{ij}^m \pm \{i\partial_t(i\Pi_{\text{eff}\pm}^>), \frac{1}{\omega} f_{\pm}^{\pm}\}_{ij}^m \right. \\ & + \frac{\bar{\omega}_{ij}}{\omega_i\omega_j} \left(\{i\Pi_{\text{eff}\pm}^>, \omega f_{\pm}^{\pm}\}_{ij}^m + \{\omega i\Pi_{\text{eff}\pm}^>, \frac{1}{\omega} f_{\pm}^{\mp}\}_{ij}^m \pm \{i\partial_t(i\Pi_{\text{eff}\pm}^>), f_{\pm}^{\pm}\}_{ij}^m \right) \\ & + \frac{\Delta\omega_{ij}}{\omega_i\omega_j} \left([i\Pi_{\text{eff}\pm}^>, \omega f_{\pm}^{\pm}]_{ij}^m - [\omega i\Pi_{\text{eff}\pm}^>, \frac{1}{\omega} f_{\pm}^{\mp}]_{ij}^m \pm [i\partial_t(i\Pi_{\text{eff}\pm}^>), f_{\pm}^{\pm}]_{ij}^m \right) \\ & \left. - [>\leftrightarrow<] \right). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Wie bereits erwähnt, verwenden wir in den Rechnungen die Gleichungen (5.16) mit den Momenten als dynamische Variablen. Um die Stoßterintegrals (5.31-5.32) durch die Momente auszudrücken, müssen die Gleichungen (5.19) verwendet werden.

5.3. Gradientenkorrekturen zur Phasenraumstruktur von $\Delta^{<,>}$

Die Relationen zwischen den Momenten und Onshell-Funktionen (5.19) führen zu einem Verlust an Genauigkeit, wenn wir an den Onshell-Funktionen interessiert sind. In diesem Abschnitt untersuchen wir die ersten Massengradienten-Korrekturen zur Phasenraumstruktur der skalaren Wightmanfunktionen $\Delta^{<,>}(k, t)$. Wir verwenden beide Kadanoff-Baym-Gleichungen (5.5, 5.6) und vernachlässigen die Terme erster Ordnung in $\partial_t m$ nicht, um eine Verallgemeinerung der Gleichung (5.7) zu erhalten. Dies führt zu der modifizierten Zwangsgleichung

$$\begin{aligned} 0 = & k_0 \left((k_0^2 - \mathbf{k}^2 - M^2) k_0^2 + \frac{1}{4} (\Delta m^2)^2 \right) i\Delta_d^{<,>} \\ & - \frac{1}{2} (k_0^2 (\Delta\omega' \bar{\omega} + \bar{\omega}' \Delta\omega) + \Delta\omega \bar{\omega} (\Delta\omega' \Delta\omega + \bar{\omega}' \bar{\omega})) \Delta_d^{<,>} \\ & - (k_0^3 (\Delta\omega' \bar{\omega} + \bar{\omega}' \Delta\omega) - k_0 \Delta\omega \bar{\omega} (\Delta\omega' \Delta\omega + \bar{\omega}' \bar{\omega})) \partial_{k_0} \Delta_d^{<,>}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

welche auch k_0 -Ableitungen der Wightmanfunktionen $\Delta^{<,>}$ enthält. Es ist einfach zu zeigen, dass eine Erweiterung der singulären Schalenstruktur benötigt wird, um die Zwangsgleichung erster Ordnung (5.33) zu lösen. Wir integrieren über k_0 und erhalten so Relationen der Momente ρ_n :

$$\begin{aligned} \rho_n = & \rho_{n-2} (\Delta\omega^2 + \bar{\omega}^2) - \rho_{n-4} \Delta\omega^2 \bar{\omega}^2 \\ & + \frac{i(2n-5)}{2} \rho_{n-3} (\Delta\omega' \bar{\omega} + \bar{\omega}' \Delta\omega) - \frac{i(2n-7)}{2} \rho_{n-5} \Delta\omega \bar{\omega} (\Delta\omega' \Delta\omega + \bar{\omega}' \bar{\omega}). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Die Momente der singulären cQPA-Korrelatoren (5.10) erfüllen nur den Anteil nullter Ordnung dieser Gleichung.

Es ist nicht verwunderlich, dass solche Relationen zwischen den Momenten existieren. Die Gleichungen der Momente können, unabhängig von der Schalenstruktur der Wightmanfunktionen, aufgeschrieben werden und enthalten die vollständige Information über diese. Ohne eine Entwicklung in Gradienten sind die Momente aber alle nichttrivial und es existieren keine rekursiven Relationen zwischen ihnen. Das Trunkieren der Hierarchie der Momente wird durch die Entwicklung zu einer gegebenen Ordnung in Gradienten erzielt. Höhere Momente können dann rekursiv aus den niedrigen Momenten berechnet werden, oder alternativ kann eine Phasenraumparametrisierung aufgeschrieben werden, welche diese Relation implizit erfüllt. Obwohl die Momente ρ_0 , ρ_1 und ρ_2 immer ein geschlossenes Gleichungssystem bilden, enthalten sie alleine nicht die vollständige Information über das System und es reicht nur dann aus, sich auf die Berechnung der niedrigsten Momente zu beschränken, wenn bekannt ist, wie aus diesen die höheren Momente erzeugt werden.

Die Inkonsistenz der Gleichungen der f -Funktionen aus den vorherigen Kapiteln wird offensichtlich, da dort die Bewegungsgleichungen erster Ordnung verwendet werden, die Schalenstruktur aber die höheren Momente entsprechend der Relationen nullter Ordnung festlegt. In einer konsistenten Rechnung der f -Funktionen muss also auch die Schalenstruktur in der entsprechenden Ordnung berechnet werden.

Um Gl. (5.34) in erster Ordnung in den Massengradienten zu lösen, nehmen wir einen allgemeinen Ansatz für die Wightmanfunktionen $\Delta^{<, >}$ an, in welchem wir die Korrekturen durch eine Entwicklung in Ableitungen der singulären Deltafunktionen parametrisieren:

$$\Delta_d^{<, >}(k, t) = \Delta_{d0}^{<, >}(k, t) + \sum_{n \pm} \partial_{k_0}^n (\pm a_{n \pm} \delta(k_0 \mp \bar{\omega}) + b_{n \pm} \delta(k_0 \mp \Delta\omega)), \quad (5.35)$$

mit der Lösung nullter Ordnung $\Delta_{d0}^{<, >}(k, t)$ (siehe Gl. (5.10)) und $a_{n \pm}$, sowie $b_{n \pm}$ Koeffizienten, welche von erster Ordnung in den Gradienten sind. Wir berechnen die Momente ρ_n mit dem Ansatz (5.35) und setzen sie in Gl. (5.34) ein, um die Parameter $a_{n \pm}$ und $b_{n \pm}$ zu bestimmen. Das Ergebnis ist, dass erste und zweite k_0 -Ableitungen der Deltafunktionen ausreichend sind, um die Korrekturen erster Ordnung zu parametrisieren. Wir erhalten

$$\begin{aligned} i\Delta_d^{<, >}(k, t) = 2\pi C \sum_{\pm} \left[\pm f_{m \pm}^{\phi <, >} \left(1 + \frac{i}{2} \frac{\Delta\omega' \bar{\omega} - \bar{\omega}' \Delta\omega}{\bar{\omega}^2 - \Delta\omega^2} \partial_{k_0} \pm \frac{i}{4} \Delta\omega' \partial_{k_0}^2 \right) \delta(k_0 \mp \bar{\omega}) \right. \\ \left. + f_{c \pm}^{\phi <, >} \left(1 + \frac{i}{2} \frac{\Delta\omega' \bar{\omega} - \bar{\omega}' \Delta\omega}{\bar{\omega}^2 - \Delta\omega^2} \partial_{k_0} \pm \frac{i}{4} \bar{\omega}' \partial_{k_0}^2 \right) \delta(k_0 \mp \Delta\omega) \right], \end{aligned} \quad (5.36)$$

mit dem Vorfaktor

$$C_{ij} \equiv \frac{\bar{\omega}_{ij}}{2(\bar{\omega}_{ij}^2 - \Delta\omega_{ij}^2)} = \frac{\bar{\omega}_{ij}}{\omega_i \omega_j}. \quad (5.37)$$

Wenn Gl. (5.36) mit einer glatten Testfunktion multipliziert wird, können die Ableitungen der Deltafunktion zur ersten Ordnung, in einem distributiven Sinne, durch eine Gaußverteilungsfunktion mit einer komplexen Breite und einer Verschiebung des Mittelwertes ersetzt werden. Deshalb können wir in erster Ordnung auch die Parametrisierung

$$\begin{aligned} i\Delta_d^{<, >}(k, t) = 2\pi C \sum_{\pm} \left[\pm f_{m \pm}^{\phi <, >} \mathcal{N} \left(\pm \bar{\omega} - \frac{i}{2} \frac{\Delta\omega' \bar{\omega} - \bar{\omega}' \Delta\omega}{\bar{\omega}^2 - \Delta\omega^2}, \pm \frac{i}{2} \Delta\omega' \right) \right. \\ \left. + f_{c \pm}^{\phi <, >} \mathcal{N} \left(\pm \Delta\omega - \frac{i}{2} \frac{\Delta\omega' \bar{\omega} - \bar{\omega}' \Delta\omega}{\bar{\omega}^2 - \Delta\omega^2}, \pm \frac{i}{2} \bar{\omega}' \right) \right] \end{aligned} \quad (5.38)$$

verwenden, mit $\mathcal{N}$ der Normalverteilungsfunktion

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left(-\frac{(k_0 - \mu)^2}{2\sigma^2} \right). \quad (5.39)$$

Mit dieser erweiterten Phasenraumverteilung für $\Delta^{<}$ können nun die Gradientenkorrekturen zu den Relationen (5.19) berechnet werden, welche verwendet werden können, um den Stoßterm bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\Gamma\partial_t m)$ zu berechnen. Die Bewegungsgleichungen (5.16) erhalten dabei keine Korrekturen, da sie exakt in der Gradientenentwicklung sind.

Wir leiten die korrigierten Bewegungsgleichungen der Onshell-Funktionen $f_{\pm}^{\phi<}$ und $f_{c\pm}^{\phi<}$ her. Um ein geschlossenes Gleichungssystem zu erhalten, verwenden wir vier beliebige Momente. Durch Impulsintegrale über Gl. (5.36) erhalten wir die Relationen:

$$\begin{aligned} \rho_n = & C \left\{ \bar{\omega}^n \Delta f_n^{\phi} + \Delta \omega \bar{f}_{cn}^{\phi} - \frac{in}{2} \frac{\Delta \omega' \bar{\omega} - \bar{\omega}' \Delta \omega}{\bar{\omega}^2 - \Delta \omega^2} (\bar{\omega}^{n-1} \bar{f}_n^{\phi} + \Delta \omega^{n-1} \Delta f_{cn}^{\phi}) \right. \\ & \left. + \frac{in(n-1)}{4} (\Delta \omega' \bar{\omega}^{n-2} \bar{f}_n^{\phi} + \bar{\omega}' \Delta \omega^{n-2} \Delta f_{cn}^{\phi}) \right\}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

mit $\Delta f_n^{\phi} = f_+^{\phi} + (-1)^{n+1} f_-^{\phi}$ und $\bar{f}_n^{\phi} = f_+^{\phi} + (-1)^n f_-^{\phi}$. Die Evolutionsgleichungen der Momente erhalten wir aus Gl. (5.6):

$$\partial_t \rho_n + 2i\Delta \omega \bar{\omega} \rho_{n-1} - (n-1)(\Delta \omega' \Delta \omega + \bar{\omega}' \bar{\omega}) \rho_{n-2} = C_n. \quad (5.41)$$

Im Gegensatz zur Rechnung mit den singulären Schalen sind die folgenden Gleichungen in linearer Ordnung konsistent und vier beliebige Momente führen zu denselben Bewegungsgleichungen der Onshell-Funktionen. Indem wir Gl. (5.40) in die Evolutionsgleichung (5.41) einsetzen, erhalten wir die Gleichungen der Onshell-Funktionen im stoßfreien Fall:

$$\begin{aligned} \partial_t f_{m\pm}^{\phi<, >} \pm 2i\Delta \omega f_{m\pm}^{\phi<, >} + \frac{\Delta \omega (\Delta \omega' \bar{\omega} - \bar{\omega}' \Delta \omega)}{\bar{\omega}(\bar{\omega}^2 - \Delta \omega^2)} f_{m\pm}^{\phi<, >} &= 0, \\ \partial_t f_{c\pm}^{\phi<, >} \pm 2i\bar{\omega} f_{c\pm}^{\phi<, >} + \frac{\Delta \omega (\Delta \omega' \bar{\omega} - \bar{\omega}' \Delta \omega)}{\bar{\omega}(\bar{\omega}^2 - \Delta \omega^2)} f_{c\pm}^{\phi<, >} &= 0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Der kinetische Term ist diagonal und die kohärenten Lösungen sind von den Massenschalen entkoppelt. In stoßfreien Problemen zeigt dies, dass kohärente Lösungen erst zur zweiten Ordnung in Gradienten angeregt werden.

Wir geben nun die Verallgemeinerung der Relation (5.19) zur ersten Ordnung in Gradienten an. Mit Gl. (5.42) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_0 &= \partial_t \left(C(f_+^{\phi} - f_-^{\phi} + f_{c+}^{\phi} + f_{c-}^{\phi}) \right) \\ &= -2iC(\Delta \omega f_+^{\phi} + \Delta \omega f_-^{\phi} + \bar{\omega} f_{c+}^{\phi} - \bar{\omega} f_{c-}^{\phi}) \\ &\quad - C \frac{\bar{\omega}' \bar{\omega} - \Delta \omega' \Delta \omega}{\bar{\omega}^2 - \Delta \omega^2} (f_+^{\phi} - f_-^{\phi} + f_{c+}^{\phi} + f_{c-}^{\phi}). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Durch Auflösung von Gl. (5.43) und Gl. (5.40) nach den Onshell-Funktionen erhalten wir die Relationen:

$$\begin{pmatrix} \rho_0 \\ \partial_0 \rho_0 \\ \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = C \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2i\Delta \omega & -2i\Delta \omega & -2i\bar{\omega} & 2i\bar{\omega} \\ \bar{\omega} & \bar{\omega} & \Delta \omega & -\Delta \omega \\ \bar{\omega}^2 & -\bar{\omega}^2 & \Delta \omega^2 & \Delta \omega^2 \end{pmatrix} + \chi \right] \begin{pmatrix} f_{m+}^{\phi} \\ f_{m-}^{\phi} \\ f_{c+}^{\phi} \\ f_{c-}^{\phi} \end{pmatrix}, \quad (5.44)$$

mit

$$\chi \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_1 & -D_1 & D_1 & D_1 \\ D_2 & -D_2 & D_2 & D_2 \\ 2D_2 \bar{\omega} + \frac{i}{2} \Delta \omega' & 2D_2 \bar{\omega} + \frac{i}{2} \Delta \omega' & 2D_2 \Delta \omega + \frac{i}{2} \bar{\omega}' & -2D_2 \Delta \omega - \frac{i}{2} \bar{\omega}' \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

und den Koeffizienten

$$D_1 \equiv -\frac{\bar{\omega}' \bar{\omega} - \Delta \omega' \Delta \omega}{\bar{\omega}^2 - \Delta \omega^2} \quad \text{und} \quad D_2 \equiv -i \frac{\Delta \omega' \bar{\omega} - \bar{\omega}' \Delta \omega}{2(\bar{\omega}^2 - \Delta \omega^2)}. \quad (5.46)$$

Die Matrix χ enthält die Korrekturen erster Ordnung, welche vernachlässigt werden können, wenn Gradienten klein sind. Die Determinante der Matrix ist von Null verschieden, die Relationen sind also invertierbar für jedes $\Delta\omega$, insbesondere auch $\Delta\omega = 0$.

Da die Evolutionsgleichungen in den Momenten exakt sind, sollten diese in expliziten Rechnungen vorgezogen werden. Im Stoßterm werden allerdings Relationen zwischen f -Funktionen und Momenten benötigt. Außerdem enthalten die niedrigsten Momente alleine nicht die vollständige Information über das System. In stoßfreien Regionen können aber die Relationen (5.44) und die Parametrisierung (5.36) verwendet werden, um den Korrelator zu beschreiben.

Oftmals wird die vollständige Kenntnis des Korrelators nicht benötigt, wie z.B. in Kapitel 4. Dort sind wir lediglich an den Anzahldichten interessiert, welche aus den niedrigen Momenten des Korrelators bestimmt werden können. Dann benötigen wir die Relationen zwischen Onshell-Funktionen und Momenten nur im Stoßterm, in welchem die Relationen nullter Ordnung verwendet werden können.

5.4. Flavourkohärenz im Operatorformalismus

In diesem Abschnitt verwenden wir den Operatorformalismus der QFT, um mischende skalare Felder in einem konstanten Hintergrund zu studieren. Wir zeigen, dass Flavourkohärenz vorhanden ist, wenn die nebendiagonalen ($i \neq j$) Erwartungswerte $\langle a_{i\mathbf{k}}^\dagger a_{j\mathbf{k}'} \rangle$, $\langle b_{i\mathbf{k}}^\dagger b_{j\mathbf{k}'} \rangle$ oder $\langle b_{i\mathbf{k}} a_{j\mathbf{k}'} \rangle$ nicht verschwinden. Im räumlich homogenen Fall stellen wir fest, dass die Zweipunktkorrelatoren $\Delta^<$ die cQPA-Schalenstruktur mit $k_0 = \pm\bar{\omega}$ oder $k_0 = \pm\Delta\omega$ besitzen.

Wir zeigen, dass eine Klasse von superpositionierten Zuständen, den geflavourten Squeezed-States, die gewünschten Erwartungswerte besitzt. Die Squeezed-States werden aus einem Vakuumzustand durch die unitäre Squeezing-Operation [75] erzeugt, welche zu einer geflavourten Bogoliubov-Transformation korrespondiert. Außerdem geben wir eine 1-1 Identifikation zwischen den Onshell-Funktionen $f_{ij\pm}^\phi$, $f_{ijc\pm}^\phi$ und den Parametern des geflavourten Squeezed-States, bzw. der entsprechenden Bogoliubov-Transformation an.

Wir betrachten mischende skalare Felder ϕ_i , $i = 1, \dots, N$, für welche die gewöhnlichen Operatorentwicklungen

$$\phi_i(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_{i\mathbf{k}}} \left(a_{i\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{i\mathbf{k}}x_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + b_{i\mathbf{k}}^\dagger e^{i(\omega_{i\mathbf{k}}x_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \quad (5.47)$$

gelten, mit $\omega_{i\mathbf{k}} \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_i^2}$, sowie $a_{i\mathbf{k}}^\dagger$ ($a_{i\mathbf{k}}$) und $b_{i\mathbf{k}}^\dagger$ ($b_{i\mathbf{k}}$) den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Teilchen und Antiteilchen der Masseneigenzustände $i = 1, \dots, N$. Diese Operatoren erfüllen die üblichen Kommutationsrelationen:

$$\begin{aligned} [a_{i\mathbf{k}}, a_{j\mathbf{k}'}] &= [a_{i\mathbf{k}}^\dagger, a_{j\mathbf{k}'}^\dagger] = [b_{i\mathbf{k}}, b_{j\mathbf{k}'}] = [b_{i\mathbf{k}}^\dagger, b_{j\mathbf{k}'}^\dagger] = 0, \\ [a_{i\mathbf{k}}, a_{j\mathbf{k}'}^\dagger] &= [b_{i\mathbf{k}}, b_{j\mathbf{k}'}^\dagger] = 2\omega_{i\mathbf{k}}(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Außerdem verschwinden alle Kommutatoren zwischen $a_{i\mathbf{k}}$ und $b_{j\mathbf{k}'}$, bzw. zwischen ihren hermitesch Konjugierten. Wir definieren einen Zustand $|\Omega\rangle$ mit den Erwartungswerten

$$\begin{aligned} \langle a_{i\mathbf{k}}^\dagger a_{j\mathbf{k}'} \rangle &= f_{jim+}^{\phi<}(|\mathbf{k}|) 2\bar{\omega}_{ij\mathbf{k}}(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ \langle b_{i\mathbf{k}}^\dagger b_{j\mathbf{k}'} \rangle &= -(\delta_{ij} + f_{ijm-}^{\phi<}(|\mathbf{k}|)) 2\bar{\omega}_{ij\mathbf{k}}(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ \langle b_{i\mathbf{k}} a_{j\mathbf{k}'} \rangle = \langle a_{j\mathbf{k}'}^\dagger b_{i\mathbf{k}}^\dagger \rangle^* &= f_{jic+}^{\phi<}(|\mathbf{k}|) 2\bar{\omega}_{ij\mathbf{k}}(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}'), \end{aligned} \quad (5.49)$$

welche konsistent zu der Forderung nach räumlicher Homogenität sind. Mit der Operatorentwick-

lung (5.47) und den Relationen (5.49) kann die Wightmanfunktion berechnet werden:

$$\begin{aligned} i\Delta_{ij}^<(u, v) &= \langle \phi_j^\dagger(v) \phi_i(u) \rangle \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\bar{\omega}_{ij}}{2\omega_i\omega_j} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})} \left[f_{ijm+}^{\phi<} e^{-i(\omega_i u_0 - \omega_j v_0)} - f_{ijm-}^{\phi<} e^{i(\omega_i u_0 - \omega_j v_0)} \right. \\ &\quad \left. + f_{ijc+}^{\phi<} e^{-i(\omega_i u_0 + \omega_j v_0)} + f_{ijc+}^{\phi<*} e^{i(\omega_i u_0 + \omega_j v_0)} \right]. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Hier haben wir die $\mathbf{k}$ -Indizes von $\omega_{i\mathbf{k}}$ und $\bar{\omega}_{ij\mathbf{k}}$ unterdrückt, um die Notation kompakt zu halten. Nach der Wigner-Transformation erhalten wir:

$$\begin{aligned} i\Delta_{ij}^<(k, x) &= \int d^4(u-v) e^{ik_0(u_0-v_0)-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} i\Delta_{ij}^<(u, v) \\ &= 2\pi \frac{\bar{\omega}_{ij}}{2\omega_i\omega_j} \left[f_{ijm+}^{\phi<} e^{-i2\Delta\omega t} \delta(k_0 - \bar{\omega}) - f_{ijm-}^{\phi<} e^{i2\Delta\omega t} \delta(k_0 + \bar{\omega}) \right. \\ &\quad \left. + f_{ijc+}^{\phi<} e^{-i2\bar{\omega} t} \delta(k_0 - \Delta\omega) + f_{ijc+}^{\phi<*} e^{i2\bar{\omega} t} \delta(k_0 + \Delta\omega) \right], \end{aligned} \quad (5.51)$$

mit der Zeit t definiert durch $t \equiv x_0 = (u_0 + v_0)/2$. Mit $f_{ijc-}^{\phi<} = f_{jic+}^{\phi<*}$ entspricht dies der singulären cQPA-Wightmanfunktion aus Gl. (5.10). Die Wightmanfunktion beschreibt also tatsächlich die Flavour- und Teilchen-Antiteilchen-Flavourkohärenz, mit den entsprechenden Verteilungsfunktionen f_{ij}^{ϕ} . Außerdem zeigt dies, dass die Erwartungswerte aus Gl. (5.49) alle vier singulären Schalen $k_0 = \pm\bar{\omega}$ und $k_0 = \pm\Delta\omega$ anregen und die kohärenten Schalen zur korrekten Beschreibung benötigt werden.

Als Nächstes konstruieren wir den Zustand $|\Omega\rangle$ mit den unüblichen Erwartungswerten (5.49) explizit. Es ist klar, dass ein Anzahlzustand: $(\prod_m a_m^\dagger)(\prod_n b_n^\dagger)|0\rangle$, mit finiter Anzahl von Quanten, die Relationen (5.49) nicht erfüllen kann, da die nichtdiagonalen Erwartungswerte für diese Zustände verschwinden. Es existieren allerdings Superpositionen von Zuständen mit unspezifizierter Anzahl von Quanten, welche die Eigenschaften aus Gl. (5.49) erfüllen. Um dies zu zeigen, verwenden wir die Methoden des Squeezed-State-Formalismus [75].

Wir definieren einen Squeeze-Operator für mischende Felder:

$$S_2(r_{ij}) \equiv \exp \left[\sum_{ij} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(r_{ij} \hat{b}_{i\mathbf{k}} \hat{a}_{j-\mathbf{k}} - r_{ij}^* \hat{a}_{j\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{i-\mathbf{k}}^\dagger \right) \right] \equiv e^A, \quad (5.52)$$

mit $r_{ij}(|\mathbf{k}|)$, einer komplexen Matrix im Flavourraum, sowie $\hat{a}_{i\mathbf{k}} \equiv a_{i\mathbf{k}}/\sqrt{2\omega_{i\mathbf{k}}}$ und $\hat{b}_{i\mathbf{k}} \equiv b_{i\mathbf{k}}/\sqrt{2\omega_{i\mathbf{k}}}$. Wir leiten her, wie die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren transformieren, wenn der Operator S_2 auf sie angewandt wird, indem wir $S_2 a_{i\mathbf{k}} S_2^\dagger$ berechnen. Für den Exponent A aus Gl. (5.52) erhalten wir folgende Kommutationsrelationen:

$$[\hat{a}_{i\mathbf{k}}, A] = - \sum_j r_{ij}^\dagger \hat{b}_{j-\mathbf{k}}^\dagger, \quad [\hat{b}_{i\mathbf{k}}^\dagger, A] = - \sum_j r_{ij} \hat{a}_{j-\mathbf{k}}. \quad (5.53)$$

r_{ij} kann durch die biunitäre Transformation: $r = U^\dagger r_d V$, mit $(r_d)_{ij} = r_i \delta_{ij}$ diagonalisiert werden. Die Einträge der diagonalen Matrix sind positiv: $r_i(|\mathbf{k}|) \geq 0$; die Matrizen $U(|\mathbf{k}|)$ und $V(|\mathbf{k}|)$ sind unitär.

Wir bilden die Linearkombinationen

$$\hat{c}_{i\mathbf{k}\pm} = \sum_j (V_{ij} \hat{a}_{j\mathbf{k}} \pm U_{ij} \hat{b}_{j-\mathbf{k}}^\dagger), \quad (5.54)$$

welche die einfachen diagonalen Kommutationsrelationen

$$[\hat{c}_{i\mathbf{k}\pm}, A] = \mp r_i \hat{c}_{i\mathbf{k}\pm} \quad (5.55)$$

erfüllen. Durch rekursives Anwenden dieser Relationen erhalten wir $\hat{c}_{i\mathbf{k}\pm} A^n = (A \mp r_i)^n \hat{c}_{i\mathbf{k}\pm}$. Dies wird verwendet, um die Relation

$$S_2 \hat{c}_{i\mathbf{k}\pm} S_2^\dagger = e^{\pm r_i} \hat{c}_{i\mathbf{k}\pm} \quad (5.56)$$

für den Operator S_2 zu erhalten. Durch Invertierung der Kombinationen (5.54) erhalten wir unter Verwendung von Gl. (5.56) schließlich das gesuchte Transformationsgesetz der Erzeuger und Vernichter:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{i\mathbf{k}} &\equiv S_2 \hat{a}_{i\mathbf{k}} S_2^\dagger = \sum_j \frac{1}{2} V_{ij}^\dagger (S_2 \hat{c}_{j\mathbf{k}+} S_2^\dagger + S_2 \hat{c}_{j\mathbf{k}-} S_2^\dagger) \\ &= \sum_j (\alpha_{ij} \hat{a}_{j\mathbf{k}} + \beta_{ij}^\dagger \hat{b}_{j-\mathbf{k}}^\dagger), \\ \tilde{b}_{i-\mathbf{k}}^\dagger &\equiv S_2 \hat{b}_{i-\mathbf{k}}^\dagger S_2^\dagger = \sum_j \frac{1}{2} U_{ij}^\dagger (S_2 \hat{c}_{j\mathbf{k}+} S_2^\dagger - S_2 \hat{c}_{j\mathbf{k}-} S_2^\dagger) \\ &= \sum_j (\beta_{ij} \hat{a}_{j\mathbf{k}} + \gamma_{ij} \hat{b}_{j-\mathbf{k}}^\dagger), \end{aligned} \quad (5.57)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}(|\mathbf{k}|) &\equiv [V^\dagger \cosh(r_d) V]_{ij}, & \beta_{ij}(|\mathbf{k}|) &\equiv [U^\dagger \sinh(r_d) V]_{ij}, \\ \gamma_{ij}(|\mathbf{k}|) &\equiv [U^\dagger \cosh(r_d) U]_{ij}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Das Transformationsgesetz (5.57) hat die Struktur einer geflavourten Bogoliubov-Transformation. Für die inverse Transformation erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{a}_{i\mathbf{k}} &\equiv S_2^\dagger \tilde{a}_{i\mathbf{k}} S_2 = \sum_j (\alpha_{ij}^\dagger \tilde{a}_{j\mathbf{k}} - \beta_{ij}^\dagger \tilde{b}_{j-\mathbf{k}}^\dagger), \\ \hat{b}_{i-\mathbf{k}}^\dagger &\equiv S_2^\dagger \tilde{b}_{i-\mathbf{k}}^\dagger S_2 = \sum_j (-\beta_{ij} \tilde{a}_{j\mathbf{k}} + \gamma_{ij}^\dagger \tilde{b}_{j-\mathbf{k}}^\dagger). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Da die Transformationen (5.57) unitär sind, ist es offensichtlich, dass die transformierten Operatoren $\tilde{a}_{i\mathbf{k}}, \tilde{b}_{i\mathbf{k}}$ dieselbe Kommutationsalgebra wie $\hat{a}_{i\mathbf{k}}$ und $\hat{b}_{i\mathbf{k}}$ erfüllen. Außerdem stellen wir fest, dass der Zustand $|\tilde{0}\rangle = S_2|0\rangle$ der Vakuumzustand der transformierten Operatoren ist, also $\tilde{a}_{i\mathbf{k}}|\tilde{0}\rangle = 0$ gilt.

Jetzt ist es einfach, den Zustand $|\Omega\rangle$ mit den gewünschten Eigenschaften (5.49) zu konstruieren:

$$|\Omega\rangle = |\tilde{0}\rangle = S_2|0\rangle = \exp \left[\sum_{ij} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(r_{ij} \hat{b}_{i\mathbf{k}} \hat{a}_{j-\mathbf{k}} - r_{ij}^* \hat{a}_{j\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{i-\mathbf{k}}^\dagger \right) \right] |0\rangle. \quad (5.60)$$

Eine explizite Rechnung der Erwartungswerte dieses Zustandes ergibt:

$$\begin{aligned} \langle a_{i\mathbf{k}}^\dagger a_{j\mathbf{k}'} \rangle &= 2\sqrt{\omega_{i\mathbf{k}} \omega_{j\mathbf{k}'}} \sum_{i'j'} \langle \tilde{0} | (\alpha_{i'i} \tilde{a}_{i'\mathbf{k}}^\dagger - \beta_{i'i} \tilde{b}_{i'-\mathbf{k}}^\dagger) (\alpha_{jj'}^\dagger \tilde{a}_{j'\mathbf{k}'} - \beta_{jj'}^\dagger \tilde{b}_{j'-\mathbf{k}'}^\dagger) | \tilde{0} \rangle \\ &= (\beta^\dagger \beta)_{ji} 2\sqrt{\omega_i \omega_j} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned} \quad (5.61)$$

und analog

$$\begin{aligned} \langle b_{i\mathbf{k}}^\dagger b_{j\mathbf{k}'} \rangle &= (\beta \beta^\dagger)_{ij} 2\sqrt{\omega_i \omega_j} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ \langle b_{i\mathbf{k}} a_{j\mathbf{k}'} \rangle &= -(\beta^\dagger \gamma)_{ji} 2\sqrt{\omega_i \omega_j} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Diese Relationen stellen eine 1-1 Identifikation zwischen den Onshell-Funktionen und den Parametern der geflavourten Bogoliubov-Transformation (oder äquivalent den Parametern r_{ij} des entsprechenden

Squeezed-States) dar:

$$\begin{aligned}
 f_{ijm+}^{\phi<} &= \frac{\sqrt{\omega_i \omega_j}}{\bar{\omega}_{ij}} (\beta^\dagger \beta)_{ij}, & f_{ijc+}^{\phi<} &= -\frac{\sqrt{\omega_i \omega_j}}{\bar{\omega}_{ij}} (\beta^\dagger \gamma)_{ij}, \\
 f_{ijm-}^{\phi<} &= -\delta_{ij} - \frac{\sqrt{\omega_i \omega_j}}{\bar{\omega}_{ij}} (\beta \beta^\dagger)_{ij}, & f_{ijc-}^{\phi<} &= -\frac{\sqrt{\omega_i \omega_j}}{\bar{\omega}_{ij}} (\gamma^\dagger \beta)_{ij}.
 \end{aligned} \tag{5.63}$$

5.5. Ausblick

Ich habe die Quantentransportgleichungen für mischende skalare Felder, unter Berücksichtigung der Flavour- und Teilchen-Antiteilchen-Flavourkohärenz untersucht. In der cQPA ist die Information der Flavourkohärenz in den Massenschalen enthalten und die Information der Teilchen-Antiteilchen-Flavourkohärenz in eigenen Schalen mit Energien $\Delta\omega = \frac{1}{2}(\omega_i - \omega_j)$.

Die Bewegungsgleichungen nehmen, ausgedrückt durch Momente der Propagatoren $i\Delta_{ij}^{<,>}$, eine einfache Form an, welche zur Berechnung geeignet ist. Werden die kohärenten Schalen vernachlässigt, ergeben sich die üblichen Quantenboltzmann-Gleichungen.

Da die Gleichungen für die Onshell-Funktionen f_{ij}^ϕ in erster Ordnung unter Verwendung der singulären Massenschalen nicht konsistent sind, habe ich allgemeinere Phasenraumstrukturen zugelassen und Gradientenkorrekturen erster Ordnung in der Zwangsgleichung berücksichtigt; Stoßtermeffekte erster Ordnung aber weiter vernachlässigt. In diesem Fall finde ich eine ähnliche Schalenstruktur, allerdings verschieben sich die Schalen leicht und erhalten eine finite Breite. Die daraus abgeleiteten Bewegungsgleichungen sind die konsistente Beschreibung der f -Funktionen in stoßfreien Problemen zur ersten Ordnung. Außerdem können die Relationen verwendet werden, um den Stoßterm in höherer Genauigkeit zu berechnen. Da der Stoßterm der einzige Term ist, welcher in den Gleichungen der Momente nicht exakt ist, führt dies zu einer Erhöhung der Genauigkeit im Allgemeinen.

Die Notwendigkeit der kohärenten Schalen wird in Kapitel 5.4 für einen Squeezed-State im Operator-Formalismus gezeigt, es existiert eine 1-1 Relation zwischen den Onshell-Funktionen und den Parametern des Squeezed-States.

Anhang A.

Zusammenfassung der Definitionen

A.1. Vierbeinkomponenten

Um zwischen dem lokalen Inertialsystem und dem Allgemeinen Koordinatensystem zu wechseln, benötigen wir die Vierbeinkomponenten $[e_A]^\mu$. Diese lauten in Newton-Eichung zur zweiten Ordnung in kosmologischer Störungstheorie mit den Metrikkomponenten definiert in Gl. (2.6)

$$\begin{aligned} [e_0]^0 &= \frac{1}{a} \left(1 - A^{(1)} - A^{(2)} + \frac{3}{2} A^{(1)^2} + \frac{1}{2} U_i^{(1)} U_i^{(1)} \right), \\ [e_0]^i &= \frac{U_i}{a}, \\ [e_k]^0 &= \frac{1}{a} \left(U_k^{(1)} + U_k^{(2)} - B_k^{(2)} + (D^{(1)} - A^{(1)}) U_k^{(1)} \right), \\ [e_k]^i &= \frac{1}{a} \left(\delta_{ik} \left(1 - D^{(1)} - D^{(2)} + \frac{3}{2} D^{(1)^2} \right) - E_{ik}^{(2)} - \frac{1}{2} U_i^{(1)} U_k^{(1)} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

wobei wir angenommen haben, dass es keine Vektor- und Tensorstörungen in erster Ordnung gibt. Mit $[e^A]_\mu$ bezeichnen wir das Inverse der Vierbeine, so dass $[e^A]_\mu [e_B]^\mu = \delta_B^A$ und $[e^A]_\mu [e_A]^\nu = \delta_\mu^\nu$ gilt.

A.2. Spingewichtete Kugelflächenfunktionen

Die spingewichteten Kugelflächenfunktionen sind für $l \geq |s|$ und $|m| \leq l$ definiert durch

$$\begin{aligned} Y_{lm}^s(\theta, \varphi) &= \left(\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+s)!(l-s)!} \right)^{1/2} \sin^{2l} \frac{\theta}{2} \\ &\times \sum_r \binom{l-s}{r} \binom{l+s}{r+s-m} (-1)^{l-r-s+m} e^{im\varphi} \cot^{2r+s-m} \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Für $s = 0$ erhalten wir die normalen Kugelflächenfunktionen. Y_{lm}^s hat den Spin s , unter Rotationen des Koordinatensystems um den Winkel $\Delta\Psi$ transformiert es mit

$$Y_{lm}^{'s} = e^{is\Delta\Psi} Y_{lm}^s. \quad (\text{A.3})$$

Die Kugelflächenfunktionen sind für jedes s auf der Kugel vollständig und erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\int d\Omega Y_{lm}^{s*} Y_{l'm'}^s = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (\text{A.4})$$

Bei komplexer Konjugation gilt: $Y_{lm}^{s*} = (-1)^{m+s} Y_{l-m}^{-s}$. Das Produkt aus zwei spingewichteten Kugelflächenfunktionen kann wieder durch eine Kugelflächenfunktion ausgedrückt werden:

$$Y_{l_1 m_1}^{s_1} Y_{l_2 m_2}^{s_2} = \sum_{l, m, s} \frac{\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)}}{\sqrt{4\pi(2l+1)}} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ -s_1 & -s_2 & -s \end{pmatrix} Y_{lm}^s. \quad (\text{A.5})$$

Die Summationen sind dabei durch die Dreiecksrelation der Clebsch-Gordan-Koeffizienten beschränkt:

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{für} \quad |l_2 - l_1| \leq l \leq l_1 + l_2 \quad (\text{A.6})$$

und

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} = 0 \quad \text{für} \quad m \neq m_1 + m_2. \quad (\text{A.7})$$

Daraus folgt, dass $s = s_1 + s_2$ in Gl. (A.5) gelten muss. Außerdem erfüllen die Clebsch-Gordan-Koeffizienten die folgende Relation

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} = (-1)^{l_1+l_2-l} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ -m_1 & -m_2 & -m \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Die spingewichteten Kugelflächenfunktionen können durch Differenzierung erzeugt werden. Wir definieren die spinerhöhenden und -senkenden Operatoren sind durch

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_s &= -\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + s \cot \theta, \\ \bar{\partial}_s &= -\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - s \cot \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Mit ihnen können die Spinorkugelflächenfunktionen aus den üblichen Kugelflächenfunktionen berechnet werden:

$$\bar{\partial}_s Y_{lm}^s = l_s^+ Y_{lm}^{s+1}, \quad \bar{\partial}_s Y_{lm}^s = -l_s^- Y_{lm}^{s-1}, \quad (\text{A.10})$$

mit

$$l_s^\pm = \sqrt{(l \mp s)(l \pm s + 1)}. \quad (\text{A.11})$$

A.3. Einheitsvektor in der sphärischen Basis

Die Koeffizienten ξ_m^i und χ_{2m}^{ij} , definiert in (2.72), welche n^i und $n^i n^j$ in Kugelflächenfunktionen zerlegen, sind explizit durch

$$\xi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \xi_{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mp 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

$$\chi_{20} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \chi_{2,\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & 0 & i \\ \mp 1 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \chi_{2,\pm 2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \mp i & 0 \\ \mp i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

gegeben.

A.4. Q -Matrizen und ω -Koeffizienten

Die nicht verschwindenden Q -Matrizen aus Gl. (2.131) lauten in der IVEB-Basis:

$$\begin{aligned}
Q_{I,00}^{ij} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
Q_{I,20}^{ij} &= \frac{1}{6\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\
Q_{I,21}^{ij} &= \frac{1}{2\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix} & Q_{I,2-1}^{ij} &= \frac{1}{2\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix} \\
Q_{I,22}^{ij} &= \frac{1}{2\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 & -i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & Q_{I,2-2}^{ij} &= \frac{1}{2\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
Q_{V,10}^{ij} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & & \\
Q_{V,11}^{ij} &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix} & Q_{V,1-1}^{ij} &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix} \\
Q_{E,20}^{ij} &= \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
Q_{E,21}^{ij} &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix} & Q_{E,2-1}^{ij} &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix} \\
Q_{E,22}^{ij} &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & Q_{E,2-2}^{ij} &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Ihre nicht verschwindenden Spuren (2.133) sind:

$$\begin{aligned}
\omega_{II}^{(0)} &= 1, \\
\omega_{VV}^{(1)} &= \frac{1}{2}, \\
\omega_{II}^{(2)} &= \frac{1}{10}, \quad \omega_{EE}^{(2)} = \frac{3}{5}, \quad \omega_{IE}^{(2)} = \omega_{EI}^{(2)} = -\sqrt{\frac{3}{50}}.
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Anhang B.

Herleitung der Line-Of-Sight-Lösung

Die Line-Of-Sight-Lösung der Boltzmann-Gleichung erster Ordnung wird in [78] (siehe auch [45]) hergeleitet. Wir berechnen hier eine Verallgemeinerung, welche mehr Quellterme zulässt, insbesondere Quellterme für höhere Multipole und Polarisationsmoden.

Unser Ziel ist die Lösung der Gleichung (siehe auch Gl. (3.8))

$$\dot{\Delta}_n + k C_{nm} \Delta_m = -|\dot{\kappa}| \Delta_n + \rho_n \quad (\text{B.1})$$

für $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_3$. Als Erstes lösen wir die homogene Differentialgleichung ohne den Quellterm ρ_n . Dies kann einfach vor der Multipolzerlegung durchgeführt werden. Nach Umkehrung der Multipolzerlegung nimmt die homogene Gleichung die Form

$$\dot{\Delta}_{ab} + i \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \Delta_{ab} = -|\dot{\kappa}| \Delta_{ab} \quad (\text{B.2})$$

an. Diese Gleichung wird durch

$$\Delta_{ab}(\eta) = e^{-i \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} (\eta - \eta') - \kappa(\eta, \eta')} \Delta_{ab}(\eta') \quad (\text{B.3})$$

gelöst, mit $\kappa(\eta, \eta')$ dem Integral über $|\dot{\kappa}|$ von η' bis η . Das erste Argument von $\kappa(\eta, \eta')$ ist dabei die heutige konforme Zeit η_0 . Dieses Argument unterdrücken wir im Folgenden und schreiben $\kappa(\eta) = \kappa(\eta_0, \eta)$. Jetzt zerlegen wir die Lösung wieder in Multipole:

$$\begin{aligned} \Delta_{ab}(\eta) &= \sum_{l_1} e^{-\kappa(\eta, \eta')} (-i)^{l_1} \sqrt{4\pi(2l_1 + 1)} j_{l_1}(k(\eta - \eta')) Y_{l_1 0}(\mathbf{n}) \\ &\times \sum_{l_2, m} i^{-l_2} \sqrt{\frac{4\pi}{2l_2 + 1}} \Delta_{ab, l_2 m}(\eta') Y_{l_2 m}^s(\mathbf{n}) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

und wenden auf beiden Seiten den Operator L (siehe Gl. (2.75)) an

$$\begin{aligned} \Delta_{ab, lm}(\eta) &= \sum_{l_1, l_2} e^{-\kappa(\eta, \eta')} i^{l-l_1-l_2} \frac{(2l+1)(2l_1+1)}{2l_2+1} j_{l_1}(k(\eta - \eta')) \\ &\times \begin{pmatrix} l & l_1 & l_2 \\ m & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l_1 & l_2 \\ -s & 0 & -s \end{pmatrix} \Delta_{ab, l_2 m}(\eta'). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Der Spin s ist für $ab = ++, --$ null und für $ab = \pm\mp$ durch ± 2 gegeben. Wir wechseln mit Hilfe der Matrix $U_{X;[ab]}$ (siehe Gl. (2.57)) von der Helizitätsbasis in die Stokesparameterbasis. In der Stokesparameterbasis erhalten wir Summen oder Differenzen von Clebsch-Gordan-Koeffizienten mit entgegengesetzten m -Einträgen. Für diese gilt

$$\begin{pmatrix} l & l_1 & l_2 \\ -s & 0 & -s \end{pmatrix} = (-1)^{l-l_1-l_2} \begin{pmatrix} l & l_1 & l_2 \\ s & 0 & s \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Je nach Parität von $l - l_1 - l_2$ erhalten wir entweder eine Summe oder Differenz der $+-$ und $-+$ Komponenten. Für ungerade Parität führt dies zu einer Mischung der E- und B-Moden (siehe auch

Kapitel 2.3.2). Um dies kompakt aufzuschreiben, haben wir die Matrix $H_{XX'}$ in Gl. (2.82) definiert. Schließlich erhalten wir als homogene Lösung:

$$\begin{aligned} \Delta_{X,lm}(\eta) &= \sum_{l_1, l_2} \sum_{X'=I, E, B} e^{-\kappa(\eta, \eta')} i^{l-l_1-l_2} \frac{(2l+1)(2l_1+1)}{2l_2+1} j_{l_1}(k(\eta-\eta')) \\ &\quad \times \begin{pmatrix} l & l_1 & l_2 \\ m & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l_1 & l_2 \\ F_X & 0 & F_{X'} \end{pmatrix} H_{XX'}^*(l-l_1-l_2) \Delta_{X', l_2 m}(\eta'). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung kann mithilfe der homogenen Lösung als Integral aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \Delta_{X,lm}(\eta) &= \int d\eta' \sum_{l_1, l_2} \sum_{X'=I, E, B} e^{-\kappa(\eta, \eta')} i^{l-l_1-l_2} \frac{(2l+1)(2l_1+1)}{2l_2+1} j_{l_1}(k(\eta-\eta')) \\ &\quad \times \begin{pmatrix} l & l_1 & l_2 \\ m & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l_1 & l_2 \\ F_X & 0 & F_{X'} \end{pmatrix} H_{XX'}^*(l-l_1-l_2) \rho_{X', l_2 m}(\eta'). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Mit der Multiindexkonvention (siehe Abschnitt 3.2) definieren wir die Free-Streaming-Funktionen

$$\begin{aligned} j_{nm}(x) &= \sum_{l_1} i^{l_n-l_1-l_m} \frac{(2l_n+1)(2l_1+1)}{2l_m+1} j_{l_1}(x) H_{X_n X_m}^*(l_n-l_1-l_m) \\ &\quad \times \begin{pmatrix} l_n & l_1 & l_m \\ m_n & 0 & m_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_n & l_1 & l_m \\ F_{X_n} & 0 & F_{X_m} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Für $\rho_{(v_e, 1m)} \equiv 0$ erhalten wir dann die kompakte Gleichung

$$\Delta_n(\eta_0) = \int_0^{\eta_0} d\eta e^{-\kappa(\eta)} j_{nm}(k(\eta_0 - \eta)) \rho_m(\eta), \quad (\text{B.10})$$

gültig für $X_n = I, E, B$.

Anhang C.

Berechnung des Bispektrums zweiter Ordnung

In Kapitel 2.5 haben wir aus den Multipolkomponenten das messbare C_l^{BB} -Spektrum abgeleitet. Die Observable zur Messung der Non-Gaussianity ist das Bispektrum der Fluktuationen. In diesem Anhang berechnen wir den Untergrund zweiter Ordnung zum primordialen Bispektrum. Dabei vernachlässigen wir Polarisation, da Non-Gaussianity auch für die dominanten unpolarisierten Moden auftritt. Polarisation kann aber trivial in der Rechnung ergänzt werden.

Das Bispektrum ist definiert durch:

$$A_{l_1 m_1 l_2 m_2 l_3 m_3}^{\text{sym}} = \left\langle a_{l_1 m_1} a_{l_2 m_2} a_{l_3 m_3}^{(2)} \right\rangle + \text{sym.} \quad (\text{C.1})$$

Wir berechnen zunächst eine asymmetrische Dreipunktfunktion, in welcher der Koeffizient zweiter Ordnung ausgezeichnet ist. Wir rotieren das Koordinatensystem so, dass der Wellenvektor des Multipolkoeffizienten zweiter Ordnung in z -Richtung liegt ($\mathbf{k}'_3 = k_3 \hat{e}_z$):

$$\begin{aligned} \left\langle a_{l_1 m_1} a_{l_2 m_2} a_{l_3 m_3}^{(2)} \right\rangle &= \left(\frac{1}{4} \right)^3 (-i)^{l_1+l_2+l_3} \frac{(4\pi)^2}{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)} \\ &\quad \int \frac{d\mathbf{k}'_1 d\mathbf{k}'_2 d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9} Y_{l_1 m_1}^{-m'_1}(\mathbf{k}_3) Y_{l_2 m_2}^{-m'_2}(\mathbf{k}_3) Y_{l_3 m_3}^{-m'_3}(\mathbf{k}_3) \\ &\quad \left\langle \Delta_{l_1 m_1}^{(1)}(\eta_0, \mathbf{k}'_1) \Delta_{l_2 m_2}^{(1)}(\eta_0, \mathbf{k}'_2) \Delta_{l_3 m_3}^{(2)}(\eta_0, \mathbf{k}'_3) \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Nach der Rotation ist die Winkelabhängigkeit von $\mathbf{k}_3$ durch spingewichtete Kugelflächenfunktionen gegeben. Die Integration wird durch $3j$ -Symbole gelöst. Da wir in diesem Anhang $9j$ -Symbole benötigen, verwenden wir aufgrund der Konsistenz keine Clebsh-Gordan-Koeffizienten, sondern bezeichnen $3j$ -Symbole als 2×3 Matrizen in runden Klammern und $9j$ -Symbole als 3×3 Matrizen in geschweiften Klammern.

Mit den Transferfunktionen T_{lm} erster Ordnung erhalten wir:

$$\begin{aligned} A_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{l_3 m_3} &= \left(\frac{1}{4} \right)^3 (-i)^{l_1+l_2+l_3} \sqrt{\frac{(4\pi)^5}{(2l_1+1)^2(2l_2+1)^2(2l_3+1)}} \\ &\quad \int \frac{d\mathbf{k}'_1 d\mathbf{k}'_2 d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix} \\ &\quad T_{l_1}(\eta_0, k_1) T_{l_2}(\eta_0, k_2) Y_{l_1 m_1}(\mathbf{k}'_1) Y_{l_2 m_2}(\mathbf{k}'_2) \left\langle \Phi(\mathbf{k}'_1) \Phi(\mathbf{k}'_2) \Delta_{l_3 m_3}^{(2)}(\eta_0, \mathbf{k}'_3) \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Die Lösung zweiter Ordnung ist durch Gl. (3.16) als Kombination der Line-Of-Sight- und Greenfunktionsmethode gegeben. Um die Notation kompakt zu halten, definieren wir die Funktion $\mathfrak{G}_{lm}^{\tilde{l}\tilde{m}}(\eta_0, \eta, \mathbf{k})$:

$$\begin{aligned} \Delta_{l_3 m_3}^{(2)}(\mathbf{k}'_3, \eta_0) &= \int d\eta d\eta' |\dot{\kappa}(\eta)| e^{-\kappa(\eta)} j_{l_3 m_3}^{l_a m_a}(k_3(\eta_0 - \eta)) \\ &\quad \left(\delta_{l_a \tilde{l}_3} \delta_{m_a \tilde{m}_3} \delta(\eta - \eta') + |\dot{\kappa}(\eta')| \varsigma_{l_a m_a}^{l_b m_b} G_{l_b m_b}^{\tilde{l}_3 \tilde{m}_3}(\eta, \eta', \mathbf{k}'_3) \right) S_{\tilde{l}_3 \tilde{m}_3}(\eta', \mathbf{k}'_3) \\ &= \int d\eta' \mathfrak{G}_{l_3 m_3}^{\tilde{l}_3 \tilde{m}_3}(\eta_0, \eta', \mathbf{k}'_3) S_{\tilde{l}_3 \tilde{m}_3}(\eta', \mathbf{k}'_3). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Mit dieser Lösung und Gl. (3.24) zur Berechnung des Erwartungswertes erhalten wir

$$\begin{aligned}
 A_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{l_3 m_3} &= \left(\frac{1}{4}\right)^3 (-i)^{l_1+l_2+l_3} \sqrt{\frac{(4\pi)^7}{(2l_1+1)^2(2l_2+1)^2(2l_3+1)(2\tilde{l}_1+1)(2\tilde{l}_2+1)}} \\
 &\int \frac{d\mathbf{k}'_1 d\mathbf{k}'_2 dk_3 d\eta'}{(2\pi)^6} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix} \\
 &T_{l_1}(\eta_0, k_1) T_{l_2}(\eta_0, k_2) Y_{l_1 m'_1}(\mathbf{k}'_1) Y_{l_2 m'_2}(\mathbf{k}'_2) P_\Phi(k_1) P_\Phi(k_2) \\
 &(-1)^{\tilde{l}_1+\tilde{l}_2} \mathfrak{G}_{l_3 m'_3}^{\tilde{l}_3 \tilde{m}_3}(\eta_0, \eta', \mathbf{k}'_3) K_{l_3 \tilde{m}_3}^{\tilde{l}_1 \tilde{m}_1 \tilde{l}_2 \tilde{m}_2} \delta(\mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2 + \mathbf{k}'_3) \\
 &\left[Y_{\tilde{l}_1 \tilde{m}_1}(\mathbf{k}'_1) Y_{\tilde{l}_2 \tilde{m}_2}(\mathbf{k}'_2) T_{\tilde{l}_1}(\eta', k_1) T_{\tilde{l}_2}(\eta', k_2) + \begin{pmatrix} \tilde{l}_1 & \tilde{l}_2 & \tilde{l}_3 \\ \tilde{m}_1 & \tilde{m}_2 & -\tilde{m}_3 \end{pmatrix} \right]. \quad (C.5)
 \end{aligned}$$

Da in dieser Gleichung die meisten Winkelabhängigkeiten durch Kugelflächenfunktionen gegeben sind, bietet es sich an, auch die Deltafunktion durch Kugelflächenfunktionen auszudrücken:

$$\begin{aligned}
 \delta(\mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2 + \mathbf{k}'_3) &= 8i^{\tilde{l}_1+\tilde{l}_2+\tilde{l}_3} G_{l_1 l_2 l_3}^{\tilde{m}_1 \tilde{m}_2 \tilde{m}_3} Y_{\tilde{l}_1 \tilde{m}_1}(\mathbf{k}'_1) Y_{\tilde{l}_2 \tilde{m}_2}(\mathbf{k}'_2) Y_{\tilde{l}_3 \tilde{m}_3}(\mathbf{k}'_3) \\
 &\times \int dr r^2 j_{\tilde{l}_1}(rk_1) j_{\tilde{l}_2}(rk_2) j_{\tilde{l}_3}(rk_3). \quad (C.6)
 \end{aligned}$$

Die Winkelintegrale können dann durch $3j$ -Symbole angegeben werden. Um das Ergebnis weiter zu vereinfachen, müssen wir Einschränkungen an die Form der Kopplungskoeffizienten $K_{l_3 \tilde{m}_3}^{\tilde{l}_1 \tilde{m}_1 \tilde{l}_2 \tilde{m}_2}$ verwenden, welche aus der Kovarianz der Gleichungen unter Rotation folgen:

$$K_{l_3 \tilde{m}_3}^{\tilde{l}_1 \tilde{m}_1 \tilde{l}_2 \tilde{m}_2} = (-1)^{\tilde{l}_1+\tilde{l}_2+\tilde{m}_3} \sqrt{2\tilde{l}_3+1} \begin{pmatrix} \tilde{l}_1 & \tilde{l}_2 & \tilde{l}_3 \\ \tilde{m}_1 & \tilde{m}_2 & -\tilde{m}_3 \end{pmatrix} K^{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2 \tilde{l}_3}. \quad (C.7)$$

Mit dieser Eigenschaft können die Summen über die $3j$ -Symbole durch ein $9j$ -Symbol dargestellt werden, wodurch die meisten Summen über die m -Werte ausgeführt werden. Nachdem wir die symmetrische Kombination bilden, erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
 A_{l_1 l_2 l_3}^{\text{sym}} &= (-i)^{l_1+l_2+l_3-\tilde{l}_1-\tilde{l}_2-\tilde{l}_3} \sqrt{\frac{(2\hat{l}_1+1)^2(2\hat{l}_2+1)^2(2\hat{l}_3+1)^2}{(4\pi)^3(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}} \\
 &\int dr \frac{dk_1 dk_2 dk_3 d\eta'}{(2\pi)^3} r^2 j_{\hat{l}_1}(rk_1) j_{\hat{l}_2}(rk_2) j_{\hat{l}_3}(rk_3) \\
 &\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{l}_1 & \hat{l}_2 & \hat{l}_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & \tilde{l}_1 & \hat{l}_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\begin{pmatrix} l_2 & \tilde{l}_2 & \hat{l}_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 & \tilde{l}_3 & \hat{l}_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} l_1 & \tilde{l}_1 & \hat{l}_1 \\ l_2 & \tilde{l}_2 & \hat{l}_2 \\ l_3 & \tilde{l}_3 & \hat{l}_3 \end{pmatrix} \right\} \\
 &\left[(-i)^{\tilde{l}_1+\tilde{l}_2} (-1)^{m'_3} \sqrt{(2\tilde{l}_3+1)} \left(K^{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2 \tilde{l}_3} + (-1)^{\tilde{l}_1+\tilde{l}_2+\tilde{l}_3} K^{\tilde{l}_2 \tilde{l}_1 \tilde{l}_3} \right) \mathfrak{G}_{l_3 \tilde{l}_3}^{m'_3}(\eta_0, \eta', k_3) \right. \\
 &\left. T_{l_1}(\eta_0, k_1) T_{l_2}(\eta_0, k_2) T_{\tilde{l}_1}(\eta', k_1) T_{\tilde{l}_2}(\eta', k_2) P_\Phi(k_1) P_\Phi(k_2) L_{l_3 \tilde{l}_3 \hat{l}_3}^{m'_3} + \text{sym.} \right], \quad (C.8)
 \end{aligned}$$

mit $|\mathbf{k}'_3| = k_3$ und der Definition

$$\begin{pmatrix} l_3 & \tilde{l}_3 & \hat{l}_3 \\ m'_3 & -m'_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_3 & \tilde{l}_3 & \hat{l}_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_{l_3 \tilde{l}_3 \hat{l}_3}^{m'_3}. \quad (C.9)$$

Die Greenfunktion $\mathfrak{G}_{ll}^m(\eta_0, \eta, k)$ ist definiert durch $\mathfrak{G}_{lm}^{\tilde{l}}(\eta_0, \eta, k\hat{\mathbf{e}}_z)$. Die symmetrische Permutation in Gl. (C.8) bezieht sich auf die gleichzeitige zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 von l_i , $\tilde{l}_i$ und $\hat{l}_i$.

Diese Gleichung für das Bispektrum enthält nur noch Größen, welche bekannt sind und kann verwendet werden, um das Bispektrum zweiter Ordnung bei verschwindendem primordialen Bispektrum zu berechnen. Alle Winkelintegrationen sind ausgeführt; es verbleiben drei Wellenvektorintegrale und zwei Zeitintegrale, von denen eine Integration implizit in der Funktion $\mathfrak{G}_{ll}^m(\eta_0, \eta, k)$ enthalten ist, sowie ein Integral über den Parameter r .

Literaturverzeichnis

- [1] A. Abada, S. Davidson, F.X. Josse-Michaux, M. Losada, and A. Riotto. Flavour Issues in Leptogenesis. *JCAP*, 0604:004, 2006.
- [2] E. Nardi and Y. Nir, E. Roulet, and J. Racker. The importance of flavor in leptogenesis. *JHEP*, 0601:164, 2006.
- [3] A. Anisimov, W. Buchmüller, M. Drewes, and S. Mendizabal. Leptogenesis from Quantum Interference in a Thermal Bath. *Phys. Rev. Lett.*, 104:121102, 2010.
- [4] P.B. Arnold, G.D. Moore, and L.G. Yaffe. Transport coefficients in high temperature gauge theories: (I) Leading-log results. *JHEP*, 0011:001, 2000.
- [5] R. Barbieri and A. Dolgov. Neutrino oscillations in the early universe. *Nucl. Phys. B*, 349:743, 1991.
- [6] N. Bartolo, S. Matarrese, and A. Riotto. CMB Anisotropies at Second-Order II: Analytical Approach. *JCAP*, 01:019, 2007.
- [7] M. Beneke and C. Fidler. Boltzmann hierarchy for the cosmic microwave background at second order including photon polarization. *Phys. Rev. D*, 82:063509, 2010.
- [8] M. Beneke, C. Fidler, and K. Klingmüller. B polarization of cosmic background radiation from second-order scattering sources . *JCAP*, 04:008, 2011.
- [9] M. Beneke, B. Garbrecht, C. Fidler, M. Herranen, and P. Schwaller. Flavoured leptogenesis in the CTP formalism. *Nuclear Physics B*, 843(1):177, 2011.
- [10] M. Beneke, B. Garbrecht, M. Herranen, and P. Schwaller. Finite Number Density Corrections to Leptogenesis. *Nucl. Phys. B*, 843:1, 2010.
- [11] S. Blanchet, P. Di Bari, and G.G. Raffelt. Quantum Zeno effect and the impact of flavor in leptogenesis. *JCAP*, 0703:012, 2007.
- [12] J.R. Bond and G. Efstathiou. Cosmic background radiation anisotropies in universes dominated by nonbaryonic dark matter. *Astrophys. J*, 285:45, 1984.
- [13] W. Buchmuller, P. Di Bari, and M. Plumacher. Leptogenesis for Pedestrians. *Annals Phys.*, 315:305, 2005.
- [14] W. Buchmüller and S. Fredenhagen. Quantum mechanics of baryogenesis. *Phys. Lett. B*, 483:217, 2000.
- [15] W. Buchmüller and M. Plümacher. Spectator processes and baryogenesis. *Phys. Lett. B*, 511:74, 2001.
- [16] E. Calzetta and B.L. Hu. Nonequilibrium Quantum Fields: Closed Time Path Effective Action, Wigner Function and Boltzmann Equation. *Phys. Rev. D*, 37:2878, 1988.
- [17] E. Calzetta and B.L. Hu. *Nonequilibrium Quantum Field Theory*. Cambridge, UK: Univ. Pr., 2008.

- [18] V. Cirigliano, C. Lee, M.J. Ramsey-Musolf, and S. Tulin. Flavored Quantum Boltzmann Equations. *Phys. Rev. D*, 81:103503, 2010.
- [19] A. Cohen, D. Kaplan, and A. Nelson. Progress in electroweak baryogenesis. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 43:27, 1994.
- [20] P. Danielewicz. Quantum Theory Of Nonequilibrium Processes. 1. *Annals Phys.*, 152:239, 1984.
- [21] G. Dautcourt and K. Rose. Polarized Radiation in Relativistic Cosmology. *Astron. Nachr.*, 299:13, 1978.
- [22] S. Dodelson and J.M. Jubas. Re-Ionization and its Imprint on the Cosmic Microwave Background. *Astrophys. J*, 439:503, 1995.
- [23] M. Doran. Cmbeasy...an object oriented code for the cosmic microwave background. *JCAP*, 10:011, 2005.
- [24] T. Endoh, T. Morozumi, and Z.h. Xiong. Primordial lepton family asymmetries in seesaw model. *Prog. Theor. Phys.*, 111:123, 2004.
- [25] D. Larson et al. Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Power Spectra and WMAP-Derived Parameters. *Astrophys.J.Suppl.*, 192:16, 2011.
- [26] E. Komatsu et al. Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation. *Astrophys.J.Suppl.*, 192:18, 2011.
- [27] G.F. Smoot et al. Structure in the COBE DMR first year maps. *APJ*, 396:L1, 1992.
- [28] J. Kovac et al. Detection of polarization in the cosmic microwave background using DASI. *Nature*, 420:772, 2002.
- [29] J.N. Goldberg et al. Spin- s Spherical Harmonics and $\tilde{\delta}$. *J. Math. Phys.*, 8:2155, 1967.
- [30] M. Galassi et al. GNU Scientific Library Reference Manual (3rd Ed.). <http://www.gnu.org/software/gsl/>.
- [31] C. Fidler, M. Herranen, K. Kainulainen, and P.M. Rahkila. Flavoured quantum Boltzmann equations from cQPA. arXiv:hep-ph/1108.2309v1, 2011.
- [32] M. Fukugita and T. Yanagida. Baryogenesis Without Grand Unification. *Phys. Lett. B*, 174:45, 1986.
- [33] B. Garbrecht and T. Konstandin. Separation of Equilibration Time-Scales in the Gradient Expansion. *Phys. Rev. D*, 79:085003, 2009.
- [34] M. Garny, A. Hohenegger, and A. Kartavtsev. Quantum corrections to leptogenesis from the gradient expansion. arXiv:hep-ph/1005.5385, 2010.
- [35] M. Garny, A. Hohenegger, A. Kartavtsev, and M. Lindner. Systematic approach to leptogenesis in nonequilibrium QFT: vertex contribution to the CP-violating parameter. *Phys. Rev. D*, 80:125027, 2009.
- [36] M. Garny, A. Hohenegger, A. Kartavtsev, and M. Lindner. Systematic approach to leptogenesis in nonequilibrium QFT: self-energy contribution to the CP-violating parameter. *Phys. Rev. D*, 81:085027, 2010.
- [37] M. Herranen. Quantum kinetic theory with nonlocal coherence. arXiv:hep-ph/0906.3136, 2008.

-
- [38] M. Herranen, K. Kainulainen, and P.M. Rahkila. Quantum kinetic theory for fermions in temporally varying backgrounds. *JHEP*, 0809:032, 2008.
- [39] M. Herranen, K. Kainulainen, and P.M. Rahkila. Kinetic theory for scalar fields with nonlocal quantum coherence. *JHEP*, 0905:119, 2009.
- [40] M. Herranen, K. Kainulainen, and P.M. Rahkila. Towards a kinetic theory for fermions with quantum coherence. *Nucl. Phys. B*, 810:389, 2009.
- [41] M. Herranen, K. Kainulainen, and P.M. Rahkila. Coherent quantum Boltzmann equations from cQPA. *JHEP*, 12:072, 2010.
- [42] M. Herranen, K. Kainulainen, and P.M. Rahkila. Coherent quasiparticle approximation cQPA and nonlocal coherence. *J. Phys. Conf. Ser.*, 220:012007, 2010.
- [43] W. Hu and A. Cooray. Gravitational time delay effects on cosmic microwave background anisotropies. *Phys. Rev. D*, 63:023504, 2001.
- [44] W. Hu, U. Seljak, M.J. White, and M. Zaldarriaga. A Complete Treatment of CMB Anisotropies in a FRW Universe. *Phys. Rev. D*, 57:3290, 1998.
- [45] W. Hu and M.J. White. CMB anisotropies: Total angular momentum method. *Phys. Rev. D*, 56:596, 1997.
- [46] M. Joyce, T. Prokopec, and N. Turok. Electroweak baryogenesis from a classical force. *Phys. Rev. Lett.*, 75:3375, 1995.
- [47] M. Joyce, T. Prokopec, and N. Turok. Nonlocal electroweak baryogenesis. Part 1: Thin wall regime. *Phys. Rev. D*, 53:2930, 1996.
- [48] K. Kainulainen, T. Prokopec, M.G. Schmidt, and S. Weinstock. First principle derivation of semiclassical force for electroweak baryogenesis. *JHEP*, 0106:031, 2001.
- [49] L.V. Keldysh. Diagram technique for nonequilibrium processes. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 47:1515, 1964.
- [50] Frans R. Klinkhamer and N.S. Manton. A Saddle Point Solution in the Weinberg-Salam Theory. *Phys. Rev. D*, 30:2212, 1984.
- [51] E. W. Kolb and S. Wolfram. Baryon Number Generation In The Early Universe. *Nucl. Phys. B*, 172:224, 1980.
- [52] T. Konstandin, T. Prokopec, and M.G. Schmidt. Kinetic description of fermion flavor mixing and CP-violating sources for baryogenesis. *Nucl. Phys. B*, 716:373, 2005.
- [53] T. Konstandin, T. Prokopec, M.G. Schmidt, and M. Seco. MSSM electroweak baryogenesis and flavour mixing in transport equations. *Nucl. Phys. B*, 738:1, 2006.
- [54] A. Kosowsky. Cosmic Microwave Background Polarization. *Ann. Phys.*, 246:49, 1996.
- [55] V.A. Kuzmin, V.A. Rubakov, and M.E. Shaposhnikov. On anomalous electroweak baryon-number non-conservation in the early universe. *Physics Letters B*, 155(1-2):36, 1985.
- [56] G.P. Lepage. A New Algorithm for Adaptive Multidimensional Integration. *J. Comput. Phys.*, 27:192, 1978.
- [57] A. Lewis and A. Challinor. Weak Gravitational Lensing of the CMB. *Phys. Rept.*, 429:1, 2006.

- [58] A. Lewis, A. Challinor, and A. Lasenby. Efficient computation of CMB anisotropies in closed FRW models. *Astrophys. J.*, 538:473, 2000.
- [59] C. Misner, K. Thorne, and J. Wheeler. *Gravitation*. Freeman, San Francisco, U.S.A., 1973.
- [60] S. Mollerach, D. Harari, and S. Matarrese. CMB polarization from secondary vector and tensor modes. *Phys. Rev. D*, 69:063002, 2004.
- [61] S. Mollerach, D. Harari, and S. Matarrese. CMB polarization from secondary vector and tensor modes. *Phys. Rev. D*, 69:063002, 2004.
- [62] V.F. Mukhanov and G.V. Chibisov. Quantum fluctuations and a nonsingular universe. *JETP Lett.*, 33:532, 1983.
- [63] D.I. Nagirner and J. Poutanen. *Astronomy & Astrophysics*, 379:664, 2001.
- [64] E. Nardi, Y. Nir, J. Racker, and E. Roulet. On Higgs and sphaleron effects during the leptogenesis era. *JHEP*, 0601:068, 2006.
- [65] A. Penzias and R.W. Wilson. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. *APJ*, 142:419, 1965.
- [66] E. Petitgirard. Massive fermion dispersion relation at finite temperature. *Z. Phys. C*, 54:673, 1992.
- [67] A. Pilaftsis and T.E.J. Underwood. Resonant leptogenesis. *Nucl. Phys. B*, 692:303, 2004.
- [68] A. Pilaftsis and T.E.J. Underwood. Electroweak-scale resonant leptogenesis. *Phys. Rev. D*, 72:113001, 2005.
- [69] C. Pitrou. The Radiative transfer at second order: A Full treatment of the Boltzmann equation with polarization. *Class. Quant. Grav.*, 26:065006, 2009.
- [70] C. Pitrou, J.P. Uzan, and F. Bernardeau. The cosmic microwave background bispectrum from the non-linear evolution of the cosmological perturbations. *JCAP*, 07:003, 2010.
- [71] J. Portsmouth and E. Bertschinger. A tensor formalism for transfer and Compton scattering of polarized light. arXiv:astro-ph/0412094, 2004.
- [72] T. Prokopec, M.G. Schmidt, and S. Weinstock. Transport equations for chiral fermions to order $\hbar$ and electroweak baryogenesis. *Annals Phys.*, 314:208, 2004.
- [73] T. Prokopec, M.G. Schmidt, and S. Weinstock. Transport equations for chiral fermions to order $\hbar$ and electroweak baryogenesis. II. *Annals Phys.*, 314:267, 2004.
- [74] P. Schiffer. Induzierte B-Polarisation der Hintergrundstrahlung durch Fluktuationen zweiter Ordnung. Diplomarbeit, 2007.
- [75] B.L. Schumaker and C.M. Caves. New formalism for two-photon quantum optics. 1. Quadrature phases and squeezed states. *Phys. Rev. A*, 31:3068, 1985.
- [76] J.S. Schwinger. Brownian motion of a quantum oscillator. *J. Math. Phys.*, 2:407, 1961.
- [77] S. Seager, D.D. Sasselov, and D. Scott. A new calculation of the recombination epoch. *APJ*, 523:L1, 1999.
- [78] U. Seljak and M. Zaldarriaga. A Line of sight integration approach to cosmic microwave background anisotropies. *Astrophys. J.*, 469:437, 1996.

- [79] U. Seljak and M. Zaldarriaga. Signature of gravity waves in polarization of the microwave background. *Phys. Rev. Lett.*, 78:2054, 1997.
- [80] L. Senatore, S. Tassev, and M. Zaldarriaga. *JCAP*, 0908:031, 2009.
- [81] G. Sigl and G. Raffelt. *Nucl. Phys. B*, 406:423, 1993.
- [82] A. De Simone and A. Riotto. On the impact of flavour oscillations in leptogenesis. *JCAP*, 0702:005, 2007.
- [83] A. De Simone and A. Riotto. Quantum Boltzmann Equations and Leptogenesis. *JCAP*, 0708:002, 2007.
- [84] S.Mrowczynski and U.W. Heinz. Towards Relativistic Transport-Theory of Nuclear Matter. *Annals Phys.*, 229:1, 1994.
- [85] T. Morozumi T. Endoh and Z.h. Xiong. Primordial lepton family asymmetries in seesaw model. *Prog. Theor. Phys.*, 111:123, 2004.
- [86] H.A. Weldon. Effective Fermion Masses Of Order Gt In High Temperature Gauge Theories With Exact Chiral Invariance. *Phys. Rev. D*, 26:2789, 1982.
- [87] M. Zaldarriaga and U. Seljak. Gravitational Lensing Effect on Cosmic Microwave Background Polarization. *Phys. Rev. D*, 58:023003, 1998.

Lebenslauf:

Persönliche Daten:

Name: Christian Fidler

Geburtstag: 7 April 1983

Geburtsort: Eschweiler

Staatsangehörigkeit: Deutsch

Qualifikationen:

2002: Erlangen des Abiturs

2003 bis 2008: Studium der Physik

2008: Erhalt des Physik Diploms

ab 2008: Promotion in der Physik