

Schriftenreihe des

Lehrstuhls für  
Stahlbau und Leichtmetallbau  
der RWTH Aachen

Heft 82 - 2018

# Vereinfachte dynamische Bemessung von WiB-Eisenbahnverbundbrücken für den Hochgeschwindigkeitsverkehr

---

von Hetty Bigelow

Vereinfachte dynamische Bemessung von WiB-Eisenbahn-  
verbundbrücken für den Hochgeschwindigkeitsverkehr

Von der Fakultät für Bauingenieurwesen der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule  
Aachen zur Erlangung des akademischen Grades einer Doktorin  
der Ingenieurwissenschaften genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Hetty Bigelow

Berichter: apl. Professor Dr.-Ing. Benno Hoffmeister  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. Markus Feldmann  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. Guido De Roeck

Tag der mündlichen Prüfung: 09. Mai 2018

Diese Dissertation ist auf den Internetseiten der Hochschulbibliothek online verfügbar.



Schriftenreihe Stahlbau – RWTH Aachen

Herausgeber:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Markus Feldmann

Gründer:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr.h.c. Gerhard Sedlacek

Heft 82

**Hetty Bigelow**

**Vereinfachte dynamische Bemessung von WiB-Eisenbahn-  
verbundbrücken für den Hochgeschwindigkeitsverkehr**

D 82 (Diss. RWTH Aachen University, 2018)

Shaker Verlag  
Aachen 2018

### **Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: D 82 (Diss. RWTH Aachen University, 2018)

Copyright Shaker Verlag 2018

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-6258-8

ISSN 0722-1037

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: [www.shaker.de](http://www.shaker.de) • E-Mail: [info@shaker.de](mailto:info@shaker.de)

## **Vorwort des Herausgebers**

Eisenbahnbrücken aus Walzträgern in Beton, kurz WIB-Brücken genannt, gibt es seit Ende des 19. Jahrhunderts. Sie sind für kurze Spannweiten besonders vorteilhaft, weil sie hohe Tragfähigkeiten mit einfacher Bauweise kombinieren. Gleichwohl ist die Bemessung dieses Brückentyps für heutige Ansprüche unbefriedigend. Beispielsweise erfolgt die Ermittlung der dynamisch wirksamen Querschnittssteifigkeit nur unter Ansatz der isolierten Struktur, aber ohne den Beitrag von weiteren Elementen, was zu deutlichen Abweichungen führt. Fehlende Forschungen zur WIB-Brückenbemessung haben dazu geführt, dass das spezifische Trag- und Verformungsverhalten dem Grunde nach nur unzureichend bekannt ist, insbesondere vor dem Hintergrund des integralen Charakters der Bauweise. Dieses Defizit stellt ein Hindernis für die Verwendung von WIB-Brücken für Hochgeschwindigkeitsverkehre dar, da hier die dynamischen Eigenschaften der Brücke besonders wichtig sind.

Hier stellt sich die wissenschaftliche Aufgabe, eine Methodik zur Implementierung unterschiedlicher Randbedingungen in handhabbaren mechanischen Modellen zur Vorhersage der dynamischen Antwort solcher Brückenstrukturen zu entwickeln. Frau Hetty Bigelow hat sich dankeswerterweise mit der vorliegenden Dissertation dieser Aufgabe mit theoretischen und experimentellen Untersuchungen angenommen.

Denn die realitätsnahe Prognose der dynamischen Bauwerkseigenschaften wie Eigenfrequenzen, Eigenformen und Dämpfungsparameter, sowie die Prognose der Bauwerksantwort auf überfahrende Züge stellt insbesondere bei WIB-Brücken eine besondere Herausforderung dar.

Mit der Ableitung eines vereinfachten Verfahrens zur Vorhersage einiger dynamischer Eigenschaften, vornehmlich der Eigenfrequenzen und Dämpfungsparameter hat Frau Bigelow es geschafft, bei Wahrung der Einfachheit des Rechengangs, die Bemessung solcher Strukturen realistischer zu gestalten, die wesentlichen Komponenten des dynamischen Verhaltens zu identifizieren und so die Komplexität deutlich zu reduzieren.

Der Stiftung Stahlanwendungsforschung und der Forschungsgesellschaft Stahlanwendung e.V. FOSTA ist besonders für die Förderung der Arbeiten im Projekt P 941 „Dynamische Auslegung von Eisenbahnbrücken in Stahl- und Stahlverbundbauweise mit kleinen und mittleren Spannweiten für den Hochgeschwindigkeitsverkehr“, aus dem diese Dissertation hervorging, zu danken.

Aachen, Juli 2018

Prof. Dr.-Ing. Markus Feldmann



## Kurzfassung

Eisenbahnbrücken in Walzträger in Beton (WiB-) Bauweise weisen viele Vorteile auf: Sie sind langlebig, können mit hohen Schlankheiten ausgeführt werden und bedürfen beim Bau nur einem geringen Schalungsaufwand. Da sie i.d.R. als Einfeldträger ausgeführt werden, erweisen sich ihre hohen Schlankheiten gleichzeitig in gewisser Weise auch als Nachteil: Die berechneten Eigenfrequenzen sind üblicherweise relativ klein und lassen bereits bei niedrigen Überfahrtsgeschwindigkeiten Resonanzeffekte infolge der regelmäßigen Achsabstände der überfahrenden Züge erwarten. Bauwerksmessungen haben allerdings wiederholt gezeigt, dass sie sich in der Realität deutlich besser verhalten als prognostiziert und erwartete Resonanzeffekte erst bei deutlich höheren Geschwindigkeiten zu erwarten sind.

Die z.T. beachtlichen Unterschiede zwischen Realität und Prognose sind seit längerem bekannt und werden allgemein zusätzlichen Beiträgen zu Systemsteifigkeit und Dämpfung von s.g. baulichen Randbedingungen zugeschrieben, beispielsweise Schotterbett, Schienen, Schwellen oder Randkappen.

Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt zunächst eine ausführliche Betrachtung verschiedener Einflussparameter auf das dynamische Verhalten von WiB-Eisenbahnbrücken zur Klärung, welche zusätzlichen Beiträge sich zuverlässig von anderen Effekten isolieren und identifizieren lassen, um sie in einer Bemessung berücksichtigen zu können und welche Einflussparameter weiterer Forschung bedürfen.

Experimentelle Untersuchungen zum Koppeleffekt zwischen Eisenbahnbrücken, deren Überbauten durch eine Längsfuge getrennt ausgeführt werden, sich aber ein gemeinsames Schotterbett teilen, werden anhand eines speziell konzipierten Versuchsstandes durchgeführt, welcher eine Überlagerung mit anderen, an realen Bauwerken gleichzeitig wirkenden Effekten, ausschließt. Untersucht werden die zusätzlichen Beiträge des Koppeleffektes zu Systemsteifigkeit und zur Dämpfung.

Basierend auf den in Deutschland gültigen Normen werden Modellierungsvereinfachungen hergeleitet. Die Herleitung einer horizontalen Ersatzfedersteifigkeit zur Abbildung des Einspanneffektes von über die Brückenenden hinauslaufenden Gleisen ermöglicht eine signifikante Reduzierung von Modellierungsaufwand und Berechnungsdauer. Zur vereinfachten Berechnung von gelenkig gelagerten, balkenartigen Einfeldträgerbrücken mit konstanter Steifigkeits- und Masseverteilung werden die, in der Schienenebene wirkenden, horizontalen Ersatzfedern in Drehfedern an den Auflagern umgewandelt.

Das so entstandene Balkensystem mit Drehfedern an den Auflagern wird anschließend in ein äquivalentes Einmassensystem überführt. Mit den entwickelten



Formeln lässt sich nun direkt die erste Biegeeigenfrequenz  $n_0$  unter Berücksichtigung der Einspannwirkung der Gleise analytisch berechnen. Für den Anwender ergibt sich so die Möglichkeit, ohne numerisches Brückenmodell eine vereinfachte Überprüfung des Resonanzrisikos unter Berücksichtigung der Einspannwirkung der Gleise durchzuführen, bei der  $n_0$  den normativ geregelten Grenzwerten gegenübergestellt wird. Kann Resonanz ausgeschlossen werden, so ist bei Überfahrtsgeschwindigkeiten bis 200 km/h im typischen Anwendungsbereich der WiB-Brücken (Einfeldträgerbrücken mit Stützweiten bis 40 m) eine Bemessung anhand statischer Ersatzlastmodelle ausreichend.

Kann Resonanz nicht vereinfacht ausgeschlossen werden oder generell bei Überfahrtsgeschwindigkeiten über 200 km/h, müssen dynamische Berechnungen zur Simulation von Überfahrten aller auf der Brücke vorgesehenen Zugtypen durchgeführt und ausgewertet werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurden dazu Berechnungstools entwickelt, die anhand äquivalenter Einmassensysteme die automatisierte Simulation einer Vielzahl von Zugüberfahrten in sehr kurzer Zeit unter Berücksichtigung der Einspannwirkung der Gleise ermöglichen. Zur Beschreibung der Brücke werden lediglich die Eingabeparameter Biegesteifigkeit, Masse, Stützweite, die im Rahmen der Arbeit hergeleitete Drehfedersteifigkeit an den Auflagern und die nach Norm anzusetzende Dämpfung benötigt. Auch hier ergibt sich eine signifikante Reduzierung des Modellierungs- und Berechnungsaufwandes, verglichen mit herkömmlicher Berechnungssoftware.

## Summary

Filler beam railway bridges have many advantages. They are durable, can feature high slenderness and require only a small amount of framework material during construction. They are usually constructed as simply supported beams, i.e. their high slenderness can also be in some respects disadvantageous. Calculated eigenfrequencies are often relatively small, thus leading to anticipation of resonance effects already at low crossing velocities induced by equally spaced axle loads. Measurements have repeatedly shown though, that filler beam bridges behave much better in reality than predicted by calculations. The anticipated resonance effects occur eventually at much higher crossing velocities than predicted.

The sometimes significantly high differences between measurements and calculations have been generally noticed before and are affiliated with additional contributions of non-structural elements to system stiffness and damping, e.g. the contributions of ballast, tracks, sleepers or edge caps.

The thesis at hand presents a detailed examination of the contributions of individual parameters influencing the dynamic behavior of filler beam bridges. The examination aims at separating parameters, which can be clearly identified and isolated from other effects and thus could be considered in design, from those parameters, that require further extensive research.

Experimental tests regarding interaction effects between bridge decks, which are separated by longitudinal gaps but share a ballast bed, are performed with a newly developed test set up. This set up eliminates effects, which occur simultaneously with the interaction effects on real bridges. The contribution of the interaction effects to stiffness and damping are tested.

Based on German codes, modelling simplifications are derived. The derivation of a horizontal equivalent spring stiffness, representing restraining effects of railway tracks exceeding bridges, enables a significant reduction of modelling effort and computational time. The equivalent horizontal spring, which is effective in the centroidal axis of the track, is afterwards converted into an equivalent rotational spring, which can be applied at the hinges of simple beam models, thus simplifying the design of simple span bridges.

The developed beam system with rotational springs is then converted into an equivalent single degree of freedom (SDOF) system. With the derived analytical formulas, the fundamental frequency  $n_0$  can directly be calculated considering the restraining effects of tracks. Users can now include the restraining effects of tracks into a simplified estimation of resonance risks, where  $n_0$  is compared to limiting values given by the codes. If resonance can be ruled out and crossing velocities are 200 km/h (56 m/s) at most, the dynamic design of single span bridges with spans up to 40 m (thus the scope of application of filler beam bridges) can be performed with equivalent static loads only.

If resonance cannot be ruled out using the simplified approach, or, if crossing velocities are above 200 km/h (56 m/s), dynamic simulations have to be performed considering all train types designated for the bridge in question. The results of all simulations then have to be interpreted. In scope of the presented thesis, computation tools using SDOFs are programmed, which enable automated simulations of large numbers of train crossings in a short time, including the restraining effects of tracks. The tool requires only the input parameters bending stiffness, mass, span length, the rotational spring stiffness just derived in this thesis and a damping ratio provided by the codes. This again leads to a significant reduction of modelling effort and computation time compared to conventional calculation software.

## Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur und Symbole	1
1 Einleitung	7
1.1 Motivation	7
1.2 Zielsetzung	9
1.3 Vorgehen	10
2 Dynamisches Verhalten von Eisenbahnbrücken	11
2.1 Bemessung und Modellierung von Eisenbahnbrücken	11
2.1.1 Vereinfachte Verfahren	11
2.1.2 Dynamische Berechnung und Modellierung	15
2.1.3 Erforderliche spezielle Nachweise	22
2.1.4 Numerische Verfahren/Berechnungsmethodik	26
2.1.5 Belastungscharakteristik durch überfahrende Züge	44
2.1.6 Reduzierung des Aufwandes für dynamische Berechnungen	48
2.2 Gegenüberstellung Berechnung und Messung	50
2.2.1 Gegenüberstellung reales System und Berechnungsmodell	50
2.2.2 Auswertungsmethoden Messdaten	50
3 Einflussfaktoren auf das dynamische Verhalten von Eisenbahnbrücken	54
3.1 Temperatur und Witterungsbedingungen	54
3.2 Statisches System und Interaktion Brückenparameter	55
3.3 Tragwerksmodellierung	56
3.4 Lagerbedingungen bei Elastomerlagern	59
3.5 Eisenbahnschienen	59
3.6 Walzträger in Beton (WiB-) Überbau	60

3.7	Randkappen	66
3.8	Schotteroberbau	69
3.8.1	Biegesteifigkeit und Dämpfung	70
3.8.2	Koppeleffekt Zwillingsbrücken	73
4	Experimentelle Untersuchungen zum Koppeleffekt	76
4.1	Vorüberlegungen	76
4.2	Versuche	77
4.2.1	Voruntersuchungen der Brücke (ohne Koppeleffekt)	79
4.2.2	Brücke mit vollständigem Schotterbett (Koppeleffekt)	88
4.3	Ausblick auf zukünftige Versuche	110
4.3.1	Erste Ergebnisse	111
5	Modellentwicklung für die vereinfachte Bemessung	113
5.1	Modellentwicklung äquivalentes Einmassensystem für Überfahrtssimulationen	113
5.2	Berücksichtigung zusätzlicher Biegesteifigkeiten	120
5.2.1	Allgemeines	120
5.2.2	Beitrag der Gleise zu Biege- und Dehnsteifigkeit	121
5.3	Modellentwicklung zur Berücksichtigung zusätzlicher Systemsteifigkeiten	123
5.3.1	Systemveränderung durch Einspannwirkung der Gleise	123
5.3.2	Entwicklung linearer Ersatzfedersteifigkeiten	125
5.3.3	Modellentwicklung äquivalentes Einmassensystem zur Ermittlung der ersten Biegeeigenfrequenz $n_0$	131
5.3.4	Modellentwicklung äquivalentes Einmassensystem für Überfahrtssimulationen unter Berücksichtigung der Einspannwirkung	137
5.3.5	Modellentwicklung zur Bestimmung weiterer Systemgrößen	144

5.3.6	Betrachtung höherer Moden	151
5.4	Modellentwicklung für Systeme mit veränderlichen Steifigkeiten und Dämpfungen	155
5.4.1	Entwicklung Nicht-linearer Ersatzfedersteifigkeiten	155
5.4.2	Simulation von Zugüberfahrten auf veränderlichen Systemen	159
5.5	Ausblick: Berücksichtigung Koppeleffekt bei Zwillingenbrücken	168
6	Zusammenfassung Berechnungsablauf	172
6.1	Ermittlung Systemeingangsparameter	172
6.2	Berechnungen und Ergebnisverwertung	173
6.2.1	Ermittlung Biegeeigenfrequenzen	173
6.2.2	Simulation von Zugüberfahrten	174
7	Zusammenfassung und Ausblick	176
8	Literaturverzeichnis	180
Anhang A	Schienen	I
A.1	Lineare Ersatzfedersteifigkeiten	I
A.2	Nicht-lineare Federcharakteristiken	X
Anhang B	Matlab Codes	XIII
B.1	Ermittlung Biegeeigenfrequenzen und Formen	XIII
B.2	lineare Ersatzfedersteifigkeiten „Bahndamm“	XIII
B.3	nicht-lineare Ersatzfedersteifigkeiten „Bahndamm“	XVI
B.4	Einmassensystem ohne $c_\phi$	XXIII
B.5	Einmassensystem mit $c_\phi$ (konstant)	XXV
B.6	Einmassensystem mit $c_\phi$ (variabel)	XXIX



## Nomenklatur und Symbole

Nachfolgend aufgeführt werden alle im weiteren Verlauf der Arbeit verwendeten Symbole und Abkürzungen. Diese werden beim erstmaligen Vorkommen im Text kurz erläutert.

### Lateinische Buchstaben

$A_0$	Amplitude zu Beginn des Ausschwingvorgangs	
$A_i$	Teilflächen Verbundquerschnitt	
$A_n, A_{n+m}$	$n$ -te und $(n+m)$ -te Amplitude	
$a$	Länge der Streckenlasten SW/0 und SW/2	[EN1991-2]
$a$	Abstand Schienenstützpunkte	[UIC776-1, 2007]
$\tilde{C}$	Hilfswert für Berechnungen	[EN1991-2]
$\tilde{\tilde{C}}$	Hilfswert für Berechnungen	
$a_z$	Vertikale Überbaubeschleunigungen	
$C_B$	Bettungsmodul Koppelfeffekt [MN/m <sup>2</sup> ]	
$C_1 \dots C_4$	Konstanten	
$c$	Abstand zwischen Streckenlasten SW/0 und SW/2	[EN1991-2]
$c$	Dämpfungskonstante	[UIC776-1, 2007]
$\tilde{c}$	Hilfswert für Berechnungen	
$C_{coup}$	Koppelsteifigkeit Eisenbahnschotter [MN/m <sup>3</sup> ]	
$C_1 \dots C_6$	Integrationskonstanten	
$C_\varphi$	Drehfedersteifigkeit	
$C_{\varphi, Gleis}$	Drehfedersteifigkeit Ersatzdrehfeder zur Abbildung der Einspannwirkung durch die Gleise	
$d$	Schwellenabstand	
$d$	Abschnittslänge Differenzenverfahren	
$E$	Elastizitätsmodul	
$e$	Ausmitte Unwuchterreger	
$e_i$	Abstand Schwerelinien der Teilquerschnitte nach der Theorie des elastischen Verbundes	
$e_F$	Abstand Koppelfuge - Schwerelinie Überbau	
$EA$	Dehnsteifigkeit	
$EA_{Gleis}$	Dehnsteifigkeit des Gleises	
$EA_{Überbau}$	Dehnsteifigkeit des Überbaus	
$EI$	Biegesteifigkeit	
$EI_{Gleis}$	Biegesteifigkeit des Gleises	
$EI_{Überbau}$	Biegesteifigkeit des Überbaus	
$EI_{Verbund}$	Biegesteifigkeit nach der Theorie des elastischen Verbundes	
$F(t)$	Lastvektor	



$ F $	Kraftamplitude Unwuchterreger	
$F_{fric}$	Reibkraft	
$F_D$	Dämpfungskraft	
$F_h$	horizontaler Kraftanteil Unwuchterreger	
$F_j$	Fourier-Amplitude	
$F_k$	Rückstellkraft	
$F_V$	vertikaler Kraftanteil Unwuchterreger	
$F_0$	Kraftamplitude	
$f_i$	$i$ -te Frequenz	
$G$	Schubmodul	
$H$	Horizontale Lagerkraft	[UIC774]
$h_{Schotter}$	Einbauhöhe Eisenbahnschotter	
$h_{SL}$	Vertikaler Abstand Schwerelinie Schiene - System-verdrehachse	
$K$	Zwischenwert zur Berechnung von $\varphi'$	[EN1991-2]
$K$	Steifigkeit der Unterbauten gegen Längsverschiebung	[EN1991-2] [UIC774]
$K_L$	Lastfaktor	
$K_M$	Massefaktor	
$K_{Sd}$	Lineare Federsteifigkeit des Längsverschiebewiderstandes	
$k$	Längsverschiebewiderstand des Gleises je Meter	[EN1991-2] [UIC774]
$k$	Federsteifigkeit	
$k$	Steifigkeit	
$k_E$	Ersatzsteifigkeit	
$k_{Ersatz}$	Ersatzfedersteifigkeit des Gleises im Dammbereich	
$k_{Ersatz,linear}$	Lineare Ersatzfedersteifigkeit des Gleises im Dammbereich	
$k_{Ersatz,n-l}$	Nicht-lineare Ersatzfedersteifigkeit des Gleises im Dammbereich	
$k_{Koppel}$	Koppelsteifigkeit der Schotterfuge	
$L$	Spannweite	
$L_C$	Achsabstand = Wagenlänge („Coach“)	
$L_D$	Im Berechnungsmodell auf dem Dammbereich zu berücksichtigende Gleislänge	[RiL804]
$L_{LV}$	Längsversatz von Brückenüberbauten	
$L_T$	Ausgleichslänge des an das Widerlager angrenzenden Überbauendes	[RiL804]
$L_T$	Dehnlänge	[UIC774]
$L_T$	Auszugslänge/Dehnlänge zwischen dem thermischen Festpunkt und dem freien Überbauende	[RiL804] [EN1991-2]
$L_{üP}$	Länge über Puffer = Wagenlänge	[RiL804]
$L_\Phi$	maßgebende Länge zur Ermittlung von $\Phi$	[EN1991-2] [UIC774]

$M_E$	Ersatzmasse	
$M_t$	Gesamtmasse Brücke	
$m$	Punktmasse beim Einmassensystem	
$m$	Anzahl Federelemente im „Teilsystem Bahndamm“	
$m_{St}$	Statisches Moment Unwuchterreger	
$N$	Normalkraft	
$N_0$	Normalkraft im statisch bestimmten Ersatzsystem (Prinzip der virtuellen Kräfte)	
$N_i$	virtuelle Normalkraft (Prinzip der virtuellen Kräfte)	
$N_{res}$	Resultierende Normalkraft im statisch unbestimmten System	
$N_{res,i}$	Resultierende Normalkraft im statisch unbestimmten System im Stab $i$	
$n_0$	Erste Biegeeigenfrequenz [Hz]	
$n_{01}$	oberer Grenzwert für $n_0$	[RiL804]
	(vereinfachter Resonanznachweis)	[EN1991-2]
$n_{02}$	unterer Grenzwert für $n_0$	[RiL804]
	(vereinfachter Resonanznachweis)	[EN1991-2]
$q_{vk}$	charakteristischer Wert der Vertikallast (gleichmäßig verteilte Last)	[EN1991-2]
		[UIC776-1, 2007]
$R$	Residuum der polynomischen Approximation	
$r_\delta$	Elastizitätsparameter $0 \leq r_\delta \leq 1$	
$s$	Verschiebung Schwerelinie	
$T$	Schwingdauer	
$T_i$	$i$ -te Schwingperiode	
$T_{min}$	kleinste Eigenschwingperiode	
$t$	Verwindung der Spurweite	[EN1990]
$t$	Zeit	
$\Delta t$	Zeitschrittweite	
$U_j$	komplexe Verschiebungsamplitude	
$u$	Relativverschiebung der Schiene	[RiL804] [UIC774]
		[EN1991-2]
$u(t)$	Durchbiegung	
$\dot{u}(t)$	Geschwindigkeit	
$\ddot{u}(t)$	Beschleunigung	
$u_{dyn}$	größte dynamische Antwort	
$u_h(t)$	homogener Anteil der Lösung der Differenzialgleichung	
$u_L$	Losreißamplitude	
$u_p(t)$	partikulärer Anteil der Lösung der Differenzialgleichung	
$u_{stat}$	(zu $u_{dyn}$ ) zugehörige größte statische Antwort	
$u_0$	Verschiebung zwischen elastischem und plastischem Bereich (Längsverschiebewiderstand des Gleises)	[RiL804] [UIC774]
		[EN1991-2]

$V$	dynamische Vergrößerung	
$v$	Streckenhöchstgeschwindigkeit in m/s, maximale zugelassene Fahrzeuggeschwindigkeit in m/s, Geschwindigkeit in m/s	[EN1991-2]
$V_{cancel}$	Aufhebungsgeschwindigkeit	
$V_{inf}$	untere Grenze der Geschwindigkeit für alle Nachweise	[RiL804]
$V_{sup,LS}$	obere Grenze der Geschwindigkeit für Tragsicherheitsnachweise	[RiL804]
$V_{sup,SLS}$	obere Grenze der Geschwindigkeit für Gebrauchstauglichkeitsnachweise	[RiL804]
$V_{Zug}$	maximal mögliche Zuggeschwindigkeit	[RiL804]
$V_{\delta}$	Örtlich zulässige Geschwindigkeit	[RiL804]
$V_{res,i,j,k}$	kritische Geschwindigkeit	[RiL804]
$W_D$	während eines Schwingzyklus dissipierte Energie	
$W_E$	Formänderungsarbeit	
$w(x)$	Durchbiegung	
$X^*$	Hilfswert für Berechnungen	
$X_1$	Hilfswert für Berechnungen	
$X_2$	Hilfswert für Berechnungen	
$x_i$	statisch unbestimmte Ersatzlast (Prinzip der virtuellen Kräfte)	
$y_{dyn}$	größte dynamische Antwort	[RiL804] [EN1991-2]
$y_{ges}$	Gesamtergebnisse (Schnittgrößen, Verformungen, Beschleunigungen) inkl. dynamischem Zuwachs und Einfluss von Gleislagefehlern	[RiL804]
$y_{stat}$	(zu $y_{dyn}$ ) zugehörige größte statische Antwort an irgendeinem einzelnen Punkt des Bauteils aufgrund eines BZ oder HSLM	[RiL804] [EN1991-2]
$z_i$	Abstand Schwerelinie Teilquerschnitt - Schwerelinie Gesamtquerschnitt	

## Griechische Buchstaben

$\alpha$	Lastklassenbeiwert	[EN1991-2] [UIC776-1, 2007]
$\alpha_i$	Verbundsteifigkeitsparameter (voller Verbund)	
$\alpha_{i,eff}$	effektiver Verbundsteifigkeitsparameter (Teilverbund)	
$\beta, \gamma$	Parameter Newmark Algorithmus	
$\gamma$	Wichte	[EN1991-1-1]
$\delta$	(vertikale) Verformung	[EN1990]
$\delta_B$	Relative Verformung des Überbaus infolge Anfahren und Bremsen	[EN1991-2]

$\delta_p$	horizontale Verschiebung auf Lagerebene infolge Biegung der Stütze	[UIC774]
$\delta_\varphi$	horizontale Verschiebung auf Lagerebene infolge Verdrehung des Fundamentes	[UIC774]
$\delta_h$	horizontale Verschiebung auf Lagerebene infolge Verschiebung des Fundamentes	[UIC774]
$\delta_{h,Ok-Üb}$	Querverformung auf der Oberseite des Überbaus	
$\delta_{h,res}$	horizontale Verschiebung am Übergang der Teilsysteme Bahndamm und Überbau	
$\delta_i$	horizontale Verschiebung einer Feder im „Teilsystem Bahndamm“	
$\delta_v$	Vertikale Verschiebungen an den Brückenenden	[EN1991-2]
$\delta_1$	horizontale Verschiebung der Schienen infolge Schlupf zwischen Überbau und Schiene	
$\delta_2$	horizontale Verschiebung der Schienen infolge Biegung des Überbaus infolge vertikaler Einwirkungen	
$\mu$	Masse pro Längeneinheit	
$\xi$	Lehrsche Dämpfung	[RiL804] [EN1991-2]
$\Delta\xi$	Zusatzdämpfung	[RiL804] [EN1991-2]
$\eta$	dynamische Überhöhung	
$\theta$	Endtangentialwinkel	[RiL804]
$\theta$	Massenträgheitsmoment	
$\Phi$	dynamischer Beiwert der statischen Lastwirkungen der Lastmodelle LM71, SW/0, SW/2, entweder als $\Phi_2$ oder $\Phi_3$ festzulegen	[EN1991-2] [UIC776-1, 1997] [UIC776-1, 2007]
$\Phi_2$	dynamischer Beiwert bei hochwertigem Gleisinstandhaltungszustand	[EN1991-2] [UIC776-1, 1997] [UIC776-1, 2007]
$\Phi_3$	dynamischer Beiwert bei normalem Gleisinstandhaltungszustand	[EN1991-2] [UIC776-1, 1997] [UIC776-1, 2007]
$\Phi(x)$	dimensionslose Formfunktion	
$\Phi_r$	Ordinate der Formfunktion	
$\varphi, \varphi', \varphi''$	dynamischer Beiwert der statischen Last bei Betriebszügen	[EN1991-2] [UIC776-1, 1997] [UIC776-1, 2007]
$\varphi'_{dyn}$	dynamischer Zuwachs bei dynamischer Berechnung	[EN1991-2]
$\varphi$	Überbauverdrehung	
$\psi$	spezifische Dämpfung	
$\psi_{mod}$	Anpassungsfaktor Koppelsteifigkeit	

$\Omega$	Erregerfrequenz
$\Omega$	Umlaufgeschwindigkeit Unwuchterreger
$\omega_D$	gedämpfte Kreiseigenfrequenz
$\omega_0$	ungedämpfte Kreiseigenfrequenz

# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

Mobilität ist in der heutigen Zeit ein sehr wichtiger Bestandteil des menschlichen Zusammenlebens. Sowohl Personen als auch Güter sollen möglichst schnell, sicher, planbar, preiswert und nach Möglichkeit umweltschonend transportiert werden können. Der Eisenbahnverkehr steht dabei auf dem Festland immer in starker Konkurrenz zum Flug- und Straßenverkehr.

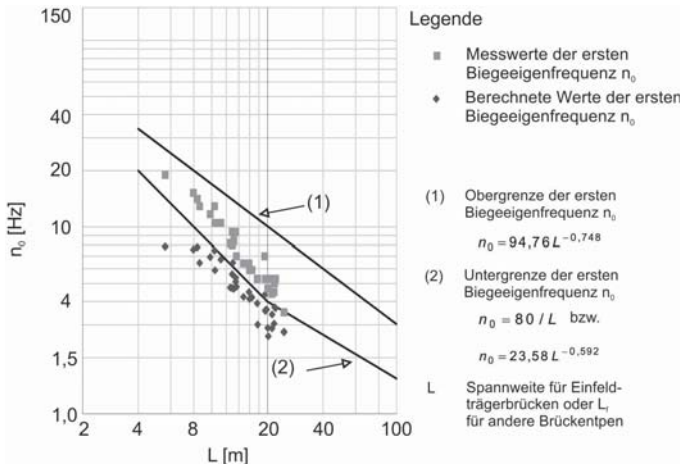
Viele Teile Europas, darunter auch Deutschland besitzen bereits ein gut ausgebauten Eisenbahninfrastrukturnetz, wobei hier Schnellfahrstrecken für den Personenhochgeschwindigkeitsverkehr und Strecken für den gemischten Güterverkehr und regionaler Personenverkehr zu unterscheiden sind. Brücken sind ein wesentlicher Bestandteil des Eisenbahnnetzes. Neben dem Bau neuer Streckenabschnitte, müssen auch im Zuge von Bestandsstrecken regelmäßig Brückenbauwerke inspiziert und ggf. instand gesetzt bzw. ausgetauscht werden.

Neubauten werden für immer höhere Beanspruchungen (z.B. Achslasten und Geschwindigkeiten) ausgelegt; Bestandsbauten müssen vor Einführung neuer Zugtypen oder Freigabe für höhere Geschwindigkeiten auf ihre Fähigkeit, den erhöhten Anforderungen standhalten zu können, überprüft werden. Gemäß [EN1990] [EN1991-2] sind Eisenbahnbrücken zwar auf Lebensdauern von 100 Jahren auszuliegen, allerdings ist eine Abschätzung von in der Zukunft möglicherweise auftretenden neuen Belastungsarten nicht möglich, sodass die Auslegung immer nur mit den zum Zeitpunkt der Bemessung bekannten Lastmodellen erfolgen kann. Die Idee, alle zukünftigen Last- und Achskonfigurationen mit den in [EN1991-2] [RiL804] gegebenen künstlichen *High Speed Load Modells (HSLM)* abdecken zu können, wird bereits mit der Einführung des ICE 4 auf die Probe gestellt, da dessen Wagenlängen größer sind als die maximale Wagenlänge eines HSLM. Bei ermüdungsanfälligen Bauweisen kommt noch die Problematik hinzu, dass sich nach Inbetriebnahme der Brücke neben höheren Lasten auch die Anzahl der überfahrenden Züge ändern kann, sodass die vorab prognostizierte Lebensdauer möglicherweise reduziert wird.

Die Neubewertung von Bestandsbauten hinsichtlich ihres dynamischen Verhaltens ist also vor Einführung neuer Zugtypen erforderlich. Die Begutachtung basiert i.d.R. auch auf messtechnischen Untersuchungen am entsprechenden Bauwerk, wobei z.T. sehr große Unterschiede zwischen gemessenen und mit numerischen Modellen

ermittelten Werten auffallen. Im Rahmen dieser Arbeit werden insbesondere Walzträger in Beton (WiB-) Brücken in Einfeldträgerbauweise betrachtet, da sich bei diesen die rechnerische Prognose oftmals als nicht zufriedenstellend erweist.

In Abbildung 1-1 sind zur Veranschaulichung die berechneten und gemessenen ersten Biegeeigenfrequenzen  $n_0$  von etwa 30 WiB-Brücken gegenübergestellt, welche im Rahmen einer Messkampagne von der *Deutschen Bahn AG* untersucht worden sind, vgl. [Rau2010b]. Weiterhin dargestellt sind die Ober- und Untergrenze nach [EN1991-2] [RiL804], innerhalb derer die vereinfachte Überprüfung des Resonanzrisikos als erfüllt betrachtet werden kann. Es zeigt sich, dass fast alle der gemäß [RiL804] berechneten Werte (nur die tragenden Überbauten werden bei der Ermittlung der Biegesteifigkeiten berücksichtigt) kleiner als die Untergrenze sind und der vereinfachte Resonanznachweis nicht erfüllt wird. Die zugehörigen messtechnisch ermittelten Werte  $n_0$  sind z.T. deutlich größer und liegen fast alle im für den vereinfachten Resonanznachweis erforderlichen Frequenzbereich.



**Abbildung 1-1 Gegenüberstellung berechnete und gemessene Biegeeigenfrequenzen  $n_0$  von WiB-Brücken**

Vertikale Beschleunigungen und Durchbiegungen fallen am realen Bauwerk i.d.R. geringer und damit ebenfalls günstiger aus als rechnerisch prognostiziert. Bei den im Rahmen der genannten Messkampagne untersuchten Brücken wurden weiterhin deutlich höhere Dämpfungswerte ermittelt, als gemäß [EN1991-2] [RiL804] anzusetzen wären, vgl. [Rau2010b].

Die Unterschiede zwischen Realität und Prognose werden seit längerem dem positiven Mitwirken der sogenannten baulichen Randbedingungen zugesprochen, siehe

z.B. [Rau2010b]; dies sind beispielsweise die über die Brückenlänge hinausgehenden Gleise, die Randkappen oder das Schotterbett. Lassen sich diese Einflüsse verlässlich voneinander trennen und in ihrer Wirkung identifizieren, ergibt sich ein bedeutsames Optimierungspotential für Neu- und Bestandsbauten für die WiB-Bauweise, welche schätzungsweise etwa 25% aller Bestandsbrücken im deutschen Eisenbahnnetz ausmachen [Rau2011a]. Der Wunsch nach Berechnungsmethoden, welche das tatsächliche Verhalten der Brücken abbilden können und eventuell einen Verzicht aufwendiger Messungen ermöglichen, ist entsprechend groß.

Weiterhin ergibt sich besonders für Geschwindigkeiten über 200 km/h die Fragestellung, wie möglicherweise Modellierungsvereinfachungen den z.T. enormen Berechnungsaufwand bei der Bemessung von Neubauten bzw. der Nachrechnung von Bestandsbauten reduzieren können. WiB-Brücken werden i.d.R. in Einfeldbauweise ausgeführt, weswegen im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich Vereinfachungen für diese Bauweise abgeleitet werden; dabei können entsprechende Vereinfachungen z.T. auch für andere Bauweisen genutzt werden. Gemäß [Spe2010] sind 96% der Brücken im deutschen Eisenbahnnetz Einfeldträgerbrücken, somit ergibt sich hier ein sehr breites Anwendungsgebiet.

## 1.2 Zielsetzung

Zielsetzung dieser Arbeit ist es, Methoden zu entwickeln, (gewisse) bauliche Randbedingungen in die dynamische Bemessung mit einzubeziehen. Dabei gilt es sicherzustellen, dass die berücksichtigten positiven Einflüsse im gesamten Bemessungszeitraum zur Verfügung stehen, was ggf. zusätzliche Nachweise erforderlich macht. Positiv wirkende Einflussfaktoren, welche nicht über den gesamten Betrachtungsraum zur Verfügung stehen, werden trotzdem diskutiert. Eine genauere Kenntnis dieser ermöglicht eine bessere Aussage über die Qualität einer Berechnung im Vergleich zum realen Bauwerk.

Ein neu entwickelter Versuchsstand wird genutzt, das dynamische Verhalten von Eisenbahnschotter genauer zu untersuchen. Dabei wird ausschließlich der s.g. Koppeleffekt zwischen zwei durch eine Längsfuge getrennten Überbauten untersucht, welche sich ein gemeinsames Schotterbett teilen.

Neben der Fragestellung, welche Randbedingungen sich ggf. in einer Bemessung günstig in Ansatz bringen lassen, steht auch die vereinfachte Bemessung im Fokus. Für Überfahrtgeschwindigkeiten über 200 km/h wird dringend eine Möglichkeit gesucht, Modellierungsaufwand und Berechnungsdauer zu reduzieren. Hierbei besteht der Anspruch, das entwickelte Verfahren direkt im Einklang mit derzeitig gültigen Normen für die Bemessung nutzen zu können.



## 1.3 Vorgehen

Zunächst wird in Kapitel 2 der Stand der Technik zum dynamischen Verhalten von Eisenbahnbrücken (in Einfeldträgerbauweise) zusammengetragen, sowie in Kapitel 3 die aus der Literatur bekannten Einflussfaktoren auf das dynamische Verhalten (von WiB-Brücken) zusammengefasst. Die Erkenntnis, dass sich WiB-Brücken i.d.R. in der Realität deutlich günstiger verhalten, als rechnerisch prognostiziert, ist nicht neu und diverse Autoren haben sich mit der Fragestellung auseinandergesetzt, inwieweit sich das tatsächliche Bauwerksverhalten und die Bauwerkseigenschaften besser berechnen lassen könnten. Die einzelnen Einflussfaktoren werden diskutiert, wobei differenziert wird zwischen Einflussfaktoren, durch die eine Abweichung zwischen Realität und Modell prinzipiell erklärt werden kann, sich aber aufgrund diverser Unsicherheiten noch nicht für eine Bemessung eignen und Einflussfaktoren, welche sich bereits nach derzeitigem Stand der Technik in einer Bemessung berücksichtigen lassen.

Aus den Erkenntnissen aus der Literatur zum Koppelleffekt von Eisenbahnschotter werden in Kapitel 4 offene Fragen für die Gestaltung eines eigenen Versuchsstandes abgeleitet. Erste Ergebnisse werden im Rahmen dieser Arbeit präsentiert und ein Ausblick auf Folgeversuche zur Erforschung von u.a. jahreszeitlicher Schwankungen gegeben. Weiterhin werden Vorschläge für die Umsetzung der Ergebnisse in Berechnungsmodellen gegeben.

In Kapitel 5 werden Modellierungsvereinfachungen auf Grundlage der in Deutschland gültigen Normen erstellt, um eine direkte Nutzbarkeit für Anwender zu ermöglichen. Dabei werden Vereinfachungen zur Berücksichtigung des Beitrages der Eisenbahnschienen aus den Angaben in [EN1991-2] [Ri1804] analytisch hergeleitet, wobei die Entwicklung einer äquivalenten Drehfeder zur Abbildung des Einspanneffektes von über die Brücke hinausführenden Eisenbahngleisen erzielt wird. Weiterhin wird unter Berücksichtigung dieser Drehfedern ein äquivalentes Einmassensystem zur Ermittlung von  $n_0$  und zur Simulation von Zugüberfahrten hergeleitet.

Anhand eines exemplarischen Brückenbauwerkes wird die vereinfachte Berechnung von Zugüberfahrten über 200 km/h demonstriert, wobei alle für die Nachweissführung erforderlichen Kenngrößen ermittelt werden (Verformungen, Beschleunigungen, Schnittgrößen). Abschließend erfolgen eine Gegenüberstellung mit einer am Beispielbauwerk durchgeführten Überfahrtsmessung, sowie ein Ausblick auf eine vereinfachte Berücksichtigung des Koppelleffektes beim äquivalenten Einmassensystem. Die Berechnungsmethodik wird in Kapitel 6 kurz zusammengefasst.

Abschließend werden in Kapitel 7 die gewonnenen Erkenntnisse kurz zusammengefasst und offene Fragen für zukünftige Forschungsarbeiten genannt.

## 2 Dynamisches Verhalten von Eisenbahnbrücken

Eisenbahnbrücken werden u.a. vertikalen, dynamischen Lasten durch überfahrende Züge ausgesetzt. Wie nachfolgend erläutert, wird die dynamische Vergrößerung der statischen Zuglasten vornehmlich durch das Verhältnis von durch den überfahrenden Zug erzeugter Erregerfrequenz zu den jeweiligen Brückeneigenfrequenzen beeinflusst. Übermäßige Schwingungen oder Resonanzeffekte gilt es zu vermeiden.

Die realitätsnahe Abbildung einer Brücke mithilfe von numerischen Modellen ist anspruchsvoll. Die Qualität einer Berechnung hängt immer von den dort getroffenen Annahmen ab (statisches System, Materialverhalten, Mitwirkung nicht-tragender Elemente, etc.). Bei einer Gegenüberstellung von Berechnung und Messung muss allerdings auch die Qualität der Messung sichergestellt werden (Anzahl und Positionierung von Sensoren, Abtastraten, Auswertungsverfahren, Anzahl Wiederholungen der Messung, etc.).

### 2.1 Bemessung und Modellierung von Eisenbahnbrücken

#### 2.1.1 Vereinfachte Verfahren

Die einfachste Methode zur Berücksichtigung von Einwirkungen durch überfahrende Züge ist die Verwendung quasi-statischer Ersatzlastmodelle, welche mit dynamischen Beiwerten (früher auch Schwingbeiwerte genannt) kombiniert werden.

[Pro1976] geben einen kurzen Einblick in die Entwicklungshistorie einiger ehemaliger Lastmodelle und geben eine detaillierte Erläuterung des derzeit nach [EN1991-2] [RiL804] gültigen Lastmodells LM71 (auch UIC 71 oder Lastbild 71) und dem zugehörigen dynamischen Beiwert  $\Phi$ . Während alte Lastmodelle i.d.R. die statischen Lasten des zum jeweiligen Zeitpunkt ungünstigsten Betriebslastenzugs einer Bahngesellschaft abbildeten, sollte das fiktive LM71 möglichst viele Zugtypen inkl. dynamischer Lasten repräsentieren können. Die Erläuterungen von [Pro1976] beziehen sich zwar noch auf [UIC776-1, 1997], der seitdem umfassend überarbeitet wurde [UIC776-1, 2007]; Lastmodelle und dynamische Beiwerte sind jedoch identisch geblieben.

[EN1991-2] [UIC776-1, 2007] unterscheiden zwischen LM 71 (Abbildung 2-1) und SW/0 (letzteres nur bei Durchlaufträgern) für Regelverkehr auf Hauptstrecken und SW/2 für Schwerverkehr. Die Lastmodelle SW/0 und SW/2 sind gleich aufgebaut (Abbildung 2-2), lediglich die charakteristischen Werte  $q_{vk}$  (133 kN/m bzw. 150 kN/m) und die Abstände  $a$  (15 m bzw. 25 m) und  $c$  (5,3 m bzw. 7 m) variieren.

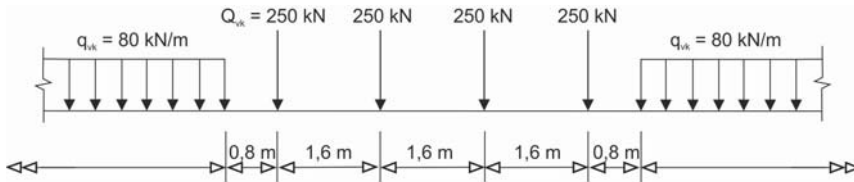


Abbildung 2-1 Lastmodell 71 [EN1991-2] [UIC776-1, 2007]

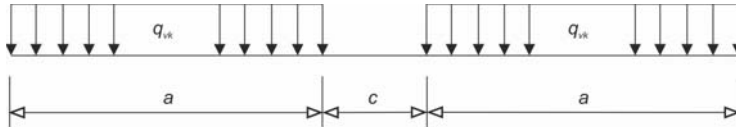


Abbildung 2-2 Lastbilder SW/0 und SW/2 [EN1991-2] [UIC776-1, 2007]

Die charakteristischen Vertikallasten des LM71 müssen mit dem Faktor  $\alpha$  modifiziert werden; dabei gilt  $\alpha = 0,75; 0,83; 0,91; 1,00; 1,10; 1,21; 1,33$  oder  $1,46$ . Gemäß dem deutschen Nationalen Anhang zu [EN1991-2] ist auf Brücken von Eisenbahnstrecken des Bundes bei Betriebszügen mit 25 t - Radlasten der Wert 1,21 zu verwenden, wobei dann SW/2 nicht mehr zusätzlich zu berücksichtigen ist. [Cal2010] sprechen die Empfehlung aus, über die jeweiligen nationalen Anhangsdokumente einheitlich für alle europäischen Güterverkehrsstrecken die Verwendung von  $\alpha = 1,33$  vorzuschreiben, um so einen zu erwartenden Anstieg der Radlasten von 25 t auf 30 t zu berücksichtigen.

$\Phi$  kann gemäß Gl. 2.1 oder Gl. 2.2 bestimmt werden.  $\Phi_2$  gilt für sorgfältig instand gehaltene Gleise,  $\Phi_3$  für Gleise mit normaler Instandhaltung. In Deutschland kann gemäß nationalem Anhang zu [EN1991-2] immer von sorgfältig instandgehaltenen Gleisen ausgegangen werden. Die ebenfalls in [EN1991-2] [UIC776-1, 2007] genannten Lastmodelle „ungeladener Zug“ und die später erläuterten Hochgeschwindigkeitslastmodelle HSLM (vgl. 2.1.2) werden nicht mit  $\Phi$  kombiniert.

$$\Phi_2 = \frac{1,44}{\sqrt{L_\Phi - 0,2}} + 0,82 \quad \text{Gl. 2.1}$$

$$\Phi_3 = \frac{2,16}{\sqrt{L_\Phi - 0,2}} + 0,73 \quad \text{Gl. 2.2}$$

Dabei ist  $L_\Phi$  die maßgebende Länge nach [EN1991-2], bei Einfeldträgern und Platten (einschließlich der im Rahmen dieser Arbeit betrachteten WiB-Brücken) ist  $L_\Phi$  die Stützweite in Hauptraggerrichtung.

Die alleinige Abbildung dynamischer Zuglasten über quasi-statische Ersatzlastmodelle, kombiniert mit dynamischen Beiwerten ohne zusätzliche dynamische Simulationen (vgl. 2.1.2) ist nur für bestimmte Anwendungsfälle zulässig. Beispielsweise ist gemäß [EN1991-2] [RiL804] bei Einfeldträgern mit Stützweiten  $L < 40$  m bei örtlichen Geschwindigkeiten  $v_{\delta} > 200$  km/h eine dynamische Berechnung immer erforderlich; bei Geschwindigkeiten  $v_{\delta} \leq 200$  km/h muss zunächst eine vereinfachte Überprüfung des Resonanzrisikos durchgeführt werden.

Beim vereinfachten Resonanznachweis wird die erste Biegeeigenfrequenz  $n_0$  in Abhängigkeit der Stützweite  $L$  (bei Einfeldträgerbrücken, ansonsten  $L_{\Phi}$ ) einem oberen Grenzwert  $n_{01}$  nach Gl. 2.3 und einem unteren Grenzwert  $n_{02}$  gemäß Gl. 2.4 bzw. Gl. 2.5 gegenüber gestellt;  $n_0$  lässt sich für balkenartige Einfeldträger mit konstanter Masse- und Steifigkeitsverteilung beispielsweise nach Gl. 2.6 ermitteln, dabei ist  $L$  die Stützweite,  $EI$  die Biegesteifigkeit und  $\mu$  die Masse pro Längeneinheit. Eine Darstellung der Grenzen für  $n_0$  ist in Abbildung 1-1 zu finden.

$$n_{01} = 94,76 \cdot L^{-0,748} \quad \text{Gl. 2.3}$$

$$n_{02} = 80/L \quad \text{für } 4 \text{ m} \leq L \leq 20 \text{ m} \quad \text{Gl. 2.4}$$

$$n_{02} = 23,58 \cdot L^{-0,592} \quad \text{für } 20 \text{ m} \leq L \leq 100 \text{ m} \quad \text{Gl. 2.5}$$

$$n_0 = \frac{\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad \text{Gl. 2.6}$$

Kann der vereinfachte Resonanznachweis nicht erbracht werden, sind zusätzliche dynamische Berechnungen durchzuführen (siehe dazu Kapitel 2.1.2). Die Bemessung mit quasi-statischen Ersatzlasten, kombiniert mit dynamischen Beiwerten  $\Phi$ , muss allerdings immer erfolgen, auch wenn dynamische Berechnungen durchgeführt werden. Der ungünstigere Wert ist maßgebend für die Bemessung.

In [EN1991-2] [UIC776-1, 2007] werden weiterhin dynamische Beiwerte  $(1 + \varphi)$  für einzelne Betriebszüge BZ (z.B. ICE) angegeben. In [RiL804] werden die BZ übrigens als Betriebslastenzüge BLZ bezeichnet, vgl. Kapitel 2.1.2. Die Einwirkungen der BZ, kombiniert mit den  $(1 + \varphi)$ -Werten, können für Ermüdungsnachweise verwendet werden, da dabei eine Berücksichtigung von LM71, SW/0 oder SW/2, kombiniert mit  $\Phi$ , zu übermäßig hohen Einwirkungen für den Ermüdungsnachweis führt.

In Deutschland gilt gemäß Nationalem Anhang zu [EN1991-2] für Eisenbahnen des Bundes Gl. 2.7 (Gleise mit sorgfältiger Instandhaltung):

$$1 + \varphi = 1 + \varphi' + 0,5\varphi'' \quad \text{Gl. 2.7}$$

mit:

$$\varphi' = \frac{K}{1 - K + K^4} \quad \text{für } K < 0,76 \quad \text{Gl. 2.8}$$

$$\varphi' = 1,325 \quad \text{für } K \geq 0,76 \quad \text{Gl. 2.9}$$

$$K = \frac{v}{2L_{\Phi} \cdot n_0} \quad \text{Gl. 2.10}$$

$$\varphi'' = \frac{\alpha}{100} \left[ 56e^{-\left(\frac{L_{\Phi}}{10}\right)^2} + 50 \left( \frac{L_{\Phi}n_0}{80} - 1 \right) e^{-\left(\frac{L_{\Phi}}{20}\right)^2} \right] \quad \text{Gl. 2.11}$$

$$\alpha = \frac{v}{22} \quad \text{bei } v \leq 22 \text{ m/s} \quad \text{Gl. 2.12}$$

$$\alpha = 1 \quad \text{bei } v > 22 \text{ m/s} \quad \text{Gl. 2.13}$$

In Gl. 2.10 bis Gl. 2.13 geht zusätzlich zu den bereits in diesem Abschnitt erklärten Parametern die erlaubte Höchstgeschwindigkeit  $v$  in m/s ein.

[Pro1976] erläutern die Entwicklung des Anteils  $\varphi'$  am dynamischen Zuwachs für Betriebszüge. Der Sachverständigenausschuss ORE D 23 (ORE = Office de Recherches et d'Essais Oudenoord 60 Utrecht) führte messtechnische Untersuchungen an 38 Brückenbauwerken und einer Modellbrücke im Maßstab 1:8 durch und entwickelte die o.g. Formeln. Es sei angemerkt, dass zunächst eine Formel für  $\varphi'$  ähnlich zu Gl. 2.8 entwickelt wurde, in die der Faktor  $K$  nach Gl. 2.10 im Nenner quadratisch anstatt mit vierter Potenz einging, dabei allerdings unter Berücksichtigung der Frequenz der belasteten Brücke anstelle der ersten Biegeeigenfrequenz  $n_0$  der unbelasteten Brücke. Da sich die Ermittlung der Frequenzen belasteter Brücken als schwierig erwies, wurden die Formeln auf die o.g. Form angepasst. Der Anteil  $\varphi''$  am dynamischen Zuwachs für Betriebszüge berücksichtigt Effekte aus Gleisunebenheiten.

Die dynamischen Beiwerte  $(1 + \varphi)$  für Betriebszüge bilden auch die Grundlage für die dynamischen Beiwerte  $\Phi$ , vgl. [Pro1976] [UIC776-1, 2007]. Es wurden sechs exemplarische Betriebszüge mit jeweils einer festgelegten Geschwindigkeit untersucht, z.B. ein „Turbozug“ mit einer Wagenkonfiguration bestehend aus 4 x 17 t pro Wagen und einer Geschwindigkeit von 300 km/h. Für ideal-gelenkig gelagerte Einfeldträger mit Stützweiten bis 200 m wurden die maximalen Momente in Feldmitte

ermittelt. Die maximalen Momente in Feldmitte infolge LM 71 kombiniert mit  $\Phi$  ergeben immer größere Ergebnisse als der jeweilige maßgebende Betriebszug, kombiniert mit  $(1 + \varphi)$ .

Als Voraussetzung für die Berechnung von  $\varphi'$  anhand Gl. 2.8 bzw. Gl. 2.9 gilt die untere Grenze der Eigenfrequenzen  $n_{02}$  nach Gl. 2.4 bzw. Gl. 2.5 und eine maximale Höchstgeschwindigkeit der überfahrenden Fahrzeuge von 200 km/h, andernfalls ist  $\varphi'_{dyn}$  (Gl. 2.14) anhand einer dynamischen Simulation (Kapitel 2.1.2) zu bestimmen. Dabei ist  $y_{dyn}$  die größte dynamische Antwort und  $y_{stat}$  die zugehörige größte statische Antwort [EN1991-2]. Die Gesamtantwort  $y_{ges}$  (von Schnittgrößen oder Verformungen) lässt sich für Gleise mit sorgfältiger Instandhaltung nach Gl. 2.15 ermitteln [RiL804], wobei für Beschleunigungen der dynamische Zuwachs  $\varphi'_{dyn}$  der entsprechenden Durchbiegung zu verwenden ist.

$$\varphi'_{dyn} = \max \left| y_{dyn} / y_{stat} \right| - 1 \quad \text{Gl. 2.14}$$

$$y_{ges} = \left[ 1 + 0,5 \cdot \frac{\varphi''}{1 + \varphi'_{dyn}} \right] \cdot y_{dyn} \quad \text{Gl. 2.15}$$

Die anhand Gl. 2.15 ermittelten Gesamtantworten sind den entsprechenden Antworten infolge LM71, kombiniert mit  $\Phi$ , gegenüberzustellen. Der größere Wert ist für die Bemessung maßgebend.

Für die Anwendung von Gl. 2.11 gilt die obere Grenze der Eigenfrequenzen  $n_{01}$  nach Gl. 2.3; andernfalls ist hier ebenfalls eine dynamische Berechnung durchzuführen, allerdings unter Einbeziehung der Massenwechselwirkung zwischen Brücke und ungefederten Achsmassen. Für die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten WiB-Brücken ist die Einhaltung des oberen Grenzwertes  $n_{01}$  i.d.R. kein Problem.

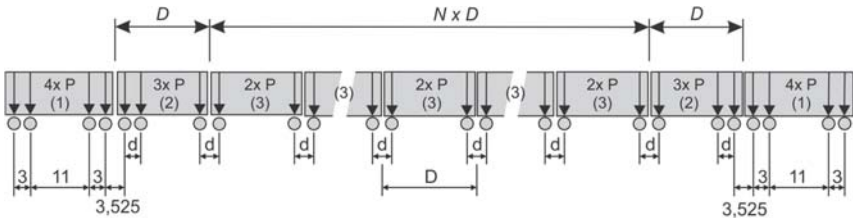
### 2.1.2 Dynamische Berechnung und Modellierung

Eine dynamische Simulation dient der Ermittlung von Schnittgrößen, Verformungen und Beschleunigungen infolge dynamischer Zuglasten.

Bei den zu berücksichtigenden Zugeinwirkungen ist zwischen den Lastmodellen realer Betriebszüge BZ (Bezeichnung [EN1991-2]) bzw. Betriebslastenzüge BLZ (abweichende Bezeichnung [RiL804]) und fiktiven Zugtypen bzw. fiktiven Hochgeschwindigkeitslastmodellen (*high speed load models*) HSLM zu unterscheiden.

Welche Lastmodelle in der Berechnung berücksichtigt werden müssen, hängt vom betrachteten Brückenbauwerk ab. Zunächst stellt sich die Frage nach der örtlichen Streckenhöchstgeschwindigkeit. Wie in 2.1.1 erläutert, müssen für Einfeldbrücken

mit Stützweiten  $L \leq 40$  m und Höchstgeschwindigkeiten  $v_0 > 200$  km/h immer dynamische Berechnungen durchgeführt werden, ebenso für Durchlaufträger mit Höchstgeschwindigkeiten  $v_0 > 200$  km/h. Dabei legt die auftraggebende Eisenbahngesellschaft die zu berücksichtigenden Betriebszüge fest, in die Überlegungen dazu sind dabei alle Zugtypen des Hochgeschwindigkeitsverkehrs einzubeziehen, die für Geschwindigkeiten über 200 km/h zugelassen bzw. vorgesehen sind [EN1991-2].

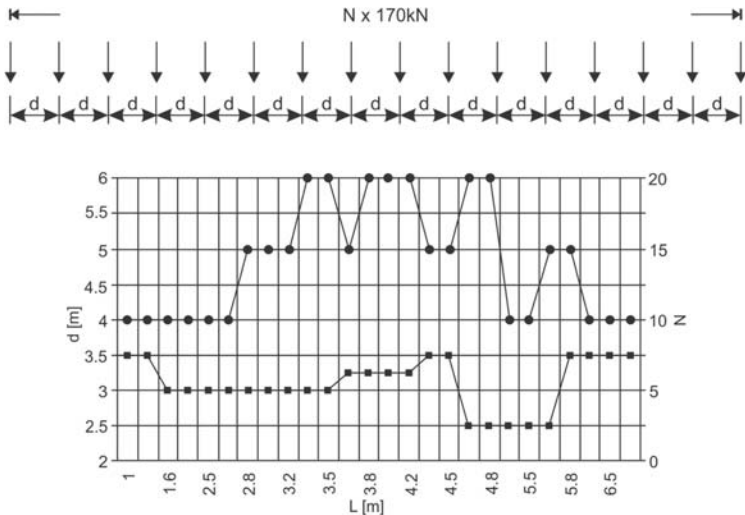


**Legende**

- (1) Triebkopf (vorderer und hinterer Triebkopf identisch)
- (2) Endwagen (vorderer und hinterer Endwagen identisch)
- (3) Mittelwagen

**Abbildung 2-3 HSLM-A [EN1991-2]**

Auf internationalen Strecken, bei denen Interoperabilitätskriterien zu erfüllen sind, sind zusätzlich die HSLM A (für Einfeldbrücken mit  $L \geq 7$  m und Durchlaufträger, siehe Abbildung 2-3 und Tabelle 2-1) oder HSLM B (für Einfeldbrücken mit  $L < 7$  m, siehe Abbildung 2-4) zu berücksichtigen.



**Abbildung 2-4 HSLM B [EN1991-2]**

**Tabelle 2-1 HSLM-A [EN1991-2]**

Modellzug	Anzahl der Mittelwagen $N$	Wagenlänge $D$ [m]	Drehgestellachsenabstand $d$ [m]	Einzellast $P$ [kN]
A1	18	18	2,0	170
A2	17	19	3,5	200
A3	16	20	2,0	180
A4	15	21	3,0	190
A5	14	22	2,0	170
A6	13	23	2,0	180
A7	13	24	2,0	190
A8	12	25	2,5	190
A9	11	26	2,0	210
A10	11	27	2,0	210

In [RiL804] werden die Achslastkonfigurationen (Lasten und Achsabstände) der deutschen Betriebslastzüge ICE-T (2xBR 411), ICE-T (3xBR 415), IC (gezogen), IC (geschoben), ICE1, ICE2 und ICE3 angegeben, sowie die Konfigurationen der ausländischen Hochgeschwindigkeitszüge Thalys 2, Eurostar, ETR-Y-500, Talgo AV 2 und Virgin. Weiterhin werden die Hochgeschwindigkeitslastmodelle HSLM A01 bis A10 aufgelistet.

Wenn die Durchführung dynamischer Berechnungen für örtliche Höchstgeschwindigkeiten unter 200 km/h erforderlich wird, d.h. wenn der vereinfachte Resonanznachweis aus Kapitel 2.1.1 nicht erfüllt wird, ist in Deutschland eine Berechnung mit realen Betriebszügen erforderlich, [EN1991-2]. Sollten zu diesen keine Angaben vorliegen, dürfen in Absprache mit der zuständigen Aufsichtsbehörde die Berechnungen mit den in [EN1991-2], Anhang D gegebenen (fiktiven) Zugmodellen durchgeführt werden. Dabei handelt es sich um 12 Zugtypen (jeweils zwei lokgezogene Reisezüge und Hochgeschwindigkeitszüge, sechs lokgezogene Güterzüge und jeweils einen S-Bahn- bzw. U-Bahn-Triebwagenzug). Diese Lastmodelle können auch für die Ermüdungsberechnung gemäß [EN1991-2] verwendet werden.

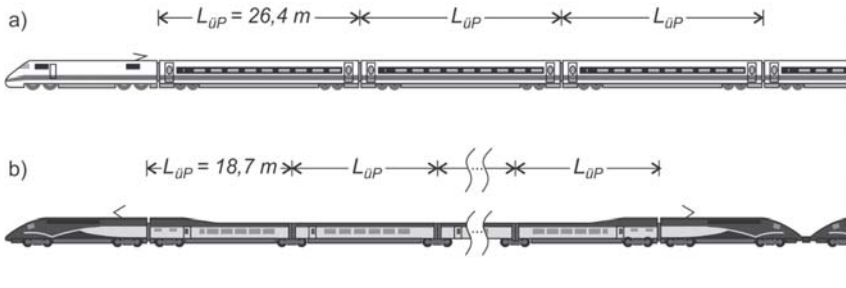


Für jeden zu betrachtenden Zugtyp ist eine Vielzahl von Simulationen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten durchzuführen. Dabei stehen vor allem die sogenannten kritischen Geschwindigkeiten  $v_{res,i,j,k}$  gemäß Gl. 2.16 im Fokus, bei denen mit Resonanzeffekten zu rechnen ist [RiL804].

$$v_{res,i,j,k} = n_j \frac{L_{üP,k}}{i} \quad \text{Gl. 2.16}$$

Dabei gilt  $i = 1, 2, 3$  oder  $4$ .

Weiterhin bezeichnen  $L_{üP,k}$  die Länge über Puffer für den betrachteten Zugtyp  $k$  (Abbildung 2-5) und  $n_j$  die Eigenfrequenz, infolge derer die Resonanzerscheinung erwartet wird.



**Abbildung 2-5 Darstellung Länge über Puffer  $L_{üP}$  a) ICE1 b) Thalys2**

Gemäß [RiL804] müssen alle Eigenfrequenzen berücksichtigt werden, für die, die in Gl. 2.17 gegebene Bedingung gilt.

$$n_j \leq n_{max} = \max\{30 \text{ Hz}; 1,5 * n_0; n_2\} \quad \text{Gl. 2.17}$$

Dabei ist  $n_0$  die erste Biegeeigenfrequenz (Frequenz der Grundschiwingung) und  $n_2$  die dritte Biegeeigenfrequenz (Frequenz der zweiten Oberschiwingung).

Die zu untersuchenden Geschwindigkeitsbereiche werden durch [RiL804] geregelt. Die kleinste zu untersuchende Geschwindigkeit  $v_{inf}$  eines Zugtyps ergibt sich nach Gl. 2.18 bzw. Gl. 2.19, die Obergrenzen für die zu berücksichtigten Geschwindigkeiten werden für den ULS in Gl. 2.20 und für den SLS, Ermüdungsberechnungen und Berechnungen zur Einhaltung von Komfortbedingungen in Gl. 2.21 gegeben. Dabei wird jeweils das Minimum aus örtlich zugelassener Geschwindigkeit  $v_{\delta}$  und maximal möglicher Zuggeschwindigkeit  $v_{Zug}$  berücksichtigt.

$$v_{inf} \leq \min\{0,9 \cdot n_0 \cdot L_{üP}; 25 \text{ m/s}\} \quad \text{für Güterzüge} \quad \text{Gl. 2.18}$$

$$v_{inf} \leq \min\{0,9 \cdot n_0 \cdot L_{üP}; 40 \text{ m/s}\} \quad \text{für Reisezüge} \quad \text{Gl. 2.19}$$

$$v_{sup,LS} = 1,2 \cdot \min\{v_0, v_{Zug}\} \quad \text{Gl. 2.20}$$

$$v_{sup,SLs} = 1,0 \cdot \min\{v_0, v_{Zug}\} \quad \text{Gl. 2.21}$$

Im Bereich zwischen  $v_{inf}$  und  $v_{sup,LS}$  bzw.  $v_{sup,SLs}$  sind für jeden zu betrachtenden Zugtyp Berechnungen mit Geschwindigkeiten in Schritten von jeweils 10 km/h durchzuführen. Im Bereich um die kritischen Geschwindigkeiten nach Gl. 2.16 sind die Schritte auf 5 km/h zu reduzieren.

Die überfahrenden Züge können entweder als bewegte Einzellasten angenommen werden oder als zusätzliche Schwingungssysteme der einzelnen Wagen, bei denen Massen, Trägheit, Federung (Steifigkeit) und Dämpfung berücksichtigt werden [RiL804]. Letzteres ermöglicht die Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen Zug und Brücke. Wie in [Bag2008] erläutert, steigt dabei der numerische Aufwand deutlich an, wobei lediglich im Resonanzfall günstigere Werte erzielt werden können. Außerhalb des Resonanzbereiches ergeben sich nur unwesentliche Unterschiede zwischen den beiden Berechnungsverfahren. Für Brücken mit Stützweiten  $L \geq 30$  m ergeben sich generell nur noch geringe Unterschiede zwischen den beiden Verfahren. Allgemein ergeben sich durch die zusätzlichen Massen auf der Brücke während einer Überfahrt geringfügig kleinere Eigenfrequenzen und somit auch geringfügig kleinere kritische Geschwindigkeiten (vgl. Gl. 2.16). Eine Erläuterung, wie sich Fahrzeuge allgemein als schwingungsfähige Systeme abbilden lassen wird z.B. in [Dro1989] gegeben. Die Modellierung von Zugwagons wird u.a. in [Frý1996] gezeigt.

Die Thematik der Interaktion zwischen Brückentragwerk und überfahrendem Zug wird noch von weiteren Autoren behandelt, z.B. [Liu2009]. Die Autoren bestätigen für Brücken mit einem geringen Verhältnis von Fahrzeugmasse zu Brückenmasse, dass eine Berechnung mit bewegten Einzellasten zu auf der sicheren Seite liegenden Ergebnissen führt. Wie groß die Verbesserung der Berechnungsergebnisse im Bereich kritischer Geschwindigkeiten durch die Berücksichtigung der Fahrzeug-Brücken-Interaktion sein kann, hängt von der Brücke und dem Fahrzeugmodell ab. Weitere Beispiele und weitreichende Diskussionen der Thematik werden u.a. in [Mäh2009] [Dom2014] [Arv2014] [Gor2016] gegeben.

Für Brücken mit relativ geringer Masse im Vergleich zur Zugmasse sollte die Fahrzeug-Brücken-Interaktion berücksichtigt werden, da hierbei eine Berechnung mit bewegten Einzellasten zu unsicheren Ergebnissen führen kann. Da im Rahmen die-

ser Arbeit vor allem WiB-Brücken mit Schotteroberbau betrachtet werden (die Fahrzeugmasse ist gering im Vergleich zur Brückenmasse), werden im Nachfolgenden nur noch die bewegten Einzellasten berücksichtigt.

In Berechnungen mit bewegten Einzellasten, kann zusätzlich zur bauartspezifischen Lehrschen Dämpfung  $\xi$  (Abbildung 2-6 a) noch die zusätzliche Dämpfung  $\Delta\xi$  (Abbildung 2-6 b bzw. Gl. 2.22) berücksichtigt werden. Durch die Berücksichtigung von  $\Delta\xi$  wird der Beitrag zur Dämpfung durch die überfahrenden Züge berücksichtigt. Beide Dämpfungsparameter sind stützweitenabhängig. Bei Durchlaufträgern ist  $L_\Phi$  anstelle von  $L$  zu berücksichtigen, es gilt der kleinste Dämpfungswert [RiL804]. Die ERRI-Berichte D214/RP3 [Erri1999a] bzw. D214/RP4 [Erri1999b] geben einen Einblick in die Entstehung der  $\xi$ - bzw.  $\Delta\xi$ -Werte.

a)

Brückentyp	$\xi$ unterer Grenzwert der kritischen Dämpfung [%]	
	Spannweite $L < 20$ m	Spannweite $L \geq 20$ m
Stahl und Verbund	$\xi = 0,5 + 0,125 (20 - L)$	$\xi = 0,5$
Spannbeton	$\xi = 1,0 + 0,07 (20 - L)$	$\xi = 1,0$
Walzträger in Beton und Stahlbeton	$\xi = 1,5 + 0,07 (20 - L)$	$\xi = 1,5$

b)

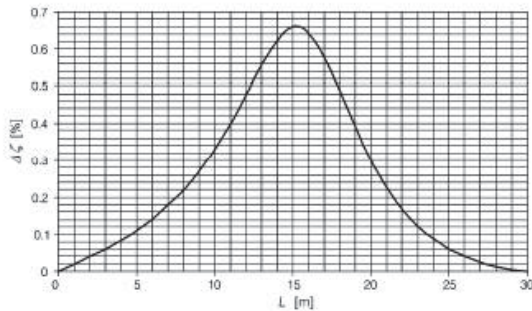
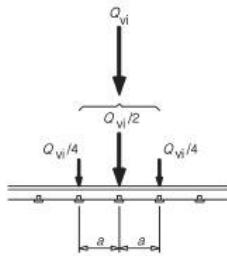


Abbildung 2-6 a) Lehrsche Dämpfung, b) Zusatzdämpfung bei bewegten Einzellasten, jeweils aus [EN1991-2]

$$\Delta\xi \leq \frac{0,0187L - 0,00064L^2}{1 - 0,0441L - 0,0044L^2 + 0,000255L^3} \quad [\%] \quad \text{Gl. 2.22}$$

Eine Differenzierung der Oberbauart (z.B. Schotterbett oder feste Fahrbahn) erfolgt bei der Festlegung der  $\xi$ -Werte nicht. An dieser Stelle sei daher auf [Fel2016] hingewiesen, wo an einer VFT-Brücke mit direkt an den Überbau angebrachter Schiene (d.h. kein Schotterbett oder feste Fahrbahn) z.T. Dämpfungswerte ermittelt wurden, die unterhalb der in Abbildung 2-6 a gegebenen Normwerte liegen.



**Abbildung 2-7 Längsverteilung einer Einzel- oder Radlast durch die Schiene [EN1991-2].**

[EN1991-2] ermöglicht die Verteilung der Radlasten in Längsrichtung von Betriebszügen, Ermüdungszugmodellen, HSLM A und den Einzellasten von LM71 (Kapitel 2.1.1) nach dem in Abbildung 2-7 dargestellten Verteilungskonzept. Dabei ist  $a$  der Abstand der Schienenstützpunkte. Je nach Spannweite der Brücke können so deutlich günstigere Ergebnisse erzielt werden.

Nach [Spe2010] ist die Berücksichtigung der lastverteilenden Wirkung insbesondere für kurze Brücken mit  $L \leq 10$  m sehr sinnvoll. Allerdings wird in seiner Arbeit die lastverteilende Wirkung des Oberbaus durch ein entsprechendes Brückenmodell (vgl. Kapitel 3.3) berücksichtigt, bei dem das Gleis als Balkenelement abgebildet wird, welches mit vertikalen Federn an den Überbau gekoppelt wird. Dort wird die Last vornehmlich über fünf Stützpunkte abgetragen, wobei die hergeleiteten vertikalen Federsteifigkeiten lediglich 12 % Abweichung zwischen Schotteroberbau und fester Fahrbahn ergeben.

Im Gegensatz zur Verteilung einzelner Lasten führt eine Zusammenfassung von mehreren Einzellasten zu einer Resultierenden (beispielsweise alle Radlasten eines Wagens) erwartungsgemäß zu sehr konservativeren Ergebnissen, wie von [Hau2007] gezeigt.

Wie die Unterscheidung zwischen sorgfältig instand gehaltenen Gleisen und normal instand gehaltenen Gleisen bei der Ermittlung dynamischer Beiwerte (Gl. 2.1, Gl. 2.2, Gl. 2.7) bereits impliziert, können durch Gleisunebenheiten dynamische Beanspruchungen noch weiter verstärkt werden. Die Thematik wird z.B. in [Frý1996] diskutiert. Dort werden vertikale und horizontale Gleisunebenheiten unterschieden. Die vertikalen Unregelmäßigkeiten umfassen gemeinsame vertikale Anhebungen (oder Absenkungen) beider Scheinen eines Gleises und unterschiedliche vertikale Anhebungen der beiden Schienen. Die horizontalen Unregelmäßigkeiten werden unterteilt in Abweichungen von der Trassierung und unregelmäßige Spurweiten. Unregelmäßigkeiten können zufällig oder periodisch auftreten, letztere können ggf. zur Resonanzanregung der Brücke führen, was bei entsprechender Wartung der Gleise aber nur selten auftritt. Häufiger treten zusätzliche Beanspruchungen durch unrunde Räder der überfahrenden Züge auf. Während diese bei Personenzügen relativ selten auftreten (wie im nachfolgenden Abschnitt erläutert, können höhere vertikale Beschleunigungen zu Komforteinbußen der Passagiere führen), sind sie bei Güter-

zügen häufiger zu finden. Die Bahngesellschaften haben daher i.d.R. Detektionssysteme, die Züge mit unrunder Räder ermitteln. Die DB Netz AG hat beispielsweise das „System DafuR“ (Detektionsanlage für unrunder Räder) mit einzelnen im Eisenbahnnetz verteilten Standorten zur Radkraftdiagnose. Die Schweizerischen Bundesbahnen (SBB) haben ebenfalls in ihrem Netz Zugkontrollenrichtungen ZKE angeordnet. Weiterhin würde sich eine Anordnung von Schienenstößen auf der Brücke sehr ungünstig auswirken, diese wird i.d.R. aber durch entsprechende Planung verhindert.

### 2.1.3 Erforderliche spezielle Nachweise

Im Rahmen der Bemessung von Eisenbahnbrücken sind neben den allgemein im Hoch- oder Brückenbau erforderlichen Nachweisen (Grenzzustände der Tragfähigkeit (Ultimate Limit State ULS) und Gebrauchstauglichkeit (Serviceability Limit State SLS), Sicherstellung der Dauerhaftigkeit, etc.) tragender Elemente spezielle Nachweise gemäß [EN1990] zu erbringen, welche die Betriebssicherheit (z.B. Vermeidung der Destabilisierung des Schotterbettes) oder den Reisendenkomfort sicherstellen. Einige der Anforderungen werden in [EN1991-2] und [RiL804] ebenfalls aufgeführt bzw. mit entsprechendem Verweis aus [EN1990] erst dort festgelegt. Neben den nachfolgend beschriebenen, mit konkreten Zahlenwerten versehenen Kriterien, wird darauf hingewiesen, dass ein unbehindertes Abheben der Brücke an den Auflagern zu vermeiden ist, um vorzeitige Lagerschäden zu verhindern. Die nachfolgend beschriebenen Nachweise sind mit charakteristischen Werten zu führen.

Die Begrenzung der vertikalen Überbaubeschleunigungen  $a_z$  ist ein SLS, sie dient der Vermeidung von Gleisinstabilität und ist immer dann zu erbringen, wenn eine dynamische Berechnung durchgeführt werden muss (vgl. Kapitel 2.1.2). [EN1990] [EN1991-2] [RiL804] legen die in Tabelle 2-2 genannten Maximalwerte fest.

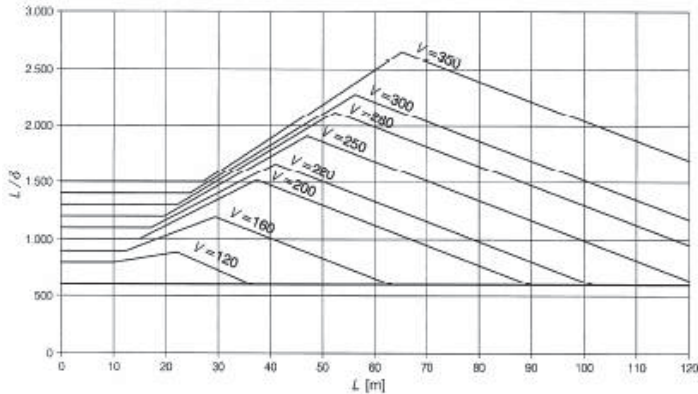
**Tabelle 2-2 Maximale vertikale Überbaubeschleunigungen**

	Schotteroberbau	Feste Fahrbahn
$a_z$ [m/s <sup>2</sup> ]	3,5	5,0

Weiterhin werden die vertikalen Beschleunigungen im Fahrzeug zur Sicherstellung des Reisendenkomforts begrenzt. [EN1990] empfiehlt entsprechende Werte, um die Komfortkategorien „sehr gut“ (1,0 m/s<sup>2</sup>), „gut“ (1,3 m/s<sup>2</sup>) oder „ausreichend“ (2,0 m/s<sup>2</sup>) einhalten zu können. Dieser Nachweis kann alternativ zum Verformungskriterium als Nachweis des Reisendenkomforts (nachfolgend beschrieben) erbracht werden und bedarf einer dynamischen Berechnung unter Einbeziehung der Fahrzeug-Brücken-Interaktion (die Modellierung von Fahrzeugen wird Kapitel 2.1.2 kurz

angerissen). Beispiele für solche Berechnungen sind z.B. in [Bigg1964] [Mäh2009] zu finden.

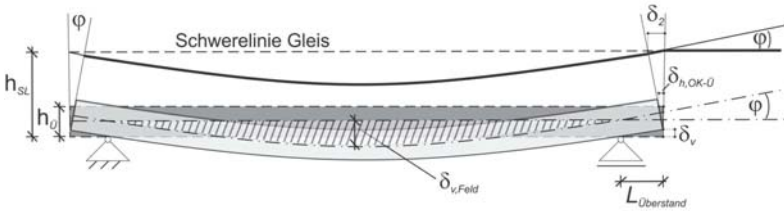
Vertikale Verschiebungen im Feld werden sowohl aus Gründen der Betriebssicherheit (siehe Tabelle 2-3), als auch zur Sicherstellung des Reisendenkomforts begrenzt. Die Grenzwerte zur Sicherstellung des Reisendenkomforts können anhand Abbildung 2-8 in Abhängigkeit von Stützweite  $L$  und Überfahrtschwindigkeit  $v$  [km/h] für die Komfortkategorie „sehr gut“ ermittelt werden. Zur Anpassung der Grenzwerte  $L/\delta$  an die beiden anderen Komfortkategorien „gut“ und „ausreichend“ werden die Werte entsprechend durch die Grenzwerte der vertikalen Beschleunigungen dividiert, d.h. durch 1,3 für „gut“ bzw. durch 2,0 für „ausreichend“. Weiterhin sind die Werte  $L/\delta$  entsprechend des statischen Systems anzupassen, beispielsweise sind sie für Einfeldträger mit 0,7 zu multiplizieren. Die Werte sind für Stützweiten bis 120 m gültig.



**Abbildung 2-8 Begrenzung der vertikalen Verformung zur Sicherstellung des Reisendenkomforts, Komfortkategorie „sehr gut“ [EN1990].**

Weiterhin werden durch Verwindungen sowie vertikale und horizontale Verschiebungen an den Überbauenden begrenzt und somit implizit auch Verdrehungen (Endtangentialwinkel). Eine direkte Begrenzung des Endtangentialwinkels durch konkrete Werte wie im nicht mehr gültigen DIN Fachbericht 101 [DINFB101] gibt es in den in Tabelle 2-3 genannten Normen nicht mehr. Allerdings wurden die entsprechenden Vorgaben in [RiL804] übernommen: Die Endtangentialwinkel  $\theta$  in Tabelle 2-4 dürfen bei Schotterfahrbahnen unter Einwirkung der Lastmodelle LM71 bzw. SW/0 (kombiniert mit  $\Phi$  und  $\alpha$ , siehe Kapitel 2.1.1) nicht überschritten werden. Die

Kombination  $(\theta_1 + \theta_2)$  ist bei hintereinanderliegenden Überbauten zu berücksichtigen, siehe Abbildung 2-10 a.



**Abbildung 2-9 Darstellung der zu erbringenden Verformungsnachweise**

In Abbildung 2-9 lassen sich folgende Zusammenhänge zwischen Lagerverdrehungen und den zu überprüfenden Verformungen erkennen:

$$\varphi \approx \tan(\varphi) = \frac{\delta_2}{h_{SL}} = \frac{\delta_{h,OK-\ddot{U}}}{h_{\ddot{U}}} = \frac{\delta_v}{L_{\ddot{U}berstand}} \quad \text{Gl. 2.23}$$

Die Längsverschiebung der Schiene  $\delta_2$  wurde im Hinblick auf Kapitel 5 (Abbildung 5-7) mit in die Zeichnung aufgenommen. Die Werte für die Längsverschiebung  $\delta_{h,OK-\ddot{U}}$  an der Oberkante des Überbaus und die Vertikalverformung  $\delta_v$  werden gemäß Tabelle 2-3 begrenzt, um die Störung bzw. Destabilisierung des Verkehrsweges zu verhindern.

**Tabelle 2-3 Einzuhaltende Verformungskriterien für Verformungen infolge vertikaler Beanspruchungen (Betriebssicherheit)**

Beschreibung	Nachweis	Bezug
Vertikale Verformung Überbau	$\delta_{v,Mitte} \leq L/600$	[EN1990] [EN1991-2]
Querverformung auf der Oberseite des Überbaus bei Berücksichtigung der Interaktion von Gleis und Überbau	$\delta_{h,OK-\ddot{U}} \leq 8 \text{ mm}$	[EN1990] [EN1991-2] [UIC774]
Querverformung auf der Oberseite des Überbaus bei Vernachlässigung der Interaktion von Gleis und Überbau	$\delta_{h,OK-\ddot{U}} \leq 10 \text{ mm}$	[EN1990] [EN1991-2] [UIC774]

Beschreibung	Nachweis	Bezug
Vertikalverformung des Überbaus an der oberen Kante des Überbaus bei $v \leq 160$ km/h	$\delta_v \leq 3mm$	[EN1991-2]
Vertikalverformung des Überbaus an der oberen Kante des Überbaus bei $v > 160$ km/h	$\delta_v \leq 2mm$	[EN1991-2]

**Tabelle 2-4 Zulässige Endtangentialwinkel  $\theta$  [rad] nach [RiL804]**

	eingleisige Brücken	zweigleisige Brücken
$\theta$ [rad]	$6,5 \cdot 10^{-3}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$
$\theta_1 + \theta_2$ [rad]	$10 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$

Die Verwindung des Überbaus ist ebenfalls aus Gründen der Betriebssicherheit zu überprüfen. Gemäß der Darstellung in Abbildung 2-10 b ist jeweils auf einer Länge von 3 m die Verwindung  $t$  der Spurweite des Gleises ( $s = 1,435$  m) zu ermitteln und den maximalen Grenzwerten in Tabelle 2-5 gegenüberzustellen. Auf diese Weise soll das Risiko einer Zugentgleisung minimiert werden.


**Abbildung 2-10 a) Endtangentialwinkel bei Schotterfahrbahnen [RiL804] b) Definition der Verwindung des Überbaus [EN1990]**
**Tabelle 2-5 Grenzwerte für die Verwindung des Überbaus [EN1990]**

	$V \leq 120$ km/h	$120 < V \leq 200$ km/h	$V > 200$ km/h
$t$ [mm/3m]	4,5	3,0	1,5

Bei den sogenannten Zwillingenbrücken (zwei durch eine Längsfuge getrennte Überbauten mit durchgängiger Schotterdecke, vgl. Kapitel 3.6 und 3.8.2) ist gemäß [RiL804] die vertikale Relativverschiebung zwischen den Überbauten auf 3 cm zu begrenzen.



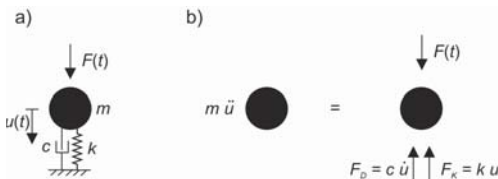
Schlussendlich sind noch die Längsverformungen des Überbaus infolge Bremsen und Anfahren gemäß der Angaben in Tabelle 2-6 zu begrenzen.

**Tabelle 2-6 Einzuhaltende Verformungskriterien für Verformungen infolge horizontaler Beanspruchungen**

Beschreibung	Nachweis	
Relative Verformung des Überbaus infolge Anfahren und Bremsen [EN1991-2]	$\delta_B \leq 5 \text{ mm}$	für durchgehend geschweißte Schienen ohne Schienenauszug oder mit Schienenauszug an einem Überbauende
	$\delta_B \leq 30 \text{ mm}$	für Schienenauszüge an beiden Überbauenden bei durchgehendem Schotterbett
	$\delta_B > 30 \text{ mm}$	nur erlaubt bei Bewegungsfugen im Schotter und Schienenauszug

#### 2.1.4 Numerische Verfahren/Berechnungsmethodik

Zur Durchführung von dynamischen Berechnungen muss zunächst ein geeignetes Modell zur Abbildung der Struktureigenschaften des abzubildenden Bauwerks und der darauf einwirkenden Beanspruchungen gewählt werden. Für dieses ist dann eine geeignete Bewegungs-Differentialgleichung oder bei mehreren Freiheitsgraden ein Differentialgleichungssystem zu finden und zu lösen. Wie unter 2.1.2 bereits angesprochen, werden in dieser Arbeit nur Systeme behandelt, die durch bewegte vertikale Einzellasten beansprucht werden.



**Abbildung 2-11 a) Einmassensystem, b) „aufgeschnittenes“ Einmassensystem mit wirkenden Kräften**

Für das in Lehrbüchern (z.B. [Mes2000] [Gro2012] [Fre2011]) gerne gezeigte Beispiel eines Einmassensystems (Abbildung 2-11 a) mit nur einem Freiheitsgrad ist die Herleitung der Bewegungsgleichung (Gl. 2.24) durch Gegenüberstellung der „inneren“ und „äußeren“ Kräfte (Abbildung 2-11 b) ausführlich beschrieben.

Die Rückstellkraft  $F_k(t)$  ist abhängig von der Federsteifigkeit  $k$  und der Verschiebung  $u(t)$ , die Dämpfungskraft  $F_D(t)$  wird durch die Dämpfungskonstante  $c$  und die Geschwindigkeit  $\dot{u}(t)$  bestimmt. Die so berücksichtigte Dämpfung ist in diesem Fall also geschwindigkeitsproportional und wird als viskose Dämpfung bezeichnet. Weiterhin in Gl. 2.24 berücksichtigt werden die Masse  $m$  und die einwirkende Kraft  $F(t)$ ,  $\ddot{u}(t)$  ist die Beschleunigung.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t) \quad \text{Gl. 2.24}$$

Die allgemeine Lösung  $u(t)$  der Bewegungs-DGL aus Gl. 2.24 setzt sich aus einem homogenen Anteil  $u_h(t)$  und einem partikulären Anteil  $u_p(t)$  (auch inhomogener Anteil genannt) zusammen. Gl. 2.24 ist eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten; entsprechende Lösungsansätze werden z.B. in [Vet2001] gegeben.

Der homogene Anteil beschreibt das Eigenschwingungsverhalten des Systems. Zur Ermittlung von  $u_h(t)$  wird nur die linke Seite von Gl. 2.24 betrachtet ( $F(t)$  wird zu Null gesetzt). Die Lösung der Gl. 2.24 erfolgt nach dem Ansatz in Gl. 2.25. Die erste und zweite Ableitung von Gl. 2.25 werden in Gl. 2.26 und Gl. 2.27 gegeben.

$$u_h(t) = e^{\lambda \cdot t} \quad \text{Gl. 2.25}$$

$$\dot{u}_h(t) = \lambda e^{\lambda \cdot t} \quad \text{Gl. 2.26}$$

$$\ddot{u}_h(t) = \lambda^2 e^{\lambda \cdot t} \quad \text{Gl. 2.27}$$

Die Funktionen aus Gl. 2.25 bis Gl. 2.27 werden in die Gl. 2.24 (mit  $F(t) = 0$ ) eingesetzt. Es ergeben sich die beiden Nullstellen  $\lambda$  der Funktion in Gl. 2.28.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad \text{Gl. 2.28}$$

Bei (den im Bauwesen üblichen) unterkritisch gedämpften Systemen ist der Wert unter der Wurzel in Gl. 2.28 negativ. (Im Falle einer kritischen Dämpfung wäre der Wert unter der Wurzel Null und im Falle einer überkritischen Dämpfung positiv, Schwingungen treten dann nicht auf. Für diese Fälle sei auf die Literatur verwiesen, z.B. [Gro2012]).

Gl. 2.28 lässt sich zu Gl. 2.29 umstellen. Wie in [Vet2001] beschrieben, heißt diese Art der Nullstelle ( $\lambda_k = a \pm i \cdot b$ ) „konjugiert komplex“ und hat bei einer Nullstelle

einfacher Ordnung die beiden Funktionen des Fundamentalsystems ( $y_1 = e^{ax} \sin bx$ ) und ( $y_2 = e^{ax} \cos bx$ ), welche zusammen in der Form ( $y_h = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$ ) die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ergeben.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm i \cdot \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad \text{Gl. 2.29}$$

Mit den Zusammenhängen aus Gl. 2.30 bis Gl. 2.34 erhält man die Lösung der homogenen Differentialgleichung (Gl. 2.35). Die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  sind aus den Randbedingungen  $u(t=0)$  und  $\dot{u}(t=0)$  zu ermitteln. Bei einem System, das aus der Ruhelage ausgelenkt wird, gilt z.B.  $u(t=0) = \dot{u}(t=0) = \ddot{u}(t=0) = 0$ .

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{Gl. 2.30}$$

$$\frac{c}{m} = 2 \xi \omega_0 \quad \text{Gl. 2.31}$$

$$\xi = \frac{c}{c_{krit}} = \frac{c}{2m\omega_0} \quad \text{Gl. 2.32}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2 \cdot \pi \cdot f_0 \quad \text{Gl. 2.33}$$

$$\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{Gl. 2.34}$$

$$u_h(t) = e^{-\xi \omega_0 t} (C_1 \cdot \sin(\omega_D \cdot t) + C_2 \cdot \cos(\omega_D \cdot t)) \quad \text{Gl. 2.35}$$

Die Umrechnung zwischen Lehrscher Dämpfung  $\xi$  (z.B. in [%]) und Dämpfungs-konstante  $c$  (z.B. in [Ns/m]) erfolgt anhand von Gl. 2.32. Die (ungedämpfte) Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  lässt sich nach Gl. 2.33 ermitteln, die Umrechnung von Eigenkreisfrequenz zu Eigenfrequenz  $f_0$  ist ebenfalls angegeben. Die gedämpfte Eigenkreisfrequenz  $\omega_D$  lässt sich für unterkritisch gedämpfte Systeme ( $\xi < 100$  %) anhand von Gl. 2.34 bestimmen. Für die üblicherweise geringen Dämpfungswerte von Brückenbauwerken ( $\xi \ll 100$  %, vgl. Abbildung 2-6) ist der Unterschied zwischen gedämpfter und ungedämpfter Eigenkreisfrequenz vernachlässigbar.

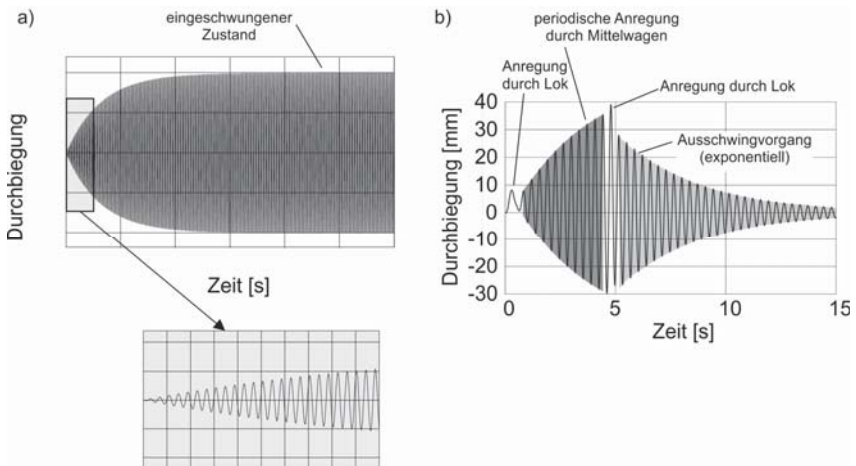
Der Lösungsansatz bzw. das Berechnungsverfahren für den partikulären Anteil  $u_p(t)$  muss entsprechend der Art der Anregung  $F(t)$  gewählt werden. Für die inhomogene

Differentialgleichung mit der Inhomogenität ( $A \cdot \sin(\omega x)$ ) erhält man die spezielle Lösung ( $y_p(x) = a \cdot \sin(\omega x) + b \cdot \cos(\omega x)$ ), vgl. [Vet2001]. Dementsprechend kann bei einer harmonischen Anregung in der bekannten Schreibweise  $F(t) = F_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t)$  der z.B. aus [Mes2000] bekannte Ansatz in Gl. 2.36 gewählt werden. Dabei ist  $F_0$  die Kraftamplitude und  $\Omega$  die Erregerfrequenz.

$$u_p(t) = C_3 \cdot \sin(\Omega \cdot t) + C_4 \cdot \cos(\Omega \cdot t) \quad \text{Gl. 2.36}$$

Ebenso wie bei der Lösung der homogenen Differentialgleichung werden von Gl. 2.36 die erste und zweite Ableitung nach der Zeit gebildet und in Gl. 2.24 eingesetzt, mit  $F(t) = F_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t)$  auf der rechten Seite der Gleichung. Die Konstanten  $C_3$  und  $C_4$  sind aus Randbedingungen zu ermitteln, z.B. eignen sich die Zeitpunkte  $t = 0$  und  $t = \pi/2$  für einen Ansatz zu deren Bestimmung.

Ab einer gewissen Dauer verschwindet der homogene Anteil bei einer harmonischen Anregung und die allgemeine Lösung  $u(t)$  von Gl. 2.24 entspricht der partikulären Lösung  $u_p(t)$ . Dies wird als „eingeschwungener Zustand“ bezeichnet und ist in Abbildung 2-12 a dargestellt.

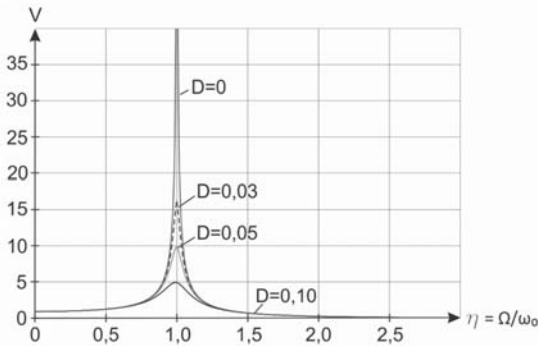


**Abbildung 2-12 Durchbiegungen a) Eingeschwungener Zustand eines Einmassensystems unter sinusförmiger Lastanregung, b) in Feldmitte einer Brücke infolge einer ICE1-Überfahrt**

Für den eingeschwungenen Zustand lässt sich aus den Konstanten  $C_3$  und  $C_4$  die dynamische Vergrößerung  $V$  (Verhältnis der maximalen dynamischen Durchbiegung  $u_{dyn}$  zur maximalen statischen Durchbiegung  $u_{stat}$ ) ableiten (Gl. 2.37), die Herleitung ist z.B. in [Mes2000] zu finden.

$$V = \frac{u_{dyn}}{u_{stat}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)\right)^2}} \quad \text{Gl. 2.37}$$

Die Vergrößerung  $V$  ist in Abbildung 2-13 in Abhängigkeit des Verhältnisses  $\eta$  (Erregerfrequenz  $\Omega$  zu Eigenfrequenz  $\omega_0$ ) dargestellt. Sind  $\Omega$  und  $\omega_0$  gleich ( $\eta = 1,0$ ),



**Abbildung 2-13 dynamische Vergrößerung**

wird dies als Resonanz bezeichnet. Je größer die Dämpfung ist, desto eher wird ein eingeschwungener Zustand erreicht und desto geringer fällt  $V$  aus. Im Falle eines ungedämpften Systems ist die Vergrößerung theoretisch unendlich.

Wie im Laufe der Arbeit noch gezeigt wird, ist die Anregung einer Brücke durch überfahrende Züge keine rein harmonische Anregung. Zwar sind

einzelne Sinusformen auch dort zu erkennen, dennoch ergeben sich einige grundlegende Unterschiede. Aufgrund unterschiedlicher Achsabstände von Loks bzw. Steuerwagen und Mittelwagen (vgl. Abbildung 2-5) ergeben sich in der Anregungsfunktion nur Teilbereiche, in denen es zu einer periodischen Anregung kommt (Überlagerung einzelner harmonischer Anregungen). Dabei ist eine Anregung durch einen überfahrenden Zug zeitlich bzw. durch die Anzahl der überfahrenden Achsen begrenzt. D.h., dass in vielen Fällen die Dauer einer periodischen Anregung durch eine entsprechende Anzahl von Wagen mit gleichen Achsabständen nicht ausreicht, um einen eingeschwungenen Zustand zu erzeugen, insbesondere da die Bauwerksdämpfung i.d.R. eher klein ist.

Obwohl deutliche Resonanzeffekte (starke Vergrößerung der Bauwerksreaktion bei Überfahrten im Bereich der kritischen Geschwindigkeiten nach Gl. 2.16) zu beobachten sind, werden diese entweder bereits durch ein nachfolgendes Triebfahrzeug oder spätestens nachdem die letzte Zugachse die Brücke verlassen hat und der freie Ausschwingprozess beginnt, beendet. Zur Verdeutlichung ist in Abbildung 2-12 b die maximale Durchbiegung in Feldmitte infolge einer mit bewegten Einzel-

lasten simulierten ICE1-Überfahrt dargestellt mit der für die Brücke kritischen Geschwindigkeit  $v_{res,1,0,ICE1}$ . Der „klassische“ Resonanzfall bei einer unendlich langen Anregungsdauer tritt nicht auf. Vergrößerungsfaktoren zur Abbildung dynamischer Effekte bei Zugüberfahrten (z.B. dynamische Beiwerte, siehe Abschnitt 2.1.1) sind nicht mit dem in Abbildung 2-13 bzw. (Gl. 2.37) gegebenen Vergrößerungsfaktor im eingeschwungenen Zustand vergleichbar. Dennoch kann die dynamische Vergrößerung der Bauwerksreaktionen u.U. kritisch für die Brücke werden. Da die maximale Bauwerksreaktion auch durch eine der nicht-periodisch auftretenden Lasten (z.B. schwere Triebfahrzeuge am Anfang oder am Ende des Zuges) verursacht werden kann, reicht es wiederum auch nicht, nur den Bereich der periodischen Lastanregung zu untersuchen.

Für beliebige Last-Zeitverläufe  $F(t)$  stehen verschiedene direkte und indirekte Integrationsverfahren zur Lösung der Bewegungsgleichung zur Verfügung. Bei der indirekten Integration (modale Analyse) wird zunächst eine Transformation in den Frequenzbereich vorgenommen, z.B. anhand einer Fourier- oder Laplacetransformation [Mes2000]. Nach Lösen der Gleichungen erfolgt eine Rücktransformation der Ergebnisse in den Zeitbereich. Bei der von [Bac1987] anhand eines Einmassensystems beschriebenen harmonischen Analyse wird mithilfe einer Fouriertransformation die periodische Einwirkung  $F(t)$  in harmonische Lasten  $F_j$  im Frequenzbereich zerlegt. Unter Berücksichtigung der einzelnen Fourier-Amplituden (vgl. Kapitel 2.2.2)  $F_j$  und der Phasenverschiebung zwischen Erregerfrequenz und Eigenfrequenz lassen sich im Frequenzbereich die komplexen Amplituden  $U_j$  der Verschiebungen ermitteln. Die Überlagerung der einzelnen komplexen Amplituden und die Rücktransformation liefern die Systemantwort im Zeitbereich.

Wie von [Kuc1994] gezeigt, lassen sich auch komplexere Systeme in mehrere Einmassensysteme zerlegen, welche die jeweiligen Modalformen des Ausgangssystems repräsentieren. Grundlage der Zerlegung ist eine vorangegangene modale Analyse, anhand derer das zu erwartende dynamische Verhalten des Gesamtsystems ermittelt wird.

Eine Möglichkeit zur Lösung der Bewegungs-DGL in Gl. 2.24, unter Berücksichtigung einer beliebigen Lasteinwirkung  $F(t)$  ist die Verwendung des Duhamel (Faltungs-)Integrals als Lösungsansatz für die partikuläre Lösung  $u_p(t)$ . Der Last-Zeitverlauf  $F(t)$  wird dabei in Einheitsimpulse umgewandelt. Für einfachere Last-Zeitverläufe sind geschlossene Lösungen möglich, in komplizierteren Fällen werden numerische Verfahren angewendet. Diese Methode ist bei längeren Anregungsfunktionen sehr rechenzeitaufwändig und wird daher im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter betrachtet.

Direkte Zeitschrittverfahren lösen die Bewegungs-DGL in Gl. 2.24 im Zeitbereich. Dabei wird der betrachtete Zeitraum (z.B. die Dauer einer Zugüberfahrt) in mehrere Zeitschritte  $\Delta t$  unterteilt. Die Zeitschritte können konstant oder variabel sein. Ausgehend von den bekannten Systemreaktionen im vorangegangenen Zeitschritt  $t_i$  werden die Systemreaktionen im nachfolgenden Zeitschritt  $t_{i+1}$  berechnet. Die direkten Zeitschrittverfahren werden unterteilt in explizite und implizite Verfahren. Explizite Verfahren eignen sich gut für die Bestimmung von Reaktionen elastischer Systeme mit bekannten (konstanten) Systemeigenschaften. Bei impliziten Verfahren wird am Übergang zwischen den beiden Zeitschritten  $t_i$  und  $t_{i+1}$  eine (nicht-lineare) Systemänderung berücksichtigt.

Bei allen direkten Zeitschrittintegrationsverfahren ist ein besonderes Augenmerk auf die Wahl der Zeitschrittweite  $\Delta t$  zu legen, einerseits um die Stabilität des Integrationsverfahrens zu gewährleisten (erforderlich bei expliziten Verfahren), andererseits um hinreichend genaue Berechnungsergebnisse zu erhalten. [Bat1990] nennt eine Mindestschrittweite von  $\Delta t \leq T_{min}/\pi$  für die numerische Stabilität bei expliziten Integrationsverfahren. Dabei ist  $T_{min}$  die kleinste Eigenschwingzeit, die sich aus der Systemdiskretisierung ergibt. Hinreichend genaue Ergebnisse liefert diese Zeitschrittweite allerdings noch nicht, dazu muss ein deutlich kleinerer Wert  $\Delta t$  gewählt werden.

Gemäß [Spe2010] [Rau2011a] lässt sich eine Schwingungsperiode  $T_i$  bereits relativ exakt mit einer Zeitschrittweite  $\Delta t \leq T_i/10$  abbilden, wobei sich eine Zeitschrittweite  $\Delta t \leq T_i/20$  seitdem als geeigneter Erfahrungswert etabliert hat. Nicht nur die Eigenperioden des betrachteten Systems gilt es zu berücksichtigen. Es ist auch erforderlich, den Zeitverlauf der Belastung zu berücksichtigen, da diese ebenfalls mit  $\Delta t$  abgetastet und zwischen den Zeitschritten linear interpoliert wird.

Die ÖBB-Richtlinie für die dynamische Berechnung von Eisenbahnbrücken [ÖBB2011] legt daher eine maximale Zeitschrittweite  $\Delta t \leq T/20$  fest, wobei  $T$  die Schwingdauer der höchsten relevanten Eigenfrequenz (nach Gl. 2.17) bzw. Erregerfrequenz (Berechnung durch Umstellen von Gl. 2.16) ist. Weiterhin ist nach [ÖBB2011] eine Vergleichsrechnung mit  $0,65 \Delta t$  durchzuführen, deren Ergebnisse maximal 10 % von den mit  $\Delta t$  berechneten Ergebnissen abweichen dürfen.

Wird die Zeitschrittweite zu groß gewählt, führt dies zu Ungenauigkeiten in der Berechnung. [Pir2009] weisen darauf hin, dass Fehler oftmals nicht erkannt werden, da auch bei etwaigen Fehlern augenscheinlich plausible Ergebnisse entstehen können. [Fin2007] empfehlen bei der von ihnen vorgestellten „Impulsmethode“ (siehe Kapitel 2.1.6) die in Gl. 2.38 angegebene Zeitschrittweite, wobei  $v$  die Geschwindigkeit des überfahrenden Zuges ist.

$$\Delta t \leq \frac{0,2 \left[ \frac{m}{s} \right]}{v \left[ \frac{m}{s} \right]} \quad \text{Gl. 2.38}$$

Für Überfahrten mit 100 km/h ergäbe sich somit schon eine maximale Zeitschrittweite von 0,0072 s, bei 160 km/h 0,0045 s, bei 200 km/h 0,0036 s, bei 250 km/h 0,0028 s und bei 300 km/h 0,0024 s.

Als Beispiel für ein implizites Berechnungsverfahren wird der u.a. in [Bat1990] [Mes2000] für ein Einmassensystem erläuterte Newmark Algorithmus [New1959] angegeben, da dieser in den in Kapitel 5 durchgeführten Berechnungen verwendet wird. Die hier verwendete Nummerierung der Koeffizienten in Gl. 2.42 bis Gl. 2.47 entspricht nicht der in [Mes2000] verwendeten Nummerierung, die nachfolgenden Gleichungen Gl. 2.50 bis Gl. 2.52 wurden entsprechend angepasst, weiterhin wurde die Vorzeichenkonvention von  $F$  an die eigenen Anforderungen bei der späteren Programmierung mit Matlab [Mat2014] angepasst.

Aus dem bekannten Zustand eines Systems zum Zeitpunkt  $t_1$  lässt sich der Zustand des Systems zum Zeitpunkt  $t_2 = t_1 + \Delta t$  ermitteln. Dazu werden die Anfangsbedingungen  $u(t_1)$ ,  $\dot{u}(t_1)$  und  $\ddot{u}(t_1)$  benötigt; es gilt Gl. 2.39, wobei  $F_1$  die auf das System wirkende Last zum Zeitpunkt  $t_1$  ist. Bei einem System, das aus der Ruhelage ausgelenkt wird, gilt  $u(t_1) = \dot{u}(t_1) = \ddot{u}(t_1) = 0$ . Weiterhin gelten Gl. 2.40 und Gl. 2.41.

$$m \cdot \ddot{u}(t_1) + c \cdot \dot{u}(t_1) + k \cdot u(t_1) = F_1 \quad \text{Gl. 2.39}$$

$$m(\ddot{u}(t_1) + \Delta \ddot{u}) + c(\dot{u}(t_1) + \Delta \dot{u}) + k(u(t_1) + \Delta u) = (F_1 + \Delta F) \quad \text{Gl. 2.40}$$

$$m\Delta \ddot{u} + c\Delta \dot{u} + k\Delta u = \Delta F \quad \text{Gl. 2.41}$$

Die Berechnungen werden unter der Annahme durchgeführt, dass innerhalb eines Zeitschrittes Dämpfung  $c$  und Steifigkeit  $k$  konstant bleiben. Grundsätzlich erlaubt dieser Ansatz, in jedem Zeitschritt  $c$  und  $k$  zu aktualisieren, was auch eine Berechnung mit nicht-linearen Material- bzw. Systemparametern ermöglicht. Zunächst werden die Integrationskonstanten nach Gl. 2.42 bis Gl. 2.47 berechnet.

$$c_1 = \frac{\gamma}{\beta \cdot \Delta t} \quad \text{Gl. 2.42}$$

$$c_2 = \frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} \quad \text{Gl. 2.43}$$

$$c_3 = \frac{1}{\beta \cdot \Delta t} \quad \text{Gl. 2.44}$$

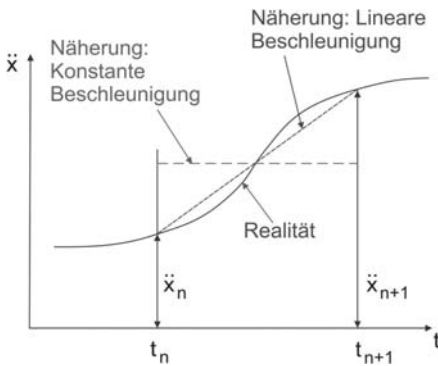


$$c_4 = \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{Gl. 2.45}$$

$$c_5 = \frac{1}{2\beta} \quad \text{Gl. 2.46}$$

$$c_6 = \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \quad \text{Gl. 2.47}$$

Die Parameter  $\beta$  und  $\gamma$  können dabei entweder für eine konstante Beschleunigung (Gl. 2.48) oder eine lineare Beschleunigung (Gl. 2.49) festgelegt werden, siehe Abbildung 2-14.



**Abbildung 2-14 Vergleich Annahme einer konstanten oder einer linearen Beschleunigung innerhalb eines Zeitschritts**

Für die Berechnungen in Kapitel 5 wird eine lineare Beschleunigung (Gl. 2.49) unterstellt. Gemäß [ÖBB2011] hat sich das Newmark-Verfahren mit einem linearen Beschleunigungsansatz für die Berechnung von Zugüberfahrten auf Brücken bewährt. Bei einer Parameterwahl gemäß Gl. 2.48 ist nach [Mes2000] ein „unbedingt stabiles“ Schema vorhanden, d.h. die Wahl der Zeitschrittweite  $\Delta t$  hat keinen Einfluss auf die Stabilität des Integrationsverfahrens, sondern nur die Genauigkeit der Ergebnisse. Im Fall einer Parameterwahl gemäß Gl. 2.49 ist das Integrationsverfahren nur „bedingt stabil“ und die Zeitschrittweite beeinflusst auch die Stabilität des Verfahrens. Gemäß [ÖBB2011] führt auch die Annahme einer linearen Beschleunigung gemäß Gl. 2.49 unabhängig von den Systemparametern zu Konvergenz, was sich zumindest für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen bestätigen lässt.

$$\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2} \quad \text{Gl. 2.48}$$

$$\beta = \frac{1}{6}, \gamma = \frac{1}{2} \quad \text{Gl. 2.49}$$

$$\Delta u = \frac{-F_1 + (c_3 \cdot m + c_4 \cdot c) \cdot \dot{u}(t_1) + (c_5 \cdot m + c_6 \cdot c) \cdot \ddot{u}(t_1)}{k + c_1 \cdot c + c_2 \cdot m} \quad \text{Gl. 2.50}$$

$$\Delta \dot{u} = c_1 \cdot \Delta u - c_4 \cdot \dot{u}(t_1) - c_6 \cdot \ddot{u}(t_1) \quad \text{Gl. 2.51}$$

$$\Delta \ddot{u} = c_2 \cdot \Delta u - c_3 \cdot \dot{u}(t_1) - c_5 \cdot \ddot{u}(t_1) \quad \text{Gl. 2.52}$$

$$u(t_2) = u(t_1) + \Delta u \quad \text{Gl. 2.53}$$

$$\dot{u}(t_2) = \dot{u}(t_1) + \Delta \dot{u} \quad \text{Gl. 2.54}$$

$$\ddot{u}(t_2) = \ddot{u}(t_1) + \Delta \ddot{u} \quad \text{Gl. 2.55}$$

Die Ergebnisse  $u(t_2)$ ,  $\dot{u}(t_2)$  und  $\ddot{u}(t_2)$  sind die Anfangsbedingungen für den nächsten Zeitschritt. Für diesen erfolgen die Berechnungen analog, lediglich  $F_1$  wird durch die Differenz  $\Delta F$  zwischen  $F(t_2)$  und  $F(t_1) = F_1$  ersetzt. Somit ergeben sich für einen beliebigen Zeitpunkt  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$  die Zusammenhänge in Gl. 2.56 bis Gl. 2.61.

$$\Delta u = \frac{-\Delta F + (c_3 \cdot m + c_4 \cdot c) \cdot \dot{u}(t_i) + (c_5 \cdot m + c_6 \cdot c) \cdot \ddot{u}(t_i)}{k + c_1 \cdot c + c_2 \cdot m} \quad \text{Gl. 2.56}$$

$$\Delta \dot{u} = c_1 \cdot \Delta u - c_4 \cdot \dot{u}(t_i) - c_6 \cdot \ddot{u}(t_i) \quad \text{Gl. 2.57}$$

$$\Delta \ddot{u} = c_2 \cdot \Delta u - c_3 \cdot \dot{u}(t_i) - c_5 \cdot \ddot{u}(t_i) \quad \text{Gl. 2.58}$$

$$u(t_{i+1}) = u(t_i) + \Delta u \quad \text{Gl. 2.59}$$

$$\dot{u}(t_{i+1}) = \dot{u}(t_i) + \Delta \dot{u} \quad \text{Gl. 2.60}$$

$$\ddot{u}(t_{i+1}) = \ddot{u}(t_i) + \Delta \ddot{u} \quad \text{Gl. 2.61}$$

Für weitere direkte und indirekte Integrationsverfahren sei auf die Literatur verwiesen (z.B. auf das Runge-Kutta-Verfahren [Gro2012]). In der Praxis ist es i.d.R. so, dass der Berechnungsalgorithmus durch die Wahl des verwendeten Berechnungsprogrammes festgelegt wird. Beispielsweise verwendet die im späteren Verlauf der Arbeit für Vergleichsrechnungen mit dem eigenen Programm genutzte Software InfoCAD [Inf2014] für direkte Zeitschrittberechnungen das allgemeine Integrationschema nach Newmark und Wilson mit einer Parameterfestlegung gemäß Gl. 2.48. Die entsprechenden Formeln für die einzelnen Berechnungsschritte können der Anwendungsbeschreibung in [Inf2014] entnommen werden oder auch [Rau2011a]. Die Entwicklungsgeschichte der verschiedenen Newmark-Integrationsverfahren (Entwicklung durch Newmark 1959, Erweiterung durch Wilson 1962) wird in [Spe2010] beschrieben. Die einzelnen Berechnungsmethoden werden in [Bat1990] beschrieben.

Handelt es sich bei dem betrachteten System nicht um ein Einmassensystem wie in Abbildung 2-11 a, sondern um ein komplexeres System mit mehr als einem Freiheitsgrad, ergibt sich ein Bewegungsdifferentialgleichungssystem wie in Gl. 2.62.

$$\underline{M}\ddot{\underline{u}} + \underline{C}\dot{\underline{u}} + \underline{K}\underline{u} = \underline{F} \quad \text{Gl. 2.62}$$

Bei  $n$  Freiheitsgeraden ergeben sich  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$  und  $\underline{K}$  als  $(n \times n)$ -Matrizen, wobei  $\underline{M}$  eine Diagonalmatrix ist. Die Verschiebungen bzw. Verdrehungen in den  $n$  Freiheitsgraden sind im  $(n \times 1)$ -Vektor  $\underline{u}$  enthalten, die Geschwindigkeiten in  $\dot{\underline{u}}$  und die Beschleunigungen in  $\ddot{\underline{u}}$ . Generell sind die für das Einmassensystem gezeigten Lösungsverfahren auch für Systeme mit mehreren Freiheitsgeraden anwendbar. Dazu muss das Gleichungssystem in Gl. 2.62 allerdings zunächst entkoppelt werden, was bedeutet, dass die Dämpfungsmatrix  $\underline{C}$  diagonalisiert werden muss. Dazu bieten sich je nach gewähltem Lösungsverfahren die modale Dämpfung oder die Rayleigh-Dämpfung an. An dieser Stelle sei auf [Mes2000] verwiesen, der das nötige Prozedere anschaulich und anhand von Beispielen beschreibt. Es werden dabei u.a. Methoden zur statischen Kondensation gezeigt, welche den numerischen Aufwand reduzieren. Im Rahmen dieser Arbeit wird nicht weiter darauf eingegangen, da sich das Bewegungsdifferentialgleichungssystem in Gl. 2.62 vor allem für Systeme eignet, die sich im Modell durch eine endliche Anzahl von einzelnen Punktmassen und Freiheitsgraden idealisieren lassen.



**Abbildung 2-15 Gelenkiger Biegebalken mit bewegter Einzellast**

Für Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden, z.B. Balkensysteme mit verteilter Masse  $\mu$  (entspricht unendlich vielen Punktmassen) wie das gelenkig gelagerte Balkensystem mit konstanter Masse- und Steifigkeitsverteilung in Abbildung 2-15 kann der in Gl. 2.63 genannte Zusammenhang eines Euler-Bernoulli-Balkens verwendet werden. Die Darstellung findet sich z.B. in [Frý1971].

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + 2\mu\omega_D \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = F(x, t) \quad \text{Gl. 2.63}$$

Die Durchbiegung des Balkens  $w(x, t)$  ist abhängig von der betrachteten Stelle  $x$  und dem betrachteten Zeitpunkt  $t$ . Der Lastvektor  $F(x, t)$  ist abhängig von der Zeit und der Position der Last. Verschiedene Ansätze zur Lösung von Gl. 2.63 sind in der Literatur gegeben, z.B. [Frý1971] [Frý1996] [Mes2000]. An dieser Stelle wird nur die

Ermittlung der Biegeeigen(kreis)frequenzen aus Gl. 2.63 thematisiert. Unter Vernachlässigung der Dämpfungs- und Belastungsanteile (Gl. 2.64) kann mit Gl. 2.65 und Gl. 2.66 der Zusammenhang in Gl. 2.67 hergestellt werden, vgl. [Frý1996].

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Gl. 2.64}$$

$$w(x, t) = \sum_j^{\infty} w_j(x) \cdot \sin(\omega_j t) \quad [j \in \mathbb{N}] \quad \text{Gl. 2.65}$$

$$\lambda_j^4 = L^4 \frac{\mu \omega_j^2}{EI} \quad \text{Gl. 2.66}$$

$$\frac{d^4 w_j(x)}{dx^4} - \frac{\lambda_j^4}{L^4} w_j(x) = 0 \quad \text{Gl. 2.67}$$

Dabei beschreiben  $w_j(x)$  die Modalformen der Schwingung und die  $\omega_j$  die zugehörigen Biegeeigenkreisfrequenzen. Letztere lassen sich unter Verwendung der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung (Gl. 2.68) gemäß Gl. 2.69 herleiten, die zugehörigen Frequenzen  $f_j$  lassen sich mit Gl. 2.70 berechnen.

$$w_j(x) = C_1 \cdot \sin \frac{\lambda_j x}{L} + C_2 \cdot \cos \frac{\lambda_j x}{L} + C_3 \cdot \sinh \frac{\lambda_j x}{L} + C_4 \cdot \cosh \frac{\lambda_j x}{L} \quad \text{Gl. 2.68}$$

$$\omega_j = \frac{\lambda_j^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad \text{Gl. 2.69}$$

$$f_j = \frac{\lambda_j^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad \text{Gl. 2.70}$$

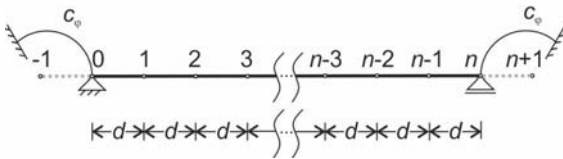
Die Nullstellen  $\lambda_j$  sind von den durch das statische System gegebenen Randbedingungen abhängig. Für einen ideal-gelenkig gelagerten Biegebalken (Abbildung 2-15) gilt  $w_j(0) = w_j(L) = w_j''(0) = w_j''(L) = 0$ , somit ergeben sich die Nullstellen nach Gl. 2.71 und die Modalformen nach Gl. 2.72. Einsetzen von Gl. 2.71 in Gl. 2.70 liefert Gl. 2.6.

$$\lambda_j = j\pi \quad \text{Gl. 2.71}$$

$$w_j(x) = \sin \left( \frac{j\pi x}{L} \right) \quad \text{Gl. 2.72}$$

In [Frý1996] werden zusätzlich noch Balkensysteme thematisiert, die beidseitig fest eingespannt, an einer Seite gelenkig gelagert und an der anderen fest eingespannt oder an beiden Enden frei sind, sowie ein Kragarm.

Als Alternative zur analytischen Ermittlung der Biegeeigenfrequenzen steht z.B. das Differenzenverfahren zur Verfügung, welches von [Dan2013] sehr detailliert beschrieben und anhand unterschiedlicher Übungsbeispiele veranschaulicht wird. Ergänzende Übungsbeispiele liefert [Dan2017]. Das dort bereitgestellte Matlab-Skript zur Ermittlung von Biegeeigenfrequenzen und -formen eines Biegebalkens mit fester Einspannung links und gelenkiger Lagerung rechts wurde für diese Arbeit geringfügig angepasst, sodass sich eine gelenkige Lagerung mit zusätzlichen Drehfedern an beiden Auflagern berücksichtigen lässt (vgl. Abbildung 5-15 a bzw. Abbildung 2-16). Das Matlab [Mat2014] Skript ist in Anhang B.1 gegeben.



**Abbildung 2-16** Diskretisierung eines gelenkigen Balkensystems mit Drehfedern zur Anwendung des Differenzenverfahrens

Beim Differenzenverfahren wird zunächst das Balkensystem mit der Länge  $L$  in  $n$  Abschnitte mit der Länge  $d$  unterteilt (siehe Abbildung 2-16). Dabei ist zu beachten, dass

mit steigender Anzahl an Unterteilungen die Genauigkeit der Ergebnisse steigt; insbesondere wird von [Dan2017] darauf hingewiesen, dass sich zwar die erste Biegeeigenfrequenz und zugehörige Eigenform mit einer geringen Anzahl Unterteilungen gut abbilden lassen, höhere Frequenzen und Eigenformen jedoch nicht. Allerdings kann mit dem Skript aus Anhang B.1 problemlos eine hohe Anzahl von Unterteilungen gewählt werden ohne die Berechnungsdauer nennenswert zu vergrößern.

Der Berechnung zugrunde gelegt wird die in Gl. 2.73 gegebene DGL 4. Ordnung, dabei beschreiben  $Z_i$  die zu den Eigenfrequenzen  $\omega$  zugehörigen Schwingungsformen. Gl. 2.73 kann durch Umstellen von Gl. 2.64 erzeugt werden. Für den in dieser Arbeit betrachteten Fall eines Balkens mit konstanter Massen- und Steifigkeitsverteilung gelten Gl. 2.74 und Gl. 2.75. Es entstehen  $(n-1)$ -Gleichungen mit  $(n-1)$ -Unbekannten, dabei werden die Knoten 1 bis  $n-1$  in Abbildung 2-16 betrachtet (es gilt also  $i=[1, n-1]$ ).

$$(EI \cdot Z'')'' - \omega^2 \cdot \mu \cdot Z = 0 \quad \text{Gl. 2.73}$$

$$Z_{i-2} - 4Z_{i-1} + 6Z_i - 4Z_{i+1} + Z_{i+2} - \kappa Z_i = 0 \quad \text{Gl. 2.74}$$

$$\kappa = \frac{\mu \cdot d^4}{EI} \cdot \omega^2 \quad \text{Gl. 2.75}$$

Folgende Randbedingungen werden für das System aus Abbildung 2-16 berücksichtigt:

$$Z_0 = 0 \quad \text{Gl. 2.76}$$

$$Z_n = 0 \quad \text{Gl. 2.77}$$

$$Z'_0 \rightarrow c_{\varphi 0} \rightarrow M_0 + c_{\varphi 0} Z'_0 = 0 \quad \text{Gl. 2.78}$$

$$Z'_n \rightarrow c_{\varphi n} \rightarrow M_n - c_{\varphi n} Z'_n = 0 \quad \text{Gl. 2.79}$$

Die zentrale Differenzengleichung für die Biegemomente lautet:

$$M_{bi} = -\frac{EI}{d^2} (Z_{i-1} - 2Z_i + Z_{i+1}) \quad \text{Gl. 2.80}$$

Mit den zentralen Differenzenformeln (Gl. 2.81 bis Gl. 2.84) lassen sich Gl. 2.85 und Gl. 2.87 herleiten, welche sich dann zu Gl. 2.86 bzw. Gl. 2.88 umformen lassen.

$$Z'_i \approx \frac{1}{2d} (-Z_{i-1} + Z_{i+1}) \quad \text{Gl. 2.81}$$

$$Z''_i \approx \frac{1}{d^2} (Z_{i-1} - 2Z_i + Z_{i+1}) \quad \text{Gl. 2.82}$$

$$Z'''_i \approx \frac{1}{2d^3} (-Z_{i-2} + 2Z_{i-1} - 2Z_{i+1} + Z_{i+2}) \quad \text{Gl. 2.83}$$

$$Z''''_i \approx \frac{1}{d^4} (Z_{i-2} - 4Z_{i-1} + 6Z_i - 4Z_{i+1} + Z_{i+2}) \quad \text{Gl. 2.84}$$

Linkes Auflager:

$$-\frac{EI}{d^2} (Z_{-1} - 2Z_0 + Z_1) + c_{\varphi} \frac{1}{2d} (-Z_{-1} + Z_1) = 0 \quad \text{Gl. 2.85}$$

$$Z_{-1} = -\frac{1 - \frac{c_{\varphi} d}{2EI}}{1 + \frac{c_{\varphi} d}{2EI}} Z_1 \quad \text{Gl. 2.86}$$

Rechtes Auflager:

$$-\frac{EI}{d^2}(Z_{n-1} - 2Z_n + Z_{n+1}) + c_\varphi \frac{1}{2d}(-Z_{n-1} + Z_{n+1}) = 0 \quad \text{Gl. 2.87}$$

$$Z_{n+1} = -\frac{1 - \frac{c_\varphi d}{2EI}}{1 + \frac{c_\varphi d}{2EI}} Z_{n-1} \quad \text{Gl. 2.88}$$

Die  $(n-1)$  Gleichungen bilden ein homogenes Gleichungssystem, wobei  $\underline{E}$  eine Einheitsmatrix ist.

$$(\underline{A} - \kappa \cdot \underline{E}) \cdot \underline{Z} = 0 \quad \text{Gl. 2.89}$$

Die Änderung des Skriptes von [Dan2017] betrifft nur die Zellen  $A_{11}$  und  $A_{ii}$ , für welche nun Gl. 2.92 in Verbindung mit dem Hilfswert  $X^*$  (Gl. 2.91) gilt.

$$A_{11} = A_{ii} = 6 + X^* \quad \text{Gl. 2.90}$$

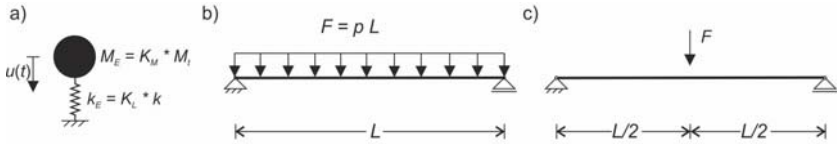
$$X^* = -\frac{1 - \frac{c_\varphi d}{2EI}}{1 + \frac{c_\varphi d}{2EI}} \quad \text{Gl. 2.91}$$

Im Falle einer ideal- gelenkigen Lagerung gilt  $A_{11} = 5$  (bzw.  $A_{(n-1)(n-1)} = 5$ ), im Falle einer festen Einspannung gilt  $A_{11} = 7$  (bzw.  $A_{(n-1)(n-1)} = 7$ ).

In Gl. 2.93 wird exemplarisch das entsprechende Gleichungssystem für eine Unterteilung in 6 Abschnitte gegeben.

$$\left( \begin{bmatrix} 6 + X^* & -4 & 1 & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & \\ & & 1 & -4 & 6 + X^* & \end{bmatrix} - \kappa \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{Gl. 2.92}$$

Im Rahmen dieser Arbeit werden Überfahrtsberechnungen verschiedener Züge mit Einmassensystemen für die Brücke durchgeführt (Kapitel 5). In [Bigg1964] wird die Transformation eines balkenartigen Systems in einen äquivalenten Einmassenschwinger beschrieben.



**Abbildung 2-17: a) Äquivalentes Einmassensystem, b) gelenkiger Biegeträger mit konstanter Last und gleichmäßig verteilter Masse, c) gelenkiger Biegeträger mit Last in Feldmitte und gleichmäßig verteilter Masse**

Alternativ zu Gl. 2.6 kann  $n_0$  auch durch Umstellen der in Gl. 2.93 gegebenen Formel nach [Bigg1964] zur Ermittlung der Kreiseigenfrequenz  $\omega_0$  eines äquivalenten Einmassenschwingers (vgl. Abbildung 2-17 a) ermittelt werden. Dabei beschreibt  $k$  die lineare Steifigkeit und  $M_t$  die Gesamtmasse des Ausgangsbalkensystems. Um die Ersatzsteifigkeit  $k_E$  und Ersatzmasse  $M_E$  des Ersatzsystems zu bestimmen, werden Lastfaktor  $K_L$  (Gl. 2.94, Gl. 2.95) und Massefaktor  $K_M$  (Gl. 2.96, Gl. 2.97) benötigt, welche ebenso wie  $k$  von System und Laststellung abhängig sind. In Formeln Gl. 2.94 und Gl. 2.96 geht die dimensionslose Formfunktion  $\Phi(x)$  ein, Gl. 2.95 und Gl. 2.97 benötigen lediglich die Ordinaten  $\Phi_r$  der Verformungsfunktion, an der die einzelnen Lasten oder Massen angreifen. Bei einem System mit einer Einzellast in Feldmitte gilt  $\Phi_r = 1,0$ .

$$\omega_0 = n_0 \cdot 2\pi = \sqrt{\frac{k_E}{M_E}} = \sqrt{\frac{K_L \cdot k}{K_M \cdot M_t}} \quad \text{Gl. 2.93}$$

$$K_L = \frac{\int_0^L p \cdot \Phi(x) dx}{p \cdot L} \quad (\text{verteilte Last}) \quad \text{Gl. 2.94}$$

$$K_L = \frac{\sum^r F_r \Phi_r}{\sum^r F_r} \quad (\text{Einzellast}) \quad \text{Gl. 2.95}$$

$$K_M = \frac{\int_0^L m \cdot \Phi^2(x) dx}{m \cdot L} \quad (\text{verteilte Masse}) \quad \text{Gl. 2.96}$$

$$K_M = \frac{\sum^r M_r \Phi_r}{\sum^r M_r} \quad (\text{Punktmasse}) \quad \text{Gl. 2.97}$$

In [Bigg1964] werden die Faktoren  $k$ ,  $K_L$  und  $K_M$  für beidseitig gelenkig gelagerte Einfeldträger, beidseitig eingespannte Einfeldträger und für Einfeldträger, die auf einer Seite gelenkig gelagert und auf der anderen Seite fest eingespannt sind, für verschiedene Last- bzw. Masseanordnungen differenziert für elastische oder plastische Verformung angegeben.



Für einen gelenkig gelagerten Biegeträger mit gleichmäßiger Last- und Masseverteilung (Abbildung 2-17 b) und elastischer Verformung werden die entsprechenden Parameter in Gl. 2.98 bis Gl. 2.101 angegeben. Die Kreiseigenfrequenz ergibt sich gemäß Gl. 2.102. Ein Vergleich von Gl. 2.6 und Gl. 2.102 ergibt eine Differenz von unter 1 ‰ bei der Ermittlung von  $n_0$ .

$$k = \frac{384 EI}{5L^3} \quad \text{Gl. 2.98}$$

$$\Phi(x) = k \cdot w(x) = \frac{16}{5L^4} (L^3 x - 2Lx^3 + x^4) \quad \text{Gl. 2.99}$$

$$K_L = \frac{16}{25} = 0,64 \quad \text{Gl. 2.100}$$

$$K_M = \frac{3968}{7875} \cong 0,50 \quad \text{Gl. 2.101}$$

$$\omega_0 = n_0 \cdot 2\pi = \sqrt{\frac{K_L \cdot k}{K_M \cdot M_t}} = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{3024 EI}{31 m}} \quad \text{Gl. 2.102}$$

Ein gelenkig gelagerter Biegeträger mit gleichmäßiger Masseverteilung, Einzellast in Feldmitte (Abbildung 2-17 b) unter rein elastischer Verformung liefert minimal abweichende Ergebnisse. Die Kreiseigenfrequenz ist in Gl. 2.107 gegeben, die zugehörigen Parameter in Gl. 2.103 bis Gl. 2.106. Ein Vergleich von Gl. 2.6 und Gl. 2.107 ergibt eine Differenz von unter 1 ‰ bei der Ermittlung von  $n_0$ . Ein Vergleich von Gl. 2.102 und Gl. 2.107 ergibt eine Differenz von unter 7 ‰. (Wird der Vergleich für ein beidseitig fest eingespanntes System vollzogen, ergibt sich bei den am äquivalenten Einmassensystem ermittelten Frequenzen eine Abweichung von etwa 2 ‰ zwischen verteilter Last und Einzellast.)

$$k = \frac{48 EI}{L^3} \quad \text{Gl. 2.103}$$

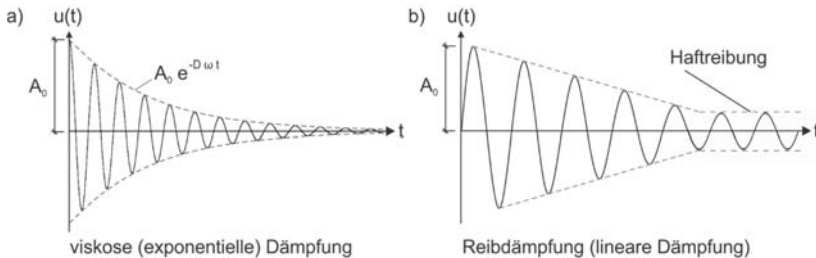
$$\Phi(x) = k \cdot w(x) = \frac{x}{L^3} (3L^2 - 4x^2) \quad \text{Gl. 2.104}$$

$$K_L = 1 \quad \text{Gl. 2.105}$$

$$K_M = \frac{17}{35} \cong 0,49 \quad \text{Gl. 2.106}$$

$$\omega_0 = n_0 \cdot 2\pi = \sqrt{\frac{K_L \cdot k}{K_M \cdot M_t}} = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{1680 EI}{17 m}} \quad \text{Gl. 2.107}$$

Wie zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, muss zur realistischen Abbildung von Brückeneigenschaften bzw. des dynamischen Brückenverhaltens ein geeignetes Modell gefunden werden, das Struktureigenschaften und aufgebrachte Belastung mit ausreichender Genauigkeit abbilden kann. Die vorgestellten Bewegungsdifferentialgleichungen und Lösungsalgorithmen basieren auf der Annahme einer viskosen, d.h. geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung. In der Realität kommen allerdings oft auch nicht geschwindigkeitsproportionale Dämpfungseffekte vor, z.B. infolge Reibung. Zur Veranschaulichung werden in Abbildung 2-18 schematisch zwei Ausschwingvorgänge gegenübergestellt. Bei viskoser Dämpfung ergibt sich ein exponentieller Verlauf (Abbildung 2-18 a bzw. Abbildung 2-12 b). Für einen Einmassenschwinger kann dieser Verlauf gemäß Gl. 2.35 berechnet werden, wobei die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  entsprechend aus den Randbedingungen  $u(t_1) = A_0$  und  $\dot{u}(t_1) = 0$  bestimmt werden.  $A_0$  ist hierbei die maximale Amplitude am Beginn des Ausschwingvorganges. Im Gegensatz dazu stellt sich bei (reiner) Reibdämpfung ein linearer Ausschwingvorgang ein (Abbildung 2-18 b).



**Abbildung 2-18: Vergleich von Ausschwingvorgängen: a) viskose (exponentielle) Dämpfung b) Reibdämpfung (linearer Dämpfung)**

In [Rau2011a] wird besonders im Zusammenhang mit dem Beitrag des Eisenbahnschotters zum Systemverhalten (siehe Kapitel 3.8 bzw. Kapitel 4) die Frage gestellt, inwieweit sich mögliche (Reib-)Dämpfungsbeiträge des Schotters durch eine modifizierte, viskose Dämpfung im Modell zum Ansatz bringen lassen. [Rau2011a] gibt mit Gl. 2.108 eine Möglichkeit an, die Reibdämpfung so umzurechnen, dass sie als äquivalente viskose Dämpfung  $D$  abgebildet werden kann. Dabei bezeichnet  $W_D$  die während eines Schwingungszyklus dissipierte Energie,  $W_E$  ist die Formänderungsarbeit (elastisch gespeicherte Arbeit). Das Verhältnis der beiden wird als spezifische

Dämpfung  $\psi$  bezeichnet.  $\Omega$  ist die Erregerfrequenz des Systems und  $\omega$  die Eigenkreisfrequenz. Die in einem eingeschwungenen System während eines Schwingungszyklus durch Reibung dissipierte Energie kann gemäß Gl. 2.109 berechnet werden, wobei sich die Reibkraft  $F_{fric}$  als Produkt aus Reibdämpfung und Losreißamplitude  $u_L$  ergibt, welche zunächst überschritten werden muss, um die Reibdämpfung zu aktivieren;  $u$  ist die Verschiebungsamplitude im eingeschwungenen Zustand. Wie bereits anhand Abbildung 2-12 erläutert, wird bei einer Zugüberfahrt allerdings kaum der eingeschwungene Zustand erreicht.

$$D = \xi = \frac{W_D}{4 \cdot \pi \cdot W_E \cdot \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)} = \frac{\psi}{4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)} \quad \text{Gl. 2.108}$$

$$W_{D,fric} = 4 \cdot F_{fric} \cdot (u - u_L) \quad \text{Gl. 2.109}$$

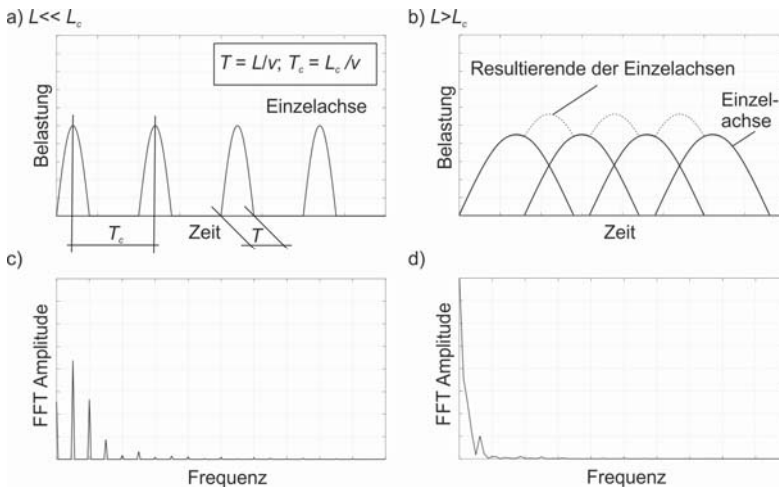
Weiterhin sei angemerkt, dass am realen Bauwerk die einzelnen Eigenfrequenzen unterschiedliche Dämpfungswerte aufweisen (siehe z.B. die Messergebnisse in [Fel2016]). [EN1991-2] [RiL804] geben nur einen Wert für die jeweilige Bauwerkskonstellation (Stützweite + Bauweise) an, allerdings kann die Wahl der Dämpfung im Modell (z.B. Rayleigh) dazu führen, dass die einzelnen Moden unterschiedlich gedämpft werden, was aber dann nicht dem realen Fall entsprechen muss.

### 2.1.5 Belastungscharakteristik durch überfahrende Züge

Der Belastungsverlauf einer Brücke ist einerseits vom betrachteten Zugtyp abhängig (Anzahl der Achsen, Achsabstände, Achslasten, Geschwindigkeit  $v$ ), andererseits von der Brücke selbst. Je nach Stützweite ergeben sich unterschiedliche Belastungscharakteristiken für die unterschiedlichen Zugtypen, je nach Abstand zwischen den aufeinander folgenden Achslasten. [Lu2012] verwenden das Verhältnis von Stützweite  $L$  zum Abstand  $L_c$  zwischen Einzellasten (dort als Wagenlänge beschrieben) zur Definition verschiedener Lastszenarien:

- $L/L_c \rightarrow 0$  (sehr kurze Brücke): die Lasten entsprechen einzelnen Impulsen, der zugehörige Last-Zeitverlauf umfasst fast gleich große Peaks mit  $i$  Perioden  $T_c = L_c/v$  (siehe Abbildung 2-19 a) bzw. Frequenzen von  $i^*(v/L_c)$  (siehe Abbildung 2-19 c).
- $L/L_c < 1$  (kurze Brücke): im Vergleich zur sehr kurzen Brücke reduzieren sich die Anteile der höheren Last-Frequenzen  $i^*(v/L_c)$  im Last-Frequenzspektrum deutlich.

- $L/L_c = 1$  (Grenzfall Brückenlänge = Wagenlänge): bis zu dieser Grenze erreichen die Lastimpulse nacheinander die Brücke, im Grenzfall  $L/L_c = 1$  schließen sie sich unmittelbar nacheinander an, das Last-Frequenzspektrum weist noch immer klare Peaks bei  $\dot{r}^*(v/L_c)$  auf, wobei die Anteile der höheren Frequenzen noch weiter reduziert werden.
- $L/L_c > 1$  (lange Brücke): es wirken mehrere Lastimpulse gleichzeitig auf die Brücke ein und überlagern sich, siehe Abbildung 2-19 b. Der Beanspruchungs-Verlauf ist oft stark durch die quasi-statische Komponente geprägt. Im Last-Frequenzspektrum sind die Peaks bei  $\dot{r}^*(v/L_c)$  zu erkennen, die höchste Leistungsdichte ist bei der kleinsten dominanten Frequenz ( $v/L_c$ ) zu erkennen. Weitere Frequenzanteile  $\dot{r}^*(v/L_c)$  sind zu erkennen (Abbildung 2-19 d).



**Abbildung 2-19: Belastungsschema Zuglasten nach [Lu2012] a) kurze Brücke b) lange Brücke, sowie zugehörige FFTs c) kurze Brücke d) lange Brücke**

Lediglich die Konfigurationen des HSLM B (für Einfeldbrücken mit  $L < 7$  m, siehe Kapitel 2.1.2) bestehen ausschließlich Einzellasten mit gleichen Achsabständen (d.h. Achsabstände = Wagenlängen). Die Konfigurationen der Betriebszüge und der HSLM A bestehen immer aus einer Kombination aus Loks oder Steuerwagen und einer Anzahl von Mittelwagen (siehe Abbildung 2-5); für letztere werden die Wagenlängen als Länge über Puffer  $L_{üP}$  in [RiL804] angegeben. I.d.R. setzt sich ein Wagen aus zwei Fahrgestellen (vier Achsen) zusammen. Obwohl  $L_{üP}$  keine Auskunft darüber gibt, welche Abstände sich zwischen den Achsen eines Wagens ergeben, wiederholt sich die spezifische Achslastabfolge im Abstand  $L_{üP}$  bei jedem Mittelwagen

(in Gl. 2.16 wird der Zusammenhang zwischen  $L_{üP}$  und erwarteten Resonanzeffekten gezeigt).

Es ergeben sich gemäß [EN1991-2], in Abhängigkeit von  $L$ , Wagenlängen zwischen 2,5 m und 3,5 m für das HSLM B. Gemäß [RiL804] ergeben sich  $L_{üP}$ -Werte zwischen 13,14 m (Talgo AV 2) und 27 m (HSLM A10). Bei einer Klassifizierung von Brücken über  $L/L_{üP}$  könnte also strenggenommen die gleiche Brücke in Abhängigkeit des betrachteten Lastmodells gleichzeitig „kurz“ und „lang“ sein.

**Tabelle 2-7: Minimale und maximale Achsabstände gemäß [RiL804]**

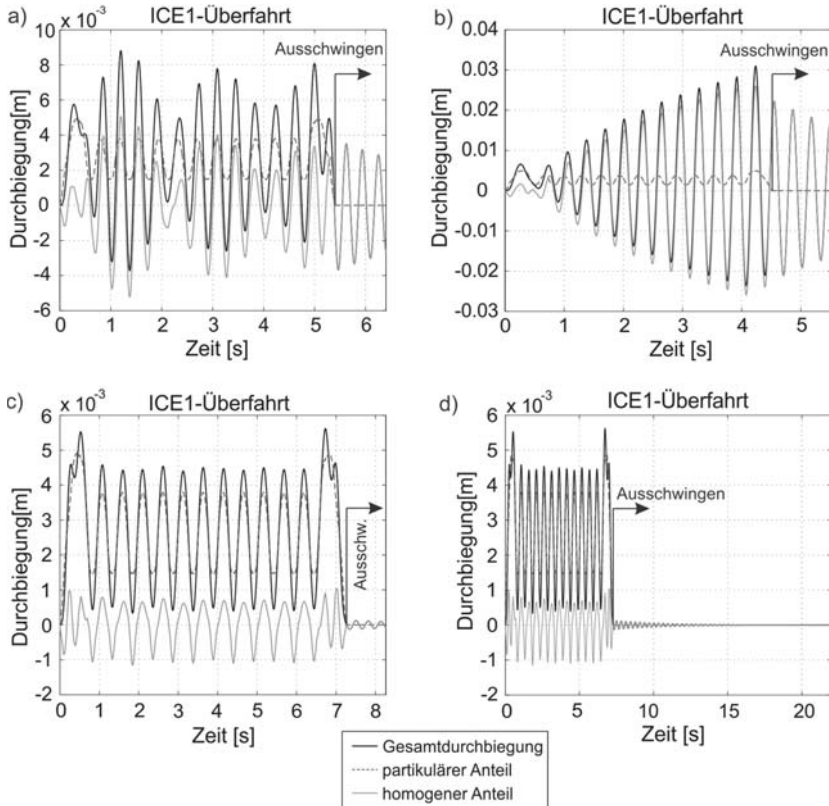
Lastmodell	ICE 1	ICE 3	Thalys	HSLM A01	HSLM A02	HSLM A10
min. Abstand	2,5	2,5	3,0	2,0	3,0	2,0
max. Abstand	16,5	14,9	15,7	16,0	15,5	25,0

Zur generellen Darstellung des Phänomens Belastungscharakteristik eignet sich die Einteilung nach [Lu2012] dennoch. Bei den im Rahmen dieser Arbeit betrachteten kurzen und mittelweit gespannten Einfeldträgerbrücken (d.h. Spannweiten bis 30 m) ergeben sich häufig Belastungscharakteristiken, bei der mehrere Achsen gleichzeitig auf der Brücke befinden (vgl. Abbildung 2-19 b). Tabelle 2-7 listet die minimalen und maximalen Achsabstände einiger ausgewählter Zugtypen aus [RiL804] auf. Es ist zu erkennen, dass die Achsabstände z.T. deutlich kleiner sind als  $L_{üP}$ , d.h. auch bei  $L/L_{üP} < 1$  können mehrere Achsen gleichzeitig auf der Brücke sein.

In Abbildung 2-20 sind exemplarisch Durchbiegungsverläufe in Feldmitte einer 24,6 m langen Brücke dargestellt. Die Brücke wurde von einem ICE 1 befahren ( $L_{üP} = 26,4$  m). Die Berechnungen erfolgten mit dem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Berechnungsprogramm, siehe Kapitel 5. Dargestellt werden jeweils die Gesamtreaktionen, der partikuläre (statische) Anteil der Durchbiegungen, sowie die Differenz aus Gesamtreaktion und statischem Anteil, dem homogenen Anteil. Der statische Anteil ist immer gleich. Im Bereich der Mittelwagen befinden sich immer zwei oder drei Achsen gleichzeitig auf der Brücke.

Der statische Anteil ist proportional zur aufgebrachten Belastungscharakteristik (eine Darstellung des zugehörigen Lastvektors ist in Abbildung 5-4 zu finden). Die dynamischen Anteile ergeben sich in Abhängigkeit der Überfahrtsgeschwindigkeit  $v$ . Abbildung 2-20 b zeigt deutlich, wie mit jedem weiteren, die Brücke mit der kritischen Geschwindigkeit  $v_{krit,1,0,ICE1}$  nach Gl. 2.16, überfahrenden Wagen die Auslenkung vergrößert wird. Die Anzahl der maßgebenden lokalen Maxima (im Bereich der 12 Mittelwagen ergeben sich 11 solcher Maxima, jede der beiden Loks ergibt

ein weiteres Maximum) verändert sich nicht. In [Big2014b] konnte so aus der Betrachtung von unterhalb der Brücke gemessenen Dehnungen eine Identifikation des überfahrenden Zugtyps erfolgen. Aus den bekannten Abständen zwischen den Achsen ließ sich darüber hinaus auch die Überfahrtsgeschwindigkeit nachträglich bestimmen.



**Abbildung 2-20: Aufteilung Durchbiegungsverläufe in statische und dynamische Komponenten a)  $v = 250 \text{ km/h}$ , b)  $v = v_{\text{res},1,0,ICE1} = 299 \text{ km/h}$ , c) + d)  $v = v_{\text{cancel}} = 186 \text{ km/h}$**

Ein Vergleich der Zeitverläufe in Abbildung 2-20 zeigt am Ende der Überfahrten a) und b) eine deutliche Auslenkung. Das ist die maximale Amplitude am Beginn des Ausschwingvorganges  $A_0$ , vgl. Kapitel 2.1.4. Die Ausschwingvorgänge sind nur kurz angedeutet. In Abbildung 2-20 c) und d) ist  $A_0$  deutlich kleiner. In [Rau2011a] wird der sogenannte „Aufhebungseffekt“ erläutert. Für den Fall, dass am Ende einer Überfahrt homogener und partikulärer Anteil sich gegenseitig aufheben, entfällt der Aus-

schwingvorgang ( $A_0 = 0$ ). Die Geschwindigkeiten, bei denen mit dem Aufhebungseffekt zu rechnen ist, lassen sich für eine überfahrende Einzellast nach Gl. 2.110 ermitteln. Für die hier gezeigte Brücke ergab sich eine maximale Aufhebungsgeschwindigkeit ( $j=1$ ) von  $v_{cancel} = 186 \text{ km/h}$ .

Da sich bei der Zugüberfahrt einerseits mehrere Lasten überlagern, andererseits Gl. 2.110 die Systemdämpfung vernachlässigt, ist in Abbildung 2-20 c und d dennoch ein kleiner Ausschwingvorgang erkennbar.

$$v_{cancel} = \frac{2}{2j+1} n_0 \cdot L \qquad j = 1, 2, \dots \qquad \text{Gl. 2.110}$$

[Rau2011a] weist darauf hin, dass durch den Aufhebungseffekt in gewissen Fällen auch Resonanzeffekte unterdrückt werden können. Weitere Hinweise zum Aufhebungseffekt sind z.B. in [Mus2010] [Mar2010] zu finden.

### 2.1.6 Reduzierung des Aufwandes für dynamische Berechnungen

Wie in den vorangegangenen Unterkapiteln gezeigt, kann es in vielen Fällen erforderlich sein, eine große Anzahl von Zugüberfahrten zu simulieren. Je nach Komplexität des verwendeten Modells, steigen Modellierungs- und Berechnungsaufwand. Daher ist es für den Anwender erstrebenswert, den Aufwand für dynamische Berechnungen weitestgehend zu reduzieren bzw. wenn möglich, ganz darauf zu verzichten.

In [RiL804] werden Schnittkrafttabellen für balkenartige Einfeldträger gegeben. In Abhängigkeit von Stützweite  $L$ , Lehrschem Dämpfungsmaß  $\xi$ , erster Biegeeigenfrequenz  $n_0$  und örtlich zulässiger Höchstgeschwindigkeit  $v_0$  kann bei Erfüllen bestimmter Vorgaben (z.B. balkenartige Träger) das maximale Feldmoment, die maximale Durchbiegung in Feldmitte sowie die maximale Querkraft am Auflager und die maximale Auflagerverdrehung abgelesen werden. Die Tabellenwerte berücksichtigen die Betriebszüge ICE1, ICE2, ICE3, ICE-T(2xBR411), ICE-T(3xBR415), IC und Thalys. Die Werte wurden unter Berücksichtigung der Lastverteilung gemäß Abbildung 2-7 ermittelt. Die angewendete Berechnungsmethodik verwendet bewegte Einzelasten und wird in [Bag2008] beschrieben.

[Fin2007] stellen zwei vereinfachte Verfahren vor: die Impulsmethode und ein Antwortspektrenverfahren. Beide Verfahren verwenden bewegte Einzellasten; die Anwendung wird jeweils für das HSLM A01 gezeigt.

Die Impulsmethode ermöglicht die Berechnung der dynamischen Antwort einer balkenartigen Brücke mit einer bestimmten Stützweite  $L$  mit einem Tabellenkalkulationsprogramm, die erforderlichen Eingangsparameter einer solchen Berechnung

werden für die Stützweiten 16,5 m; 17,0 m und 17,5 m gegeben. Die Werte wurden an einem Einmassenschwinger ermittelt. Bei der Berechnung werden drei Phasen unterschieden: Phase A (Auffahren des Zuges auf die Brücke, Vernachlässigung der Dämpfungswirkung); Phase B (Periodische Anregung unter Annahme eines eingeschwungenen Zustands); Phase C (Belastung am Ende des Lastmodells, Näherungslösung für die Übergangsbedingungen von B auf C). Die Impulsmethode stellt nur eine Näherungslösung dar.

Beim von [Fin2007] vorgestellten Antwortspektrenverfahren werden bezogene maximale Tragwerksreaktionen in Abhängigkeit von  $L$  und  $\bar{v}$  in einer 3D-Grafik dargestellt. Dabei ist  $\bar{v}$  die bezogene Geschwindigkeit (Verhältnis von Geschwindigkeit  $v$  zur kritischen Geschwindigkeit  $v_{res,1,j,k}$  nach Gl. 2.16). Ebenso wie bei den Schnittkrafttabellen in [RiL804] ist die maximale bezogene Durchbiegungsantwort noch durch die Biegesteifigkeit  $EI$  der Brücke zu teilen, während in [RiL804] die  $EI$ -fache Beschleunigung angegeben wird, sind die Werte der bezogenen Beschleunigungsantwort aus [Fin2007] durch die Brückenmasse zu dividieren. Die bezogenen Tragwerksreaktionen sind identisch für alle balkenartigen Einfeldbrücken mit identischen Parametern  $L$ ,  $\bar{v}$  und  $\xi$ , wobei  $\xi$  die Dämpfung ist. Das von [Fin2007] gegebene Beispiel berücksichtigt die Dämpfungsparameter von Stahl- und Verbundbrücken (vgl. Abbildung 2-6). In der Dissertation von [Mäh2009] wird eine automatisierte Auswertung des Antwortspektrenverfahrens beschrieben und anhand eines Berechnungsmodells demonstriert, dabei können alle HSLM A berücksichtigt werden.

Ein weiteres Antwortspektrenverfahren wurde von [Spe2010] entwickelt. Bei seinem Verfahren ist das Antwortspektrum vom Anwender selbst zu erstellen. Eine Visualisierung der Ergebnisse soll dann eine Systemoptimierung ermöglichen (z.B. durch Anhebung von  $n_0$  zur Erhöhung der kritischen Geschwindigkeiten, vgl. Gl. 2.16). Die Darstellung der in der Arbeit entwickelten Antwortspektren erfolgt in 2D- und 3D-Grafiken, wobei neben der bezogenen Geschwindigkeit auch die bezogene Stützweite ( $L/L_{üP}$ ) als Bezugsgröße zum Einsatz kommt. Die Berechnungen wurden an balkenartigen Einfeldträgern unter Berücksichtigung der lastverteilenden Wirkung (vgl. Kapitel 2.1.2) für verschiedene Brückentypen (z.B. Stahl- und Verbundbrücken) durchgeführt. Alle Systeme waren mit  $D = 1\%$  gedämpft, wobei Umrechnungsfaktoren für  $D \neq 1\%$  angegeben werden.

[Hau2007] nutzen ebenfalls Antwortspektren zur Darstellung dimensionsloser Beschleunigungswerte, welche sich in konkrete Zahlenwerte für konkrete Anwendungsfälle überführen lassen, hier wird ebenfalls eine Darstellung über die bezogene Stützweite gewählt.



## 2.2 Gegenüberstellung Berechnung und Messung

### 2.2.1 Gegenüberstellung reales System und Berechnungsmodell

Wie bereits in Kapitel 1 als Motivation für die Anfertigung dieser Arbeit aufgezeigt, ergeben sich z.T. große Unterschiede zwischen berechneten bzw. gemäß Normung zu berücksichtigenden und gemessenen Bauwerkseigenschaften und -reaktionen. Bei den in Abbildung 1-1 dargestellten Biegeeigenfrequenzen  $n_0$  von WiB-Brücken ergeben sich Unterschiede zwischen Messung und Berechnung zwischen 27 % und 142 %. Generell lassen sich bei kürzeren Brücken prozentual größere Unterschiede zwischen Berechnung und Messung feststellen. Bei den zugehörigen Dämpfungswerten (jeweils aus dem freien Ausschwingvorgang im Anschluss an eine Zugüberfahrt ermittelt) ergaben sich Unterschiede von 37 % bis 236 % zwischen Messwerten und Dämpfungswerten gemäß [EN1991-2] [RiL804] (ohne Zusatzdämpfung), siehe [Rau2010b]. Weitere Veröffentlichungen, z.B. [Zab2008] bestätigen die Beobachtung, dass sich Brückenbauwerke in der Realität i.d.R. steifer verhalten als zunächst prognostiziert. Die Abweichungen werden vor allem darauf zurückgeführt, dass auch nicht-tragende Bauteile und Ausbauelemente einen Beitrag zum Systemverhalten liefern. In Kapitel 3 werden mögliche Einflussfaktoren auf das dynamische Verhalten von Brücken beschrieben.

Letztendlich ist die Brückenlänge der ausschlaggebende Parameter für die prozentuale Abweichung zwischen prognostizierter und gemessener Eigenfrequenz. Der als nicht-tragend angenommene Oberbau (siehe z.B. Abbildung 3-5) bleibt konstant, unabhängig von der Spannweite. Mit zunehmender Spannweite wird der tragende Querschnitt größer, sodass der relative Einfluss des Überbaus abnimmt; für große Spannweiten überwiegen die Steifigkeit und Masse des tragenden Brückenquerschnitts.

Wie später in Kapitel 3 erläutert, beeinflussen auch Temperatur und Witterung die gemessenen Brückeneigenschaften und -reaktionen. Tendenziell werden bei kalten Temperaturen höhere Eigenfrequenzen und geringere Bauwerksreaktionen gemessen als bei warmen Umgebungsbedingungen. Bei Messungen am Gesamtbauwerk lassen sich die einzelnen Einflussparameter i.d.R. nur sehr schwer voneinander isolieren, ggf. können baubegleitende Messungen bei der Identifizierung einzelner Parameter helfen.

### 2.2.2 Auswertungsmethoden Messdaten

Neben der Berechnung und Modellierung eines Bauwerks wird der Vergleich zwischen Prognose und Realität sehr stark von der Messwerterfassung und der zuge-

hörigen Auswertung beeinflusst. Die „Richtlinie Dynamische Messung von Eisenbahnbrücken“ [ÖBB2011] liefert u.a. Hinweise zur Anzahl und Positionierung von Beschleunigungssensoren, sowie zur entsprechenden Auswertung. Die Abtastrate (die Frequenz mit der Messwerte erfasst werden) soll bei einer Messung mindestens 500 Hz betragen bzw. den vierfachen Wert der höchsten zu erfassenden Frequenz.

Gemäß [ÖBB2011] sollen Dämpfungswerte anhand der Ausschwingvorgänge im Anschluss an Zugüberfahrten ermittelt werden, da die Dämpfungen i.d.R. schwingungsamplitudenabhängig sind und nur so für die Bauwerksbeurteilung realistische Werte ermittelt werden können. Gleichzeitig wird dort davon abgeraten, die Eigenfrequenzen aus den Ausschwingvorgängen nach Zugüberfahrten zu ermitteln, da eine Beeinflussung durch den Zug befürchtet wird. Stattdessen wird empfohlen, Ausschwingvorgänge nach Impulsanregung oder ambiente Messungen für die Ermittlung von Eigenfrequenzen zu nutzen.

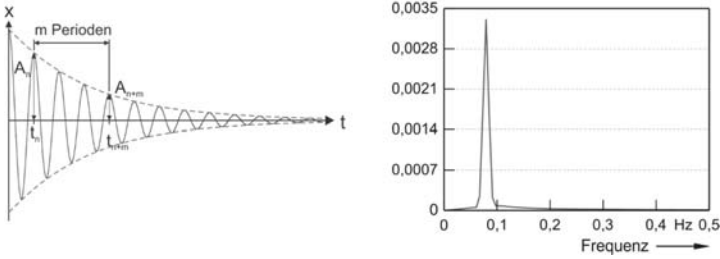
Bei der Auswertung ist zwischen Verfahren zu unterscheiden, die direkt im Zeitbereich angewendet werden und Verfahren, bei denen zunächst eine Transformation des Messsignals in den Frequenzbereich erfolgt. Nachfolgend werden lediglich die Verfahren angesprochen, welche im Rahmen dieser Arbeit angewendet werden.

Direkt aus dem freien Ausschwingvorgang lässt sich anhand des logarithmischen Dekrements (Gl. 2.111) die viskose Dämpfung  $\xi$  ermitteln, siehe z.B. [ÖBB2011] [Mes2000]. Die zugehörige Frequenz  $f$  [Hz] lässt sich aus der Anzahl der Perioden im betrachteten Zeitraum ablesen (Gl. 2.112).

$$\xi = \frac{1}{2\pi \cdot m} \cdot \ln\left(\frac{A_n}{A_{n+m}}\right) \quad \text{Gl. 2.111}$$

$$f = \frac{m}{t_{n+m} - t_n} \quad \text{Gl. 2.112}$$

Dabei ist  $m$  die Anzahl der Perioden zwischen den beiden Amplituden  $A_n$  und  $A_{n+m}$ , die zu den Zeitpunkten  $t_n$  und  $t_{n+m}$  gemessen wurden, siehe Abbildung 2-21 a. Allerdings ist diese Auswertungsmethodik auf eindeutige Ausschwingvorgänge, welche maßgeblich durch eine Frequenz bestimmt werden, beschränkt. Diese kann sich allerdings während des Ausschwingvorgangs verändern [ÖBB2011]. Bei Ausschwingvorgängen, bei denen sich mehrere Frequenzen überlagern, lassen sich Frequenzen und Dämpfungen nicht direkt anhand der gezeigten Analyse des Ausschwingvorganges auswerten.



**Abbildung 2-21: a) Ausschwingvorgang mit viskoser Dämpfung b) zugehöriges Ergebnis einer FFT**

Um Frequenzen im Frequenzbereich (graphisch) darzustellen, muss eine Übertragung des entsprechenden Zeitsignals  $x(t)$  aus dem Zeitbereich in ein Frequenzsignal  $F(\omega)$  oder  $F(f)$  im Frequenzbereich durchgeführt werden, je nachdem, ob die Kreiseigenfrequenzen  $\omega$  [rad/s] oder Eigenfrequenzen  $f$  [Hz] dargestellt werden sollen. Dies lässt sich beispielsweise anhand einer Fourier Transformation (Gl. 2.113, Gl. 2.114) durchführen. Die Herleitung der Funktionen ist beispielsweise in [Mes2000] zu finden.  $F$  bezeichnet den Fourierkoeffizienten.

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{Gl. 2.113}$$

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad \text{Gl. 2.114}$$

Allerdings ist eine geschlossene Lösung der Transformationsintegrale in Gl. 2.113 und Gl. 2.114 nicht immer möglich. Bei der sogenannten Diskreten Fourier Transformation (DFT) wird daher ein numerischer Algorithmus (Gl. 2.115) auf eine Zeitreihe  $f_r$  angewendet, um die zu den Kreiseigenfrequenzen  $\omega_k$  (Gl. 2.116) gehörigen Koeffizienten  $F_k$  zu ermitteln.

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f_r \left( \cos \frac{2\pi k r}{N} - i \sin \frac{2\pi k r}{N} \right) \quad \text{Gl. 2.115}$$

$$\omega_k = k \left( \frac{2\pi}{T} \right) \quad \text{Gl. 2.116}$$

Dabei ist  $N$  die Anzahl der Datenpunkte, welche im konstanten Zeitabstand  $\Delta t$  erfasst worden sind. Weiterhin gilt  $k = r = [0, N - 1] \in \mathbb{N}$  und  $T = N \Delta t$ .

Einen Sonderfall der DFT bildet die Fast Fourier Transformation (FFT), hierbei muss  $N = 2^n$  gelten, wobei  $n$  ganzzahlig sein muss. Abbildung 2-21 b zeigt exemplarisch die FFT des in Abbildung 2-21 a gegebenen Zeitverlaufes. Die Eigenfrequenz lässt sich als (lokales) Maximum ablesen.

Weiterhin sei darauf verwiesen, dass sich unterschiedliche Bauwerkseigenschaften und -reaktionen während der Überfahrt und am unbelasteten Bauwerk ergeben können. Gründe können beispielsweise die zusätzlichen Masse- und Dämpfungsbeiträge der Züge oder schwingungsamplitudenabhängige Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften des Bauwerks sein.

### **3 Einflussfaktoren auf das dynamische Verhalten von Eisenbahnbrücken**

Einflussfaktoren auf das dynamische Verhalten von (Eisenbahn-)Brücken lassen sich unterteilen in Effekte, die über den gesamten geplanten Nutzungszeitraum unverändert zur Verfügung stehen und Effekte, die sich über den Nutzungszeitraum verändern. Bei den veränderlichen Effekten muss unterschieden werden zwischen dauerhaften Veränderungen (z.B. Ermüdungsschäden oder Umbaumaßnahmen) und jahreszeitlichen oder tagesgangabhängigen (zerstörungsfreien) Veränderungen mit Wiederkehrperioden.

Die Qualität einer Berechnung ist abhängig von den in der Berechnung getroffenen Annahmen. Dies betrifft einerseits die Wahl des Berechnungsmodells (z.B. ein einfaches gelenkig gelagertes Balkenmodell mit konstanten Massen- und Steifigkeitsverteilungen im Vergleich zu einem komplexeren 3D-Modell mit expliziter Modellierung einzelner Strukturelemente und realer Lagerungsbedingungen), andererseits betrifft es auch die in der Berechnung berücksichtigten Materialparameter. Die Materialeigenschaften sind mitunter starken Streuungen unterworfen, weiterhin können lastabhängige Nichtlinearitäten auftreten. Dabei ist zu beachten, dass mit steigender Modellkomplexität nicht nur der zeitliche Aufwand für Modellierung und Berechnung steigt, sondern auch die „menschliche“ Fehleranfälligkeit. Jede getroffene Annahme erhöht das Risiko eines Fehlers, sodass ein komplexeres Modell nicht zwangsläufig zu einer höheren Ergebnisqualität führen muss.

In der Bemessung müssen negative Effekte immer berücksichtigt werden, während bei positiven Effekten sichergestellt sein muss, dass sie im gesamten Nutzungszeitraum vorhanden sind. Beispielsweise wurde in mehreren Fällen bei der messtechnischen Untersuchung realer Brückenbauwerke ein günstigeres Verhalten im Winter beobachtet, z.B. [Zab2007] [Zab2008] [Zab2010] [Gon2013] [Fel2016]. Es wurden höhere Eigenfrequenzen gemessen sowie geringere vertikale Durchbiegungen und Beschleunigungen.

In diesem Kapitel werden die einzelnen Einflussfaktoren vorgestellt.

#### **3.1 Temperatur und Witterungsbedingungen**

Temperatur- und Witterungsbedingungen haben Einfluss auf einige der nachfolgend vorgestellten Parameter, beispielsweise auf das Steifigkeitsverhalten von Überbauten oder Elastomerlagern. In diesem Unterkapitel wird lediglich kurz auf den Lastfall Temperatur als solchen als Indiz für die in Deutschland zu erwartenden

Temperaturveränderungen eingegangen. Die Beeinflussung der jeweiligen Bauwerkseigenschaften wird in jedem Unterkapitel einzeln aufgegriffen.

Gemäß [EN1991-1-5] bzw. [EN1991-1-5NA] sind in Deutschland Außentemperaturen zwischen  $-24^{\circ}\text{C}$  und  $+37^{\circ}\text{C}$  zu berücksichtigen. Zum Lastfall Temperatur auf Brücken wird auf die Literatur verwiesen, z.B. [Man2010].

Weiterhin ist zu beachten, dass infolge Schnee oder Eis zusätzliche Massen auf die Brücke einwirken können, was (falls nicht temperaturbedingt höhere Steifigkeiten oder zusätzliche Beiträge zur Systemsteifigkeit vorliegen) zu geringeren Eigenfrequenzen führen sollte.

### **3.2 Statisches System und Interaktion Brückenparameter**

Wie u.a. in [EN1991-2] und [UIC774] erläutert, wird das dynamische Verhalten maßgeblich durch die Wechselwirkung zwischen Bauwerk und Gleis beeinflusst. In [EN1991-2] werden dabei unterschieden:

- Bauwerkskonfiguration (Einfeldträger, Durchlaufträger oder Einfeldträgerketten, Anzahl Überbauten und Überbaulängen, Anzahl Felder und Spannweiten, Position der Festlager, Position des thermischen Festpunktes, Auszugslänge  $L_T$  zwischen thermischem Festpunkt und Überbauende)
- Gleiskonfiguration (Schotteroberbau oder feste Fahrbahn, vertikaler Abstand zwischen Überbauoberfläche und Schienenschwereachse, Lage des Schienenausuges)
- Eigenschaften des Bauwerks (vertikale Überbausteifigkeit, vertikaler Abstand zwischen Schwereachse und Oberkannte des Überbaus, vertikaler Abstand zwischen Schwereachse des Überbaus und Drehachse des Lagers, Zusammenhang zwischen Überbauverdrehung und Überbaulängsverschiebung an den Auflagern, Längssteifigkeit des Bauwerks, vgl. nachfolgend Gl. 3.2).

[UIC774] differenziert zwischen brücken- und gleisspezifischen Parametern. Dabei werden die brückenspezifischen Parameter unterteilt in Dehnlänge  $L_T$  (bezeichnet auch hier den Abstand zwischen thermischem Festpunkt und Überbauende), Spannweite, Steifigkeit der Auflagerung, Biegesteifigkeit und Höhe des Tragwerksquerschnittes. Die Gleisparameter werden unterteilt in den Längsverschiebewiderstand des Gleises und den Querschnitt der Schiene.

Wie die nachfolgenden Kapitel zeigen, beeinflussen sich viele der o.g. Parameter gegenseitig. Beispielsweise vermindert das Vorhandensein eines Schienenausuges den aktivierbaren Längsverschiebewiderstand. Der aktivierte Längsverschiebe-

widerstand, kombiniert mit dem vertikalen Abstand zwischen Schienenschwereachse und Lagerdrehachse, beeinflusst ebenso wie die Überbausteifigkeit die Gesamtsteifigkeit der Brücke. Die Gesamtsteifigkeit der Brücke und die Brückenlänge beeinflussen vertikale Durchbiegung in Feldmitte und Verdrehung am Auflager, d.h. auch die Überbaulängsverschiebung.

Letztendlich müssen die genannten Effekte und Zusammenhänge mit einem Modell des Gesamtbauwerks abgebildet werden. Zielsetzung ist dabei, ein stark vereinfachtes Modell zu erstellen, das die Effekte abbilden kann. Die Bestimmung der Einflüsse erfolgt im Vorfeld mit Messungen und komplexen Modellen.

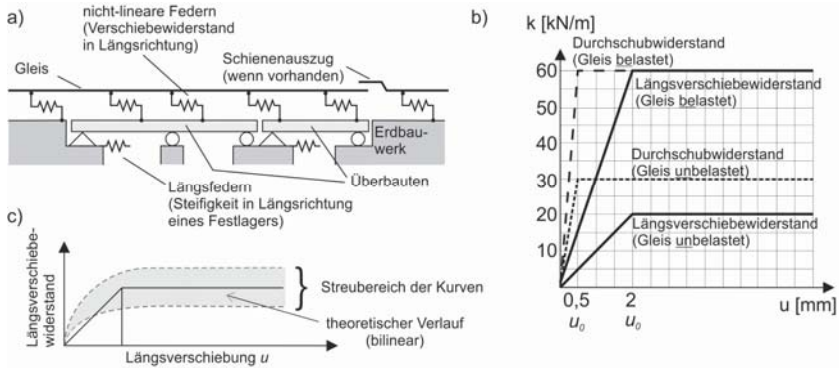
Der Fokus dieser Arbeit liegt auf Einfeldträgerbrücken mit kurzen und mittleren Spannweiten in WiB-Bauweise mit Schotteroberbau. Da gemäß [RiL804] bei Verwendung eines Schotteroberbaus eine schwimmende Lagerung auf Elastomerlagern vorzusehen ist (bei fester Fahrbahn Kalottenlager), werden lediglich diese in ihrer Wirkung vorgestellt.

### 3.3 Tragwerksmodellierung

Für die Modellierung von Eisenbahnbrücken werden in [EN1991-2] und [RiL804] folgende Hinweise gegeben, die auf den Angaben aus [UIC774] beruhen:

Die Modellierung von Tragwerk und Gleis kann getrennt erfolgen, dabei werden Gleis und Tragwerk über bilineare Federelemente verbunden, die je nach Oberbauart den Durchschubwiderstand (feste Fahrbahn, gefrorenes Schotterbett) oder den Längsverschiebewiderstand („normales“ Schotterbett) des Gleises darstellen. Die anzusetzenden Widerstände in Längsrichtung sind dabei abhängig von der Gleisart (z.B. Schienen 60 E1/60 E2 und Schwellen B 70 W), nationalen Vorgaben und ob das Gleis belastet ist oder nicht. Anstelle der Schienenbezeichnungen „60 E1“ bzw. „60 E2“ findet sich auch in aktueller Literatur sehr oft die Vorgängerbezeichnung „UIC 60“.

In Abbildung 3-1 a ist ein Beispiel für die Tragwerksmodellierung gegeben, das auch in [EN1991-2] und [RiL804] zu finden ist. Die Darstellung der Längsverschiebewiderstände  $k$  je Längeneinheit und der zugehörigen Verschiebungen zwischen elastischem und plastischem Bereich  $u_0$  in Abbildung 3-1 b enthält bereits die in Deutschland gültigen Werte gemäß dem Nationalen Anhang zu [EN1991-2] bzw. [RiL804] (dort explizit genannt für Schienen 60 E2 und Schwellen B 70 W, sowie einer Mindestschotterbettdicke von 30 cm unterhalb der Schwellen). Darüber hinaus ist in Abbildung 3-1 c eine Darstellung aus [UIC774] aufgeführt, welche schematisch die Approximation der realen Abhängigkeiten zwischen Längsverschiebewiderständen und Längsverschiebungen durch einen bilinearen Verlauf darstellt.



**Abbildung 3-1: a) Beispiel eines Tragwerksmodells, b) Verschiebewiderstände gemäß [EN1991-2] [RiL804], c) Verlauf des Verschiebewiderstandes [UIC774]**

In Abbildung 3-1 a ist zu erkennen, dass sofern kein Schienenauszug vorhanden ist, die Gleise im Modell über das Ende der Brücke hinausgeführt werden, um die Einspannwirkung durch die Schienen abzubilden. Gemäß [RiL804] darf dabei das Gleis im Dammbereich  $L_D$  nach Gl. 3.1 berücksichtigt werden.

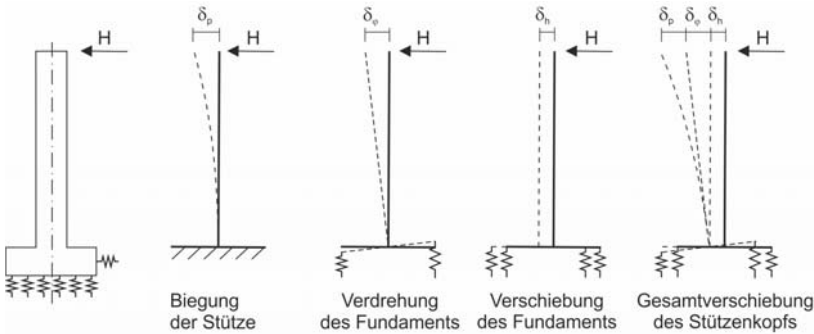
$$L_D = 0,5 L_T + 40 \text{ m} \leq 90 \text{ m} \quad \text{Gl. 3.1}$$

Dabei bezeichnet  $L_T$  die Ausgleichslänge des an das Widerlager angrenzenden Überbauendes bzw. (je nach Norm unterschiedlich bezeichnet) die Länge zwischen thermischem Festpunkt und Überbauende. In Anhang G zu [EN1991-2] wird  $L_T$  für Stahlbrücken begrenzt auf  $L_T \leq 60 \text{ m}$ , sowie für Beton- und Verbrücken auf  $L_T \leq 90 \text{ m}$ , andernfalls sind Schienenauszüge anzuordnen. Somit wird bei Stahlbrücken  $L_D$  auf maximal 70 m begrenzt.

Weiterhin in Abbildung 3-1 a dargestellt sind horizontale Federn zur Abbildung der Steifigkeit der Unterbauten unterhalb eines Festlagers. Die Federsteifigkeit  $K$  lässt sich nach Gl. 3.2 als das Verhältnis von horizontaler Lagerkraft  $H$  zur horizontalen Gesamtverschiebung am Stützenkopf auf Lagerebene berechnen, vgl. [EN1991-2] [RiL804] [UIC774]. Sie setzt sich zusammen aus den Anteilen infolge Biegung der Stütze  $\delta_p$  sowie Verdrehung bzw. Verschiebung des Fundaments  $\delta_\phi$  bzw.  $\delta_h$ , vgl. Abbildung 3-2.

$$K = \frac{H}{\sum \delta_i} \quad \text{Gl. 3.2}$$

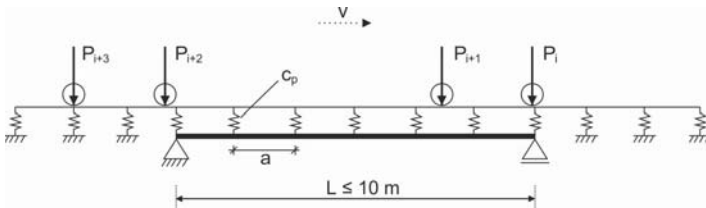




**Abbildung 3-2: Bestimmung der Ersatzfedersteifigkeit in Längsrichtung an Lagern entsprechend [EN1991-2] / [RiL804] / [UIC774]**

Weiterhin wird in [RiL804] empfohlen, reale Auflagerbedingungen zu berücksichtigen, da diese sich von der ideal gelenkigen Auflagerung unterscheiden können. Da Schwerelinie des Brückenquerschnitts und Lagerebene nicht zusammenfallen, werden infolge Biegung Lagerrückstellkräfte bzw. –momente aktiviert, die zu einer Teileinspannung führen. Bei einer Finite Elemente Modellierung des Überbaus mit Volumen- oder Scheibenelementen lassen sie sich durch zusätzliche horizontale Dehnfedern und Drehfedern an den Auflagern berücksichtigen. Bei Modellierungen mit Balken- oder Plattenelementen lässt sich der Versatz zwischen Systemschwerelinie und Lagerebene nicht ohne weiteres darstellen, in diesem Fall sind Drehfedern an den Auflagern (wirksam in der Systemschwerelinie) vorzusehen. Je nach Lagerart sind die Federn dabei entweder einseitig am beweglichen Lager oder bei schwimmender Lagerung (Elastomerlager) beidseitig anzuordnen.

Wie bereits unter 2.1.2 erwähnt, wird von [Spe2010] eine Modellierungsempfehlung für kurze Brücken mit  $L \leq 10$  m gegeben, welche in Abbildung 3-3 dargestellt ist. Die vertikalen Federelemente dienen der Lastverteilung.



**Abbildung 3-3 Modell zur Berücksichtigung der lastverteilenden Wirkung des Oberbaus nach [Spe2010]**

Neben den dargestellten zweidimensionalen Balkenmodellen besteht die Möglichkeit, Eisenbahnbrücken dreidimensional mit Finite-Elemente-Modellen abzubinden,

wie z.B. in [Zab2010] [Fel2016] gezeigt. Da in dieser Arbeit vor allem (zweidimensionale) Modellierungsvereinfachungen thematisiert werden sollen, wird nicht weiter drauf eingegangen.

### 3.4 Lagerbedingungen bei Elastomerlagern

Die Rückstellkräfte und –momente in Elastomerlagern werden nach [EN1337-3] ermittelt. Wie in [RiL804] erläutert, lassen sie sich bei Balken- und Plattenelementen durch zusätzliche Drehfedern an den Auflagern abbilden. In [Rau2010c] [Rau2011a] [Fel2016] werden die entsprechenden Formeln gegeben, um die Rückstellkräfte und –momente in Abhängigkeit des Abstandes zwischen Lagerdrehebene und Systemschwerelinie als in der Schwerelinie wirkende resultierende Drehfeder-elemente zusammenzufassen. Da sich bei der Analyse von Lagerdaten der u.a. im Rahmen von [Fel2016] ausgewerteten Messkampagne an WiB-Brücken gezeigt hat, dass sich nur geringfügige Zuwächse bei der Systemsteifigkeit feststellen lassen, wird an dieser Stelle nicht mehr detailliert auf die Thematik eingegangen. Es sei an dieser Stelle auf die umfangreiche Ergebnisdokumentation in [Fel2016] verwiesen, wo u.a. gezeigt wird dass sich bei den untersuchten Brücken durch Berücksichtigung der Teileinspannung an den Auflagern bei der Berechnung der ersten Biegeeigenfrequenzen  $n_0$  lediglich Ergebnisoptimierungen unter 1% erzielen lassen konnten.

In [Fel2016] wird ebenfalls auf die Beeinflussung dieser Teileinspannung durch Temperatureinflüsse eingegangen. Die Berechnung der Rückstellkräfte und –momente nach [EN1337-3] erfolgt grundsätzlich bei einer Umgebungstemperatur von  $(23 \pm 2)^\circ\text{C}$ ; in der Norm wird darauf verwiesen, dass der Schubmodul  $G$  von Elastomerlagern, der linear in die Berechnung der Rückstellkräfte und –momente eingeht und folglich linear in die Ermittlung der Drehfedersteifigkeit, bei  $-25^\circ\text{C}$  auf seinen dreifachen Wert ansteigt. Allerdings ergeben sich auch hier nur vernachlässigbar größere Ergebnisse bei den berechneten Eigenfrequenzen  $n_0$ . Die eingangs erwähnten teilweise großen Unterschiede bei im Sommer und im Winter messtechnisch untersuchten Brückenbauwerken lassen sich somit nicht (alleine) durch das temperaturabhängige Verhalten von Elastomerlagern erklären.

### 3.5 Eisenbahnschienen

Der Beitrag der Schienen lässt sich unterteilen in einen zusätzlichen Beitrag zur Biegesteifigkeit der Brücke und in die unter 3.2 bzw. 3.3 bereits angesprochene Einspannwirkung durch die über die Brückenenden hinausgehenden Gleise. Beide Effekte werden über die Längsverschiebewiderstände der Gleise aktiviert.

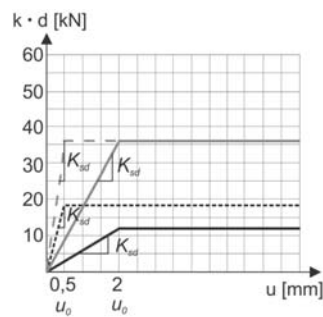


Abbildung 3-4 Umrechnung Verschiebewiderstände in Federsteifigkeiten für  $d = 60$  cm

Die in Abbildung 3-1 b gegebenen Längverschiebewiderstände müssen vor der Implementierung in ein Brückenmodell (vgl. Abbildung 3-1 a) auf den Abstand  $d$  der verwendeten Federelemente umgerechnet werden, vgl. Abbildung 3-4. Hier dargestellt eine Umrechnung für  $d = 60$  cm, was dem Standardabstand von Schwellenmitte zu Schwellenmitte bei Schwellen B 70 W entspricht.

Weiterhin in Abbildung 3-4 dargestellt sind die linearen Federsteifigkeiten  $K_{Sd}$  nach Gl. 3.3. Die zugehörigen Werte sind in Tabelle 3-1 angegeben.

$$K_{Sd} = \frac{k \cdot d}{u_0}$$

Gl. 3.3

Tabelle 3-1: Ermittlung der Linearen Federsteifigkeiten  $K_{Sd}$  für  $d = 60$  cm

	Längverschiebewiderstand (Schotter)		Durchschubwiderstand (Feste Fahrbahn)	
	<u>un</u> belastet	<u>be</u> lastet	<u>un</u> belastet	<u>be</u> lastet
$k \cdot d$ [kN]	12	36	18	36
$u_0$ [mm]	2	2	0,5	0,5
$K_{Sd}$ [kN/mm]	6	18	36	72

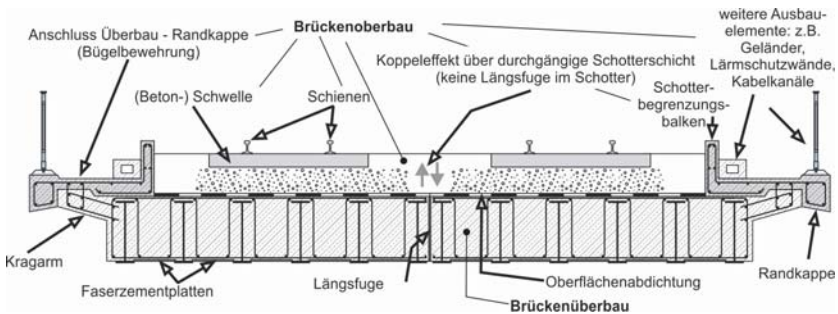
Die Zusammenfassung der beiden Schienen eines Gleises zu einem gemeinsamen Balkenelement (Bernoulli-Balken) verursacht übrigens gemäß den Untersuchungen von [Van1997] lediglich einen vernachlässigbaren Fehler im Vergleich zu einer differenzierten Abbildung mit zwei separat abgebildeten Schienenelementen.

3.6 Walzträger in Beton (WiB-) Überbau

In vielen Veröffentlichungen, z.B. [Rau2010c] [Spe2006], wurde bereits der Fragestellung nachgegangen, wie sich zusätzliche Beiträge baulicher Randbedingungen (z.B. die Bestandteile des Brückenoberbaus, vgl. Abbildung 3-5) zum dynamischen

Verhalten von Eisenbahnbrücken in einer Brückennachrechnung oder gar in der Bemessung berücksichtigen lassen. Dabei darf aber der tragende Überbau an sich nicht unbetrachtet bleiben.

Gerade bei Walzträger in Beton (WiB-) Brücken ist der Wunsch nach in der Berechnung ansetzbaren zusätzlichen Steifigkeitsbeiträgen sehr hoch, wie der eingangs in Abbildung 1-1 gezeigte Vergleich von berechneten und gemessenen Biegeeigenfrequenzen  $n_0$  und der Gegenüberstellung mit den stützweitenabhängigen Kriterien für den vereinfachten Resonanznachweis nach Kapitel 2.1.1 zeigt. Gemäß [EN1991-2] [RIL804] darf lediglich die Steifigkeit des tragenden Überbaus berücksichtigt werden. Wie in diesem Kapitel noch gezeigt wird, ist allerdings die exakte Berechnung der tatsächlichen Überbausteifigkeit nur sehr schwer möglich.



**Abbildung 3-5 Walzträger in Beton (WiB-) Querschnitt mit Ausbauelementen**

Abbildung 3-5 zeigt einen (heute) typischen WiB-Überbau mit üblichen Ausbauelementen. Bei der Herstellung werden Faserzementplatten als verlorene Schalung auf die Unterflansche gelegt, der verbleibende Schalungsaufwand ist sehr gering. Die Abbildung zeigt weiterhin die sehr typische Ausführung als sogenannte Zwillingenbrücke, mit einem separaten Überbau je Gleis. Die Überbauten sind durch eine Längsfuge getrennt, durch die gemeinsame Schotterschicht kommt es allerdings zu einer gegenseitigen Beeinflussung, welche in den Kapiteln 3.8.2 und 4 detailliert diskutiert wird. Im Falle eines erforderlichen Ersatzneubaus lassen sich die Überbauten einzeln austauschen, sodass es bei einem verbleibendem Überbau lediglich zu Einschränkungen bei der Fortführung des Eisenbahnverkehrs kommt.

Als Verbundkonstruktionen sind WiB-Brücken gemäß [EN1994-2] zu bemessen. Obwohl die Verbundwirkung alleine durch den Haftverbund zwischen Stahlträger und Beton sichergestellt wird und keine weiteren Verbundmittel zum Einsatz kommen, kann von einer vollen Verbundtragwirkung ausgegangen werden. Die Vorgaben zu den Abmessungen des Überbaus (Mindest- und Maximalwerte von Trägerhöhe, Betondeckung, Trägerabstand etc.) stellen allerdings sicher, dass elastische

und plastische Nulllinie unter Biegebeanspruchung im Steg liegen und somit ein ausreichend großer Druckbereich vorliegt, in dem die Verbundwirkung nicht durch etwaige Betonrisse gefährdet wird. Die Quertragwirkung wird durch Querbewehrung sichergestellt.

Die WiB-Bauweise wird seit dem Ende des 19. Jahrhunderts eingesetzt, im Netz der Deutschen Bahn sind etwa 25% der Brücken WiB-Brücken, vgl. [Rau2010b]. Die Brücken zeichnen sich durch ihre Langlebigkeit und Unempfindlichkeit gegenüber Ermüdungsbeanspruchung aus, daher darf nach [RiL804] sogar auf einen Ermüdungsnachweis des Überbaus verzichtet werden, wenn die Brücke ohne Schweißstöße ausgeführt wird (geschraubte Stöße sind allgemein nicht zulässig). Der in [Big2012] dennoch gezeigte Ermüdungsnachweis an einem exemplarischen Brückenbauwerk (Ausführung ohne Stöße) bestätigt, dass die Ermüdungsbeanspruchung von WiB-Brücken unkritisch ist und dass auf einen rechnerischen Nachweis verzichtet werden kann.

WiB-Brücken wurden nicht immer als Verbundtragwerke bemessen. In [Leo1940] wird Bezug auf die damals gültige Norm [DIN1075] genommen, nach welcher lediglich die Stahlträger in der Bemessung berücksichtigt wurden. Eine Lastverteilung über die Betonplatte (Straßenbrücken 2,5 m, Eisenbahnbrücken 3,5 m) war dennoch zulässig. Die Anordnung von Querbewehrung wurde damals bereits gefordert, allerdings wurden in der Norm keine Mindestanforderungen gestellt, sodass es gelegentlich zu Betonlängsrissen kam. Die Brücken zeigten deutlich geringere Durchbiegungen als unter der ausschließlichen Berücksichtigung der Stahlträger prognostiziert. Durch die heute übliche rechnerische Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons konnten erhebliche Materialeinsparungen erzielt werden.

Trotz der Berücksichtigung des Betons in der Berechnung weisen WiB-Brücken aufgrund des Mitwirkens weiterer (nichttragender) Ausbauelemente auch heute noch große Unterschiede zwischen berechneten und gemessenen Werten auf. Aufgrund ihrer hohen Schlankheiten (die geringen Bauhöhen machen gerade beim Ersatzneubau einen besonderen Vorteil der Bauart aus) weisen WiB-Brücken bei hoher Tragfähigkeit relativ geringe Überbausteifigkeiten auf. Kombiniert mit der für diese Bauweise sehr typischen Einfeldträgerbauweise führt das oft rechnerisch zu Resonanzgefahr, welche meistens bei Bauwerksmessungen nicht bestätigt werden kann (vgl. Abbildung 1-1). [RiL804] weist auf diesen Umstand explizit hin und rät dazu, Querschnittsänderungen zur Erfüllung des vereinfachten Resonanznachweises nur dann durchzuführen, wenn dadurch keine unwirtschaftliche Bemessung entsteht.

Bei der Ermittlung der Querschnittswerte spielt die Frage einer möglichen Rissbildung im Beton eine entscheidende Rolle. Während im ULS immer von einer vollständig gerissenen Zugzone (Zustand II) ausgegangen wird, d.h. die Zugfestigkeit des Betons wird auf der sicheren Seite liegend vernachlässigt, gibt es bei der (Biege-)Steifigkeitsermittlung verschiedene Meinungen in der Literatur. Nach [EN1994-2] ist von einem effektiven Wert gemäß Gl. 3.4 auszugehen.

$$E_a I_{eff} = 0,5 \cdot (E_a I_1 + E_a I_2) \quad \text{Gl. 3.4}$$

Dabei ist  $I_1$  das Flächenträgheitsmoment im ungerissenen Zustand (Zustand I) und  $I_2$  das Flächenträgheitsmoment im Zustand II,  $E_a$  ist der Stahl-E-Modul (210000 N/mm<sup>2</sup>). Dieses Vorgehen wird von [Ili2009] sehr stark kritisiert, da seiner Meinung nach die Rissbildung unterschätzt wird. Er schlägt ein alternatives Vorgehen über die (über die Brückenlänge veränderliche) Bauteilkrümmung vor, bei dem die rechnerische Rissbildung berücksichtigt wird.

Tatsächlich kann durch eine starke Betonschädigung eine Reduzierung der Steifigkeit verursacht werden. Bei im Rahmen des *Details*-Projektes [Rfcs2009] [Rau2011b] an der RWTH Aachen durchgeführten Versuchen an runterskalierten WiB-Trägern wurde durch Aufbringen von zyklischen Lastwechseln (jeweils 10.000-20.000) auf vier verschiedenen Lastniveaus (das letzte Belastungslevel entsprach 89% der Versagenslast) eine Schädigung erreicht, die zu einer Verringerung von  $n_0$  um etwa 5% zwischen Ausgangsstruktur und Struktur nach Level 4 geführt hat, was einer Reduktion von  $EI$  von etwa 10 % entsprach.

Die Ausbildung von Rissen ist also belastungsabhängig. Es stellt sich also zunächst die Frage, ob es überhaupt zur Rissbildung im Beton kommt und wenn, in welcher Größenordnung. Aufgrund des üblichen Einbauverfahrens (Einbau der Stahlträger, Einbringen von Ortbeton) wird das Eigengewicht des Überbaus im elastischen Bereich von den Stahlträgern aufgenommen, die Verbundkonstruktion trägt lediglich als ständige Lasten die Ausbauelemente (Schotter, Schwellen, etc.) und als vorübergehende Lasten die Verkehrseinwirkungen. Nur diese Lastanteile tragen zur Rissbildung bei. Gemäß [RiL804] ist dabei für ständige Lasten ein Beton-E-Modul von  $E_a/18$  zu berücksichtigen, bei veränderlichen Lasten wird der Beton-E-Modul  $E_c$  gemäß [EN1992-1] verwendet. Bei den Versuchen im *Details*-Projekt wurden die Träger beim Betonieren unterstützt, sodass die Verbundkonstruktion das gesamte Eigengewicht von Stahl und Beton trug.

Gemäß [Spe2010] kann bei Betontragwerken bei Einhaltung der Durchbiegungskriterien (vgl. Kapitel 2.1.3) unter  $\Phi$ -LM71 (vgl. Kapitel 2.1.1) ein ungerissener Querschnitt (Zustand I) vorausgesetzt werden und auch die [RiL804] lässt explizit eine Ermittlung des Flächenträgheitsmomentes I am ungerissenen Querschnitt zu.

Weiterhin stellt sich die Frage nach dem tatsächlichen Beton-E-Modul. Einerseits ist der Beton-E-Modul normativ abhängig von der Betonfestigkeitsklasse. Die [RiL804] gibt für Neubauten die Verwendung eines C 30/37 oder eines C 35/45 vor, bei Bestandsbauten sind noch andere Betonfestigkeitsklassen vorzufinden. Zwar wird die tatsächlich eingebaute Betonfestigkeitsklasse beim Einbau auf die geforderte Mindestfestigkeit hin geprüft, der ermittelte Wert der Betonfestigkeit wird aber selten in Bauwerksbüchern nachgehalten, was die Nachrechnung des tatsächlichen Verhaltens von Bestandsbauten erschwert. Andererseits können je nach verwendeter Gesteinskörnung die E-Moduli bis zu 20 % höher oder bis zu 30 % niedriger ausfallen als der nach Norm [EN1992-1] zu erwartende Wert. Der tatsächliche E-Modul lässt sich nur anhand spezieller E-Modul-Prüfungen nach [EN12390-13] ermitteln, für welche Probekörper beim Einbringen des Frischbetons genommen werden müssen (zusätzlich zu den obligatorischen Probekörpern zur Festigkeitsprüfung). Eine nachträgliche (zerstörungsfreie) Ermittlung des Beton-E-Moduls ist nur schwer möglich. Weiterhin sei darauf hingewiesen, dass in der Berechnung immer der Druck-E-Modul angesetzt wird, die Brücken werden aber hauptsächlich auf Biegung beansprucht, woraus sich möglicherweise gewisse Unterschiede zwischen Berechnung und Messung ergeben. Weiterhin gibt es Unterschiede zwischen dem dynamischen E-Modul und dem nach Norm anzusetzenden E-Modul von Beton. Auch gibt es derzeit keine Untersuchungen dazu, ob möglicherweise die einbetonierten Stahlträger einen Einfluss auf die Querdehnung des Betons haben und somit Festigkeit und/oder Steifigkeit beeinflussen.

In Kapitel 3.1 wurde bereits einleitend auf das temperaturabhängige Verhalten des (Gesamt-)Überbaus eingegangen. Da es sich bei den im Rahmen dieser Arbeit thematisierten Brücken um schwimmend gelagerte Einfeldträger handelt, entstehen durch Temperaturänderungen im Überbau lediglich Verformungen (statisch bestimmtes System) und keine Zwängungen (statisch unbestimmtes System).

Im Wesentlichen werden Temperatureinwirkungen unterschieden in lineare Temperaturanteile  $\Delta T_u$ , über Querschnittshöhe oder –breite linear veränderliche Temperaturanteile  $\Delta T_M$  und nicht-linear veränderliche Temperaturanteile  $\Delta T_E$ . Gemäß [EN1994-2] dürfen bei den hier diskutierten Brücken mit Schotteroberbau die Einflüsse linearer Temperaturunterschiede vernachlässigt werden. In [Big2014a] [Fel2016] wurden erste Berechnungen zum Einfluss der Temperatur auf das Durch-

biegungsverhalten von WiB-Brücken durchgeführt. Zielsetzung war die Beantwortung der Frage, ob durch unterschiedliche Wärmeleiteigenschaften von Stahl ( $\lambda = 0,06 \text{ W/mmK}$ ) und Beton ( $\lambda = 0,0021 \text{ W/mmK}$ ) der Stahl schneller auf äußere Temperaturänderungen reagiert als der umgebene Beton und so möglicherweise ein Zusammenziehen des Stahls eine Art Vorspanneffekt im Beton erzielt und eventuelle Risse im Beton überdrückt werden. Den durchgeführten Berechnungen wurden tatsächlich gemessene Temperaturverläufe zugrunde gelegt. Bei den vorliegenden Temperaturverläufen (langsame Änderung der Außentemperaturen) überwog der Einfluss des linearen Temperaturunterschieds zwischen Ober- und Unterkante des Überbaus, welcher linear in die Gleichung zur näherungsweisen Abschätzung der maximalen Durchbiegung bzw. Überhöhung  $u_{z,max}$  in Feldmitte nach Gl. 3.5 eingeht, dabei ist  $L$  die Stützweite des Einfeldträgers und  $h$  die Querschnittshöhe. In einem Finite-Elemente-Modell mit linearen Materialparametern (keine Berücksichtigung von Rissbildung) konnten die unterschiedlichen Wärmeleiteigenschaften von Stahl und Beton berücksichtigt werden, die Ergebnisse unterschieden sich allerdings nur geringfügig von den Näherungslösungen.

$$u_{z,max} = \frac{\alpha_T \cdot \Delta T_M \cdot L^2}{8 \cdot h} \quad \text{Gl. 3.5}$$

Letztendlich hatte nur der lineare Temperaturunterschied zwischen Ober- und Unterseite einen nennenswerten Einfluss auf die Ergebnisse, die absolute Außentemperatur hatte keinen Einfluss. Eine kältere Unterseite führt zu einer Überhöhung, eine wärmere Unterseite zu einer zusätzlichen Durchbiegung. Ob diese Effekte die an Brücken beobachteten Änderungen der Eigenfrequenzen im Winter gegenüber Sommer mitverursachen, bleibt offen. Weitere Forschungsarbeiten numerischer und experimenteller Natur sind zur Klärung dieser Fragestellung nötig. Dabei ist zu beachten, dass der Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha_T$  von Beton starken Schwankungen unterliegt, siehe z.B. [Man2010].

Die in diesem Unterkapitel diskutierten Aspekte dienen vornehmlich der Erklärung der bei Messungen an Brückenbauwerken beobachteten Unterschiede zwischen Berechnung gemäß Norm und gemessenem Wert, sowie der bei Brückenmessungen beobachteten (temperaturabhängigen) Messwertunterschiede. Es werden gewisse Unsicherheiten bei rechnerisch ermittelten Werten aufgezeigt, welche unterstreichen sollen, dass eine pauschale Steifigkeitserhöhung zur Berücksichtigung baulicher Randbedingungen möglicherweise zu unsicheren (oder auf Dauer unsicheren) Ergebnissen führt.

Zeitliche Aspekte sollten nicht völlig außer Acht gelassen werden, selbst wenn für WiB-Überbauten Ermüdungsberechnungen i.d.R. entfallen können. An dieser Stelle



sei auf die Bauwerksdämpfung verwiesen, welche wie eingangs erwähnt bei gemessenen WiB-Brücken zwar i.d.R. deutlich höher ist, als gemäß [EN1991-2] [RiL804]. Bei Betonbauwerken wurde beobachtet, dass sich die Rissentwicklung auf die Bauwerksdämpfung auswirkt: Während das Rissbild entsteht, schließen und öffnen sich die Risse, wodurch zusätzliche Reibung entsteht. Ist das Rissbild abgeschlossen, bleiben die Risse weitestgehend geöffnet und die Dämpfungswirkung ist geringer, vgl. [Bun2010].

### 3.7 Randkappen

Die Randkappen begrenzen seitlich das Schotterbett und bieten Platz für Dienstwege, Geländer oder Lärmschutzwände, sowie weitere Ausbauelemente wie Kabelkanäle, Maste oder Schilder. Die Verbindung zwischen Überbau und Randkappe erfolgt entweder über Bügelbewehrung (siehe Abbildung 3-5) oder über Telleranker, Betonschrauben o.ä. siehe [RiL804]. Telleranker bedürfen eines Verwendbarkeitsnachweises und dürfen nur verwendet werden, wenn keine alternativen Lösungen vorhanden sind. Müssen Lasten aus der Randkappe in den Überbau übertragen werden (z.B. aus den Lärmschutzwänden, welche z.T. großen Windlasten und dynamischen Druck- und Sogbeanspruchungen durch vorbeifahrende Züge ausgesetzt sind), so sind die Verbindungsmittel entsprechend der Hinweise in [RiL804] auszulegen, Ermüdungsbeanspruchung ist ggf. zu beachten.

Die Randkappen zählen nicht zu den tragenden Brückenelementen, daher dürfen sie bei der Ermittlung der Querschnittswerte für die Biegesteifigkeit bei einer Bemessung nach den gängigen Vorschriften [EN1991-2] [RiL804] nicht in Ansatz gebracht werden. Dennoch wurde z.B. in [Spe2006] [Rau2010c] [Rau2011a] [Fel2016] der Fragestellung nachgegangen, in welcher Form sich eine Berücksichtigung der Randkappen bei der Ermittlung der Querschnittswerte vertreten lässt. Dabei stellt sich zunächst die Frage nach der Schubkraftübertragung in der Verbundfuge zwischen Überbau und Randkappe. Handelt es sich um eine schubweiche Verbindung, so können lediglich die Einzelsteifigkeiten der Randkappen zur Überbaubiegesteifigkeit hinzuaddiert werden. Handelt es sich um eine schubstarre Verbindung, so können zusätzlich noch die Steineranteile  $A_i \cdot z_i^2$  berücksichtigt werden (dabei sind  $A_i$  die Teilfläche(n) der Randkappe(n) und  $z_i$  die Schwerelinienabstände zur Schwerelinie des Gesamtüberbaus). Unter Annahme einer schubstarken Verbindung lassen sich deutlich höhere Steifigkeiten berechnen, als unter Annahme eines schubweichen Anschlusses.

[Spe2006] führten ihre Untersuchungen für eine Brücke mit fester Fahrbahn durch und kamen zu dem Schluss, dass zumindest zwischen fester Fahrbahn und Überbau eine schubstarre Verbindung angenommen werden könne. Auf die Verbindung

zwischen Überbau und Randkappe(n) wurde diese Aussage allerdings nicht ausgeweitet.

In [Rau2010c] [Rau2011a] wurden für einige WiB-Brücken der bereits mehrfach erwähnten DB-Messkampagne die Biegeeigenfrequenzen  $n_0$  jeweils unter Annahme eines schubweichen und eines schubstarrten Ansatzes ermittelt und gemessenen Werten gegenübergestellt. Die WiB-Überbauten wurden dabei gemäß [RiL804] als ungerissen (Zustand I) angenommen. Die zugehörigen, gemessenen Werte  $n_0$  waren allesamt größer als die unter Annahme eines schubstarrten Ansatzes ermittelten Werte, was hoffen ließ, dass dieser Berechnungsansatz sich möglicherweise irgendwann in der Normgebung etablieren ließe, da sehr realistische Werte erzielt werden konnten, die aber dennoch auf der sicheren Seite lagen. Da aber nur von einem kleinen Teil der im Rahmen der Messkampagne untersuchten Brücken ausreichende Planunterlagen zur Verfügung standen (von der Strecke zwischen Aachen und Köln), sollte im Fosta-Projekt P941 [Fel2016] eine Überprüfung dieses Ansatzes anhand der übrigen im Rahmen der Messkampagne untersuchten Brücken erfolgen.

Es wurden weitere Planunterlagen von der *Deutschen Bahn AG* zur Verfügung gestellt und ausgewertet. Dabei zeigte sich, dass die Annahme einer schubstarrten Verbindung zwischen Überbau und Randkappe nicht pauschal zulässig ist. Die so ermittelten  $n_0$ -Werte waren in vielen Fällen deutlich größer als die zugehörigen gemessenen Werte. An dieser Stelle sei die genannte Fragestellung anhand zweier im Rahmen von [Rau2010c] [Rau2011a] bzw. [Fel2016] untersuchten Brückenbauwerke verdeutlicht werden:

Die später in dieser Arbeit detailliert beschriebene *EÜ Erfttalstraße* wurde im Jahr 2000 fertiggestellt und war 2002/2003 Teil der bereits genannten Messkampagne. Die Randkappen sind über Telleranker an die zwei Überbauten der Zwillingenbrücke angeschlossen. Rechnerisch nach Gl. 2.6 ergaben sich  $n_0 = 2,8$  Hz (Südüberbau) und  $n_0 = 2,5$  Hz (Nordüberbau). Durch Berücksichtigung der Randkappen (Annahme schubstarrer Anschluss) ließen sich die Werte erhöhen auf  $n_0 = 3,2$  Hz bzw.  $n_0 = 3,1$  Hz. Die Werte lagen unterhalb des Messwertes  $n_0 = 3,5$  Hz.

Die von der Brücke *OVW Sellenstedt* vorliegenden Planunterlagen wurden 1987 erstellt. Bei dieser Brücke erfolgen die Anschlüsse der Randkappen über Bügelbewehrung. Es ergibt sich nach Gl. 2.6  $n_0 = 4,7$  Hz. Durch Berücksichtigung der Randkappen (Annahme schubstarrer Anschluss) wird der Wert auf  $n_0 = 6,6$  Hz erhöht. Messtechnisch im Rahmen der Messkampagne wurde 2001 allerdings lediglich ein Wert  $n_0 = 5,9$  Hz ermittelt.

Bei den von [Rau2010c] [Rau2011a] [Fel2016] durchgeführten Berechnungen unter Ansatz einer Schubstarren Verbindung wurden allerdings im Vergleich zum realen Bauwerk folgende Aspekte vernachlässigt:

- Vernachlässigung einer möglichen Rissbildung im Überbau, Ermittlung der Querschnittswerte im Zustand I (siehe Kapitel 3.6),
- Vernachlässigung des Schlupfes in der Verbundfuge, Annahme (dauerhaft) starrer Verbund,
- Vernachlässigung der Schubnachgiebigkeit der Kappen (bei Annahme eines Verbundes am Ende des Kragarms).

Eingangs wurde bereits angemerkt, dass die Verbindungsmittel ggf. darauf ausgelegt werden müssen, Kräfte von der Randkappe in den Überbau zu übertragen, wobei Ermüdungsbeanspruchungen zu berücksichtigen sind. In diesem Fall lässt sich eine kraftschlüssige Verbindung über die gesamte geplante Nutzungsdauer vorsehen. Falls die Verbindungsmittel nicht planmäßig auf eine (Schub-)Kraftübertragung ausgelegt werden, kann von keinem Schubstarren Anschluss ausgegangen werden. Es kann zu einer Relativverschiebung zwischen Randkappe und Überbau kommen (Schlupf). Die Relativverschiebung hängt von der Steifigkeit des Schubanschlusses ab. Im Extremfall könnten die Schubverbindungen infolge Ermüdung ausfallen, wodurch nur noch Reibverbund übrig bliebe (elastischer Verbund).

Ganz allgemein lassen sich die entsprechenden Querschnittswerte nach der Theorie des elastischen Verbundes berechnen, siehe z.B. [Hei1953] (auch hier ergeben sich Werte zwischen den nach Schubweichem und Schubstarrerem Ansatz berechneten Ergebnissen). Benötigt für die Berechnung wird dabei u.a. die Steifigkeit des Verbundmittels bzw. die Schubsteifigkeit in der Verbundfuge, beispielsweise sind für Kopfbolzendübel (im Hochbau) die entsprechenden Angaben in [EN1994-1-1] zu finden. Bei der Auswertung der DB-Messkampagne im Rahmen des Fosta-Projekts P941 [Fel2016] stellte sich allerdings heraus, dass in der Literatur keine entsprechenden Hinweise für die Schubsteifigkeit der Bügelbewehrung (oder Telleranker) zu finden waren, um die entsprechenden Querschnittswerte berechnen zu können.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass auch ein starrer Verbund infolge Ermüdungsbeanspruchung gelöst werden kann, sodass im Laufe der Zeit eine Reduktion der Verbundsteifigkeit erfolgen kann. Es ist natürlich möglich, dass im Gegenzug durch die Relativverschiebung zwischen Randkappe und Überbau eine zusätzliche Dämpfungswirkung erzeugt wird.

Bei den von [Rau2010c] [Rau2011a] [Fel2016] durchgeführten Berechnungen wurden weiterhin die Schotterbegrenzungsbalken berücksichtigt. Eventuelle Querfugen (zur Vermeidung einer zu hohen Druckbeanspruchung unter Biegebeanspruchung des Überbaus) wurden nicht berücksichtigt.

[ÖBB2011] erlaubt die Berücksichtigung der Steifigkeitsbeiträge aller Bauteile, die eine unmittelbare und kraftschlüssige Verbindung mit dem Rohbauwerk eingehen. Randbalken mit Trennfugen und durch Abdichtungen vom Tragwerk getrennte Teile einer festen Fahrbahn dürfen nicht berücksichtigt werden.

### **3.8 Schotteroberbau**

Der Schotteroberbau hat die wichtige Funktion, die vertikal und in Längsrichtung auf die Schienen wirkenden Lasten auf den tragenden Überbau zu übertragen, weiterhin weist er sehr gute Entwässerungseigenschaften auf.

Der Schotteroberbau muss gegen Destabilisierung und übermäßigen Verschleiß gesichert werden. In Kapitel 2.1.3 sind die im Rahmen der Brückenbemessung entsprechend zu erbringenden Nachweise für Eisenbahnbrücken aus den diesbezüglich in Deutschland geltenden Normen aufgelistet. Dementsprechend liegt der Fokus bei der Mehrheit der veröffentlichten Untersuchungen zum (dynamischen) Verhalten von Eisenbahnschotter auf den Sicherheits- und Instandhaltungsaspekten. Hierbei ist zwischen freier Strecke und Brückenbauwerken zu unterscheiden. Auf freier Strecke kommt zu möglichen Setzungen des Schotters auch die Gefahr von Setzungen des Untergrundes unterhalb der Schotterschicht. Entsprechende Untersuchungen zum Setzungsverhalten wurden beispielsweise von [Eis1980] [Het1984] [Het1987] [Eis1997] [Hol2003] [Bae2008] durchgeführt.

Auf Brücken können zu große vertikale Beschleunigungen die Festigkeitseigenschaften des Schotters bereits während der Brückenschwingung herabsetzen. Das Gefüge wird dabei während der Schwingung aufgelockert und es ergeben sich nach Ende der Schwingung weiterhin herabgesetzte Festigkeitseigenschaften [Bae2008]. [EN1990] [EN1991-2] [RiL804] legen daher die maximale vertikale Beschleunigung auf Brücken mit Schotteroberbau zu  $a_z = 3,5 \text{ m/s}^2$  fest, siehe Kapitel 2.1.3. Gemäß [Bae2008] wurden bei Amplituden über 0,7 g deutliche Strukturveränderungen beobachtet, der normativ geregelte Wert beinhaltet somit eine Sicherheit von 2. Weiterhin können sich Probleme am Übergang zwischen Brücke und freier Strecke ergeben. [Bae2008] nennt als mögliche Ursachen für Gleislagefehler an Brückenübergängen Steifigkeitssprünge, Relativverschiebungen und Schienen-

aufwölbungen. Auf der Brücke selbst sind Gleislagefehler zu vermeiden, wobei dabei vertikale (Setzungen, Bildung von Hohllagen, etc.) und horizontale (seitliches Ausweichen) Richtung zu unterscheiden sind.

Da im Rahmen dieser Arbeit der Fokus auf der (vereinfachten) Bemessung liegt und der Fragestellung, ob sich dabei eventuell Beiträge des Schotters zu Systemsteifigkeit und -dämpfung berücksichtigen lassen, sei an dieser Stelle auf weiterführende Literatur zur genannten Thematik verwiesen. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Sicherheitsanforderungen als erfüllt betrachtet, wenn die entsprechend in Kapitel 2.1.3 aufgelisteten Nachweise erfüllt werden können.

Der Beitrag des Schotterbetts zu Systemsteifigkeit und -dämpfung lässt sich in folgende drei Hauptaspekte aufschlüsseln:

- Längsverschiebewiderstand der Schwellen im Schotter (Kapitel 3.3, 5.3.2, 5.4.1)
- Beitrag des Schotters zu Biegesteifigkeit (und Dämpfung)
  - „quasi-statische“ Effekte bei geringen Verformungs- und Beschleunigungsamplituden
  - dynamische Effekte mit möglicher Destabilisierung des Schotterbettes
- Kopeffekt bei Zwillingsbauten (durch eine Längsfuge getrennte Überbauten mit durchgängiger Schotterschicht)

Alle drei Aspekte wirken gleichzeitig (bei Bauwerken ohne Längsfuge natürlich nur die ersten beiden) und sind bei In-Situ-Messungen an realen Brücken nicht eindeutig voneinander zu trennen.

Vorangegangene Untersuchungen (Messungen an Brücken, Laborversuche) lassen bei allen drei Aspekten auf ein nicht-lineares Verhalten schließen, auf das sich aus Schwingungsamplituden- und Frequenzabhängigkeit schlussfolgern lässt, vgl. z.B. [Mäh2009] [Rau2011a] [Gon2013].

### **3.8.1 Biegesteifigkeit und Dämpfung**

Laborversuche zur Ermittlung der Beiträge des Schotterbettes zum Steifigkeits- und Dämpfungsverhalten von Brückenbauwerken für die Durchführung von Simulationen wurden von [Fin2009a] [Mäh2009] [Kir2013] an der TU Wien durchgeführt. Dazu wurde im Labor eine 10 m lange, 4 m breite Testbrücke gelenkig gelagert. Die Einbauhöhe des Schotters (Oberkannte Schwellen) betrug 0,55 m. Es wurden UIC60 Schienen und Schwellen mit einem Schwellenabstand  $d = 0,6$  m eingebaut. Die Anregung der Versuchsbrücke erfolgte mittels eines Impulshammers und durch

harmonische Anregung mittels eines Richterreggers jeweils in der ersten Biege- und Torsionseigenform. Betrachtet wurde die leere Brücke ohne Schotter, Schwellen und Schienen, sowie die Brücke mit Schotterfüllung jeweils ohne und mit Vorspannung (Simulation Brückenbauwerk unter Achslasten).

In [Fin2009a] [Mäh2009] wird der Schotter als Balkenelement modelliert, welches über Feder- und Dämpfungselemente in Längsrichtung an einen ideal-gelenkig gelagerten Balken angeschlossen wird, welcher die Tragstruktur der Brücke darstellt. Dabei wird die Annahme getroffen, dass die Biegesteifigkeit  $EI$  des Schotters der der beiden UIC60-Schienen entspricht. Die Federsteifigkeiten und Dämpfungsparameter werden anhand der durchgeführten Versuche kalibriert. Der Modellierungsansatz ähnelt somit dem in Abschnitt 3.3 (Abbildung 3-1 a) gezeigten Modellierungshinweis aus [EN1991-2] [RiL804] [UIC774].

Zur Erinnerung: Der bi-lineare Längsverschiebewiderstand der Schwellen im Schotter (Abbildung 3-1 b bzw. c) gilt dabei sowohl auf der Brücke als auch auf dem Bahndamm, wobei erst bei Weiterführung der Gleise im Modell über die Brückenenden hinaus der in Abschnitt 3.3 beschriebene Einspanneffekt durch Biegung aktiviert werden kann.

In den Versuchen von [Fin2009a] [Mäh2009] [Fin2011] [Kir2013] werden die Schienen nicht über die Testbrücke hinaus geführt, sodass dieser Einspanneffekt im Versuch entfällt. In [Mäh2009] wird von einer fiktiven Scherfuge zwischen Schotter und Überbau gesprochen. Die Kalibrierung des Modells erfolgte auf eine nicht-lineare Drehfedersteifigkeit und eine verdrehungsabhängige Dämpfung der Testbrücke hin, was eine Übertragung der Ergebnisse auf Spannweiten  $L \neq 10$  m erschwerte. Die Ergebnisse wurden für Simulationsberechnungen von Zugüberfahrten über eine ebenfalls 10 m lange Stahltrogbrücke verwendet. Dabei zeigte sich lediglich ein untergeordneter Beitrag des Schotterbettes. Der Einfluss einer Vorspannung des Schotterbettes auf die Systemsteifigkeit war vernachlässigbar. Reale Vergleichsmessungen an einem Bauwerk wurden in den Zusammenhang nicht präsentiert.

Die von [Fin2009a] [Mäh2009] ermittelten Dämpfungswerte wurden mit der Bandbreitenmethode ermittelt und mit dem Hinweis veröffentlicht, dass die Werte lediglich als grobe Schätzwerte zu verstehen seien, da die Bandbreitenmethode strenggenommen nur für Systeme mit linearem Verhalten angewendet werden darf. Es wurden bei Anregung mit dem Richterregger Dämpfungswerte zwischen 3,08 % und 4,18 % (schwingungsamplituden- und frequenzabhängig) ermittelt, bei Anregung mit dem Impulshammer (deutlich geringere Schwingungsamplituden) Werte zwischen 2,43 % und 3,20 %.

Bei den ergänzenden Versuchen von [Kir2013] wurden der Einfluss des Verdichtungsgrades des Schotters (sinkt mit zunehmender Schwingungsamplitude, bei realen Brückenbauwerken wird nur ein geringer Einfluss durch Nachverdichten erwartet), der Einfluss unterschiedlicher Lagerungen (Kipplager, Rolllager, Elastomerlager, nur geringe Relevanz) und der Einfluss unterschiedlicher Umgebungstemperaturen bzw. das Vereisen des Schotters untersucht. Eine Tendenz zur höheren Steifigkeit durch Vereisen konnte gezeigt werden, allerdings konnte im Labor lediglich ein Vereisen bis 25 cm Tiefe erzielt werden, wobei angezweifelt wurde, dass bei realen Bauwerken durch gute Entwässerung ausreichend Wasser im Schotter verbleibe, um eine entsprechende Vereisung zu erzielen.

Gemäß [Van1997] führt allerdings erst ein verschmutztes Schotterbett dazu, dass der Wasserabfluss verhindert wird und so eine Vereisung im Winter ermöglicht.

Die Ergebnisse von [Fin2009a] [Mäh2009] wurden von [Bat2011] dazu genutzt, ein Finites Element zu entwickeln, dass die Schubkraftübertragung zwischen Schotter und Überbau in einem Finite-Elemente Modell abbildet. Die Eingangsparameter müssen dabei anhand von Messergebnissen kalibriert werden. Dies wird von [Bat2011] sowohl für die Testbrücke aus dem Labor der TU Wien gezeigt, als auch für eine eingleisige, 36 m lange schwedische Verbundbrücke. Bei letzterer wurden keine weiteren Effekte bei der Modellierung berücksichtigt, vor allem der mehrfach erwähnte Einspanneffekt der bei der realen Brücke über die Enden hinauslaufenden Gleise findet im Modell keine Berücksichtigung. Es ist also möglich, dass der Beitrag des Schotters im Modell überschätzt wurde und die Beiträge anderer Effekte beinhaltet.

Dieselbe Brücke wurde auch von [Gon2013] messtechnisch und rechnerisch untersucht. Es wird insbesondere auf die Temperaturabhängigkeit der Ergebnisse eingegangen. Die Temperaturabhängigkeit ist nicht proportional zur Temperatur, vielmehr ergeben sich unterhalb von 0 °C deutlich größere Messwerte bei der 1. Biege- und 1. Torsionseigenfrequenz, was auf eine Beeinflussung der Systemsteifigkeit durch Vereisung schließen lässt. Die Betrachtung der Übergangsperioden zwischen kalter und warmer Jahreszeit führte zu dem Schluss, dass die 1. Biegeeigenfrequenz vor allem durch das angrenzende Erdreich beeinflusst wird, während die 1. Torsionseigenfrequenz vor allem durch das Schotterbett beeinflusst wird. Das angrenzende Erdreich (Bodenfrost) reagiert dabei deutlich langsamer auf Temperaturänderungen als der Schotter, welcher Temperaturänderungen direkter ausgesetzt ist. Ein Zusammenhang zwischen dem Abnutzungsgrad des Schotters und der Menge Wasser, die daraufhin im Schotter verbleiben und einfrieren kann, wurde genannt und so die Plausibilität eines vereisten Schotterbettes gegeben.

[Fin2011] führten ebenfalls Brückenmessungen an einer eingleisigen Brücke durch. Untersuchungsgegenstand war eine 21,36 m lange Einfeldbrücke in Stahlbauweise. Die rechnerisch ermittelten Eigenfrequenzen konnten die Messwerte gut abbilden, obwohl auf eine Berücksichtigung des Schotters (oder anderer Ausbauelemente) bei der Modellierung verzichtet wurde. Die gemessene erste Biegeeigenfrequenz war lediglich 8 % größer als ein vereinfacht anhand Gl. 2.6 ermittelter Wert, eine Finite-Elemente-Modellierung, bei der der gesamte Überbau inkl. Querträgern etc. modelliert wurde verkleinerte die Abweichung sogar auf etwa 2 %.

Bei den im Rahmen dieser Arbeit erstellten Modellierungsvereinfachungen (Kapitel 5) wird ein möglicher Beitrag des Schotters zu Biegesteifigkeit (und Dämpfung) nicht weiter berücksichtigt. Die hier zusammengefassten Literaturstellen lassen vermuten, dass der Beitrag zur Biegesteifigkeit (zusätzlich zum nach [EN1991-2] [RiL804] [UIC774] bereits ansetzbaren Einspanneffekt der Schienen) relativ geringe Auswirkungen hat. Bei den bisher veröffentlichten Dämpfungswerten verbleiben noch zu viele offene Fragen, um eine Berücksichtigung höherer Dämpfungswerte bei der Bemessung rechtfertigen zu können. Eine Vernachlässigung der Dämpfung führt immer zu auf der sicheren Seite liegenden Ergebnissen.

### **3.8.2 Koppeleffekt Zwillingsbrücken**

Brücken, bestehend aus einem Überbau pro Fahrrichtung, die durch eine Längsfuge getrennt sind und von einer durchgängigen Schotterschicht bedeckt sind, werden sehr häufig ausgeführt, da sich im Bedarfsfall die Überbauten einzeln austauschen lassen. Durch die Befahrbarkeit des zweiten Überbaus bei Austausch des ersten Überbaus werden Einschränkungen im Fahrablauf auf ein Minimum reduziert. Über die durchgängige Schotterschicht wird (im Normalbetrieb mit zwei Überbauten) die Anregung eines Überbaus auf den unbelasteten Überbau übertragen; nachdem der Zug die Brücke verlassen hat, erfolgt i.d.R. ein gemeinsames Ausschwingen beider Überbauten.

Experimentelle Untersuchungen zum Koppeleffekt wurden von [Rau2011a] [Rau2010a] durchgeführt. Dazu wurden zwei Stahlkästen mit Trennfuge in Längsrichtung jeweils auf gelenkig gelagerten Biegeträgern angebracht und in vier unterschiedlichen Testkonfigurationen in vertikaler Richtung belastet. Im ersten Modus waren die Kästen leer, es gab keine Interaktion zwischen ihnen. Die Kästen waren in Längsrichtung in drei Kammern unterteilt. So konnte für die nächsten zwei Konfigurationen nur der Bereich in Feldmitte, für den sich ein Bereich mit annähernd gleicher Durchbiegung erwarten ließ, mit Schotter gefüllt werden. Um das Last-Verformungsverhalten in dieser annähernd rechteckigen Koppelfuge zu untersuchen, wurde zunächst eine Seite belastet, während sich beide Seiten durchbiegen und



verdrehen konnten. Anschließend wurde die unbelastete Seite gegen Durchbiegung und Verdrehung gesichert und der Versuchsablauf wiederholt. Bei der vierten Konfiguration wurden alle Kammern vollständig mit Schotter gefüllt. Die Versuche erfolgten ohne zusätzliche Auflasten (Schwellen, Schienen, etc.). Für alle Versuche wurde jeweils neuer Basaltschotter der Körnung 31,5-63,0 verwendet. Das vollständig mit Schotter gefüllte System wurde ergänzend mittels Hammerschlag angeregt. Die Auswertung der Ausschwingvorgänge (vgl. Kapitel 2.2.2) nach der Impulsanregung zeigte bei höheren Schwingungsamplituden geringere Beiträge zur Systemsteifigkeit und höhere Beiträge zur Systemdämpfung. Bei geringeren Schwingungsamplituden zeigte sich ein umgekehrtes Verhalten: geringere Beiträge zur Dämpfung und höhere Beiträge zur Steifigkeit.

In allen Konfigurationen erfolgten kraftgesteuert quasi-statische (Geschwindigkeit der Lastaufbringung 2 kN/s) und dynamische (sinusförmige Lastanregung) Versuche. Bei den dynamischen Versuchen wurden Anregungsfrequenzen von 0,5 bis 6 Hz mit Lastamplituden im Bereich von  $\pm 5$  kN bis  $\pm 20$  kN untersucht. Bei den dynamischen Versuchen wurden bei höheren Lastamplituden geringere Steifigkeiten festgestellt, wobei generell die unter quasi-statischer Lastaufbringung (2 kN/s) ermittelten Werte geringer waren als die dynamisch ermittelten Werte. Anzumerken ist an dieser Stelle allerdings, dass die vertikalen Wegamplituden relativ gering waren. Signifikante Setzungserscheinungen wurden nicht beobachtet.

Aus den quasi-statischen Versuchen wurde eine mittlere Koppelsteifigkeit  $c_{coup} = 4350 \text{ kN/m}^3$  abgeleitet, wobei die Koppelsteifigkeit auf die Koppelfläche (1,2 m x 0,5 m) bezogen wurde, um eine spätere Implementierung in Berechnungsmodellen in Abhängigkeit von Schotterhöhe und Abstand verwendeter Federelemente zu ermöglichen. Für die Federelemente wurde in Anlehnung an die Federgesetze zur Berücksichtigung des Längsverschiebewiderstandes (siehe Abbildung 3-1 b) eine maximale Relativverschiebung in der Koppelfuge von 2 mm definiert. Ein Durchrutschen, wie es bei dieser Federcharakteristik unterstellt wird, wurde in den Versuchen nicht beobachtet. Da die Versuche ausschließlich unter Laborbedingungen mit Neuschotter durchgeführt wurden, konnte allerdings nicht ausgeschlossen werden, dass das Durchrutschen durch Verunreinigungen, Nässe oder Abplatzungen begünstigt wird.

Exemplarische Berechnungen unter Berücksichtigung des Koppeleffektes anhand von FE-Modellen zeigten (besonders bei ähnlichen Steifigkeiten und Massen der Überbauten) nur geringfügige Beeinflussungen der ersten Biegeeigenfrequenzen  $n_0$ . Bei vertikalen Durchbiegungs- und Beschleunigungsberechnungen infolge von ICE3-Zugüberfahrten machte sich die Berücksichtigung vor allem im Bereich der kritischen Geschwindigkeit  $v_{krit,1,1,ICE3}$  positiv bemerkbar. Weiterhin wurde gezeigt,

dass eine vereinfachte Erhöhung der Überbausteifigkeit zur Abbildung des Koppel-effektes bei der betrachteten Brücke außerhalb der kritischen Geschwindigkeiten sehr ähnliche Ergebnisse liefert wie ein gekoppeltes Modell. Im Bereich der kritischen Geschwindigkeiten ergaben sich auf der sicheren Seite liegende Ergebnisse.

Dämpfungsparameter konnten im Rahmen der Versuche mit sinusförmiger Lastan-regung nicht ermittelt werden, da im Frequenzbereich von 0,5 bis 6 Hz keine Reso-nanzanregung des Systems möglich war.

## 4 Experimentelle Untersuchungen zum Koppeleffekt

### 4.1 Vorüberlegungen

Während es zum dynamischen (Biege-)Verhalten des Eisenbahnschotters auf Brücken bereits viele abgeschlossene und laufende Forschungsvorhaben gibt, wurden die bisher einzigen bekannten Laborversuche zum Koppelverhalten von Zwillingenbrücken an der RWTH Aachen durchgeführt, siehe Kapitel 3.8.2.

Anhand von In-Situ-Messungen an bestehenden Eisenbahnbrücken (auch an Brücken im Bau) lässt sich der Koppeleffekt nicht ausreichend weiter erforschen, da sich dieser, wie unter 3.8 beschrieben, dort nicht von Mitwirkung des Schotters bei Biegeverformung und der Einspannwirkung von den über die Brückeneden hinauslaufenden Gleisen trennen lässt. Ein neuer Versuchsaufbau sollte also Effekte aus Biegung ausschließen.

In den bisherigen Versuchen zum Koppeleffekt konnten keine Dämpfungswerte ermittelt werden, da eine Resonanzanregung der Brücke nicht möglich war. Ein neuer Versuchsaufbau sollte also leicht in Resonanz versetzt werden können (d.h. bei möglichst niedrigen Erregerfrequenzen), um so Dämpfungswerte ermitteln zu können.

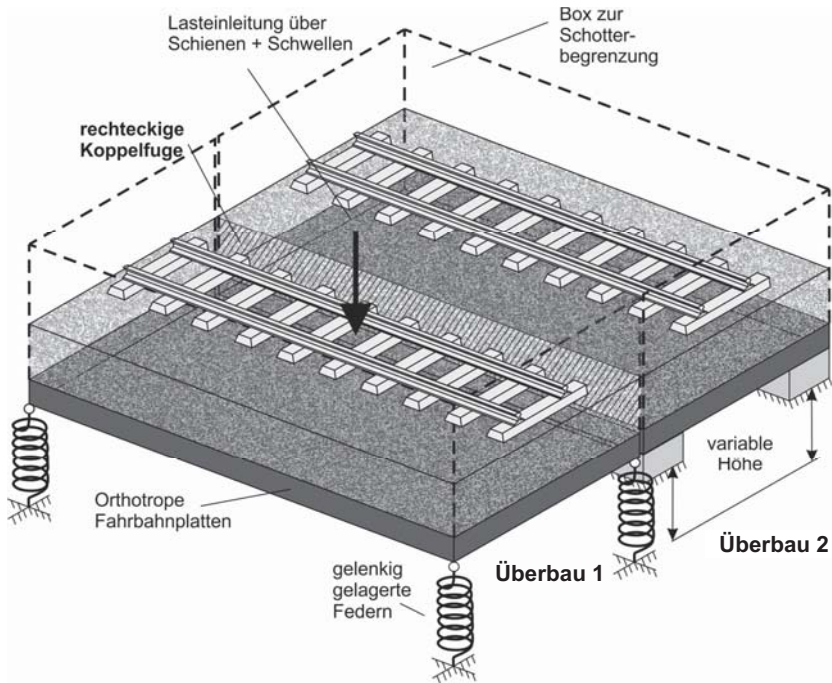
In den bisherigen Versuchen konnte eine Schubverformung in der Koppelfuge nicht beobachtet werden. Ein neuer Versuch sollte also eine ausreichende vertikale Relativverschiebung in der Koppelfuge ermöglichen, um diese zu messen oder für reale Brücken im Betrieb die zu erwartende Relativverschiebungen ausschließen zu können. Die Vertikalverformungen zwischen Überbauten werden in [RiL804] auf 3 cm begrenzt (vgl. Kapitel 2.1.3). Diese Größenordnung sollte beachtet werden.

Gemäß [Bae2008] sollen Versuche im 1:1 Maßstab durchgeführt werden, um ungewollte Maßstabeffekte auszuschließen. Die bisherigen Versuche zur Koppelfuge von [Rau2011a] wurden ohne Auflast durch Schwellen und Schotter durchgeführt. Eine einzelne Betonschwelle wiegt bereits etwa 300 kg, sodass auch ohne zusätzliche Achslasten aus Zügen eine Belastung des Schotteroberbaus vorliegt. In den Versuchen zum Koppelverhalten wurde ein lastamplitudenabhängiges Verhalten des Schotters beobachtet, welches z.B. auch von [Eis1980] bei Untersuchungen zum Schotterbett beobachtet wurde. Zwar befinden sich die Längsfugen bei Zwillingenbrücken normalerweise außerhalb des Bereiches, in dem eine Lastausbreitung unterhalb der Schwellen nach Norm angenommen wird, dennoch soll ein neuer Versuchsaufbau eine Beeinflussung der Ergebnisse durch fehlende Auflast ausschließen.

Der neue Versuchsstand sollte die Erforschung von jahreszeitlichen und wetterabhängigen Effekten ermöglichen. Weiterhin sollte der Versuchsstand eine Betrachtung über mehrere Jahre ermöglichen, um eine Beeinflussung durch Verschleiß bzw. Verschmutzung aus der Umwelt zu ermöglichen. In den vorangegangenen Versuchen zum Koppeleffekt wurde für jeden neuen Versuch neuer Schotter eingebaut. Beim neuen Versuchsaufbau wird zwar zunächst der gleiche Schotter eingebaut (Neuschotter 31,5-63 gemäß den technischen Lieferbedingungen der deutschen Bahn DBS 918061), dieser aber nicht für jede Messung ausgetauscht, sondern über einen längeren Zeitraum verwendet.

## 4.2 Versuche

Abbildung 4-1 zeigt das Konzept des Versuchsaufbaus. Einer der Überbauten (Überbau 1) ist auf Federn gelagert und wird entlang der rechteckigen Fläche in der Koppelfuge im Versuch vertikal verschoben. Die Lasteinleitung erfolgt von oben. Der zweite Überbau (Überbau 2) ist unverschieblich gelagert.



### Abbildung 4-1: Prinzipskizze Versuch Koppelfuge

Da sich das Schottergewicht und damit die Vorverformung der Federn vorab nicht exakt prognostizieren ließ, wurde Überbau 2 erst während des Schottereinbaus auf seine endgültige Höhe gebracht, in Abbildung 4-3 ist daher noch ein vertikaler Versatz zwischen den Überbauten zu sehen. Gemäß [EN1991-1-1] hat Basaltschotter eine Wichte  $\gamma = 26 \text{ kN/m}^3$ ; [EN1991-2] gibt als geringste Dichte  $1700 \text{ kg/m}^3$  an (entspricht  $16,7 \text{ kN/m}^3$ ). Zwischen Brückenplatte und Federn sind Lager angeordnet um sicherzustellen, dass nur Vertikallasten in die Federn eingeleitet werden. Als Brückenplatten kommen sogenannte D-Brückenplatten zum Einsatz, welche im Rahmen eines früheren Forschungsprojektes untersucht worden sind, bei dem die Möglichkeit einer nachträglichen Verstärkung der Brückenplatten durch SPS-Auflage-technik untersucht worden ist, siehe z.B. [Min2007]. Überbau 2 wurde durch SPS (Stahl-Polymer-Sandwich) verstärkt, Überbau 1 nicht, stattdessen ist die Stahlplatte auf Überbau 1 teilweise mit einem s.g. Dünnbelag bedeckt (siehe Draufsicht in Abbildung 4-13). Entscheidend für die Wahl von D-Brückenplatten war deren sehr hohe Steifigkeit, sodass die vertikale Verschiebung in der Koppelfuge separat untersucht werden kann. Die Verstärkung mit SPS bedeutet für den Versuch lediglich, dass Überbau 2 eine höhere Masse als Überbau 1 hat, die Messergebnisse werden dadurch nicht beeinflusst.

Zur gezielten Anregung der Brücke in unterschiedlichen Frequenzen wurde ein Unwuchterreger (siehe Abbildung 4-16 c) verwendet. Durch zwei rotierende Unwuchtmassen wird eine harmonische Last  $F(t)$  in vertikaler Richtung auf das anzuregende System aufgebracht. Wie beispielsweise von [Kir2013] beschrieben ergeben sich die in Gl. 4.1 bis Gl. 4.3 gegebenen Zusammenhänge.

$$m_{st} = m \cdot e \quad \text{Gl. 4.1}$$

$$F(t) = m_{st} \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\Omega \cdot t) \quad \text{Gl. 4.2}$$

$$|F| = m_{st} \cdot \Omega^2 \quad \text{Gl. 4.3}$$

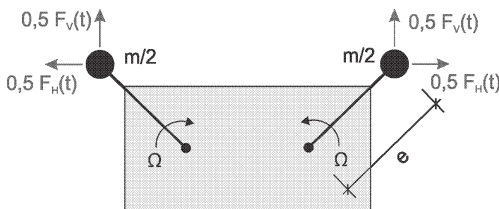


Abbildung 4-2: Prinzip Unwuchterreger

Die zwei Unwuchtmassen (jeweils  $\frac{1}{2} m$  der Gesamtmasse  $m$ ) werden mit einer Ausmitte  $e$  um ihre Drehachsen mit gleicher Umlaufgeschwindigkeit  $\Omega$  aufeinander zubewegt, siehe Abbildung 4-2. Dabei heben sich die horizontalen Kraftanteile  $\frac{1}{2} F_h(t)$

gegenseitig auf und es verbleiben nur die vertikalen Anteile  $F_v(t) = F(t)$ . Das Produkt

von Masse  $m$  und Ausmitte  $e$  wird als statisches Moment  $m_{st}$  bezeichnet,  $|F|$  ist die maximale Kraftamplitude. Beim verwendeten Unwuchterreger besteht die Möglichkeit,  $m_{st}$  zu variieren, einerseits durch Anbringen unterschiedlich schwerer Massen in unterschiedlicher Anzahl, andererseits durch Veränderung der Ausmitte  $e$ . In Tabelle 4-1 sind die kombinierbaren Massen, die möglichen Ausmitten und die daraus resultierenden Bereiche für  $m_{st}$  aufgelistet. Das größte mögliche statische Moment ergibt sich also bei drei großen Elementen mit einer Gesamtmasse von 13,41 kg und einer Ausmitte  $e = 94$  mm zu  $m_{st} = 1,26$  kgm.

**Tabelle 4-1: Parameterzusammenstellung Unwuchterreger**

Elemente	$m$ [kg]	Anzahl	$e$ [mm]	$m_{st}$ [kgm]
klein	2,48	1-2	24-96	0,06-0,48
groß	4,47	1-3	68-94	0,30-1,26

Weiterhin wurde die Brücke durch Hüpfen von einer oder mehreren Personen angeregt.

Zur Erfassung der Brückenantwort stand folgende Messtechnik zur Verfügung:

- monodirektionale Beschleunigungsaufnehmer (zur Messung der vertikalen Beschleunigungen),
- Geschwindigkeitsaufnehmer,
- Laser-Wegaufnehmer.

#### 4.2.1 Voruntersuchungen der Brücke (ohne Koppeleffekt)

Um das Verhalten des Schotters später vom Verhalten der Brücke separieren zu können, wurden zunächst Leermessungen durchgeführt. Als erstes wurde die Brückenplatte auf Federn (Überbau 1) untersucht, Abbildung 4-3 zeigt die Brücke und listet die messtechnisch ermittelten Eigenfrequenzen und zugehörigen Dämpfungswerte auf. Die Brücke hat eine Gesamtmasse von  $m_{ges} = 4,1$  t (zusammengesetzt aus dem Plattengewicht mit Dünnbelag von 3,8 t und vier Lagern à 76,8 kg). Jede der vier Federn hat eine Federsteifigkeit von  $k = 841$  kN/m.

Zur messtechnischen Ermittlung der maßgebenden Eigenfrequenzen und zugehörigen Dämpfungswerte wurden mehrere Testreihen mit dem beschriebenen Massenreger durchgeführt. Die Position des Massenregers wurde dabei zwischen Anordnung in Plattenmitte und mittiger Anordnung am Plattenrand (jeweils in Längs- und Querrichtung) variiert, um alle relevanten vertikalen Eigenformen identifizieren zu können. Weiterhin wurde die Brücke durch „Hüpfen“ angeregt. Aufgezeichnet

wurden Beschleunigungszeitverläufe an den Plattenecken bzw. in Plattenmitte. Der Messstellenplan ist in Abbildung 4-4 dargestellt. Zur Ermittlung der Eigenfrequenzen und Dämpfungswerte wurden die freien Ausschwingvorgänge im Anschluss an eine Lastanregung ausgewertet. Die Eigenfrequenzen wurden anhand von FFTs identifiziert, die Dämpfungswerte anhand des logarithmischen Dekrements ermittelt (siehe Kapitel 2.2.2, Gl. 2.111). Abbildung 4-5 bis Abbildung 4-7 zeigen Ausschnitte aus den Ausschwingvorgängen und die zugehörigen FFTs.



$f_1$ [Hz]	4,6	$f_2$ [Hz]	5,7	$f_3$ [Hz]	6,6
$D = \xi$ [%]	0,12	$D = \xi$ [%]	0,40	$D = \xi$ [%]	1,08

Abbildung 4-3: Leere Brücke (Federn + Überbau), sowie gemessene Frequenzen und Dämpfungswerte (Lehrsche Dämpfung)

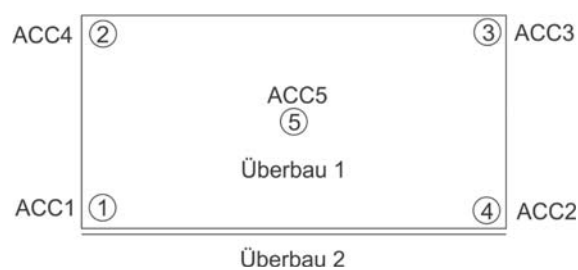
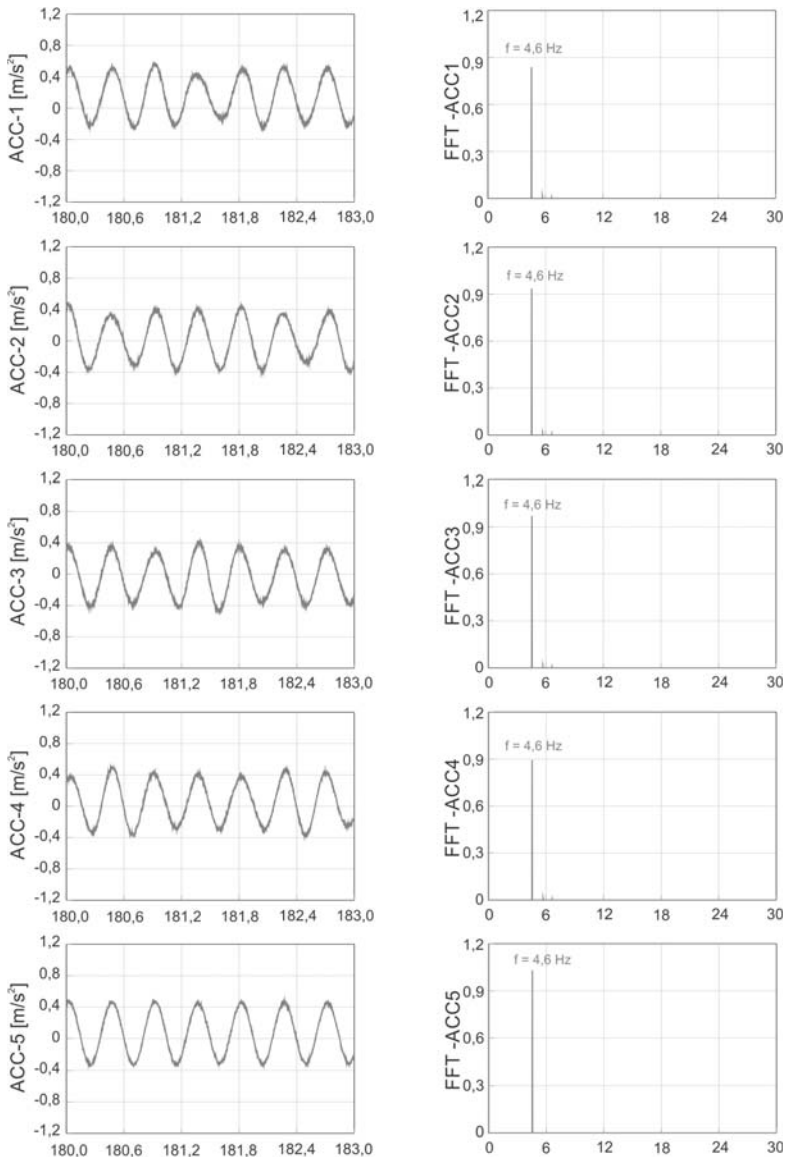


Abbildung 4-4: Messstellenplan leere Brücke

Die drei gemessenen Frequenzen lassen sich drei maßgeblichen Eigenformen zuordnen:  $f_1$  ist die Frequenz der vertikalen Verschiebung,  $f_2$  die Frequenz des Kippens in Querrichtung,  $f_3$  die des Kippens in Längsrichtung, siehe Abbildung 4-8. An-

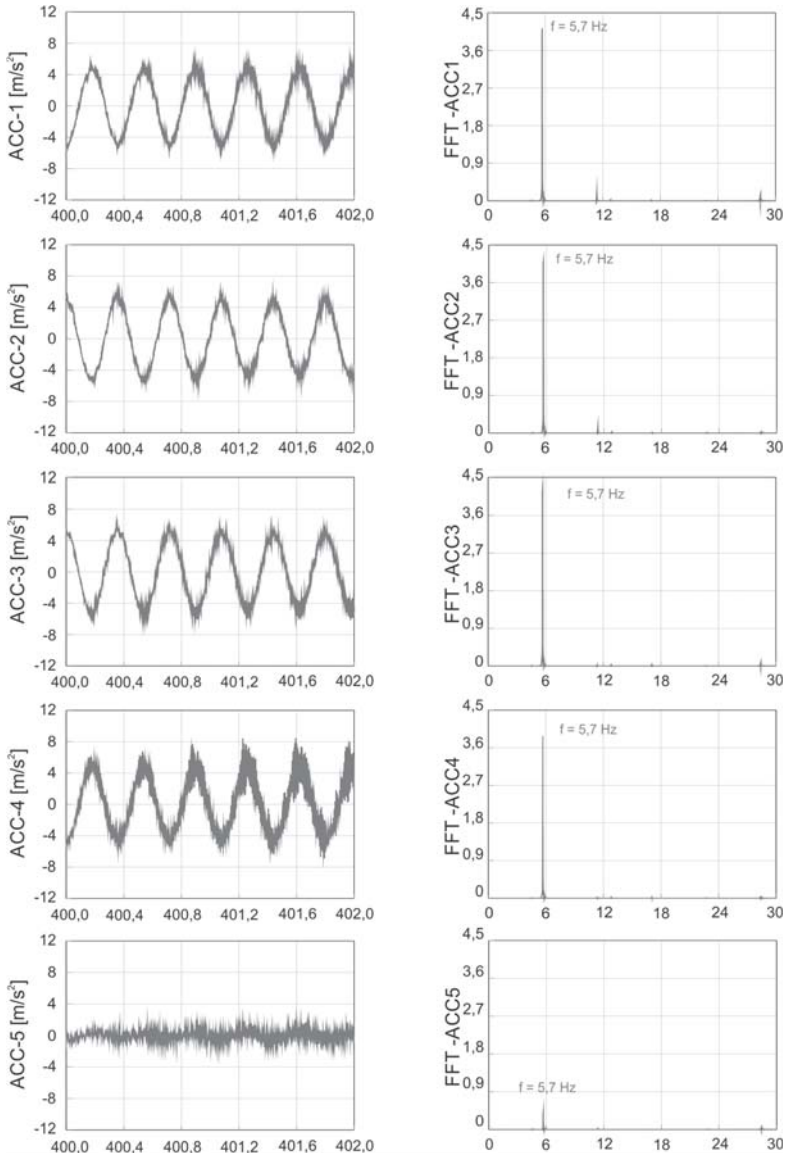
hand der in Abbildung 4-5 bis Abbildung 4-7 dargestellten Ausschwingvorgänge lässt sich lässt sich die jeweilige Modalform optisch erkennen. Bei einer rein vertikalen Verschiebung haben alle Messstellen nahezu identische Zeitverläufe. Beim Kippen in Querrichtung ergeben sich an den Messstellen1 und 4 bzw. 2 und 3 gleiche Verläufe, beim Kippen in Längsrichtung bewegen sich die Messstellen 1 und 2

gleich, sowie die Messstellen 3 und 4. Beim Kippen ergibt sich an Messstelle 5 eine minimale Verschiebung.



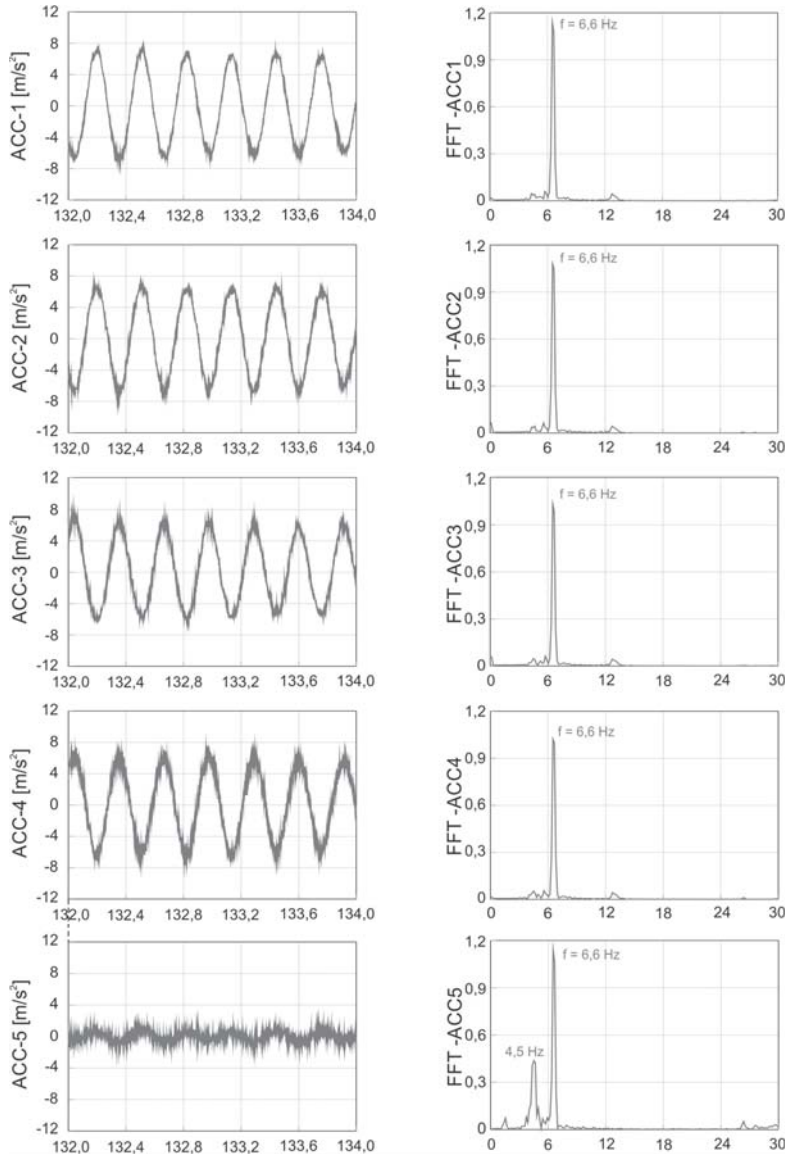
**Abbildung 4-5: Ausschnitte aus freien Ausschwingvorgängen (1. Eigenfrequenz  $f = 4,6 \text{ Hz}$ )**





**Abbildung 4-6: Ausschnitte aus freien Ausschwingvorgängen (2. Eigenfrequenz  $f=5,7$  Hz)**

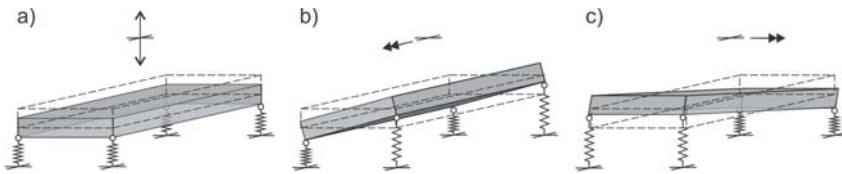
Für die später mit Schotter gefüllte Brücke sind insbesondere die Vertikalverschiebung und das Kippen in Querrichtung von Bedeutung. Die zugehörigen Dämpfungswerte sind sehr gering.



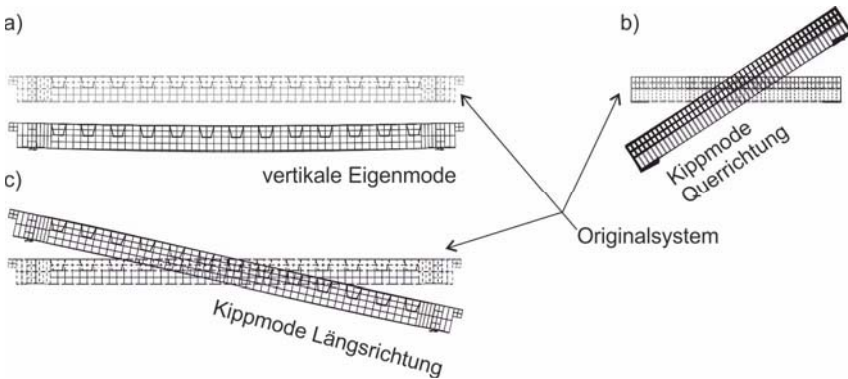
**Abbildung 4-7: Ausschnitte aus freien Ausschwingvorgängen (3. Eigenfrequenz  $f = 6,6 \text{ Hz}$ )**

Die gemessenen Werte lassen sich rechnerisch nachvollziehen. Eine Berechnung mit InfoCAD [Inf2014] liefert für ein Modell aus Schalenelementen die entsprechen-

den Frequenzen  $f_1 = 4,6 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 5,9 \text{ Hz}$  und  $f_3 = 6,9 \text{ Hz}$ . Damit ergeben sich Abweichungen von 0%, 4% und 5%. Die zugehörigen Eigenformen sind in Abbildung 4-9 dargestellt.

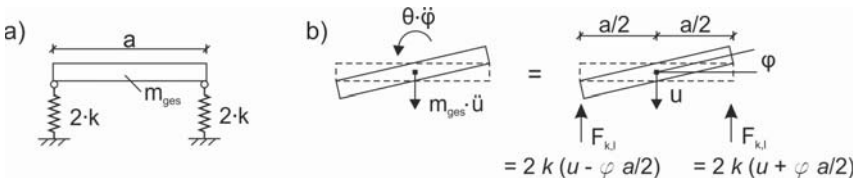


**Abbildung 4-8: Prinzipskizze maßgebende Eigenformen der Platte auf Federn a) vertikale Verschiebung b) Kippen quer c) Kippen längs**



**Abbildung 4-9: Eigenformen leere Brücke aus InfoCAD [Inf2014] Simulation: a) vertikale Eigenform ( $f_1 = 4,6 \text{ Hz}$ ), b) Eigenform Kippen in Querrichtung ( $f_2 = 5,9 \text{ Hz}$ ), c) Eigenform Kippen in Längsrichtung ( $f_3 = 6,9 \text{ Hz}$ )**

Auch eine händische Nachrechnung mit zweidimensionalen Modellen erzielt zufriedenstellende Ergebnisse. Allerdings ist zu beachten, dass in Realität die Masse der Fahrbahnplatten nicht gleichmäßig verteilt ist. Eine vereinfachte Darstellung mit einem idealisierten Balkenelement mit angenommener gleichmäßiger Massenverteilung (Abbildung 4-10) liefert das entkoppelte Differentialgleichungssystem in Gl. 4.4. Dabei werden jeweils zwei Federelemente zusammengefasst.



**Abbildung 4-10: a) idealisierte Platte auf Federn, b) „aufgeschnittenes“ System mit wirkenden Kräften**

Mit der Gesamtmasse  $m_{ges}$  und dem Massenträgheitsmoment  $\theta$  in Gl. 4.5 ergeben sich die beiden Eigenkreisfrequenzen  $\omega_1$  (Gl. 4.6) und  $\omega_2$  (Gl. 4.7). Da sich die Breite  $a$  des Balkens kürzen lässt und die Rotationsverformungen in Längs- und Querrichtung analog sind, ergeben sich in beiden Richtungen identische Kippfrequenzen. Für den hier gegebenen Fall ergeben sich bei dieser Rechnungsweise  $f_1 = 4,5$  Hz und  $f_2 = f_3 = 7,88$  Hz.

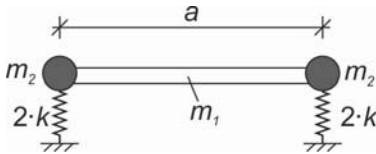
$$\begin{bmatrix} m_{ges} & \\ & \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & \\ & k \cdot a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \varphi \end{bmatrix} = 0 \quad \text{Gl. 4.4}$$

$$\theta = \frac{m_{ges}}{12} \cdot a^2 \quad \text{Gl. 4.5}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{4k}{m_{ges}}} \quad \text{Gl. 4.6}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k \cdot a^2}{\theta}} = \sqrt{\frac{12k}{m_{ges}}} \quad \text{Gl. 4.7}$$

Eine weitere Verfeinerung der Modelle unter Berücksichtigung der Massenverteilung ist in Abbildung 4-11 (Querrichtung) und Abbildung 4-12 (Längsrichtung) zu sehen.



**Abbildung 4-11: Handrechenmodell leere Brücke (Federn + Überbau) Querrichtung**

Hierbei wird die Masse genauer aufgeteilt, Gl. 4.4 bleibt gültig, es ergeben sich lediglich Änderungen bei den Massenträgheitsmomenten  $\theta$  (Querrichtung Gl. 4.8, Längsrichtung Gl. 4.10) und somit veränderte Kipp-Kreiseigenfrequenzen  $\omega_2$  (Querrichtung Gl. 4.9) und  $\omega_3$  (Längsrichtung Gl.

4.11), während  $\omega_1$  (Gl. 4.6) unverändert bleibt. In Anlehnung an die Bezeichnung der Messwerte, wird die Kippfrequenz in Querrichtung (Gl. 4.9) mit  $f_2$  bezeichnet, die in Längsrichtung (Gl. 4.11) mit  $f_3$ .

In Querrichtung ergeben sich direkt über den Federelementen zwei Punktmassen  $m_2 = 0,6$  t (Masse der Querträger, Anschlusskonstruktion und Lager),  $m_1 = 2,9$  t ist die verbleibende Restmasse. In Längsrichtung ergeben sich ebenfalls direkt über den Federelementen zwei Punktmassen  $m_2 = 0,4$  t (Masse der Längsträger, Anschlusskonstruktion und Lager), weiterhin werden die 13 Steifen als 13 Punktmassen

sen  $m_3 = 0,05$  t abgebildet, sowie der mit Dünnschicht bedeckte Bereich (vgl. Abbildung 4-13) als zwei Balkenelemente mit einer jeweiligen Masse  $m_4 = 0,3$  t. Daraus resultieren die Eigenfrequenzen  $f_1 = 4,5$  Hz,  $f_2 = 6,2$  Hz und  $f_3 = 6,5$  Hz und somit Abweichungen zu den Messergebnissen von -0,1 %, 10% und 1 %.

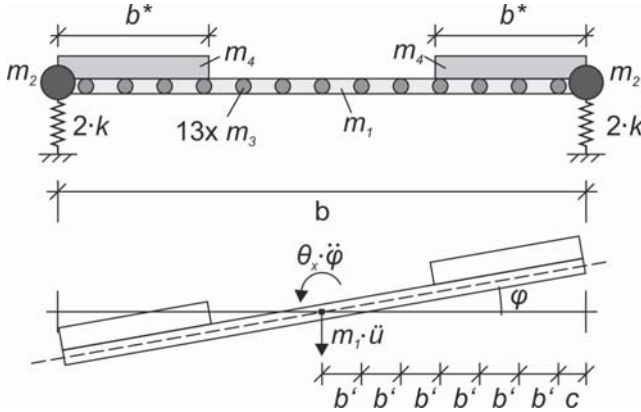


Abbildung 4-12: Handrechenmodell leere Brücke (Federn + Überbau) Längsrichtung

$$\theta_{quer} = m_1 \cdot \frac{a^2}{12} + 2 \cdot m_2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \text{Gl. 4.8}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k \cdot a^2}{\theta}} \quad \Rightarrow f_2 = \omega_2 / 2\pi \quad \text{Gl. 4.9}$$

$$\theta_{längs} = m_1 \cdot \frac{b^2}{12} + 2 \cdot \left\{ m_2 \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 + m_3 \cdot 91b^2 + m_4 \cdot \left[ \frac{b^{*2}}{12} + \left(\frac{b-b^*}{2}\right)^2 \right] \right\} \quad \text{Gl. 4.10}$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{k \cdot b^2}{\theta}} \quad \Rightarrow f_3 = \omega_3 / 2\pi \quad \text{Gl. 4.11}$$

Als nächstes wurden Stahlplatten zur Schottereinfassung hinzugefügt. Es ergibt sich je Überbau ein zusätzliches Gewicht von 0,6 t. Es wurden drei Wände mit einer jeweiligen Masse von 149 kg (kurze Seiten) bzw. 298 kg (lange Seite) eingebaut. Damit erhöht sich die Gesamtmasse auf 4,7 t. Erwartungsgemäß verringern sich die Frequenzen, siehe Abbildung 4-13.

In der Handrechnung wird die zusätzliche Masse wie folgt berücksichtigt: In Querrichtung kommt es zu einer horizontalen Verschiebung der Schwerelinie um den Betrag  $s$  in Richtung der zusätzlichen Last (siehe Abbildung 4-13). Hier ergibt sich

$s = 0,09 \text{ m}$ . Die zusätzlichen Massen der Stahlbleche an den kurzen Seiten werden  $m_1$  zugewiesen, in Summe ist  $m_1 = 3,2 \text{ t}$ . Die Masse der Bleche an der langen Seite ergeben mit dem  $m_2$  des Modells der reinen Brückenplatte ohne Stahlwand den Wert  $m_{2a} = 0,9 \text{ t}$ ,  $m_{2b} = m_2 = 0,6 \text{ t}$ . Durch Verschieben der Schwerelinie ergeben sich neue Gleichungen für das Bewegungsdifferentialgleichungssystem (Gl. 4.12), beim Massenträgheitsmoment (Gl. 4.13) und bei der Ermittlung der Kippfrequenzen (Gl. 4.14 und Gl. 4.15). Zur Vereinfachung der Gleichungen werden in Gl. 4.16 und Gl. 4.17 die Hilfswerte  $X_1$  und  $X_2$  eingeführt.

$f_1 \text{ [Hz]}$	4,3	$D = \xi \text{ [%]}$	0,101
$f_2 \text{ [Hz]}$	5,3		
$f_3 \text{ [Hz]}$	6,1		

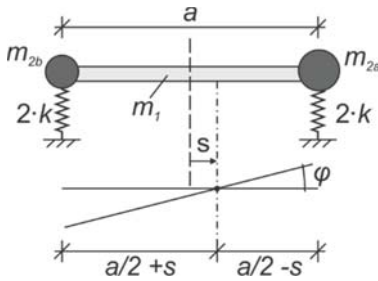


Abbildung 4-13: Leere Brücke (Federn + Überbau + Begrenzungsbox)

$$\begin{bmatrix} m_{ges} \\ \theta_{quer} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & -4k \cdot s \\ -4k \cdot s & k \cdot (a^2 + 4s^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \phi \end{bmatrix} = 0 \quad \text{Gl. 4.12}$$

$$\theta_{quer} = m_1 \cdot \frac{a^2}{12} + m_1 \cdot s^2 + m_{2a} \cdot \left( \frac{a}{2} - s \right)^2 + m_{2b} \cdot \left( \frac{a}{2} + s \right)^2 \quad \text{Gl. 4.13}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{0,5 \cdot X_1}{m_{ges} \cdot \theta} - \sqrt{\left( \frac{0,5 \cdot X_1}{m_{ges} \cdot \theta} \right)^2 - \frac{X_2}{m_{ges} \cdot \theta}}} \quad \Rightarrow f_1 = \omega_1 / 2\pi \quad \text{Gl. 4.14}$$

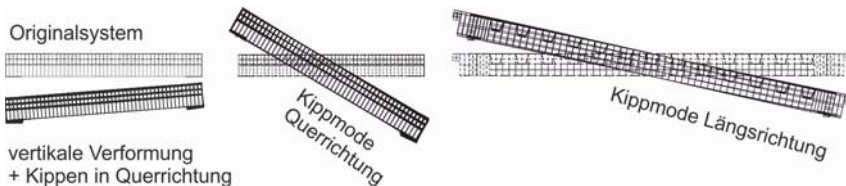
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{0,5 \cdot X_1}{m_{ges} \cdot \theta} + \sqrt{\left( \frac{0,5 \cdot X_1}{m_{ges} \cdot \theta} \right)^2 - \frac{X_2}{m_{ges} \cdot \theta}}} \quad \Rightarrow f_2 = \omega_2 / 2\pi \quad \text{Gl. 4.15}$$

$$X_1 = 4k \cdot \theta + m_{ges} \cdot k \cdot (a^2 + 4 \cdot s^2) \quad \text{Gl. 4.16}$$

$$X_2 = 4k^2 \cdot a^2 \quad \text{Gl. 4.17}$$

In Längsrichtung behalten Gl. 4.4, Gl. 4.10 und Gl. 4.11 ihre Gültigkeit, allerdings mit veränderten Massen ( $m_1 = 2,4 \text{ t}$  und  $m_2 = 0,5 \text{ t}$ ), wobei die Bleche an der langen Seite zu  $m_1$  gerechnet werden und die an den kurzen Seiten jeweils zu  $m_2$ . Für die Brücke mit den Stahlwänden lassen sich so vereinfacht die Frequenzen  $f_1 = 4,2 \text{ Hz}$  (Gl. 4.14),  $f_2 = 5,8 \text{ Hz}$  (Gl. 4.15) und  $f_3 = 6,0 \text{ Hz}$  (Gl. 4.11) ermitteln, es ergeben sich jeweils Abweichungen von 1 %, 9 % und -2 %.

Auch hier wird eine FE-Simulation mit InfoCAD [Inf2014] durchgeführt. Da die Stahlbleche so angebracht wurden, dass sie keinen signifikanten Beitrag zur Systemsteifigkeit liefern, können sie im Modell als zusätzliche Punktmassen idealisiert werden. Es ergeben sich die Frequenzen  $f_1 = 4,3 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 5,5 \text{ Hz}$  und  $f_3 = 6,3 \text{ Hz}$  mit Abweichungen von 0 %, 4 % und 3 % zu den gemessenen Werten. Die zugehörigen Eigenformen sind in Abbildung 4-13 dargestellt. Es zeigt sich, dass die erste Eigenform nicht mehr eine rein-vertikale Verschiebung darstellt und die zweite Eigenform keine reine Verdrehung um den geometrischen Mittelpunkt der Platte ist. In beiden Fällen liegt eine Kombination aus Verschiebung und Kippen in Querrichtung vor. Grund dafür ist die Verlagerung der Schwerelinie in Querrichtung. Die dritte Eigenform bleibt in ihrer Form gleich.



**Abbildung 4-14: Eigenformen leere Brücke mit Stahlbox aus InfoCAD [Inf2014] Simulation:** a) vertikale Eigenform ( $f_1 = 4,3 \text{ Hz}$ ), b) Eigenform Kippen in Querrichtung ( $f_2 = 5,5 \text{ Hz}$ ), c) Eigenform Kippen in Querrichtung ( $f_3 = 6,3 \text{ Hz}$ )

#### 4.2.2 Brücke mit vollständigem Schotterbett (Koppelleffekt)

Der Einbau von Schotter, Schwellen und Schienen erfolgte in mehreren Abschnitten. Zunächst wurde der Schotter bis zu einer Einfüllhöhe von 34 cm eingefüllt und verdichtet. Abbildung 4-16 a zeigt den Bereich der Koppelfuge nach dem Verdichten des Schotters. Anschließend wurden Schwellen und Schienen mithilfe eines Autokrans eingehoben, siehe Abbildung 4-16 b.



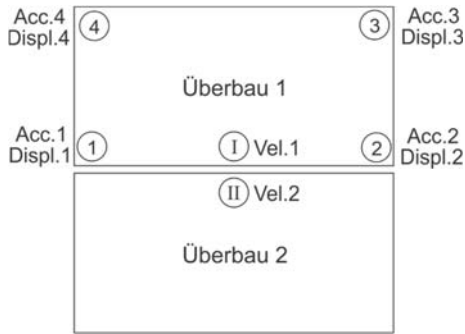


Abbildung 4-15 Messstellenplan

Auf jedem Überbau befinden sich 10 Betonschwellen B70 W60 (Abstand von Schwellenmitte bis Schwellenmitte: 60 cm), wobei jede Schwelle ein Gesamtgewicht von 288 kg inkl. Befestigung aufweist. Anschließend wurde weiterer Schotter bis zu einer Füllhöhe von 55 cm eingefüllt und erneut verdichtet.

Die Lastanregung erfolgte mit dem beschriebenen Unwuchterreger und durch Hüpfen. Es wurden Beschleunigungs-, Geschwindigkeits- und Weg-

Zeitverläufe an den in Abbildung 4-15 gegebenen Messpunkten in vertikaler Richtung erfasst.



Abbildung 4-16 a) Bereich Koppelfuge ohne Schwellen und Schienen, b) Einbau Schwellen und Schienen c) Unwuchterreger auf Überbau 1 d) Fugenbereich im fertigen Zustand

In Abbildung 4-17 werden exemplarisch die entsprechenden Zeitverläufe einer Anregung mittels Unwuchterreger mit  $f = 2,47$  Hz und  $m_{St} = 1,26$  kgm dargestellt. Entsprechend Gl. 4.3 ergibt sich so eine Lastamplitude  $|F| = 303$  N.



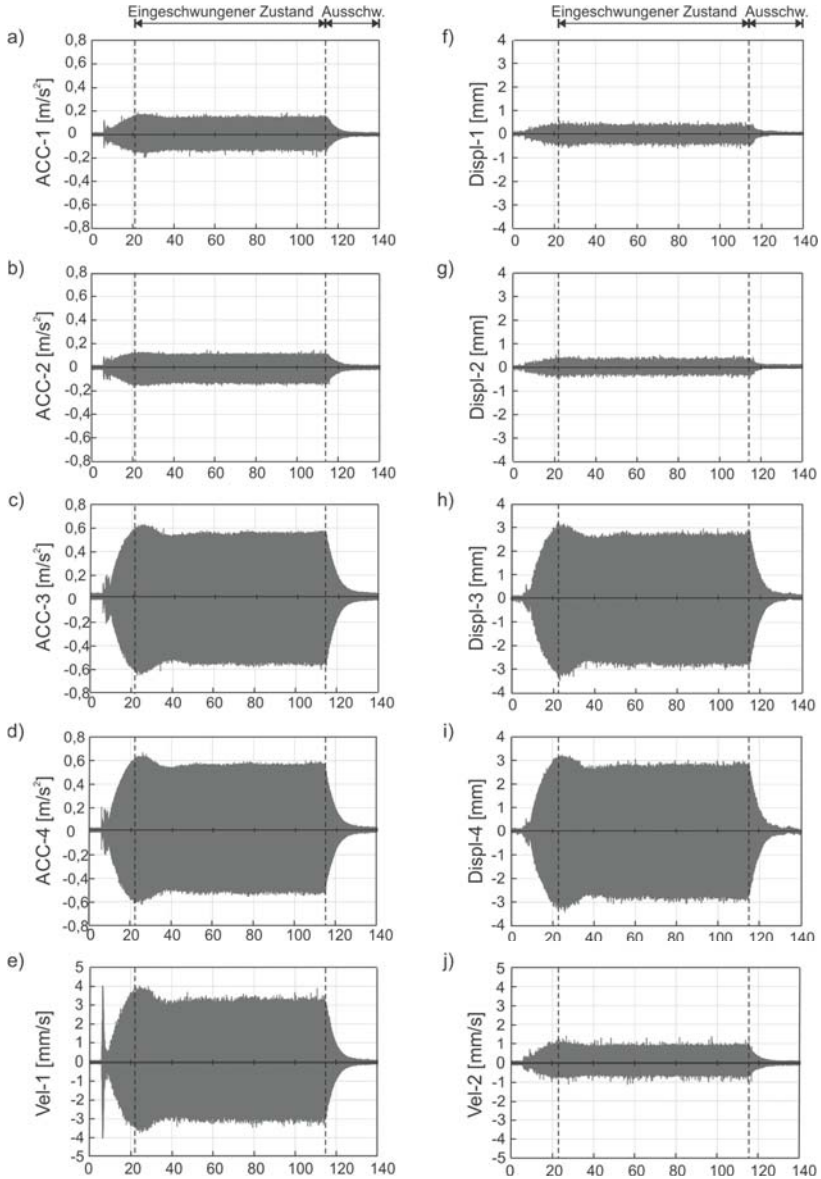
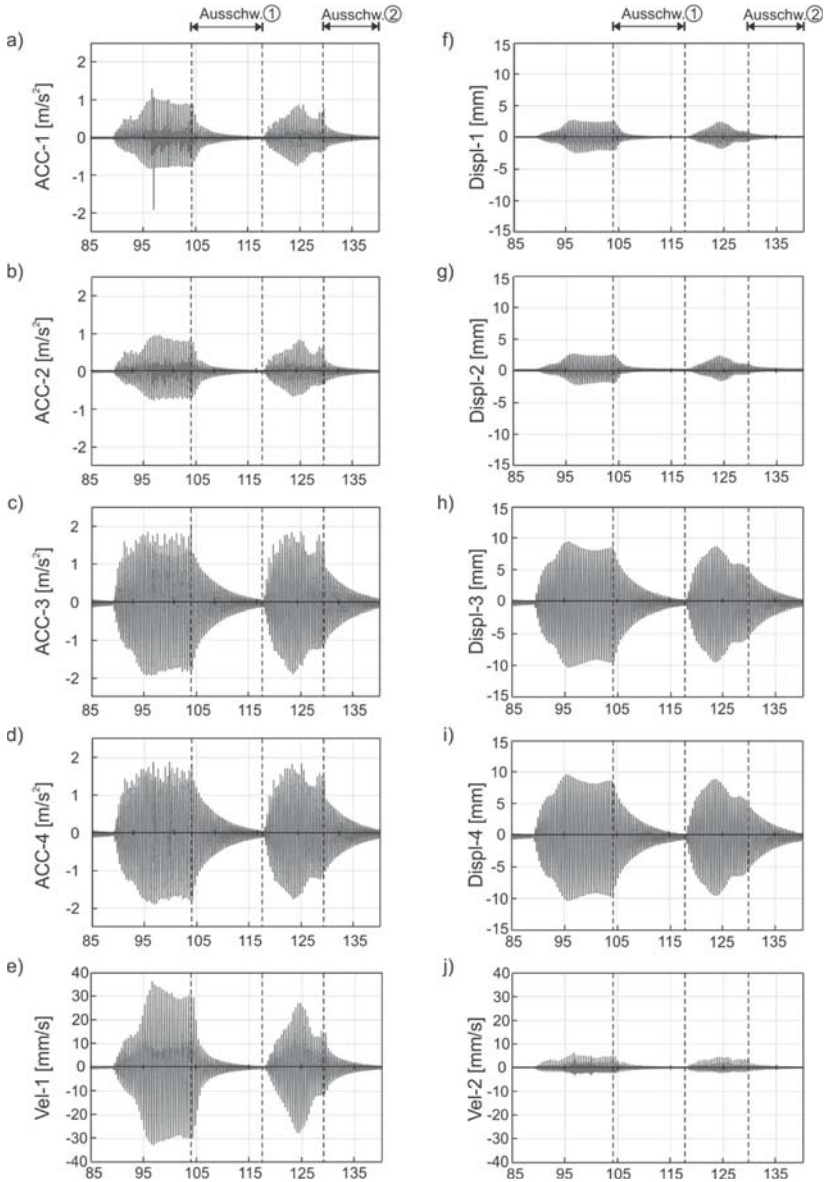


Abbildung 4-17 Gemessene Zeit-Verläufe bei einer Anregung mit 2,47 Hz und  $|F| = 303$  N



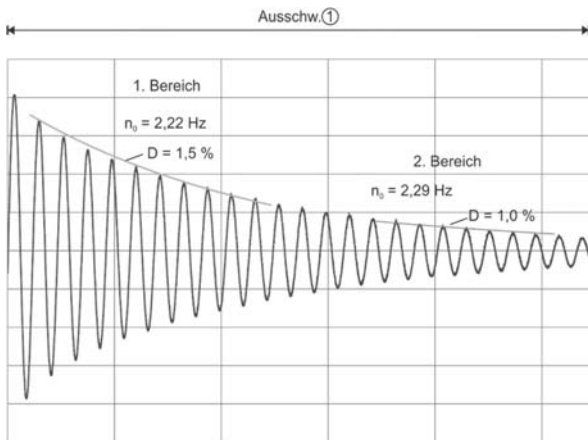
**Abbildung 4-18** Gemessene Zeit-Verläufe bei einer Anregung durch Hüpfen

In Abbildung 4-18 werden exemplarisch zwei entsprechende Verläufe bei einer Anregung durch Hüpfen gezeigt. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgen die Eigenfrequenz-

und Dämpfungsermittlung aus der Analyse der Ausschwingvorgänge, um die Ergebnisse infolge der beiden Anregungsarten miteinander vergleichen zu können.

Zunächst einmal zeigt sich in Abbildung 4-17 und Abbildung 4-18, dass lediglich relativ kleine Beschleunigungs-, Geschwindigkeits- und Wegamplituden erzeugt werden. Erwartungsgemäß sinken die ermittelten Frequenzen aufgrund der zusätzlichen Masse des Schotters.

Aus der Analyse der Ausschwingvorgänge ergibt sich eine gemittelte Eigenfrequenz von 2,4 Hz. Tabelle 4-2 und Tabelle 4-3 zeigen die an den jeweiligen Messpunkten aus Abbildung 4-15 ermittelten Frequenzen. In Tabelle 4-2 werden fünf Versuche mit Anregung durch Hüpfen gegenübergestellt. Abbildung 4-18 zeigt exemplarisch die ersten beiden Versuche. In Tabelle 4-3 werden die Ergebnisse von 21 Versuchen mit Lastanregung durch den Unwuchterreger gezeigt,  $f$  ist dabei die jeweilige Erregerfrequenz im Versuch. In Abbildung 4-17 wird dementsprechend der fünfte Versuch aus Tabelle 4-3 dargestellt.



**Abbildung 4-19** Verschiedene Auswertungsbereiche Versuch Nr. 1 Displ 4

In Abbildung 4-19 ist der mit Wegsensor DISPL 4 erfasste Ausschwingvorgang von Versuch Nr. 1 dargestellt. Es konnten zwei Bereiche mit leicht unterschiedlichen Frequenzen und Dämpfungswerten identifiziert werden. Bei fast allen

Ausschwingvorgängen nach Anregung durch Hüpfen ergaben sich zwei solcher Bereiche.

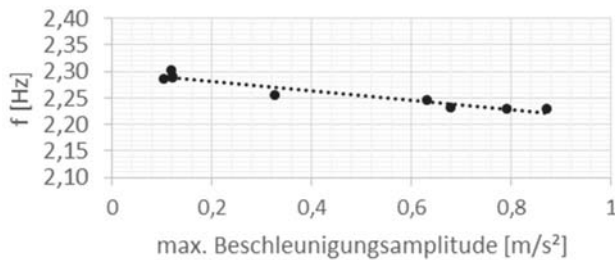
Bei den Ausschwingvorgängen nach Anregung

durch den Unwuchterreger ergaben sich in einigen Zeitverläufen bis zu vier Bereiche mit leicht unterschiedlichen Frequenzen und Dämpfungswerten, während bei einigen Ausschwingvorgängen jeweils nur ein einzelner Bereich identifiziert wurde. Die jeweiligen Frequenzen werden in Abbildung 4-20 bis Abbildung 4-39 in Abhängigkeit ihrer maximalen Schwingungsamplitude dargestellt.

Die Tendenz einer geringfügigen Schwingungsamplitudenabhängigkeit ist bei den ermittelten Frequenzen erkennbar und zwar nimmt die Eigenfrequenz mit der Amplitude ab.

**Tabelle 4-2: Ermittelte Frequenzen [Hz] aus Ausschwingen nach Anregung durch Hüpfen**

Versuch Nr.	ACC1	ACC2	ACC3	ACC4	VEL1	VEL2	DISPL1	DISPL2	DISPL3	DISPL4
1	2,23	2,23	2,22	2,22	2,22	2,22	2,24	2,23	2,22	2,22
	2,29	2,29	2,29	2,29	2,28	2,29	2,29	2,28	2,29	2,29
2	2,26	2,26	2,26	2,26	2,26	2,26	2,24	2,26	2,26	2,26
	-	-	-	-	-	-	2,30	-	-	-
3	2,25	2,25	2,23	2,23	2,25	2,24	2,26	2,25	2,23	2,23
	2,29	2,29	2,28	2,28	2,28	2,29	2,29	2,28	2,28	2,28
4	2,23	2,23	2,23	2,23	2,24	2,23	2,24	2,24	2,23	2,23
	2,30	2,30	2,30	2,30	2,30	2,30	2,30	2,30	2,30	2,29
5	2,23	2,23	2,22	2,22	2,23	2,23	2,23	2,24	2,22	2,22
	2,29	2,29	2,29	2,29	2,29	2,29	2,29	2,29	2,29	2,29
Mittelwert	2,26	2,26	2,26	2,26	2,26	2,26	2,27	2,26	2,26	2,26



**Abbildung 4-20 Frequenzen ACC1 nach Hüpfen**

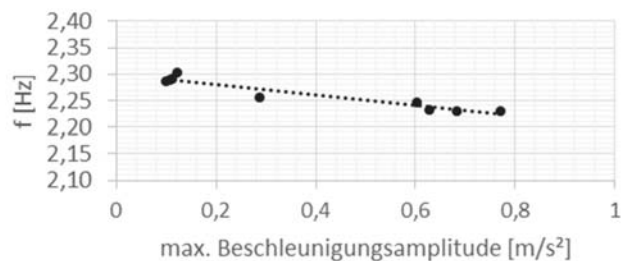


Abbildung 4-21 Frequenzen ACC2 nach Hüpfen

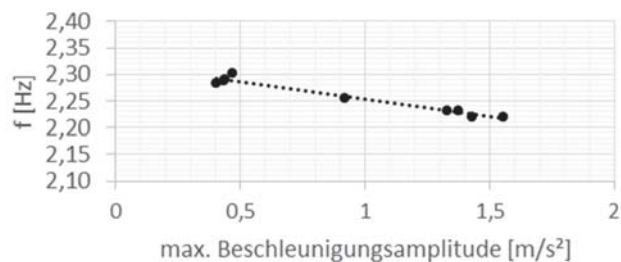


Abbildung 4-22 Frequenzen ACC3 nach Hüpfen

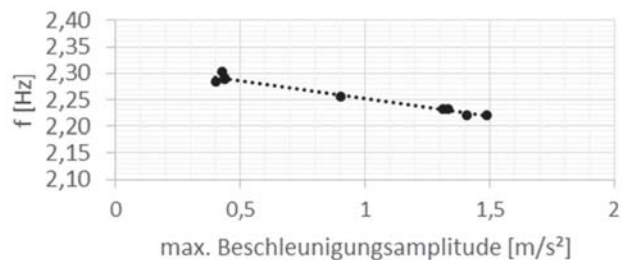


Abbildung 4-23 Frequenzen ACC4 nach Hüpfen

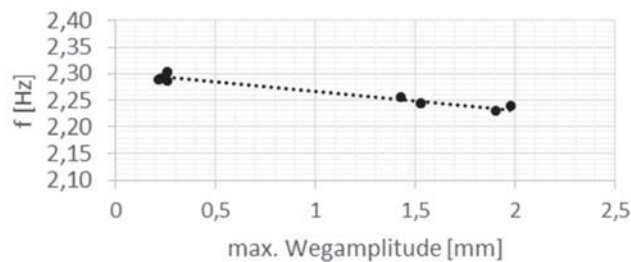


Abbildung 4-24 Frequenzen DIS1 nach Hüpfen

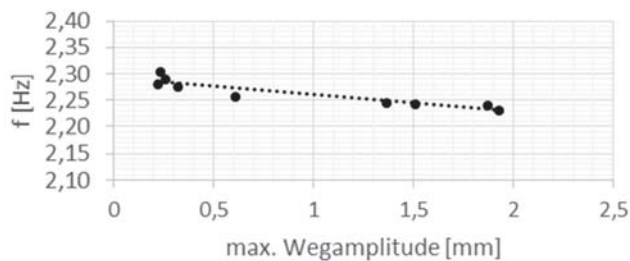


Abbildung 4-25 Frequenzen DIS2 nach Hüpfen

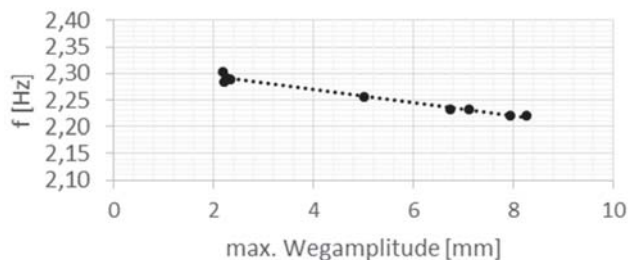


Abbildung 4-26 Frequenzen DIS3 nach Hüpfen

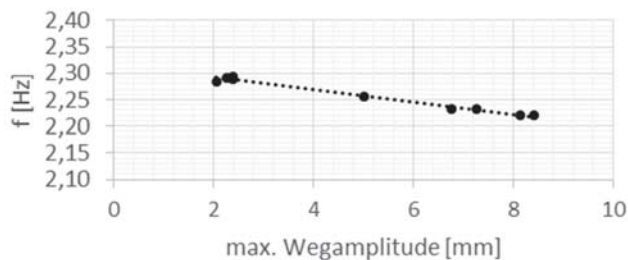


Abbildung 4-27 Frequenzen DIS4 nach Hüpfen

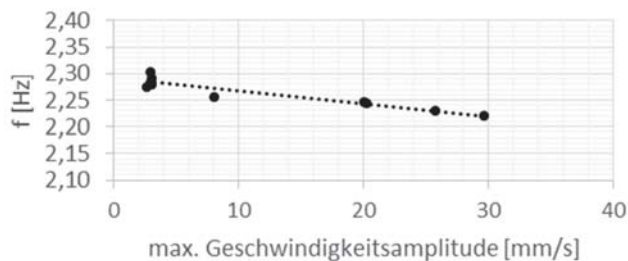


Abbildung 4-28 Frequenzen VEL1 nach Hüpfen

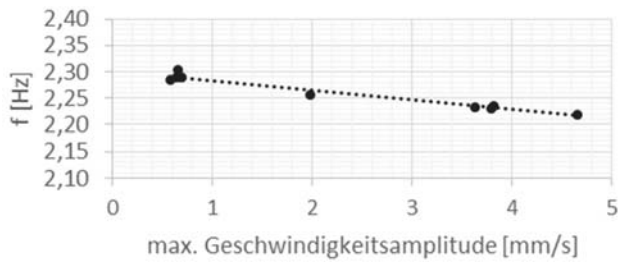


Abbildung 4-29 Frequenzen VEL2 nach Hüpfen

Tabelle 4-3: Ermittelte Frequenzen [Hz] aus Ausschwingen nach Anregung mit Unwucht

f [Hz]	ACC1	ACC2	ACC3	ACC4	VEL1	VEL2	DISPL1	DISPL2	DISPL3	DISPL4
2,37	2,46	2,46	2,45	2,45	2,45	2,45	2,45	2,46	2,46	2,45
2,39	2,43	2,43	2,43	2,43	2,43	2,45	2,43	2,42	2,42	2,42
2,42	2,41	2,40	2,40	2,40	2,40	2,41	2,41	2,43	2,40	2,41
	2,46	2,47	2,46	2,46	2,46	2,48	2,46	2,48	2,46	2,47
	2,50	2,51	2,50	2,51	2,51	2,51	2,65	2,50	2,51	2,51
	2,53	2,52	2,52	2,52	2,53	2,53	2,10	2,53	2,53	2,52
2,45	2,39	2,40	2,38	2,38	2,38	2,39	2,30	2,39	2,38	2,37
	2,45	2,47	2,45	2,45	2,46	2,46	2,38	2,46	2,45	2,45
2,47	2,51	2,32	2,50	2,50	2,50	-	2,45	2,51	2,50	2,49
	2,32	2,39	2,31	2,32	2,31	2,31	2,32	2,31	2,31	2,31
	2,38	2,46	2,39	2,38	2,38	2,38	2,39	2,38	2,38	2,38
2,50	2,45	2,31	2,46	2,45	2,45	2,45	2,35	2,46	2,45	2,45
	2,31	2,38	2,31	2,31	2,31	2,31	2,42	2,32	2,31	2,31

$f$ [Hz]	ACC1	ACC2	ACC3	ACC4	VEL1	VEL2	DISPL1	DISPL2	DISPL3	DISPL4
2,53	2,38	2,35	2,38	2,38	2,38	2,37	2,37	2,38	2,38	2,38
	2,35	2,42	2,35	2,35	2,35	2,36	2,45	2,36	2,35	2,35
2,55	2,42	2,36	2,42	2,42	2,42	2,42	2,38	2,43	2,42	2,42
	2,36	2,43	2,36	2,36	2,36	2,36	2,45	2,36	2,36	2,37
2,58	2,43	2,37	2,43	2,43	2,43	2,43	2,50	2,44	2,43	2,44
	2,38	2,45	2,38	2,38	2,38	2,38	2,40	2,38	2,38	2,38
	2,45	2,50	2,45	2,45	2,45	2,45	2,46	2,45	2,45	2,45
2,61	2,51	2,40	2,50	2,50	2,50	2,51	2,42	2,16	2,50	2,50
	2,41	2,46	2,39	2,39	2,39	2,41	2,44	2,40	2,40	2,39
2,63	2,47	2,40	2,46	2,46	2,46	2,47	2,42	2,47	2,46	2,46
2,66	2,41	2,43	2,40	2,41	2,40	2,40	2,42	2,41	2,40	2,41
2,68	2,43	2,41	2,43	2,44	2,43	2,43	2,44	2,43	2,43	2,45
2,71	2,42	2,43	2,44	2,42	2,44	2,42	-	2,43	2,43	2,42
2,74	2,43	2,43	2,42	2,42	2,42	2,43	2,41	2,43	2,43	2,43
2,76	2,42	2,44	2,42	2,42	2,43	2,43	-	-	2,42	2,42
2,79	2,44	2,42	2,44	2,44	2,42	2,44	-	2,39	2,44	2,43
2,89	2,42	2,44	2,42	2,42	2,43	2,42	-	-	2,42	2,42
3,03	2,44	2,44	2,43	2,44	2,43	2,44	-	-	2,44	2,44
3,16	2,44	2,47	2,45	2,45	2,45	2,44	-	-	2,45	2,45
3,29	-	-	2,46	2,46	2,45	2,47	-	-	2,47	2,46



$f$ [Hz]	ACC1	ACC2	ACC3	ACC4	VEL1	VEL2	DISPL1	DISPL2	DISPL3	DISPL4
Mittelwert	2,43	2,42	2,42	2,42	2,42	2,43	2,41	2,41	2,42	2,42

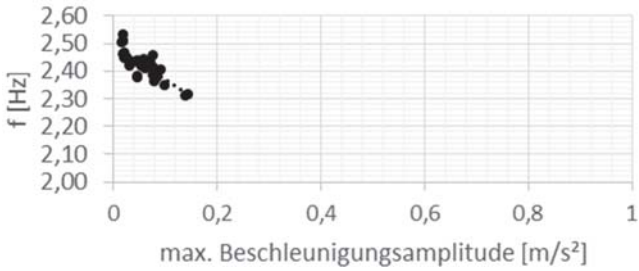


Abbildung 4-30 Frequenzen ACC1 nach Anregung mit Unwucht

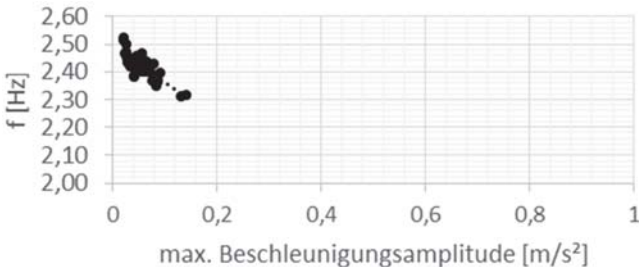


Abbildung 4-31 Frequenzen ACC2 nach Anregung mit Unwucht

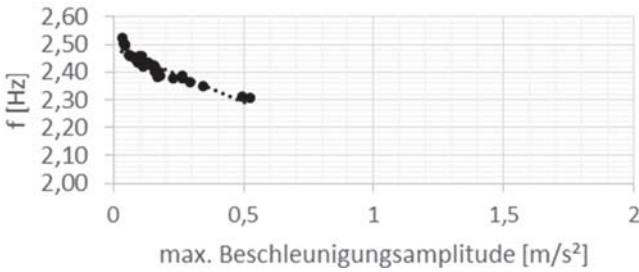


Abbildung 4-32 Frequenzen ACC3 nach Anregung mit Unwucht

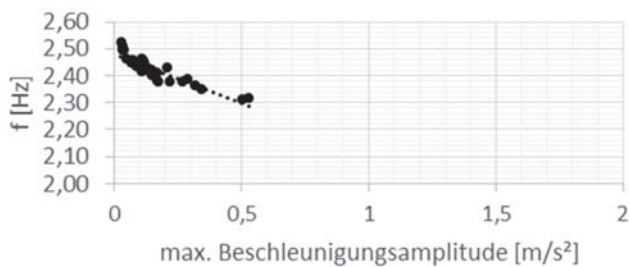


Abbildung 4-33 Frequenzen ACC4 nach Anregung mit Unwucht

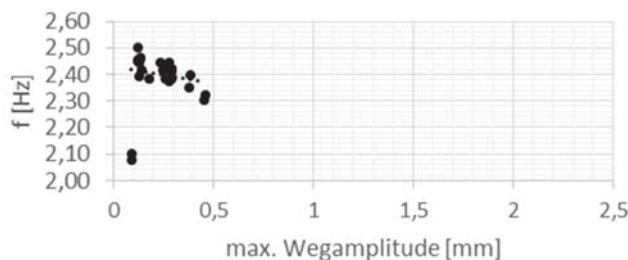


Abbildung 4-34 Frequenzen DIS1 nach Anregung mit Unwucht

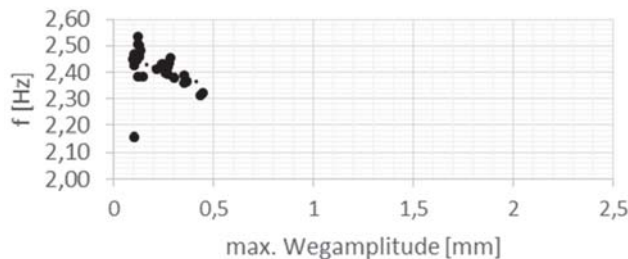


Abbildung 4-35 Frequenzen DIS2 nach Anregung mit Unwucht

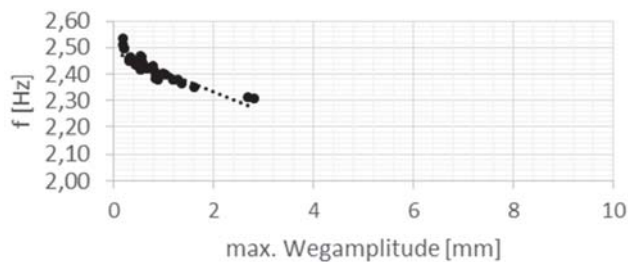


Abbildung 4-36 Frequenzen DIS3 nach Anregung mit Unwucht

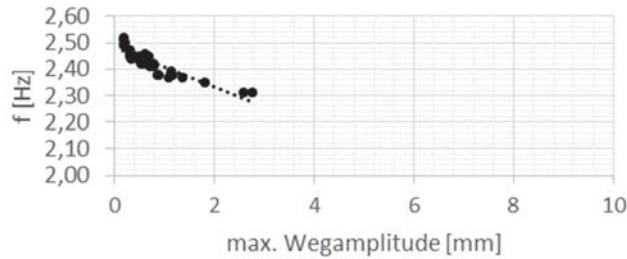


Abbildung 4-37 Frequenzen DIS4 nach Anregung mit Unwucht

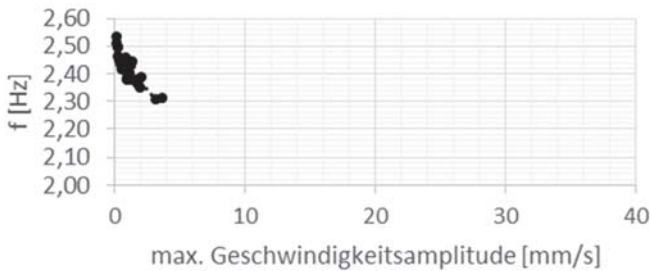


Abbildung 4-38 Frequenzen VEL1 nach Anregung mit Unwucht

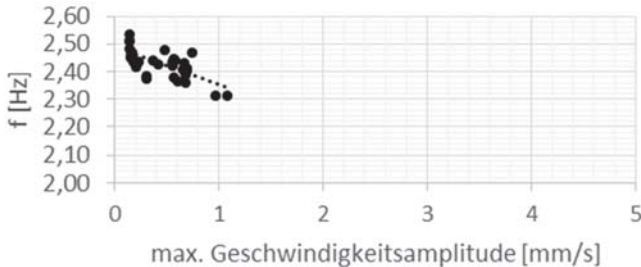
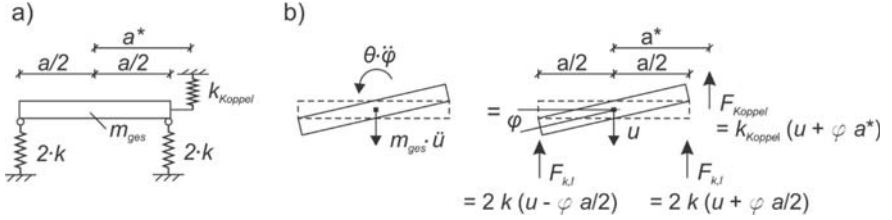


Abbildung 4-39 Frequenzen VEL2 nach Anregung mit Unwucht

Zur Verifizierung der gemessenen Ereignisse wird auch für die mit Schotter gefüllte Brücke ein zweidimensionales Modell verwendet. Durch den überwiegenden Einfluss der verteilten Masse von Schotterbett, Schienen und Schwellen kann eine gleichmäßig verteilte Masse gemäß Abbildung 4-10 verwendet werden. Dieses System wird um eine weitere Feder mit der Federsteifigkeit  $k_{Koppel}$  zur Abbildung des Beitrages des Schotters in der Fuge ergänzt, siehe Abbildung 4-40.



**Abbildung 4-40:** a) idealisierte Platte auf Federn, b) „aufgeschnittenes“ System mit wirkenden Kräften

Der Zusammenhang zwischen der einzelnen Feder mit der Federsteifigkeit  $k_{Koppel}$  [MN/m] und den Abmessungen der Koppelfuge (Länge  $L$  x Einbauhöhe  $h_{Schotter}$ ) ergibt sich gemäß [Rau2011a] über die Koppelsteifigkeit  $c_{coup}$  [MN/m<sup>3</sup>] nach Gl. 4.18.

$$k_{Koppel} = c_{coup} \cdot h_{Schotter} \cdot L \quad \text{Gl. 4.18}$$

Durch Lösung des Bewegungs-DGL-Systems in Gl. 4.19 lassen sich die ersten beiden Frequenzen anhand Gl. 4.20 und Gl. 4.21 ermitteln. Zur Vereinfachung der Gleichungen werden in Gl. 4.22 und Gl. 4.23 die Hilfswerte  $X_1$  und  $X_2$  eingeführt.

$$\begin{bmatrix} m_{ges} \\ \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (4k + k_{Koppel}) & (-k_{Koppel} \cdot a^*) \\ (-k_{Koppel} \cdot a^*) & (k \cdot a^2 + k_{Koppel} \cdot a^{*2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \varphi \end{bmatrix} = 0 \quad \text{Gl. 4.19}$$

$$\omega_1 = \frac{0,5 \cdot X_1}{m_{ges} \cdot \theta} - \sqrt{\left( \frac{0,5 \cdot X_1}{m_{ges} \cdot \theta} \right)^2 - \frac{X_2}{m_{ges} \cdot \theta}} \quad \Rightarrow f_1 = \omega_1 / 2\pi \quad \text{Gl. 4.20}$$

$$\omega_2 = \frac{0,5 \cdot X_1}{m_{ges} \cdot \theta} + \sqrt{\left( \frac{0,5 \cdot X_1}{m_{ges} \cdot \theta} \right)^2 - \frac{X_2}{m_{ges} \cdot \theta}} \quad \Rightarrow f_2 = \omega_2 / 2\pi \quad \text{Gl. 4.21}$$

$$X_1 = \theta \cdot (4k + k_{Koppel}) + m_{ges} \cdot (k \cdot a^2 + k_{Koppel} \cdot a^{*2}) \quad \text{Gl. 4.22}$$

$$X_2 = (4k + k_{Koppel}) \cdot (k \cdot a^2 + k_{Koppel} \cdot a^{*2}) - (k_{Koppel} \cdot a^*)^2 \quad \text{Gl. 4.23}$$

Die Gesamtmasse  $m_{ges}$  ergibt sich zu 25,2 t, das Massenträgheitsmoment  $\theta$  wird nach Gl. 4.5 zu 16,3 tm<sup>2</sup> ermittelt. Die Steifigkeiten der Federelemente beträgt jeweils  $k = 0,841$  MN/m. Mit dem von [Rau2011a] ermittelten Wert  $c_{coup} = 4,35$  MN/m<sup>3</sup> lässt sich für die hier vorliegende Koppelfuge mit einer Fläche von 0,55 x 6 m<sup>2</sup> ein

Wert  $k_{Koppel} = 14,4 \text{ MN/m}$  als Ausgangswert für eine Berechnung ermitteln. Die erste Eigenfrequenz lautet dann gemäß Gl. 4.20  $f_1 = 2,12 \text{ Hz}$ .

Da sich im Versuch eine leichte Schiefstellung der beiden Federelemente im Fugenbereich ergab, hatten diese Kontakt mit ihren Lagerkonstruktionen, welche bei den Leermessungen noch nicht vorlag (siehe z.B. Abbildung 4-3). Die Steifigkeit der Federelemente wird dadurch ungefähr im Verhältnis von freier Federlänge zu gestützter Federlänge erhöht, was hier einer Erhöhung um etwa 46 % entspricht. Zur Nachrechnung der Versuche wurde eine Erhöhung aller vier Federsteifigkeiten um 23 % von jeweils  $k = 0,841 \text{ MN/m}$  auf  $k = 1,034 \text{ MN/m}$  angenommen. Es ergibt sich eine Eigenfrequenz von  $f_1 = 2,34 \text{ Hz}$ , was sehr gut mit den gemessenen Werten übereinstimmt. Eine Variation der Koppelsteifigkeit  $k_{Koppel}$  kann die beobachteten (schwingungsamplitudenabhängigen) Unterschiede bei den gemessenen Frequenzen nicht erklären, da das System wenig auf Änderungen der bereits sehr hohen Koppelsteifigkeit reagiert. Eine Berücksichtigung eines Eingangswertes von  $10.000 \times c_{coup}$  kann beispielsweise die berechnete Eigenfrequenz von 2,34 Hz auf 2,36 Hz erhöhen. Eine Reduktion von  $c_{coup}$  auf 1 ‰ reduziert die Eigenfrequenz allerdings auf 2,04 Hz. (Eine Vernachlässigung der Koppelwirkung führt übrigens zu einer Eigenfrequenz  $f_1 = 1,8 \text{ Hz}$ ). Zukünftige Versuche sollten in jedem Fall mit einer in ihren Abmessungen reduzierten Koppelfuge durchgeführt werden, um etwaige Schwingungsamplitudenabhängigkeiten zu identifizieren und Messungenauigkeiten auszuschließen.

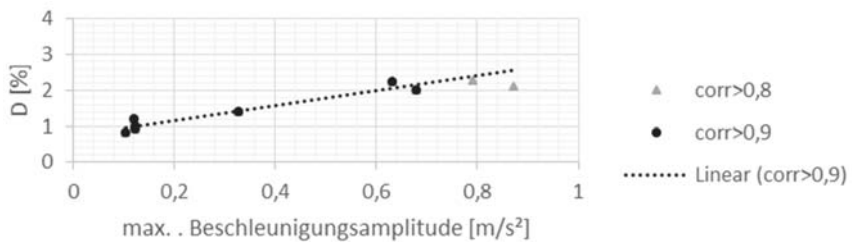
Wie bereits anhand Abbildung 4-19 visualisiert, können sich innerhalb eines Ausschwingvorganges einzelne Bereiche mit leicht unterschiedlichen Eigenfrequenzen ergeben. Von jedem identifizierten Bereich sind Eigenfrequenz und die maximale Schwingungsamplitude (siehe  $A_n$  in Abbildung 2-21) bekannt. Zur Ermittlung der zugehörigen Dämpfungswerte wurde ausgehend von Amplitude und Eigenfrequenz eine Vielzahl künstlicher Abklingkurven generiert mit unterschiedlichen Dämpfungswerten, welche dann jeweils mit der gemessenen Zeitreihe kreuzkorreliert wurden. Für jede Kombination aus Messreihe und künstlicher Zeitreihe wurde der größte Korrelationsfaktor ermittelt. Der größte Korrelationsfaktor sämtlicher Kombinationen ist demnach der gemessenen Zeitreihe am „ähnlichsten“ und wird nachfolgend verwendet.

Die so ermittelten Dämpfungswerte werden in Tabelle 4-4 und Tabelle 4-5 gegeben, bzw. werden in Abbildung 4-41 bis Abbildung 4-60 in Abhängigkeit der jeweiligen maximalen Schwingungsamplitude des betrachteten Bereiches des Ausschwingvorgangs dargestellt. Die aus den Ausschwingvorgängen nach Anregung durch Hüpfen ermittelten Dämpfungswerte erreichten alle Korrelationen über 0,8. Die Dämpfungswerte mit Korrelationen über 0,9 sind in Tabelle 4-4 hervorgehoben. Die

Korrelationswerte der aus den Ausschwingvorgängen nach Anregung mit dem Unwuchterreger ermittelten Dämpfungswerte sind teilweise deutlich geringer. In Tabelle 4-5 werden nur die Dämpfungswerte angegeben, die eine Korrelation über 0,8 erreicht haben, wobei die Werte mit Korrelationen über 0,9 wieder hervorgehoben worden sind.

**Tabelle 4-4: Ermittelte Dämpfungen [%] aus Ausschwingen nach Anregung durch Hüpfen**

Ver- such Nr.	ACC1	ACC2	ACC3	ACC4	VEL1	VEL2	DISPL1	DISPL2	DISPL3	DISPL4
1	2,1	2,2	<b>1,6</b>	<b>1,3</b>	3,2	1,2	3,2	3,2	<b>1,5</b>	<b>1,5</b>
	<b>1,0</b>	<b>1,0</b>	<b>1,5</b>	<b>0,9</b>	<b>1,7</b>	<b>0,7</b>	<b>2,2</b>	<b>1,8</b>	<b>0,9</b>	<b>1,0</b>
2	<b>1,4</b>	<b>1,5</b>	<b>1,2</b>	<b>1,2</b>	<b>1,8</b>	<b>0,9</b>	<b>2,8</b>	<b>1,8</b>	<b>1,3</b>	<b>1,3</b>
	-	-	-	-	-	-	1,4	-	-	-
3	<b>2,3</b>	1,8	<b>1,3</b>	<b>1,3</b>	<b>3,2</b>	0,9	<b>2,2</b>	<b>2,9</b>	<b>1,3</b>	<b>1,6</b>
	<b>0,8</b>	<b>0,9</b>	<b>0,8</b>	<b>0,8</b>	<b>1,5</b>	<b>0,6</b>	<b>0,8</b>	<b>1,8</b>	<b>0,8</b>	<b>1,4</b>
4	<b>2,0</b>	<b>1,9</b>	<b>1,4</b>	<b>1,4</b>	<b>2,8</b>	1,1	<b>2,8</b>	<b>2,2</b>	<b>1,6</b>	<b>1,3</b>
	<b>1,2</b>	<b>1,3</b>	<b>1,2</b>	<b>1,2</b>	<b>1,4</b>	<b>0,9</b>	1,4	<b>1,4</b>	<b>1,9</b>	<b>1,2</b>
5	2,3	2,2	<b>1,7</b>	<b>1,4</b>	<b>3,2</b>	1,2	3,2	<b>3,0</b>	<b>1,9</b>	<b>1,9</b>
	<b>0,9</b>	<b>0,9</b>	<b>1,5</b>	<b>0,8</b>	<b>1,1</b>	<b>0,7</b>	<b>1,8</b>	<b>1,1</b>	<b>1,5</b>	<b>1,5</b>



**Abbildung 4-41 Dämpfung ACC1 nach Hüpfen**

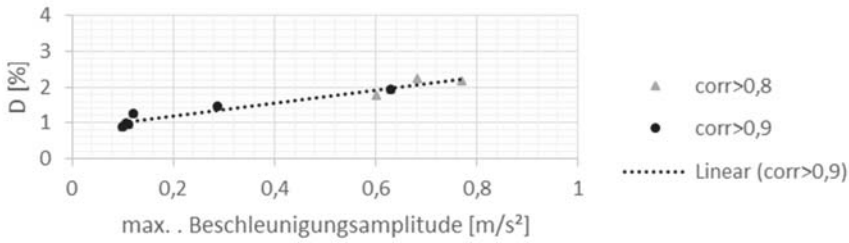


Abbildung 4-42 Dämpfung ACC2 nach Hüpfen

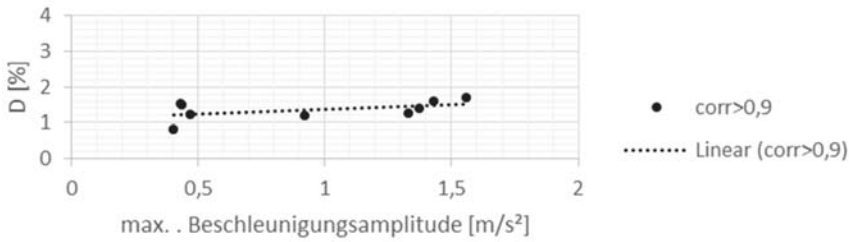


Abbildung 4-43 Dämpfung ACC3 nach Hüpfen

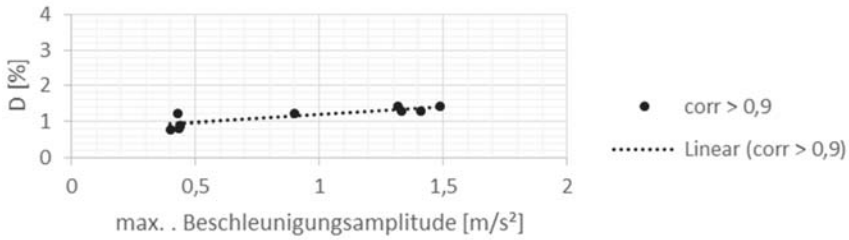


Abbildung 4-44 Dämpfung ACC4 nach Hüpfen

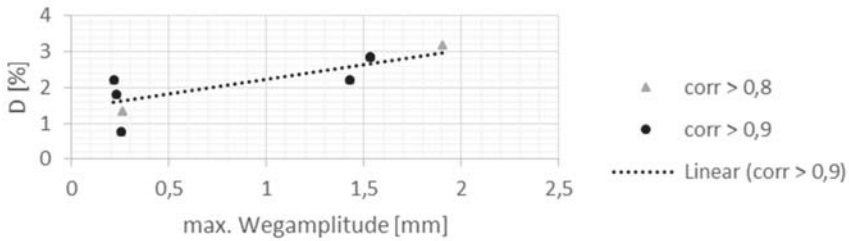


Abbildung 4-45 Dämpfung DIS1 nach Hüpfen

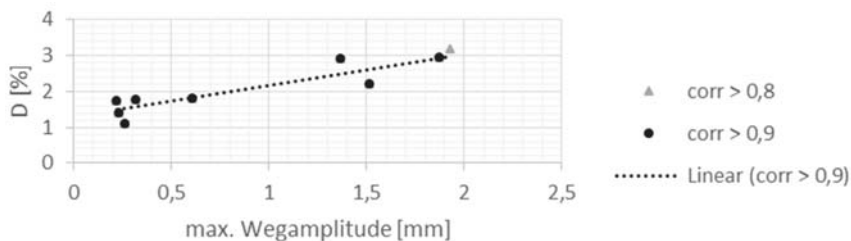


Abbildung 4-46 Dämpfung DIS 2 nach Hüpfen

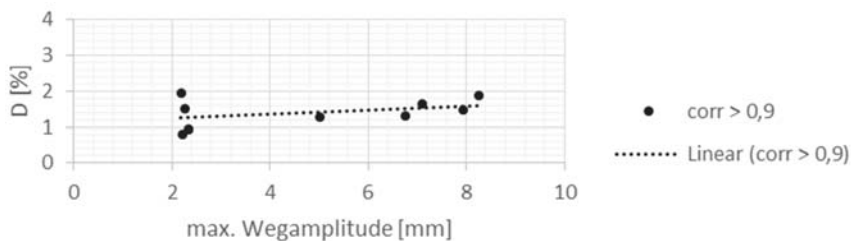


Abbildung 4-47 Dämpfung DIS 3 nach Hüpfen

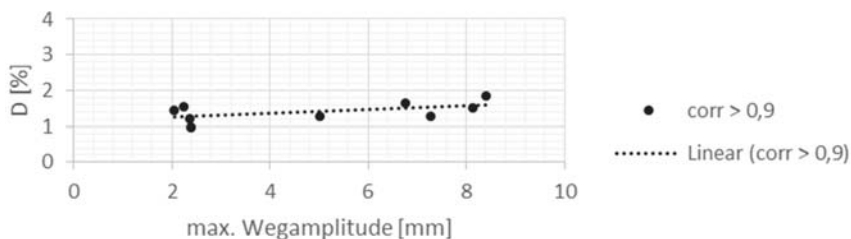


Abbildung 4-48 Dämpfung DIS 4 nach Hüpfen

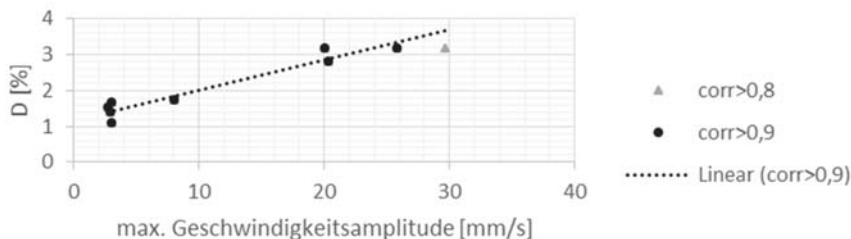


Abbildung 4-49 Dämpfung VEL1 nach Hüpfen



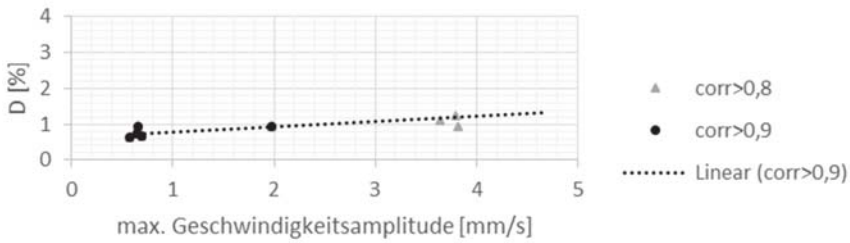


Abbildung 4-50 Dämpfung VEL2 nach Hüpfen

Tabelle 4-5: Ermittelte Dämpfungen [%] aus Ausschwingen nach Anregung mit Unwucht mit Korrelation >0,9

f [Hz]	ACC1	ACC2	ACC3	ACC4	VEL1	VEL2	DISPL1	DISPL2	DISPL3	DISPL4
2,37	-	-	1,2	1,1	-	-	-	-	0,9	0,9
2,39	-	-	1,6	1,5	1,6	-	-	-	1,5	1,5
2,42	1,5	-	1,0	1,5	1,1	1,4	-	-	1,5	1,1
	-	-	1,0	1,5	1,0	-	-	-	1,6	0,8
	-	-	-	-	0,6	-	-	-	-	0,4
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2,45	1,7	1,7	1,3	1,3	1,4	0,9	1,8		1,4	1,9
	-		1,3	1,3	1,4	-	-	-	1,4	1,3
2,47	-	1,6		0,6	0,6	-	-	-	0,5	1,0
	1,1	1,2	1,5	1,1	1,3	1,1	1,7	1,6	1,2	1,1
	1,8		1,3	1,8	1,9	1,6	1,7	0,6	1,9	1,9
2,50	-	1,6	1,0	1,4	1,4	1,2	-	-	1,4	1,1
	1,2	1,2	1,5	1,2	1,4	1,0	0,0	1,2	1,6	1,3

f [Hz]	ACC1	ACC2	ACC3	ACC4	VEL1	VEL2	DISPL1	DISPL2	DISPL3	DISPL4
2,53	<b>1,8</b>	<b>1,3</b>	<b>1,2</b>	<b>1,8</b>	<b>1,8</b>	<b>1,6</b>	-	-	<b>1,3</b>	<b>1,9</b>
	<b>1,7</b>	-	<b>1,3</b>	<b>1,1</b>	<b>1,3</b>	<b>1,0</b>	0,2	1,4	<b>1,7</b>	<b>1,7</b>
2,55	1,0	<b>1,8</b>	<b>1,6</b>	<b>1,5</b>	<b>1,6</b>	<b>1,4</b>	-	-	<b>1,0</b>	<b>0,9</b>
	<b>1,3</b>	-	<b>1,3</b>	<b>1,3</b>	<b>1,4</b>	<b>1,2</b>	-	1,5	<b>1,3</b>	<b>1,9</b>
2,58	-	1,6	<b>1,5</b>	<b>1,5</b>	<b>1,5</b>	<b>1,3</b>	-	-	<b>1,5</b>	<b>0,8</b>
	<b>1,4</b>	-	<b>1,3</b>	<b>1,3</b>	<b>1,4</b>	<b>1,2</b>	-	-	<b>1,4</b>	<b>1,6</b>
	-	-	<b>1,4</b>	<b>1,4</b>	<b>1,5</b>	1,3	-	-	<b>1,5</b>	<b>1,4</b>
2,61	-	-	-	-	0,8	-	-	-	0,8	0,7
	1,0	-	<b>1,4</b>	<b>1,4</b>	1,9	<b>1,5</b>	-	-	<b>1,8</b>	<b>1,4</b>
2,63	-	1,1	<b>1,1</b>	<b>1,2</b>	<b>1,4</b>		-	-	<b>1,4</b>	<b>1,0</b>
2,66	1,5	-	<b>1,2</b>	<b>1,3</b>	<b>1,2</b>	<b>1,4</b>	-	-	<b>1,3</b>	<b>1,4</b>
2,68	-	-	<b>1,2</b>	<b>1,1</b>	<b>1,6</b>	<b>1,1</b>	-	-	<b>1,3</b>	<b>1,0</b>
2,71	1,5	-	<b>1,1</b>	<b>1,6</b>	<b>1,3</b>	<b>1,4</b>	-	-	<b>1,3</b>	<b>1,4</b>
2,74	-	-	<b>1,2</b>	<b>1,4</b>	<b>1,2</b>	1,0	-	-	<b>1,0</b>	<b>1,2</b>
2,76	1,0	-	<b>1,4</b>	<b>1,1</b>	1,1	1,2	-	-	-	<b>1,6</b>
2,79	-	-	<b>1,2</b>	<b>1,3</b>	<b>1,3</b>	1,1	-	-	<b>1,1</b>	<b>1,2</b>
2,89	-	-	<b>1,6</b>	<b>1,6</b>	<b>1,5</b>	1,5	-	-	-	<b>1,8</b>
3,03	-	-	<b>1,5</b>	<b>1,2</b>	<b>1,2</b>	1,5	-	-	-	<b>1,3</b>
3,16	-	-	<b>1,1</b>	<b>1,0</b>	0,9	1,3	-	-	-	<b>0,8</b>
3,29	-	-	1,6	1,7	1,0	-	-	-	-	<b>1,0</b>

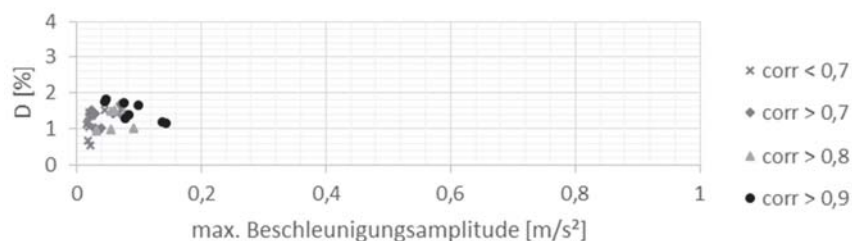


Abbildung 4-51 Dämpfung ACC1 nach Anregung mit Unwucht

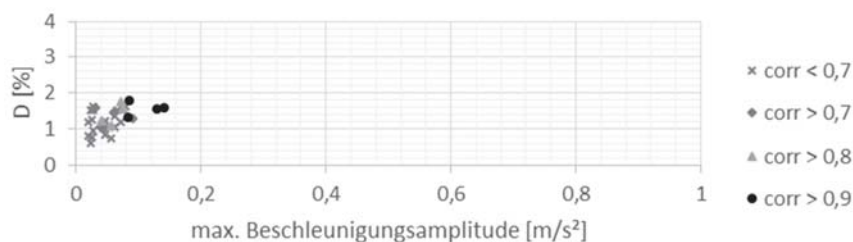


Abbildung 4-52 Dämpfung ACC2 nach Anregung mit Unwucht

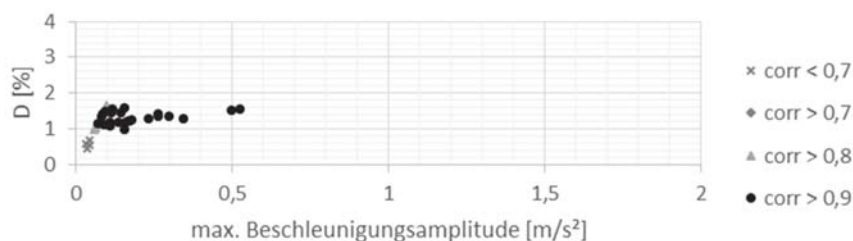


Abbildung 4-53 Dämpfung ACC3 nach Anregung mit Unwucht

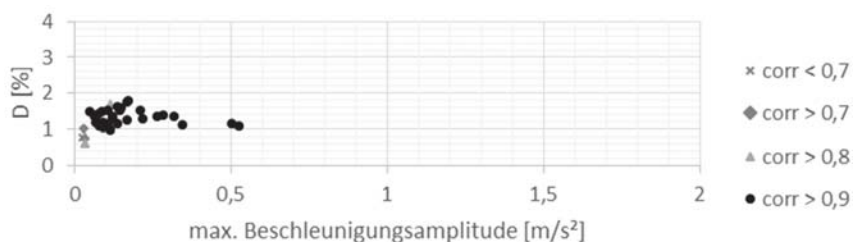


Abbildung 4-54 Dämpfung ACC4 nach Anregung mit Unwucht

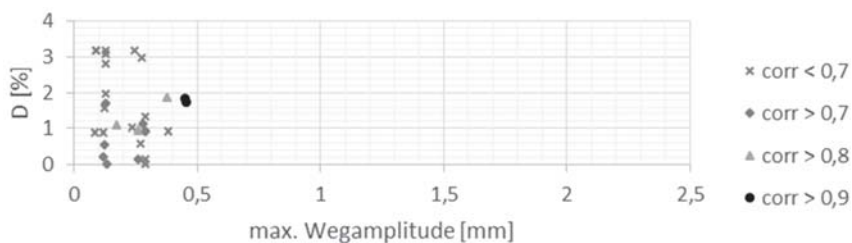


Abbildung 4-55 Dämpfung DIS1 nach Anregung mit Unwucht

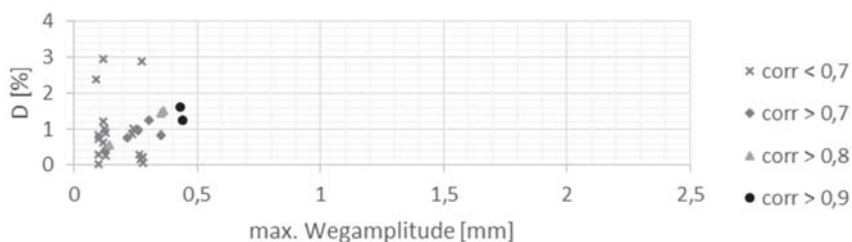


Abbildung 4-56 Dämpfung DIS 2 nach Anregung mit Unwucht

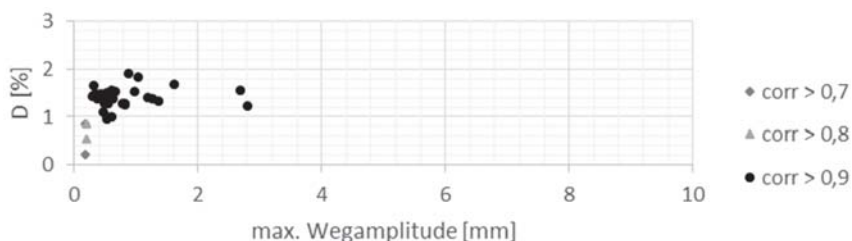


Abbildung 4-57 Dämpfung DIS 3 nach Anregung mit Unwucht

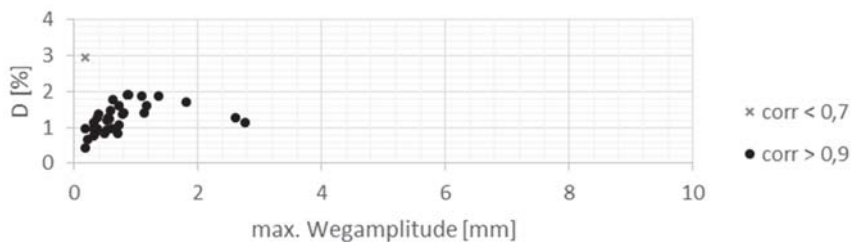


Abbildung 4-58 Dämpfung DIS 4 nach Anregung mit Unwucht

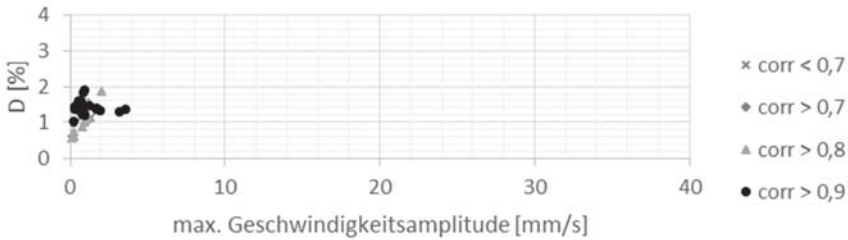


Abbildung 4-59 Dämpfung VEL1 nach Anregung mit Unwucht

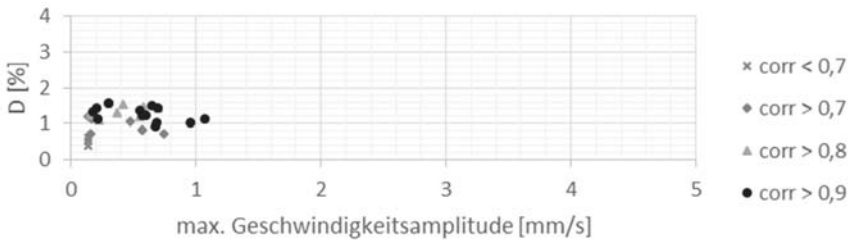


Abbildung 4-60 Dämpfung VEL2 nach Anregung mit Unwucht

Während die Frequenzanalyse eines einzelnen Ausschwingvorganges an allen betrachteten Messpunkten sehr ähnliche Ergebnisse liefert (siehe Tabelle 4-2 und Tabelle 4-3), streuen die Dämpfungswerte an den unterschiedlichen Messpunkten z.T. deutlich (siehe Tabelle 4-4 und Tabelle 4-5). Es ergeben sich Unterschiede zwischen den aus den jeweiligen gemessenen Zeitreihen (Beschleunigung, Geschwindigkeit, Weg) ermittelten Dämpfungswerten. Bei einer Betrachtung der im Fugenbereich ermittelten Dämpfungswerte mit Korrelationen  $> 0,9$ , ergeben sich aus der Auswertung der Beschleunigungs-Zeitverläufe ACC1 und ACC2 Dämpfungswerte im Bereich von  $0,8\%$ – $2,3\%$ . Die Auswertung der Weg-Zeitverläufe DISPL1 und DISPL2 hingegen liefert Dämpfungswerte im Bereich  $0,8\%$ – $3,0\%$ .

Die Tendenz einer geringfügigen Schwingungsamplitudenabhängigkeit der ermittelten Dämpfungswerte lässt sich vermuten, aufgrund der geringen Anzahl an Messergebnissen allerdings noch nicht zweifelsfrei belegen. Weitere Versuche mit höheren Amplituden sind erforderlich.

### 4.3 Ausblick auf zukünftige Versuche

Die bisher im Rahmen dieser Arbeit präsentierten Ergebnisse basieren auf einer geringen Anzahl an Versuchen, welche im Oktober 2017 durchgeführt worden sind. Für weitere Versuche wurde geplant, zunächst die Länge der Fuge zu reduzieren, um so größere relative Verformungsamplituden zwischen den beiden Überbauten

erzielen zu können. Geplant ist weiterhin eine Fortführung der Versuche über einen längeren Zeitraum von etwa zwei Jahren. Dabei soll nicht nur der Einfluss zu erwartender Temperaturwechsel im Jahresverlauf untersucht werden, sondern auch ein möglicher Verschleiß des Schotters in der Fuge, sowie Verschmutzungen aus der Umwelt. Ein gezieltes Vereisen des Schotterbettes kann bei geeigneten Außentemperaturen durch Annässen des Schotters erzielt werden. Die Wetterdaten werden erfasst und dienen der weiteren Interpretation der Messergebnisse hinsichtlich temperatur- und witterungsabhängiger Abhängigkeiten.

Die so ermittelten Daten sollen einerseits die Grundlage zur Nachrechnung von In-situ Brückenmessungen unter Berücksichtigung möglichen Verschleiß- und Verschmutzungserscheinungen im Bereich der Koppelfuge liefern, andererseits können zuverlässige Werte für die Brückenbemessung erst abgeleitet werden, wenn genauere Kenntnis über das Dauerverhalten des Eisenbahnschotters in der Koppelfuge vorliegt. Durch die Umrechnung der Versuchsergebnisse in koppelflächenbezogene Werte lassen sich diese für beliebige Einbauhöhen des Schotters in der Koppelfuge  $h_{\text{Schotter}}$  und Stützweiten  $L$  umrechnen und zur Modellierung gekoppelter Überbauten anwenden.

In Kapitel 5.5 erfolgt weiterhin ein Ausblick zur vereinfachten Berücksichtigung des Koppelleffektes in einem äquivalenten Einmassensystem.

### 4.3.1 Erste Ergebnisse

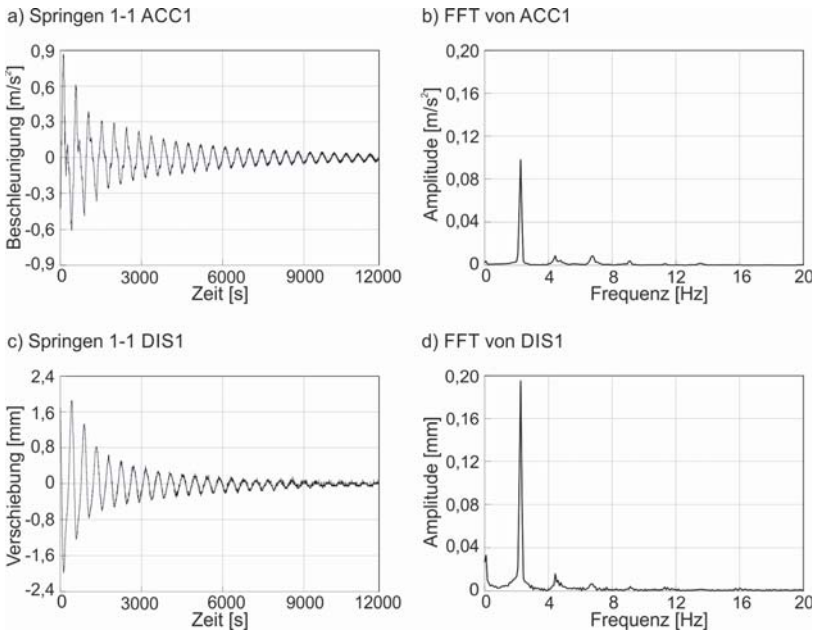
Wie in Abbildung 4-61 dargestellt, wurde der Fugenbereich verkleinert, die Fuge hat nun eine Höhe von 0,33 m und eine Länge von 1,94 m. Weiterhin wurde eine Horizontalhalterung ergänzt, die ein Abdriften des auf Federn gelagerten Überbaus infolge von Setzungserscheinungen im Schotter künftig verhindern soll.



Abbildung 4-61 a) Verkleinerter Fugenbereich b) Horizontalhalterung

Die Masse wird durch das Hinzufügen der zwei Stahlbleche zur Schotterbegrenzung auf 26,6 t erhöht ( $\theta = 18 \text{ tm}^2$ ), dabei wird bereits das etwas geringere Schottergewicht durch Verringerung der Einfüllhöhe im Fugenbereich berücksichtigt. Mit dem von [Rau2011a] ermittelten Wert  $c_{coup} = 4,35 \text{ MN/m}^3$  und der Koppelfläche von  $(1,94 \text{ m} \times 0,33 \text{ m})$  lässt sich nach Gl. 4.18 eine Koppelsteifigkeit von  $2785 \text{ MN/m}$  in der Fuge prognostizieren. Unter Berücksichtigung von  $k = 0,841 \text{ MN/m}$ , ergibt sich anhand Gl. 4.20 die erste Eigenfrequenz zu 2,0 Hz.

In Abbildung 4-62 sind exemplarisch freie Ausschwingvorgänge nach Anregung durch Hüpfen dargestellt. Es handelt sich um vertikale Weg- und Beschleunigungszeitverläufe an Messstelle 1, vgl. Abbildung 4-15. Es ergibt sich eine Eigenfrequenz von 2,3 Hz.



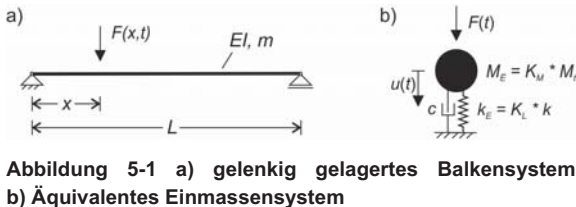
**Abbildung 4-62** a) c) Freie Ausschwingvorgänge nach Anregung durch Hüpfen b) d) zugehörige FFTs

## 5 Modellentwicklung für die vereinfachte Bemessung

### 5.1 Modellentwicklung äquivalentes Einmassensystem für Überfahrtssimulationen

Aus den vorangegangenen Abschnitten dieser Arbeit lässt sich für die Bemessung von WiB-Brücken ein besonders relevanter Aspekt herausstellen: In den meisten Fällen muss im Rahmen der Bemessung eine sehr große Anzahl von Überfahrtssimulationen durchgeführt und ausgewertet werden. Dies betrifft einerseits Brücken mit Überfahrtsgeschwindigkeiten  $v_o \geq 200$  km/h, bei denen immer dynamische Berechnungen durchzuführen sind, andererseits betrifft es auch viele Brücken mit Überfahrtsgeschwindigkeiten  $v_o < 200$  km/h, die nach derzeitigem Stand der Normgebung der vereinfachten Überprüfung des Resonanzrisikos gemäß [EN1991-2] [RiL804] nicht standhalten, vgl. Kapitel 2.1.1.

Im Rahmen dieser Arbeit wird daher basierend auf dem Ansatz eines äquivalenten Einmassensystems [Bigg1964], siehe Kapitel 2.1.4, ein Berechnungsverfahren zur Durchführung dynamischer Zugüberfahrtssimulationen entwickelt. Zunächst wird von einem gelenkig gelagerten Balkensystem (siehe Abbildung 5-1) ausgegangen, welches in den nachfolgenden Unterkapiteln zur Berücksichtigung zusätzlicher Beiträge baulicher Randbedingungen erweitert wird.



Die Vorteile gegenüber der Modellierung eines vollständigen Balkensystems liegen vor allem in der signifikanten Systemreduzierung. Der Berechnungsaufwand einer Zugüber-

fahrt wird beim äquivalenten Einmassensystem maßgeblich reduziert, da anstelle des kompletten Balkens (zunächst) nur die Feldmitte als Bezugspunkt betrachtet wird. Der Mehrwert einer einfachen Systemmodellierung gegenüber einem komplexen System liegt in der einfachen Erkenntnisgewinnung zur (globalen) Systemreaktion auf überfahrende Züge.

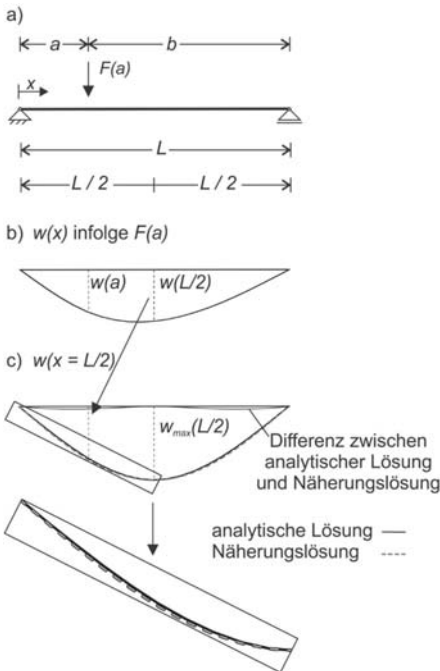
Zur Überführung des gelenkig gelagerten Balkensystems mit den Systemparametern Biegesteifigkeit  $EI$ , Masse  $m$  und Stützweite  $L$  in ein äquivalentes Einmassensystem werden Ersatzsteifigkeit  $k_E$  und Ersatzmasse  $M_E$  benötigt. Zur Berechnung werden Lastfaktor  $K_L$  (Gl. 2.94, Gl. 2.95) und Massefaktor  $K_M$  (Gl. 2.96, Gl. 2.97) herangezogen.



Weiterhin muss der auf das äquivalente Einmassensystem einwirkende Last-Zeit-verlauf  $F(t)$  die auf das Balkensystem einwirkende Belastung abbilden können. Im Rahmen dieser Arbeit wird daher ein Lastvektor  $F(t)$  zur Darstellung wandernder Einzellasten  $F(x,t)$  bzw. zur Darstellung einer Folge von Einzellasten hergeleitet.

Die statische Durchbiegung in Feldmitte eines Balkens mit konstanter Steifigkeit infolge einer wandernden Einzellast  $F(a)$  (vgl. Abbildung 5-2) lässt sich über die in Gl. 5.1 gegebene halbe Sinusfunktion annähern.

$$w(L/2) \approx w_{\max}(L/2) \cdot \sin\left(\frac{a}{L} \cdot \pi\right) \quad \text{mit } x = [0, L] \quad \text{Gl. 5.1}$$



Dabei ist  $w_{\max}(L/2)$  die maximale Durchbiegung in Feldmitte infolge  $F(a)$ , welche sich anhand des Prinzips der virtuellen Arbeit ermitteln oder direkt aus der Biegelinie ablesen lässt. Sie ist am größten, wenn die Last sich in Feldmitte befindet ( $a = L/2$ ). In Abbildung 5-2 wird gezeigt, dass die Durchbiegung in Feldmitte  $w(x = L/2)$  sehr gut über die Sinusfunktion in Gl. 5.1 angenähert werden kann. Für  $a \neq L/2$  ergeben sich geringfügig größere Durchbiegungswerte.

Die analytischen Lösungen der zugehörigen Biegelinie  $w(x)$ , Verdrehungen  $\varphi(x) = w'(x)$  und die Werte  $w(x = L/2)$  bzw.  $w'(x = 0)$  und  $w'(x = L)$  werden in den nachfolgend dargestellten Gleichungen Gl. 5.2 bis Gl. 5.9 angegeben.

**Abbildung 5-2 a) Einfeldsystem mit wandernder Einzellast, b) Biegelinie infolge der Last  $F$  an Position  $a$ , c): Durchbiegung in Feldmitte bei beliebiger Laststellung analytisch und als Näherungslösung**

Für  $x \leq a$

$$w(x) = \frac{F(a-L)}{6 \cdot EI \cdot L} [x^3 + a(a-2L) \cdot x] \quad \text{Gl. 5.2}$$

$$w'(x) = \frac{F(a-L)}{6 \cdot EI \cdot L} [3x^2 + a(a-2L)] \quad \text{Gl. 5.3}$$

Für  $x > a$

$$w(x) = \frac{F \cdot a}{6 \cdot EI \cdot L} [x^3 - 3Lx^2 + (a^2 + 2L^2) \cdot x - La^2] \quad \text{Gl. 5.4}$$

$$w'(x) = \frac{F \cdot a}{6 \cdot EI \cdot L} [3x^2 - 6Lx + (a^2 + 2L^2)] \quad \text{Gl. 5.5}$$

Durchbiegung in Feldmitte

Für  $a > L/2$

$$w\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{F(a-L)}{6 \cdot EI} \cdot \left[\frac{1}{8}L^2 + \frac{1}{2}a^2 - aL\right] \quad \text{Gl. 5.6}$$

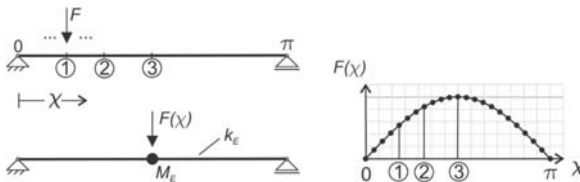
Für  $a \leq L/2$

$$w\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{F \cdot a}{6 \cdot EI} \cdot \left[\frac{3}{8}L^2 - \frac{1}{2}a^2\right] \quad \text{Gl. 5.7}$$

Auflagerverdrehungen (für alle Positionen von  $F$ ):

$$w'(x=0) = \frac{F \cdot a \cdot (a-L) \cdot (a-2L)}{6 \cdot EI \cdot L} \quad \text{Gl. 5.8}$$

$$w'(x=L) = \frac{F \cdot a \cdot (a^2 - L^2)}{6 \cdot EI \cdot L} \quad \text{Gl. 5.9}$$



**Abbildung 5-3** Darstellung wandernde Last als Last in Feldmitte

Alternativ lässt sich der von der Lastposition  $a$  abhängige Durchbiegungsverlauf in Feldmitte auch durch Aufbringung der Last  $F$  als Sinusfunktion einer Hilfsvariablen  $\chi$  nach Gl.

5.10 in Feldmitte simulieren, siehe Abbildung 5-3, und somit auch auf ein Einmassensystem wie in Abbildung 5-1 b aufbringen. Die Durchbiegung  $u$  des Einmassensystems ergibt sich dann gemäß Gl. 5.11 als Quotient aus einwirkender Last und (Ersatz-)federsteifigkeit  $k_E$ .

$$F(L/2) = F \cdot \sin(\chi) \quad \text{mit } \chi = [0, \pi] \quad \text{Gl. 5.10}$$

$$u = \frac{F \cdot \sin(\chi)}{k_E} \quad \text{Gl. 5.11}$$

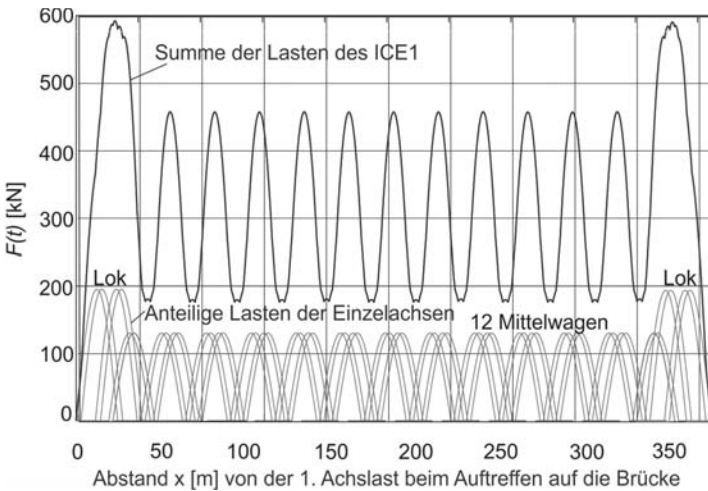


Abbildung 5-4 Lastvektor ICE 1 für die Beispielbrücke Erfthalstraße mit  $L=24,6$  m

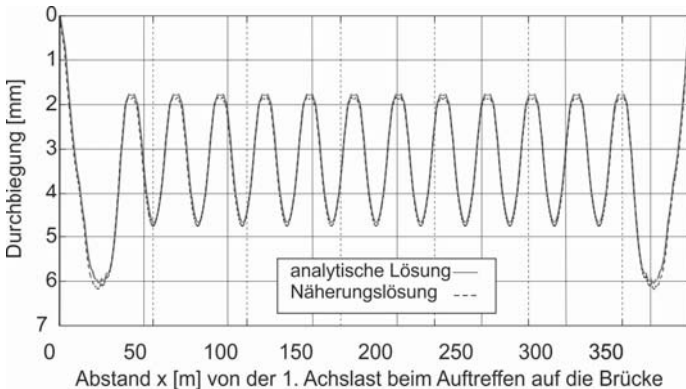


Abbildung 5-5 Durchbiegung in Feldmitte infolge einer quasi-statischen ICE1 Überfahrt

Eine Zugkonfiguration setzt sich aus mehreren Einzellasten mit definierten Achsabständen zusammen, vgl. Kapitel 2.1.2 und 2.1.5. Die Durchbiegung infolge einer Zugüberfahrt lässt sich durch Superposition der Durchbiegungsverläufe infolge der einzelnen Lasten ermitteln. Alternativ lässt sich ein (positions- bzw. zeitabhängiger) Lastvektor  $F(t)$  erstellen, der sich dann wie gerade beschrieben beim Balkensystem in Feldmitte aufbringen lässt, bzw. auf das äquivalente Einmassensystem.

Zur Demonstration der Modellentwicklung für die vereinfachte Bemessung wird exemplarisch ein Brückenbauwerk mit Stützweite  $L = 24,6$  m, Biegesteifigkeit  $EI = 29796$  MNm<sup>2</sup> und Masse  $m = 25,98$  t/m betrachtet. Es handelt sich dabei um den in [Rau2011a] detailliert beschriebenen Süd-Überbau der WiB-Brücke *EÜ Erfttalstraße*.

In Abbildung 5-4 ist der entsprechende Lastvektor eines ICE 1 dargestellt, der sich für eine Brücke mit der Stützweite  $L = 24,6$  m ergibt. Auf der x-Achse angetragen sind die Abstände  $x$  der 1. Achslast vom Brückenanfang. Die Länge der „Überfahrt“ ergibt sich aus der Summe der Brückenlänge  $L$  (hier 24,6 m) und des Abstandes zwischen erster und letzter Achse (beim ICE 1 sind das 350,52 m, vgl. [RiL804]). Die Anzahl der gleichzeitig auf die Brücke wirkenden Lasten ist abhängig von  $L$ . In Kapitel 2.1.5 ist der Zusammenhang zwischen Stützweite und Belastungscharakteristik bereits diskutiert worden.

In Abbildung 5-5 werden Durchbiegungen in Feldmitte der Beispielbrücke bei quasi-statischen ICE 1-Überfahrten gegenübergestellt. Die Unterschiede zwischen an einem Balkensystem berechneten Werten und anhand der Näherungslösung am Ersatzsystem mit einem Freiheitsgrad (Gl. 5.1) ermittelten Werten sind gering. Im quasi-statischen Fall ist der Durchbiegungsverlauf proportional zum Lastverlauf. Beim äquivalenten Einmassensystem lässt sich die statische Durchbiegung (partiellärer Anteil der Gesamtverformung) entsprechend nach Gl. 5.12 ermitteln.

$$u_p(t) = \frac{F(t)}{k_E} \quad \text{Gl. 5.12}$$

Zur Durchführung dynamischer Berechnungen muss der Zusammenhang zwischen der Position  $x$  der Last auf der Brücke und der Zeit  $t$  hergestellt werden. Die Dauer  $T$  der Überfahrt einer Einzellast  $F_i$  ergibt sich bekanntlich aus Brückenlänge  $L$  und Überfahrtsgeschwindigkeit  $v$ , siehe Gl. 5.13.

$$T = \frac{L}{v} \quad \text{Gl. 5.13}$$

Die Erregerkreisfrequenz  $\Omega$  der Einzellast lässt sich nach Gl. 5.14 ermitteln (halbe Sinusfunktion), weiterhin gilt der in Gl. 5.15 gegebene Zusammenhang zwischen zurückgelegter Strecke (Position  $x$ ), vergangener Zeit  $t$  und Überfahrtsgeschwindigkeit  $v$ . Somit lässt sich Gl. 5.1 in Gl. 5.16 umwandeln, bzw. Gl. 5.10 in Gl. 5.17.

$$\Omega = \frac{\pi}{T} = \frac{v \cdot \pi}{L} \quad \text{Gl. 5.14}$$

$$x = v \cdot t \quad \text{Gl. 5.15}$$

$$w(L/2) \approx w_{\max}(L/2) \cdot \sin\left(\frac{v \cdot \pi}{L} \cdot t\right) = w_{\max}(L/2) \cdot \sin(\Omega \cdot t) \quad \text{Gl. 5.16}$$

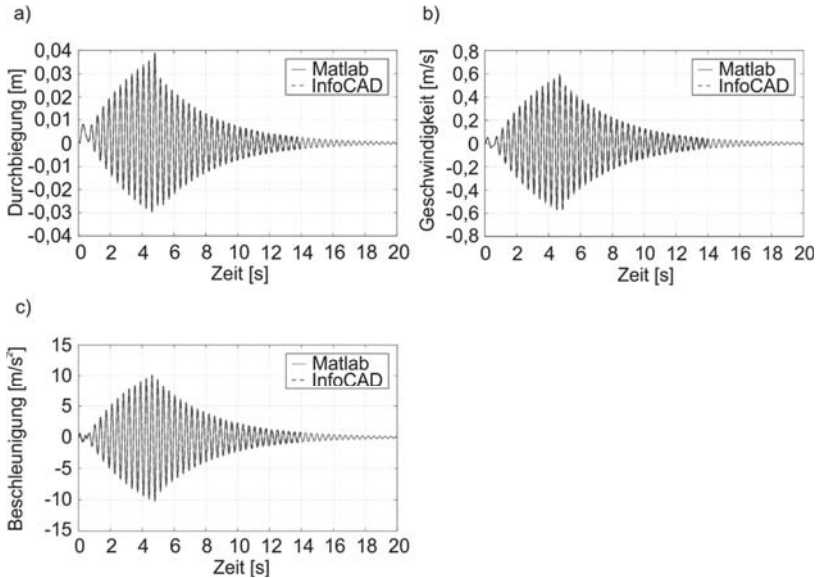
$$F_i(t) = F_i \cdot \sin(\Omega \cdot t) \quad \text{Gl. 5.17}$$

Die Gesamtdauer einer Zugüberfahrt ergibt sich dann aus Summe der Brückenslänge  $L$  und des Abstandes zwischen erster und letzter Achse, geteilt durch die Überfahrtsgeschwindigkeit.

In der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Matlab-Routine (siehe Anhang B.4 ) wird für den betrachteten Zug ein Gesamtlastvektor  $F_{\text{ges}}(t)$  aus der Überlagerung der einzelnen Lastvektoren  $F_i(t)$  der Einzellasten gemäß Gl. 5.17 generiert, vgl. Abbildung 5-4. In Abhängigkeit des Abstandes  $x$  zur ersten Achslast ergibt sich ein Startzeitpunkt für die betrachtete Einzellast, an dem sie ihre Überfahrt beginnt, welche eine entsprechende Dauer nach Gl. 5.13 hat. Die Anzahl der Werte in den einzelnen Vektoren ist abhängig von der gewählten Zeitschrittweite  $\Delta t$ . In Kapitel 2.1.4 ist die Notwendigkeit einer ausreichend kleinen Zeitschrittweite zur korrekten Abbildung der Systemreaktionen bereits diskutiert worden. Beim hier präsentierten äquivalenten Einmassensystem kommt noch hinzu, dass die gewählte Zeitschrittweite klein genug sein muss, um den Zeitpunkt abzubilden, an dem eine Einzellast in Feldmitte wirkt und somit ihren Maximalwert erreicht (vgl. Gl. 5.10 bzw. Gl. 5.17). Im Rahmen dieser Arbeit wurde für die Zeitschrittberechnungen  $\Delta t = 0,001$  s gewählt. Die Mindestdauer einer Berechnung ergibt sich aus der Gesamtdauer einer Überfahrt. Zur Betrachtung des freien Ausschlagens im Anschluss an die Überfahrt wurde im Rahmen dieser Arbeit eine zusätzliche Berechnungszeit von 15 s gewählt.

Die Zeitschrittberechnung erfolgt mit dem in Kapitel 2.1.4 vorgestellten Newmark-Algorithmus (Gl. 2.42 bis Gl. 2.61), welcher die Parameter Masse  $m$ , Dämpfung  $c$  und Steifigkeit  $k$  benötigt. Da es sich um einzelne (halbsinusförmig) in Feldmitte wirkende Lasten handelt, werden die für  $m$  und  $k$  anzusetzenden äquivalente Masse und Steifigkeit mit den Parametern aus Gl. 2.103, Gl. 2.105 und Gl. 2.106 berechnet.

In Abbildung 5-6 werden vertikale Durchbiegungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in Feldmitte der Beispielbrücke infolge von ICE 1-Überfahrten mit der 1. kritischen Geschwindigkeit gemäß Gl. 2.16  $v_{res,1,0,ICE1} = 264 \text{ km/h}$  ( $n_0 = 2,78 \text{ Hz}$ ) dargestellt.



**Abbildung 5-6 Vergleich berechneter ICE 1-Überfahrten Einmassenschwinger Matlab - Balkensystem InfoCAD: a) Durchbiegungen, b) Geschwindigkeiten, c) Beschleunigungen (jeweils in Feldmitte)**

Die mit der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Matlab-Routine ermittelten Ergebnisse werden Vergleichsrechnungen am Balkensystem mit dem Programm InfoCAD [Inf2014] gegenübergestellt. Die kommerzielle Software InfoCAD wird in Deutschland sehr häufig zur dynamischen Bemessung von Eisenbahnbrücken verwendet. Auch hier kommt der Newmarkalgorithmus zur Lösung der Bewegungsgleichungen zum Einsatz. Der überfahrende Zug wird in beiden Berechnungen mit bewegten Einzellasten simuliert, vgl. Kapitel 2.1.2. Die Dämpfung wurde entsprechend [EN1991-2] [RiL804] zu  $\xi = 1,57 \%$  angenommen (WiB-Brücke mit  $L = 24,6 \text{ m}$ ), vgl. Abbildung 2-6. Im InfoCAD-Modell wurde diese Dämpfung den Frequenzen  $n_0$  und  $n_1$  (1. und 2. Biegeeigenfrequenz) zugewiesen (Rayleigh-Dämpfung), entsprechend der Empfehlung aus [ÖBB2011].

Die Durchbiegungs- und Geschwindigkeitsverläufe passen sehr gut zusammen. Bei den Beschleunigungsverläufen in Abbildung 5-6 c sind vernachlässigbare Abweichungen zu erkennen. Der Verlauf aus der InfoCAD-Berechnung enthält noch die

Anteile aus höheren Frequenzen, welche vernachlässigt werden dürfen, da die zugehörigen Wegamplituden klein sind, vgl. [Bag2008]; die Info-CAD-Ergebnisse hätten dementsprechend nachträglich noch mit einem Tiefpassfilter bearbeitet werden dürfen, um diese Anteile herauszufiltern.

Für eine vollständige Bemessung werden noch weitere Verformungs- und Schnittgrößen-Zeitverläufe benötigt. An dieser Stelle wird dazu auf Kapitel 5.3.5 verwiesen.

## **5.2 Berücksichtigung zusätzlicher Biegesteifigkeiten**

### **5.2.1 Allgemeines**

Die in Kapitel 5.1 gezeigte Modellvereinfachung ermöglicht eine schnelle automatisierte Durchführung einer großen Anzahl von Überfahrtsberechnungen. Somit stellt sie eine maßgebende Verbesserung eines für die Bemessung von WiB-Brücken besonders relevanten Aspektes dar.

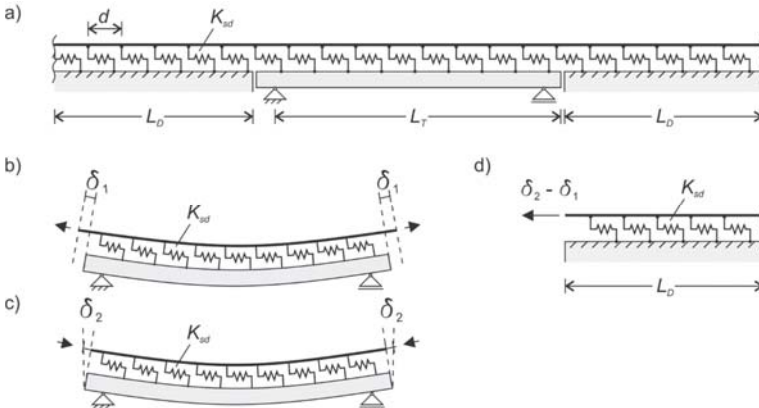
Ein ebenso wichtiger Aspekt für die Bemessung von WiB-Brücken ist die Fragestellung, ob sich zusätzlichen Beiträge baulicher Randbedingungen zur Systemsteifigkeit in dem vereinfachten Modell berücksichtigen lassen. Da die Modellvereinfachung in Kapitel 5.1 die Systemparameter Biegesteifigkeit  $EI$ , Masse  $m$  und Stützweite  $L$  eines gelenkig gelagerten Balkensystems berücksichtigt, lassen sich dort höhere Systemsteifigkeiten lediglich durch eine Erhöhung der Biegesteifigkeit  $EI$  abbilden. Der Fokus liegt also zunächst auf Beiträgen zur Biegesteifigkeit.

In Kapitel 3 wurden verschiedene Einflussparameter auf die Systemsteifigkeit diskutiert. Gemäß [EN1991-2] [RiL804] lassen sich bereits die Beiträge der Eisenbahngleise in der Modellierung zum Ansatz bringen, wobei im nachfolgenden Kapitel zunächst die Beiträge zur Biegesteifigkeit und Dehnsteifigkeit weiter vereinfacht werden. Die Einspannwirkung der über die Brücke hinauslaufenden Gleise wird in Kapitel 5.3 betrachtet.

Eine weitere Erhöhung der Biegesteifigkeit  $EI$  ist in der Bemessung oder Nachrechnung von Bestandsbauten möglich, wenn vertiefte Erkenntnisse zum Material- und Dauerverhalten vorliegen. Beispielsweise wäre aus Sicht der Verfasserin dieser Arbeit eine Berücksichtigung der Beiträge der Randkappen möglich, wenn sichergestellt ist, dass sie im gesamten geplanten Nutzungszeitraum der Brücke schubfest mit dem Überbau verbunden sind. Ein weiteres Beispiel wäre die Kenntnis des tatsächlichen E-Moduls des WiB-Überbaus.

## 5.2.2 Beitrag der Gleise zu Biege- und Dehnsteifigkeit

Die Schienen tragen sowohl zur Biege- bzw. Dehnsteifigkeit des Systems bei, als auch zu einer Systemveränderung durch die Teileinspannwirkung durch die über die Brücke hinauslaufenden Gleise. Im Rahmen dieser Arbeit werden diese beiden Effekte zunächst entkoppelt. Abbildung 5-7 zeigt die Aufteilung in die Teilsysteme „Überbau“ und „Bahndamm“.



**Abbildung 5-7:** a) Statisches Gesamtsystem, b) Teilsystem Überbau „Schlupf“, c) Teilsystem Überbau „Verschiebung infolge Endverdrehung“, d) Teilsystem Bahndamm

Die zusätzlichen Beiträge zu Dehn- bzw. Biegesteifigkeit werden dem Teilsystem Überbau zugeordnet und lassen sich mit den nachfolgend gegebenen Formeln nach der bekannten Theorie des elastischen Verbundes, vgl. z.B. [Hei1953], in die Überbaubauteifigkeiten integrieren. Die hier auf Überbau und Schiene bezogenen Formeln wurden bereits vorab in [Fel2016] präsentiert, für einen beliebigen Verbundquerschnitt sind sie in [Les2017] zu finden.

$$EI_{\text{Überbau+Gleis}} = EI_{\text{Überbau}} + EI_{\text{Gleis}} \quad \text{Gl. 5.18}$$

$$EA_{\text{Überbau+Gleis}} = EA_{\text{Überbau}} + EA_{\text{Gleis}} \quad \text{Gl. 5.19}$$

$$\alpha_i = \frac{e_i^2}{EI_{\text{Überbau+Gleis}}} \cdot \frac{EA_{\text{Überbau}} \cdot EA_{\text{Gleis}}}{EA_{\text{Überbau+Gleis}}} \quad \text{Gl. 5.20}$$

$$r_\delta = \frac{\delta_1}{\delta_{1,\max}} = \frac{\alpha_i \cdot EI_{\text{Überbau+Gleis}}}{\alpha_i \cdot EI_{\text{Überbau+Gleis}} + \left( \left( \frac{k}{u_0} \right) / 10 \right) \cdot L^2 \cdot e_i^2 (1 + \alpha_i)} \quad \text{Gl. 5.21}$$



$$\alpha_{i,eff} = \frac{\alpha_i(1 - r_\delta)}{1 + r_\delta \cdot \alpha_i} \quad \text{Gl. 5.22}$$

$$EI_{Verbund} = (1 + \alpha_{i,eff}) \cdot EI_{\text{Überbau+Gleis}} \quad \text{Gl. 5.23}$$

Dabei ist:

$e_i$	Abstand Schwerelinien der Teilquerschnitte (hier: Überbau - Gleis)
$\alpha_i$	Verbundsteifigkeitsparameter (voller Verbund)
$r_\delta$	Elastizitätsparameter $0 \leq r_\delta \leq 1$ (0 = voller Verbund; 1 = kein Verbund)
$\alpha_{i,eff}$	effektiver Verbundsteifigkeitsparameter (Teilverbund)
$EI_{Verbund}$	Biegesteifigkeit nach der Theorie des elastischen Verbundes
$\delta_1$	Relativverschiebung (Schlupf) zwischen Überbau und Gleis
$\delta_{1,max}$	maximale Relativverschiebung (Schlupf) zwischen Überbau und Gleis (kein Verbund, $r_\delta = 1$ )

Für ein Gleis bestehend aus zwei Schienen 60 E1 (ehemals UIC 60) ergeben sich die in Gl. 5.24 und Gl. 5.25 angegebenen Werte. Es sei darauf hingewiesen, dass sich für andere Schienenquerschnitte abweichende Werte ergeben, die im Rahmen dieser Arbeit allerdings nicht weiter betrachtet werden.

$$EI_{Gleis} = 12,83 \text{ MNm}^2 \quad \text{Gl. 5.24}$$

$$EA_{Gleis} = 322 \text{ MN} \quad \text{Gl. 5.25}$$

Die (kontinuierliche) Schubsteifigkeit der Verbundfuge wird über den Term  $\left(\left(k/u_0\right)/10\right) \cdot L^2 \cdot e_i^2(1 + \alpha_i)$  in Gl. 5.21 berücksichtigt, dabei ist  $\left(k/u_0\right)$  [kN/m<sup>2</sup>] das Verhältnis von Verschiebewiderstand und Längsverschiebung am Ende des elastischen Bereiches, siehe Abbildung 3-1. Mit dem Faktor 1/10 wird gemäß [Les2017] die Lastverteilung verschiedener Systeme angenähert (bei gleichmäßiger Linienlast ergäbe sich eigentlich ein Faktor  $5/48 = 0,104$ , bei einer Einzellast  $1/12 = 0,083$ ). I.d.R. ist der Beitrag der Gleise zu Dehn- bzw. Biegesteifigkeit des Gesamtsystems verhältnismäßig gering. In [Fel2016] sind die Ergebnisse von ca. 30 untersuchten WiB-Überbauten mit und ohne Berücksichtigung der Biegesteifigkeit der Schienen gegenübergestellt worden, jeweils für das belastete und das unbelastete Schotterbett. Es ergeben sich  $r_\delta$ -Werte im Bereich von 0,34 bis 0,75 (unbelastet) bzw. 0,15 bis 0,50 (belastet). Besonders bei längeren Brückenbauwerken ist der Einfluss der Gleise im Gegensatz zum restlichen Überbau nur noch sehr gering. Rechnerisch ermittelte Eigenfrequenzen konnten bestenfalls um 0,1 Hz verbessert werden.

Anhand der in Gl. 5.21 gegebenen Zusammenhänge kann auch die Relativverschiebung (Schlupf) zwischen Überbau und Schiene  $\delta_i$  berechnet werden, siehe Abbildung 5-7 b, welche der Schienenendehnung des Bahndamms infolge Endverdrehung der Brücke (siehe Abbildung 5-7 c) entgegenwirkt. Die maximale Verschiebung (kein Verbund) zwischen Schiene und Überbau  $\delta_{1,max}$  lässt sich anhand Gl. 5.26 berechnen, womit sich  $\delta_i$  gemäß Gl. 5.27 berechnen lässt.

$$\delta_{1,max} = \tan(\varphi) \cdot e_i = \varphi \cdot e_i \quad \text{Gl. 5.26}$$

$$\delta_i = \frac{\alpha_i \cdot EI_{\text{Überbau+Gleis}}}{\alpha_i \cdot EI_{\text{Überbau+Gleis}} + \left( \left( \frac{k}{u_0} \right) / 10 \right) \cdot L^2 \cdot e_i^2 (1 + \alpha_i)} \cdot \varphi \cdot e_i \quad \text{Gl. 5.27}$$

Dabei ist  $\varphi$  die Verdrehung der Brücke am Auflager infolge vertikaler Belastungen, vgl. z.B. Abbildung 2-9.

### 5.3 Modellentwicklung zur Berücksichtigung zusätzlicher Systemsteifigkeiten

#### 5.3.1 Systemveränderung durch Einspannwirkung der Gleise

Wie in Kapitel 3.3 erläutert, führen die über die Brückenenden hinauslaufenden Gleise zu einer Teileinspannung der Brücke. Zur Berücksichtigung dieser Einspannwirkung wird das bisher betrachtete ideal-gelenkig gelagerte Einmassensystem aus Abbildung 5-1 a um Drehfedern an den Auflagern ergänzt, siehe Abbildung 5-8.

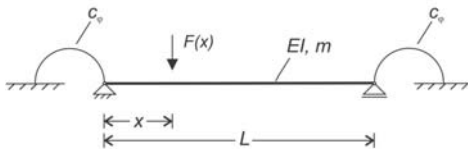


Abbildung 5-8: Balkensystem mit Drehfedern

Zur Herleitung entsprechender Drehfedersteifigkeiten  $c_\varphi$  wurde zunächst in Abbildung 5-7 eine Aufteilung in die Teilsysteme „Überbau“ und „Bahndamm“ vorgenommen.

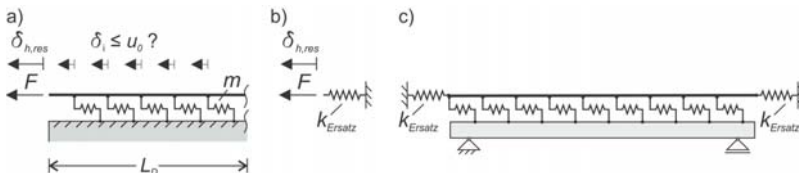
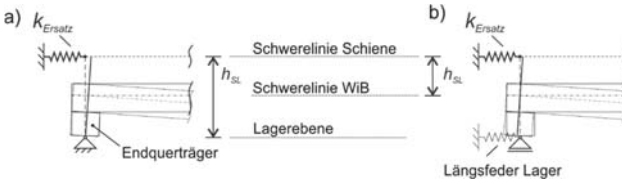


Abbildung 5-9: a) Teilsystem Bahndamm, b) Ersatzfeder Bahndamm, c) Implementierung der Ersatzfeder in das Teilsystem Überbau

Das Teilsystem Bahndamm lässt sich durch eine horizontale Ersatzfeder darstellen, die dann wiederum in das Teilsystem Überbau implementiert werden kann, vgl. Abbildung 5-9. Die Umrechnung der horizontalen Federsteifigkeit  $k_{Ersatz}$  in eine Drehfedersteifigkeit  $c_\varphi$  erfolgt nach Gl. 5.28, wobei  $h_{SL}$  den vertikalen Abstand zwischen der Schwerelinie des Gleises und der Systemverdrehachse am Auflager beschreibt, vgl. Abbildung 5-10. Hierbei ist die Ausführung der Lagerung von zentraler Bedeutung. Bei einem System mit ideal gelenkigem Festlager (Abbildung 5-10a) verdreht sich das System um die Lagerebene,  $h_{SL}$  ist dann der Abstand zwischen Schwerelinie Schiene und Lagerebene. Bei einem System mit schwimmender Lagerung (Abbildung 5-10b) dreht sich das System um die Schwerelinie,  $h_{SL}$  ist der Abstand zwischen den Schwerelinien von Schiene und Überbau. Wie bereits in Kapitel 3.4 erläutert, tragen die Rückstellkräfte bei den für WiB-Brücken typischen Elastomerlagern (zumindest theoretisch) wenig zur Systemsteifigkeit bei. Die in Abbildung 5-10 b gezeigte Längsfeder Lager ist somit vernachlässigbar.

$$c_\varphi = k_{Ersatz} \cdot h_{SL}^2 \quad \text{Gl. 5.28}$$



**Abbildung 5-10: Definition Systemverdrehachse a) System mit festem Lager b) System mit schwimmendem Lager**

In Kapitel 5.3.2 werden zunächst lineare horizontale Federsteifigkeiten  $k_{Ersatz}$  hergeleitet. Diese sind solange gültig, bis an der ersten Feder in Abbildung 5-9 a der Grenzwert  $u_0$  überschritten wird. Dabei beschreibt  $u_0$  den Übergang zwischen elastischem und plastischem Bereich von Längsverschiebewiderstand bzw. Durchschubwiderstand, siehe Abbildung 3-1 b. Der Zusammenhang zwischen horizontaler Verschiebung  $\delta_{h,res}$  am Übergang der beiden Teilsysteme und Auflagerverdrehung  $\varphi$  lässt sich über  $h_{SL}$  herstellen. Ein entsprechendes Grenzkriterium für die lineare Ersatzfedersteifigkeit nach 5.3.2 lässt sich dann mit Gl. 5.29 formulieren.

$$\varphi \leq \frac{\delta_{h,res}(l)}{h_{SL}} \quad l = 0 \quad \text{Gl. 5.29}$$

Dabei ist  $\delta_{h,res}(0)$  die maximale Verschiebung des Gleises, bei der  $l = 0$  Federn durchrutschen und beschreibt also das Ende der linearen horizontalen Federcharakteristik. Es gelten die bereits in Gl. 2.23 gegebenen Winkelbeziehungen.

Kann das Kriterium in Gl. 5.29 nicht erfüllt werden, wird eine Momenten-Rotations-Charakteristik  $M_y(\varphi)$  mit veränderlichem  $c_\varphi(\varphi)$  entsprechend Gl. 5.30 benötigt.

$$M_y(\varphi) = c_\varphi(\varphi) \cdot \varphi \quad \text{Gl. 5.30}$$

Entsprechende nicht-lineare Federcharakteristiken werden für  $k_{\text{Ersatz}}$  in Kapitel 5.4.1 hergeleitet, der Zusammenhang zwischen horizontaler Ersatzfeder und Drehfeder in Gl. 5.28 bleibt weiterhin gültig.

### 5.3.2 Entwicklung linearer Ersatzfedersteifigkeiten

In diesem Abschnitt wird zunächst auf lineare Ersatzfedersteifigkeiten eingegangen, d.h. die Verschiebungen  $\delta_i$  an den einzelnen Federn auf dem Bahndamm sind kleiner oder gleich  $u_0$  (vgl. Abbildung 3-4). Die im Rahmen dieses Unterkapitels gegebenen Formeln wurden vorab in [Big2016] [Fel2016] gezeigt.

Das System in Abbildung 5-9 a besteht aus  $m$  Federn, ist also  $(m-1)$ -fach statisch unbestimmt. Die Federelemente haben den Abstand  $d$ . Der Dammbereich  $L_D$  lässt sich nach Gl. 3.1 ermitteln und liefert einen möglichen Wertebereich  $L_D = [40 \dots 90]$  m, bzw. bei Stahlbrücken  $L_D = [40 \dots 70]$  m. Bei Berücksichtigung eines Schwellenabstandes  $d = 60$  cm ergeben sich, in Abhängigkeit von  $L_D$ ,  $m = [66 \dots 150]$  Federelemente. Das statisch unbestimmte System in Abbildung 5-11 lässt sich nach dem Prinzip der virtuellen Kräfte anhand Gl. 5.31 bis Gl. 5.34 lösen.

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{ji} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{ij} & \cdots & \delta_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \vdots \\ \delta_{i0} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{Gl. 5.31}$$

$$\delta_{ii} = \frac{(m-i) \cdot d}{EA} + \frac{2}{K_{Sd}} \quad \text{Gl. 5.32}$$

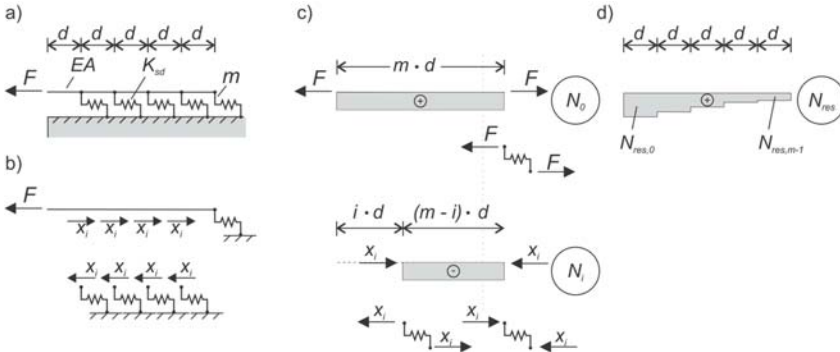
$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \frac{(m-i-j) \cdot d}{EA} + \frac{1}{K_{Sd}} \quad \text{Gl. 5.33}$$

$$\delta_{i0} = \frac{-F \cdot (m-i) \cdot d}{EA} - \frac{F}{K_{Sd}} \quad \text{Gl. 5.34}$$

Dabei gilt:  $i = [1, m-1]$ , sowie  $j = [1, m-i-1]$ .

Die Federsteifigkeiten  $K_{Sd}$  (siehe Abbildung 5-11) lassen sich nach Gl. 3.3 aus den in [EN1991-2] [RiL804] gegebenen Längsverschiebe- und Durch Schubwiderständen ermitteln. Für Abstände  $d = 0,6 \text{ m}$  werden die entsprechenden  $K_{Sd}$  -Werte in Tabelle 3-1 gegeben.

$EA$  wird im Rahmen dieser Arbeit nach Gl. 5.25 mit 322 MN berücksichtigt.



**Abbildung 5-11 a) Statisches System „Bahndamm“, b) Statisch bestimmtes Ersatzsystem, c) Schnittgrößen und Federkräfte von Ersatzsystem „0“ und virtuellen Systemen „i“, d) resultierende Normalkraftverteilung in der Schiene**

Mit Kenntnis der  $(m-1)$  statisch unbestimmten Ersatzlasten  $x_i$  lässt sich der resultierende Normalkraftverlauf im Gleis (vgl. Abbildung 5-11 d) ermitteln. Im Bereich zwischen „Stelle 0“ (Übergang Bahndamm - Überbau) gilt:  $N_{res,0} = N_0$ . Die weiteren resultierenden Normalkräfte  $N_{res,i}$  ergeben sich nach Gl. 5.35.

$$N_{res,i} = N_0 + \sum_{k=1}^i x_k \cdot N_k \quad k = [1, i] \quad \text{Gl. 5.35}$$

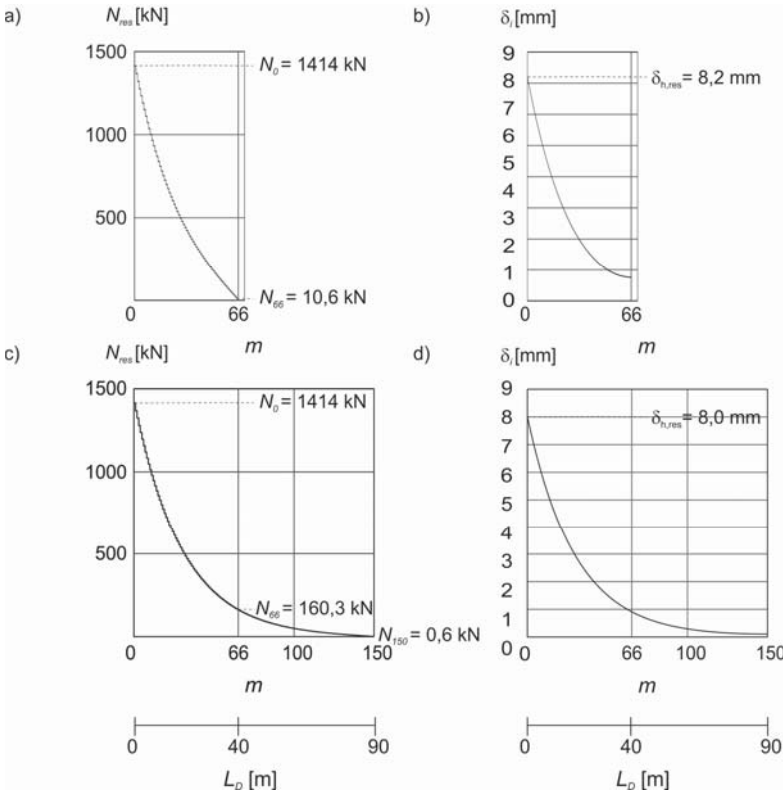
Die zugehörigen Verschiebungen  $\delta_i$  an den Angriffspunkten der Ersatzlasten am Gleis (Abbildung 5-9 a) lassen sich unter Anwendung des Reduktionssatzes gemäß Gl. 5.36 bestimmen. Die Verschiebungen setzen sich zusammen aus dem Federweg  $\delta_m$  (Gl. 5.37) der  $m$ -ten Feder infolge der an dieser Stelle wirkenden resultierenden Normalkraft  $N_{res,m-1}$  und der Stabdehnung an der betrachteten Stelle  $i$  infolge der Normalkraftverteilung zwischen der  $m$ -ten und der  $i$ -ten Feder. An der „0“-ten Stelle kommt noch die Stablänge zwischen „0“-ter Stelle und erster Feder infolge  $N_0$  hinzu (Gl. 5.38).

$$\delta_i = \sum_i^{m-1} \frac{N_{res,i} \cdot d}{EA} + \frac{N_{res,m-1}}{K_{Sd}} \quad \text{Gl. 5.36}$$

$$\delta_m = \frac{N_{res,m-1}}{K_{Sd}} \quad \text{Gl. 5.37}$$

$$\delta_{h,res} = \delta_0 = \left( N_0 + \sum_{i=1}^{m-1} N_{res,i} \right) \cdot \frac{d}{EA} + \frac{N_{res,m}}{K_{Sd}} \quad \text{Gl. 5.38}$$

In Abbildung 5-12 werden exemplarisch die Normalkraft- und Verschiebungsverläufe des unbelasteten Schotteroberbaus über die betrachteten Dammbereiche bei 66 bzw. bei 150 Federelementen dargestellt. Zugrunde gelegt wurde den Berechnungen eine einwirkende Kraft  $F=1414$  kN, was der Kraft bei einer maximal zulässigen Zugspannung von  $92 \text{ N/mm}^2$  gemäß [EN1991-2] bzw. [RiL804] in zwei Schienen 60 E2 (ehemals UIC60) entspricht.



**Abbildung 5-12 Normalkraft-/Verschiebungsverläufe im Dammbereich eines unbelasteten Schotteroberbaus bei a)/b) 66 Federn bzw. bei c)/d) 150 Federn**

In allen Verläufen ist eine nichtlineare Verteilung der Kräfte bzw. Verschiebungen über die Gleislänge zu erkennen. Die zugehörigen Abklingfunktionen lassen sich nach Gl. 5.39 bzw. Gl. 5.40 ermitteln.

$$\Delta N_i = x_i \cdot N_i - x_{i+1} \cdot N_{i+1} \quad \text{Gl. 5.39}$$

$$\Delta \delta_i = \frac{(x_i \cdot N_i - x_{i+1} \cdot N_{i+1}) \cdot d}{EA} \quad \text{Gl. 5.40}$$

$$k_{\text{Ersatz}} = \frac{F}{\delta_{h,\text{res}}} \quad \text{Gl. 5.41}$$

$\delta_{h,\text{res}}$  ist Grundlage der Ersatzfedersteifigkeit  $k_{\text{Ersatz}}$  gemäß Gl. 5.41, vgl. Abbildung 5-9 b;  $k_{\text{Ersatz,linear}}$  ist dabei unabhängig von der einwirkenden Kraft  $F$ . In Abbildung

5-13 sind die linearen Ersatzfedersteifigkeiten  $k_{\text{Ersatz,linear}}$  bei einem Schwellenabstand  $d = 0,6$  m in Abhängigkeit der Dammhöhe  $L_D$  aufgetragen. Für Schotteroberbau bzw. Feste Fahrbahn werden jeweils die Fälle unbelastet und belastet unterschieden, vgl. Abbildung 3-4. Die vollständigen Berechnungsergebnisse sind in Anhang A.1 zu finden; Tabelle 5-1 zeigt die Minimal- und Maximalwerte. Zur Berechnung wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Programm in Matlab R2014a [Mat2014] entwickelt, siehe Anhang B.2.

Mit steigender Federsteifigkeit  $K_{Sd}$  (vgl. Gl. 5.36 und Gl. 5.38) steigt auch der Wert  $k_{\text{Ersatz,linear}}$ , weiterhin verringern sich auch absolute und relative Differenzen zwischen den jeweiligen Werten bei  $L_D = 40$  m und  $L_D = 90$  m. Beispielsweise ist beim unbelasteten Schotteroberbau  $k_{\text{Ersatz,linear}}$  bei  $L_D = 90$  m um 3991 kN/m größer als bei  $L_D = 40$  m (entspricht etwa 2 %), bei belasteter Fester Fahrbahn ergibt sich lediglich eine Differenz von 0,3 kN/m. Ein Vergleich der Verläufe in Abbildung 5-13 zeigt zusätzlich, dass bei höherem  $K_{Sd}$  die Annäherung der Kurve an eine horizontale Asymptote viel schneller erfolgt.

**Tabelle 5-1: Grenzwerte Ersatzfedersteifigkeiten  $k_{\text{Ersatz,linear}}$  [kN/m] für  $d = 60$  cm**

Gleis	Längsverschiebewiderstand (Schotter)		Durchschubwiderstand (Feste Fahrbahn)	
	<u>un</u> belastet	<u>be</u> lastet	<u>un</u> belastet	<u>be</u> lastet
$k_{\text{Ersatz,linear}}$ ( $L_D = 40$ m)	172.688	302.063	422.452	587.434
$k_{\text{Ersatz,linear}}$ ( $L_D = 70$ m)	176.551	302.326	422.467	587.434
$k_{\text{Ersatz,linear}}$ ( $L_D = 90$ m)	176.679	302.327	422.467	587.434



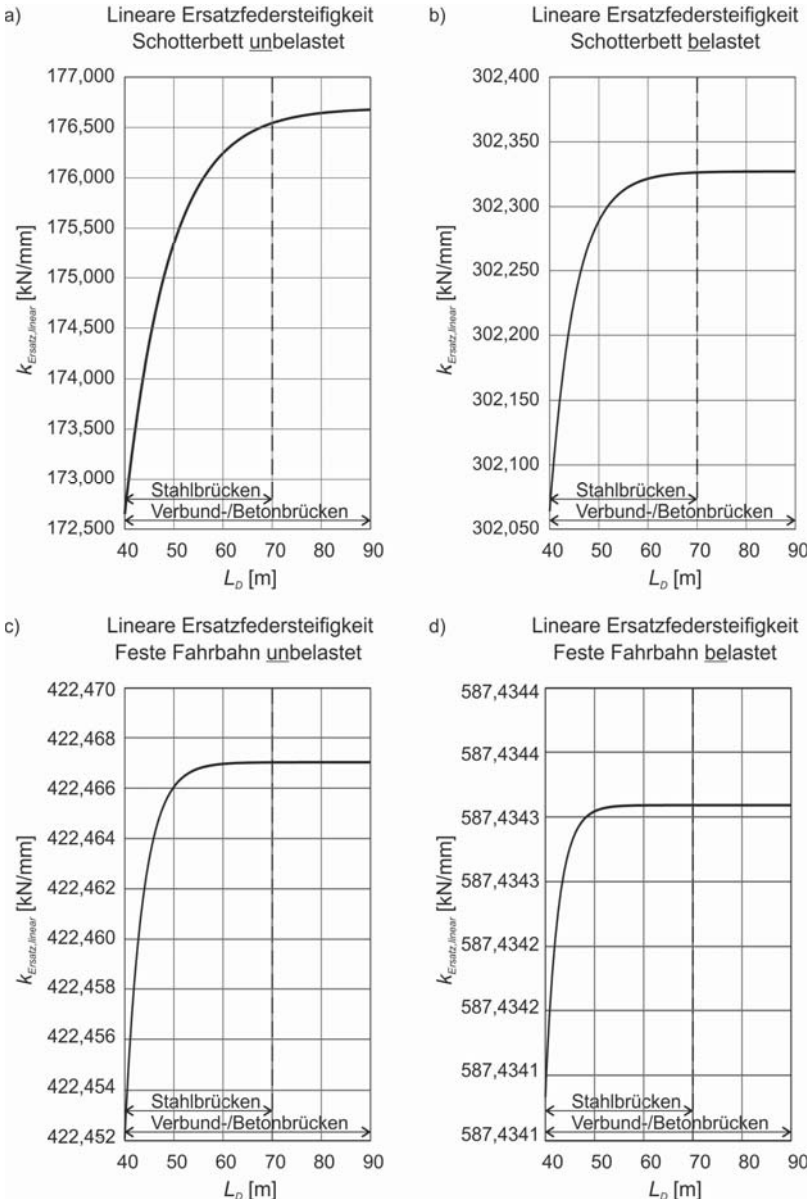


Abbildung 5-13 Lineare Ersatzfedersteifigkeiten für  $d = 0,6$  m und  $EA = 322$  MN in Abhängigkeit von  $L_D$

Wie bereits in [Big2016] für das unbelastete Schotterbett gezeigt, lassen sich die Abhängigkeiten in Abbildung 5-13 mit Polynomen nach dem Funktionsschema in Gl. 5.28 approximieren. In Anhang A.1 sind die Koeffizienten  $a_i$  für die vier Fälle für Polynome 4. bis 10. Grades dargestellt, sowie die Residuen  $R$  der Approximationen gemäß Gl. 5.43, wobei  $\Delta k_{\text{Ersatz,linear}}(L_D)$  die Differenz zwischen einem nach Gl. 5.41 ermittelten und einem nach Gl. 5.43 ermittelten Wert beschreibt. Für das unbelastete und belastete Schotterbett lassen sich bereits mit Polynomen 6. Ordnung gute Annäherungen mit Abweichungen unter 1 % erzielen. Bei der festen Fahrbahn sind für die Polynome 4. Ordnung die Abweichungen sehr gering.

$$k_{\text{Ersatz,linear}}(L_D) = \sum_{i=1}^n a_i L_D^i \quad n \geq 0 \quad \text{Gl. 5.42}$$

$$R = \sqrt{\sum (\Delta k_{\text{Ersatz,linear}}(L_D))^2} \quad \text{Gl. 5.43}$$

Generell ist zu beachten, dass der gewählte Schwellenabstand  $d$  das Berechnungsergebnis beeinflusst. Eine Erhöhung von  $d$  reduziert die Anzahl der in der Berechnung angesetzten Federn,  $\delta_{h,\text{res}}$  wird vergrößert und somit  $k_{\text{Ersatz,linear}}$  verringert; eine Verringerung des Abstandes hat den gegenteiligen Effekt:  $\delta_{h,\text{res}}$  wird verringert und somit  $k_{\text{Ersatz,linear}}$  vergrößert. Weiterhin sei erneut darauf hingewiesen, dass auch die Wahl anderer Gleisquerschnitte (abweichend von UIC60) zu abweichenden Ergebnissen führt.

### 5.3.3 Modellentwicklung äquivalentes Einmassensystem zur Ermittlung der ersten Biegeeigenfrequenz $n_0$

Die erste Biegeeigenfrequenz  $n_0$  spielt bei der Beurteilung dynamischer Effekte eine entscheidende Rolle. Wie in Kapitel 2.1.1 erläutert, ist die Bemessung ausschließlich anhand statischer Ersatzlastmodelle u.a. an die Erfüllung eines vereinfachten Resonanznachweises anhand einer Gegenüberstellung von  $n_0$  mit einem oberen und einem unteren Grenzwert gebunden (siehe Abbildung 1-1 und Abbildung 5-14). Wie in Kapitel 2.1.4 beschrieben, lässt sich  $n_0$  durch Umstellen der in Gl. 2.93 bzw. Gl. 5.44 gegebenen Formel nach [Bigg1964] zur Ermittlung der Kreiseigenfrequenz  $\omega_0$  eines äquivalenten Einmassenschwingers (vgl. Abbildung 2-17 bzw. Abbildung 5-15 b) ermitteln.

$$\omega_0 = n_0 \cdot 2\pi = \sqrt{\frac{k_E}{M_E}} = \sqrt{\frac{K_L \cdot k}{K_M \cdot M_t}} \quad \text{Gl. 5.44}$$

In Kapitel 2.1.1 wurde mit Gl. 2.102 bereits die Lösung für einen ideal gelenkig gelagerten Biegebalken mit konstanter Masse- und Steifigkeitsverteilung angegeben. Für ein System mit zusätzlichen Drehfedern an den Auflagern lassen sich anhand Gl. 5.45 bis Gl. 5.48 alle Eingangsparameter für die Ermittlung von  $n_0$  unter Berücksichtigung der Drehfedersteifigkeit  $c_\varphi$  ermitteln. Dabei wird zur Vereinfachung der Berechnungsgleichungen der Hilfswert  $\tilde{c}$  eingeführt.

$$\tilde{c} = L + \frac{2EI}{c_\varphi} \quad \text{Gl. 5.45}$$

$$k = \frac{384 \cdot \tilde{c} \cdot EI}{5L^3 \cdot \tilde{c} - 4L^4} \quad \text{Gl. 5.46}$$

$$K_M = \frac{\int_0^L m \cdot \Phi^2(x) dx}{m \cdot L} = \frac{256\tilde{c}^2}{(5L^3 \cdot \tilde{c} - 4L^4)^2} \cdot \left[ \frac{31}{630} L^6 - \frac{17}{210} \frac{L^7}{\tilde{c}} + \frac{1}{30} \frac{L^8}{\tilde{c}^2} \right] \quad \text{Gl. 5.47}$$

$$K_L = \frac{\int_0^L p \cdot \Phi(x) dx}{p \cdot L} = \frac{8(6\tilde{c} - 5L)}{15(5\tilde{c} - 4L)} \quad \text{Gl. 5.48}$$

Der Vollständigkeit halber werden in Gl. 5.49 bis Gl. 5.51 relevante Zwischenschritte der zugrundeliegenden Berechnungen angegeben.

$$M(x) = -\frac{1}{2 \cdot L} x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{L^2}{12 \cdot \tilde{c}} \quad \text{Gl. 5.49}$$

$$w(x) = \iint -\frac{M(x)}{EI} dx dx = \frac{1}{24EI} \left[ \frac{x^4}{L} - 2x^3 + \frac{L^2 x^2}{\tilde{c}} + L^2 x \left( 1 - \frac{L}{\tilde{c}} \right) \right] \quad \text{Gl. 5.50}$$

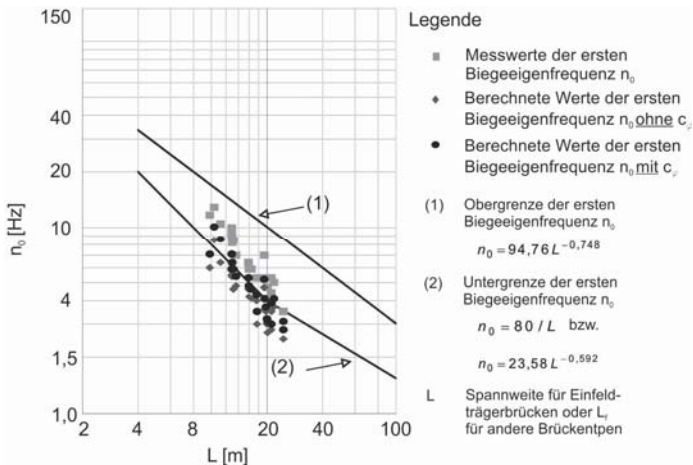
$$\Phi(x) = k \cdot w(x) = \frac{16\tilde{c}}{(5L^3 \cdot \tilde{c} - 4L^4)} \cdot \left[ \frac{x^4}{L} - 2x^3 + \frac{L^2 x^2}{\tilde{c}} + L^2 \cdot x \left( 1 - \frac{L}{\tilde{c}} \right) \right] \quad \text{Gl. 5.51}$$

Die Herleitung wurde vorab bereits in [Fel2016] [Big2016] gezeigt. Es sei darauf hingewiesen, dass die in Gl. 5.45 bis Gl. 5.51 gegebenen Gleichungen nur für identische Drehfedersteifigkeiten  $c_\varphi$  an beiden Auflagern gelten.

Weiterhin gelten Gl. 5.45 bis Gl. 5.51 für ein System mit konstanter Streckenlast (in Kapitel 5.3.4 werden die entsprechenden Gleichungen für eine Einzellast in Feldmitte angegeben). Bei der Ermittlung der Eigenfrequenz wird das unbelastete System betrachtet, allerdings muss zur Anwendung der Gl. 2.93 bzw. Gl. 5.44 eine Verformungsfigur und die zugehörige Lastform angenommen werden (siehe Abbildung 2-17), um  $K_L$  und  $K_M$  zu berechnen (Gl. 2.94 oder Gl. 2.95). In Kapitel 2.1.4 wurde gezeigt, dass sich tendenziell eine bessere Übereinstimmung zum entsprechenden

Balkensystem ergibt, wenn eine verteilte Last angenommen wird (die erste Biegeeigenform entspricht der Verformung unter der konstanten Eigenlast). Im ideal-gelenkigen Fall sind die Unterschiede zwischen den beiden Lastansätzen (Streckenlast, Einzellast) sehr gering. Je höher die Drehfedersteifigkeit  $c_\varphi$  ist, desto größer ist die Abweichung, im Fall eines beidseitig eingespannten Balkens ( $c_\varphi = \infty$ ) ergeben sich Unterschiede von 2 %.

In Tabelle 5-2 werden die mit und ohne Berücksichtigung von  $c_\varphi$  berechneten  $n_0$ -Werte der bereits in Kapitel 1.1 erwähnten DB-Messkampagne den zugehörigen Messwerten gegenübergestellt. Weiterhin angegeben werden Stützweiten  $L$ , Drehfedersteifigkeiten  $c_\varphi$  und die Untergrenzen  $n_{02}$  des vereinfachten Resonanznachweises. Unterschieden werden hier bei der  $c_\varphi$ -Ermittlung zwei Varianten. Bei Variante 1 wird der Abstand zwischen den Schwerelinien von Schiene und Überbau berücksichtigt (Abbildung 5-10 b). Bei Variante 2 wird der (deutlich größere) Abstand zwischen Schwerelinie Schiene und Lagerebene (Abbildung 5-10 a) berücksichtigt. Die Ermittlung der einzelnen Berechnungswerte von Variante 2 der *EÜ Glückaufstraße (West)* ist exemplarisch in [Big2016] zu finden. Da die gemessenen Werte aus den freien Ausschwingvorgängen nach Zugüberfahrten ermittelt wurden (vgl. Kapitel 2.2.2), werden hier die jeweiligen  $c_\varphi$ -Werte des unbelasteten Schotterüberbaus verwendet.



**Abbildung 5-14** Gegenüberstellung berechnete Biegeeigenfrequenzen  $n_0$  mit und ohne Berücksichtigung von  $c_\varphi$  (Variante 2) und gemessene Werte von WiB-Brücken

Zur Visualisierung dient Abbildung 5-14; im Vergleich zu Abbildung 1-1 wurden die unter Berücksichtigung von  $c_\varphi$  (Variante 2) berechneten  $n_0$ -Werte ergänzt; die Brücken, bei denen die entsprechenden Planunterlagen zur Ermittlung von  $c_\varphi$  nicht vorlagen, wurden aus der Darstellung entfernt.

Es zeigt sich, dass die Berücksichtigung von  $c_\varphi$  die Ergebnisse verbessert, die gemessenen  $n_0$ -Werte dennoch z.T. noch deutlich größer sind, insbesondere bei kurzen Brücken. Prozentual ergeben sich bei den 28 untersuchten Überbauten ohne Berücksichtigung von  $c_\varphi$  Unterschiede zur Messung zwischen 20 % und 49 %, bezogen auf den jeweiligen Messwert (Durchschnittswert der Abweichung: 34 %). Mit Berücksichtigung von  $c_\varphi$  (Variante 1) ergeben sich berechnete  $n_0$ -Werte, die zwischen 17 % und 44 % kleiner sind als der zugehörige Messwert (Durchschnittswert: 30 %). Mit Berücksichtigung von  $c_\varphi$  (Variante 2) ergeben sich berechnete  $n_0$ -Werte, die zwischen 11 % und 39 % kleiner sind als der zugehörige Messwert (Durchschnittswert: 25 %). Der Vergleich der berechneten und gemessenen Werte mit der Untergrenze  $n_{02}$  zur Erfüllung des vereinfachten Resonanznachweises nach [RiL804] [EN1991-2] zeigt, dass ohne Berücksichtigung von  $c_\varphi$  lediglich 17 % der  $n_0$ -Werte größer oder gleich  $n_{02}$  sind. Durch Berücksichtigung von  $c_\varphi$  kann dieser Anteil immerhin auf 21 % (Variante 1) bzw. 43 % (Variante 2) erhöht werden. Zu besserer Visualisierung sind in Tabelle 5-2 alle Werte hervorgehoben, die größer oder gleich dem entsprechenden  $n_{02}$ -Wert sind.

In Tabelle 5-2 sind Zwillingsbrücken (Brücken, die aus zwei durch eine Längsfuge getrennte Überbauten mit durchgängiger Schotterschicht bestehen, vgl. Kapitel 3.6) zusätzlich mit dem Index Z gekennzeichnet. Bei einigen Brücken wurden Messungen an beiden Überbauten vorgenommen, z.B. an der sehr detailliert von [Rau2011a] beschriebenen *EÜ Erfttalstraße*. Bei den zwei Überbauten der *EÜ Rössingbach* handelt es sich nicht um die Überbauten einer Zwillingsbrücke, sondern um zwei in Längsrichtung direkt hintereinander liegende Einfeldträger, die jeweils zweigleisig ausgebaut sind.

**Tabelle 5-2: Gegenüberstellung Berechnungen  $n_0$  mit und ohne  $c_\varphi$** 

Brücke	L [m]	$C_{\varphi,V1}$ [MNm/rad]	$C_{\varphi,V2}$ [MNm/rad]	$n_{0,ohne\ c_\varphi}$ [Hz]	$n_{0,\ c_\varphi,V1}$ [Hz]	$n_{0,\ c_\varphi,V2}$ [Hz]	$n_{0,gem.}$ [Hz]	$n_{02}$ [Hz]
EÜ Glückaufstr. (West) <sup>z</sup>	12,90	216,2	577,3	<b>6,3</b>	<b>6,6</b>	<b>7,1</b>	<b>9,4</b>	6,2
EÜ Glückaufstr. (Ost) <sup>z</sup>	12,90	216,2	577,3	<b>6,3</b>	<b>6,6</b>	<b>7,1</b>	<b>10,0</b>	6,2
EÜ Rössingb. I	12,90	236,6	522,6	5,5	5,7	5,9	<b>9,0</b>	6,2
EÜ Rössingb. II	12,90	236,6	522,6	5,4	5,6	5,9	<b>9,6</b>	6,2
EÜ Sellenstedt- Sehlem <sup>z</sup>	16,00	221,4	523,4	4,2	4,4	4,8	<b>5,9</b>	5,0
EÜ Helleweg (West) <sup>z</sup>	13,00	228,3	700,3	5,4	5,8	<b>6,4</b>	<b>8,2</b>	6,2
EÜ Helleweg (Ost) <sup>z</sup>	13,00	228,3	700,3	5,4	5,8	<b>6,4</b>	<b>8,2</b>	6,2
EÜ Lutterbach <sup>z</sup>	13,16	173,9	719,6	4,6	5,0	5,9	<b>8,5</b>	6,1
EÜ Iheringstr. <sup>z</sup>	13,60	191,1	347,1	4,8	5,2	5,4	<b>7,0</b>	5,9
EÜ K72 <sup>z</sup>	16,50	238,9	493,7	4,1	4,4	4,6	<b>5,9</b>	4,8
EÜ Goethestr. K-AC <sup>z</sup>	21,85	332,5	902,7	3,7	<b>3,8</b>	<b>4,1</b>	<b>5,0</b>	3,8
EÜ Goethestr. AC-K <sup>z</sup>	19,35	329,5	893,6	<b>4,7</b>	<b>4,9</b>	<b>5,2</b>	<b>7,0</b>	4,1
EÜ B 477 K-AC <sup>z</sup>	15,90	260,3	664,9	4,6	4,9	<b>5,3</b>	<b>6,4</b>	5,0
EÜ B 477 AC-K <sup>z</sup>	15,90	259,9	664,9	4,6	4,9	<b>5,3</b>	<b>6,4</b>	5,0
EÜ Rote-Kreuz- Str.	20,07	259,0	650,1	3,0	3,1	3,2	<b>4,7</b>	4,0

Brücke	L [m]	$C_{\varphi, V1}$ [MNm/rad]	$C_{\varphi, V2}$ [MNm/rad]	$n_{0, ohne\ c\varphi}$ [Hz]	$n_{0, c\varphi, V1}$ [Hz]	$n_{0, c\varphi, V2}$ [Hz]	$n_{0, gem.}$ [Hz]	$n_{02}$ [Hz]
EÜ Erftkanal	21,17	260,1	650,3	2,8	2,9	3,0	<b>4,4</b>	3,9
EÜ Große Erft	19,78	290,1	743,2	3,5	3,6	3,7	<b>5,3</b>	4,0
EÜ Herrenstr. AC-K <sup>z</sup>	10,35	189,6	497,7	<b>8,5</b>	<b>9,2</b>	<b>10,1</b>	<b>12,9</b>	7,7
EÜ Herrenstr. K- AC <sup>z</sup>	11,20	190,1	498,1	7,4	<b>7,9</b>	<b>8,6</b>	<b>10,5</b>	7,1
EÜ Erfttalstr. AC-K <sup>z</sup>	24,60	303,9	896,7	2,8	2,9	3,1	<b>3,5</b>	3,5
EÜ Erfttalstr. K-AC <sup>z</sup>	24,60	303,0	896,7	2,5	2,6	2,8	<b>3,5</b>	3,5
EÜ Fauler Gra- ben <sup>z</sup>	9,80	156,8	351,3	6,0	6,6	7,1	<b>11,7</b>	8,2
EÜ Elde <sup>z</sup>	17,70	184,2	431,4	3,0	3,2	3,5	<b>5,3</b>	4,5
EÜ Eldekanal <sup>z</sup>	20,20	202,5	488,7	2,7	2,9	3,1	<b>4,7</b>	4,0
EÜ Kloster- buschweg <sup>z</sup>	21,20	261,5	686	3,5	3,6	<b>3,9</b>	<b>5,3</b>	3,9
EÜ Hack- buschstr. <sup>z</sup>	19,50	251,2	630,5	3,6	3,8	<b>4,1</b>	<b>5,3</b>	4,1
EÜ Finkenku- ger Weg <sup>z</sup>	19,50	239,9	612,7	3,6	3,8	<b>4,1</b>	<b>5,3</b>	4,1
EÜ Straße 339	17,60	220,2	548,4	4	4,1	4,3	<b>5,3</b>	4,6

### 5.3.4 Modellentwicklung äquivalentes Einmassensystem für Überfahrtssimulationen unter Berücksichtigung der Einspannwirkung

Analog zum Vorgehen in Kapitel 5.1 wird im Rahmen dieser Arbeit ein äquivalentes Einmassensystem für die Durchführung von Zugüberfahrtssimulationen entwickelt, basierend auf dem Balkensystem mit Drehfedern in Abbildung 5-15.

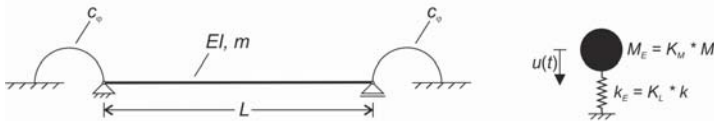


Abbildung 5-15: a) Balkensystem mit Drehfedern, b) äquivalentes Einmassensystem

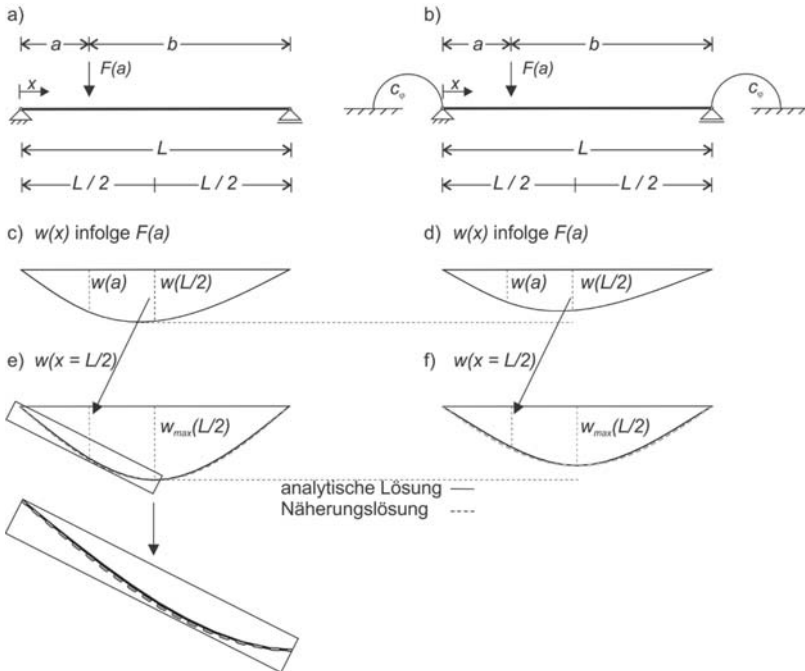


Abbildung 5-16 Einfeldsystem mit wandernder Einzellast a) ideal-gelenkig, b) gelenkig mit Drehfedern, c), d): Biegelinien infolge der Last  $F$  an Position  $a$ , e), f): Durchbiegung in Feldmitte bei beliebiger Laststellung analytisch und als Näherungslösung

In Abbildung 5-16 werden neben den bereits aus Abbildung 5-2 bekannten Durchbiegungsverläufen einer wandernden Einzellast auf einem ideal-gelenkigen Balken-



system, die entsprechenden Verläufe eines Balkensystems mit zusätzlichen Drehfedern dargestellt. Erwartungsgemäß ergibt sich für das System mit Drehfedern eine geringere Durchbiegung. Weiterhin lässt sich erkennen, dass auch für das System mit Drehfedern die Durchbiegung in Feldmitte  $w(x = L/2)$  sehr gut über die Sinusfunktion in Gl. 5.1 angenähert werden kann. Für die Lastposition  $a \neq L/2$  ergeben sich hier ebenfalls geringfügig größere Durchbiegungswerte. Die zugehörigen Biegelinien  $w(x)$  beider Systeme, Verdrehungen  $\varphi(x) = w'(x)$  und die Werte  $w(x = L/2)$  bzw.  $w'(x = 0)$  werden in den nachfolgenden Gleichungen (Gl. 5.2 bis Gl. 5.59) angegeben.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass eine Approximation eines voll eingespannten Systems über eine Sinusfunktion nicht möglich ist. Die im Rahmen dieser Arbeit hergeleiteten Drehfedersteifigkeiten  $c_\varphi$  sind allerdings im Verhältnis sehr klein, so dass die vorgenommene Approximation gültig bleibt.

Für  $x \leq a$

$$\begin{aligned}
 w(x) = \frac{F}{6 \cdot EI} & \left[ - \left( \frac{b}{L} - \frac{ab}{EI} \cdot \frac{(a-b)}{L^2 \left( \frac{L}{EI} + \frac{6}{c_\varphi} \right)} \right) \cdot x^3 \right. \\
 & + \frac{3ab}{EI} \frac{\left( \frac{b}{EI} + \frac{2b}{c_\varphi L} + \frac{2}{c_\varphi} \right)}{\left( \frac{L}{EI} + \frac{2}{c_\varphi} \right) \left( \frac{L}{EI} + \frac{6}{c_\varphi} \right)} \cdot x^2 \\
 & + \left( \frac{a}{L} (a-L)(a-2L) \right. \\
 & \left. \left. - \frac{ab}{EI} \frac{(a-b) \left( \frac{L}{EI} + \frac{2}{c_\varphi} \right) + 3L \left( \frac{b}{EI} + \frac{2b}{c_\varphi L} + \frac{2}{c_\varphi} \right)}{\left( \frac{L}{EI} + \frac{2}{c_\varphi} \right) \left( \frac{L}{EI} + \frac{6}{c_\varphi} \right)} \right) \cdot x \right]
 \end{aligned}
 \tag{Gl. 5.52}$$

$$\begin{aligned}
 w'(x) = \frac{F}{6 \cdot EI} & \left[ - \left( -3 \frac{b}{L} + 3 \frac{ab}{EI} \cdot \frac{(a-b)}{L^2 \left( \frac{L}{EI} + \frac{6}{c_\varphi} \right)} \right) \cdot x^2 \right. \\
 & + \frac{6ab}{EI} \frac{\left( \frac{b}{EI} + \frac{2b}{c_\varphi L} + \frac{2}{c_\varphi} \right)}{\left( \frac{L}{EI} + \frac{2}{c_\varphi} \right) \left( \frac{L}{EI} + \frac{6}{c_\varphi} \right)} \cdot x + \frac{a}{L} (a-L)(a-2L) \\
 & \left. - \frac{ab(a-b)}{EI} \frac{\left( \frac{L}{EI} + \frac{2}{c_\varphi} \right) + 3L \left( \frac{b}{EI} + \frac{2b}{c_\varphi L} + \frac{2}{c_\varphi} \right)}{\left( \frac{L}{EI} + \frac{2}{c_\varphi} \right) \left( \frac{L}{EI} + \frac{6}{c_\varphi} \right)} \right]
 \end{aligned} \quad \text{Gl. 5.53}$$

Für  $x > a$

$$\begin{aligned}
 w(x) = \frac{F}{6 \cdot EI} & \left[ \left( \frac{a}{L} + \frac{ab}{EI} \cdot \frac{(a-b)}{L^2 \left( \frac{L}{EI} + \frac{6}{c_\varphi} \right)} \right) \cdot x^3 \right. \\
 & - 3 \left( a - \frac{ab}{EI} \cdot \frac{\left( \frac{b}{EI} + \frac{2b}{c_\varphi L} + \frac{2}{c_\varphi} \right)}{\left( \frac{L}{EI} + \frac{2}{c_\varphi} \right) \left( \frac{L}{EI} + \frac{6}{c_\varphi} \right)} \right) \cdot x^2 \\
 & + \left( \frac{a}{L} (a^2 + 2L^2) \right. \\
 & \left. \left. - \frac{ab(a-b)}{EI} \frac{\left( \frac{L}{EI} + \frac{2}{c_\varphi} \right) + 3L \left( \frac{b}{EI} + \frac{2b}{c_\varphi L} + \frac{2}{c_\varphi} \right)}{\left( \frac{L}{EI} + \frac{2}{c_\varphi} \right) \left( \frac{L}{EI} + \frac{6}{c_\varphi} \right)} \right) \cdot x - a^3 \right]
 \end{aligned} \quad \text{Gl. 5.54}$$

$$\begin{aligned}
 w'(x) = \frac{F}{6 \cdot EI} & \left[ \left( 3 \frac{a}{L} + 3 \frac{ab}{EI} \cdot \frac{(a-b)}{L^2 \left( \frac{L}{EI} + \frac{6}{c_\varphi} \right)} \right) \cdot x^3 \right. \\
 & + \left( -6a - \frac{6ab}{EI} \cdot \frac{\left( \frac{b}{EI} + \frac{2b}{c_\varphi L} + \frac{2}{c_\varphi} \right)}{\left( \frac{L}{EI} + \frac{2}{c_\varphi} \right) \left( \frac{L}{EI} + \frac{6}{c_\varphi} \right)} \right) \cdot x + \frac{a}{L} (a^2 + 2L^2) \\
 & \left. - \frac{ab}{EI} \cdot \frac{(a-b)}{\left( \frac{L}{EI} + \frac{6}{c_\varphi} \right)} - \frac{ab}{EI} \cdot \frac{3L \left( \frac{b}{EI} + \frac{2b}{c_\varphi L} + \frac{2}{c_\varphi} \right)}{\left( \frac{L}{EI} + \frac{2}{c_\varphi} \right) \left( \frac{L}{EI} + \frac{6}{c_\varphi} \right)} \right]
 \end{aligned} \quad \text{Gl. 5.55}$$

### Durchbiegung in Feldmitte

Für  $a > L/2$

$$w\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{F}{6 \cdot EI} \cdot \left[ -\frac{bL^2}{8} - \frac{3}{8} \cdot \frac{ab(a-b)L}{EI\left(\frac{L}{EI} + \frac{6}{c_\varphi}\right)} - \frac{3abL^2}{4EI} \frac{\left(\frac{b}{EI} + \frac{2b}{c_\varphi L} + \frac{2}{c_\varphi}\right)}{\left(\frac{L}{EI} + \frac{2}{c_\varphi}\right)\left(\frac{L}{EI} + \frac{6}{c_\varphi}\right)} + \frac{1}{2} \cdot a(a-L)(a-2L) \right] \quad \text{Gl. 5.56}$$

Für  $a \leq L/2$

$$w\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{F}{6 \cdot EI} \cdot \left[ \frac{3}{8}aL^2 - \frac{1}{2}a^3 - \frac{3}{8} \cdot \frac{ab(a-b)L}{EI\left(\frac{L}{EI} + \frac{6}{c_\varphi}\right)} - \frac{3abL^2}{4EI} \frac{\left(\frac{b}{EI} + \frac{2b}{c_\varphi L} + \frac{2}{c_\varphi}\right)}{\left(\frac{L}{EI} + \frac{2}{c_\varphi}\right)\left(\frac{L}{EI} + \frac{6}{c_\varphi}\right)} \right] \quad \text{Gl. 5.57}$$

Auflagerverdrehungen:

$$w'(x = 0) = \frac{F}{6 \cdot EI} \cdot \left[ \frac{a}{L}(a-L)(a-2L) - \frac{ab(a-b)\left(\frac{L}{EI} + \frac{2}{c_\varphi}\right) + 3L\left(\frac{b}{EI} + \frac{2b}{c_\varphi L} + \frac{2}{c_\varphi}\right)}{EI\left(\frac{L}{EI} + \frac{2}{c_\varphi}\right)\left(\frac{L}{EI} + \frac{6}{c_\varphi}\right)} \right] \quad \text{Gl. 5.58}$$

$$\begin{aligned}
 w'(x=L) = & \frac{F}{6 \cdot EI} \\
 & \cdot \left[ -3aL + 2 \frac{ab(a-b)}{EI \left( \frac{L}{EI} + \frac{6}{c_\varphi} \right)} + \frac{a}{L} (a^2 + 2L^2) \right. \\
 & \left. + 3 \frac{abL}{EI} \frac{\left( \frac{b}{EI} + \frac{2b}{c_\varphi L} + \frac{2}{c_\varphi} \right)}{\left( \frac{L}{EI} + \frac{2}{c_\varphi} \right) \left( \frac{L}{EI} + \frac{6}{c_\varphi} \right)} \right]
 \end{aligned} \tag{Gl. 5.59}$$

Der im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Matlab-Code für ein System mit zusätzlichen Drehfedern an den Auflagern zur Durchführung von Zugüberfahrtssimulationen ist in Anhang B.5 gegebenen. Im Vergleich zum äquivalenten Einmassensystem mit gleichmäßig verteilter Last (Kapitel 5.3.3) ergeben sich für eine Einzellast in Feldmitte leicht abweichende Parameter, welche in Gl. 5.60 bis Gl. 5.63 angegeben sind.

$$\tilde{c} = L + \frac{2EI}{c_\varphi} \tag{Gl. 5.60}$$

$$k = \frac{48 \cdot EI}{L^3 \cdot \left( 1 - \frac{3L}{4\tilde{c}} \right)} \tag{Gl. 5.61}$$

$$K_M = \frac{\int_0^L m \cdot \Phi^2(x) dx}{m \cdot L} = \frac{18}{\left( 1 - \frac{3L}{4\tilde{c}} \right)^2} \cdot \left[ \frac{17}{630} - \frac{61}{1440} \frac{L}{\tilde{c}} + \frac{1}{60} \frac{L^2}{\tilde{c}^2} \right] \tag{Gl. 5.62}$$

$$K_L = \frac{\sum^r F_r \Phi_r}{\sum^r F_r} = 1,0 \tag{Gl. 5.63}$$

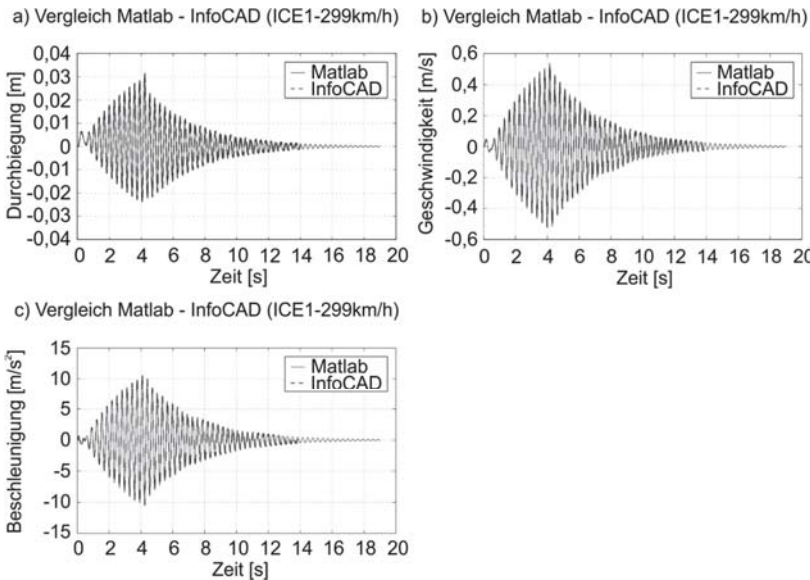
$$M(x) = F \left( \frac{1}{2}x - \frac{L^2}{8\tilde{c}} \right) \quad \text{für } x \leq L/2 \tag{Gl. 5.64}$$

$$w(x) = \iint \frac{-M(x)}{EI} dx dx = \frac{F}{16 \cdot EI} \left[ -\frac{4}{3}x^3 + \frac{L^2}{\tilde{c}}x^2 + \left( L^2 - \frac{L^3}{\tilde{c}} \right)x \right] \tag{Gl. 5.65}$$

$$\Phi(x) = k \cdot w(x) = \frac{3}{L^3 \cdot \left( 1 - \frac{3L}{4\tilde{c}} \right)} \cdot \left[ -\frac{4}{3}x^3 + \frac{L^2}{\tilde{c}}x^2 + \left( L^2 - \frac{L^3}{\tilde{c}} \right)x \right] \tag{Gl. 5.66}$$

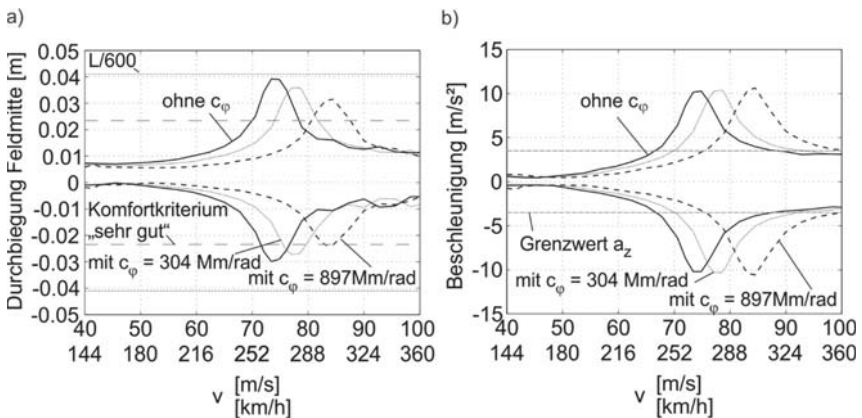
Auf der sicheren Seite liegend wird im Rahmen dieses Kapitels zunächst die Drehfedersteifigkeit des unbelasteten Gleises verwendet, da bis zum Zeitpunkt, an dem die erste Last die Brücke verlässt, der Bahndamm hinter der Brücke unbelastet ist und ab dem Zeitpunkt, an dem die letzte Last auf die Brücke fährt, der Bahndamm vor der Brücke unbelastet ist. Die in Gl. 5.60 bis Gl. 5.63 gegebenen Parameter gelten nur für Systeme mit gleichen Drehfedersteifigkeiten  $c_\varphi$  an beiden Auflagern.

Für das in Kapitel 5.1 bereits exemplarisch betrachtete Brückenbauwerk *EÜ Erfttalstraße (Südüberbau)* ( $L = 24,6$  m,  $EI = 29796$  MNm<sup>2</sup> und  $m = 25,98$  t/m) ergibt sich  $c_\varphi = 304$  MNm/rad (Variante 1) bzw.  $c_\varphi = 897$  MNm/rad (Variante 2). Zugrunde gelegt wurden:  $L_D = 52,6$  m  $\rightarrow$  87 Federn  $\rightarrow k_{Ersatz,lin,unbelastet} = 175,7$  MN/m, für Variante 1:  $h_{SL} = 1,32$  m bzw. für Variante 2:  $h_{SL} = 2,26$  m). Die erste Biegeeigenfrequenz  $n_0$  wird durch die Berücksichtigung der Einspannwirkung durch Gleise von 2,78 Hz auf 2,92 Hz bzw. 3,15 Hz erhöht, was die 1. kritische Geschwindigkeit  $v_{res,1,0,ICE1}$  gemäß Gl. 2.16 von 264 km/h auf 277 km/h bzw. 299 km/h anhebt. Für  $v_{res,1,0,ICE1} = 299$  km/h erfolgt exemplarisch eine Gegenüberstellung mit einem entsprechenden InfoCAD-Modell in Abbildung 5-17. Auch bei der Gegenüberstellung dieser beiden Verläufe ergeben sich lediglich minimale Unterschiede.



**Abbildung 5-17 Vergleich berechneter ICE 1-Überfahrenen Einmassenschwinger - Balkensystem mit Drehfedern InfoCAD mit  $v_{res,1,0,ICE1} = 299$  km/h a) Durchbiegungen, b) Geschwindigkeiten, c) Beschleunigungen (jeweils vertikal in Feldmitte)**

Abbildung 5-18 vergleicht in Abhängigkeit der Überfahrtsgeschwindigkeit  $v$  die am jeweiligen äquivalenten Einmassensystem (ideal-gelenkiges Ausgangssystem und 2 Varianten des Ausgangsystems mit Drehfedern) ermittelten Maximal- und Minimalwerte von vertikaler Durchbiegung und Beschleunigung. Alle Berechnungen wurden mit den im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Matlab-Codes durchgeführt. Die bereits erwähnte Anhebung der kritischen Geschwindigkeit durch die Berücksichtigung der Auflagerdrehfedern ist deutlich zu erkennen. Weiterhin erkennbar ist auch die beispielsweise bereits von [Rau2011a] [Spe2010] erwähnte Tatsache, dass die maximalen Durchbiegungen eines steiferen Systems kleiner sind als die des weicherer Systems mit ansonsten unveränderten Parametern Stützweite und Masse (Abweichung zwischen Ausgangssystem und Variante 2 etwa 24 %), während die Maximalwerte der Beschleunigungen näherungsweise unverändert bleiben (Abweichung etwa 3 %).

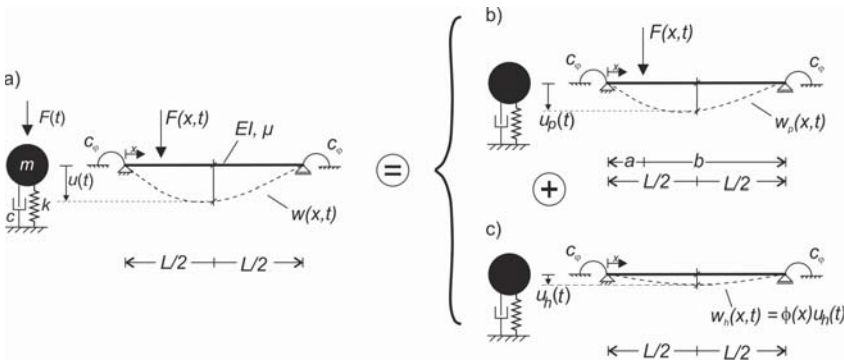


**Abbildung 5-18 Vergleich gelenkiges System (ohne  $c_\phi$ ) - System mit Drehfedern (mit  $c_\phi$ ) bei ICE 1-Überfahrten: a) Durchbiegung in Feldmitte, b) vertikale Beschleunigung in Feldmitte, jeweils Einhüllende der Minimal- und Maximalwerte**

Mit dem äquivalenten Einmassensystem lassen sich für eine Nachweisführung im Rahmen einer Bemessung bereits die maximale Beschleunigung und Durchbiegung in Feldmitte ermitteln. In Abbildung 5-18 a) sind die jeweiligen Maximalwerte der Durchbiegung im Feldmitte zur Sicherstellung der Betriebssicherheit und zur Sicherstellung des Reisendenkomforts (hier das Kriterium für „sehr gut“) dargestellt; in Abbildung 5-18 b) ist der Maximalwert der vertikalen Überbaubeschleunigung ergänzt, siehe Kapitel 2.1.3. Das Beispiel zeigt exemplarisch, dass durch die Berücksichtigung der Einspannung nach Variante 2 die Erfüllung beider Kriterien bis  $v \approx 280 \text{ km/h}$  nachgewiesen werden kann.

### 5.3.5 Modellentwicklung zur Bestimmung weiterer Systemgrößen

Für eine vollständige Bemessung müssen aus den vorliegenden Ergebnissen des äquivalenten Einmassensystems allerdings noch weitere Systemgrößen des Balkensystems abgeleitet werden, z.B. die Verdrehung am Auflager  $\varphi$  (Überprüfung der in der Berechnung zunächst angenommenen linearen Drehfedersteifigkeit  $c_\varphi$  anhand des Kriteriums in Gl. 5.29, sowie der aus Gl. 2.23 resultierenden horizontalen und vertikalen Verformungen am Überbauende, siehe Kapitel 2.1.3). Weiterhin müssen alle für Nachweise im ULS und SLS erforderlichen maßgebenden Schnittgrößen ermittelt werden. Da in dieser Arbeit der Fokus auf WiB-Einfeldträgerbrücken mit kurzen und mittelweiten Spannweiten liegt (i.d.R. Ausführung ohne Längsstöße, vgl. Kapitel 3.6), werden die für diese Fälle besonders interessanten Stellen betrachtet: Feldmitte und Auflagerbereiche.



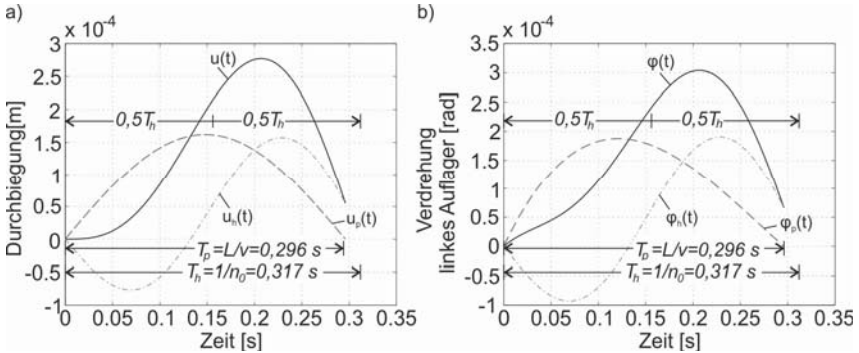
**Abbildung 5-19 a) Äquivalenter Einmassenschwinger, b) partikulärer und c) homogener Anteil am Einmassenschwinger und Balkensystem**

Zur Ableitung der gesuchten Zeitverläufe werden im Rahmen dieser Arbeit zunächst homogene und partikuläre Anteile (vgl. Kapitel 2.1.4) der am äquivalenten Einmassensystem ermittelten Gesamtverformung  $u(t)$  separiert, siehe Abbildung 5-19. Der homogene Anteil  $u_h(t)$  beschreibt das Eigenschwingungsverhalten des Systems und kann gemäß Gl. 5.67 ermittelt werden. Der partikuläre Anteil  $u_p(t)$  zur Berücksichtigung der einwirkenden Lasten ergibt sich dabei entsprechend Gl. 5.12.

$$u_h(t) = u(t) - u_p(t) \quad \text{Gl. 5.67}$$

Abbildung 5-20 zeigt exemplarisch für das untersuchte Brückenbauwerk ( $c_\varphi$  nach Variante 2) die einzelnen Durchbiegungsanteile infolge der Überfahrt einer Einzelast mit  $v=299$  km/h. Der Unterschied zwischen Erregerperiode (partikulärer Anteil) und Eigenperiode (homogener Anteil) ist deutlich zu erkennen. Da es sich hier um

lediglich eine einzelne wandernde Last handelt, bestimmt sich die Erregerperiode lediglich aus dem Zusammenhang von Brückenlänge und Überfahrtsgeschwindigkeit (Gl. 5.13) zu 0,29 s (bei einer Folge von aufeinanderfolgenden Einzellasten ergibt sich die Erregerperiode durch Umstellen von Gl. 2.16). Wie von [Lu2012] intensiv diskutiert, ergeben sich bei einer Reihe von Einzellasten i.d.R. die maßgebenden Erregerperioden bzw. -frequenzen aus den Abständen der Achslasten und nicht aus der Brückenlänge. Die Eigenperiode ergibt sich aus der Eigenfrequenz 3,15 Hz zu 0,32 s. Abbildung 5-20 b zeigt exemplarisch die Anteile und die Gesamtlösung der aus dem Durchbiegungsverlauf in Feldmitte in Abbildung 5-20 a ermittelten Verdrehungen am linken Auflager.



**Abbildung 5-20 Überfahrt einer Einzellast (195 kN) mit  $v = 299 \text{ km/h}$  a) vertikale Durchbiegungen in Feldmitte, b) Verdrehungen am linken Auflager**

Die homogenen Anteile von Verdrehung  $\varphi_h$  und Moment  $M_h$  lassen sich aus der Durchbiegung in Feldmitte  $u_h(t)$  über die dimensionslose Formfunktion  $\Phi(x)$  (Gl. 5.51, Annahme gleichmäßiger Massen- und Lastverteilungen, siehe Abbildung 5-19 c) ableiten, dabei beträgt  $\Phi(L/2) = 1,0$ . Der Hilfwert  $\tilde{c}$  für die nachfolgenden Berechnungen kann Gl. 5.45 entnommen werden.

$$\varphi_h(x, t) = u_h(t) \cdot \frac{\Phi'(x)}{\Phi\left(\frac{L}{2}\right)} = u_h(t) \cdot \Phi'(x) \quad \text{Gl. 5.68}$$

$$M_h(x, t) = -u_h(t) \cdot EI \cdot \frac{\Phi''(x)}{\Phi\left(\frac{L}{2}\right)} = -u_h(t) \cdot EI \cdot \Phi''(x) \quad \text{Gl. 5.69}$$

$$\Phi'(x) = \frac{16\tilde{c}}{(5L^3\tilde{c} - 4L^4)} \left[ 4\frac{x^3}{L} - 6x^2 + 2\frac{L^2x}{\tilde{c}} + L^2\left(1 - \frac{L}{\tilde{c}}\right) \right] \quad \text{Gl. 5.70}$$



$$\Phi''(x) = \frac{32\tilde{c}}{(5L^3\tilde{c} - 4L^4)} \left[ 6\frac{x^2}{L} - 6x + \frac{L^2}{\tilde{c}} \right] \quad \text{Gl. 5.71}$$

$$\Phi'(0) = \frac{16(\tilde{c} - L)}{(5L\tilde{c} - 4L^2)} \quad \text{Gl. 5.72}$$

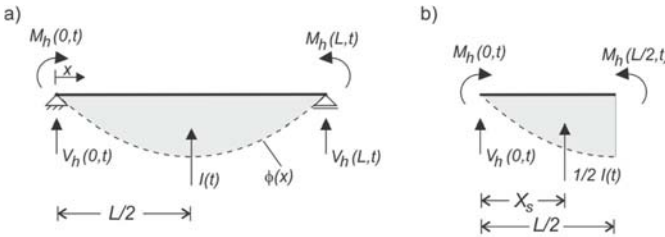
$$\Phi'(L) = -\Phi'(0) = \frac{16(L - \tilde{c})}{(5L\tilde{c} - 4L^2)} \quad \text{Gl. 5.73}$$

$$\Phi''(0) = \Phi''(L) = \frac{32}{(5L\tilde{c} - 4L^2)} \quad \text{Gl. 5.74}$$

$$\Phi''(L/2) = \frac{16(2L - 3\tilde{c})}{(5L\tilde{c} - 4L^3)} \quad \text{Gl. 5.75}$$

An den Auflagern ( $x = 0$ , bzw.  $x = L$ ), sowie in Feldmitte ( $x = L/2$ ) ergeben sich die in Gl. 5.72 bis Gl. 5.75 gegebenen Parameter.

Zur Ermittlung der Querkraft und der Auflagerreaktionen muss das dynamische Gleichgewicht am Balken gebildet werden, vgl. Abbildung 5-21, da in die Summe der vertikalen Kräfte auch die Trägheit des Systems  $I(t)$  miteinbezogen werden muss, d.h. ein Vorgehen zur Ermittlung der Querkraft analog zur Momentenermittlung über eine dritte Ableitung von  $\Phi(x)$  ist nicht möglich.



**Abbildung 5-21 Dynamisches Gleichgewicht der homogenen Anteile a) gesamte Brückenlänge, b) halbe Brückenlänge**

Wie in [Bigg1964] beschrieben, ist die Verteilung der Trägheit gleich der dimensionslosen Formfunktion  $\Phi(x)$ , dementsprechend kann die Position  $x_{s,\Phi}$  der resultierenden halben Trägheitskraft (Abbildung 5-21 b) anhand Gl. 5.76 und Gl. 5.77 ermittelt werden. Aus dem Momentengleichgewicht um diese Stelle lässt sich anhand Gl. 5.78 der homogene Anteil der Querkraft am linken Auflager  $V_h(0,t)$  ermitteln.

$$A_{\Phi} = \int_0^{L/2} \Phi(x) dx = \frac{2 \cdot L(12 \cdot \tilde{c} - 10 \cdot L)}{15(5 \cdot \tilde{c} - 4 \cdot L)} \quad \text{Gl. 5.76}$$

$$x_{S,\Phi} = \frac{1}{A_{\Phi}} \int_0^{L/2} x \cdot \Phi(x) dx = \frac{L(61 \cdot \tilde{c} - 50 \cdot L)}{16(12 \cdot \tilde{c} - 10 \cdot L)} \quad \text{Gl. 5.77}$$

$$V_h(0, t) = V_h(L, t) = \frac{M_h(L/2, t) - M_h(0, t)}{x_{S,\Phi}} \quad \text{Gl. 5.78}$$

Anders als bei den in [Bigg1964] gegebenen Beispielen lassen sich die Gesamtauf-lagerquerkräfte  $V(0, t)$  und  $V(L, t)$  nicht mehr problemlos direkt aus der dem dynami-schen Gleichgewicht des Gesamtsystems (homogene und partikuläre Anteile) er-mitteln, da sich die Position der wandernden Last  $F$  für jeden Zeitschritt ändert und somit für jeden Zeitschritt ein neues Gleichgewicht (mit einem anderen Anteil von  $I$  und einem anderen  $x_{S,\Phi}$ ) aufgestellt werden müsste, sodass sich ein geeigneter Schnitt mit nur einer unbekannten Querkraft wie in Abbildung 5-21 b ergibt. Daher werden hier weiterhin homogener und partikulärer Anteil getrennt betrachtet.

Die partikulären (statischen) Anteile lassen sich in Abhängigkeit der Position  $a$  der Einzellast (vgl. Abbildung 5-2) ermitteln, die Auflagerverdrehungen sind bereits in Gl. 5.58 und Gl. 5.59 angegeben, wobei Gl. 5.79 gilt. Die Gleichungen für die Mo-mente am Auflager und in Feldmitte sind in Gl. 5.84 bis Gl. 5.86 gegeben, wobei  $\tilde{C}$  und  $\tilde{\tilde{C}}$  Hilfswerte für die Durchführung der Berechnungen sind.

$$\varphi_p(x, t) = w'(x, t) \quad \text{Gl. 5.79}$$

$$M_p(x, t) = \begin{cases} \left( \frac{F(L-a)}{L} + \tilde{\tilde{C}} \right) x + \tilde{C} & \text{für } x \leq a \\ \left( \frac{-Fa}{L} + \tilde{\tilde{C}} \right) x + Fa + \tilde{C} & \text{für } x > a \end{cases} \quad \text{Gl. 5.80}$$

$$V_p(x, t) = \begin{cases} \left( \frac{F(L-a)}{L} + \tilde{\tilde{C}} \right) & \text{für } x \leq a \\ \left( \frac{-Fa}{L} + \tilde{\tilde{C}} \right) & \text{für } x > a \end{cases} \quad \text{Gl. 5.81}$$

$$\tilde{C} = \frac{-F \cdot a(L-a) \left( \frac{L-a}{EI} + \frac{2(L-a)}{c_\varphi L} + \frac{2}{c_\varphi} \right)}{EI \left( \frac{L}{EI} + \frac{2}{c_\varphi} \right) + \left( \frac{L}{EI} + \frac{6}{c_\varphi} \right)} \quad \text{Gl. 5.82}$$

$$\tilde{\tilde{C}} = \frac{F \cdot a(L-a)(L-2a)}{EI \cdot L^2 \left( \frac{L}{EI} + \frac{6}{c_\varphi} \right)} \quad \text{Gl. 5.83}$$

$$M_p(0, t) = \tilde{C} \quad \text{Gl. 5.84}$$

$$M_p(L/2, t) = \begin{cases} \left( \frac{F(L-a)}{L} + \tilde{\tilde{C}} \right) \frac{L}{2} + \tilde{C} & \text{für } \frac{L}{2} \leq a \\ \left( \frac{-Fa}{L} + \tilde{\tilde{C}} \right) \frac{L}{2} + Fa + \tilde{C} & \text{für } \frac{L}{2} > a \end{cases} \quad \text{Gl. 5.85}$$

$$M_p(L, t) = \tilde{\tilde{C}} \cdot L + \tilde{C} \quad \text{Gl. 5.86}$$

$$V_p(0, t) = \left( \frac{F(L-a)}{L} + \tilde{\tilde{C}} \right) \quad \text{Gl. 5.87}$$

$$V_p(L, t) = \left( \frac{-Fa}{L} + \tilde{\tilde{C}} \right) \quad \text{Gl. 5.88}$$

Die zeitabhängigen Gesamtverläufe der Verdrehungen  $\varphi(x, t)$ , Momente  $M(x, t)$  und Querkräfte  $V(x, t)$  lassen sich für die gesuchte Stelle  $x$  gemäß Gl. 5.89 bis Gl. 5.91 ermitteln, alternativ besteht zwischen Verdrehung und Moment am Auflager der in Gl. 5.30 gegebene Zusammenhang.

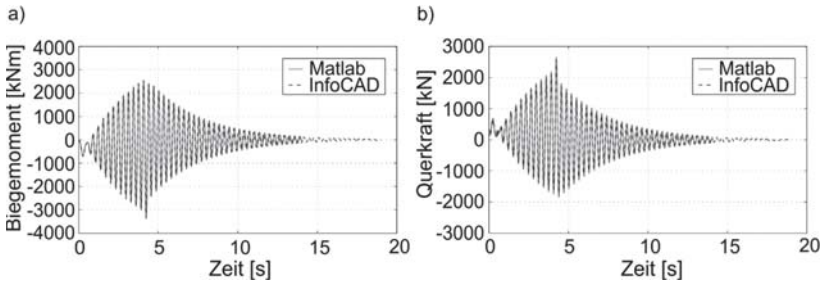
$$\varphi(x, t) = \varphi_h(x, t) + \varphi_p(x, t) \quad \text{Gl. 5.89}$$

$$M(x, t) = M_h(x, t) + M_p(x, t) \quad \text{Gl. 5.90}$$

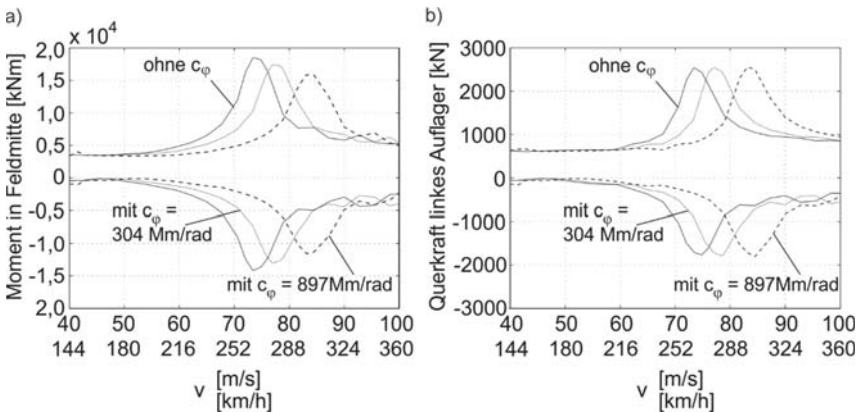
$$V(x, t) = V_h(x, t) + V_p(x, t) \quad \text{Gl. 5.91}$$

Bei einer Reihe von Einzellasten (vollständige Achslastkonfiguration eines Zuges) ist das Vorgehen analog. Wie in Abbildung 5-22 gezeigt, ergeben sich auch hier sehr gute Übereinstimmungen zwischen am äquivalenten Einmassensystem in Matlab und am Balkensystem in InfoCAD [Inf2014] errechneten Schnittgrößen (hier exemplarisch dargestellt sind Querkraft und Einspannmoment am linken Auflager). Die im Rahmen dieses Kapitels für ein Ausgangssystem mit Drehfedern entwickelten Gleichungen gelten auch für das ideal-gelenkige Ausgangssystem aus Kapitel

5.1, dann gilt  $c_\varphi = 0$  (bei Anwendung des in Anhang B.5 gegebenen Matlab-Codes muss ein Wert  $c_\varphi \ll 1$  gewählt werden, da die Verwendung von  $c_\varphi = 0$  zu numerischen Problemen führt).



**Abbildung 5-22 Vergleich berechneter ICE 1-Überfahrten Einmassenschwinger - Balkensystem mit Drehfedern InfoCAD mit  $v_{res,1,0,ICE1} = 299$  km/h (Variante 2) a) Einspannmoment  $M_y$ , b) Querkraft  $V_z$  (jeweils am linken Auflager)**

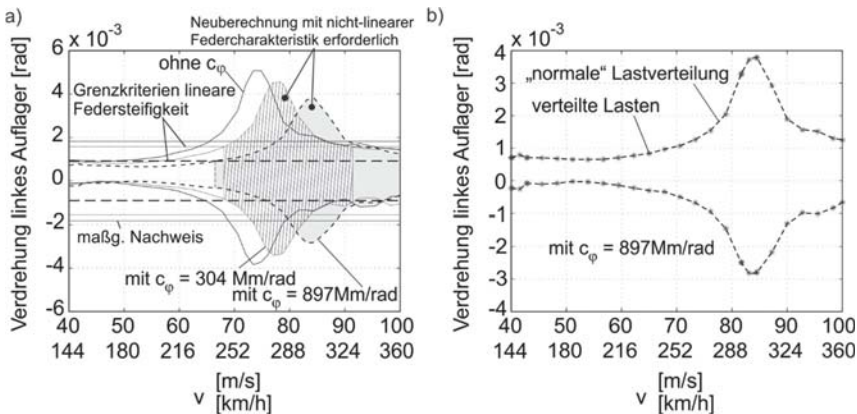


**Abbildung 5-23 Vergleich gelenkiges System - Systeme mit Drehfedern bei ICE 1-Überfahrten: a) Moment in Feldmitte, b) Querkraft am linken Auflager**

In Abbildung 5-23 sind in Abhängigkeit der Überfahrtsgeschwindigkeit die Maximal- und Minimalwerte von Moment in Feldmitte und Querkraft am linken Auflager dargestellt. Der Vergleich von ideal-gelenkigem System und Systemen mit Drehfedern zeigt, dass durch die Berücksichtigung der Drehfedern (Systemveränderung) betragsmäßig kleinere Feldmomente entstehen, siehe Abbildung 5-23a. In [Rau2011a] wurde gezeigt, dass bei der Ermittlung der maximalen und minimalen Feldmomente durch ein Erhöhen der Biegesteifigkeit  $EI$  bei ansonsten gleichbleibenden Systemparametern (gelenkiger Balken mit gleicher Stützweite, gleiche Masse) lediglich ein Verschieben der in Abbildung 5-23 a dargestellten Peaks nach rechts erzielt werden

kann, wobei die Absolutwerte annähernd gleich bleiben. Bei der Querkraft in Abbildung 5-23 b ergibt sich durch die Berücksichtigung der Drehfedern eine Verschiebung der Peaks nach rechts.

In Abbildung 5-24 a sind die maximalen und minimalen Auflagerverdrehungen am linken Auflager über die Überfahrtsgeschwindigkeit aufgetragen. Erwartungsgemäß ergeben sich auch hier für die Systeme mit Drehfedern kleinere Maximal- und Minimalwerte. Als Grenzwerte sind einerseits das Grenzkriterium für die Annahme einer linearen Drehfedercharakteristik (kein Durchrutschen) nach Gl. 5.29 (betrifft nur die Systeme mit Drehfedern) sowie der maßgebende Fall der zulässigen Verdrehung zur Einhaltung horizontaler und vertikaler Verschiebungen am Überbauende nach Gl. 2.23 und Tabelle 2-3 ( $8 \text{ mm}/1,49 \text{ m} = 0,0054 \text{ rad}$  bzw.  $2 \text{ mm}/1,10 \text{ m} = 0,0018 \text{ rad}$ ) eingetragen. Ab einer Überfahrtsgeschwindigkeit von  $240 \text{ km/h}$  (Variante 2) bzw.  $245 \text{ km/h}$  (Variante 1) werden für die Systeme mit Drehfedern Neuberechnungen unter Berücksichtigung nicht-linearer Federcharakteristiken erforderlich (Kapitel 5.4.2).



**Abbildung 5-24 Minimale und maximale Verdrehungen am linken Auflager bei ICE 1-Überfahrten: a) Vergleich gelenkiges System (ohne  $c_\phi$ ) - Systeme mit Drehfedern (mit  $c_\phi$ ), b) "normale" Lastverteilung - Lastverteilung gemäß Abbildung 2-7**

Bevor eine (aufwendigere) Berechnung mit nicht-linearer Federcharakteristik unternommen wird, lohnt natürlich eine Überprüfung, inwieweit sich möglicherweise bereits günstigere Ergebnisse durch eine Berücksichtigung der Lastverteilung durch die Schienen in Längsrichtung gemäß Abbildung 2-7 in der Berechnung mit linearer Federcharakteristik erzielen lassen. Die entsprechenden Verdrehungen sind in Abbildung 5-24 b dargestellt. In diesem konkreten Fall zeigt sich kein Unterschied zwischen den beiden Berechnungen, allerdings wurde bereits in Kapitel 2.1.2 erläutert,

dass sich die Berücksichtigung der Lastverteilung in Längsrichtung lediglich bei kurzen Brücken ( $L \leq 10$  m) bemerkbar macht.

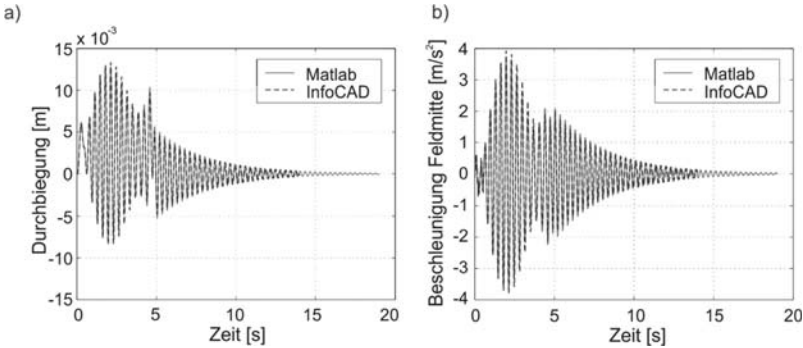
### 5.3.6 Betrachtung höherer Moden

Anhand eines äquivalenten Einmassensystems lassen sich die Einflüsse höherer Moden nicht berücksichtigen; für einen Nachweis nach [RiL804] sind aber alle kritischen Geschwindigkeiten  $v_{res,i,j,k}$  (Gl. 2.16) unter Berücksichtigung aller Eigenfrequenzen  $n_j \leq n_{max}$  nach Gl. 2.17 in die Berechnung miteinzubeziehen (vgl. Kapitel 2.1.2). Anhand des in Anhang B.1 gegebenen Matlab-Codes lassen sich die höheren Biegeeigenfrequenzen des in Kapiteln 5.1 und 5.3.4 untersuchten Brückenbauwerks *EÜ Erfttalstraße* ermitteln. Tabelle 5-3 listet die Biegeeigenfrequenzen  $n_j$  bis zum Grenzwert  $n_{max} = 30$  Hz nach Gl. 2.17 des ideal-gelenkigen Systems und der Systeme mit zusätzlichen Drehfedersteifigkeiten  $c_\varphi$  auf. In den nachfolgenden Untersuchungen wird nur noch das System mit  $c_\varphi = 897$  MNm/rad betrachtet.

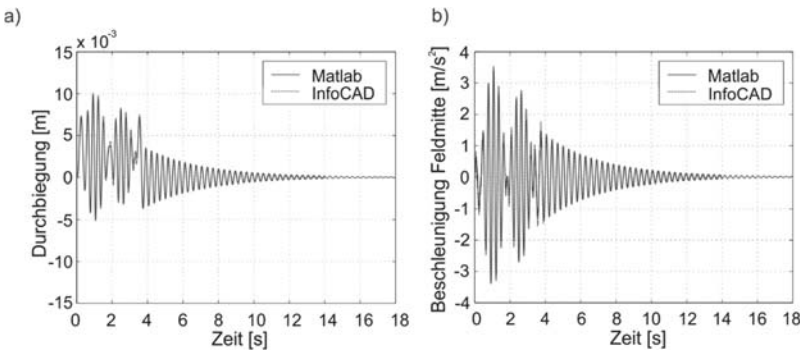
**Tabelle 5-3: Kritische Geschwindigkeiten  $v_{res,i,j,ICE1}$  [km/h]**

	ideal gelenkiges System			System mit $c_\varphi = 304$ MNm/rad			System mit $c_\varphi = 897$ MNm/rad		
$n_j$ [Hz]	2, 8	11, 1	25,0	2,9	11,3	25,1	3,1	11,5	25,4
$V_{res,1,j,ICE1}$	264	1056	2376	277	1069	2389	299	1093	2413
$V_{res,2,j,ICE1}$	132	528	1188	138	535	1194	149	547	1207
$V_{res,3,j,ICE1}$	88	352	792	92	356	796	100	<b>364</b>	804
$V_{res,4,j,ICE1}$	66	264	594	69	267	597	75	<b>273</b>	603

Im untersuchten Geschwindigkeitsbereich aus Kapitel 5.3.4 bis 360 km/h wird strenggenommen nur  $v_{res,4,1,ICE1} = 273$  km/h relevant ( $i = 4$ : jede vierte Harmonische wird in Phase angeregt). Da sich aber  $v_{res,3,1,ICE1} = 364$  km/h nur knapp außerhalb des Betrachtungsbereiches befindet, werden nachfolgend Überfahrten mit diesen zwei beiden kritischen Geschwindigkeiten gegenübergestellt. Abbildung 5-25 und Abbildung 5-26 zeigen die jeweiligen Durchbiegungs- und Beschleunigungsverläufe, die in Matlab mit dem äquivalenten Einmassensystem aus Kapitel 5.3.4 bzw. mit einem Balkensystem (das die höheren Moden impliziert) in InfoCAD [Inf2014] ermittelt wurden. Die jeweiligen Verläufe stimmen sehr gut überein.



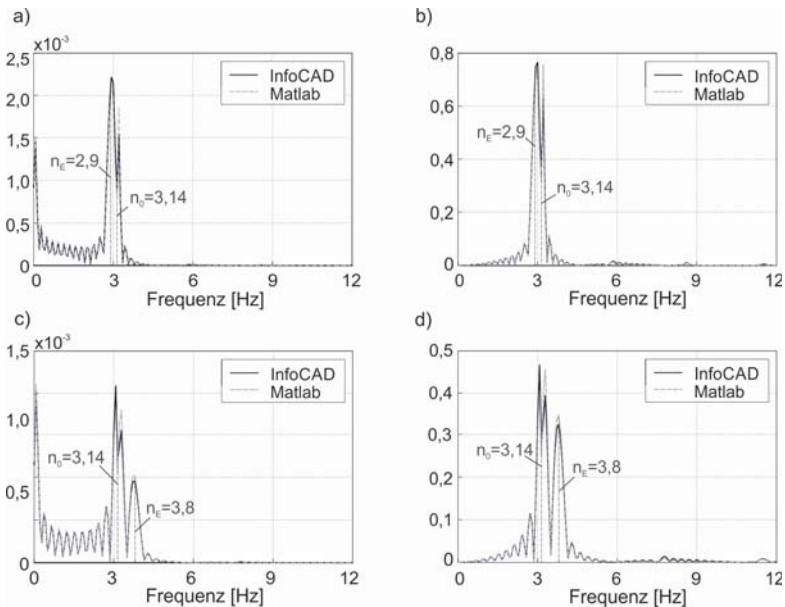
**Abbildung 5-25 ICE1-Überfahrt mit  $v_{res,4,1,ICE1} = 273$  km/h (System mit Drehfedern): a) vertikale Durchbiegungen in Feldmitte, b) vertikale Beschleunigungen in Feldmitte**



**Abbildung 5-26 ICE1-Überfahrt mit  $v_{res,3,1,ICE1} = 364$  km/h (System mit Drehfedern): a) vertikale Durchbiegungen in Feldmitte, b) vertikale Beschleunigungen in Feldmitte**

Abbildung 5-27 zeigt die zugehörigen Fast-Fourier-Transformationen (FFTs), welche mit dem Programm Flexpro [Fle2015] unter Berücksichtigung eines Rechteck-Fensters erstellt wurden. Die Ergebnisse sind sehr ähnlich. In den Diagrammen hervorgehoben sind jeweils die Biegeeigenfrequenz  $n_0 = 3,14$  und die jeweiligen Erregerfrequenzen  $n_E$ . In Abbildung 5-27 a und b wird  $n_E = \frac{1}{4} n_1 = 2,9$  Hz ( $v_{res,4,1,ICE1} = 273$  km/h) hervorgehoben und in Abbildung 5-27 c und d  $n_E = \frac{1}{3} n_1 = 3,8$  Hz ( $v_{res,4,1,ICE1} = 364$  km/h). Bei allen vier FFTs ergibt sich bei 3,14 Hz ein lokales Minimum, allerdings sind die Amplituden in Abbildung 5-25 und Abbildung 5-26 während der Ausschwingvorgänge (das System schwingt in der ersten Eigenfrequenz aus) auch geringer als während der jeweils vorangehenden Lastanregung durch die Zugüberfahrt. Die Peak-Bereiche um die jeweiligen Erregerfrequenzen  $n_E$  sind in Abbildung 5-27 deutlich zu erkennen, allerdings sind die Unterschiede zwischen den jeweils gegenübergestellten Ergebnissen der FFTs relativ klein. Eine maßgebende

Resonanzanregung der Systeme in der zweiten Biegeeigenfrequenz  $n_1$  liegt nicht vor, d.h. die vereinfachte Berechnung anhand des äquivalenten Einmassensystems mit der ersten Mode liefert hinreichend genaue Ergebnisse.

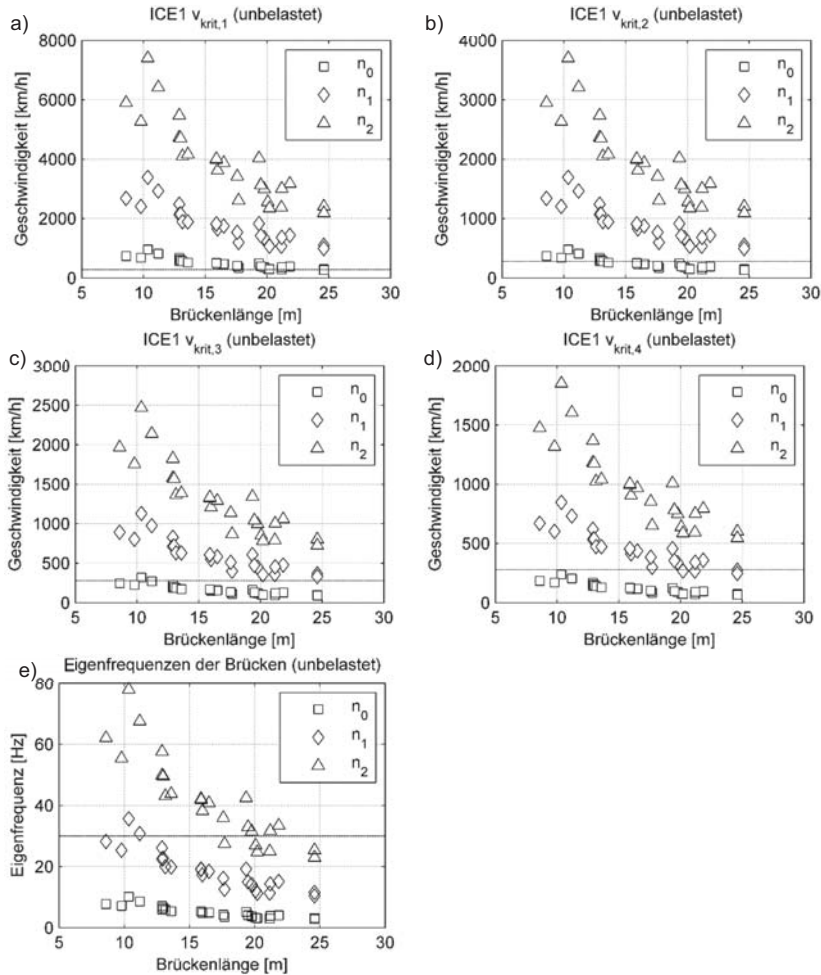


**Abbildung 5-27** FFTs der Matlab- und InfoCAD-Verläufe: a) FFTs der Durchbiegungsverläufe und b) der Beschleunigungsverläufe, jeweils bei  $v_{res,4,1,ICE1} = 273$  km/h c) FFTs der Durchbiegungsverläufe und d) der Beschleunigungsverläufe, jeweils bei  $v_{res,3,1,ICE1} = 364$  km/h

Im Vergleich zu den anderen von der DB im Rahmen einer Messkampagne betrachteten Brücken (vgl. Kapitel 1.1 und 5.3.3) ist die *EÜ Erfttalstraße* mit  $L = 24,6$  m als längeres Bauwerk zu betrachten. Bei WiB-Brücken sind Spannweiten von 10-20 m sehr häufig, obwohl problemlos Einfeldträger mit Spannweiten bis zu 30 m ausgeführt werden [Rau2011a]. Allgemein werden WiB-Brücken der Gruppe der kurzen und mittelweit gespannten Brückenbauwerke zugeordnet.

Abbildung 5-28 e zeigt die unter Berücksichtigung von  $c_\varphi$  (Variante 2) ermittelten ersten drei Biegeeigenfrequenzen  $n_0$  bis  $n_2$  der Brücken der WiB-Messkampagne. Ergänzt wurde eine gestrichelte Linie bei 30 Hz. Erwartungsgemäß ergeben sich für die kürzeren Brücken höhere Eigenfrequenzen. Bei den kürzeren Brücken ergibt sich somit i.d.R. nach Gl. 2.17  $n_{max} = n_2$ , während sich erst bei den längeren Brücken  $n_{max} = 30$  Hz ergibt.





**Abbildung 5-28 a) Kritische Geschwindigkeiten  $v_{res,1,j,ICE1}$  der WiB-Brücken b) Kritische Geschwindigkeiten  $v_{res,2,j,ICE1}$  der WiB-Brücken c) Kritische Geschwindigkeiten  $v_{res,3,j,ICE1}$  der WiB-Brücken d) Kritische Geschwindigkeiten  $v_{res,4,j,ICE1}$  der WiB-Brücken e) Erste drei Biegeeigenfrequenzen unter Berücksichtigung von  $c_\phi$  der DB-Messkampagne an WiB-Brücken**

In Abbildung 5-28 a bis d sind die jeweiligen kritischen Geschwindigkeiten des ICE1 in Abhängigkeit der Stützweite dargestellt. Zur Orientierung ist jeweils die Höchstgeschwindigkeit des ICE 1 von 280 km/h durch eine gestrichelte Linie gekennzeichnet. Es zeigt sich, dass die realistischen kritischen Geschwindigkeiten maßgeblich durch die erste Biegeeigenfrequenz  $n_0$  geprägt sind, lediglich bei längeren Brücken

ist  $v_{res,4,1,ICE1}$  kleiner als 280 km/h;  $v_{res,2,1,ICE1}$  und  $v_{res,3,1,ICE1}$  sind außerhalb realistischer Geschwindigkeiten. Die kritische Geschwindigkeit  $v_{res,4,1,ICE1}$  bedeutet, dass lediglich jeder vierte Wagen in Phase mit der zweiten Biegeeigenfrequenz  $n_1$  ist. Zudem ist die zweite modale Form antisymmetrisch, sodass deren Anregung durch die Achslasten generell äußerst unwahrscheinlich ist. Unter Berücksichtigung dieser Aspekte kann eine signifikante Beteiligung der zweiten Mode an der dynamischen Antwort der betrachteten WiB-Brücken praktisch ausgeschlossen werden. Dies wird durch die oben gezeigten Berechnungsergebnisse exemplarisch bestätigt.

## 5.4 Modellentwicklung für Systeme mit veränderlichen Steifigkeiten und Dämpfungen

### 5.4.1 Entwicklung Nicht-linearer Ersatzfedersteifigkeiten

Wird an einer der Federn des Teilsystems „Bahndamm“ die Verschiebung  $u_0$  erreicht (vgl. Abbildung 5-9 bzw. Abbildung 5-11), kommt es zum Durchrutschen der Schwelle im Schotter bzw. bei fester Fahrbahn zum Durchschub der Schienen in der Befestigung, die in Kapitel 5.3.2 entwickelten linearen Federsteifigkeiten  $k_{Ersatz}$  sind dann nicht mehr gültig. Zur Ableitung einer nicht-linearen Ersatzfedersteifigkeit  $k_{Ersatz,n-l}$  wird das sukzessive Durchrutschen der einzelnen Federelemente betrachtet. Die Ersatzfedersteifigkeiten  $k_{Ersatz,n-l}$  werden weiterhin nach Gl. 5.41 ermittelt.

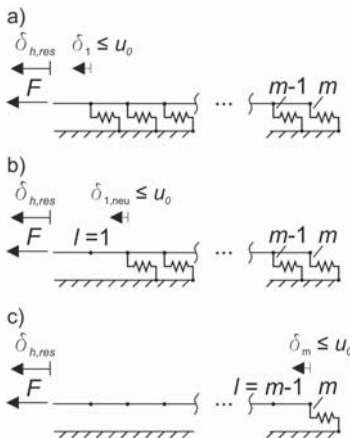


Abbildung 5-29: a) Statisch unbestimmtes Ausgangssystem mit  $m$  Federn und  $l=0$  durchrutschenden Federn, b) die erste Feder rutscht durch ( $l=1$ ), c) Statisch bestimmtes System mit  $l=m-1$  durchrutschenden Federn

Abbildung 5-29 stellt den Berechnungsablauf schematisch dar; für den Fall a) „ $l=0$  Federn rutschen durch“, gilt  $k_{Ersatz,n-l} = k_{Ersatz,linear}$ . Es handelt sich dabei um das lineare,  $(n=m-1)$ -fach statisch unbestimmte System aus Kapitel 5.3.2. Sukzessive werden nun alle  $l=[0, m-1]$  Federn aus dem System entfernt und für das jeweils neu entstandene System lassen sich analog zum Vorgehen in Kapitel 5.3.2 mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte die Federkräfte der  $(m-l)$  Federn, die Normalkraftverteilung und die Verschiebungen über die Dammlänge infolge einer beliebigen Kraft  $F$  ermitteln. Dazu werden die bekannten Gleichungen Gl. 5.32 bis Gl. 5.34 um die Anzahl der ausfallenden Federn  $l$  ergänzt:

$$\delta_{i0} = \frac{-F \cdot (m - l - i) \cdot d}{EA} - \frac{F}{K_{Sd}} \quad \text{Gl. 5.92}$$

$$\delta_{ii} = \frac{(m - l - i) \cdot d}{EA} + \frac{2}{K_{Sd}} \quad \text{Gl. 5.93}$$

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \frac{(m - l - i - j) \cdot d}{EA} + \frac{1}{K_{Sd}} \quad \text{Gl. 5.94}$$

Dabei gilt:  $i = [1, m - l - 1]$ , sowie  $j = [1, m - l - i - 1]$ .

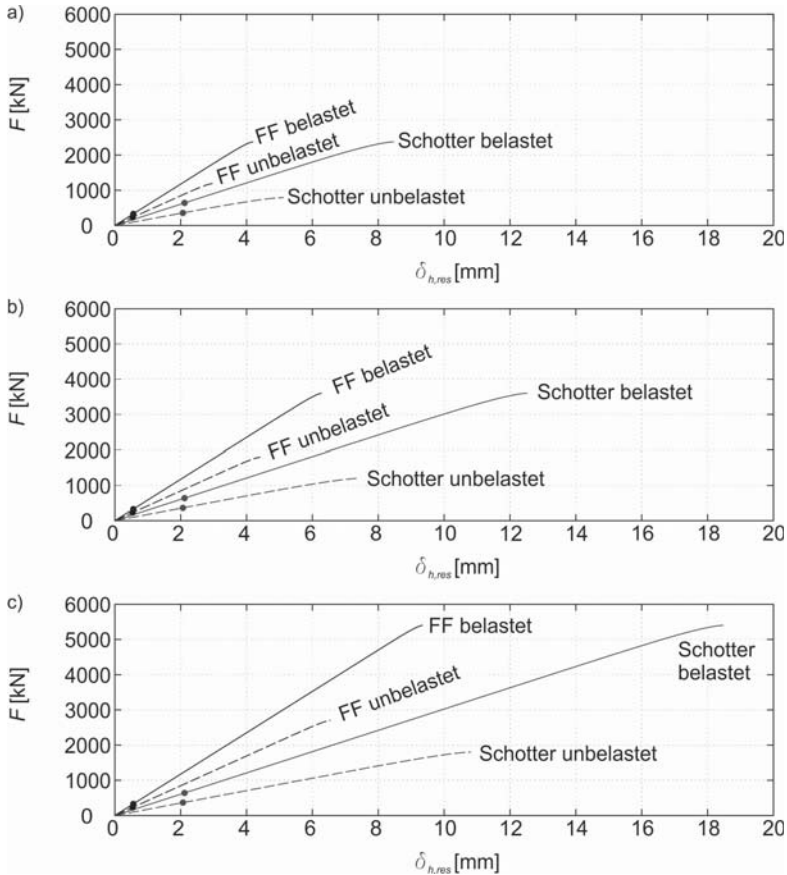
Es ist zu beachten, dass lediglich für den Bereich  $l = [0, m - 2]$  Gl. 5.92 bis Gl. 5.94 benötigt werden, d.h. für Systeme, die mindesten 2-fach statisch unbestimmt sind. Für ein einfach statisch unbestimmtes System ( $l = m - 1$ ) sind Gl. 5.92 und Gl. 5.93 ausreichend.

Um eine nichtlineare Federcharakteristik vollständig zu formulieren, muss für jeden Berechnungsschritt, d.h. für  $k_{Ersatz,n-l}(l)$  die Verschiebung  $\delta_{h,res}(l)$  infolge  $F$  am Übergang von Bahndamm und Brücke bekannt sein, die gleichzeitig auftritt, wenn an der jeweils „neuen“ ersten Feder  $\delta_{1,neu}$  die Verschiebung  $u_0$  erreicht wird. Die Grenzbedingung lässt sich mit Gl. 5.95 formulieren; zusätzlich zur bereits vorhandenen Verschiebung aus dem vorangegangenen Rechenschritt  $\delta_l(l-1)$  kann nur noch  $\Delta\delta_l(l)$  aufgenommen werden bis Durchrutschen auftritt.

$$\delta_{1,neu} = \delta_1(l) = u_0 = \delta_2(l-1) + \Delta\delta_1(l) \quad \text{Gl. 5.95}$$

Die nicht-lineare Federcharakteristik ist bis zum Durchrutschen der letzten Feder ( $m$ ) gültig. Abbildung 5-30 visualisiert exemplarisch für die Systeme mit 66, 100 und 150 Federn die nicht-linearen Federcharakteristiken. Das jeweilige Ende des linearen Verlaufes ist mit einem Punkt markiert.

In Abbildung 5-31 sind weiterhin exemplarisch die Verschiebungen  $\delta_i$  über den Dammbereich eines unbelasteten Schotterbettes für ein System mit 100 Federn ( $L_D = 60$  m) aufgetragen, bei dem a) 0 %, b) 25 %, c) 50 %, d) 75 % und e) 100 % der Federn beginnen durchzurutschen. Abbildung 5-31 f zeigt die Verschiebung  $\delta_{h,res} = \delta_0$  am Übergang zwischen Brücke und Bahndamm in Abhängigkeit der jeweils aufgebrachten Kraft  $F$ . Die markierten Punkte entsprechen den Verschiebungen  $\delta_0$  der Fälle a) bis e). Somit beschreibt der mit „0%“ markierte Punkt das Ende des linearen Verlaufes. Zur Verdeutlichung ist in Abbildung 5-31 g die Ableitung  $F'(\delta_{h,res})$  der Funktion  $F(\delta_{h,res})$  aus Abbildung 5-31 f dargestellt.



**Abbildung 5-30 Nichtlineare Federcharakteristiken:** a) 66 Federn ( $L_D = 39,6$  m), b) 100 Federn ( $L_D = 60$  m), c) 150 Federn ( $L_D = 90$  m)

Die Berechnungen sind mit Matlab R2014a [Mat2014] durchgeführt worden, der zugehörige Programmcode ist in Anhang B.3 zu finden. Es wurden im Rahmen dieser Arbeit entsprechende Datensätze für alle 85 möglichen Fälle  $m = [66, 150]$  erzeugt, exemplarisch ist in Anhang A.2 die nicht-lineare Federcharakteristik für  $m = 66$  Federn dargestellt. Alle weiteren Datensätze werden unter [Big2018] veröffentlicht.

Die Betrachtung der in Abbildung 5-31 f und Abbildung 5-30 dargestellten nicht-linearen Federcharakteristiken zeigt, dass das Ende des jeweiligen linearen Verlaufes bereits nach einer geringen Verschiebung  $\delta_{h,res}$  erreicht wird. Es zeigt sich aber auch, dass der Steifigkeitsabfall bei (prozentual) wenigen ausfallenden Federn re-

lativ gering ist. Zur Veranschaulichung ist in Abbildung 5-32 der prozentuale Steifigkeitsabfall des Systems mit 100 Federn (Abbildung 5-30 b) in Abhängigkeit der Anzahl der ausfallenden Federn dargestellt. Es zeigt sich bei allen Verläufen, dass bei 50 ausgefallenden Federn weniger als 10% Steifigkeitsabfall für den Gleisanteil entstehen.

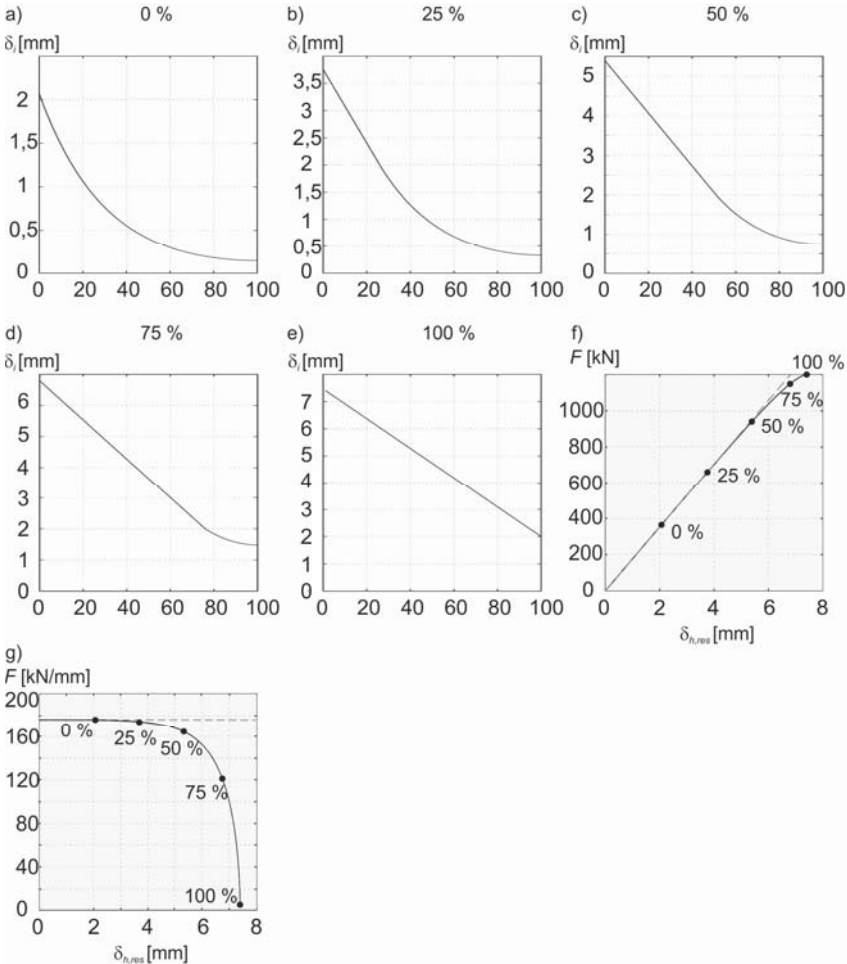
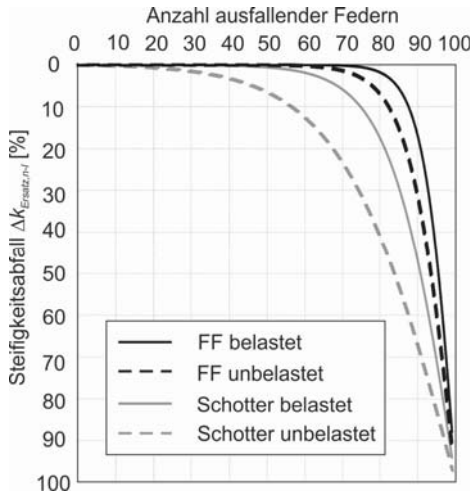


Abbildung 5-31 Teilsystem „Bahndamm“ (unbelastetes Schotterbett) mit 100 Federn: a) - e) Verschiebungen im Gleis wenn a) 0%, b) 25 %, c) 50 %, d) 75 %, e) 100 % der Federn anfangen zu rutschen, f)  $F(\delta_{h,res})$  = Verschiebungen am Übergang Brücke-Bahndamm  $\delta_{h,res}$  und zugehörige aufgebrauchte Kraft  $F$ , g)  $F'(\delta_{h,res})$  = Ableitung der Verschiebungsfunktion aus Abbildung 5-31f)



**Abbildung 5-32** Prozentualer Steifigkeitsabfall  $\Delta k_{\text{Ersatz,linear}}$  in Abhängigkeit der Anzahl ausfallender Federn bei einem System mit 100 Federn

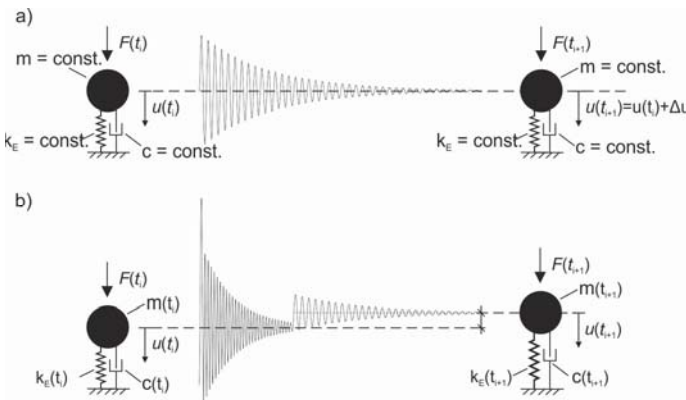
#### 5.4.2 Simulation von Zugüberfahrten auf veränderlichen Systemen

In den vorangegangenen Unterkapiteln ist bereits darauf eingegangen worden, dass sich ab einer bestimmten Auflagerverdrehung (bzw. vertikalen Durchbiegung im Feld) die äquivalente Drehfedersteifigkeit infolge des „Durchrutschens“ am Auflager reduziert und die verdrehungsabhängige Rotationscharakteristik mit  $c_\varphi(\varphi)$  gemäß Gl. 5.30 berücksichtigt werden muss. Weiterhin ergeben sich für das belastete Gleis höhere Ersatzfedersteifigkeiten als für das unbelastete Gleis (belastungs- bzw. zeitabhängige nichtlineare Federcharakteristik). Um die höheren Steifigkeiten des belasteten Gleises in der Simulation berücksichtigen zu dürfen, muss sichergestellt werden, dass sie nur dann zum Ansatz gebracht werden, wenn das Gleis auch tatsächlich belastet ist. Die Berechnungsmethodik aus Kapitel 5.3.4 wird nun erweitert, so dass auch veränderliche Systeme (Veränderung der Drehfedersteifigkeit  $c_\varphi$  am Auflager) simuliert werden können. Der im Rahmen dieser Arbeit entwickelte, entsprechende Matlab Code befindet sich in Anhang B.6. Im Rahmen dieser Arbeit werden nur Systeme mit identischen Drehfedersteifigkeiten an beiden Auflagern betrachtet. Daher werden in jedem Zeitschritt die Verdrehungen an beiden Auflagern betrachtet, um zu überprüfen, ob sich eine verdrehungsabhängige, nichtlineare Federcharakteristik ergibt. Die größere Verdrehung (der kleinere Wert für  $c_\varphi$ ) ist dann auf der sicheren Seite liegend für beide Seiten maßgebend. Um bei der Betrachtung der zeitabhängigen nichtlinearen Federcharakteristik ebenfalls ein identisches  $c_\varphi$  an beiden Auflagern ansetzen zu können, gelten beide Seiten erst als belastet, sobald

der Bahndamm hinter der Brücke belastet ist und gleichzeitig nur solange, wie der Bahndamm vor der Brücke belastet ist. Bei den in diesem Kapitel vorgestellten Berechnungen wird die Annahme getroffen, dass ein Bahndamm belastet ist, wenn sich mindestens 4 Achsen (entspricht i.d.R. der Anzahl Achsen eines Wagens) auf dem Bahndamm befinden.

Wie in Kapitel 2.1.4 erläutert, ermöglicht der für die Überfahrtsberechnungen verwendete Newmark-Algorithmus für jeden Zeitschritt eine Anpassung von Masse, Steifigkeit und Dämpfung. Beim äquivalenten Einmassensystem ändern sich bei Änderung von  $c_\varphi$  die äquivalente Masse  $M_E$  (da der Massefaktor  $K_M$  (Gl. 5.63) von  $c_\varphi$  abhängig ist), die äquivalente Steifigkeit  $k_E$  (da die bezogene Steifigkeit des Balkensystems  $k$  (Gl. 5.61) von  $c_\varphi$  abhängig ist) und die Dämpfungskonstante  $c$  (Gl. 2.32, da diese von der Kreiseigenfrequenz  $\omega_0$  (Gl. 2.93) abhängig ist, in welche wiederum  $c_\varphi$  eingeht).

Bei der Betrachtung einer quasi-statischen Überfahrt ergibt sich bei Änderung der Systemeigenschaften von Zeitschritt  $t_i$  zu Zeitschritt  $t_{i+1}$  durch Änderung von  $k_E$  ein „Sprung“ im Durchbiegungsverlauf, auch wenn sich die einwirkende Kraft  $F$  nicht signifikant ändert, siehe Gl. 5.12. Es gibt dabei jedoch keine Beeinflussung des Zeitschrittes  $t_{i+1}$  durch den vorangegangenen Zeitschritt  $t_i$ , sodass der jeweilige Wert  $u_p(t)$  immer von der Bezugsebene (Lage der unausgelenkten Feder) des jeweiligen Systems aus berechnet wird.



**Abbildung 5-33** Gegenüberstellung äquivalentes Einmassensystem zu den Zeitpunkten  $t_i$  und  $t_{i+1}$ : a) keine Änderung der Systemparameter, b) Änderung von Masse, Dämpfung und Steifigkeit ohne Systemanpassung durch Eliminierung der „Scheinkraft“

Bei der dynamischen Berechnung mit dem Newmark-Algorithmus (siehe Kapitel 2.1.4, Gl. 2.39 bis Gl. 2.61) bilden die Beschleunigungs-, Geschwindigkeits- und

Durchbiegungswerte ( $\ddot{u}(t)$ ,  $\dot{u}(t)$  und  $u(t)$ ) zum Zeitpunkt  $t_i$  die Anfangsbedingungen für die Berechnung der Werte zum Zeitpunkt  $t_{i+1}$ . Abbildung 5-33 verdeutlicht diese Problematik. Abbildung 5-33 a zeigt, dass bei konstanten Systemgrößen die Bezugsebene gleich bleibt. Abbildung 5-33 b zeigt die Änderung der Bezugsachse bei Veränderung der Systemeigenschaften.

Zusätzlich zur Änderung der äußeren Last  $\Delta F = F(t_{i+1}) - F(t_i)$  (Gl. 2.41, wird in Gl. 2.50 bzw. Gl. 2.56 berücksichtigt) entsteht durch Änderung der Systemparameter zum Zeitpunkt  $t_{i+1}$  eine am Balkensystem nicht wirkende, zusätzliche „Schein“-Last  $\Delta F_{SA}$  (Gl. 5.96, Gl. 5.97), welche mit  $\Delta F$  zu verrechnen ist (Gl. 5.98), um die tatsächliche Durchbiegung der Brücke in Feldmitte zu berechnen (siehe Abbildung 5-34 a).

$$\begin{aligned} m(t_i)\ddot{u}(t_i) + c(t_i)\dot{u}(t_i) + k(t_i)u(t_i) \\ = m(t_{i+1})\ddot{u}(t_i) + c(t_{i+1})\dot{u}(t_i) + k(t_{i+1})u(t_i) + \Delta F_{SE} \end{aligned} \quad \text{Gl. 5.96}$$

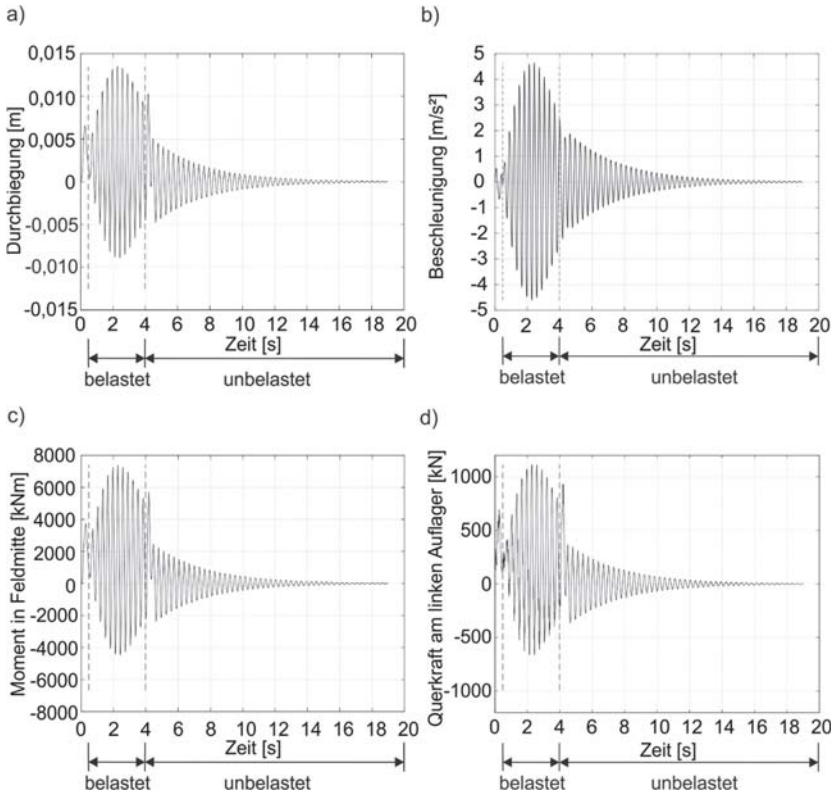
$$\begin{aligned} \Delta F_{SA} = (m(t_i) - m(t_{i+1}))\ddot{u}(t_i) + (c(t_i) - c(t_{i+1}))\dot{u}(t_i) \\ + (k(t_i) - k(t_{i+1}))u(t_i) \end{aligned} \quad \text{Gl. 5.97}$$

$$\Delta u = \frac{-(\Delta F - \Delta F_{SA}) + (c_3 \cdot m + c_4 \cdot c) \cdot \dot{u}(t_i) + (c_5 \cdot m + c_6 \cdot c) \cdot \ddot{u}(t_i)}{k + c_1 \cdot c + c_2 \cdot m} \quad \text{Gl. 5.98}$$

Die Änderung von  $c_\varphi$  beeinflusst weiterhin die Ableitung aller weiteren dynamischen Kenngrößen aus dem Durchbiegungsverlauf in Feldmitte, die entsprechenden Berechnungen erfolgen analog zu denen in Kapitel 5.3.4 (vgl. Gl. 5.68 bis Gl. 5.88).

Abbildung 5-34 zeigt exemplarisch die vertikalen Durchbiegungen, Beschleunigungen und Biegemomente in Feldmitte, sowie die Querkräfte am linken Auflager infolge einer ICE 1-Überfahrt mit  $v = 299$  km/h. Es handelt sich um das in Kapiteln 5.1 und 5.3.4 betrachtete Brückenbauwerk *EÜ Erfttalstraße* (vgl. besonders Abbildung 5-17 und Abbildung 5-22, berücksichtigt wurde hier exemplarisch die Berechnungsvariante 2 mit  $c_\varphi = 897$  MNm/rad). Der Bereich während der Überfahrt, in dem ein höheres  $c_\varphi$  (Erhöhung der linearen Drehfedersteifigkeit von 897 MNm/rad auf 1544 MNm/rad) berücksichtigt wurde, ist gekennzeichnet; in diesem Zeitraum erhöht sich  $n_0 = 3,15$  Hz auf  $n_{0, belastet} = 3,36$  Hz. Ein Durchrutschen der Federn tritt bei  $v = 299$  km/h nicht auf, wenn die höhere Drehfedersteifigkeit während der Überfahrt berücksichtigt wird.



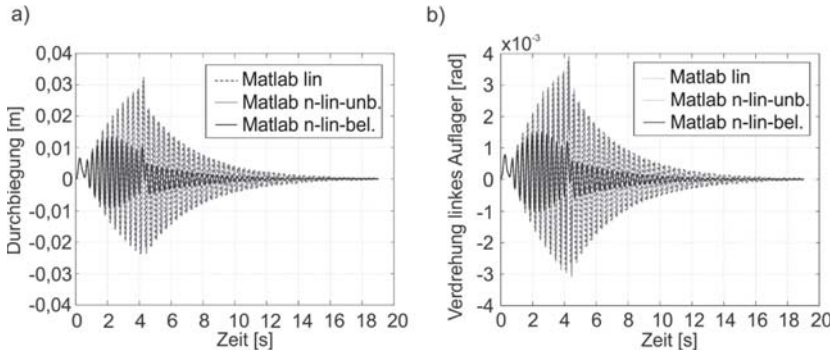


**Abbildung 5-34 ICE 1-Überfahrten mit  $v = 299$  km/h a) Durchbiegung, b) Beschleunigung und c) Biegemoment  $M_y$  (jeweils in Feldmitte), d) Querkraft  $V_z$  am linken Auflager**

Abbildung 5-35 stellt die Durchbiegungen in Feldmitte und die Verdrehungen am linken Auflager folgender drei Systeme (berechnet mit  $c_\varphi$  nach Variante 2) gegenüber:

- lineares „unbelastetes“ System ( $c_\varphi = \text{konstant}$ , vgl. Kapitel 5.3.4)
- nicht-lineares „unbelastetes“ System mit  $c_\varphi(\varphi)$
- nicht-lineares System mit höherem  $c_\varphi(\varphi)$  während der Überfahrt

Die Unterschiede zwischen den beiden erst genannten Systemen sind relativ gering. Der Einfluss der Versteifung belasteter Gleise ist hingegen deutlich zu erkennen. Dies bestätigt sich auch bei Betrachtung eines größeren Geschwindigkeitsbereiches.



**Abbildung 5-35 ICE 1-Überfahrten mit  $v = 299 \text{ km/h}$  a) Durchbiegung, b) Verdrehung am linken Auflager**

In Abbildung 5-36 und Abbildung 5-37 sind die jeweiligen Maximal- und Minimalwerte der Durchbiegungs-, Beschleunigungs- und Momentenverläufe in Feldmitte, sowie die der Verdrehungs-, Momenten- und Querkraftverläufe am linken Auflager infolge von ICE 1-Überfahrten im Geschwindigkeitsbereich von  $40 \text{ m/s}$  ( $144 \text{ km/h}$ ) bis  $100 \text{ m/s}$  ( $360 \text{ km/h}$ ) dargestellt. Abbildung 5-36 zeigt dabei Berechnungen mit  $c_\varphi$  nach Variante 1, Abbildung 5-37 zeigt dabei Berechnungen mit  $c_\varphi$  nach Variante 2, vgl. Kapitel 5.3.1. Ergänzend sind jeweils noch die am entsprechenden ideal-gelenkigen System (ohne  $c_\varphi$ ) ermittelten Werte hinzugefügt worden, vgl. Abbildung 5-24.

In Kapitel 5.3.4 ist bereits gezeigt worden, dass die Berücksichtigung der Einspannwirkung an den Auflagern zur Erhöhung der kritischen Geschwindigkeiten führt (die Peaks werden im Diagramm nach rechts „verschoben“). Die absoluten Maximal- und Minimalwerte von vertikaler Beschleunigung in Feldmitte und Querkraft am Auflager bleiben dabei annähernd gleich, bei anderen Verläufen anderer Größen in Abbildung 5-37 (bzw. Abbildung 5-23 und Abbildung 5-24) werden diese Werte gleichzeitig auch reduziert.

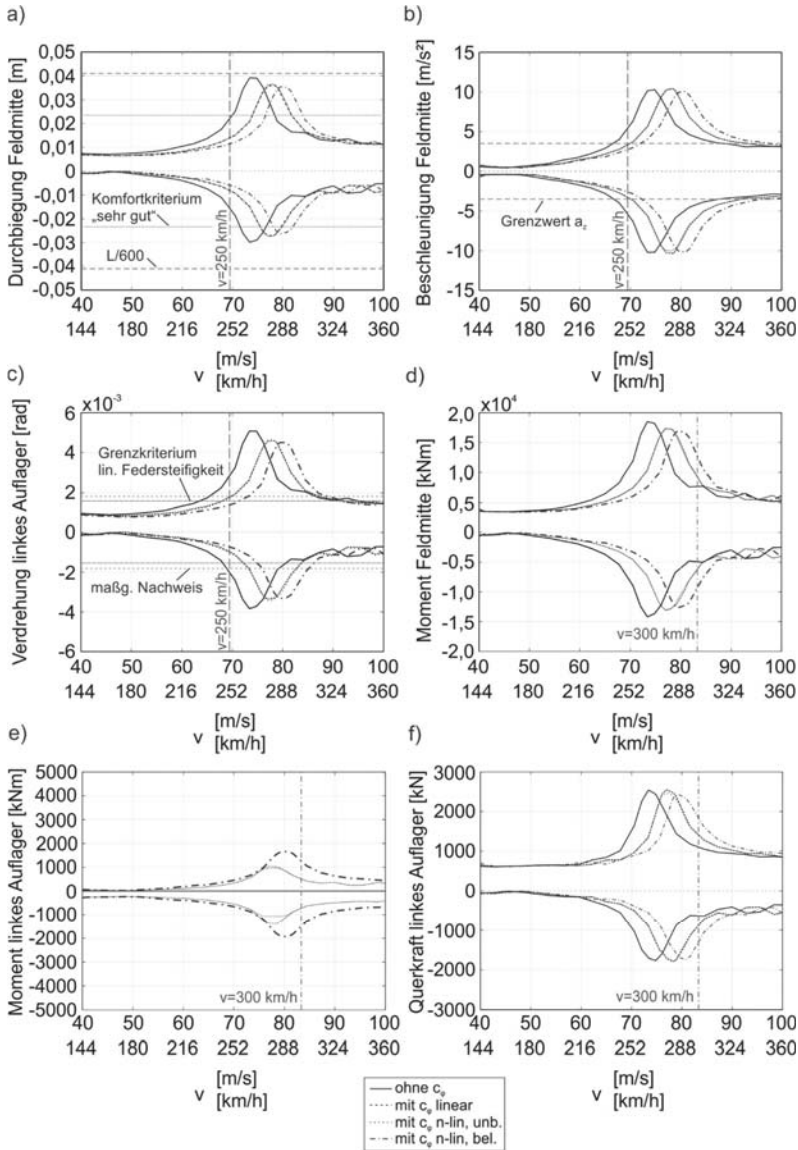


Abbildung 5-36: Minimal- und Maximalwerte infolge ICE 1-Überfahrten mit Variante 1 ( $c_\phi = 304$  MN): a) Durchbiegungen und b) Beschleunigungen (jeweils in Feldmitte), c) Verdrehungen am linken Auflager, Biegemomente d) in Feldmitte und e) am linken Auflager, f) Querkraft am linken Auflager

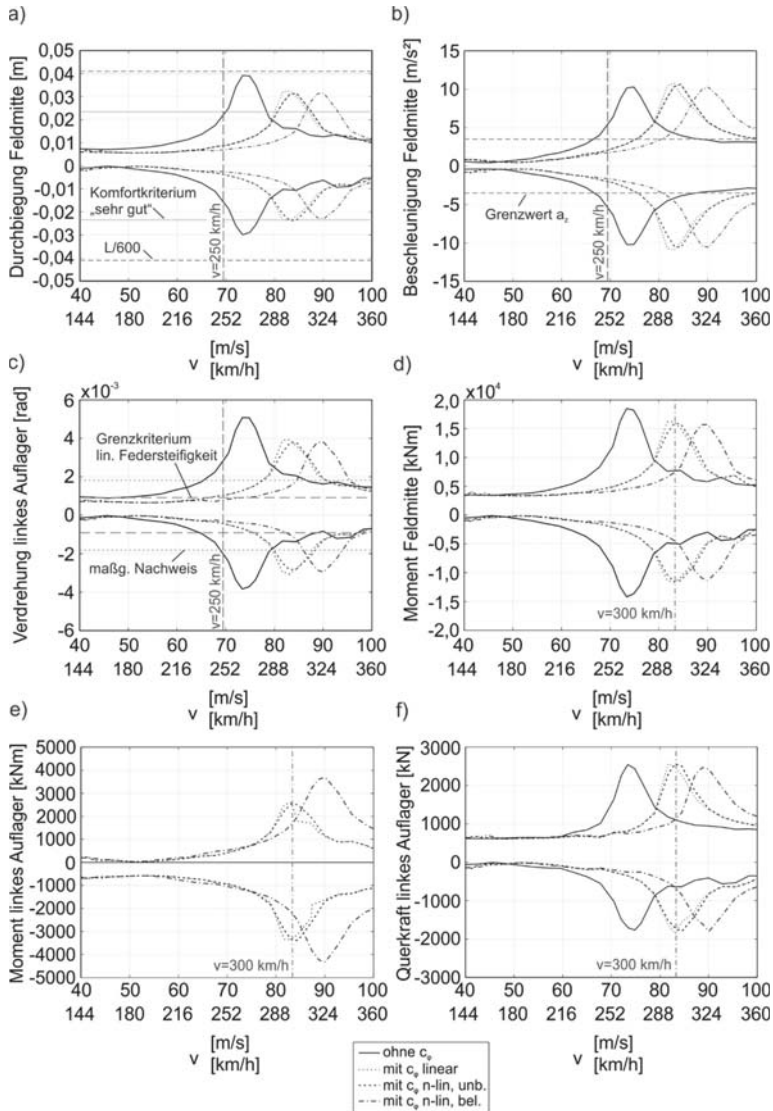


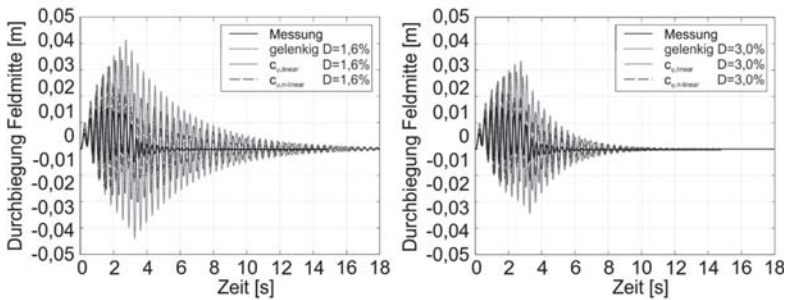
Abbildung 5-37: Minimal- und Maximalwerte infolge ICE 1-Überfahrten mit Variante 2 ( $c_p = 897$  MN): a) Durchbiegungen und b) Beschleunigungen (jeweils in Feldmitte), c) Verdrehungen am linken Auflager, Biegemomente d) in Feldmitte und e) am linken Auflager, f) Querkraft am linken Auflager

Die Betrachtung der Verläufe in Abbildung 5-37 zeigt weiterhin, dass zumindest für das hier exemplarisch betrachtete Bauwerk der Unterschied zwischen linearem und

nicht-linearem Ansatz (ohne Berücksichtigung eines höheren  $c_\varphi(\varphi)$ ) während der Überfahrt) relativ gering ist. Obwohl ab einer Geschwindigkeit von 245 km/h (Variante 1) bzw. 240 km/h (Variante 2) die Auflagerverdrehungen am linken Auflager während einer Überfahrt zeitweise so groß werden, dass es zum Durchrutschen der Schwellen im Schotterbett kommt und der Ansatz eines linearen  $c_\varphi$  nicht länger zulässig ist, kann bei Variante 1 kein und bei Variante 2 bis zu einer Geschwindigkeit von 275 km/h (und ab 325 km/h) kein relevanter Unterschied bei den Maximal- und Minimalwerten in Abbildung 5-37 c erkannt werden. Wie in Abbildung 5-32 gezeigt, ergibt sich bei wenigen durchrutschenden Federn auf dem Bahndamm nur ein geringfügiger Steifigkeitsabfall der horizontalen Ersatzfedersteifigkeit  $k_{\text{Ersatz},n-l}$ , aus welcher die nicht-lineare Federcharakteristik  $c_\varphi(\varphi)$  berechnet wird.

Eine Berücksichtigung höherer  $c_\varphi(\varphi)$ -Werte aus belastetem Bahndamm während der Überfahrt führt zu noch günstigeren Ergebnissen, allerdings bedarf die Entscheidung, wann ein Bahndamm als belastet angenommen werden darf, noch weiterer Präzisierung.

a)



b)

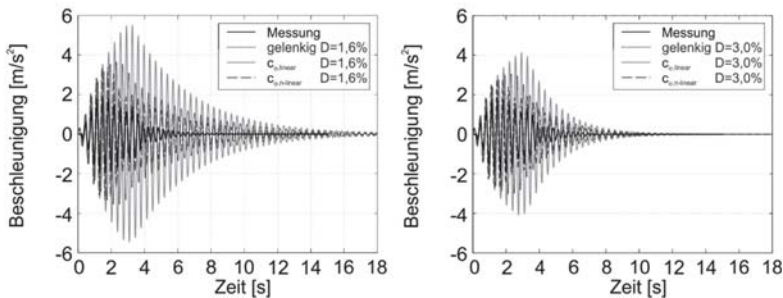


Abbildung 5-38 Gegenüberstellung Messung ICE 3 Überfahrt mit  $v = 245$  km/h [Rau2011a] mit Simulationen am äquivalenten Einmassensystem a) Durchbiegungen, b) Beschleunigungen

Zum Abschluss dieses Kapitels erfolgt noch eine Gegenüberstellung der einzelnen Berechnungsvarianten mit einer von [Rau2011a] gemessenen ICE 3-Überfahrt mit jeweils  $v = 245 \text{ km/h}$  auf dem *Nordüberbau* der *EÜ Erfttalstraße* (vom *Südüberbau* abweichende Parameter für die Berechnung  $EI = 31281 \text{ MNm}^2$  und  $m = 33,3 \text{ t/m}$ ). Berücksichtigt wird hier wiederum Variante 2 bei der  $c_\varphi$ -Ermittlung. Die Messwerte wurden in der Mitte des Überbaus, an der Unterseite des äußeren I-Profils erfasst, dort ergeben sich i.d.R. betragsmäßig etwas geringere Bauwerksreaktionen als in der Gleisachse. Bei den hier gezeigten berechneten Werten handelt es sich um die Reaktionen in der Gleisachse.

Bei allen Systemvarianten werden die Ergebnisse aus zwei Simulationen gezeigt, um die Unterschiede zwischen einer Dämpfung  $\xi = 1,57 \%$  gemäß [EN1991-2] [RiL804] und dem von [Rau2011a] gemessenen Wert  $\xi = 3 \%$  darzustellen. Es zeigt sich, dass die höhere Dämpfung erwartungsgemäß einen großen Einfluss auf die Ergebnisse hat.

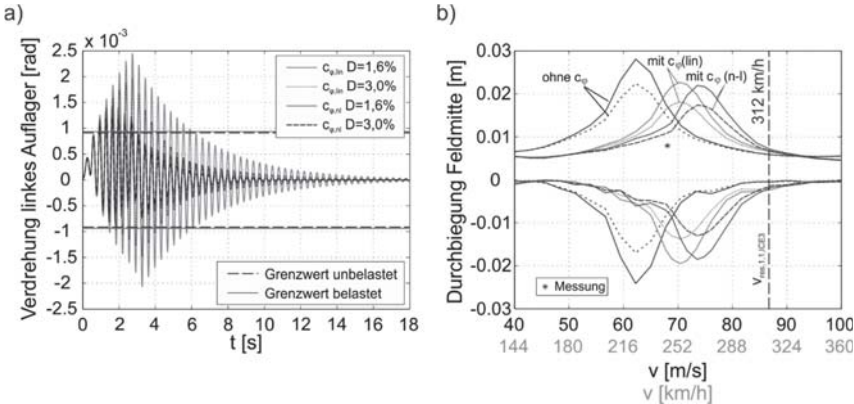
Weiterhin zeigt sich, dass durch die zusätzliche Berücksichtigung der Drehfedersteifigkeit  $c_{\varphi,linear} = 897 \text{ MNm/rad}$  (Variante 2, Annahme eines unbelasteten Dammbereiches) die Durchbiegungen und Beschleunigungen im Vergleich zum ideal-gelenkigen System vergrößert werden, obwohl die erste Biegeeigenfrequenz  $n_0$  von 2,5 Hz auf 2,8 Hz vergrößert und dem Messwert 3,5 Hz etwas näher kommt, siehe Tabelle 5-4. Begründet ist dies durch den Anstieg der kritischen Geschwindigkeit  $v_{res,1,1,ICE3}$  gemäß Gl. 2.16 von 226 km/h auf 255 km/h ( $L_{üP} = 24,775 \text{ m}$ ). Die entsprechenden Verläufe, die unter Annahme eines zeitweise belasteten Dammbereiches berechnet wurden (mindestens vier Achsen befinden sich auf jedem der beiden Bahndämme), liefern wiederum die kleinsten berechneten Werte, da hier  $v_{res,1,1,ICE3}$  im belasteten Zustand auf 271 km/h angehoben wird.

**Tabelle 5-4: Kritische Geschwindigkeiten  $v_{res,1,1,ICE3}$  [km/h] Nordüberbau EÜ Erfttalstraße**

	gelenkiges System	mit $c_{\varphi,linear}$ (unbelastet)	mit $c_{\varphi,n-l}$ (belastet)	Messung
$n_0$ [Hz]	2,5	2,8	3,0	3,5
$v_{res,1,1,ICE3}$ [km/h]	226	255	271	245

Die in Tabelle 5-4 für das nicht-lineare System unter Annahme eines belasteten Dammbereiches gegebenen Werte entsprechen dem Maximalwert bei Einhaltung des Grenzkriteriums für Durchrutschen in Gl. 5.29 ( $\max. c_{\varphi,n-l} = 1544 \text{ MNm/rad}$ ). Die Darstellungen der Verdrehungen  $\varphi$  am linken Auflager in Abbildung 5-39 a zeigen,

dass das Kriterium nicht im gesamten Zeitverlauf eingehalten wird und eine Abminderung von  $c_\phi$  für die betroffenen Zeitschritte erforderlich ist. Die Grenzkriterien unterscheiden sich geringfügig für den unbelasteten und den belasteten Dammbereich.



**Abbildung 5-39** Gegenüberstellung ICE 3 Überfahrtssimulationen mit verschiedenen Modellierungsansätzen a) Verdrehungen am linken Auflager bei  $v = 245 \text{ km/h}$ , b) Maximalwerte Durchbiegungen in Abhängigkeit der Überfahrtsgeschwindigkeit

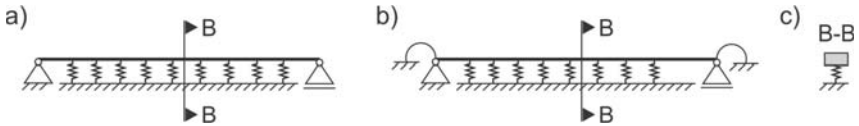
Zur besseren Einordnung der berechneten Ergebnisse, werden in Abbildung 5-39 b die Maximal- und Minimalwerte der Durchbiegungsberechnungen in Abhängigkeit der Überfahrtsgeschwindigkeit gezeigt. Die gemessene Maximaldurchbiegung ist mit einem Sternchen markiert, ebenso die kritische Geschwindigkeit  $v_{\text{res},1,1,\text{ICE3}} = 312 \text{ km/h}$ , welche sich infolge der gemessenen Biegeeigenfrequenz  $n_0 = 3,5 \text{ Hz}$  ergibt.

## 5.5 Ausblick: Berücksichtigung Koppelleffekt bei Zwillingsbrücken

Wie bereits in Kapitel 3.8.2 erläutert, lässt sich der Koppelleffekt zwischen zwei durch eine Längsrichtung getrennte Überbauten mit durchgängiger Schotterschicht vereinfacht darstellen, wenn die Überbauten einzeln (d.h. ungekoppelt) betrachtet werden und ihnen bei der Berechnung eine höhere Querschnittssteifigkeit zugewiesen wird. Im Rahmen der Untersuchungen von [Rau2011a] an der EU *Erfttalstraße* ergab sich bei einer Erhöhung der Querschnittssteifigkeit um 10 % eine gute Annäherung der bei Überfahrtssimulationen erzielten Ergebnisse an die am gekoppelten System ermittelten Ergebnisse. Demnach wäre die Erhöhung der Biegesteifigkeit  $EI$  eine Möglichkeit, den Koppelleffekt bei Zwillingsbrücken in der vereinfachten Berechnung mit einem äquivalenten Einmassensystem zu berücksichtigen.

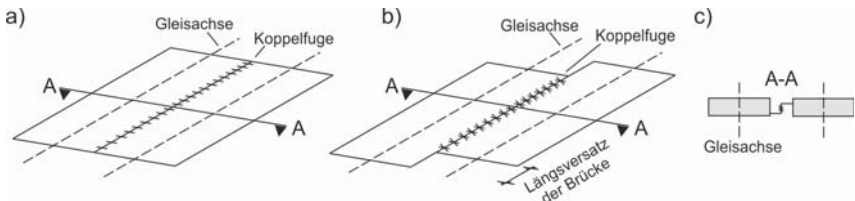


Allerdings bleibt bisher die Frage offen, ob die Erhöhung um 10 % allgemeingültig ist und begründet werden kann. Ein alternativer Ansatz ist die Berücksichtigung der Koppelsteifigkeit durch eine Bettung des Ausgangsbalkensystems, siehe Abbildung 5-40. Letztendlich ist der Effekt derselbe (die Steifigkeit wird konstant über die gesamte Stützweite erhöht), dennoch lassen sich so die Anteile von Querschnittssteifigkeit und Koppelsteifigkeit im Modell separieren.



**Abbildung 5-40** Balkensystem mit gleichmäßiger Bettung: a) ideal-gelenkig gelagert, b) mit Drehfedern an den Auflagern c) Querschnitt des gebetteten Balkens

Hierzu muss eine Lösung gefunden werden, die in der Fuge wirkende Koppelsteifigkeit in eine in der Schwerelinie des einzelnen Überbaus (idealerweise die Gleisachse, siehe Abbildung 5-41) wirkende Bettungssteifigkeit zu übertragen. Die Brücke wird sich infolge Zuglasten in der Gleisachse immer stärker verformen als im Bereich der Koppelfuge, was insbesondere bei der Betrachtung verschiebungsabhängiger, nichtlinearer Koppelsteifigkeiten und Dämpfungsparameter zu berücksichtigen ist. Hinzu kommt, dass sich der zweite Überbau ebenfalls verformen kann und einige Brücken mit einem Längsversatz ausgeführt werden, was Einfluss auf die Koppelfuge hat (Abbildung 5-41 b).



**Abbildung 5-41** Überbauten mit Längsfuge: a) ohne Längsversatz, b) mit Längsversatz; c) Querschnitt der gekoppelten Überbauten

Ist die Bettungsziffer  $C_B$  des Balkensystems bekannt, lässt sich diese in eine äquivalente Systemsteifigkeit einbinden und anschließend in ein äquivalentes Einmassensystem überführen. Hierzu wird zunächst der gleichmäßig gebettete Balken ohne Auflager betrachtet (Abbildung 5-42 a). Masse und Steifigkeit sind über die Länge konstant, die vertikale Verschiebung ist für gleichmäßig verteilte Last also über die gesamte Länge gleich. Lastfaktor  $K_L$  (Gl. 2.94) und Massefaktor  $K_M$  (Gl. 2.96) sind dementsprechend gleich 1,0, sodass sich die erste Eigenfrequenz anhand Gl. 5.99 ermitteln lässt. Dabei ergibt sich die Steifigkeit von Balkensystem und



äquivalenten Einmassensystem als Produkt von Bettungsmodul  $C_B$  und Stützweite  $L$ .

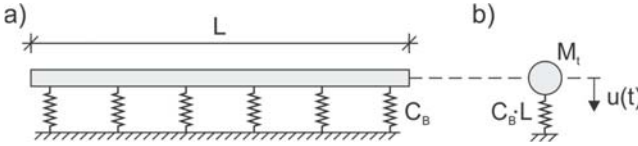


Abbildung 5-42 a) Gleichmäßig gebetteter Balken b) äquivalentes Einmassensystem

$$\omega_0 = n_0 \cdot 2\pi = \sqrt{\frac{C_B \cdot L}{M_t}} \quad \text{Gl. 5.99}$$

Soll die Bettung nun in den Systemen in Abbildung 5-40 a oder b berücksichtigt werden, so lässt sich die bekannte Gleichung Gl. 5.44 um den Anteil aus Gl. 5.99 ergänzen, siehe Gl. 5.100. Der Bettungsmodul  $C_B$  lässt sich anhand Gl. 5.102 ermitteln.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_E}{M_E} + \frac{C_B \cdot L}{M_t}} = \sqrt{\frac{K_L \cdot k + C_B \cdot L \cdot K_M}{K_M \cdot M_t}} = \sqrt{\frac{k_E + k_B}{M_E}} \quad \text{Gl. 5.100}$$

$$k_B = C_B \cdot L \cdot K_M \quad \text{Gl. 5.101}$$

$$C_B = \psi_{mod} \cdot c_{coup} \cdot h_{Schotter} \quad \text{Gl. 5.102}$$

Dabei ist  $c_{coup}$  die Koppelsteifigkeit in der Fuge, bezogen auf die Koppelfläche. Die Umrechnung auf einen Bettungsmodul erfolgt über die Multiplikation mit der Höhe der Koppelfläche, d.h. der Einbauhöhe des Schotters im Bereich der Fuge, hier mit  $h_{Schotter}$  bezeichnet. Der Faktor  $\psi_{mod}$  dient der bereits angesprochenen Umrechnung der in der Koppelfuge wirkenden Koppelsteifigkeit in einen in der Schwerlinie des Überbaus liegenden Bettungsmodul. Die Notwendigkeit einer solchen Anpassung lässt sich anhand einer Beispielrechnung an der *EÜ Erfthalstraße* erläutern. In Tabelle 5-5 sind die entsprechend berechneten ersten Biegeeigenfrequenzen  $n_0$ , die sich prozentual ergebenden Abweichungen und die Zwischenwerte  $k_E$ ,  $k_B$  und die äquivalente Erhöhung der Biegesteifigkeit, mit der sich die gleiche Erhöhung von  $n_0$  erzielen ließe, gegeben. Differenziert werden dabei wieder das ideal-gelenkig geladerte System und das System mit Drehfedern (unter Berücksichtigung einer linearen Drehfedersteifigkeit  $c_\varphi$  eines unbelasteten Schotterbettes). Die entsprechenden Eingangswerte entsprechen denen aus den vorangegangenen Kapiteln ( $L = 24,6$  m,  $EI = 29796$  MNm,  $m = 25,98$  t/m,  $c_\varphi = 897$  MNm/rad). Um die erzielten Ergebnisse

für  $\Delta EI_{\text{äqu}}$ ,  $n_{0,\text{mit } k_B}$  und  $\Delta n_0$  mit den Ergebnissen von [Rau2011a] vergleichen zu können, wird der dort verwendete Wert von  $c_{\text{coup}} = 4,35 \text{ MN/m}^2$  verwendet. Es zeigt sich, dass die so ermittelten Eigenfrequenzen in Tabelle 5-5 verhältnismäßig hoch sind.

**Tabelle 5-5: Beispielrechnung EÜ Erfttalstraße mit  $\psi_{\text{mod}} = 1,0$**

	$k_E$ [MN/m]	$k_B$ [MN/m]	$\Delta EI_{\text{äqu}}$ [%]	$n_0$ [Hz]	$n_{0,\text{mit } k_B}$ [Hz]	$\Delta n_0$ [%]
ohne $c_\varphi$	98,4	33,9	34	2,78	3,23	16
mit $c_\varphi$	124,1	33,3	27	3,15	3,55	13

Einen geeigneten Anpassungsfaktor  $\psi_{\text{mod}}$  zu entwickeln, bedarf weiterer Forschung, in Gl. 5.103 wird ein erster Vorschlag für einen ingenieurmäßigen Ansatz gemacht.

$$\psi_{\text{mod}} = \frac{(L - L_{LV})/L}{e_F} \quad \text{Gl. 5.103}$$

Dabei ist  $L_{LV}$  der Längsversatz bei in Längsrichtung versetzten Überbauten (Abbildung 5-41 b) und  $e_F$  der Abstand zwischen Koppelfuge und Schwereachse des Überbaus. Auf diese Weise wird eine lineare Abnahme des Einflusses der Kopplung in Brückenquerrichtung unterstellt. Bei der EÜ Erfttalstraße ergibt sich aus  $L_{LV} = 4 \text{ m}$  und  $e_F = 2,25 \text{ m}$  ein Anpassungswert von  $\psi_{\text{mod}} = 0,37$  und infolgedessen die in Tabelle 5-6 gegebenen Werte.

**Tabelle 5-6: Beispielrechnung EÜ Erfttalstraße mit  $\psi_{\text{mod}} = 0,37$**

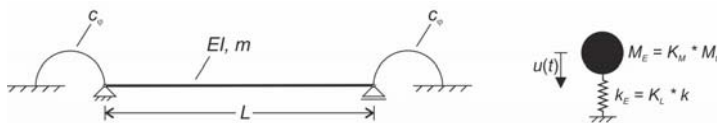
	$k_E$ [MN/m]	$k_B$ [MN/m]	$\Delta EI_{\text{äqu}}$ [%]	$n_0$ [Hz]	$n_{0,\text{mit } k_B}$ [Hz]	$\Delta n_0$ [%]
ohne $c_\varphi$	98,4	12,6	13	2,78	2,95	6
mit $c_\varphi$	124,1	12,4	10	3,15	3,30	5

Für das betrachtete Brückenbauwerk ergeben sich so Werte, die in der Größenordnung der von [Rau2011a] durchgeführten Querschnittssteifigkeitserhöhung von 10 % liegen. Dieser vielversprechende Ansatz zeigt die Richtung auf, in die künftige Untersuchungen gehen könnten. Insbesondere sind noch der Einfluss der Steifigkeit der unbelasteten Brücke sowie die Bedeutung der Torsionseffekte zu identifizieren und in das vereinfachte Einmassen-Modell zu integrieren.

## 6 Zusammenfassung Berechnungsablauf

### 6.1 Ermittlung Systemeingangsparameter

Für die vereinfachte Ermittlung von Biegeeigenfrequenzen und Bauwerksreaktionen auf überfahrende Züge der im Rahmen dieser Arbeit diskutierten WiB-Brücken werden die Brückenparameter  $L$ ,  $EI$ ,  $m$  und  $c_\varphi$  benötigt.



**Abbildung 6-1: a) Balkensystem mit Drehfedern, b) äquivalentes Einmassensystem**

Dabei ist  $L$  die Stützweite des gelenkig gelagerten Einfeldsystems,  $EI$  die Biegesteifigkeit und  $m$  die Masse pro Längeneinheit ( $EI$  und  $m$  sind über die gesamte Stützweite konstant). Die Einspannwirkung der über die Brücke hinauslaufenden Gleise lässt sich über äquivalente Drehfedern an den Auflagern berücksichtigen (siehe Abbildung 6-1). Die zugehörige Drehfedersteifigkeit  $c_\varphi$  lässt sich anhand Gl. 5.28 bestimmen. Benötigt werden dazu die horizontale Ersatzfedersteifigkeit  $k_{Ersatz}$  und der vertikale Abstand  $h_{SL}$  zwischen Schwerlinie Schiene und Systemverdrehachse am Auflager (siehe Abbildung 5-10).

Ist die zugehörige Auflagerverdrehung  $\varphi$  kleiner oder gleich dem Grenzkriterium für Durchrutschen in Gl. 5.29, kann eine lineare Ersatzfedersteifigkeit des Gleises im Dammbereich für die Berechnung verwendet werden. Für die Ermittlung der Biegeeigenfrequenzen der unbelasteten Brücke lassen sich sehr kleine Verdrehungen unterstellen, sodass hier eine Berechnung mit  $k_{Ersatz,linear}$  zulässig ist.

Die entsprechenden Werte für  $k_{Ersatz,linear}$  können in Abhängigkeit von Oberbau (Schotterbett oder feste Fahrbahn, Angabe der Werte jeweils für das belastete oder unbelastete Gleis) und Länge des zu berücksichtigenden Dammbereiches  $L_D$  nach Gl. 3.1 graphisch Abbildung 5-13 bzw. in Zahlenwerten Anhang A.1 entnommen werden. Es sei angemerkt, dass alle im Rahmen dieser Arbeit ermittelten  $k_{Ersatz}$ -Werte nur für UIC 60 Schienen und B70W Schwellen gelten.

Bei der Berechnung von Überfahrten kann nicht von einer grundsätzlichen Einhaltung des Grenzkriteriums in Gl. 5.29 ausgegangen werden. Hier gilt es, die Auflagerverdrehungen  $\varphi$  im gesamten Berechnungszeitraum zu überprüfen und ggf. eine nicht-lineare horizontale Ersatzfedersteifigkeit  $k_{Ersatz,n-l}$  der Berechnung zugrunde zu

legen. In Abhängigkeit von  $L_D$  ergibt sich jeweils ein Zusammenhang zwischen  $k_{\text{Ersatz},n-l}$  und horizontaler Verformung der Schiene  $\delta_{n,\text{res}}$  am Übergang zwischen Brücke und Bahndamm. Die entsprechenden Werte können [Big2018] entnommen werden. Aus  $k_{\text{Ersatz},n-l}(\delta_{n,\text{res}})$  lässt sich mit Gl. 5.28 die nicht-lineare Drehfedercharakteristik  $c_\varphi(\varphi)$  bestimmen.

## 6.2 Berechnungen und Ergebnisverwertung

### 6.2.1 Ermittlung Biegeeigenfrequenzen

Anhand von Gl. 5.44 bis Gl. 5.48 lässt sich unter Berücksichtigung der Parameter  $L$ ,  $EI$ ,  $m$  und  $c_\varphi$  die erste Beieigenfrequenz  $n_0$  einer gelenkig gelagerten Einfeldträgerbrücke mit zusätzlichen Drehfedern an den Auflagern zur Berücksichtigung der Einspannwirkung der über die Brücke hinauslaufenden Gleise berechnen. Die Berechnung erfolgt mit Hilfe eines äquivalenten Einmassensystems unter Annahme einer gleichmäßigen Masse- und Lastverteilung. Wird die betrachtete Einfeldträgerbrücke mit Geschwindigkeiten  $v \leq 200$  km/h befahren, kann die Bemessung ausschließlich anhand von quasi-statischen Ersatzlastmodellen und dynamischen Beiwerten erfolgen, wenn sich  $n_0$  innerhalb der in Gl. 2.3 bis Gl. 2.5 gegebenen Grenzen befindet (vgl. Abbildung 1-1).

In Anhang B.1 ist darüber hinaus eine Matlab-Routine [Mat2014] gegeben, mit der sich unter Berücksichtigung der Parameter  $L$ ,  $EI$ ,  $m$  und  $c_\varphi$  auch höhere Biegeeigenformen berechnen und die zugehörigen Eigenformen visualisieren lassen. Die Berechnung erfolgt mit einer minimal erweiterten Routine von [Dan2017], bei der das Differenzenverfahren zum Einsatz kommt. Anhand von Gl. 2.17 lässt sich überprüfen, welche der ermittelten höheren Biegeeigenfrequenzen in einer Überfahrtsimulation gemäß [RiL804] berücksichtigt werden müssen.

Die Simulation von Zugüberfahrten im Rahmen dieser Arbeit wird mit einem äquivalenten Einmassensystem durchgeführt, bei dem die Einflüsse höherer Eigenfrequenzen vernachlässigt werden. Daher muss ausgeschlossen werden, dass die Vernachlässigung der Einflüsse höherer Biegeeigenfrequenzen zu unsicheren Ergebnissen führt. Anhand Gl. 2.16 lassen sich die eigenfrequenzabhängigen kritischen Geschwindigkeiten  $v_{\text{res},i,j,k}$  ermitteln, bei denen mit Resonanzeffekten zu rechnen ist. In vielen Fällen liegen die kritischen Geschwindigkeiten der höheren Biegeeigenfrequenzen außerhalb des zu untersuchenden Geschwindigkeitsbereiches (d.h. sie sind größer als die nach Gl. 2.20 bzw. Gl. 2.21 oberen Grenzwerte).

Im Rahmen der hier durchgeführten Untersuchungen waren für Simulationen mit  $v_{res,3,1,ICE1}$  und  $v_{res,4,1,ICE1}$  nach Gl. 2.16 keine nennenswerten Fehler durch Vernachlässigung von  $n_1$  festzustellen. Eine genauere Untersuchung des Einflusses höherer Eigenfrequenzen sollte erfolgen, wenn  $v_{res,j,1,k}$  oder  $v_{res,j,2,k}$  nach Gl. 2.16 im zu untersuchenden Geschwindigkeitsbereich liegen.

## 6.2.2 Simulation von Zugüberfahrten

Die Simulation von Zugüberfahrten erfolgt anhand eines äquivalenten Einmassensystems unter Berücksichtigung bewegter Einzellasten. Der Berechnung zugrunde gelegt werden die bereits bekannten Parameter  $L$ ,  $EI$ ,  $m$ ,  $c_\varphi$ , sowie die Dämpfung nach Abbildung 2-6. Die Berechnungen erfolgen mit dem Newmark-Algorithmus (Gl. 2.39 bis Gl. 2.61). Die zwei im Rahmen dieser Arbeit erstellten Matlab-Tools sind in Anhang B.5 und B.6 zu finden. Dabei wird für den gesamten Berechnungsablauf in B.5 eine konstante Drehfedersteifigkeit  $c_\varphi$  verwendet (auf der sicheren Seite liegend wird im gesamten Berechnungszeitraum von einem unbelasteten Gleis ausgegangen), während in B.6 den Berechnungen eine verdrehungsabhängige, nicht-lineare Drehfedercharakteristik  $c_\varphi(\varphi)$  zugrunde gelegt wird. Es kann festgelegt werden, ab welcher Anzahl von Achslasten auf dem Dammbereich dieser als belastet angenommen wird und somit eine höhere Drehfedersteifigkeit berücksichtigt wird. Die Berechnungen mit der erstgenannten Routine erfolgen deutlich schneller, da dort keine Anpassung von  $c_\varphi$  erfolgt und eine Überprüfung des Grenzkriteriums in Gl. 5.29 erst am Ende der Berechnungen geschieht. Bei der zweiten Routine erfolgt die Überprüfung der Verdrehung nach jedem Zeitschritt, bei Änderung von  $\varphi$  oder einem Wechsel zwischen belastetem und unbelastetem Dammbereich wird  $c_\varphi$  angepasst.

Die Züge werden jeweils aus einer Datei mit 2 Spalten ( $x[m]$ ,  $P[kN]$ ) eingelesen, welche die Achsabstände von der 1. Achslast aus betrachtet und die zugehörigen Achslasten gemäß den Angaben aus [RiL804] enthält. Die Überfahrtsgeschwindigkeit ist jeweils in  $[m/s]$  zu definieren.

Beide Tools berechnen am äquivalenten Einmassensystem zu jedem Zeitpunkt  $t$  die vertikale Durchbiegung  $u(t)$ , Geschwindigkeit  $\dot{u}(t)$  und Beschleunigung  $\ddot{u}(t)$ , was den genannten Bauwerksreaktionen in Feldmitte des ursprünglichen Balkensystems mit Drehfedern entspricht. Aus diesen Werten werden am ursprünglichen System an beiden Auflagern die Verdrehungen  $\varphi(t)$ , die Einspannmomente  $M_y(t)$ , sowie die Querkräfte  $V(t)$  ermittelt. Hinzu kommen die Biegemomente  $M_y(t)$  in Feldmitte. Anhand der zugrundeliegenden Formeln in Gl. 5.67 bis Gl. 5.91 lassen sich analog dazu natürlich noch andere Stellen im System betrachten, die gewählten Größen

werden für die Überprüfung des Grenzkriteriums in Gl. 5.29, sowie für die Nachweise im ULS und SLS benötigt. Dabei ist darauf zu achten, dass für die Nachweise im ULS und SLS noch der Einfluss von Gleislagefehlern gemäß Gl. 2.14 und Gl. 2.15 berücksichtigt werden muss, d.h. die berechneten Verformungen, Verdrehungen, Schnittgrößen und die Beschleunigung werden noch einmal vergrößert.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Die realitätsnahe Prognose der dynamischen Bauwerkseigenschaften, d.h. Eigenfrequenzen und Dämpfungsparameter, sowie die Prognose der Bauwerksreaktionen auf überfahrende Züge stellt insbesondere bei WiB-Brücken eine besondere Herausforderung dar. Während Berechnungen häufig relativ geringe Eigenfrequenzen liefern, welche bereits bei geringen Überfahrtsgeschwindigkeiten Resonanzeffekte, beispielsweise in Form von großen Bauwerksverformungen und vertikalen Beschleunigungen, erwarten lassen, ergeben sich bei Bauwerksmessungen i.d.R. deutlich höhere Eigenfrequenzen und in üblichen Überfahrtsgeschwindigkeitsbereichen daher oft auch deutlich niedrigere maximale Bauwerksreaktionen.

Die z.T. sehr großen Diskrepanzen zwischen Realität und Berechnung sind schon seit längerem bekannt und werden allgemein der Mitwirkung s.g. baulicher Randbedingungen zugeschrieben. Zusätzlich zum tragenden Überbau liefern also auch Schotterbett, Schienen, Randkappen, etc. einen Beitrag zur Systemsteifigkeit. Da WiB-Brücken in Deutschland etwa 25 % des Eisenbahnbrückenbestandes ausmachen und auch im Bereich des Ersatzneubaus sehr viele Vorteile aufweisen, wird in der Praxis dementsprechend häufig der Wunsch geäußert, bereits in der Bemessung höhere Systemsteifigkeiten zum Ansatz bringen zu dürfen.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden zwei Themenschwerpunkte betrachtet: einerseits die Fragestellung, welche zusätzlichen Steifigkeitsbeiträge sich grundsätzlich für eine Berücksichtigung in der Brückenbemessung eignen und welche lediglich für die Nachrechnung von Messwerten mit etwaiger Modellparameteranpassung herangezogen werden können, andererseits die Fragestellung, welche Möglichkeiten zur vereinfachten Bemessung von WiB-Brücken den z.T. sehr großen Arbeitsaufwand und die Berechnungsdauer bei dynamischen Berechnungen reduzieren können.

Die Identifizierung der Einzelbeiträge baulicher Randbedingungen ist bei In-Situ-Messungen am Gesamtbauwerk nur sehr schwer möglich, insbesondere da viele der zu untersuchenden Einflussparameter zusätzlich noch temperatur- und witterungsbedingten Schwankungen unterliegen. Auch lässt sich oft das tatsächliche Verhalten der WiB-Überbauten am Bauwerk in Nutzung nur abschätzen, da meistens keine genaue Kenntnis zu möglicher Rissbildung und zum tatsächlichen Beton-E-Modul vorliegt. Für die Zukunft wünschenswert wäre also sicherlich die standardmäßige Durchführung und Ergebnisaufbereitung von E-Modul-Prüfungen bei Neubauten für eine eventuell erforderliche Nachrechnung der Brücken zu einem späteren Zeitpunkt, beispielsweise vor Einführung eines neuen Zugtyps.

Sollen im Rahmen einer Bemessung zusätzliche Steifigkeitsbeiträge von Randkappen zum Ansatz kommen (insbesondere unter Annahme eines Schubverbundes zwischen Überbau und Randkappe), so müssen entsprechende Verbundmittel für die gesamte geplante Lebensdauer ausgelegt werden. Für die Bewertung von Bestandsbauten anhand von Messungen ist zu berücksichtigen, dass sich ein anfangs voller Verbund zwischen Überbau und Randkappe bei Bauwerksfreigabe u.U. durch eine entsprechend hohe Anzahl von Überfahrten lösen kann und dann nur noch ein Teilverbund oder gar kein Verbund mehr vorliegt. Die Systemsteifigkeit und somit auch die Eigenfrequenzen und kritischen Geschwindigkeiten werden dadurch verringert. Auch hier sind weitergehende Untersuchungen nötig, um die Dauerhaftigkeit dieser Verbindungen bei den ansonsten weitestgehend ermüdungsresistenten WiB-Brücken zu klären.

Zur isolierten Betrachtung des Koppelleffektes zwischen Brückenüberbauten, welche durch eine Längsfuge getrennt sind, sich aber eine gemeinsame Schotter-schicht teilen, wurde im Rahmen dieser Arbeit ein neuer Versuchsstand entwickelt. Effekte aus Biegung, die sich bei realen Überbauten mit dem Koppelleffekt überlagern, konnten ausgeschlossen werden und der Koppelleffekt entlang einer klar definierten Koppelfuge untersucht werden. Der Versuchsstand wurde so entwickelt, dass anhand weiterer Nachfolgeuntersuchungen die Einflüsse von Temperatur und Witterung, sowie möglichem Verschleiß untersucht werden können.

Nach derzeitiger Normenlage können gemäß [EN1991-2] [RiL804] bisher reale Lagerbedingungen und das gemeinsame Gleis-/Tragwerkssystem zum Ansatz gebracht werden, wobei die bei WiB-Brücken üblichen Elastomerlager vernachlässigbare Beiträge zur Systemsteifigkeit liefern. Die über die Brückenenden hinauslaufenden Gleise hingegen führen zu einem Einspanneffekt der Brücke. Im Tragwerksmodell werden dazu die Gleise separat zum Überbau als Balken modelliert und über nicht-lineare Federelemente an Überbau und Bahndämme gekoppelt. [EN1991-2] [RiL804] geben die in Deutschland gültigen Federgesetze zur Darstellung des Längsverschiebewiderstandes der Schwellen im Schotter und des Durchschubwiderstandes der Gleise bei fester Fahrbahn vor. Dabei wird jeweils zwischen unbelasteten und belasteten Gleisen differenziert. Der Zeitaufwand für eine Modellerstellung wird so allerdings erhöht, ebenso die Berechnungsdauer. Häufig wird daher die Einspannwirkung der Eisenbahnschienen auf der sicheren Seite liegend vernachlässigt.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine Möglichkeit geschaffen, die Einspannwirkung der Gleise auf dem Bahndamm durch zusätzliche, äquivalente Drehfedern an den gelenkigen Auflagern eines Balkensystems abzubilden. Hierbei ergibt sich eine verdrehungsabhängige Drehfedercharakteristik, welche das Durchrutschen der



Schwellen im Schotter bzw. bei fester Fahrbahn das Durchrutschen der Schienen berücksichtigt. Die Drehfedersteifigkeiten sind abhängig vom gemäß [EN1991-2] [RiL804] im Berechnungsmodell ansetzbaren Bahndammbereich und vom Abstand zwischen Schwereachse Schiene und der Systemverdrehachse. Gerade letzterer beeinflusst die Ergebnisse stark. Es wurden zwei Varianten verglichen: eine Verdrehung um die Schwereachse der WiB-Brücken (aufgrund der geringen Rückstellkräfte der typischen Elastomerlager) und eine Verdrehung um die tatsächliche Lagerachse. Die letztere Variante liefert deutlich höhere Beiträge zur Systemsteifigkeit. Welche Berechnungsvariante nun der Realität entspricht, lässt sich nur anhand (zukünftiger) Bauwerksmessungen bewerten, bei denen die Endverdrehungen und -verschiebungen von elastomergelagerten WiB-Brücken messtechnisch erfasst werden.

Das Balkensystem mit Drehfedern an den Auflagern wurde anschließend in ein äquivalentes Einmassensystem überführt. Anhand der entwickelten Formeln lassen sich nun ohne aufwendigen Computereinsatz die Biegeeigenfrequenzen  $n_0$  unter Einbeziehung der Einspannwirkung der Drehfedern ermitteln. Die  $n_0$ -Werte können direkt zur vereinfachten Überprüfung der Resonanzgefahr gemäß [EN1991-2] [RiL804] verwendet werden. Hierbei ist die Drehfedercharakteristik eines unbelasteten Gleises anzusetzen.

Weiterhin wurden Berechnungs-Tools entwickelt, mit denen unter Berücksichtigung der Einspannwirkung der Gleise, Zugüberfahrten anhand äquivalenter Einmassensysteme simuliert werden können. Neben Durchbiegung und vertikaler Beschleunigung in Feldmitte werden Auflagerverdrehungen und Schnittgrößen an relevanten Stellen ermittelt. Die Tools sind so aufgebaut, dass sich eine große Anzahl von Zugüberfahrten in sehr kurzer Zeit simulieren lässt. Anhand von Vergleichsrechnungen mit einem Balkensystem wurde gezeigt, dass sich das dynamische Verhalten von Einfeldträgerbrücken mithilfe eines äquivalenten Einmassenschwingers zutreffend abbilden lässt. Der Einfluss höherer Eigenfrequenzen auf die Berechnungsergebnisse konnte zumindest für das exemplarisch betrachtete Bauwerk ausgeschlossen werden.

Bei den durchgeführten Simulationsrechnungen wurden Berechnungsergebnisse gegenübergestellt, welche mit den nachfolgenden vier Systemvarianten berechnet wurden: ideal-gelenkig gelagerter Balken, Balken mit linearen Drehfedern unter Annahme eines unbelasteten Gleises, Balken mit nicht-linearen Drehfedern unter Annahme eines unbelasteten Gleises und ein Balken mit nicht-linearen Drehfedern und einem Wechsel zwischen unbelastetem und belastetem Gleis. Dabei wurde das Gleis immer dann als belastet angenommen, wenn sich mindestens vier Achsen auf jedem Bahndamm befanden. Eine Darstellung der während der durchgeführten

Überfahrtssimulationen ermittelten maximalen Bauwerksreaktionen in Abhängigkeit der Überfahrtsgeschwindigkeit zeigt erwartungsgemäß in den Bereichen der kritischen Geschwindigkeiten  $v_{res,i,j,k}$  lokale Maxima. Hier wirkt sich eine höhere Systemsteifigkeit durch Berücksichtigung der Einspannwirkung der Gleise sehr positiv auf die Berechnungsergebnisse aus. Zwar wurde in dieser Arbeit die Erkenntnis aus vorangegangenen Studien bestätigt, dass eine Erhöhung der Systemsteifigkeit die jeweiligen Maximalwerte nicht unbedingt maßgebend verringert, sie aber erst bei höheren Überfahrtsgeschwindigkeiten auftreten, die sich oft außerhalb des für die Brücke relevanten Geschwindigkeitsbereiches befinden.

## 8 Literaturverzeichnis

### Normen und Richtlinien

- [DIN1075] DIN 1075 Berechnungsgrundlagen für massive Brücken, 1938.
- [EN1337-3] DIN EN 1337-3: Lager im Bauwesen, Teil 3 Elastomerlager, Deutsche Fassung EN 1337-3:2005, Ausgabe 2005.
- [EN1990] DIN EN 1990 Eurocode: Grundlagen der Tragwerksplanung; Deutsche Fassung EN 1990:2002 + A1:2005 + A1:2005/AC:2010, Ausgabe 2010.
- [EN1991-1-1] DIN EN 1991-1-1 Eurocode 1: Einwirkungen auf Tragwerke - Teil 1-1: Allgemeine Einwirkungen auf Tragwerke - Wichten, Eigengewicht und Nutzlasten im Hochbau; Deutsche Fassung EN 1991-1-1:2002 + AC:2009, Ausgabe 2010.
- [EN1991-1-5] DIN EN 1991-1-5 Eurocode 1: Einwirkungen auf Tragwerke –Teil 1-5: Allgemeine Einwirkungen –Temperatureinwirkungen; Deutsche Fassung EN 1991-1-5:2003 + AC:2009, Ausgabe 2010.
- [EN1991-1-5NA] DIN EN 1991-1-5/NA Nationaler Anhang – National festgelegte Parameter – Eurocode 1: Einwirkungen auf Tragwerke – Teil 1-5: Allgemeine Einwirkungen – Temperatureinwirkungen, Ausgabe 2010.
- [EN1991-2] DIN EN 1991-2 Eurocode 1: Einwirkungen auf Tragwerke - Teil 2: Verkehrslasten auf Brücken; Deutsche Fassung EN 1991-2:2003 + AC:2010, Ausgabe 2010.
- [EN1992-1] DIN EN 1992-1 Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken - Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau; Deutsche Fassung EN 1992-1-1:2004 + AC:2010, Ausgabe 2011.
- [EN1994-1-1] DIN EN 1994-1-1 Eurocode 4: Bemessung und Konstruktion von Verbundtragwerken aus Stahl und Beton, Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Anwendungsregeln für den Hochbau, Ausgabe 2010.
- [EN1994-2] DIN EN 1994-2 Eurocode 4: Bemessung und Konstruktion von Verbundtragwerken aus Stahl und Beton - Teil 2: Allgemeine Bemessungsregeln und Anwendungsregeln für Brücken; Deutsche Fassung EN 1994-2:2005 + AC:2008, Ausgabe 2010.
- [EN12390-13] DIN EN 12390-13 Prüfung von Festbeton - Teil 13: Bestimmung des Elastizitätsmoduls unter Druckbelastung (Sekantenmodul); Deutsche Fassung EN 12390-13:2013, Ausgabe 2014.
- [DINFB101] DIN-Fachbericht 101: Einwirkungen auf Brücken, Ausgabe 2009.
- [RIL804] DB-Richtlinie 804: Eisenbahnbrücken (und sonstige Ingenieurbauwerke) planen, bauen und instand halten, DB Netz AG, 2013.

- [UIC776-1, 1997] UIC-Kodex 776-1 1. Ausgabe. UIC Internationaler Eisenbahnverband, 1974.
- [UIC776-1, 2007] UIC-Kodex 776-1 5. Ausgabe. UIC Internationaler Eisenbahnverband, 2007.
- [UIC774] UIC-Kodex 774-3 Interaktion Gleis/Brücke - Empfehlungen für die Berechnungen, 2001.

## Veröffentlichungen

- [Ars2007] Arsenal Research: Richtlinie Dynamische Messung von Eisenbahnbrücken. Projekt ComTest, 2007.
- [Arv2014] Arvidsson, T., Karoumi, R., Pacoste, C.: Statistical screening of modeling alternatives in train-bridge interaction systems. *Engineering Structures* 59, S. 693-701. doi:10.1016/j.engstruct.2013.10.008, 2014.
- [Bac1987] Bachmann, H., Ammann, W.: Schwingungsprobleme bei Bauwerken - Durch Mensch und Maschinen induzierte Schwingungen. IABSE - AIPC -IVBH, ISBN 3857480513, 1987.
- [Bae2008] Baeßler, M.: Lageveränderung des Schottergleises durch zyklische und dynamische Beanspruchungen, D 83 (Dissertation TU Berlin), 2008.
- [Bag2008] Bagayoko, L.; Koch, E.; Patz, R.: Dynamik von Eisenbahnbrücken, Stahlbau-Kalender 2008, Ernst & Sohn, Berlin, 2008.
- [Bat1990] Bathe, K.-J: Finite-Elemente-Methoden, ISBN 3-540-15602-X, 1990.
- [Bat2011] Battini, J.-M., Ülker-Kaustell, M.: A simple finite element to consider the non-linear influence of the ballast on vibrations of railway bridges. *Engineering Structures* 33, S. 2597-2602, DOI: 10.1016/j.engstruct.2011.05.005, 2011.
- [Big2014a] Bigelow, H.: Zum temperaturabhängigen Verhalten von WiB-Eisenbahnverbundbrücken. 19. DASt-Forschungskolloquium, S. 9-13, ISBN 978-3-929371-33-8, 2014.
- [Big2018] Bigelow, H.: Nicht-lineare Federcharakteristiken zur Darstellung der Einspannwirkung von Eisenbahngleisen, Datensatz, doi:10.18154/RWTH-2017-09375, 2018.
- [Big2016] Bigelow, H., Feldmann, M.; Hoffmeister, B., Zabel, V.: Zur Einspannwirkung von Eisenbahngleisen - Die Auswirkung auf die erste Biegeeigenfrequenz bei Einfeldträgerbrücken. *Bautechnik* 93 (2016), H. 7, S. 462-469, DOI: 10.1002/bate.201600006.
- [Big2012] Bigelow, H., Hoffmeister, B., Feldmann, M.: Assessment of dynamic loads on railway bridges. Eleventh International Conference on Computational Structures Technology (CST). Dubrovnik: Civil-Comp Press, Stirlingshire, United Kingdom, 2012.
- [Big2013] Bigelow, H., Hoffmeister, B., Feldmann, M.: Überprüfung der Resonanzgefahr von Walzträger in Beton Brücken. *Der Eisenbahningenieur* 64 (Heft 12), S. 22-25, 2013.

- [Big2014b] Bigelow, H., Hoffmeister, B., Feldmann, M., Weil, F.: Automatic train type identification in railway bridge monitoring. Eurodyn 2014: IX International Conference on Structural Dynamics, S. 2193-2198, ISBN: 978-972-752-165-4, 2014.
- [Bigg1964] Biggs, L. M.: Introduction to Structural Dynamics. MCGRAW-HILL, 1964.
- [Bun2010] Bungard, V., Mahowald, J., Waldmann, D., Maas, S., Zürbes, A.: Dynamische Zustandsbewertung einer Verbundbrücke: Beobachtung äußerer und nichtlinearer Einflüsse auf die modalen Eigenschaften. Beton- und Stahlbetonbau 105, H. 8, S. 509-520, DOI: 10.1002/bcst.201000027, 2010.
- [Cal2010] Calgaro, J.-A., Tschumi, M., Gulvanessian, H.: Designers' Guide to Eurocode 1: Actions on bridges, Thomas Telford Ltd, ISBN: 9780727731586, 2010.
- [Dan2017] Dankert, J.: Internet-service für die Auflagen 5 bis 7 des Lehrbuchs Dankert/Dankert: Technische Mechanik, <http://www.dankertdankert.de/>, Abgerufen am 09. 06 2017.
- [Dan2013] Dankert, J., Dankert, H.: Technische Mechanik: Statik, Festigkeitslehre, Kinematik/Kinetik. Springer-Verlag. DOI:10.1007/978-3-8348-2235-2, 2013.
- [Dom2014] Doménech, A., Museros, P., Martínez-Rodrigo, M.: Influence of the vehicle model on the prediction of the maximum bending response of simply-supported bridges under high-speed railway traffic. Engineering Structures 72, S. 123-139, DOI: 10.1016/j.engstruct.2014.04.037, 2014.
- [Dro1989] Drosner, S.: Beitrag zur Berechnung der dynamischen Beanspruchung von Brücken unter Verkehrslasten, Dissertation (Bd. Schriftenreihe des Lehrstuhls für Stahlbau Heft 16), Shaker Verlag, 1989.
- [Eis1980] Eisenmann, J., Kaess, G.: Das Verhalten des Schotters unter Belastung. Eisenbahntechnische Rundschau ETR 29 (1980), Heft 3, 201-208.
- [Eis1997] Eisenmann, J.; Rump, R.: Ein Schotteroberbau für hohe Geschwindigkeiten. Eisenbahntechnische Rundschau, 46 (1997), H. 3, S. 99-108.
- [Erri1999a] ERRI (European Railway Research Institute) D 214 (Eisenbahnbrücken für Geschwindigkeiten über 200 km/h), Report 3 (Empfehlungen für die Ermittlung von Dämpfungen von Eisenbahnbrücken) 1999.
- [Erri1999b] ERRI (European Railway Research Institute) D 214 (Eisenbahnbrücken für Geschwindigkeiten über 200 km/h), Report 4 (Wechselwirkung zwischen Zug und Brücke), 1999.
- [Fel2016] Feldmann, M., Hoffmeister, B., Bigelow, H., Könke, C.; Zabel, V., Höll, S., Reichert, I.: P941 – DYNABRIDGE – Dynamische Auslegung von Eisenbahnbrücken in Stahl- und Stahlverbundbauweise mit kleinen und mittleren Spannweiten für den Hochgeschwindigkeitsverkehr. FOSTA

- Forschungsvereinigung Stahlanwendung e. V., Düsseldorf, 2016. ISBN 978-3-942541-70-1.
- [Fin2011] Fink J., Kirchhofer J. Experimentelle Untersuchungen zum dynamischen Verhalten von Eisenbahnbrücken mit Schotteroberbau, Stahlbau 80 (2011), H.5, S. 317-323. DOI: 10.1002/stab.201101427.
- [Fin2007] Fink, J., Mähr, T. Vereinfachte Methoden zur Berechnung der dynamischen Antwort von Eisenbahnbrücken bei Zugüberfahrt. Stahlbau 76 (2007), Heft 10, S. 710-721.
- [Fin2009a] Fink, J., Mähr, T.: Influence of ballast superstructure on the dynamics of slender steel railway bridges. Nordic Steel Conference, S. 81-88, 2009.
- [Fin2009b] Fink, J.; Mähr, T.: Vergleich und Beurteilung unterschiedlicher Lastmodelle für die Ermittlung der dynamischen Antwort von Zugüberfahrten über Brücken bei Hochgeschwindigkeitsverkehr, Stahlbau 78 (2009), H.10, S.733-741.
- [Fre2011] Freymann, R.: Strukturdynamik - Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch. ISBN 978-642-19697-3, 2011.
- [Frý1971] Frýba, L.: Vibration of solids and structures under moving loads, ISBN 90 01 32420 2, 1971.
- [Frý1996] Frýba, L.: Dynamics of Railway Bridges, ISBN 0 7277 2044 9, 1996.
- [Gon2013] Gonzales, I., Ülker-Kaustell, M., Karoumi, R.: Seasonal effects on the stiffness properties of a ballasted railway bridge. Engineering Structures 57 (2013), S. 63–72. DOI: 10.1016/j.engstruct.2013.09.010.
- [Gor2016] Gorbatjuk, D., Brandstetter, G., Fink, J. (2016). Investigations for Simplified Consideration of Train-Bridge-Interaction based on Railjet High-Speed Train. Bridges in Danube Basin 2016 - New Trends in Bridge Engineering and Efficient Solution for Large and Medium Span Bridges, 156, S. 116-123. doi:10.1016/j.proeng.2016.08.276.
- [Gro2012] Gross, D., Hauger, W., Schröder, J., Wall, W. A.: Technische Mechanik 3 (12. Auflage). ISBN: 978-3-642-29528-7, 2012.
- [Hau2007] Hauser, A., Adam, C.: Abschätzung der Schwingungsantwort von Brückentragwerken für Hochgeschwindigkeitszüge. D-A-CH-Tagung der Österreichischen Gesellschaft für Erdbeningenieurwesen und Baudynamik (OGE). Wien, 2007.
- [Hei1953] Heilig, R.: Theorie des elastischen Verbundes. Stahlbau Heft 22, S. 104-108, 1953.
- [Het1984] Hettler, A.: Bleibende Setzungen des Schotteroberbaus. ETR - Eisenbahntechnische Rundschau 33, S. 847-854, 1984.
- [Het1987] Hettler, A.: Schottertriaxialversuche mit statischem und zyklischem Belastungsverlauf. ETR - Eisenbahntechnische Rundschau 36, S. 399-405, 1987.

- [Hol2003] Holtzendorff, K.: Untersuchung des Setzungsverhaltens von Bahnschotter und der Hohllagenentwicklung auf Schotterfahrbahnen, Dissertation Technische Universität Berlin), 2003.
- [Ili2009] Iliopoulos, A.: Vorschlag zur Verformungsberechnung von WiB-Brücken. Stahlbau 78 (Heft 8), S. 555-561, DOI: 10.1002/stab.200910069, 2009.
- [Kir2013] Kirchhofer J. und Fink J. Analyse des dynamischen Verhaltens des Eisenbahnschotteroberbaus, Stahlbau 82 (2013), H. 5, S. 370-377. DOI: 10.1002/stab.201310050.
- [Kuc1994] Kuck, J.: Anwendung der dynamischen Fließgelenktheorie zur Untersuchung der Grenzzustände von Stahlkonstruktionen unter Erdbebenbelastung, D 82 Diss. RWTH Aachen, Schriftenreihe Stahlbau - RWTH Aachen, Heft 26, 1994.
- [Leo1940] Leonhardt, F.: Brücken aus einbetonierten Stahlträgern. Die Bautechnik 18, Heft 31, S. 359-363, 1940.
- [Les2017] Leskelä, M. V.: Shear connections in composite flexural members of steel and concrete, ECCS TC11 WG1, N°138, ISBN: 978-92-9147-137-9, 2017.
- [Liu2009] Liu, K., De Roeck, G., Lombaert, G.: The effect of dynamic train-bridge interaction on the bridge response during a train passage. Journal of Sound and Vibration 325, S. 240-251, 2009.
- [Lu2012] Lu, Y., Mao, L., Woodward, P.: Frequency characteristics of railway bridge response to moving trains with consideration of train mass. Engineering Structures 42, S. 9-22, 2012.
- [Mäh2009] Mähr, T. Theoretische und experimentelle Untersuchungen zum dynamischen Verhalten von Eisenbahnbrücken mit Schotteroberbau unter Verkehrslast, Dissertation TU Wien, 2009.
- [Man2010] Mangerig, I., Lichte, U., Beucher, S.: Bewertung der Sicherheitsanforderungen von Temperatureinwirkungen auf Brücken. Stahlbau 79, S. 167-180. doi:10.1002/stab.201001310, 2010.
- [Mar2010] Martinez-Rodrigo, M. D. ; Domenech, A.; Museros, P.: Maximum resonance and cancellation phenomena in elastically-supported beams and its application to railway bridges under high-speed traffic, Proceedings of ISMA Conference (International Conference on Noise and Vibration), Leuven, Belgium, 2010.
- [Mes2000] Meskouris, K.: Structural Dynamics, ISBN 3-433-01327-6, 2000.
- [Min2007] Minten, J., Sedlacek, G., Paschen, M., Feldmann, M., Geßler, A.: SPS - ein neues Verfahren zur Instandsetzung und Erüchtigung von stählernen orthotropen Fahrbahnplatten. Stahlbau 76 (2007), Heft 7, S. 438-454. DOI: 10.1002/stab.200710048.
- [Mus2010] Museros, P.; Martinez-Rodrigo, M. D.: The cancellation phenomenon on simply supported beams and plates subjected to moving loads, Proceedings of the 12th International Conference on civil structures and environmental engineering computing, Madeira, Portugal, 2010.

- 
- [New1959] Newmark, N. M.: A Method of Computation for Structural Dynamics. A.S.C.E. Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 85, S. 67-94, 1959.
- [ÖBB2011] ÖBB Infrastruktur: Richtlinie für die dynamische Berechnung von Eisenbrücken, Ausgabe 2011-02-01.
- [ORE1975] ORE Frage D 128/RP 3/D - Statistische Verteilung der Achslasten und Beanspruchung von Eisenbahnbrücken - Bericht Nr. 3 - Dynamische Beanspruchung in Eisenbahnbrücken unter schnellfahrenden Zügen. Utrecht: Forschungs- und Versuchsamt des Internationalen Eisenbahnverbandes, 1975.
- [Pir2009] Pircher, H., Stadler, C., Glatzl, J., Seitz, P.: Dynamische Berechnung von Eisenbahnbrücken im Zuge von Hochgeschwindigkeitsstrecken. Bautechnik 86 (1). doi:10.1002/bate.200910001, 2009.
- [Pro1976] Prommersberger, G., Siebke, H.: Das Belastungsbild UIC 71, die neue Bemessungsgrundlage für den Eisenbahnbrückenbau. Eisenbahntechnische Rundschau (ETR) (25), S. 33-40, 1976.
- [Rau2011a] Rauert, T.: Zum Einfluss baulicher Randbedingungen auf das dynamische Verhalten von WiB-Eisenbahnbrücken, D 82 (Dissertation RWTH Aachen University), Shaker Verlag (2011), ISBN 978-3-8440-0360-4.
- [Rau2010a] Rauert, T.; Bigelow, H.; Hoffmeister, B.; Feldmann, M.: On the prediction of the interaction effect caused by continuous ballast on filler beam railway bridges by experimentally supported numerical studies. Engineering Structures (2010), H. 12, S. 3981-3988, DOI: 10.1016/j.engstruct.2010.09.009.
- [Rau2010b] Rauert, T., Bigelow, H., Hoffmeister, B., Feldmann, M., Patz, R., Lipfert, P.: Zum Einfluss baulicher Randbedingungen auf das dynamische Verhalten von WIB-Eisenbahnbrücken, Teil 1: Einführung und Messuntersuchungen an WIB-Brücken. Bautechnik 87 (2010) H. 12, S. 665–672, DOI: 10.1002/bate.201010044.
- [Rau2010c] Rauert, T., Bigelow, H., Hoffmeister, B., Feldmann, M., Patz, R., Lipfert, P.: Zum Einfluss baulicher Randbedingungen auf das dynamische Verhalten von WIB-Eisenbahnbrücken, Teil 2: Numerische Untersuchungen und Bemessungsvorschläge. Bautechnik 87 (2010) H. 12, S. 751-760, DOI: 10.1002/bate.201010049.
- [Rau2011b] Rauert, T., Feldmann, M., He, L., De Roeck, G.: Calculation of bridge deformations due to train passages by the use of strain and acceleration measurements from bridge monitoring supported by experimental tests. Proceedings of the 8th International Conference on Structural Dynamics, EUROLYN 2011, S. 1149-1155, 2011.
- [Rfcs2009] RFCS-project DETAILS: Design for optimal life cycle costs (LCC) of high-speed railway bridges by enhanced monitoring systems, RFSR-CT-2006-00032, Laufzeit 2006–2009.
-



- [Spe2006] Spengler, M.; Duda, H.; Graubner, C. A.: Beanspruchung von Eisenbahnbrücken durch Hochgeschwindigkeitsverkehr – Einfluss der Oberbauart „Feste Fahrbahn“ auf die strukturdynamischen Eigenschaften und die dynamische Tragwerksreaktion, VDI-Berichte Nr. 1941, 2006.
- [Spe2010] Spengler, M.: Dynamik von Eisenbahnbrücken unter Hochgeschwindigkeitsverkehr - Entwicklung eines Antwortspektrums zur Erfassung der dynamischen Tragwerksreaktion. Dissertation, Institut für Massivbau, Technische Universität Darmstadt, Heft 19, 2010. ISBN 978-3-9811881-6-5.
- [Van1997] Van, M. A.: Stability of Continuous Welded Rail Track. Delft: Delft University Press, ISBN 90-407-1485-1, 1997.
- [Vet2001] Vetter, K.: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, 3. Auflage, ISBN 3-519-10207-2, 2001.
- [Yeo1997] Yeong-Bin Yang, J.-D. Y.-C.: Vibration of simple beams due to trains moving at high speeds. Engineering Structures, Vol. 19, Heft 11, S. 936-944, 1997.
- [Zab2008] Zabel, V., Brehm, M.: "Das dynamische Verhalten von Eisenbahnbrücken mit kurzer Spannweite - numerische und experimentelle Untersuchungen". Bauingenieur, D-A-CH-Mitteilungsblatt, Band 83, 2008.
- [Zab2007] Zabel, V.; Brehm, M.; Bucher, C.: Seasonal changes of the dynamics of railway bridges with steel girders embedded in concrete, Proceedings of the EVACES'07 Conference (Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures), Porto, Portugal, 2007.
- [Zab2010] Zabel, V., Brehm, M., Nikulla, S.: The influence of temperature varying material parameters on the dynamic behavior of short span railway bridges. In Proceedings of International Conference on Noise and Vibration Engineering ISMA. Leuven, 2010.

## Software

- [Fle2015] FlexPro Programmversion 10.0.20, Weisang GmbH, 2015.
- [Inf2014] InfoCAD Programmversion 14.00x64, InfoGraph GmbH, [www.info-cad.de](http://www.info-cad.de), 2014.
- [Mat2014] Matlab Programmversion 2014a, Mathworks, 2014.

## Anhang A Schienen

### A.1 Lineare Ersatzfedersteifigkeiten

Tabelle A 1 Lineare Ersatzfedersteifigkeit  $k_{\text{Ersatz,lin}}$  zur Abbildung des Teilsystems „Bahndamm“ am Übergang Brücke- Bahndamm

		Schotter		Feste Fahrbahn	
		unbelastet	belastet	unbelastet	belastet
$m$	$L_D$ [m]	$k_{\text{Ersatz,lin}}$ [kN/mm]	$k_{\text{Ersatz,lin}}$ [kN/mm]	$k_{\text{Ersatz,lin}}$ [kN/mm]	$k_{\text{Ersatz,lin}}$ [kN/mm]
66	39,6	172,51	302,04	422,45	587,43
67	40,2	172,78	302,07	422,45	587,43
68	40,8	173,03	302,10	422,46	587,43
69	41,4	173,26	302,13	422,46	587,43
70	42	173,48	302,15	422,46	587,43
71	42,6	173,69	302,17	422,46	587,43
72	43,2	173,88	302,19	422,46	587,43
73	43,8	174,06	302,20	422,46	587,43
74	44,4	174,23	302,21	422,46	587,43
75	45	174,39	302,23	422,46	587,43
76	45,6	174,54	302,24	422,46	587,43
77	46,2	174,68	302,25	422,46	587,43
78	46,8	174,81	302,26	422,46	587,43
79	47,4	174,93	302,26	422,47	587,43
80	48	175,04	302,27	422,47	587,43

		Schotter		Feste Fahrbahn	
		unbelastet	belastet	unbelastet	belastet
<i>m</i>	<i>L<sub>D</sub></i> [m]	<i>k<sub>Ersatz,lin</sub></i> [kN/mm]	<i>k<sub>Ersatz,lin</sub></i> [kN/mm]	<i>k<sub>Ersatz,lin</sub></i> [kN/mm]	<i>k<sub>Ersatz,lin</sub></i> [kN/mm]
81	48,6	175,15	302,28	422,47	587,43
82	49,2	175,25	302,28	422,47	587,43
83	49,8	175,34	302,29	422,47	587,43
84	50,4	175,43	302,29	422,47	587,43
85	51	175,51	302,30	422,47	587,43
86	51,6	175,58	302,30	422,47	587,43
87	52,2	175,66	302,30	422,47	587,43
88	52,8	175,72	302,30	422,47	587,43
89	53,4	175,79	302,31	422,47	587,43
90	54	175,84	302,31	422,47	587,43
91	54,6	175,90	302,31	422,47	587,43
92	55,2	175,95	302,31	422,47	587,43
93	55,8	176,00	302,31	422,47	587,43
94	56,4	176,04	302,32	422,47	587,43
95	57	176,09	302,32	422,47	587,43
96	57,6	176,12	302,32	422,47	587,43
97	58,2	176,16	302,32	422,47	587,43
98	58,8	176,20	302,32	422,47	587,43
99	59,4	176,23	302,32	422,47	587,43

		Schotter		Feste Fahrbahn	
		unbelastet	belastet	unbelastet	belastet
<i>m</i>	<i>L<sub>D</sub></i> [m]	<i>k<sub>Ersatz,lin</sub></i> [kN/mm]	<i>k<sub>Ersatz,lin</sub></i> [kN/mm]	<i>k<sub>Ersatz,lin</sub></i> [kN/mm]	<i>k<sub>Ersatz,lin</sub></i> [kN/mm]
100	60	176,26	302,32	422,47	587,43
101	60,6	176,29	302,32	422,47	587,43
102	61,2	176,31	302,32	422,47	587,43
103	61,8	176,34	302,32	422,47	587,43
104	62,4	176,36	302,32	422,47	587,43
105	63	176,38	302,32	422,47	587,43
106	63,6	176,40	302,32	422,47	587,43
107	64,2	176,42	302,32	422,47	587,43
108	64,8	176,44	302,32	422,47	587,43
109	65,4	176,46	302,33	422,47	587,43
110	66	176,47	302,33	422,47	587,43
111	66,6	176,49	302,33	422,47	587,43
112	67,2	176,50	302,33	422,47	587,43
113	67,8	176,51	302,33	422,47	587,43
114	68,4	176,52	302,33	422,47	587,43
115	69	176,53	302,33	422,47	587,43
116	69,6	176,54	302,33	422,47	587,43
117	70,2	176,55	302,33	422,47	587,43
118	70,8	176,56	302,33	422,47	587,43

		Schotter		Feste Fahrbahn	
		unbelastet	belastet	unbelastet	belastet
<i>m</i>	<i>L<sub>D</sub></i> [m]	<i>k<sub>Ersatz,lin</sub></i> [kN/mm]	<i>k<sub>Ersatz,lin</sub></i> [kN/mm]	<i>k<sub>Ersatz,lin</sub></i> [kN/mm]	<i>k<sub>Ersatz,lin</sub></i> [kN/mm]
119	71,4	176,57	302,33	422,47	587,43
120	72	176,58	302,33	422,47	587,43
121	72,6	176,59	302,33	422,47	587,43
122	73,2	176,59	302,33	422,47	587,43
123	73,8	176,60	302,33	422,47	587,43
124	74,4	176,61	302,33	422,47	587,43
125	75	176,61	302,33	422,47	587,43
126	75,6	176,62	302,33	422,47	587,43
127	76,2	176,62	302,33	422,47	587,43
128	76,8	176,63	302,33	422,47	587,43
129	77,4	176,63	302,33	422,47	587,43
130	78	176,64	302,33	422,47	587,43
131	78,6	176,64	302,33	422,47	587,43
132	79,2	176,64	302,33	422,47	587,43
133	79,8	176,65	302,33	422,47	587,43
134	80,4	176,65	302,33	422,47	587,43
135	81	176,65	302,33	422,47	587,43
136	81,6	176,66	302,33	422,47	587,43
137	82,2	176,66	302,33	422,47	587,43

		Schotter		Feste Fahrbahn	
		unbelastet	belastet	unbelastet	belastet
<i>m</i>	<i>L<sub>D</sub></i> [m]	<i>k<sub>Ersatz,lin</sub></i> [kN/mm]	<i>k<sub>Ersatz,lin</sub></i> [kN/mm]	<i>k<sub>Ersatz,lin</sub></i> [kN/mm]	<i>k<sub>Ersatz,lin</sub></i> [kN/mm]
138	82,8	176,66	302,33	422,47	587,43
139	83,4	176,66	302,33	422,47	587,43
140	84	176,66	302,33	422,47	587,43
141	84,6	176,67	302,33	422,47	587,43
142	85,2	176,67	302,33	422,47	587,43
143	85,8	176,67	302,33	422,47	587,43
144	86,4	176,67	302,33	422,47	587,43
145	87	176,67	302,33	422,47	587,43
146	87,6	176,67	302,33	422,47	587,43
147	88,2	176,68	302,33	422,47	587,43
148	88,8	176,68	302,33	422,47	587,43
149	89,4	176,68	302,33	422,47	587,43
150	90	176,68	302,33	422,47	587,43

**Tabelle A 2 Koeffizienten der Approximationspolynome der linearen Ersatzfedersteifigkeiten, sowie Residuen Schotterbett unbelastet**

n	4	5	6	7	8	9	10
a <sub>0</sub>	1,0462 E+02	6,0023 E+01	1,2753 E+01	-2,8671 E+01	-5,7467 E+01	-7,0447 E+01	-6,8218 E+01
a <sub>1</sub>	3,8011 E+00	7,5074 E+00	1,2230 E+01	1,7063 E+01	2,0907 E+01	2,2857 E+01	2,2485 E+01
a <sub>2</sub>	-7,5912 E-02	-1,9673 E-01	-3,9017 E-01	-6,2866 E-01	-8,5048 E-01	-9,7938 E-01	-9,5166 E-01
a <sub>3</sub>	6,7725 E-04	2,6093 E-03	6,7696 E-03	1,3220 E-02	2,0451 E-02	2,5370 E-02	2,4158 E-02
a <sub>4</sub>	-2,2696 E-06	-1,7438 E-05	-6,7003 E-05	-1,7031 E-04	-3,1597 E-04	-4,3542 E-04	-4,0094 E-04
a <sub>5</sub>		4,6816 E-08	3,5714 E-07	1,3373 E-06	3,1940 E-06	5,1086 E-06	4,4423 E-06
a <sub>6</sub>			-7,9815 E-10	-5,9007 E-09	-2,0532 E-08	-4,0791 E-08	-3,1928 E-08
a <sub>7</sub>				1,1249 E-11	7,6430 E-11	2,1292 E-10	1,3279 E-10
a <sub>8</sub>					-1,2574 E-13	-6,5715 E-13	-1,8568 E-13
a <sub>9</sub>						9,1121 E-16	-7,1887 E-16
a <sub>10</sub>							2,5156 E-18
R	18,18%	3,93%	0,70%	0,10%	0,01%	0,00%	0,00%

**Tabelle A 3 Koeffizienten der Approximationspolynome der *linearen Ersatzfedersteifigkeiten*, sowie Residuen Schotterbett belastet**

n	4	5	6	7	8	9	10
a <sub>0</sub>	2,9381 E+02	2,8261 E+02	2,6253 E+02	2,3099 E+02	1,8694 E+02	1,3169 E+02	6,8906 E+01
a <sub>1</sub>	4,9170 E-01	1,4230 E+00	3,4288 E+00	7,1094 E+00	1,2988 E+01	2,1291 E+01	3,1777 E+01
a <sub>2</sub>	-1,0565 E-02	-4,0923 E-02	-1,2309 E-01	-3,0468 E-01	-6,4398 E-01	-1,1927 E+00	-1,9736 E+00
a <sub>3</sub>	9,9991 E-05	5,8547 E-04	2,3526 E-03	7,2640 E-03	1,8325 E-02	3,9265 E-02	7,3414 E-02
a <sub>4</sub>	-3,5164 E-07	-4,1632 E-06	-2,5217 E-05	-1,0388 E-04	-3,2667 E-04	-8,3518 E-04	-1,8063 E-03
a <sub>5</sub>		1,1764 E-08	1,4358 E-07	8,8988 E-07	3,7298 E-06	1,1881 E-05	3,0647 E-05
a <sub>6</sub>			-3,3902 E-10	-4,2242 E-09	-2,6603 E-08	-1,1285 E-07	-3,6247 E-07
a <sub>7</sub>				8,5653 E-12	1,0826 E-10	6,8931 E-10	2,9463 E-09
a <sub>8</sub>					-1,9232 E-13	-2,4546 E-12	-1,5733 E-11
a <sub>9</sub>						3,8790 E-15	4,9789 E-14
a <sub>10</sub>							-7,0849 E-17
R	4,78%	1,73%	0,55%	0,16%	0,04%	0,01%	0,00%



**Tabelle A 4 Koeffizienten der Approximationspolynome der linearen Ersatzfedersteifigkeiten, sowie Residuen Feste Fahrbahn unbelastet**

n	4	5	6	7	8	9	10
a <sub>0</sub>	4,2187 E+02	4,2076 E+02	4,1820 E+02	4,1287 E+02	4,0293 E+02	3,8609 E+02	3,5997 E+02
a <sub>1</sub>	3,5685 E-02	1,2733 E-01	3,8383 E-01	1,0051 E+00	2,3316 E+00	4,8622 E+00	9,2248 E+00
a <sub>2</sub>	-7,8583 E-04	-3,7731 E-03	-1,4281 E-02	-4,4935 E-02	-1,2149 E-01	-2,8875 E-01	-6,1364 E-01
a <sub>3</sub>	7,5922 E-06	5,5363 E-05	2,8135 E-04	1,1104 E-03	3,6060 E-03	9,9889 E-03	2,4196 E-02
a <sub>4</sub>	-2,7165 E-08	-4,0221 E-07	-3,0945 E-06	-1,6373 E-05	-6,6641 E-05	-2,2165 E-04	-6,2565 E-04
a <sub>5</sub>		1,1576 E-09	1,8014 E-08	1,4399 E-07	7,8476 E-07	3,2693 E-06	1,1076 E-05
a <sub>6</sub>			-4,3355 E-11	-6,9920 E-10	-5,7485 E-09	-3,2038 E-08	-1,3589 E-07
a <sub>7</sub>				1,4459 E-12	2,3941 E-11	2,0106 E-10	1,1400 E-09
a <sub>8</sub>					-4,3393 E-14	-7,3297 E-13	-6,2574 E-12
a <sub>9</sub>						1,1824 E-15	2,0283 E-14
a <sub>10</sub>							-2,9475 E-17
R	0,50%	0,23%	0,10%	0,04%	0,01%	0,00%	0,00%

**Tabelle A 5 Koeffizienten der Approximationspolynome der linearen Ersatzfedersteifigkeiten, sowie Residuen Feste Fahrbahn belastet**

n	4	5	6	7	8	9	10
a <sub>0</sub>	5,8742 E+02	5,8740 E+02	5,8733 E+02	5,8715 E+02	5,8672 E+02	5,8576 E+02	5,8382 E+02
a <sub>1</sub>	6,1012 E-04	2,5876 E-03	9,4591 E-03	3,0516 E-02	8,8275 E-02	2,3169 E-01	5,5687 E-01
a <sub>2</sub>	-1,3643 E-05	-7,8104 E-05	-3,5959 E-04	-1,3985 E-03	-4,7321 E-03	-1,4211 E-02	-3,8428 E-02
a <sub>3</sub>	1,3354 E-07	1,1644 E-06	7,2183 E-06	3,5316 E-05	1,4399 E-04	5,0571 E-04	1,5647 E-03
a <sub>4</sub>	-4,8316 E-10	-8,5762 E-09	-8,0701 E-08	-5,3072 E-07	-2,7197 E-06	-1,1504 E-05	-4,1617 E-05
a <sub>5</sub>		2,4979 E-11	4,7654 E-10	4,7461 E-09	3,2649 E-08	1,7345 E-07	7,5538 E-07
a <sub>6</sub>			-1,1614 E-12	-2,3389 E-11	-2,4326 E-10	-1,7331 E-09	-9,4737 E-09
a <sub>7</sub>				4,9002 E-14	1,0285 E-12	1,1066 E-11	8,1056 E-11
a <sub>8</sub>					-1,8896 E-15	-4,0968 E-14	-4,5275 E-13
a <sub>9</sub>						6,7007 E-17	1,4907 E-15
a <sub>10</sub>							-2,1970 E-18
R	0,01%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

A.2 Nicht-lineare Federcharakteristiken

Tabelle A 6 Nicht-lineare Federcharakteristiken für ein System mit 66 Federn,  $\delta_{\text{res}}$  [mm],  $F_{\text{Ersatz}}$  [kN],  $k_{\text{Ersatz}}$  [kN/mm]

Schotterbett unbelastet			Schotterbett belastet			F. Fahrbahn unbelastet			F. Fahrbahn belastet		
$\delta_{\text{res}}$	$F_{\text{Ersatz}}$	$k_{\text{Ersatz}}$	$\delta_{\text{res}}$	$F_{\text{Ersatz}}$	$k_{\text{Ersatz}}$	$\delta_{\text{res}}$	$F_{\text{Ersatz}}$	$k_{\text{Ersatz}}$	$\delta_{\text{res}}$	$F_{\text{Ersatz}}$	$k_{\text{Ersatz}}$
2,1	356,4	172,5	2,1	640,0	302,0	0,5	229,2	422,5	0,6	329,7	587,4
2,1	367,8	172,2	2,2	675,9	302,0	0,6	247,2	422,4	0,6	365,7	587,4
2,2	379,2	171,9	2,4	711,9	302,0	0,6	265,2	422,4	0,7	401,7	587,4
2,3	390,5	171,6	2,5	747,8	301,9	0,7	283,2	422,4	0,7	437,7	587,4
2,3	401,8	171,2	2,6	783,6	301,9	0,7	301,2	422,4	0,8	473,7	587,4
2,4	413,0	170,9	2,7	819,5	301,8	0,8	319,2	422,4	0,9	509,7	587,4
2,5	424,1	170,5	2,8	855,4	301,8	0,8	337,2	422,4	0,9	545,7	587,4
2,5	435,2	170,1	3,0	891,2	301,7	0,8	355,2	422,4	1,0	581,7	587,4
2,6	446,3	169,6	3,1	927,0	301,6	0,9	373,2	422,4	1,1	617,7	587,4
2,7	457,2	169,1	3,2	962,8	301,5	0,9	391,2	422,4	1,1	653,7	587,4
2,7	468,2	168,6	3,3	998,6	301,4	1,0	409,2	422,4	1,2	689,7	587,4
2,8	479,0	168,1	3,4	1034,4	301,3	1,0	427,2	422,4	1,2	725,7	587,4
2,8	489,8	167,5	3,5	1070,1	301,2	1,1	445,2	422,3	1,3	761,7	587,4
2,9	500,4	166,9	3,7	1105,8	301,1	1,1	463,2	422,3	1,4	797,7	587,4
3,0	511,0	166,2	3,8	1141,4	300,9	1,1	481,1	422,3	1,4	833,7	587,4
3,0	521,6	165,5	3,9	1177,0	300,7	1,2	499,1	422,3	1,5	869,7	587,4
3,1	532,0	164,8	4,0	1212,6	300,5	1,2	517,1	422,2	1,5	905,7	587,4
3,2	542,3	164,0	4,1	1248,1	300,3	1,3	535,1	422,2	1,6	941,7	587,4
3,2	552,5	163,1	4,3	1283,6	300,1	1,3	553,0	422,2	1,7	977,7	587,4
3,3	562,6	162,2	4,4	1318,9	299,8	1,4	571,0	422,1	1,7	1013,7	587,4
3,4	572,5	161,3	4,5	1354,2	299,5	1,4	589,0	422,0	1,8	1049,7	587,4

Schotterbett unbelastet			Schotterbett belastet			F. Fahrbahn unbelastet			F. Fahrbahn belastet		
$\delta_{\text{hres}}$	$F_{\text{Ersatz}}$	$k_{\text{Ersatz}}$	$\delta_{\text{hres}}$	$F_{\text{Ersatz}}$	$k_{\text{Ersatz}}$	$\delta_{\text{hres}}$	$F_{\text{Ersatz}}$	$k_{\text{Ersatz}}$	$\delta_{\text{hres}}$	$F_{\text{Ersatz}}$	$k_{\text{Ersatz}}$
3,4	582,4	160,3	4,6	1389,5	299,1	1,4	606,9	422,0	1,8	1085,7	587,4
3,5	592,1	159,2	4,7	1424,6	298,7	1,5	624,9	421,9	1,9	1121,7	587,4
3,5	601,7	158,0	4,8	1459,6	298,3	1,5	642,8	421,8	2,0	1157,7	587,4
3,6	611,1	156,8	5,0	1494,5	297,8	1,6	660,7	421,6	2,0	1193,7	587,4
3,7	620,3	155,5	5,1	1529,3	297,2	1,6	678,6	421,5	2,1	1229,7	587,3
3,7	629,4	154,2	5,2	1563,9	296,6	1,6	696,5	421,3	2,2	1265,6	587,3
3,8	638,3	152,7	5,3	1598,3	295,9	1,7	714,4	421,1	2,2	1301,6	587,3
3,8	647,1	151,2	5,4	1632,6	295,2	1,7	732,3	420,8	2,3	1337,6	587,3
3,9	655,6	149,5	5,5	1666,6	294,3	1,8	750,1	420,6	2,3	1373,6	587,2
3,9	664,0	147,8	5,7	1700,5	293,3	1,8	767,9	420,2	2,4	1409,5	587,2
4,0	672,1	146,0	5,8	1734,0	292,2	1,9	785,7	419,8	2,5	1445,5	587,1
4,1	680,1	144,1	5,9	1767,3	291,0	1,9	803,4	419,4	2,5	1481,4	587,0
4,1	687,8	142,0	6,0	1800,3	289,7	1,9	821,1	418,8	2,6	1517,4	586,9
4,2	695,2	139,9	6,1	1832,9	288,1	2,0	838,7	418,2	2,6	1553,3	586,8
4,2	702,5	137,6	6,2	1865,1	286,5	2,0	856,3	417,4	2,7	1589,2	586,6
4,3	709,4	135,2	6,3	1896,9	284,6	2,1	873,7	416,5	2,8	1625,0	586,4
4,3	716,1	132,7	6,4	1928,2	282,5	2,1	891,1	415,5	2,8	1660,9	586,1
4,4	722,6	130,1	6,6	1959,0	280,1	2,2	908,4	414,2	2,9	1696,6	585,7
4,4	728,8	127,3	6,7	1989,2	277,5	2,2	925,5	412,8	3,0	1732,4	585,3
4,5	734,6	124,4	6,8	2018,7	274,6	2,2	942,5	411,1	3,0	1768,0	584,7
4,5	740,2	121,3	6,9	2047,5	271,3	2,3	959,4	409,1	3,1	1803,6	584,0
4,6	745,6	118,1	7,0	2075,6	267,8	2,3	976,0	406,7	3,1	1839,0	583,1
4,6	750,6	114,8	7,1	2102,8	263,8	2,4	992,4	404,0	3,2	1874,3	582,0
4,6	755,3	111,3	7,2	2129,0	259,4	2,4	1008,5	400,8	3,3	1909,4	580,6

## Anhang A Schienen

Schotterbett unbelastet			Schotterbett belastet			F. Fahrbahn unbelastet			F. Fahrbahn belastet		
$\delta_{\text{hres}}$	$F_{\text{Ersatz}}$	$k_{\text{Ersatz}}$	$\delta_{\text{hres}}$	$F_{\text{Ersatz}}$	$k_{\text{Ersatz}}$	$\delta_{\text{hres}}$	$F_{\text{Ersatz}}$	$k_{\text{Ersatz}}$	$\delta_{\text{hres}}$	$F_{\text{Ersatz}}$	$k_{\text{Ersatz}}$
4,7	759,6	107,6	7,3	2154,3	254,5	2,4	1024,3	397,1	3,3	1944,3	578,9
4,7	763,7	103,8	7,4	2178,5	249,2	2,5	1039,8	392,7	3,4	1978,9	576,6
4,8	767,5	99,9	7,5	2201,5	243,3	2,5	1054,9	387,6	3,4	2013,2	573,9
4,8	771,0	95,8	7,6	2223,3	236,8	2,6	1069,4	381,7	3,5	2047,0	570,4
4,8	774,1	91,5	7,7	2243,8	229,7	2,6	1083,5	374,8	3,6	2080,3	566,0
4,9	777,0	87,1	7,7	2262,9	221,9	2,6	1096,9	366,9	3,6	2112,9	560,6
4,9	779,6	82,5	7,8	2280,6	213,5	2,7	1109,6	357,8	3,7	2144,6	553,8
4,9	781,9	77,8	7,9	2296,7	204,3	2,7	1121,6	347,3	3,7	2175,4	545,3
5,0	783,9	72,9	8,0	2311,2	194,3	2,7	1132,7	335,2	3,8	2204,9	534,8
5,0	785,6	67,9	8,1	2324,2	183,6	2,8	1143,0	321,5	3,8	2232,9	521,8
5,0	787,1	62,8	8,1	2335,6	172,1	2,8	1152,2	305,9	3,9	2259,2	505,9
5,0	788,3	57,5	8,2	2345,4	159,8	2,8	1160,4	288,4	3,9	2283,3	486,4
5,0	789,4	52,2	8,2	2353,6	146,7	2,9	1167,4	268,7	4,0	2305,1	462,7
5,1	790,2	46,7	8,3	2360,3	132,8	2,9	1173,3	246,8	4,0	2324,2	434,2
5,1	790,8	41,1	8,3	2365,6	118,2	2,9	1178,2	222,7	4,1	2340,3	400,4
5,1	791,3	35,4	8,4	2369,6	102,8	2,9	1181,9	196,3	4,1	2353,2	360,5
5,1	791,6	29,6	8,4	2372,5	86,8	2,9	1184,6	167,8	4,1	2363,0	314,4
5,1	791,8	23,8	8,4	2374,3	70,2	2,9	1186,4	137,1	4,2	2369,7	261,9
5,1	791,9	17,9	8,5	2375,4	53,2	3,0	1187,4	104,7	4,2	2373,7	203,4
5,1	792,0	12,0	8,5	2375,9	35,7	3,0	1187,9	70,8	4,2	2375,5	139,3
5,1	792,0	6,0	8,5	2376,0	17,9	3,0	1188,0	35,8	4,2	2376,0	71,0

## Anhang B Matlab Codes

Alle Berechnungen wurden mit Version Matlab R2014a [Mat2014] durchgeführt

### B.1 Ermittlung Biegeeigenfrequenzen und Formen

Der nachfolgende Code wurde größtenteils von der Webseite <http://www.dankert-dankert.de/> [Dan2017] übernommen. Selbst vorgenommene Ergänzungen bzw. Änderungen sind grau hinterlegt. Die fett dargestellten Eingabeparameter sind vor einer Berechnung durch den Benutzer festzulegen.

```
% Differenzenverfahren, Biegeschwingungen
clear all
L = ; % [m]
rhoA = ; % [kg/m]
EI = ; % [Nm^2]
c = ; % [Nm/rad]
nf = ; % Anzahl der zu ermittelnden Eigenfrequenzen
nA = ; % Anzahl der Abschnitte
h = L/nA ;
n = nA-1 ;
A = zeros (n,n) ; % Nullmatrix
X = -(1-c*h/(2*EI))/(1+c*h/(2*EI)) ;
A(1,1:3) = [ 6+X -4 1 ] ;
A(2,1:4) = [-4 6 -4 1] ;
for i=3:n-2
    A(i,i-2:i+2) = [1 -4 6 -4 1] ;
end
A(n-1,n-3:n) = [1 -4 6 -4] ;
A(n,n-2 :n) = [ 1 -4 6+X ] ;
[D E]= eig(A) ;
F = diag(E) ;
lambda (1:nf) = sqrt(sqrt(F(1:nf)))*nA
Eigenfrequenzen(1:nf) = sqrt(F(1:nf)*EI/(rhoA*h^4))/(2*pi)
Kreisfrequenzen(1:nf) = Eigenfrequenzen(1:nf)*(2*pi)
z = 0 : h : L ;
for i = 1:nf
    subplot (nf,1,i) ; plot (z , [0 ; D(:,i) ; 0]) , grid on , ...
end
```

### B.2 lineare Ersatzfedersteifigkeiten „Bahndamm“

```
clear all
close all
clc
%-----
Ersatzfedersteifigkeiten.Input.EA=3228.12; %Laengssteifigkeit [MN] eines Gleises (2 Schienen UIC60)
Ersatzfedersteifigkeiten.Input.d=0.6; %Schwellenabstand [m]
Ersatzfedersteifigkeiten.Input.F=1414.224; %Aufgebrachte Last [kN], positiv definiert vom Stabende weg, 1414 kN=maximal aufnehmbare Zuglast eines Gleises aus UIC60Schienen
Ersatzfedersteifigkeiten.Input.L_D_min=40; %Dammbereich Mindestwert [m]
```

```
Ersatzfedersteifigkeiten.Input.L_D_max=90;           %Dambereich Maximalwert
(Beton+Verbund) [m]
Ersatzfedersteifigkeiten.Input.L_D_max_Stahl=70;     %Dambereich Maximalwert
(Stahl) [m]

%Ermittlung Federsteifigkeiten
    %Verschiebewiderstände k [kN/m] nach DIN EN 1991-2 und Ril 804
    Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(1).k=20; %Längs-
verschiebewiderstand Gleis unbelastet (=Schotter)
    Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(2).k=60; %Längs-
verschiebewiderstand Gleis belastet (=Schotter)
    Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(3).k=30; %Durch-
schubwiderstand Gleis unbelastet (=FFB)
    Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(4).k=60; %Durch-
schubwiderstand Gleis belastet (=FFB)
    %Ende elastischer Bereich -> Durchrutschen u0 [mm]
    Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(1).u0=2; %Längs-
verschiebewiderstand Gleis unbelastet (=Schotter)
    Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(2).u0=2; %Längs-
verschiebewiderstand Gleis belastet (=Schotter)
    Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(4).u0=0.5;
%Durchschubwiderstand Gleis unbelastet (=FFB)
    Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(3).u0=0.5;
%Durchschubwiderstand Gleis belastet (=FFB)
    %Ermittlung K_Sd = d*k/u0 [kN/mm]
    for i=1:4
        Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(i).K_Sd=Er-
satzfedersteifigkeiten.Input.d*Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Feder-
steifigkeiten(i).k/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkei-
ten(i).u0;
    end
%Ermittlung Anzahl Federn
Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart=floor(Ersatzfedersteifigkeiten.In-
put.L_D_min/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.d);
Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mEnde=ceil(Ersatzfedersteifigkeiten.In-
put.L_D_max/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.d);
Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta=1;

for p=1:4
Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))((Ersatzfedersteifig-
keiten.Berechnungen.mEnde-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart)/Ersatz-
federsteifigkeiten.Berechnungen.mdelta+1).Anzahl_Federn=[]; %Hier wird der
Structure Array schon mal
Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))((Ersatzfedersteifig-
keiten.Berechnungen.mEnde-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart)/Ersatz-
federsteifigkeiten.Berechnungen.mdelta+1).L_D=[]; %vordimensioniert,
zum Rechenzeit sparen in der
Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))((Ersatzfedersteifig-
keiten.Berechnungen.mEnde-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart)/Ersatz-
federsteifigkeiten.Berechnungen.mdelta+1).delta_h_res=[]; %nachfolgenden
Schleife...
Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))((Ersatzfedersteifig-
keiten.Berechnungen.mEnde-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart)/Ersatz-
federsteifigkeiten.Berechnungen.mdelta+1).kErsatzlin=[];
Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))((Ersatzfedersteifig-
keiten.Berechnungen.mEnde-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart)/Ersatz-
federsteifigkeiten.Berechnungen.mdelta+1).Federkraefte=[];
Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))((Ersatzfedersteifig-
keiten.Berechnungen.mEnde-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart)/Ersatz-
federsteifigkeiten.Berechnungen.mdelta+1).N_res=[];
```

---

```

Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))((Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mEnde-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart)/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta+1).delta_i=[];

for m=Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart:Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta:Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mEnde
    %Löschen "Altlasten"
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_i_zero=[];
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta=[];
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.rechteSeite=[];
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.x=[];
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.Federkraefte=[];
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N=[];
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_h_res=[];
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_i=[];
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.kErsatzlin=[];
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.L_D=[];

    n=m-1;
    for i=1:n
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_i_zero(i)=-Ersatzfedersteifigkeiten.Input.F*(m-i)*Ersatzfedersteifigkeiten.Input.d/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.EA-Ersatzfedersteifigkeiten.Input.F/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(p).K_Sd; % [m]
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta(i,i)=(m-i)*Ersatzfedersteifigkeiten.Input.d/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.EA+2/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(p).K_Sd; % [m/MN]
        for j=1:m-i-1
            Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta(i+j,n,i)=(m-i-j)*Ersatzfedersteifigkeiten.Input.d/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.EA+1/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(p).K_Sd;
            Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta(i,i+j:n)=(m-i-j)*Ersatzfedersteifigkeiten.Input.d/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.EA+1/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(p).K_Sd;
        end
    end
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.rechteSeite=-(Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_i_zero. ');
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.x=linsolve(Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta,Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.rechteSeite);
    %Statisch Unbestimmte
    %Schnittgrößenberechnung
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.Federkraefte=Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.x;
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.Federkraefte(m)=Ersatzfedersteifigkeiten.Input.F-sum(Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.Federkraefte);
    % [kN]
    for i=1:n
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(1)=Ersatzfedersteifigkeiten.Input.F;
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(1+i:m)=Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(i)-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.Federkraefte(i);
        % [kN]
    end
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_h_res=sum(Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N)*Ersatzfedersteifigkeiten.Input.d/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.EA+Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(m)/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(p).K_Sd; % [mm]

    for i=1:m

```

---



```
Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_i(i)=sum(Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(i:m))*Ersatzfedersteifigkeiten.Input.d/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.EA+Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(m)/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Linear_Federsteifigkeiten(p).K_Sd;
end

Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_i(m+1)=Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(m)/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Linear_Federsteifigkeiten(p).K_Sd;

%Lineare Ersatzfedersteifigkeit
Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.kErsatzlin=Ersatzfedersteifigkeiten.Input.F/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_h_res;
%[kN/mm]=[MN/m] gilt fuer delta10 <= 2mm
Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.L_D=m*Ersatzfedersteifigkeiten.Input.d; %[m] Länge des Gleises, das zum Abtrag der Kraefte herangezogen wird
%Speichern interessanter Daten aus den einzelnen Iterationsschritten
Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))(m/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta).Anzahl_Federn=m;
Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))(m/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta).L_D=Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.L_D;
Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))(m/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta).delta_h_res=Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_h_res;
Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))(m/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta).kErsatzlin=Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.kErsatzlin;
Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))(m/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta).Federkraefte=Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.Federkraefte;
Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))(m/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta).N_res=Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N;
Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))(m/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta).delta_i=Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_i;
end
Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))(1:Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart-1) = [];
```

### B.3 nicht-lineare Ersatzfedersteifigkeiten „Bahndamm“

```
clear all
close all
clc
%-----
%Parameter Berechnung
Ersatzfedersteifigkeiten.Input.EA=3228.12; %Laengssteifigkeit [MN] eines Gleises (2 Schienen UIC60)
Ersatzfedersteifigkeiten.Input.d=0.6; %Schwellenabstand [m]
Ersatzfedersteifigkeiten.Input.F=1414.224; %Aufgebrachte Last [kN], positiv definiert vom Stabende weg, 1414 kN=maximal aufnehmbare Zuglast eines Gleises aus UIC60Schienen
Ersatzfedersteifigkeiten.Input.L_D_min=40; %Dammbereich Mindestwert [m]
Ersatzfedersteifigkeiten.Input.L_D_max=90; %Dammbereich Maximalwert (Beton+Verbund) [m]
```

---

```

Ersatzfedersteifigkeiten.Input.L_D_max_Stahl=70;    %Dammereich Maximalwert
(Stahl) [m]

%Ermittlung Federsteifigkeiten
    %Verschiebewiderstände k [kN/m] nach DIN EN 1991-2 und Ril 804
    Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(1).k=20; %Längs-
verschiebewiderstand Gleis unbelastet (=Schotter)
    Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(2).k=60; %Längs-
verschiebewiderstand Gleis belastet (=Schotter)
    Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(3).k=30; %Durch-
schubwiderstand Gleis unbelastet (=FFB)
    Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(4).k=60; %Durch-
schubwiderstand Gleis belastet (=FFB)
    %Ende elastischer Bereich -> Durchrutschen u0 [mm]
    Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(1).u0=2; %Längs-
verschiebewiderstand Gleis unbelastet (=Schotter)
    Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(2).u0=2; %Längs-
verschiebewiderstand Gleis belastet (=Schotter)
    Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(4).u0=0.5;
%Durchschubwiderstand Gleis unbelastet (=FFB)
    Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(3).u0=0.5;
%Durchschubwiderstand Gleis belastet (=FFB)
    %Ermittlung K_Sd = d*k/u0 [kN/mm]
    for i=1:4
        Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(i).K_Sd=Er-
satzfedersteifigkeiten.Input.d*Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Feder-
steifigkeiten(i).k/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkei-
ten(i).u0;
    end
%Ermittlung Anzahl Federn
Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart=floor(Ersatzfedersteifigkeiten.In-
put.L_D_min/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.d);
Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mEnde=ceil(Ersatzfedersteifigkeiten.In-
put.L_D_max/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.d);
Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta=1;
for p=1:4
    Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))(Ersatzfedersteifig-
keiten.Berechnungen.mEnde-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart)/Ersatz-
federsteifigkeiten.Berechnungen.mdelta+1).Anzahl_Federn=[]; %Hier wird der
Structure Array schon mal
    Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))(Ersatzfedersteifig-
keiten.Berechnungen.mEnde-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart)/Ersatz-
federsteifigkeiten.Berechnungen.mdelta+1).L_D=[]; %vordimensioniert,
zum Rechenzeit sparen in der
    Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))(Ersatzfedersteifig-
keiten.Berechnungen.mEnde-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart)/Ersatz-
federsteifigkeiten.Berechnungen.mdelta+1).l=[];
    Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))(Ersatzfedersteifig-
keiten.Berechnungen.mEnde-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart)/Ersatz-
federsteifigkeiten.Berechnungen.mdelta+1).delta_h_res=[]; %nachfolgenden
Schleife...
    Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))(Ersatzfedersteifig-
keiten.Berechnungen.mEnde-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart)/Ersatz-
federsteifigkeiten.Berechnungen.mdelta+1).kErsatz=[];
    Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))(Ersatzfedersteifig-
keiten.Berechnungen.mEnde-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart)/Ersatz-
federsteifigkeiten.Berechnungen.mdelta+1).FErsatz=[];
    Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))(Ersatzfedersteifig-
keiten.Berechnungen.mEnde-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart)/Ersatz-
federsteifigkeiten.Berechnungen.mdelta+1).kErsatzl=[];

```

---

```

Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p))) ((Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mEnde-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart)/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta+1).Federkraefte=[];
Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p))) ((Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mEnde-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart)/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta+1).N_res=[];
Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p))) ((Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mEnde-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart)/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta+1).delta_i=[];
Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p))) ((Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mEnde-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart)/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta+1).delta_Fersatz=[];
Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p))) ((Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mEnde-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart)/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta+1).delta_delta_i=[];
Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p))) ((Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mEnde-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart)/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta+1).delta_delta_h_res=[];

for m=Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mStart:Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta:Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mEnde
    %Löschen "Altlasten"
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.l_=[];
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.l=[];
    %Länge des Gleises [m], das zum Abtrag der Kraefte herangezogen wird
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.L_D=m*Ersatzfedersteifigkeiten.Input.d;
    %Speichern Daten
    Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p))) (m/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta).Anzahl_Federn=m;
    Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p))) (m/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta).L_D=Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.L_D;

    %Anzahl Federn, die durchrutschen können (es sind immer m Werte, da
    %auch der Fall "0 Federn rutschen durch" betrachtet wird
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.l_1=m;
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.l=Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.l_1-1;
    Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p))) (m/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta).l=Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.l;

    for l_1=1:m %bis m (statisch bestimmt)
        l=l_1-1;%bis m-1 (statisch bestimmt)

        %Löschen "Altlasten"
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_i_zero=[];
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_i_zero_mod=[];
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta=[];
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.rechteSeite=[];
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.x=[];
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.Federkraefte=[];
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N=[];
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_h_res=[];
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_i=[];
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_delta_i=[];
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.kErsatz=[];
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.kErsatz1=[];
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.L_D=[];

```

---

```

Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_delta_l=[];
Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_FErsatz=[];

n=m-1-l;
%Aufstellen Gleichungen Prinzip der virtuellen Arbeit
%(erste Iteration)

    if l <=m-2%für 2-fach oder mehr statisch unbestimmte Systeme
        for i=1:n
            Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_i_zero(i)=-Ersatz-
            federsteifigkeiten.Input.F*(m-i-1)*Ersatzfedersteifigkeiten.Input.d/Ersatzfe-
            dersteifigkeiten.Input.EA-Ersatzfedersteifigkeiten.Input.F/Ersatzfedersteifig-
            keiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(p).K_Sd; %[m]
            Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta(i,i)=(m-i-1)*Er-
            satzfedersteifigkeiten.Input.d/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.EA+2/Ersatzfeder-
            steifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(p).K_Sd; %[m/MN]
            for j=1:m-i-1-l
                Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnun-
            gen.delta(i+j:n,i)=(m-i-j-1)*Ersatzfedersteifigkeiten.Input.d/Ersatzfederstei-
            figkeiten.Input.EA+1/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkei-
            ten(p).K_Sd;
                Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnun-
            gen.delta(i,i+j:n)=(m-i-j-1)*Ersatzfedersteifigkeiten.Input.d/Ersatzfederstei-
            figkeiten.Input.EA+1/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkei-
            ten(p).K_Sd;
            end
        end
    elseif l_==m-1%1-fach statisch unbestimmtes System
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_i_zero=-Ersatzfe-
        dersteifigkeiten.Input.F*Ersatzfedersteifigkeiten.Input.d/Ersatzfedersteifig-
        keiten.Input.EA-Ersatzfedersteifigkeiten.Input.F/Ersatzfedersteifigkeiten.In-
        put.Lineare_Federsteifigkeiten(p).K_Sd; %[m]
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta=Ersatzfedersteifig-
        keiten.Input.d/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.EA+2/Ersatzfedersteifigkeiten.In-
        put.Lineare_Federsteifigkeiten(p).K_Sd; %[m/MN]
    end

    %Lösen der Gleichung
    if l <=m-2 %beim statisch bestimmten System müssen keine Unbekann-
    ten berechnet werden
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.rechteSeite=-(Ersatzfeder-
        steifigkeiten.Berechnungen.delta_i_zero. ');
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.x=linsolve(Ersatzfederstei-
        figkeiten.Berechnungen.delta,Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnun-
        gen.rechteSeite); %Statisch Unbestimmte
    end
    if l_==m-1
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.x=-Ersatzfedersteifigkei-
        ten.Berechnungen.delta_i_zero/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta;
    end

    %Schnittgrößenberechnung (erste Iteration)
    if l <=m-1
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.Federkraefte=Ersatzfeder-
        steifigkeiten.Berechnungen.x;
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.Federkraefte(m-1)=Ersatz-
        federsteifigkeiten.Input.F-sum(Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.Feder-
        kraefte); %[kN]

```

---

```
        else %beim statisch bestimmten System übernimmt die einzige Feder
die gesamte Kraft
            Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.Federkraefte=Ersatzfeder-
steifigkeiten.Input.F;
            end
            %Normalkraftverlauf
            Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(1)=Ersatzfedersteifigkei-
ten.Input.F;
            if l_<=m-2
                for i=1:n
                    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(1+i:m-1)=Er-
satzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(i)-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnun-
gen.Federkraefte(i);
                    % [kN]
                end
            elseif l_==m-1
                Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(2)=Ersatzfederstei-
figkeiten.Berechnungen.N(1)-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.Feder-
kraefte(1);
            end

            %Berechnung Gesamtverschiebung, für alle Fälle gleich
            Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_h_res=sum(Ersatzfeder-
steifigkeiten.Berechnungen.N)*Ersatzfedersteifigkeiten.Input.d/Ersatzfederstei-
figkeiten.Input.EA+Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(m-1)/Ersatzfeder-
steifigkeiten.Input.Linear_Federsteifigkeiten(p).K_Sd;
            % [mm]

            %Verschiebungsberechnung (erste Iteration)
            if l_<=m-1
                for i=1:m-1
                    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_i(i)=sum(Er-
satzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(i:m-1))*Ersatzfedersteifigkeiten.In-
put.d/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.EA+Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnun-
gen.N(m-1)/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Linear_Federsteifigkeiten(p).K_Sd;
                end
            else
                Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_i(1)=Ersatzfeder-
steifigkeiten.Berechnungen.N*Ersatzfedersteifigkeiten.Input.d/Ersatzfederstei-
figkeiten.Input.EA+Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N/Ersatzfedersteifig-
keiten.Input.Linear_Federsteifigkeiten(p).K_Sd;
            end
            %Verschiebung letzte Feder, gleiche Berechnung für alle Fälle
            Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_i(m+1-1)=Ersatzfeder-
steifigkeiten.Berechnungen.N(m-1)/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Linear_Feder-
steifigkeiten(p).K_Sd;

            %Ersatzfedersteifigkeit am Übergang von Brücke und Bahndamm
            %(gleiche Berechnung für alle Fälle)
            Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.kErsatz=Ersatzfedersteifig-
keiten.Input.F/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_h_res;
            % [kN/mm]=[MN/m] gilt fuer delta10 <= 2mm
            %Ersatzfedersteifigkeit an der ersten Feder (gleiche Berechnung für
alle Fälle)
            Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.kErsatz1=Ersatzfedersteifig-
keiten.Input.F/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_i(2);

            %Ableitung nichtlineare Ersatzfedercharakteristik
            %Ermittlung zusätzlich aufnehmbare Verschiebung an der jeweils
            %(neuen) ersten Feder
            if l_==1 %vorher sind noch keine Federn durchgerutscht
```

---

```

        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_delta_1=Ersatzfe-
dersteifigkeiten.Input.Linear_Federsteifigkeiten(p).u0;
        else %Bedingung funktioniert nur, solange es im vorangegangenen
Schritt zwei Federn gibt...
            Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_delta_1=Ersatzfe-
dersteifigkeiten.Input.Linear_Federsteifigkeiten(p).u0-Ersatzfedersteifigkei-
ten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))(m).delta_i{1,1}(1,3);
            end

        %Ermittlung zusätzlich aufnehmbare Kraft (gültig für alle
        %weiteren Fälle)
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_FErsatz=Ersatzfeder-
steifigkeiten.Berechnungen.kErsatz1*Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnun-
gen.delta_delta_1;

        %Anpassung Gleichungen Prinzip der virtuellen Arbeit
        %(zweite Iteration)->gilt für alle Fälle
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_i_zero_mod=Ersatzfeder-
steifigkeiten.Berechnungen.delta_i_zero/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.F*Er-
satzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_FErsatz;

        %Lösen der Gleichung
        if l_<=m-2 %beim statisch bestimmten System müssen keine Unbekann-
ten berechnet werden
            Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.rechteSeite=-(Ersatzfeder-
steifigkeiten.Berechnungen.delta_i_zero_mod.'');
            Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.x=linsolve(Ersatzfederstei-
figkeiten.Berechnungen.delta,Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnun-
gen.rechteSeite);
            end
            if l_==m-1
                Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.x=-Ersatzfedersteifigkei-
ten.Berechnungen.delta_i_zero_mod/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta;
            end

        %Schnittgrößenberechnung (zweite Iteration)zusätzliche Kräfte
        %Federkräfte
        if l_<=m-1
            Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.Federkraefte=Ersatzfederstei-
figkeiten.Berechnungen.x;
            Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.Federkraefte(m-1)=Ersatzfe-
dersteifigkeiten.Berechnungen.delta_FErsatz-sum(Ersatzfedersteifigkeiten.Be-
rechnungen.Federkraefte);
            else %beim statisch bestimmten System übernimmt die einzige Feder
die gesamte Kraft
                Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.Federkraefte=Ersatzfederstei-
figkeiten.Berechnungen.delta_FErsatz;
            end
            %Normalkraftverlauf
            Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(1)=Ersatzfedersteifigkei-
ten.Berechnungen.delta_FErsatz;
            if l_<=m-2
                for i=1:n
                    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(1+i:m-1)=Ersatzfeder-
steifigkeiten.Berechnungen.N(i)-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.Feder-
kraefte(i);
                    % [kN]
                end
            elseif l_==m-1

```

---

```
Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(2)=Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(1)-Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.Federkraefte(1);
end

%Berechnung Gesamtverschiebung, für alle Fälle gleich
Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_delta_h_res=sum(Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N)*Ersatzfedersteifigkeiten.Input.d/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.EA+Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(m-1)/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(p).K_Sd;

%Verschiebungsberechnung (zweite Iteration) zusätzliche
%Verschiebungen
if l <=m-1
    for i=1:m-1
        Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_delta_i(i)=sum(Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(i:m-1))*Ersatzfedersteifigkeiten.Input.d/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.EA+Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(m-1)/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(p).K_Sd;
    end
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_delta_i(m+1-1)=Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(m-1)/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(p).K_Sd;
else
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_delta_i(1)=sum(Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(i:m-1))*Ersatzfedersteifigkeiten.Input.d/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.EA+Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(m-1)/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(p).K_Sd;
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_delta_i(2)=Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.N(m-1)/Ersatzfedersteifigkeiten.Input.Lineare_Federsteifigkeiten(p).K_Sd;
end

%Kombination nachfolgender Lastschritte
if l==0
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.FErsatz=Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_FErsatz;
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_i=Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_delta_i;
else
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.FErsatz=Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))(m)/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta).FErsatz(l-1)+Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_FErsatz;
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_i(1)=Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))(m).delta_i{1,l-1}(1,l)+Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_delta_i(1);
    Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_i(2:1:m+1-1)=Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))(m).delta_i{1,l-1}(1,3:m+2-1)+Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_delta_i(1,2:m+1-1);
end

%Speichern interessanter Daten aus den einzelnen Iterationsschritten
Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p)))(m)/Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta).delta_h_res(l)=Ersatzfedersteifigkeiten.Berechnungen.delta_i(1);
```

```

        Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p))) (m/Er-
satzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta).delta_delta_h_res(l_)=Ersatzfeder-
steifigkeiten.Berechnungen.delta_delta_h_res;
        Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p))) (m/Er-
satzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta).kErsatz(l_)=Ersatzfedersteifigkei-
ten.Berechnungen.kErsatz;
        Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p))) (m/Er-
satzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta).kErsatz1(l_)=Ersatzfedersteifigkei-
ten.Berechnungen.kErsatz1;
        Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p))) (m/Er-
satzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta).Federkraefte{l_}=Ersatzfederstei-
figkeiten.Berechnungen.Federkraefte;
        Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p))) (m/Er-
satzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta).N_res{l_}=Ersatzfedersteifigkei-
ten.Berechnungen.N;
        Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p))) (m/Er-
satzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta).delta_i{l_}=Ersatzfedersteifigkei-
ten.Berechnungen.delta_i;
        Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p))) (m/Er-
satzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta).delta_delta_i{l_}=Ersatzfederstei-
figkeiten.Berechnungen.delta_delta_i;
        Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p))) (m/Er-
satzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta).FErsatz(l_)=Ersatzfedersteifigkei-
ten.Berechnungen.FErsatz;
        Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p))) (m/Er-
satzfedersteifigkeiten.Berechnungen.mdelta).delta_FErsatz(l_)=Ersatzfederstei-
figkeiten.Berechnungen.delta_FErsatz;
        end

    end

    Ersatzfedersteifigkeiten.(strcat('Ergebnisse',num2str(p))) (1:Ersatzfeder-
steifigkeiten.Berechnungen.mStart-1) = [];

end

```

## B.4 Einmassensystem ohne $c_\phi$

```

clear all
close all
clc
%-----
%Eingangsparameter Bruecke
%(Einfeldtraeger mit konstanter Masse- bzw.Steifigkeitsverteilung)
LBBruecke=24.6; %Laenge der Bruecke [m]
EIBruecke=29796; %Biegesteifigkeit der Bruecke [MNm2]
mBruecke=639.0962281; %Gesamtmasse der Bruecke [t]
D=1.5693; %Daempfungswert D=c/crit [%]
%Eingangsparameter Zug
v=264.21/3.6; %Ueberfahrtsgeschwindigkeit [m/s] oder Um-
rechnung [km/h]/3.6
ICE1 = csvread('ICE1.dat'); %Datei mit 2 Spalten (x[m],P[kN]), Achsabsta-
ende und Achslasten ICE1
% Eingangsparameter Zeitschrittberechnung
deltim=0.001; %Zeitschrittweite [s]

```



```
extratime=15; %[s] betrachteter Zeitraum nach Ueberfahrt
%-----
mt=mBruecke*1000; %Gesamtmasse der Bruecke [kg]
%Verfahren nach Biggs
    %Einzellast in Feldmitte
    klinEinzellast=48*EIBruecke/LBruecke.^3; %Lineare Steifigkeit gelenkiger
Einfeldtraeger [MN/m]
    KLEinzellast=1; %elastischer Lastfaktor gelen-
kiger Einfeldtraeger [-]
    KMEinzellast=17/35; %elastischer Massefaktor (ver-
teilte Masse) gelenkiger Einfeldtraeger [-]
    KLMEinzellast=KMEinzellast/KLEinzellast; %Lastmassefaktor
    kEinzellast=klinEinzellast*KLEinzellast*1000.^2;
%Verhaeltnis Steifigkeiten verteilte Last/Einzellast in Feldmitte
%Pmod=k/kEinzellast; %Modifizierungsfaktor fuer die Erstel-
lung des Ersatzlastvektors
Pmod=KLEinzellast;
k=klinEinzellast*KLEinzellast*1000.^2; %Ersatzfedersteifigkeit [N/m]
m=mt*KMEinzellast; %Ersatzmassen
%Berechnung Eigenkreisfrequenz des Einmassenschwingers
%(entspricht der ersten Biegeeigenkreisfrequenz der Bruecke)
omegasdof=sqrt(k/m); %ungedaempfte Eigenkreisfrequenz
[rad/s]
c=D/100*2*sqrt(k*m); %Dämpfungskonstante [Ns/m]
n0=omegasdof/2/pi; %Erste Biegeeigenfrequenz
%-----
%Generierte Daten aus Eingangsparameter Zug
anzlastICE1=size(ICE1,1); %Anzahl Achslasten, Anzahl Spalten
Gesamtweg=LBruecke+ICE1(anzlastICE1,1); %nach Gesamtweg hat die letzte Last die
Bruecke verlassen
Ueberfahrtsdauer=Gesamtweg/v; %[s]
time=fix(extratime+Ueberfahrtsdauer); %Zeit [s]
%-----
%Generierte Daten aus Eingangsparameter Zeitschrittberechnung
nsubst=time/deltim+1;
t=0:deltim:time;
%-----
%Normierter Lastvektor, der auf den Einmassenschwinger wirkt, Annahme eines
%sinusfoermigen Lastverlaufes
%entspricht einer einer Einzellast, die ueber die Bruecke faehrt
omegav=pi*v/LBruecke; %Erregerfrequenz der Last [rad/s]
tnormiertlLast=(0:deltim:LBruecke/v); %Zeit [s]
FnormiertlLast=sin(tnormiertlLast*omegav);
    %figure %zur Ueberpruefung
    %plot(tnormiertlLast,FnormiertlLast);
    %grid on
anznormierteLast=size(tnormiertlLast,2); %Anzahl Zeitschritte
normierte Last, Anzahl Spalten
%-----
%Erstellung Lastvektor ICE1
%Erstellung Lastmatrix
ICE1Lastmatrix(1:anzlastICE1,1:nsubst)=0; %leere Lastmatrix
for i=1:anzlastICE1
    timeLastiStart=ICE1(:,1)/v;
    for j=1:anznormierteLast
        ICE1Lastmatrix(i,fix(timeLastiStart(i)/del-
tim)+j)=FnormiertlLast(1,j)*Pmod*ICE1(i,2);
    end
end
%Erstellung Lastvektor
LastvektorICE1=sum(ICE1Lastmatrix);
```

```

Force=-LastvektorICE1*1000;%[N]
%-----
%Berechnungsparameter Einmassenschwinger
beta=1/6;
gamma=1/2;

%Antwortspektrum mit elastischem Einmassenschwinger
%Newmark's Integrationkonstanten
const(1)=gamma/(beta*deltim);
const(2)=1/(beta*deltim^2);
const(3)=1/(beta*deltim);
const(4)=gamma/beta;
const(5)=1/(2*beta);
const(6)=(gamma/(2*beta)-1)*deltim;

%Anfangsbedingungen
x(1)=0;
xdot(1)=0;
x2dot(1)=0;

delx=(k+const(1)*c+const(2)*m)\(-
(Force(1))+(const(3)*m+const(4)*c)*xdot(1)+(const(5)*m+const(6)*c)*x2dot(1));
delxdot=const(1)*delx-const(4)*xdot(1)-const(6)*x2dot(1);
delx2dot=const(2)*delx-const(3)*xdot(1)-const(5)*x2dot(1);
x(2)=x(1)+delx;
xdot(2)=xdot(1)+delxdot;
x2dot(2)=x2dot(1)+delx2dot;
for i=2:nsubst-1
    delx=(k+const(1)*c+const(2)*m)\(-(Force(i)-Force(i-
1)))+(const(3)*m+const(4)*c)*xdot(i)+(const(5)*m+const(6)*c)*x2dot(i));
    delxdot=const(1)*delx-const(4)*xdot(i)-const(6)*x2dot(i);
    delx2dot=const(2)*delx-const(3)*xdot(i)-const(5)*x2dot(i);
    x(i+1)=x(i)+delx;
    xdot(i+1)=xdot(i)+delxdot;
    x2dot(i+1)=x2dot(i)+delx2dot;
end

```

## B.5 Einmassensystem mit $c_\phi$ (konstant)

```

clear all
close all
clc
%Eingangsparameter Bruecke
%(Einfeldtraeger mit konstanter Masse- bzw.Steifigkeitsverteilung)
LBrucke=24.6; %Laenge der Bruecke [m]
EIBrucke=29796; %Biegesteifigkeit der Bruecke [MNm²]
mBrucke=639.066; %Gesamtmasse der Bruecke [t]
cPhi=897; %Drehfedersteifigkeit je Auflager [MNm/rad]
phiGrenz=2.0675/1000/2.26; %Grenzkriterium lineare Federsteifigkeit [rad]
D=1.569; %Daempfungswert D=c/crit [%]

%Eingangsparameter Zug
v=299.38/3.6; %Ueberfahrtsgeschwindigkeit [m/s]
Zug = csvread('ICE1.dat'); %Datei mit 2 Spalten (x[m],P[kN]), Achsabsta-
ende und Achslasten ICE1
% Eingangsparameter Zeitschrittberechnung
deltim=0.001; %Zeitschrittweite [s]
extratime=15; %[s] betrachteter Zeitraum nach Ueberfahrt
%Berechnung Eingangsparameter aquivalenter Einmassenschwinger

```

```

mt=mBruecke*1000; %Gesamtmasse der Bruecke [kg]
%Verfahren nach Biggs
%Einzellast in Feldmitte
cSchlange=LBruecke+2*EIBruecke/cPhi; %Hilfswert für die Berechnung
klinEinzellast=48*EIBruecke/(LBruecke.^3*(1-0.75*LBruecke/cSchlange)); %[MN/m]
KLEinzellast=1;%elastischer Lastfaktor gelenkiger Einfeldtraeger [-]
KMEinzellast=18/(1-0.75*LBruecke/cSchlange).^2*(17/630-
61/1440*LBruecke/cSchlange+1/60*LBruecke.^2/cSchlange.^2);[-]
KLEinzellast=KMEinzellast/KLEinzellast; %Lastmassefaktor
kEinzellast=klinEinzellast*KLEinzellast*1000.^2;
%Verhaeltnis Steifigkeiten verteilte Last/Einzellast in Feldmitte
%Pmod=k/kEinzellast; %Modifizierungsfaktor
Pmod=KLEinzellast;
k=klinEinzellast*KLEinzellast*1000.^2;%Ersatzfedersteifigkeit [N/m]
m=mt*KMEinzellast;%Ersatzmassen
%Berechnung Eigenkreisfrequenz des Einmassenschwingers
omegasdof=sqrt(k/m);%ungedaempfte Eigenkreisfrequenz[rad/s]
c=D/100*2*sqrt(k*m); %Dämpfungskonstante [Ns/m]
n0=omegasdof/2/pi;%Erste Biegeigenfrequenz
%-----
%Generierte Daten aus Eingangsparameter Zug
anzlastZug=size(Zug,1); %Anzahl Achslasten, Anzahl Spalten
Gesamtweg=LBruecke+Zug(anzlastZug,1); %nach Gesamtweg hat die letzte Last die
Bruecke verlassen
Ueberfahrtsdauer=Gesamtweg/v; %[s]
time=fix(extratime+Ueberfahrtsdauer); %Zeit [s]
%-----
%Generierte Daten aus Eingangsparameter Zeitschrittberechnung
nsubst=time/deltim+1;
t=0:deltim:time;
%-----
%Normierter Lastvektor, der auf den Einmassenschwinger wirkt, Annahme eines
%sinusfoermigen Lastverlaufes
%entspricht einer einer Einzellast, die ueber die Bruecke faehrt
omegav=pi*v/LBruecke; %Erregerfrequenz der Last [rad/s]
tnormiert1Last=(0:deltim:LBruecke/v); %Zeit [s]
Fnormiert1Last=sin(tnormiert1Last*omegav);
anznormierteLast=size(tnormiert1Last,2);
%-----
%Erstellung Lastvektor ICE1
ICE1Lastmatrix(1:anzlastZug,1:nsubst)=0; %leere Lastmatrix
for i=1:anzlastZug
timeLastiStart=Zug(:,1)/v;
for j=1:anznormierteLast
ICE1Lastmatrix(i,fix(timeLastiStart(i)/deltim)+j)=Fnorm-
miert1Last(1,j)*Pmod*Zug(i,2);
end
end
LastvektorICE1=sum(ICE1Lastmatrix);
%-----
Force=-LastvektorICE1*1000;%[N]
%-----
%Durchbiegung bei statischer Last
xstat=-Force/k;%partikulärer Anteil der Verformungsgleichung
%-----
%Berechnungsparameter Einmassenschwinger
beta=1/6;
gamma=1/2;
%Antwortspektrum mit elastischem Einmassenschwinger
%Newmark's Integrationkonstanten
const(1)=gamma/(beta*deltim);

```

---

```

const(2)=1/(beta*deltim^2);
const(3)=1/(beta*deltim);
const(4)=gamma/beta;
const(5)=1/(2*beta);
const(6)=(gamma/(2*beta)-1)*deltim;
%Anfangsbedingungen
x(1)=0;
xdot(1)=0;
x2dot(1)=0;
delx=(k+const(1)*c+const(2)*m)\(-
(Force(1))+(const(3)*m+const(4)*c)*xdot(1)+(const(5)*m+const(6)*c)*x2dot(1));
delxdot=const(1)*delx-const(4)*xdot(1)-const(6)*x2dot(1);
delx2dot=const(2)*delx-const(3)*xdot(1)-const(5)*x2dot(1);
x(2)=x(1)+delx;
xdot(2)=xdot(1)+delxdot;
x2dot(2)=x2dot(1)+delx2dot;
for i=2:nsubst-1
delx=(k+const(1)*c+const(2)*m)\(- (Force(i)-Force(i-
1))+(const(3)*m+const(4)*c)*xdot(i)+(const(5)*m+const(6)*c)*x2dot(i));
delxdot=const(1)*delx-const(4)*xdot(i)-const(6)*x2dot(i);
delx2dot=const(2)*delx-const(3)*xdot(i)-const(5)*x2dot(i);
x(i+1)=x(i)+delx;
xdot(i+1)=xdot(i)+delxdot;
x2dot(i+1)=x2dot(i)+delx2dot;
end
%Dynamik von Statik trennen
xplus=x-xstat;
nsubstUeberfahrt=ceil(Ueberfahrtsdauer/deltim+1);%Anzahl Zeitschritte Ueberfahrt
%Übertragung Ergebnisse auf das reale Balkensystem
%Normierung der dynamischen Vergrößerung
T0=1/n0; %[s]Länge der Eigenperiode
nsubstT0=fix(T0/deltim+1);%Anzahl Zeitschritte einer Periode,
PHIFeldmitte=1;
PHIdotlinks=16*(cSchlange-LBruecke)/(5*LBruecke*cSchlange-4*LBruecke.^2);%[-]
PHIdotdotFeldmitte=16*(2*LBruecke-3*cSchlange)/(5*LBruecke.^2*cSchlange-
4*LBruecke.^3);
PHIdotdotlinks=32/(5*LBruecke*cSchlange-4*LBruecke.^2);
PHIdotdotdotlinks=-192*cSchlange/(5*LBruecke.^3*cSchlange-4*LBruecke.^4);
%Flächenschwerpunkt unter PHI(x) im Bereich [0,L/2]
xS=LBruecke*(61*cSchlange-50*LBruecke)/16/(12*cSchlange-10*LBruecke);
%-----
%Verdrehung am linken Auflager (homogener Anteil)
phi0plus=PHIdotlinks/PHIFeldmitte*xplus;
%Statische Verdrehung am linken Auflager (partikulärer Anteil)
%Für 1 wandernde Last
anormiert1Last=tnormiert1Last*v;
%Erstellung Verdrehungsmatrix
phi0Matrix(1:anzlastZug,1:nsubst)=0; %leere Verdrehungsmatrix
for i=1:anzlastZug
timeLastiStart=Zug(:,1)/v;
for j=1:anznormierteLast
phi0Matrix(i,fix(timeLastiStart(i)/deltim)+j)=Pmod*Zug(i,2)/1000/(6*EIBruecke)
*(anormiert1Last(1,j)/LBruecke*(LBruecke-anormiert1Last(1,j))*(2*LBruecke-anor-
miert1Last(1,j))-anormiert1Last(1,j)/EIBruecke*(LBruecke-anormiert1Last(1,j))*
((-LBruecke+2*anormiert1Last(1,j))*(LBruecke/EIBruecke+2/cPhi)+3*LBruecke*
((LBruecke-anormiert1Last(1,j))/EIBruecke+2*(LBruecke-anormiert1Last(1,j))/
(cPhi*LBruecke)+2/cPhi))/((LBruecke/EIBruecke+2/cPhi)*(LBruecke/EIBruecke+6/cPh
i)));
end
end
phi0stat=sum(phi0Matrix);

```

---

```
%Gesamtverdrehung
phi0dyn=phi0stat+phi0plus;
%maximale dyn. Verdrehung am linken Auflager
phi0dynmax=max(phi0dyn);
phi0dynmin=min(phi0dyn);
if max(abs(phi0dyn))>=phiGrenz
display('ACHTUNG: Grenzkriterium lineare Drehfedersteifigkeit am linken Aufla-
ger überschritten, mindestens eine Feder rutscht durch.')
end
%Verdrehung am rechten Auflager (homogener Anteil)
phiLplus=-phi0plus;
%Statische Verdrehung am linken Auflager (partikulärer Anteil)
%Erstellung Verdrehungsmatrix
phiLMatrix(1:anzlastZug,1:nsubst)=0; %leere Verdrehungsmatrix
for i=1:anzlastZug
timeLastiStart=Zug(:,1)/v;
for j=1:anznormierteLast
phiLMatrix(i,fix(timeLastiStart(i)/deltim)+j)=Pmod*Zug(i,2)/1000/(6*EIBruecke)*
(-3*anormiert1Last(1,j)*LBruecke+2*anormiert1Last(1,j)*(LBruecke-anor-
miert1Last(1,j))*(2*anormiert1Last(1,j)-
LBruecke)/EIBruecke/(LBruecke/EIBruecke+6/cPhi)+anor-
miert1Last(1,j)/LBruecke*(anormiert1Last(1,j).^2+2*LBruecke.^2)+3*anor-
miert1Last(1,j)*LBruecke*(LBruecke-anormiert1Last(1,j))/EIBruecke*(LBruecke-
anormiert1Last(1,j))/EIBruecke-2*anor-
miert1Last(1,j)/cPhi/LBruecke+4/cPhi)/(LBruecke/EIBruecke+2/cPhi)/(LBruecke/EIB
ruecke+6/cPhi));
end
end
phiLstat=sum(phiLMatrix);
%Gesamtverdrehung
phiLdyn=phiLstat+phiLplus;
%maximale dyn. Verdrehung am linken Auflager
phiLdynmax=max(phiLdyn);
phiLdynmin=min(phiLdyn);
if max(abs(phiLdyn))>=phiGrenz
display('ACHTUNG: Grenzkriterium lineare Drehfedersteifigkeit am rechten Aufla-
ger überschritten, mindestens eine Feder rutscht durch.')
end
%Schnittgrößen (homogener Anteil)
MyFeldplus=-PHIdotdotFeldmitte/PHIFeldmitte*xplus*EIBruecke*1000; %[kNm]
MyLagerlinksplus=-PHIdotdotlinks/PHIFeldmitte*xplus*EIBruecke*1000; %[kNm]
MyLagerrechtsplus=MyLagerlinksplus; %[kNm]
Qlinksplus=(MyFeldplus-MyLagerlinksplus)/xS;
Qrechtsplus=Qlinksplus;
%Schnittgrößen statisch
MyFeldMatrix(1:anzlastZug,1:nsubst)=0;
MyLagerrechtsMatrix(1:anzlastZug,1:nsubst)=0;
QlinksMatrix(1:anzlastZug,1:nsubst)=0;
QrechtsMatrix(1:anzlastZug,1:nsubst)=0;
CSchlange(1:anzlastZug,1:nsubst)=0;
CSchlangeSchlange(1:anzlastZug,1:nsubst)=0;
for i=1:anzlastZug
timeLastiStart=Zug(:,1)/v;
for j=1:anznormierteLast
CSchlange(i,fix(timeLastiStart(i)/deltim)+j)=-Pmod*Zug(i,2)*anor-
miert1Last(1,j)*(LBruecke-anormiert1Last(1,j))/EIBruecke*(LBruecke-anor-
miert1Last(1,j))/EIBruecke+2*(LBruecke-anor-
miert1Last(1,j))/cPhi/LBruecke+2/cPhi)/(LBruecke/EIBruecke+2/cPhi)/(LBruecke/EI
Bruecke+6/cPhi);
```

```

CSchlangeSchlange(i,fix(timeLastiStart(i)/deltim)+j)=Pmod*Zug(i,2)*anor-
miertlLast(1,j)*(LBruecke-anormiertlLast(1,j))*(LBruecke-2*anor-
miertlLast(1,j))/EBruecke/(LBruecke.^2)/(LBruecke/EIBruecke+6/cPhi);
if anormiertlLast(1,j)>=LBruecke/2
MyFeldMatrix(i,fix(timeLastiStart(i)/deltim)+j)=(Pmod*Zug(i,2)*(LBruecke-anor-
miertlLast(1,j))/LBruecke+CSchlangeSchlange(j))*LBruecke/2+CSchlange(j);
else
MyFeldMatrix(i,fix(timeLastiStart(i)/deltim)+j)=(-Pmod*Zug(i,2)*anor-
miertlLast(1,j)/LBruecke+CSchlangeSchlange(j))*LBruecke/2+Pmod*Zug(i,2)*anor-
miertlLast(1,j)+CSchlange(j);
end
QlinksMatrix(i,fix(timeLastiStart(i)/deltim)+j)=Pmod*Zug(i,2)*(LBruecke-anor-
miertlLast(1,j))/LBruecke+CSchlangeSchlange(j);
QrechtsMatrix(i,fix(timeLastiStart(i)/deltim)+j)=-Pmod*Zug(i,2)*anor-
miertlLast(1,j)/LBruecke+CSchlangeSchlange(j);
end
end
MyFeldstat=sum(MyFeldMatrix); %[kNm]
Qlinksstat=sum(QlinksMatrix); %[kN]
Qrechtsstat=sum(QrechtsMatrix); %[kN]
CSchlangeSchlangesum=sum(CSchlangeSchlange);
CSchlangesum=sum(CSchlange);
MyLagerlinksstat=CSchlangesum; %[kNm] Moment am linken Auflager
MyLagerrechtsstat=CSchlangeSchlangesum*LBruecke+CSchlangesum;
%Gesamtverläufe
%Moment in Feldmitte
MyFelddyn=MyFeldstat+MyFeldplus;
%Momente an den Auflagern
MyLagerlinksdyn=MyLagerlinksstat+MyLagerlinksplus;
MyLagerrechtsdyn=MyLagerrechtsstat+MyLagerrechtsplus;
%Querkräfte an den Auflagern
Qlinksdyn=Qlinksstat+Qlinksplus;
Qrechtsdyn=Qrechtsstat+Qrechtsplus;
%Maximalwerte
MyFelddynmax=max(MyFelddyn);
MyLagerlinksdynmax=max(MyLagerlinksdyn);
MyLagerrechtsdynmax=max(MyLagerrechtsdyn);
Qlinksdynmax=max(Qlinksdyn);
Qrechtsdynmax=max(Qrechtsdyn);
%Minimalwerte
MyFelddynmin=min(MyFelddyn);
MyLagerlinksdynmin=min(MyLagerlinksdyn);
MyLagerrechtsdynmin=min(MyLagerrechtsdyn);
Qlinksdynmin=min(Qlinksdyn);
Qrechtsdynmin=min(Qrechtsdyn);

```

## B.6 Einmassensystem mit $c_\varphi$ (variabel)

```

clear all
close all
clc
%Eingangsparameter
LBruecke=24.6; %Laenge der Bruecke [m]
EIBruecke=29796; %Biegesteifigkeit der Bruecke [MNm2]
mBruecke=639.066; %Gesamtmasse der Bruecke [t]
hSL=2.26; %Abstand Lager-Schwerpunkt Schiene [m]
FG=csvread('nicht-lineare_Federn_87.dat'); %Upload Federgesetze (deltahres-
unb,kErsatzunb,deltahresb,kErsatzb)
%cPhi=897; %Drehfedersteifigkeit je Auflager [MNm/rad]
phiGrenz=2.0675/1000/2.26; %Grenzkriterium lineare Federsteifigkeit [rad]

```

```

D=1.569; %Daempfungswert D=c/crit [%]
v=299.38/3.6; %Ueberfahrtsgeschwindigkeit [m/s]
Zug=csvread('ICE1.dat'); %Datei mit 2 Spalten (x[m],P[kN]), Achsabsta-
ende und Achslasten ICE1 %Wieviele Achsen müssen auf dem Bahndamm sein,
anzAchsen=4; damit dieser als belastet gilt
deltim=0.001; %Zeitschrittweite [s]
extratime=15; %[s] betrachteter Zeitraum nach Ueberfahrt
%Erstellung nicht-lineare Federcharakteristik
anzFG=size(FG,1); %Anzahl Werte Federgesetz
FGDreh(1:anzFG,1:4)=0; %Vorbereitung Matrix Drehfedergesetz
FGDreh(:,1)=FG(:,1)/1000/hSL; %Grenzverdrehung unbelastet
FGDreh(:,2)=FG(:,2)*hSL.^2; %cPhiunbelastet
FGDreh(:,3)=FG(:,3)/1000/hSL; %Grenzverdrehung belastet
FGDreh(:,4)=FG(:,4)*hSL.^2; %cPhibelastet
mt=mBruecke*1000; %Gesamtmasse der Bruecke [kg]
%Verfahren nach Biggs
%Einzellast in Feldmitte
KLEinzellast=1;%elastischer Lastfaktor gelenkiger Einfeldtraeger [-]
%Für jede Drehfedersteifigkeit ergibt sich ein anderer Wert!!!
%Erstellung Matritzen, linke Spalte unbelastet, rechte Spalte belastet
%Die Zeile beschreibt die Abhängigkeit der Grenzverdrehung FGDreh
%Äquivalentes System
cSchlangeTest(1:anzFG,1:2)=0;
klinEinzellastTest(1:anzFG,1:2)=0;
KMEinzellastTest(1:anzFG,1:2)=0;
kEinzellastTest(1:anzFG,1:2)=0;
kTest(1:anzFG,1:2)=0;
mTest(1:anzFG,1:2)=0;
%Übertragung auf das reale System
PHIFeldmitte=1;
PHIdotlinks(1:anzFG,1:2)=0;
PHIdotdotFeldmitte(1:anzFG,1:2)=0;
PHIdotdotlinks(1:anzFG,1:2)=0;
PHIdotdotdotlinks(1:anzFG,1:2)=0;
xS(1:anzFG,1:2)=0;
for i=1:anzFG
%Äquivalentes System
cSchlangeTest(i,1)=LBruecke+2*EIBruecke/FGDreh(i,2);%unbelastet
cSchlangeTest(i,2)=LBruecke+2*EIBruecke/FGDreh(i,4);%belastet
klinEinzellastTest(i,1)=48*EIBruecke/(LBruecke.^3*(1-0.75*LBruecke/cSchlange-
Test(i,1)));
klinEinzellastTest(i,2)=48*EIBruecke/(LBruecke.^3*(1-0.75*LBruecke/cSchlange-
Test(i,2)));
KMEinzellastTest(i,1)=18/(1-0.75*LBruecke/cSchlangeTest(i,1)).^2*(17/630-
61/1440*LBruecke/cSchlangeTest(i,1)+1/60*LBruecke.^2/cSchlangeTest(i,1).^2);
KMEinzellastTest(i,2)=18/(1-0.75*LBruecke/cSchlangeTest(i,2)).^2*(17/630-
61/1440*LBruecke/cSchlangeTest(i,2)+1/60*LBruecke.^2/cSchlangeTest(i,2).^2);
kEinzellastTest(i,1)=klinEinzellastTest(i,1)*KLEinzellast*1000.^2;
kEinzellastTest(i,2)=klinEinzellastTest(i,2)*KLEinzellast*1000.^2;
kTest(i,1)=kEinzellastTest(i,1);
kTest(i,2)=kEinzellastTest(i,2);
mTest(i,1)=mt*KMEinzellastTest(i,1);
mTest(i,2)=mt*KMEinzellastTest(i,2);
%Übertragung auf das reale System
PHIdotlinks(i,1)=16*(cSchlangeTest(i,1)-LBruecke)/(5*LBruecke*cSchlange-
Test(i,1)-4*LBruecke.^2);
PHIdotlinks(i,2)=16*(cSchlangeTest(i,2)-LBruecke)/(5*LBruecke*cSchlange-
Test(i,2)-4*LBruecke.^2);
PHIdotdotFeldmitte(i,1)=16*(2*LBruecke-3*cSchlange-
Test(i,1))/(5*LBruecke.^2*cSchlangeTest(i,1)-4*LBruecke.^3);

```

```

PHIdotdotFeldmitte(i,2)=16*(2*LBuecke-3*cSchlange-
Test(i,2))/(5*LBuecke.^2*cSchlangeTest(i,2)-4*LBuecke.^3);
PHIdotdotlinks(i,1)=32/(5*LBuecke*cSchlangeTest(i,1)-4*LBuecke.^2);
PHIdotdotlinks(i,2)=32/(5*LBuecke*cSchlangeTest(i,2)-4*LBuecke.^2);
xS(i,1)=LBuecke*(61*cSchlangeTest(i,1)-50*LBuecke)/16/(12*cSchlangeTest(i,1)-
10*LBuecke);%Flächenschwerpunkt unter PHI(x) im Bereich [0,L/2]
xS(i,2)=LBuecke*(61*cSchlangeTest(i,2)-50*LBuecke)/16/(12*cSchlangeTest(i,2)-
10*LBuecke);
end
Pmod=KLEinzellast;
%Generierte Daten aus Eingangsparameter Zug
anzlastZug=size(Zug,1); %Anzahl Achslasten, Anzahl Spalten
Gesamtweg=LBuecke+Zug(anzlastZug,1);
Ueberfahrtsdauer=Gesamtweg/v; %[s]
time=fix(extratime+Ueberfahrtsdauer); %Zeit [s]
%Generierte Daten aus Eingangsparameter Zeitschrittberechnung
nsubst=time/deltim+1;
t=0:deltim:time;
%Zeitbereich, in dem BEIDE Bahndämme belastet angenommen werden
nsubststart=ceil((Zug(anzAchsen,1)+LBuecke)/v/deltim);%Nr. des Zeitschritts ab
dem belastet gerechnet wird
nsubstend=floor((Zug(end-anzAchsen,1))/v/deltim);%Nr. des Zeitschritts ab dem
wieder unbelastet gerechnet wird
omegav=pi*v/LBuecke; %Erregerfrequenz der Last [rad/s]
tnormiert1Last=(0:deltim:LBuecke/v); %Zeit [s]
Fnormiert1Last=sin(tnormiert1Last*omegav);
anznormierteLast=size(tnormiert1Last,2)
%Erstellung Lastvektor ICE1
ICE1Lastmatrix(1:anzlastZug,1:nsubst)=0; %leere Lastmatrix
for i=1:anzlastZug
timeLastiStart=Zug(:,1)/v;
for j=1:anznormierteLast
ICE1Lastmatrix(i,fix(timeLastiStart(i)/deltim)+j)=Fnormiert1Last(1,j)*
Pmod*Zug(i,2);
end
end
LastvektorICE1=sum(ICE1Lastmatrix);
Force=-LastvektorICE1*1000;%[N]
anormiert1Last=tnormiert1Last*v;
%Vorbereitung partikulärer Anteil Verdrehung am Balken
%linkes Auflager
phi0MatrixA(1:anzlastZug,1:nsubst)=0; %leere Verdrehungsmatrix
phi0MatrixB(1:anzlastZug,1:nsubst)=0; %leere Verdrehungsmatrix
phi0MatrixC(1:anzlastZug,1:nsubst)=0; %leere Verdrehungsmatrix
phi0MatrixD(1:anzlastZug,1:nsubst)=0; %leere Verdrehungsmatrix
for i=1:anzlastZug
for j=1:anznormierteLast
phi0MatrixA(i,fix(timeLastiStart(i)/del-
tim)+j)=Pmod*Zug(i,2)/1000/(6*EIBuecke)*(anor-
miert1Last(1,j)/LBuecke*(LBuecke-anormiert1Last(1,j))*(2*LBuecke-anor-
miert1Last(1,j)));
phi0MatrixB(i,fix(timeLastiStart(i)/deltim)+j)=Pmod*Zug(i,2)/1000/(6*EIBuecke)
*(-anormiert1Last(1,j)/EIBuecke*(LBuecke-anormiert1Last(1,j))*(-
LBuecke+2*anormiert1Last(1,j)));
phi0MatrixC(i,fix(timeLastiStart(i)/deltim)+j)=Pmod*Zug(i,2)/1000/(6*EIBuecke)
*(-anormiert1Last(1,j)/EIBuecke*(LBuecke-anor-
miert1Last(1,j))*3*LBuecke*((LBuecke-anormiert1Last(1,j))/EIBuecke));
phi0MatrixD(i,fix(timeLastiStart(i)/deltim)+j)=Pmod*Zug(i,2)/1000/(6*EIBuecke)
*(-anormiert1Last(1,j)/EIBuecke*(LBuecke-anor-
miert1Last(1,j))*3*LBuecke*(2*(LBuecke-anormiert1Last(1,j))/(LBuecke)+2));
end
end

```



```

end
phi0VektorA=sum(phi0MatrixA);
phi0VektorB=sum(phi0MatrixB);
phi0VektorC=sum(phi0MatrixC);
phi0VektorD=sum(phi0MatrixD);
%rechtes Auflager
phiLMatrixA(1:anzlastZug,1:nsubst)=0;    %leere Verdrehungsmatrix
phiLMatrixB(1:anzlastZug,1:nsubst)=0;    %leere Verdrehungsmatrix
phiLMatrixC(1:anzlastZug,1:nsubst)=0;    %leere Verdrehungsmatrix
phiLMatrixD(1:anzlastZug,1:nsubst)=0;    %leere Verdrehungsmatrix
for i=1:anzlastZug
for j=1:anznormierteLast
phiLMatrixA(i,fix(timeLastiStart(i)/deltim)+j)=Pmod*Zug(i,2)/1000/(6*EIBruecke)
*(-3*anormiertlLast(1,j)*LBruecke+anormiertlLast(1,j)/LBruecke*(anor-
miertlLast(1,j).^2+2*LBruecke.^2));
phiLMatrixB(i,fix(timeLastiStart(i)/deltim)+j)=Pmod*Zug(i,2)/1000/(6*EIBruecke)
*(2*anormiertlLast(1,j)*(LBruecke-anormiertlLast(1,j))*(2*anormiertlLast(1,j)-
LBruecke)/EIBruecke);
phiLMatrixC(i,fix(timeLastiStart(i)/del-
tim)+j)=Pmod*Zug(i,2)/1000/(6*EIBruecke)*(3*anor-
miertlLast(1,j)*LBruecke*(LBruecke-anormiertlLast(1,j))/EIBruecke*(LBruecke-
anormiertlLast(1,j))/EIBruecke));
phiLMatrixD(i,fix(timeLastiStart(i)/deltim)+j)=Pmod*Zug(i,2)/1000/(6*EIBruecke)
*(3*anormiertlLast(1,j)*LBruecke*(LBruecke-anormiertlLast(1,j))/EIBruecke*(-2*
anormiertlLast(1,j)/LBruecke+4));
end
end
phiLVektorA=sum(phiLMatrixA);
phiLVektorB=sum(phiLMatrixB);
phiLVektorC=sum(phiLMatrixC);
phiLVektorD=sum(phiLMatrixD);
%Berechnungsparameter Einmassenschwinger
beta=1/6;
gamma=1/2;
%Antwortspektrum mit elastischem Einmassenschwinger
%Newmark's Integrationkonstanten
const(1)=gamma/(beta*deltim);
const(2)=1/(beta*deltim^2);
const(3)=1/(beta*deltim);
const(4)=gamma/beta;
const(5)=1/(2*beta);
const(6)=(gamma/(2*beta)-1)*deltim;
%Vorbereitung Vektoren für die Berechnung
x(1:nsubst)=0;
xdot(1:nsubst)=0;
x2dot(1:nsubst)=0;
xstat(1:nsubst)=0;
xplus(1:nsubst)=0;
deltax(1:nsubst)=0;
phi0plus(1:nsubst)=0;
phiLplus(1:nsubst)=0;
MyFeldplus(1:nsubst)=0;
MyLagerlinksplus(1:nsubst)=0;
Qlinksplus(1:nsubst)=0;
phi0stat(1:nsubst)=0;
phiLstat(1:nsubst)=0;
phi0dyn(1:nsubst)=0;
phiLdyn(1:nsubst)=0;
n0(1:nsubst-1)=0;
cPhiTest(1:nsubst)=0;
kVektor(1:nsubst)=0;

```

---

```

mVektor(1:nsubst)=0;
cVektor(1:nsubst)=0;
%Anfangsbedingungen Berechnung
x(1)=0;
xdot(1)=0;
x2dot(1)=0;
k=kTest(1,1);
m=mTest(1,1);
c=D/100*2*sqrt(k*m); %Dämpfungskonstante [Ns/m], ein nicht-lineares D noch zu
ergänzen
n0(1)=sqrt(k/m)/2/pi;
cPhiTest(1)=FGDreh(1,2);
cPhi=cPhiTest(1);
kVektor(1)=k;
mVektor(1)=m;
cVektor(1)=c;
deltax(1)=x(1);
%1. Zeitschritt
delx=(k+const(1)*c+const(2)*m)\(-
    (Force(1)+(const(3)*m+const(4)*c)*xdot(1)+(const(5)*m+const(6)*c)*x2dot(1));
delxdot=const(1)*delx-const(4)*xdot(1)-const(6)*x2dot(1);
delx2dot=const(2)*delx-const(3)*xdot(1)-const(5)*x2dot(1);
%2. Zeitschritt
deltax(2)=delx;
kVektor(2)=k;
mVektor(2)=m;
n0(2)=sqrt(k/m)/2/pi;
cPhiTest(2)=FGDreh(1,2);
x(2)=x(1)+delx;
xdot(2)=xdot(1)+delxdot;
x2dot(2)=x2dot(1)+delx2dot;
%Zur Übertragung auf das Balkensystem
xstat(1)=-Force(1)/k;
xstat(2)=-Force(2)/k;
xplus(1)=x(1)-xstat(1);
xplus(2)=x(2)-xstat(2);
phi0plus(1)=PHIDotlinks(1,1)/PHIFeldmitte*xplus(1);
phi0plus(2)=PHIDotlinks(1,1)/PHIFeldmitte*xplus(2);
phi0stat(1)=phi0VektorA(1)+phi0VektorB(1)/(LBruecke/EIBruecke+6/cPhi)+phi0Vekt
rC(1)/((LBruecke/EIBruecke+2/cPhi)*(LBruecke/EIBruecke+6/cPhi))+phi0VektorD(1)/
((LBruecke/EIBruecke+2/cPhi)*(LBruecke/EIBruecke+6/cPhi))/cPhi;
phi0stat(2)=phi0VektorA(2)+phi0VektorB(2)/(LBruecke/EIBruecke+6/cPhi)+phi0Vekt
rC(2)/((LBruecke/EIBruecke+2/cPhi)*(LBruecke/EIBruecke+6/cPhi))+phi0VektorD(2)/
((LBruecke/EIBruecke+2/cPhi)*(LBruecke/EIBruecke+6/cPhi))/cPhi;
phi0dyn(1)=phi0stat(1)+phi0plus(1);
phi0dyn(2)=phi0stat(2)+phi0plus(2);
phiLplus(1)=-phi0plus(1);
phiLplus(2)=-phi0plus(2);
phiLstat(1)=phiLVektorA(1)+phiLVektorB(1)/(LBruecke/EIBruecke+6/cPhi)+phiL-
VektorC(1)/(LBruecke/EIBruecke+2/cPhi)/(LBruecke/EIBruecke+6/cPhi)+phiL-
VektorD(1)/(LBruecke/EIBruecke+2/cPhi)/(LBruecke/EIBruecke+6/cPhi)/cPhi;
phiLstat(2)=phiLVektorA(2)+phiLVektorB(2)/(LBruecke/EIBruecke+6/cPhi)+phiL-
VektorC(2)/(LBruecke/EIBruecke+2/cPhi)/(LBruecke/EIBruecke+6/cPhi)+phiL-
VektorD(2)/(LBruecke/EIBruecke+2/cPhi)/(LBruecke/EIBruecke+6/cPhi)/cPhi;
phiLdyn(1)=phiLstat(1)+phiLplus(1);
phiLdyn(2)=phiLstat(2)+phiLplus(2);
%Zeitschrittberechnung
for i=2:nsubst-1
    %Zeitabhängiges Verhalten
    %Bahndamm belastet oder unbelastet?!
```

---

```
if i<=nsubststart
Spalte=1;
elseif i>nsubststart && i<=nsubstend
Spalte=2;
else
Spalte=1;
end
CheckSpalte(i)=Spalte;%für die Darstellung, wann der Bahndamm belastet ist
%Verdrehungsabhängiges Verhalten aus dem vorherigen Lastschritt
%linear oder nicht linear
phimax=max([abs(phi0dyn(i)) abs(phiLdyn(i))]);
%Zeile=1;%erstmal linear
kontrollephimax(i+1)=phimax;
%Festlegung k, m und c fuer den Zeitschritt
if phimax<FGDreh(end, (2*Spalte-1))
Zeile=find(FGDreh(:, (2*Spalte-1))>phimax,1,'first');%Wert muss noch
k=kTest(Zeile,Spalte);
m=mTest(Zeile,Spalte);
else%wenn die Verdrehung so groß ist, dass die letzte Feder durchrutscht
display('ACHTUNG: In einem Zeitschritt rutschen ALLE Federn durch.')
k=48*EIBruecke/LBruecke.^3*1000.^2;
m=mt*17/35;
end
kVektor(i+1)=k;
mVektor(i+1)=m;
cVektor(i+1)=c;
n0(i+1)=sqrt(k/m)/2/pi;
c=D/100*2*sqrt(k*m);%Dämpfungskonstante [Ns/m]
%Korrekturwert bei Steifigkeitsänderung
if kVektor(i+1)==kVektor(i)
deltaForce=Force(i)-Force(i-1);
else
deltaForceSystemdyn=(mVektor(i)-mVektor(i+1))*x2dot(i)+(cVektor(i)-
cVektor(i+1))*xdot(i)+(kVektor(i)-kVektor(i+1))*x(i);%Änderung Bezugslinie dyn-
matisches Gleichgewicht
deltaForce=Force(i)-Force(i-1)-deltaForceSystemdyn;
end
%Zeitschrittberechnung
delx=(k+const(1)*c+const(2)*m)\(-deltaForce+(const(3)*m+const(4)*c)*xdot(i)
+(const(5)*m+const(6)*c)*x2dot(i));
delxdot=const(1)*delx-const(4)*xdot(i)-const(6)*x2dot(i);
delx2dot=const(2)*delx-const(3)*xdot(i)-const(5)*x2dot(i);
deltax(i+1)=delx;%nur zur Datenerfassung
x(i+1)=x(i)+delx;
xdot(i+1)=xdot(i)+delxdot;
x2dot(i+1)=x2dot(i)+delx2dot;
%Übertragung auf das Balkensystem
xstat(i+1)=-Force(i)/k;
xplus(i+1)=x(i+1)-xstat(i+1);
%homogener Anteil
if phimax<FGDreh(end, (2*Spalte-1))
phi0plus(i+1)=PHIdotlinks(Zeile,Spalte)/PHIFeldmitte*xplus(i+1);
phiLplus(i+1)=-phi0plus(i+1);
MyFeldplus(i+1)=-PHIdotdotFeldmitte(Zeile,Spalte)/PHIFeld-
mitte*xplus(i+1)*EIBruecke*1000; %[kNm]
MyLagerlinksplus(i+1)=-PHIdotdotlinks(Zeile,Spalte)/PHIFeld-
mitte*xplus(i+1)*EIBruecke*1000; %[kNm]
Qlinksplus(i+1)=(MyFeldplus(i+1)-MyLagerlinksplus(i+1))/xS(Zeile,Spalte);
else
PHIdotlinksGelenk=16/15/LBruecke;
PHIdotdotFeldmitteGelenk=48/5/LBruecke.^2;
```

---

```

PHIdotdotlinksGelenk=0;
xSGelenk=61*LBruecke/192;
phi0plus(i+1)=PHIdotdotlinksGelenk/PHIFeldmitte*xplus(i+1);
phiLplus(i+1)=-phi0plus(i+1);
MyFeldplus(i+1)=-PHIdotdotFeldmitteGelenk/PHIFeld-
mitte*xplus(i+1)*EIBruecke*1000; %[kNm]
MyLagerlinksplus(i+1)=-PHIdotdotlinksGelenk/PHIFeld-
mitte*xplus(i+1)*EIBruecke*1000; %[kNm]
Qlinksplus(i+1)=(MyFeldplus(i+1)-MyLagerlinksplus(i+1))/xSGelenk;
end
%partikulärer Anteil (nur Verdrehungen und Steifigkeiten)
if phimax<FGDreh(end, (2*Spalte-1))
cPhi=FGDreh(Zeile, 2*Spalte);
else
cPhi=1/1000000000000000;
end
cPhiTest(i+1)=cPhi;
phi0stat(i+1)=phi0VektorA(i+1)+phi0Vek-
torB(i+1)/(LBruecke/EIBruecke+6/cPhi)+phi0Vek-
torC(i+1)/((LBruecke/EIBruecke+2/cPhi)*(LBruecke/EIBruecke+6/cPhi))+phi0Vek-
torD(i+1)/((LBruecke/EIBruecke+2/cPhi)*(LBruecke/EIBruecke+6/cPhi))/cPhi;
phiLstat(i+1)=phiLVektorA(i+1)+phiLVek-
torB(i+1)/(LBruecke/EIBruecke+6/cPhi)+phiLVek-
torC(i+1)/(LBruecke/EIBruecke+2/cPhi)/(LBruecke/EIBruecke+6/cPhi)+phiLVek-
torD(i+1)/(LBruecke/EIBruecke+2/cPhi)/(LBruecke/EIBruecke+6/cPhi)/cPhi;
%Gesamtlösung
phi0dyn(i+1)=phi0stat(i+1)+phi0plus(i+1);
phiLdyn(i+1)=phiLstat(i+1)+phiLplus(i+1);
end
%-----
%Übertragung Ergebnisse auf das reale Balkensystem
%maximale dyn. Verdrehung am linken Auflager
phi0dynmax=max(phi0dyn);
phi0dynmin=min(phi0dyn);
%Gesamtverdrehung
%maximale dyn. Verdrehung am linken Auflager
phiLdynmax=max(phiLdyn);
phiLdynmin=min(phiLdyn);
%Schnittgrößen (homogener Anteil)
MyLagerrechtsplus=MyLagerlinksplus; %[kNm]
Qrechtsplus=Qlinksplus;
%Schnittgrößen statisch (partikulärer Anteil)
MyFeldMatrix(1:anzlastZug, 1:nsubst)=0;
MyLagerrechtsMatrix(1:anzlastZug, 1:nsubst)=0;
QlinksMatrix(1:anzlastZug, 1:nsubst)=0;
QrechtsMatrix(1:anzlastZug, 1:nsubst)=0;
CSchlange(1:anzlastZug, 1:nsubst)=0; %Hilfswert
CSchlangeSchlange(1:anzlastZug, 1:nsubst)=0; %Hilfswert
for i=1:anzlastZug
for j=1:anznormierteLast
CSchlange(i, fix(timeLastiStart(i)/deltim)+j)=-Pmod*Zug(i, 2)*anor-
miertlLast(1, j)*(LBruecke-anormiertlLast(1, j))/EIBruecke*((LBruecke-anor-
miertlLast(1, j))/EIBruecke+2*(LBruecke-anormiertlLast(1, j))/cPhi-
Test(i)/LBruecke+2/cPhiTest(i))/(LBruecke/EIBruecke+2/cPhi-
Test(i))/(LBruecke/EIBruecke+6/cPhiTest(i));
CSchlangeSchlange(i, fix(timeLastiStart(i)/deltim)+j)=Pmod*Zug(i, 2)*anor-
miertlLast(1, j)*(LBruecke-anormiertlLast(1, j))*(LBruecke-2*anor-
miertlLast(1, j))/EIBruecke/(LBruecke.^2)/(LBruecke/EIBruecke+6/cPhiTest(i));
if anormiertlLast(1, j)>=LBruecke/2
MyFeldMatrix(i, fix(timeLastiStart(i)/deltim)+j)=(Pmod*Zug(i, 2)*(LBruecke-anor-
miertlLast(1, j))/LBruecke+CSchlangeSchlange(j))*LBruecke/2+CSchlange(j);

```

---

```
else
MyFeldMatrix(i,fix(timeLastiStart(i)/deltim)+j)=(-Pmod*Zug(i,2)*anor-
miertlLast(1,j)/LBruecke+CSchlangeSchlange(j))*LBruecke/2+Pmod*Zug(i,2)*anor-
miertlLast(1,j)+CSchlange(j);
end
QlinksMatrix(i,fix(timeLastiStart(i)/deltim)+j)=Pmod*Zug(i,2)*(LBruecke-anor-
miertlLast(1,j))/LBruecke+CSchlangeSchlange(j);
QrechtsMatrix(i,fix(timeLastiStart(i)/deltim)+j)=-Pmod*Zug(i,2)*anor-
miertlLast(1,j)/LBruecke+CSchlangeSchlange(j);
end
end
MyFeldstat=sum(MyFeldMatrix); %[kNm]
Qlinksstat=sum(QlinksMatrix); %[kN]
Qrechtsstat=sum(QrechtsMatrix); %[kN]
CSchlangeSchlangesum=sum(CSchlangeSchlange);
CSchlangesum=sum(CSchlange);
MyLagerlinksstat=CSchlangesum; %[kNm] Moment am linken Auflager
MyLagerrechtsstat=CSchlangeSchlangesum*LBruecke+CSchlangesum;
%Gesamtverläufe
%Moment in Feldmitte
MyFelddyn=MyFeldstat+MyFeldplus;
%Momente an den Auflagern
MyLagerlinksdyn=MyLagerlinksstat+MyLagerlinksplus;
MyLagerrechtsdyn=MyLagerrechtsstat+MyLagerrechtsplus;
%Querkräfte an den Auflagern
Qlinksdyn=Qlinksstat+Qlinksplus;
Qrechtsdyn=Qrechtsstat+Qrechtsplus;
%Maximalwerte
MyFelddynmax=max(MyFelddyn);
MyLagerlinksdynmax=max(MyLagerlinksdyn);
MyLagerrechtsdynmax=max(MyLagerrechtsdyn);
Qlinksdynmax=max(Qlinksdyn);
Qrechtsdynmax=max(Qrechtsdyn);
%Minimalwerte
MyFelddynmin=min(MyFelddyn);
MyLagerlinksdynmin=min(MyLagerlinksdyn);
MyLagerrechtsdynmin=min(MyLagerrechtsdyn);
Qlinksdynmin=min(Qlinksdyn);
Qrechtsdynmin=min(Qrechtsdyn);
```

## Bisher veröffentlichte Titel der Schriftenreihe Stahlbau - RWTH Aachen

Heft	Jahr	Titel
1	1982	WIEDECK, H.-N. Beitrag zur Ermittlung der Bauwerksantworten von Stahlbauten auf dynamische Erregungen bei Annahme elastisch-plastischen Materialverhaltens
2	1983	LOPETEGUI, J. Verfahren der orthogonalisierten Last-Verformungszustände zur Lösung nichtlinearer Probleme der Stabstatik
3	1982	STUTZKI, C. ( <i>vergriffen</i> ) Traglastberechnung räumlicher Stabwerke unter Berücksichtigung verformbarer Anschlüsse
4	1982	SALEH, A. ( <i>vergriffen</i> ) Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken mit großen Verformungen und Plastizierung
5	1982	WUPPERMANN, G.T. Zur technologischen und anwendungstechnischen Entwicklung von stabförmigen Kaltprofilen
6	1984	SCHLESIGER, W. Zur Festlegung von Sicherheitsbeiwerten beim Betriebsfestigkeitsnachweis von Stahlkonstruktionen
7	1985	NENSEL, R. Beitrag zur Bemessung von Stahlkonstruktionen unter Erdbebenbelastungen bei Berücksichtigung der Duktilität
8	1985	BILD, S. Beitrag zur Verbesserung der Haltbarkeit von Fahrbahnbelägen auf orthotropen Platten
9	1985	BEISEL, T. Beitrag zur Berechnung von Verbundkonstruktionen unter Verwendung normierter Eigenspannungszustände
10	1985	STOVERINK, H. Beitrag zur Ermittlung der Gesamtstabilität von Hallenrahmen unter Berücksichtigung von Vouten und Steifen
11	1985	RUSCHEWEYH, H. Dynamische Windwirkung an Bauwerken unter Interferenzeinfluß
12	1985	SCHOLZ, H. Berechnungsverfahren für räumliche Stabtragwerke unter Berücksichtigung der Spannungstheorie II. Ordnung, der Knickstabilität und dynamischer Belastung
13	1986	HEMMERT-HALSWICK, A. Beitrag zur Umstellung der Bemessung stählerner Konstruktionen auf Grenzzustände auf semiprobabilistischer Basis
14	1987	KOO, M. S. Untersuchung zum Einfluß der Bebindauer, Strukturausbildung und des Verhaltens von Verbindungen auf die Sicherheit von Stahlbauten bei Erdbebenbeanspruchungen

<b>Heft</b>	<b>Jahr</b>	<b>Titel</b>
15	1988	BILD, J. Beitrag zur Anwendung der Bruchmechanik bei der Lösung von Sicherheitsproblemen des Stahlbaus
16	1989	DROSNER, S. Beitrag zur Berechnung der dynamischen Beanspruchung von Brücken unter Verkehrslasten
17	1990	UNGERMANN, D. Bemessungsverfahren für Vollwand- und Kastenträger unter besonderer Berücksichtigung des Stegverhaltens
18	1990	SEEßELBERG, C. Neue Elemente der Tragwerksoptimierung für frühe Entwurfsphasen am Beispiel von Leichtbaubrücken
19	1991	JO, J.-B. Untersuchung der Ermüdungsfestigkeit von Bauteilen aus Stahl mit Hilfe des Kerbgrundkonzeptes und der Bruchmechanik
20	1992	SPANGEMACHER, R. Zum Rotationsnachweis von Stahlkonstruktionen, die nach dem Traglastverfahren berechnet werden
21	1992	HENSEN, W. Grundlagen für die Beurteilung der Weiterverwendung alter Stahlbrücken
22	1993	NEUENHAUS, D. Dynamik von Mehrkörpersystemen zur Beschreibung von Grenzzuständen für Baukonstruktionen
23	1993	NGUYEN, B.-T. Beitrag zur Bestimmung der maximalen Bauwerksverformung bei der Erdbebenbelastung von Stahlbauten mit Berücksichtigung der Duktilität
24	1993	GRUB, J. Numerische Simulation der Zweiphasenströmung Gas - Flüssigkeitstropfen im Sprühturm
25	1994	GALEMANN, T. Messungen der dynamischen Windeinwirkungen auf einen 28 m hohen Stahlschornstein und Vergleich mit vorliegenden Berechnungsverfahren
26	1994	KUCK, J. Anwendung der dynamischen Fließgelenktheorie zur Untersuchung der Grenzzustände von Stahlbaukonstruktionen unter Erdbebenbelastung
27	1994	KOOK, S. K. Beitrag zur Definition der Bauwerksregularität und zur Bestimmung der Verhaltensbeiwerte für die Erdbebenbelastung von Stahlbauten
28	1994	DIELEN, B. Beitrag zur Klärung des Interferenzgalloping-Phänomens bei engstehenden, querangeströmten Kreiszylindern

<b>Heft</b>	<b>Jahr</b>	<b>Titel</b>
29	1994	MERZENICH, G. Entwicklung eines europäischen Verkehrslastmodells für die Bemessung von Straßenbrücken
30	1994	FELDMANN, M. Zur Rotationskapazität von I-Profilen statisch und dynamisch belasteter Träger
31	1995	STRANGHÖNER, N. Untersuchungen zum Rotationsverhalten von Trägern aus Hohlprofilen
32	1996	KONG, B.-S. Beitrag zur numerischen Simulation des Momenten-Rotationsverhalten von geschweißten und geschraubten Stützen-Riegel-Verbindungen unter monotonen und zyklischen Belastungen
33	1996	LI, H. Bruchverhalten von Beton unter Zugbeanspruchung

**Die nachfolgend angegebenen Titel sind als Verlagsveröffentlichung beim SHAKER VERLAG, Herzogenrath/Aachen erschienen.**

<b>Heft</b>	<b>Jahr</b>	<b>Titel</b>
34	1997	HORTMANN, M. Zur Identifikation und Berücksichtigung nichtlinearer aeroelastischer Effekte ISBN 3-8265-2359-8
35	1997	WEYNAND, K. Sicherheits- und Wirtschaftlichkeitsuntersuchungen zur Anwendung nachgiebiger Anschlüsse im Stahlbauoder Beitrag zur Entwicklung moderner Bemessungskonzepte ISBN 3-8265-2360-1
36	1998	HOFFMEISTER, B. Plastische Bemessung von Verbundkonstruktionen unter Verwendung realitätsnaher Last-Verformungsansätze ISBN 3-8265-2842-5
37	1997	HARTMANN-LINDEN, R. Tragfähigkeit von Stahlspundwänden ISBN 3-8265-2843-3
38	1997	GROTMANN, D. Verbesserung von Sicherheitsnachweisen für Stahlkonstruktionen mit rechteckigen Hohlprofilen ISBN 3-8265-3019-5
39	1998	STÖTZEL, G. Verfahren zur Beurteilung der Sicherheit bei Weiterverwendung alter Stahlbrücken ISBN 3-8265-3154-X



<b>Heft</b>	<b>Jahr</b>	<b>Titel</b>
40	1998	VERWIEBE, C. Grundlagen für den baupraktischen Einsatz von Schwingungsdämpfern auf Flüssigkeitsbasis ISBN 3-8265-3418-2
41	1998	ZILLINGER, W. Niedrige Stahlhallen im Grenzzustand der Tragfähigkeit unter dynamischer Windbelastung ISBN 3-8265-3690-8
42	1998	GÜSGEN, J. Bemessung tragender Bauteile aus Glas ISBN 3-8265-4377-7
43	1999	BOHMANN, D. Ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Verbundglasscheiben ISBN 3-8265-6635-1
44	1999	ZILLER, C. Modellversuche und Berechnungen zur Optimierung der natürlichen Lüftung durch Doppelfassaden ISBN 3-8265-6783-8
45	2000	LAUFS, W. Ein Bemessungskonzept zur Festigkeit thermisch vorgespannter Gläser ISBN 3-8265-8044-3
46	2002	SCHEUERMANN, G. Ein Beitrag zur Kombination klimatischer Lasten ISBN 3-8322-0511-X
47	2003	MÜLLER, C. Zum Nachweis ebener Tragwerke aus Stahl gegen seitliches Ausweichen ISBN 3-8322-1574-3
48	2003	SCHNEIDER, R. Beitrag zur Bemessung von druckbeanspruchten Einzelwinkeln unter Berücksichtigung der Anschlusseigenschaften ISBN 3-8322-1987-0
49	2004	HEINEMEYER, C. Brandsicherheit durch Konstruktion und Stahlsortenwahl ISBN 38322-2687-7
50	2004	SCHWARZKOPF, D. Regen-Wind-induzierte Schwingungen oder Grundlagen und ein Berechnungsmodell ISBN 3-8322-3026-2
51	2004	KRAUS, O. Systemzuverlässigkeit von Hallenrahmen aus Stahl unter zeitvarianten Belastungen ISBN 3-8322-3209-5

<b>Heft</b>	<b>Jahr</b>	<b>Titel</b>
52	2004	SHIN, H. S. Beitrag zur numerischen Untersuchung des Tragverhaltens von Verbundträgern mit hochfesten Stahl und hochfestem Beton ISBN 3-8322-3271-0
53	2004	DERCKX, C. Momenten-Rotationstragfähigkeit von Spundwänden aus Z-Bohlen und U-Bohlen mit verminderter Schubkraftübertragung ISBN 3-8322-3465-9
54	2005	KÜHN, B. Beitrag zur Vereinheitlichung der europäischen Regelungen zur Vermeidung von Spröbruch ISBN 3-8322-3901-4
55	2005	KASPER, R. Tragverhalten von Glasträgern ISBN 3-8322-4407-7
56	2005	STÖTZEL, J. Ermittlung von Materialermüdungsfestigkeitskurven im Kurz-, Zeit- und Dauerfestigkeitsbereich von einseitigen Schweißverbindungen zweier Aluminiumlegierungen ISBN 3-8322-4408-5
57	2006	WELLERSHOFF, F. Nutzung der Verglasung zur Aussteifung von Gebäudehüllen ISBN 3-8322-5046-8
58	2006	HÖHLER, S. Beitrag zur Erweiterung der Regelungen der Stahlsortenauswahl zur Vermeidung von Spröbruch auf Anschlüsse unter vorwiegend ruhender Beanspruchung ISBN 3-8322-5399-8
59	2006	TRUMPF, H. Stabilitätsverhalten ebener Tragwerke aus pultrudierten faserverstärkten Polymerprofilen ISBN 3-8322-5403-2
60	2006	BUTZ, E. C. Beitrag zur Berechnung fußgängerinduzierter Brückenschwingungen ISBN 3-8322-5699-7
61	2007	STANGENBERG, H. Zum Bauteilnachweis offener, stabilitätsgefährdeter Stahlbauprofile unter Einbeziehung seitlicher Beanspruchungen und Torsion ISBN 978-3-8322-6283-9
62	2007	VÖLLING, B. Analytische Berechnung von Sandwichtragwerken mit Hilfe von Eigenspannungslösungen ISBN 978-3-8322-6727-8

<b>Heft</b>	<b>Jahr</b>	<b>Titel</b>
63	2008	KAMMEL, C. Vorhersage der Wirkungsweise nachgiebiger Schutzeinrichtungen für den Straßenverkehr ISBN 978-3-8322-7186-2
64	2008	DÖRING, B. Einfluss von Deckensystemen auf Raumtemperatur und Energieeffizienz im Stahlgeschossbau ISBN 978-3-8322-7516-7
65	2008	HECHLER, O. Über das Ermüdungsverhalten von Konstruktionen aus Duplex-Stahl ISBN 978-3-8322-7626-3
66	2009	OPPE, M. Zur Bemessung geschraubter Verbindungen von pultrudierten faserverstärkten Polymerprofilen ISBN 978-3-8322-8247-9
67	2009	PINGER, T. Zur Vermeidung der Rissbildung an Stahlkonstruktionen beim Feuerverzinken bei besonderer Berücksichtigung der flüssigmetallinduzierten Spannungsrisskorrosion ISBN 978-3-8322-8532-6
68	2009	GESELLA, H. Zur Vorhersage des Rissfortschritts bei einbetonierten Kopfbolzendübeln in Verbundträgern unter nicht ruhender Belastung ISBN 978-3-8322-8593-7
69	2010	KUHNHENNE, M. Energetische Qualität von Gebäudehüllen in Stahl-Sandwichbauweise ISBN 978-3-8322-8763-4
70	2010	NAUMES, J. C. Biegeknicken und Biegedrillknicken von Stäben und Stabsystemen auf einheitlicher Grundlage ISBN 978-3-8322-8754-2
71	2010	BAITINGER, M. Zur Bemessung von SL-belasteten Anschlüssen im konstruktiven Glasbau ISBN 978-3-8322-8761-0
72	2011	RAUERT, T. Zum Einfluss baulicher Randbedingungen auf das dynamische Verhalten von WIB-Eisenbahnbrücken ISBN 978-3-8440-0360-4
73	2011	FIEBIG, R. Zum Trag- und Verformungsverhalten der Kopfbolzendübel von Stahlverbundträgern mit Vergussfugen ISBN 978-3-8440-0361-1
74	2012	PAK, D. Zu Stahl-Verbundbrücken mit integralen Widerlagern ISBN 978-3-8440-0362-8

<b>Heft</b>	<b>Jahr</b>	<b>Titel</b>
75	2013	LANGOSCH, K. P. Das Tragverhalten von Glasstützen mit Mono- und Verbundquerschnitten ISBN 978-3-8322-9926-2
76	2013	KEMPER, F. H. Böeninduzierte Schwingungsanfälligkeit von durchlässigen Fassadenelementen unter Berücksichtigung nichtlinearer Struktureigenschaften im Grenzzustand der Ermüdung ISBN 978-3-8440-2338-1
77	2013	GÜNDEL, M. Zuverlässigkeitsanalysen zur Kapazitätsbemessung von Stahlrahmen ISBN 978-3-8440-2343-5
78	2013	MÖLLER, S. Zur Berechnung prismatischer Strukturen mit schubelastisch verbundenen Querschnittsscheiben ISBN 978-3-8440-2380-0
79	2015	EICHLER, B. Hochlagenorientierte Werkstoffgütewahl für die plastische Bemessung von Stahlbauteilen ISBN 978-3-8440-3724-1
80	2017	COLOMER SEGURA, C Reduced Order Modelling of Steel Beams and Columns for Analysis against Accidental Actions ISBN 978-3-8440-4714-1
81	2017	SCHILLO, N. Local and global buckling of box columns made of high strength steel ISBN 978-3-8440-5230-5
82	2018	BIGELOW, H. Vereinfachte dynamische Bemessung von WiB-Eisenbahnverbundbrücken für den Hochgeschwindigkeitsverkehr ISBN 978-3-8440-6258-8