

Berichte aus der Produktionstechnik

Thorsten Nottebaum

**Optimierung des thermoelastischen Verhaltens
von Strukturen aus faserverstärkten Werkstoffen
mit der Finite-Elemente-Methode**

**Optimierung des thermoelastischen Verhaltens von
Strukturen aus faserverstärkten Werkstoffen
mit der Finite-Elemente-Methode**

Von der Fakultät für Maschinenwesen
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Ingenieurwissenschaften
genehmigte Dissertation

vorgelegt von
Diplom-Ingenieur Thorsten Nottebaum
aus Mettmann

Referent: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Manfred Weck
Korreferent: Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Michaeli
Tag der mündlichen Prüfung: 29.11.1993

D 82 (Diss. RWTH Aachen)

SE 12020 a

WZL
THAACHEN

IPT 
AACHEN

Berichte aus der Produktionstechnik

Thorsten Nottebaum

**Optimierung des thermoelastischen Verhaltens
von Strukturen aus faserverstärkten Werkstoffen
mit der Finite-Elemente-Methode**

Herausgeber:

Prof. Dr.-Ing. Dr.h.c. Dipl.-Wirt.Ing. W. Eversheim
Prof. Dr.-Ing. Dr.h.c. W. König
Prof. Dr.-Ing. Dr.h.c. T. Pfeifer
Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. M. Weck

Band 2 / 94

Verlag Shaker

D82 (Diss. RWTH Aachen)

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Nottebaum, Thorsten:

Optimierung des thermoelastischen Verhaltens von Strukturen aus
faserverstärkten Werkstoffen mit der Finite-Elemente-Methode / Thorsten
Nottebaum. -

Aachen : Shaker, 1994

(Berichte aus der Produktionstechnik ; Bd 94,2)

Zugl.: Aachen, Techn. Hochsch., Diss., 1993

ISBN 3-86111-784-3

NE:GT

Copyright Verlag Shaker 1994

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes,
der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der
Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der
Übersetzung, vorbehalten.

Als Manuskript gedruckt. Printed in Germany

ISBN 3-86111-784-3

ISSN 0943-1756

Verlag Dr. Chaled Shaker, Hubertusstr. 40, 52064 Aachen

Telefon: 0241 / 406351 - Telefax: 0241 / 406354

Für Doris und Franz

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Laboratorium für Werkzeugmaschinen und Betriebslehre (WZL) der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen.

Herr Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. M. Weck, Inhaber des Lehrstuhls für Werkzeugmaschinen und Direktor des WZL, hat durch seine fachliche Beratung und großzügige Förderung die Arbeit maßgeblich beeinflusst. Ihm möchte ich an dieser Stelle besonders herzlich danken.

Genauso danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Michaeli, Leiter des Instituts für Kunststoffverarbeitung an der RWTH Aachen, für die Übernahme des Korreferats sowie die eingehende Durchsicht der Dissertation.

Mein aufrichtiger Dank gilt allen Mitarbeitern des Instituts und des Sonderforschungsbereichs 332 "Produktionstechnik für Bauteile aus nichtmetallischen Faserverbundwerkstoffen", die in zahlreichen fruchtbaren Diskussionen zum Erfolg der Arbeit beigetragen haben. Dieser Dank gilt besonders Herrn Dr.-Ing. A. Heckmann, Herrn Dr.-Ing. J. Feldermann, Herrn Dipl.-Ing. W. Sprangers und Frau Dipl.-Math. M. Ruschitzka sowie Frau S. Vonderhagen, die wichtige Arbeiten zum Fortgang der Softwareentwicklung geleistet hat. Ganz besonders verbunden bin ich den zahlreichen Studenten, die im Rahmen von Studien- und Diplomarbeiten sowie als Studentische Hilfskräfte mit viel Engagement und Einfallsreichtum die Arbeit vorantrieben.

Meiner Mutter danke ich für die sorgfältige Durchsicht des Manuskripts; und schließlich danke ich meiner Frau Birgit für ihr großes Verständnis und ihre Unterstützung während der Entstehung dieser Arbeit.

Aachen, im Dezember 1993

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Hans-Joachim Rothmann". The signature is fluid and cursive, with a long horizontal stroke at the end.

Abstract

The focal point of this paper is the development and realisation of finite element structural analysis and optimisation methods, in order to support and systematise the layout of the transient thermomechanical deformation and failure behaviour of multilayer, fibre-reinforced composites. Attention is given to the fact that the optimisation of fibre-reinforced materials needs special consideration of manufacturing constraints, particularly concerning practicable fibre orientations.

Starting with the fundamentals of the finite element method, the necessary mathematical relations for structural and sensitivity analysis of multilayer composites are derived. The development of a curved finite shell element for heat transfer analysis in multilayer fibre composites allows the calculation of the orthotropic thermal conduction with minimum modelling and computational expenditure.

Based on the formulation of an optimisation problem with transient objectives and constraints, strategies for their solution are discussed and compared using practical examples. The deformation and failure behaviour under static load must be considered as a further important criterion along with the thermoelastic behaviour. Due to the fact that thermomechanical and static stiffness criteria lead to contradictory explanations in some cases, vector optimisation strategies are applied in order to achieve an optimum compromise between thermal and static stiffness and failure criteria.

The development of an up-to-date structural optimisation system, which implements the developed methods, is described in detail. Practical applications from mechanical and automotive engineering demonstrate the performance capability of the developed structural optimisation methods and their implementation.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Formelzeichen und Abkürzungen	III
1 Einleitung	1
1.1 Problemstellung	1
1.2 Stand der Erkenntnisse	2
1.3 Zielsetzung	7
2 Optimierung faserverstärkter Kunststoffe	10
2.1 Aspekte des fasergerechten Entwurfs	10
2.2 Optimierungsverfahren in der mechanischen Konstruktion	14
2.3 Fertigungstechnische Restriktionen	15
2.4 Mathematische Modellbildung	19
3 Thermoelastische Struktur- und Sensitivitätsanalyse	23
3.1 Schalenelement für mehrschichtig orthotrope Flächentragwerke	24
3.1.1 Geometrische Elementbeschreibung und numerische Integration	24
3.1.2 Koordinatensysteme zur Definition gerichteter Materialeigenschaften	28
3.1.3 Faserwinkeltransformation	29
3.1.4 Benutzerdefinition lokaler Schalenkoordinatensysteme	32
3.2 Thermisches Verhalten	33
3.2.1 Ansatz für das Temperaturfeld	36
3.2.2 Wärmeleitfähigkeitsmatrix	38
3.2.3 Konvektionsmatrix	40
3.2.4 Wärmekapazitätsmatrix	40
3.2.5 Test der Elementformulierung	41

3.3	Spannungs- / Verformungsanalyse von Faserverbundwerkstoffen	44
3.3.1	Ansatz für das Verformungsfeld	46
3.3.2	Steifigkeitsmatrix	47
3.3.3	Thermische Ersatzkräfte	50
3.3.4	Dehnungen und Spannungen	51
3.3.5	Versagensanalyse in faserverstärkten Kunststoffen	55
3.3.6	Test der Elementformulierung	58
4	Optimierungsstrategien und -methoden	61
4.1	Nichtlineare und restringierte Optimierung	61
4.1.1	Sequentielle Quadratische Programmierung	65
4.1.2	Duale Verfahren	67
4.2	Optimierung nach mehreren Zielen	69
4.2.1	Methode der Zielgewichtung	71
4.2.2	Restriktionsorientierte Transformation	72
4.2.3	Normmethoden	73
4.3	Lösung zeitvarianter Optimierungsprobleme	75
4.3.1	Diskretisierende Strategien	76
4.3.2	Integrative Strategien	79
5	Optimierungssystemlösung	81
5.1	Anforderungen an ein Optimierungssystem	81
5.2	Beschreibung und Aufbau des Optimierungssystems STRATHOS	83
5.3	Programmentwicklung und Test	86
6	Anwendung	91
6.1	KFZ-Rad unter thermischer Last durch die Scheibenbremse	91
6.2	Schieberfräseinheit einer Portalfräsmaschine unter zeitvariantem Temperatureinfluß in der Maschinenhalle	97
7	Zusammenfassung und Ausblick	104
8	Literatur	107

Formelzeichen und Abkürzungen

Schreibweise

Skalare Größen:

Kennzeichnung durch lateinische oder griechische Klein- und Großbuchstaben

Vektoren:

Kennzeichnung durch lateinische oder griechische fettgedruckte Klein- und Großbuchstaben

Tensoren und Matrizen:

Kennzeichnung durch lateinische oder griechische fettgedruckte Klein- und Großbuchstaben
(Es gilt die Einstein'sche Summationskonvention)

Lateinische Großbuchstaben

A	Fläche
B	Verzerrungs-/Verschiebungsmatrix
B	Bruchkriterium
C	Wärmekapazitätsmatrix
D	Materialmatrix im Materialkoordinatensystem
D *	Materialmatrix
E	Elastizitätsmodul
F	Kraft
F_T	Thermische Ersatzkraft
G	Schubmodul
H^L	Wärmeleitfähigkeitsmatrix
H^K	Konvektionsmatrix
K	Steifigkeitsmatrix
J	Jacobimatrix
N	Vektor der Formfunktionen
Q	Wärmestrom

Q_2	Transformationsmatrix
Q_3	Transformationsmatrix
T	Temperatur
T_A	Temperatur auf der Berandung
T^R	Temperatur in der Umgebung
T_0	Anfangstemperatur
U	Verzerrungsenergie
V	Volumen
W	Potentielle Energie der äußeren Kräfte
X	Entwurfsvariable

Lateinische Kleinbuchstaben

b	Breite
c	spezifische Wärmekapazität
c	Normierungsfaktor
d	Durchmesser
e	Einheitsvektor
f	Zielfunktion
f	vektorielle Zielfunktion
g	Ungleichungsrestriktionsfunktion
h	Gleichungsrestriktionsfunktion
k	Timoshenko-Konstante
k	Iterationszähler
l	Länge
l	Anzahl der Laminatschichten im Element
m	Masse
m_f	Anzahl der Zielfunktionskomponenten
m_g	Anzahl der Ungleichungsrestriktionen
m_h	Anzahl der Gleichungsrestriktionen
n	Anzahl der Entwurfsvariablen
n	Normalenrichtung
p^A	Flächenlast
p^V	Volumenlast
p	Anzahl der Strukturknoten
q	Anzahl der Elementknoten
q	Wärmestrom

q^A	flächenbezogener Wärmestrom
q^V	volumenbezogener Wärmestrom
r	Radius
t	Zeit
t_0	Anfangszeit einer instationären Temperaturanalyse
t_f	Endzeit einer instationären Temperaturanalyse
t	Schalendicke
t_i	Dicke der Schicht i
u, v, w	Verformungskomponenten
\mathbf{u}	Verformungsvektor
w	Gewichtungsfaktor
x, y, z	Koordinaten des globalen Koordinatensystems
x', y', z'	Koordinaten des lokalen Koordinatensystems
x'', y'', z''	Koordinaten des Benutzerkoordinatensystems

Griechische Großbuchstaben

Λ	Lagrangefunktion
Π	Potential
$\Theta_x, \Theta_y, \Theta_z$	Globale Rotationsfreiheitsgrade

Griechische Kleinbuchstaben

α	Wärmeausdehnungskoeffizient im Materialkoordinatensystem
α^*	Wärmeausdehnungskoeffizient
α, β, γ	Lokale Rotationsfreiheitsgrade
β	Wärmeübergangszahl
ε	Dehnung
ε'	Dehnung im Materialkoordinatensystem
ε_0	Anfangsdehnung
γ	Scherung
λ	Lagrangemultiplikator
λ	Wärmeleitfähigkeit im Materialkoordinatensystem
λ^*	Wärmeleitfähigkeit
λ_n	Wärmeleitfähigkeit normal zur Oberfläche

v	Querkontraktionszahl
φ	Faservolumengehalt
θ	Faserorientierungswinkel
θ_i	Faserorientierungswinkel der Schicht i
ρ	Dichte
σ	Normalspannung
σ'	Normalspannung im Materialkoordinatensystem
σ_{Bd}	Bruchdruckspannung
σ_{Bz}	Bruchzugspannung
τ	Schubspannung
τ'	Schubspannung im Materialkoordinatensystem
τ_B	Bruchschubspannung
ξ, η, ζ	Koordinaten des natürlichen Koordinatensystems

Symbole

Δ	Differenz
∇	Nabla-Operator

Abkürzungen

AFK	Aramidfaserverstärkter Kunststoff
CAE	Computer Assisted Engineering
CFK	Kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff
CFK-HT	Kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff High Tensile
CFK-HM	Kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff High Module
FEM	Finite-Elemente-Methode
FVK	Faserverbundkunststoff
FVW	Faserverbundwerkstoff
GFK	Glasfaserverstärkter Kunststoff
MP	Mathematische Programmierung
NLP	Nichtlineare Programmierung
RTM	Resin Transfer Moulding
SQP	Sequentielle Quadratische Programmierung

1 Einleitung

1.1 Problemstellung

Faserverbundwerkstoffe mit Kunststoffmatrix halten zunehmend Einzug in Bereiche der Produktentwicklung, wo es neben hoher Steifigkeit und Festigkeit bei geringem Gewicht vielfach auf eine geringe Wärmeausdehnung ankommt. Besonders für hochpräzise Komponenten aus dem Maschinenbau, die hohe Anforderungen hinsichtlich eines stabilen thermischen Verformungsverhaltens erfüllen müssen, können durch den Einsatz dieser Werkstoffe deutliche Verbesserungen erreicht werden.

Die Anisotropie und der schichtenweise Aufbau der Faserverbundkunststoffe erlauben eine gezielte Anpassung des thermomechanischen Verhaltens durch Variation von Schichtdicken und Faserorientierung. Genauso wie das elastische Verhalten dieser Werkstoffe durch den Laminataufbau "konstruiert" werden kann, lassen sich die für Kohlenstoff- und Aramidfasern charakteristischen negativen thermischen Ausdehnungskoeffizienten nutzen, um einen Verbundwerkstoff mit neutralem Wärmedehnungsverhalten zu entwickeln. Darüber hinaus sind jedoch die unter Temperatureinwirkung während der Produktion und im Betrieb aus der Anisotropie des Werkstoffes resultierenden Restspannungen nicht zu vernachlässigen, da sie die Festigkeit wesentlich reduzieren können.

Die konstruktive Auslegung faserverstärkter Bauteile ist im Vergleich zu isotropen Werkstoffen durch eine größere Anzahl von Entwurfsvariablen gekennzeichnet. Ferner sind mit zunehmender Automatisierung der Fertigung schon beim Entwurf die für das verwendete Verfahren notwendigen fertigungstechnischen Restriktionen zu berücksichtigen. Gerade im Hinblick auf immer kürzer werdende Produktentwicklungszeiten und gleichzeitig steigende Anforderungen an die Leistungsfähigkeit und die Zuverlässigkeit der Produkte ist diese umfangreiche Aufgabe nur unter Zuhilfenahme rechnergestützter Verfahren zu lösen. Vor allem die unter dem Begriff Computer Assisted Engineering (CAE) zusammengefaßten Systeme der grafisch interaktiven Produktmodellierung sowie die zur Simulation des thermomechanischen Verhaltens universell einsetzbare Methode der finiten Elemente (FEM)

haben in den letzten Jahren weite Verbreitung gefunden.

Der konstruktive Prozeß ist ein iterativer Vorgang, der durch den Einsatz von Strukturoptimierungsverfahren unterstützt und systematisiert werden kann. Optimierungsverfahren sind in der Lage, unter Einsatz eines Analysewerkzeuges, wie der Finite-Elemente-Methode sowie numerischer Algorithmen, systematisch die Entwurfsvariablen so zu variieren, daß die Lösung in Hinblick auf vorgegebene Zielkriterien unter Berücksichtigung von Restriktionen in Form von Nebenbedingungen ein Optimum darstellt.

Es fehlen bislang Methoden und Strategien zur Optimierung stationärer und instationärer thermomechanisch belasteter Strukturen. Deren Entwicklung und Realisierung sind das Ziel dieser Arbeit. Sehr großer Wert wird dabei auf die Anwendung der entwickelten Methoden für Bauteile und Komponenten aus der industriellen Praxis gelegt.

1.2 Stand der Erkenntnisse

Faserverstärkte Werkstoffe sind in den 60er Jahren zuerst in der Luft- und Raumfahrtindustrie mit dem Ziel eingesetzt worden, durch ihre hohen spezifischen Steifigkeits- und Festigkeitseigenschaften Gewichtseinsparungen zu ermöglichen. Erst in den letzten Jahren weitete sich das Anwendungsfeld auf den Maschinenbau aus. KERSTIENS [1] und HERBERG [2] untersuchten den Einsatz von CFK im Werkzeugmaschinenbau und nennen neben der höheren statischen und dynamischen Steifigkeit vor allem die geringe Wärmedehnung als Einsatzkriterium zur Erhöhung der Arbeitsgenauigkeit.

Der Entwurf und die Dimensionierung faserverstärkter Bauteile wird zunehmend rechnergestützt durchgeführt. EFFING [3] stellt ein durchgängiges CAE-Konzept vor, das neben der Materialauswahl, der Fertigungssimulation und Methoden der Qualitätssicherung vor allem Dimensionierungswerkzeuge zur Verfügung stellt. BERCHTOLD und KLENNER [4] integrieren ein Strukturoptimierungssystem in ein CAD/CAM-System zum Entwurf und zur Fertigung von Bauteilen im Tapelegeverfahren. Eine Berücksichtigung fertigungstechnischer Restriktionen bei der Optimierung ist nicht realisiert.

Optimierung von Bauteilen aus faserverstärkten Werkstoffen

Die Optimierung von Bauteilen aus faserverstärkten Werkstoffen ist eine der schwierigsten und zugleich reizvollsten Aufgaben in der Strukturoptimierung, da die hohe Anzahl freier Entwurfsvariablen eine intuitive Laminatauslegung nahezu unmöglich macht. Erste Ansätze zur mathematischen Optimierung der Dicke einzelner Laminatschichten stammen von SCHMIT und FARSHI [5,6], STARNES und HAFTKA [7], NSHANIAN und PAPPAS [8], PARK [9] und anderen. WATKINS [10] zeigte, daß eine optimale Laminatauslegung mit höchstens 6 Schichten realisiert werden kann, so daß der Laminataufbau mit 12 Entwurfsvariablen vollständig beschrieben ist. MCKEOWN [11,12] führte erstmals eine simultane Optimierung der Dicken, Faserorientierungswinkel und der Anzahl der einzelnen Laminatschichten durch.

Einen anderen Weg gingen die gleichzeitig entwickelten Optimalitätskriterienmethoden. KHOT, VENKAYYA und BERKE [13] stellten 1975 eine Methode zur Gewichtsminimierung faserverstärkter Bauteile unter Verformungs- und Spannungsrestriktionen vor, die auf einem Optimalitätskriterium basiert. Optimalitätskriterien besitzen den Vorteil, daß sie zum Auffinden des Optimums auch bei einer großen Anzahl von Entwurfsvariablen eine geringe Anzahl von Iterationen benötigen. Dem steht jedoch der entscheidende Nachteil gegenüber, daß sie nur für eine bestimmte Problemstellung anwendbar sind und damit nicht so vielseitig eingesetzt werden können, wie die in dieser Arbeit verwendeten Methoden der Mathematischen Programmierung.

In einer 1984 vorgestellten Arbeit zur Optimierung ebener Flächentragwerke aus Faserverbundwerkstoff kommt ESCHENAUER [14] zu dem Schluß, daß die gleichzeitige Optimierung von Faserorientierungswinkeln und Schichtdicken in vielen Fällen nicht angebracht ist. Die hochgradig nichtlineare und nichtkonvexe Abhängigkeit des Materialgesetzes von den Faserorientierungswinkeln liefert abhängig vom Startvektor unterschiedliche lokal optimale Entwürfe. Vielmehr sollte sich die Wahl der Faserwinkel an den fertigungstechnischen Restriktionen orientieren.

Zur Einbeziehung thermoelastischer Kriterien in den Optimierungsprozeß findet sich 1976 eine erste Arbeit von ADELMAN und NARAYASWAMI [15], die das Optimalitätskriterium des Fully Stressed Design (FSD) auf thermoelastische Problemstellungen erweitern und auf die Gewichtsminimierung

einer Tragfläche anwenden. 1978 stellen ADELMAN, SAWYER und SHORE [16] eine Methode zur Gewichtsminimierung unter zeitvarianten Temperatur- und Festigkeitsrestriktionen vor. Das Verfahren wird zur Optimierung der Außenhaut eines Raumflugkörpers angewendet, die während des Wiedereintritts in die Erdatmosphäre einer zeitlich veränderlichen thermischen Last ausgesetzt ist. ESCHENAUER und FUCHS [17] beschreiben die Einbeziehung des Wärmeausdehnungsverhaltens bei der Optimierung von Zylinderschalen aus Faserverbundwerkstoff. Zur Strukturanalyse wird ein Differenzenverfahren eingesetzt, das die Berücksichtigung einer linearen Temperaturverteilung über der Zylinderschale erlaubt. Zur gleichzeitigen Minimierung von Gewicht und Verformungen werden Methoden der Multikriterienoptimierung eingesetzt. Die Optimierung des zeitabhängigen Materialverhaltens ist Gegenstand der Arbeit von POST [18]. Er untersucht den Einfluß des hydrothermischen und viskoelastischen Langzeitverhaltens auf den optimalen Entwurf faserverstärkter Platten.

Die Optimierung komplexer faserverstärkter Bauteile erfolgt ausschließlich unter Einsatz der Finite-Elemente-Methode [19,20]. WECK und FELDERMANN zeigen die Optimierung des Schlittens einer Hochgeschwindigkeitsschleifmaschine [21] und des Querbalkens eines Portalroboters [22]. Um im iterativen Optimierungsprozeß den Diskretisierungsfehler der FEM-Analyse zu verringern, werden adaptive Netzverfeinerungsstrategien eingesetzt [23,24]. WECK und NOTTEBAUM [25] beschreiben die Optimierung einer Felge unter Einsatz der adaptiven Netzverfeinerung mit zuletzt 1421 Schalenelementen. Fertigungstechnische Restriktionen des Wickelprozesses werden hier durch 'variable linking' berücksichtigt. MÄDER u.a. [26] behandeln die Optimierung von Antennenstrukturen aus CFK unter mehreren Zielen. WELLEN und HERTEL [27] beschreiben Anwendungen aus der Luft- und Raumfahrt, wie beispielsweise die Spannungsoptimierung eines CFK-Flügelkastens mit 4500 Freiheitsgraden und 294 Entwurfsvariablen sowie die Gewichtsminimierung des CFK-Seitenleitwerks eines Verkehrsflugzeuges.

Methoden und Strategien der mathematischen Optimierung

Die Entwicklung von Verfahren zur Strukturoptimierung begann in den späten 50er Jahren mit der Gewichtsminimierung einfacher Stabwerke. SCHMIT [28] gibt eine Übersicht über die mit der Rechnerentwicklung einhergegan-

gene stürmische Entwicklung der Optimierungsverfahren, die ganz besonders in Verbindung mit der Finite-Elemente-Methode heutzutage leistungsfähige Entwurfswerkzeuge darstellen [29,30].

Die effektive Optimierung der Faserorientierung wurde jedoch erst mit der Entwicklung leistungsfähiger Optimierungsverfahren und -algorithmen möglich. Das von POWELL [31,32] vorgestellte Sequential-Quadratic-Programming-Verfahren (SQP) zur nichtlinearen Optimierung erlaubt eine effektive Lösung hochgradig nichtlinearer Problemstellungen mit einer geringen Anzahl Strukturanalysen. Das Strukturoptimierungsproblem wird durch eine explizite quadratische Approximation der Zielfunktion und durch eine lineare Approximation der Restriktionen ersetzt. Der Algorithmus löst in jeder Iteration das Optimierungsproblem für dieses quadratische Subproblem. RAGSDALL [33] bescheinigt in einer Vergleichsstudie die überragende Leistungsfähigkeit der SQP-Algorithmen gegenüber anderen Verfahren für allgemeine nichtlineare Optimierungsprobleme.

Die 1979 von FLEURY [34] vorgestellte Duale Methode stellt einen leistungsfähigen Algorithmus zur Gewichtsminimierung unter verformungsabhängigen Restriktionen dar. Voraussetzung zu ihrer Anwendung ist eine konvexe Approximation der Ziel- und Restriktionsfunktionen. Die von FLEURY vorgeschlagene inverse Approximation erfüllt diese Voraussetzung und führt gleichzeitig zu einer Linearisierung des Entwurfsraumes. Er prägte damit den Begriff der Konvexen Programmierung. Die Weiterentwicklung führte zur gemischt inversen direkten Approximation [35] und schließlich zur 1987 von SVANBERG [36,37] vorgestellten Method of Moving Asymptotes, die heute eine weite Verbreitung gefunden hat. Eine weitere Eigenschaft der Dualen Methoden ist die Möglichkeit der Definition diskreter Entwurfsvariablen [38,39,40], die gerade bei der Optimierung faserverstärkter Werkstoffe dann von Nutzen ist, wenn aus fertigungstechnischen Gründen nur eine begrenzte Anzahl diskreter Faserorientierungen und Schichtdicken im Laminat vorhanden sein dürfen.

Die aufgeführten Optimierungsverfahren sind nicht ohne weiteres in der Lage, zeitvariante Entwurfskriterien zu verarbeiten. Vielmehr müssen äquivalente Funktionsformulierungen gefunden werden, die die Zeitabhängigkeit eliminieren. HAFTKA, GÜRDAL und KAMAT [41] stellen hierzu verschiedene Lösungsstrategien vor. Das von GRANDHI, HAFTKA, WATSON [42] und

GREENE [43] vorgeschlagene Critical-Point-Constraint-Verfahren stellt eine besonders leistungsfähige Strategie zur Lösung zeitvarianter Optimierungsprobleme dar.

Strukturanalyse

Die Finite-Elemente-Methode hat sich für die Strukturanalyse des thermischen und des mechanischen Verhaltens vor allem komplexer Strukturen im ingenieurwissenschaftlichen Bereich durchgesetzt [44-48]. Sie ist universell einsetzbar, und in Verbindung mit grafisch interaktiven Systemen zur Modellgenerierung und Ergebnisaufbereitung bietet sie ein effektives Werkzeug für den Entwurfsprozeß. Gleichzeitig liefert die Finite-Elemente-Methode eine stetig differenzierbare Beschreibung des Strukturverhaltens, mit deren Hilfe Strukturoptimierungsverfahren eine automatische Laminatauslegung durchführen können.

Der im Rahmen dieser Arbeit weiterentwickelte Ansatz eines gekrümmten dickwandigen Schalenelementes von AHMAD, IRONS und ZIENKIEWICZ [49] basiert auf einem reduzierten Volumenelement mit unabhängiger Neigungs- und Verschiebungsinterpolation. Das Element eignet sich besonders zur Berechnung doppelt gekrümmter dickwandiger Schalen- und Sandwichstrukturen aus Faserverbundwerkstoffen. Zur Berechnung von Temperaturverteilungen ist von SURANA und PHILLIPS [50] ein finites Schalenelement vorgeschlagen worden, das zu dem in [49] beschriebenen Element geometrisch kompatibel ist. Es läßt eine lineare Temperaturverteilung in Richtung der Schalendicke zu.

Grundlage zur Modellierung der orthotropen Materialeigenschaften faserverstärkter Flächentragwerke ist die klassische Laminattheorie [51-54]. Zur Implementierung des Materialmodells in die Finite-Elemente-Methode beschreiben YUNUS, KOHNKE und SAIGAL [55] sowie SEIDE, CHAUDHURI [56] Verfahren zur schichtenweisen Integration der Materialeigenschaften in finiten Schalenelementen. ROLFES [57] stellt ein thermisches Plattenelement für Faserverbundwerkstoffe vor, das jedoch nur eine lineare Temperaturverteilung in Richtung der Schalendicke zuläßt. Zur Berechnung von Temperaturverteilungen in mehrschichtig orthotropen allgemeinen Schalenstrukturen ist keine Literatur bekannt.

Sensitivitätsanalyse

Der Sensitivitätsanalyse kommt eine Schlüsselrolle in der Strukturoptimierung zu. Die partiellen Ableitungen derjenigen Funktionen, die das thermomechanische Verhalten der Struktur beschreiben, geben dem Optimierungsalgorithmus die Möglichkeit, den Entwurfsraum zu approximieren und anschließend das approximierte Problem zu optimieren. Die Qualität der Gradienteninformation spielt demnach eine wesentliche Rolle für das Gelingen der Optimierungsaufgabe. HAFTKA und ADELMAN [58] geben eine Übersicht über neuere Entwicklungen auf dem Gebiet der Sensitivitätsanalyse für statische und zeitvariante Optimierungsprobleme. In Verbindung mit der Finite-Elemente-Methode bietet sich neben der geschlossenen Ableitung der Systemgleichungen vor allem der semianalytische Ansatz an, bei dem die Koeffizientenmatrizen numerisch und die Gleichungen geschlossen abgeleitet werden. Die Methode ist effektiv und eignet sich zur Implementierung in bestehende Finite-Elemente-Systeme [59,60]. Die Berechnung transienter Gradienten für Wärmeübertragungsprobleme wird von HAFTKA [61] behandelt. Zur Berechnung von Gradienten für zeitvariante thermoelastische Problemstellungen mit der Finite-Elemente-Methode sind bisher keine Ansätze bekannt.

1.3 Zielsetzung

Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht die Entwicklung und Realisierung von Finite-Elemente-Strukturanalyse- und Optimierungsverfahren der Mathematischen Programmierung für das thermomechanische Verformungs- und Versagensverhalten mehrschichtig faserverstärkter Bauteile.

Zunächst wird ein Überblick über das Anwendungsspektrum der Strukturoptimierung faserverstärkter Werkstoffe gegeben. Anhand von Beispielen wird erläutert, wie Methoden der Strukturoptimierung zur Erzielung von faser- und fertigungsgerechten Konstruktionen eingesetzt werden können.

Für die Strukturanalyse faserverstärkter Bauteile mit der Finite-Elemente-Methode wird ein aus einem Volumenelement degeneriertes gekrümmtes Schalenelement entwickelt. Dieses Element ist in der Lage, dickwandige

mehrschichtige Laminat- und Sandwichstrukturen realitätsnah zu modellieren. Dieser Ansatz wird ebenfalls auf die Berechnung der Temperaturverteilung angewendet, denn für eine effektive Strukturanalyse ist es von Vorteil, geometrisch kompatible Elementansätze sowohl für die Wärmeübertragungs- als auch für die Verformungsanalyse zu verwenden. Der Elementansatz ermöglicht die Berechnung einer parabolischen Temperaturverteilung in Richtung der Schalendicke und trägt auf diese Weise dem anisotropen Wärmeleitungsverhalten mehrschichtiger, insbesondere symmetrisch aufgebauter Lamine, Rechnung.

Die für eine Optimierungsrechnung notwendige Bestimmung von Ableitungen der Ziel- und Restriktionskriterien nach den Entwurfsvariablen stellt einen weiteren Entwicklungsschwerpunkt der Arbeit dar. Sowohl für das Verformungsverhalten als auch für das Versagen unter stationärer und instationärer thermischer Last werden die notwendigen mathematischen Beziehungen entwickelt. Dabei haben Untersuchungen gezeigt, daß die durch eine Variation der Entwurfsvariablen veränderte Temperaturverteilung bei der Gradientenberechnung berücksichtigt werden muß.

Optimierungsprobleme komplexer faserverstärkter Bauteile mit thermoelastischen Auslegungskriterien erfordern einen hohen Analyseaufwand, so daß auch unter Einsatz leistungsfähiger Rechenanlagen die Anzahl der Iterationen möglichst gering sein sollte. Dies verlangt gerade wegen der hohen Nichtlinearität des Optimierungsproblems leistungsfähige Algorithmen, die eine hohe Konvergenzgeschwindigkeit aufweisen. Moderne Verfahren der Sequentiellen Quadratischen Programmierung und auch Duale Algorithmen mit leistungsfähigen Approximationsstrategien, wie der Method of Moving Asymptotes, werden in Hinblick auf die vorliegende Problemstellung eingesetzt, verglichen und einer Bewertung unterzogen. Außerdem wird gezeigt, daß die Erfüllung von Kriterien maximaler statischer Steifigkeit und minimaler thermischer Ausdehnung zu widersprüchlichen Auslegungen führt, so daß die Optimierung stets die Suche nach einer Kompromißlösung darstellt.

Die Optimierung instationärer thermomechanischer Problemstellungen, wie sie beispielsweise in Werkzeugmaschinen bei der Untersuchung zeitvarianter Umwelteinflüsse oder durch den Bearbeitungsprozeß auftreten, ist von großer praktischer Bedeutung. Die Optimierungsaufgabe stellt sich hier als Minimierung eines zeitabhängigen Zielkriteriums dar, unter der Bedingung,

daß alle instationären Nebenbedingungen über den gesamten betrachteten Zeitbereich erfüllt sind. Zur Behandlung instationärer Optimierungsprobleme müssen geeignete Strategien gefunden werden, damit sie der Lösung mit den zur Verfügung stehenden Optimierungsalgorithmen zugänglich gemacht werden können.

Die Strukturoptimierung mit der Finite-Elemente-Methode verlangt moderne Softwarelösungen, die die heute zur Verfügung stehenden Hardwareplattformen in ihrer Leistungsfähigkeit optimal nutzen. Im Rahmen dieser Arbeit werden Anforderungen an ein modernes Strukturoptimierungssystem hinsichtlich Leistungsfähigkeit, Benutzerfreundlichkeit und Anwendungssicherheit formuliert und eine Systemlösung vorgestellt, die in ein CAE-System eingebunden ist und dadurch eine grafisch interaktive Modellerstellung und Ergebnisaufbereitung bietet.

Die praxisgerechte Realisierung und die Leistungsfähigkeit der entwickelten Strukturanalyse- und Optimierungsverfahren sollen anhand zweier Anwendungsbeispiele aus der Automobil- und der Werkzeugmaschinenindustrie demonstriert werden.

2 Optimierung faserverstärkter Kunststoffe

2.1 Aspekte des fasergerechten Entwurfs

Durch den gezielten Einsatz moderner Hochleistungsfasern können Verbesserungen und Leistungssteigerungen erreicht werden, die mit herkömmlichen Materialien nicht möglich sind. Trotz der hohen Material- und Fertigungskosten sind dadurch oftmals wirtschaftlichere Lösungen möglich. Hohe spezifische Steifigkeiten und Festigkeiten und die geringe Wärmedehnung sowie die Möglichkeit der gezielten Gestaltung der Werkstoffeigenschaften durch Nutzung der Anisotropie demonstrieren die Überlegenheit faserverstärkter Kunststoffe gegenüber Metallen [62]. Bild 2.1 stellt die spezifischen Werkstoffeigenschaften quasiisotrop und unidirektional verstärkter Kunststoffe einander gegenüber und bringt damit zum Ausdruck, daß nur

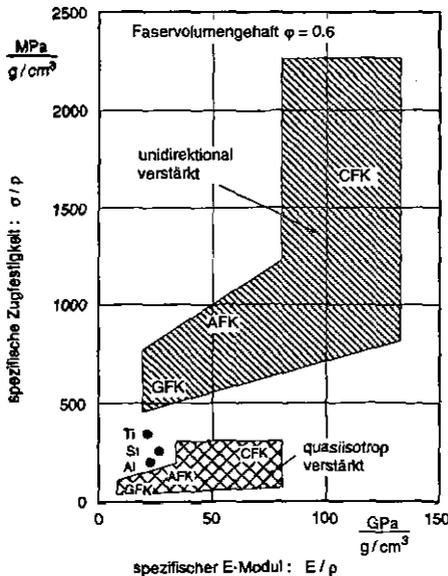


Bild 2.1: Spezifische mechanische Kenngrößen faserverstärkter Werkstoffe

durch eine gezielte Laminatauslegung und Anpassung des Laminataufbaus an den vorliegenden thermomechanischen Verzerrungs- und Spannungszustand im Bauteil das Potential dieser Werkstoffe genutzt werden kann. Die in Bild 2.2 und 2.3 dargestellten Abhängigkeiten der thermomechanischen Kenngrößen von der Faserorientierung verdeutlichen, in welchen Bereichen diese Werte variiert werden können.

Bei der Substitution einzelner Baugruppen aus Metall durch eine Faserverbundkonstruktion muß vielfach von einem völlig neuen Konzept ausgegangen werden. Die Vermeidung konzentrierter Kräfteinleitungen sowie eine fasergerechte Fertigungs- und Fügetechnik verlangen im allgemeinen eine völlige Neukonstruktion der vorliegenden Lösung aus Metall. Darüber hinaus darf nicht vernachlässigt werden, daß die Werkstoffeigenschaften eines Laminates erst bei der Fertigung entstehen. Fertigungstoleranzen bezüglich der Faserorientierung und des Faservolumengehaltes sowie Luft einschüsse und Imperfektionen führen zur Abminderung der unter Idealvoraussetzungen ermittelten Materialkennwerte.

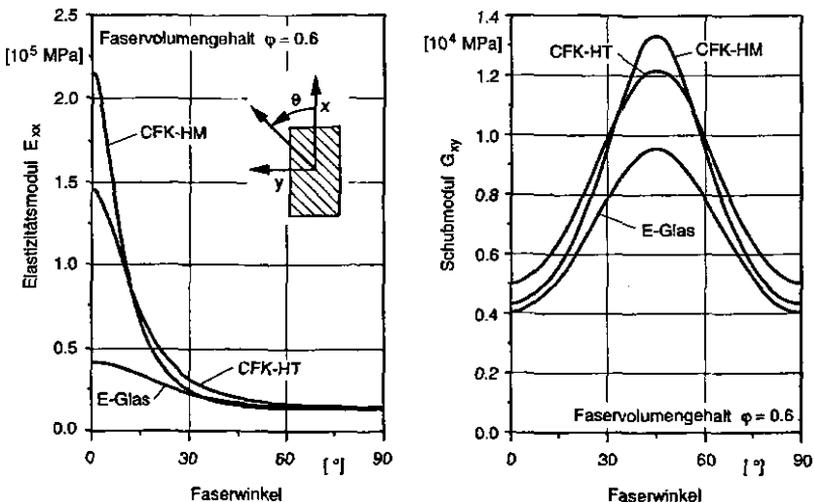


Bild 2.2: Elastizitäts- und Schubmodul in Abhängigkeit vom Faserwinkel für CFK-HT, CFK-HM und GFK

Die belastungsgerechte Auslegung faserverstärkter Kunststoffe erfordert aufgrund ihrer spezifischen Eigenschaften die Berücksichtigung des viskoelastischen Materialverhaltens der Matrix sowie hygrothermischer Umgebungseinflüsse auf das zu dimensionierende Bauteil. Unterschiedliche hygrothermische Ausdehnungskoeffizienten von Faser und Matrix führen zu Spannungen innerhalb des Verbundwerkstoffes, die die Restfestigkeit erheblich herabsetzen können. Im Autoklaven unter hoher Temperatur ausgehärtete

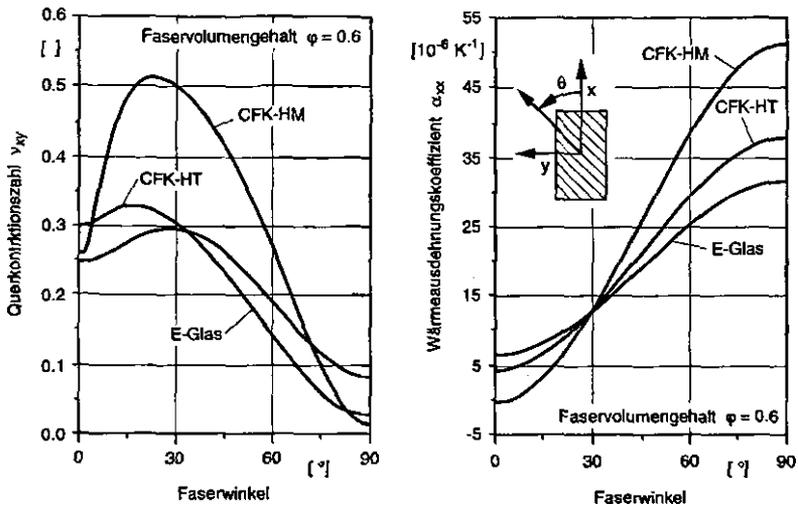


Bild 2.3: Querkontraktionszahl und Wärmeausdehnungskoeffizient in Abhängigkeit vom Faserwinkel für CFK-HT, CFK-HM und GFK

te Bauteile besitzen nach der Abkühlung auf Einsatztemperatur einen Restspannungszustand, der sich durch Feuchtigkeitsaufnahme der Matrix sowie durch viskoelastische Relaxationseffekte nach einer gewissen Zeit jedoch abbaut. Der kombinierte Einfluß von Feuchte und Temperatur bewirkt darüber hinaus eine Herabsetzung der Matriceigenschaften [54,63,64]. Oberhalb der Glasübergangstemperatur kommt es zu einer drastischen Abnahme des Schubmoduls, der Schubfestigkeit und damit aller matrixorientierten Eigenschaften des Verbundes (Bild 2.4). Die Glasübergangstemperatur liegt bei gebräuchlichen Epoxydharzsystemen zwischen 80° und 180° C .

Dem hygrothermischen und viskoelastischen Langzeitverhalten der Faser-verbundwerkstoffe steht das thermomechanische Kurzzeitverhalten gegenüber. Unter Berücksichtigung geeigneter Rand- und Anfangsbedingungen kann für die Berechnung thermomechanischer Verformungen, Verzerrungen und Spannungen das Langzeitverhalten als konstant angesehen werden. Für die Laminatberechnung ist in diesem Fall ein linearelastisches Materialgesetz zulässig [65].

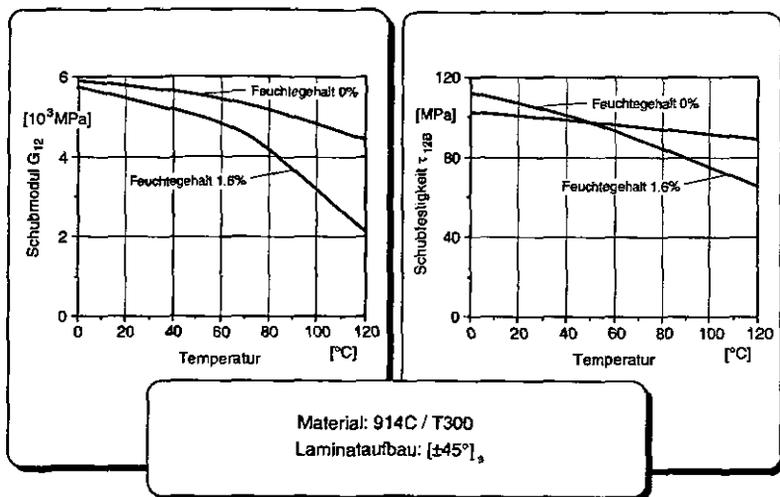


Bild 2.4: Gemessene hygrothermische Eigenschaften kohlenstofffaserverstärkter Kunststoffe (nach: [63])

Die fasergerechte Auslegung stellt hohe Anforderungen an den Konstrukteur. Optimierungsverfahren verfolgen nicht das Ziel, ihn von der kreativen Aufgabe der Produktgestaltung zu befreien, können ihn aber bei der Festlegung der großen Anzahl freier Entwurfsvariablen, besonders bei der Auslegung des Laminataufbaus, effektiv unterstützen.

2.2 Optimierungsverfahren in der mechanischen Konstruktion

Die Strukturoptimierung bietet die Möglichkeit, den iterativen Produktentwicklungsprozeß zu automatisieren. Besonders bei der Auslegung und Dimensionierung von Bauteilen und Baugruppen können Optimierungsverfahren zusammen mit Strukturanalyseverfahren, wie der Finite-Elemente-Methode, zu wesentlichen Verbesserungen der Produkteigenschaften beitragen; aber auch andere Kriterien bis hin zur Minimierung der Fertigungskosten können Gegenstand einer interdisziplinären Optimierung sein [66]. Insbesondere Restriktionen hinsichtlich des Fertigungsverfahrens und der Bauteilgestaltung sind als Nebenbedingungen während des Optimierungsprozesses zu berücksichtigen.

Bild 2.5 illustriert, daß Optimierungsverfahren sowohl zur Auslegung des Grob- als auch des Feinentwurfs eingesetzt werden können [67]. Die Vordimensionierung des Grobentwurfs hat die Aufgabe der Optimierung des globalen Strukturverhaltens, insbesondere des Gewichtes und des Last-Verfor-

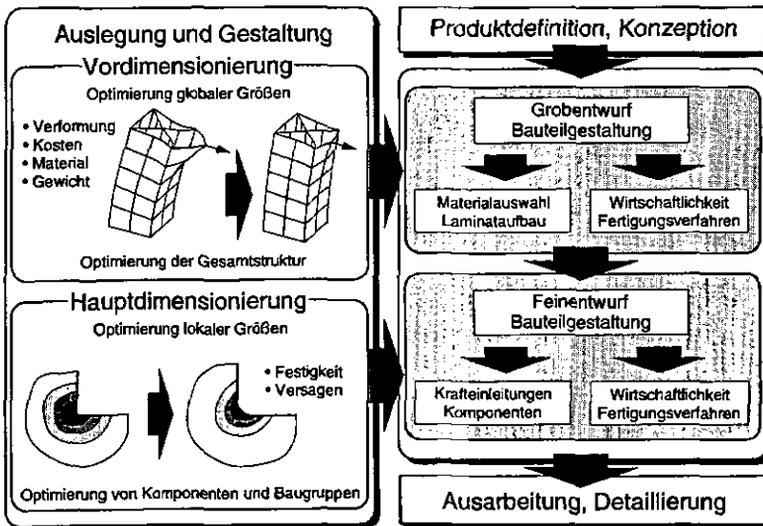


Bild 2.5: Entwurf und Auslegung von Bauteilen aus faserverstärkten Kunststoffen

mungs-Verhaltens. Es erfolgt eine Festlegung der zu verwendenden Faser- und Matrixmaterialien sowie der zum Einsatz kommenden Fertigungs-, Bearbeitungs-, Füge- und Montageverfahren. Ziel der anschließenden Hauptdimensionierungsphase ist in erster Linie die Optimierung von Baugruppen und Komponenten. Die Optimierung des komplexen Versagensverhaltens faserverstärkter Werkstoffe unter Verwendung eines wesentlich feineren Strukturmodells spielt in dieser Konstruktionsphase eine große Rolle.

Eine weitere Anwendung der Strukturoptimierung ist die Wertanalyse eines bereits eingesetzten Bauteils. Ausgehend von der vorliegenden Lösung, wird das Optimierungspotential ermittelt, um gezielt Verbesserungsvorschläge machen zu können.

2.3 Fertigungstechnische Restriktionen

Die starke Abhängigkeit der realisierbaren Faserorientierungswinkel und Schichtdicken vom verwendeten Fertigungsverfahren macht es notwendig, fertigungstechnische Restriktionen bei der Suche nach der optimalen Laminatauslegung zu berücksichtigen. **Bild 2.6** stellt die für die Herstellung langfaserverstärkter Bauteile eingesetzten Fertigungsverfahren den fertigungsbedingten Möglichkeiten der Variation des Schichtaufbaus gegenüber. Die wichtigsten Verfahren werden hinsichtlich der fertigungstechnischen Restriktionen im folgenden diskutiert.

Handlaminieren

Das Handlaminieren ist das älteste Verfahren zur Fertigung von faserverstärkten Bauteilen. Es hat auch heute noch immer Bedeutung bei der Herstellung komplexer Bauteile in geringen Stückzahlen. Verarbeitet werden in erster Linie Bänder, Gewebe, Gelege und Geflechte. Das Verfahren läßt nahezu beliebige Faserorientierungswinkel und Laminataufbauten zu. Lediglich die Drapierbarkeit der verwendeten textilen Halbzeuge stellt eine Restriktion dar, die jedoch mit dem von WULFHORST und HÖRSTING [68] vorgestellten rechnerunterstützten System simuliert werden kann.

	Faserhalbzeug			Bauteilform				Variationsmöglichkeiten			Fertigungs-genauigkeit	
	Faden	Band	Gewebe	Rotationsbauteil	Schale	strangförmig	komplex	Schichtaufbau	Faserorientierung	Schichtdicken	Form	Faserorientierung
Handlaminiere	—	●	●	◐	●	●	●	●	●	●	○	○
Wickeln	●	●	—	●	◐	—	○	◐	◐	●	◐	●
Flechten	●	—	—	●	○	●	◐	◐	◐	●	◐	●
Tapelegen	—	●	—	◐	●	◐	○	●	◐	●	◐	◐
Tow-Placement	●	—	—	◐	●	◐	◐	●	●	●	◐	●
RTM	○	◐	●	○	●	○	●	●	◐	●	●	○
Pultrusion	●	—	—	—	—	●	—	—	—	—	●	●

● ideal ◐ geeignet ○ bedingt geeignet — nicht geeignet

Bild 2.6: Klassifikation von Fertigungsverfahren für langfaserverstärkte Kunststoffe hinsichtlich fertigungstechnischer Restriktionen

Roboter-gesteuertes Tapelegen

Das Tapelegeverfahren eignet sich zur roboter-gesteuerten Belegung flächiger Bauteile mit leicht gekrümmten und abwickelbaren Oberflächen [69,70]. Vorimprägnierte Bänder werden mit Hilfe eines Legekopfes auf einer Form exakt und reproduzierbar abgelegt. Ein Formmanipulator kann eingesetzt werden, um eine bessere Zugänglichkeit der meist sehr großen Legeköpfe zu gewährleisten oder um eine 360°-Belegung zu ermöglichen.

Ein Drapieren der Bänder ist nur in begrenztem Maße möglich. Eine Vorhersage der natürlichen Bahnen, entlang derer die Bänder faltenfrei abgelegt werden können und damit die fertigungstechnische Realisierbarkeit komplexer Bauteile, ist letztlich nur durch eine rechner-gestützte Simulation des Tapelegeprozesses möglich [4,69]. Die Entwicklung von Legeköpfen zur Einzelfadenablage (tow placement) umgeht das Problem der eingeschränkten Drapierbarkeit der Tapes, so daß die Forderung nach Ablage auf natürlichen Bahnen hier keine Rolle spielt.

Wickeln

Hohlkörper, aber auch plattenförmige Bauteile lassen sich im Wickelverfahren herstellen. Durch die Verwendung mehrachsiger gesteuerter Fadenaugen und Manipulatoren zur Bewegung des Wickelkerns ist auch die Bewicklung komplexer Geometrien möglich [71]. Um ein Abrutschen der Fäden auf dem konvexen Kern zu vermeiden, muß der Faden auf einer geodätischen Linie abgelegt werden. Für rotationssymmetrische Bauteile wird die geodätische Ablage durch die Bedingung von CLAIRAUT [72] beschrieben, die den rutschfreien Faserwinkel θ in Abhängigkeit vom Kernradius r angibt

$$r \sin \theta = r_{90^\circ} = \text{const.} \quad (2.1)$$

Restriktionen bezüglich der Schichtdicke ergeben sich aus der Kontinuitätsbedingung in Abhängigkeit vom Faserorientierungswinkel und dem Kernradius.

Die Einbeziehung fertigungstechnischer Restriktionen als Nebenbedingung bei der Optimierung soll anhand einer gewickelten kegelförmigen und tor-

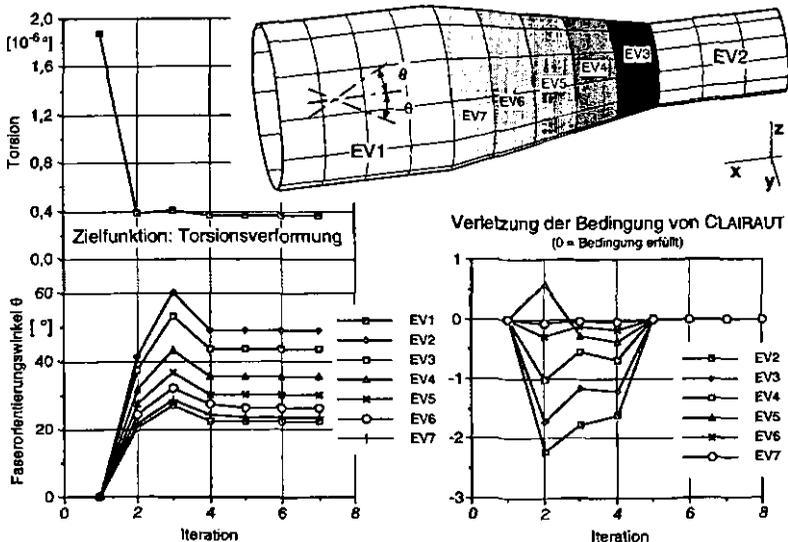


Bild 2.7: Optimierung der Faserorientierung einer torsionsbelasteten kegelförmigen CFK-Welle

sionsbelasteten Welle aus glasfaserverstärktem Kunststoff demonstriert werden. Der für eine steifigkeitsoptimale Welle geltende Faserwinkel von $\pm 45^\circ$ kann auf dem kegelförmigen Stück nicht eingehalten werden, wenn die Fasern rutschfrei abgelegt werden sollen. Vielmehr muß unter fertigungstechnischen Gesichtspunkten ein Kompromiß gefunden werden, der der CLAIRAUT'schen Bedingung genügt.

Die Welle ist in 7 Entwurfsvariablen unterteilt, in denen der Faserwinkel θ zwischen 0° und $\pm 60^\circ$ variieren kann. Als Ziel der Optimierung wurde die minimale Torsionsverformung formuliert, als Nebenbedingung die Einhaltung der Bedingung von CLAIRAUT für alle Entwurfsvariablen gefordert. Das Ergebnis der Optimierung zeigt Bild 2.7. Ausgehend von einem auf die x-Achse bezogenen Faserwinkel von 0° stellen sich, abhängig vom Radius der Welle, Faserwinkel zwischen $\pm 22^\circ$ und $\pm 48^\circ$ ein. Nach der fünften Iteration ist für alle Entwurfsvariablen die Bedingung von CLAIRAUT bei einer Abnahme der Verformung um 70% gegenüber dem Startentwurf erfüllt. Das Beispiel zeigt, daß eine sinnvolle und fertigungstechnisch umsetzbare Entwurfsgenerierung mit Optimierungsverfahren möglich ist und daß besonders bei der Optimierung faserverstärkter Werkstoffe eine Berücksichtigung fertigungstechnischer Restriktionen notwendig ist.

Flechten

Das direkte Beflechten von Rotationsbauteilen [72] bietet gegenüber dem Wickeln eine größere Flexibilität bezüglich der realisierbaren Faserorientierungswinkel. Durch die Verflechtung der Fasern wird eine bessere Haftung erreicht ($\mu \leq 0.5$). Dadurch ist eine Variation des Flechtwinkels entlang der Kernachse in gewissem Maße möglich, so daß in diesem Falle der optimale Faserwinkel von $\theta = \pm 45^\circ$ auf einer torsionsbelasteten kegelförmigen Welle fertigungstechnisch realisiert werden könnte. Zur Berechnung möglicher Faserorientierungswinkel kann die $\tan\beta$ -Methode [73] eingesetzt werden. Sie erlaubt eine Berechnung der rutschfreien Fadenablage in Abhängigkeit vom Reibungskoeffizienten μ .

2.4 Mathematische Modellbildung

Für den Einsatz mathematischer Optimierungsverfahren müssen sowohl die Anforderungen als auch Zustand und Verhalten der Struktur quantifizierbar und in Form mathematisch beschreibbarer stetig differenzierbarer funktionaler Zusammenhänge vorliegen. Die mathematische Beschreibung des thermomechanischen Verhaltens liegt in Form eines Strukturmodells vor. Bei interdisziplinären Optimierungsaufgaben kommen weitere Modelle hinzu, beispielsweise das Modell einer Fertigungssimulation.

Wie in **Bild 2.8** erläutert, definiert das Optimierungsmodell die Optimierungsaufgabe und bezieht sich dabei auf das Strukturmodell sowie auf alle weiteren Simulationsmodelle. Neben der Definition des Optimierungsziels und der Entwurfsvariablen ist die Spezifikation von Restriktionen als Nebenbedingungen von zentraler Bedeutung, da sie ein Optimierungsproblem meist erst vollständig beschreiben. Optimierungsziel und Restriktionen sind Funktionen der Entwurfsvariablen, die innerhalb vorgegebener Grenzen variiert werden. Die Optimierungsaufgabe läßt sich mathematisch folgendermaßen formulieren:

Minimiere die Zielfunktion

$$\min f(\mathbf{X})$$

unter Berücksichtigung der Restriktionsfunktionen

$$h_j(\mathbf{X}) = 0 \quad j = 1, m_h \quad (2.2)$$

$$g_j(\mathbf{X}) \geq 0 \quad j = 1, m_g$$

und den unteren bzw. oberen Grenzen der Entwurfsvariablen

$$X_i^u \leq X_i \leq X_i^o \quad i = 1, n$$

Die grafische Darstellung des Optimierungsproblems in Form eines Entwurfsraumes zeigt **Bild 2.9** am Beispiel einer allseitig gelenkig gelagerten faserverstärkten Platte. Ziel der Optimierung ist die Minimierung der Verformung am Kraftangriffspunkt; Faserorientierung und Schichtdicke der Platte sind als Entwurfsvariablen definiert. Der Entwurfsraum wird begrenzt durch die unteren und oberen Grenzen der Entwurfsvariablen. Es ist ersichtlich, daß ein globales Minimum der Verformung für eine Faserorientierung

von $\pm 90^\circ$ existiert. Ein weiteres lokales Minimum existiert für eine Faserorientierung von 0° . Die zur Anwendung kommenden Optimierungsverfahren sind jedoch nicht in der Lage, zwischen lokalen und globalen Optima zu unterscheiden. Nur für den Fall des konvexen Entwurfsraums ist garantiert, daß ein einziges globales Optimum existiert. Das Beispiel zeigt folglich, daß eine sorgfältige Auswahl der Grenzen erforderlich ist, um mehrere lokale Optima nach Möglichkeit auszuschließen.

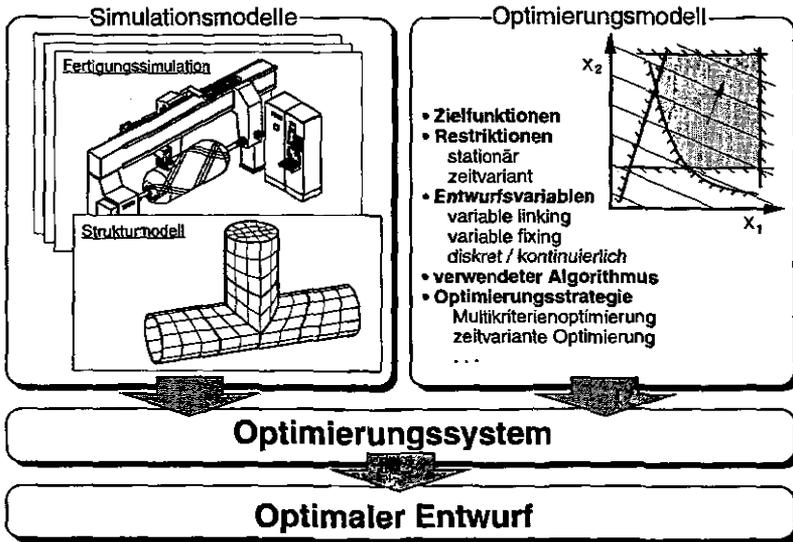


Bild 2.8: Mathematische Modellbildung im Optimierungsprozeß

Definition des Optimierungsziels und der Restriktionen

Umfangreiche Entwurfsaufgaben erfordern die Optimierung hinsichtlich verschiedener Ziel- und Restriktionskriterien. Die Aufgabenstellung der gleichzeitigen Erfüllung mehrerer Ziele führt auf ein Vektoroptimierungsproblem, das mit Hilfe einer Multikriterienstrategie gelöst wird, bei dem statt einer mehrere Zielfunktionen vorliegen und eine Kompromißlösung angestrebt werden muß. Oft ist es jedoch sinnvoller, das wichtigste Kriterium als Hauptziel auszuwählen und alle anderen Anforderungen als Restriktionen zu formulieren. Die mathematischen Eigenschaften der Ziel- und Re-

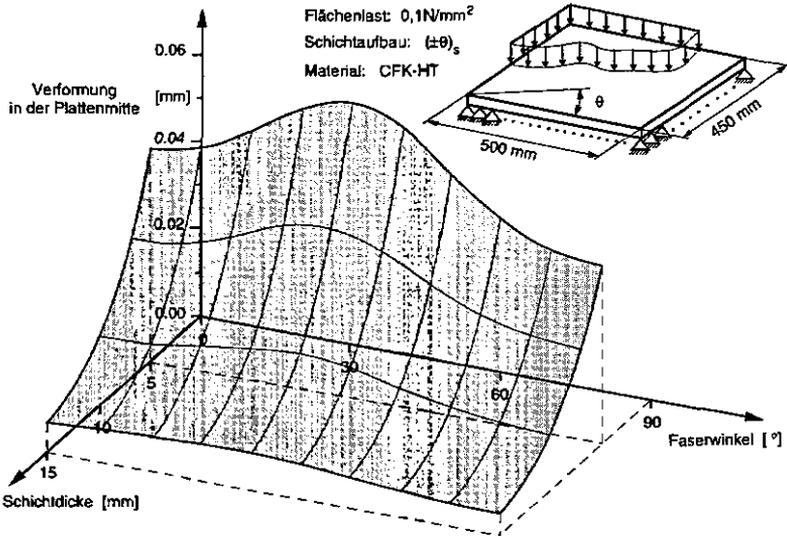


Bild 2.9: Entwurfsraum einer allseitig gelenkig gelagerten faserverstärkten Platte unter Flächenlast

striktionsfunktionen beeinflussen in starkem Maße die Auswahl der Optimierungsstrategie sowie eines geeigneten Optimierungsverfahrens. Besitzt das Optimierungsproblem mehr als ein Optimum, ist der Entwurfsraum nichtkonvex. In diesem Fall ist das Optimierungsergebnis vom Startentwurf abhängig.

Definition der Entwurfsvariablen

Der Laminataufbau eines faserverstärkten Bauteils wird von zwei Entwurfsvariablen pro Schicht (Faserorientierung und Schichtdicke) bestimmt. Die sich ergebende große Anzahl freier Entwurfsvariablen macht eine sorgfältige Definition und damit eine Einschränkung der Dimension des Entwurfsraumes erforderlich. Häufig können schon bei der Auswahl der Entwurfsvariablen fertigungstechnische Gegebenheiten berücksichtigt werden. Durch 'variable linking' ist es möglich, eine Gruppierung einzelner Elemente zu einer Entwurfsvariable zusammenzufassen, die einen gemeinsamen Laminataufbau annehmen sollen. Zur Realisierung eines symmetrischen Laminatauf-

baus ist es möglich, im Laminat gegenüberliegende Schichten einer gemeinsamen Entwurfsvariable zuzuordnen. 'Variable fixing' hingegen ermöglicht das Einfrieren von Entwurfsvariablen, die nicht Gegenstand der Optimierung sein sollen.

Wird das Optimierungsproblem als reine Schichtdickenoptimierung formuliert, kann ein Laminataufbau als Startlösung gewählt werden, der sämtliche mögliche Faserorientierungen enthält. Der optimale Schichtaufbau enthält dann nur noch diejenigen Schichten, deren Faserorientierungen zur optimalen Auslegung beitragen. Diese Vorgehensweise kann als diskretes Optimierungsproblem bezüglich der Faserorientierungen und als kontinuierliches Optimierungsproblem bezüglich der Schichtdicken interpretiert werden. Nachteilig bei diesem Ansatz ist jedoch, daß die vorher festgelegte Schichtfolge nicht variiert wird. Dieser Nachteil wird umgangen, wenn unter Einsatz geeigneter Optimierungsverfahren [39] diskrete Sequenzen sowohl für Schichtdicken als auch für Faserorientierungen zugelassen werden. Der diskrete Entwurfsraum wird dann zu einer Punktemenge reduziert.

Die Formulierung des Optimierungsproblems erfordert ein hohes Maß an Erfahrung des Konstrukteurs, der durch eine sorgfältige Optimierungsmodellbildung alle Aspekte seines Entwurfes in den Optimierungsprozeß einfließen lassen muß. Die geschickte Formulierung des Optimierungsziels und aller zu berücksichtigenden Nebenbedingungen sowie die fertigungstechnisch sinnvolle Unterteilung des Bauteils in Entwurfsvariablen sind wesentlich für den erfolgreichen Einsatz numerischer Strukturoptimierungsverfahren.

3 Thermoelastische Struktur- und Sensitivitätsanalyse

Für die Analyse komplexer Bauteile ist die Finite-Elemente-Methode ein etabliertes und universell einsetzbares Werkzeug, das sich in idealer Weise zur Anwendung im Rahmen der Strukturoptimierung eignet; denn es wird ein mathematisches Modell zur Verfügung gestellt, das ein stetig differenzierbares Verhalten der vorliegenden Struktur beschreibt. Deshalb ist es möglich, die partiellen Ableitungen des Strukturverhaltens nach den Entwurfsvariablen zu berechnen, die die Anwendung besonders leistungsfähiger und schnell konvergierender Optimierungsverfahren erlauben. Bild 3.1 stellt den Ablauf einer thermoelastischen Finite-Elemente-Analyse dar. Ausgehend von einem Finite-Elemente-Modell, wird zunächst eine Temperaturverteilung aufgrund thermischer Lasten und Randbedingungen berechnet. Die Bestimmung der meist nur ungenau zu ermittelnden Wärmeübergangszahlen kann mit gemessenen Temperaturwerten validiert werden [74]. Die Tempe-

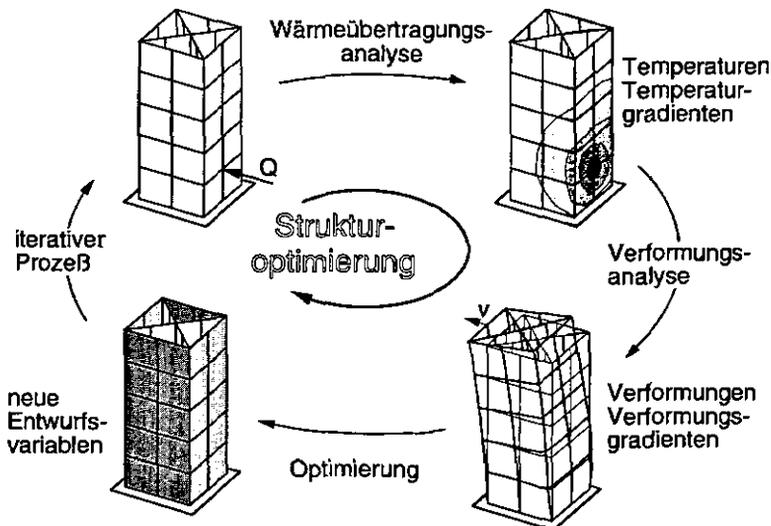


Bild 3.1: Teilschritte der thermoelastischen Struktur- und Sensitivitätsanalyse mit der Finite-Elemente-Methode

raturen sind Grundlage der anschließenden Verformungs- und Spannungsrechnung unter Verwendung desselben Finite-Elemente-Geometriemodells.

Ausgangspunkt der Methode ist ein Variationsprinzip, das Prinzip der virtuellen Arbeit oder ein Prinzip des gewichteten Residuums, mit dessen Hilfe die Diskretisierung eines Kontinuums in ein Netz finiter Elemente mit Knoten als Stützstellen durchgeführt wird. Die das Problem beschreibenden Differentialgleichungen werden in ein lineares Gleichungssystem umgewandelt, dessen *konstante Koeffizienten* die gesuchten Funktionswerte an den Knoten darstellen. Die Anwendung der Matrizenalgebra und eine elementweise schematisierte Abarbeitung der Struktur begünstigen eine effektive Implementierung der Finite-Elemente-Methode auf Rechenanlagen. Möglichkeiten der grafisch interaktiven Modellerstellung und Ergebnisaufbereitung erleichtern dem Ingenieur die Anwendung, die Vermeidung von Fehlern bei der Modellerstellung sowie die Interpretation der Ergebnisse.

3.1 Schalenelement für mehrschichtig orthotrope Flächentragwerke

Faserverbundwerkstoffe werden überwiegend in Flächentragwerken eingesetzt, die aufgrund ihrer vielfältigen Formgebungsmöglichkeiten meist gekrümmte Oberflächen besitzen. Darüber hinaus bestehen sie überwiegend aus dickwandigen Laminaten oder Sandwichstrukturen, auf die eine Theorie dünner Schalen nicht angewendet werden kann. Deshalb wurde eine Schalenformulierung gewählt, die für isotrope Werkstoffe erstmals von AHMAD, IRONS und ZIENKIEWICZ [49] vorgestellt worden ist. Es handelt sich um ein isoparametrisches Schalenelement, das aus einem Volumenelement hergeleitet wird und sich besonders für die Modellierung dicker gekrümmter Schalen- und Sandwichstrukturen eignet.

3.1.1 Geometrische Elementbeschreibung und numerische Integration

Eine effektive Analyse des thermoelastischen Verhaltens erfordert sowohl für die Temperaturberechnung als auch für die Berechnung des mechanischen Verhaltens die Verwendung identischer geometrischer Elementansätze, da die Verwendung gleicher mathematischer Ansätze eine einfache Im-

plementierung und Integration von Temperatur- und Verformungsberechnung ermöglicht.

Isoparametrische finite Elemente zeichnen sich dadurch aus, daß ihre Elementtopologie in dem durch ein natürliches Koordinatensystem aufgespannten Parameterraum definiert und das Element anschließend mit Hilfe einer isoparametrischen Abbildungsvorschrift in den euklidischen Raum transformiert wird (Bild 3.2). Die dazu verwendeten Formfunktionen N_i erlauben die Beschreibung des funktionalen Zusammenhangs zwischen dem euklidischen- und dem Parameterraum.

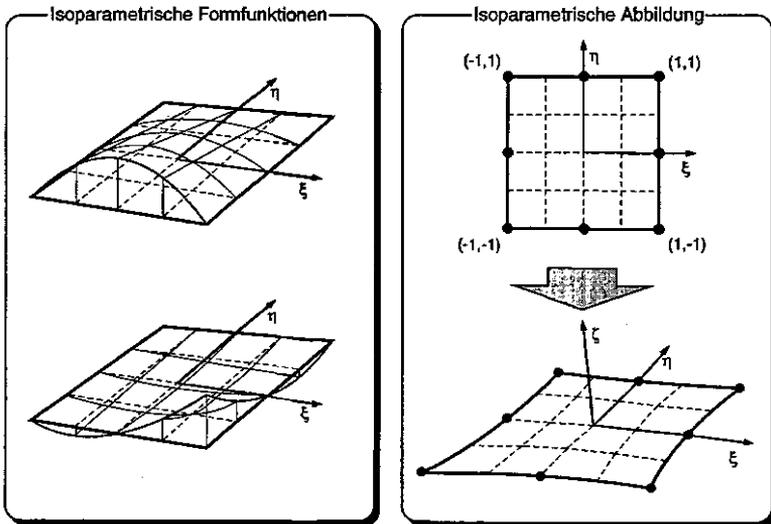


Bild 3.2: Formfunktionen des achtknotigen Schalenelementes und isoparametrische Abbildung

Bild 3.3 zeigt die Entwicklung des Schalenelementes aus einem zwanzigknotigen hexaederförmigen Volumenelement. Unter der Voraussetzung, daß die Elementdicke konstant ist und die Elementkanten in ζ -Richtung durch Geraden dargestellt werden, kann durch Einführen des Normalenvektors \mathbf{V}^n eine Reduzierung der geometrischen Beschreibung nach folgendem Ansatz vorgenommen werden

$$\begin{aligned}
 x(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^q N_i(\xi, \eta) x_i + \frac{t}{2} \zeta \sum_{i=1}^q N_i V_{xi}^n \\
 \hat{y}(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^q N_i(\xi, \eta) y_i + \frac{t}{2} \zeta \sum_{i=1}^q N_i V_{yi}^n \\
 z(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^q N_i(\xi, \eta) z_i + \frac{t}{2} \zeta \sum_{i=1}^q N_i V_{zi}^n
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Zur Darstellung des Elementes reichen dann acht Knoten in der Schalenmittelfläche aus. In Richtung der Schalenebene handelt es sich weiterhin um einen parabolischen Ansatz, während senkrecht dazu ein linearer Ansatz bei konstanter Elementdicke vorliegt.

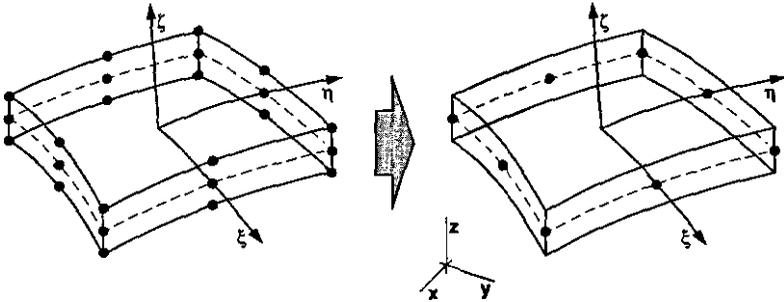


Bild 3.3: Geometrische Beschreibung eines finiten gekrümmten Schalenelementes zur Berechnung von Temperaturen und Verformungen

Bild 3.4 zeigt die Vorgehensweise bei der Modellierung der *thermischen* und *mechanischen* Materialeigenschaften eines faserverstärkten Werkstoffs. Falls keine experimentell ermittelten effektiven Materialkenngrößen der einzelnen Schichten vorliegen, können sie mit einer geeigneten mikromechanischen Theorie [75-79] aus den Materialeigenschaften der Bestandteile Faser und Matrix berechnet werden. Anschließend werden diese Materialkenngrößen um den Faserwinkel der Schicht in ein gemeinsames auf den Verbund bezogenes Koordinatensystem gedreht und die Verbundeigenschaften durch numerische Integration über das Elementvolumen berechnet.

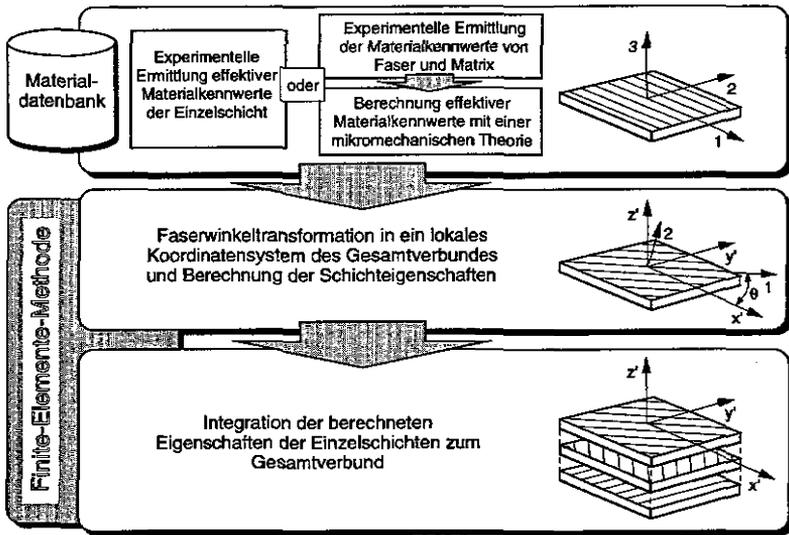


Bild 3.4: Vorgehensweise bei der Berechnung von Materialeigenschaften faserverstärkter Kunststoffe für die Finite-Elemente-Methode

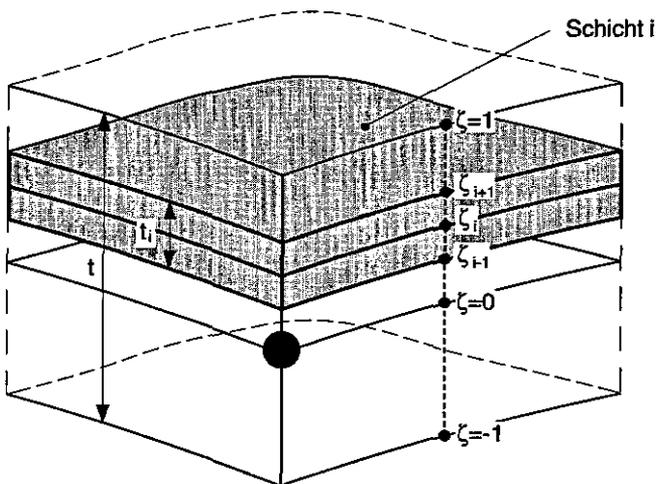


Bild 3.5: Schichtenweise Integration in gekrümmten Schalenelementen

Die numerische Integration findet im natürlichen Koordinatensystem statt. In der Elementebene (ξ, η) kommt das Gauß-Verfahren zur Anwendung; in der ζ -Richtung hat die Verwendung einer summierten Simpson-Regel den Vorteil, daß die Integrationspunkte im Gegensatz zum Gauß-Verfahren auf den Schichtgrenzen liegen und dadurch eine spätere Extrapolation der Dehnungen in die Schichtgrenzen überflüssig wird. Wie in **Bild 3.5** dargestellt, müssen die ζ -Koordinaten der Schichtgrenzen im natürlichen Koordinatensystem bestimmt werden. Anschließend erfolgt die Summation der einzelnen Schichtanteile. Die summierte Simpson-Regel für eine von ζ abhängige Funktion lautet

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta_1} f(\zeta) d\zeta = \sum_{i=1}^1 \frac{\zeta_i - \zeta_{i-1}}{6} \left(f(\zeta_{i-1}) + 4f\left(\frac{\zeta_i - \zeta_{i-1}}{2}\right) + f(\zeta_i) \right) \quad (3.2)$$

3.1.2 Koordinatensysteme zur Definition gerichteter Materialeigenschaften

Die Definition orthotroper und geschichteter Werkstoffeigenschaften in finiten Elementen macht neben dem globalen Koordinatensystem die Definition der in **Bild 3.6** dargestellten lokalen Koordinatensysteme notwendig.

Die Definition orthotroper Materialeigenschaften der faserverstärkten Einzelschicht bezieht sich auf ein kartesisches Materialkoordinatensystem, dessen 1-Achse mit der Faserrichtung zusammenfällt, dessen 2-Richtung senkrecht zur Faserrichtung in der Schichtebene liegt und dessen 3-Richtung normal zur Schichtebene orientiert ist. Die Achsen des Materialkoordinatensystems bilden somit die Hauptachsen des orthotropen Materialmodells. Spannungen und Dehnungen werden im Materialkoordinatensystem definiert, um unmittelbar die für die Versagensberechnung maßgeblichen Spannungswerte ohne eine zusätzliche Transformation zur Verfügung stellen zu können.

Das lokale Schalenkoordinatensystem (x', y', z') ist das Bezugssystem zur Berechnung der Verbundeigenschaften. Die 3-Richtung des Materialkoordinatensystems stimmt stets mit der normal zur Schalenebene orientierten z' -Richtung überein, so daß diese beiden Systeme durch eine Drehung um die z' -Achse ineinander überführt werden können. Die Materialmatrizen sämtli-

cher Einzelschichten eines Verbundes werden durch Drehung um den Faserorientierungswinkel in das lokale Schalenkoordinatensystem transformiert.

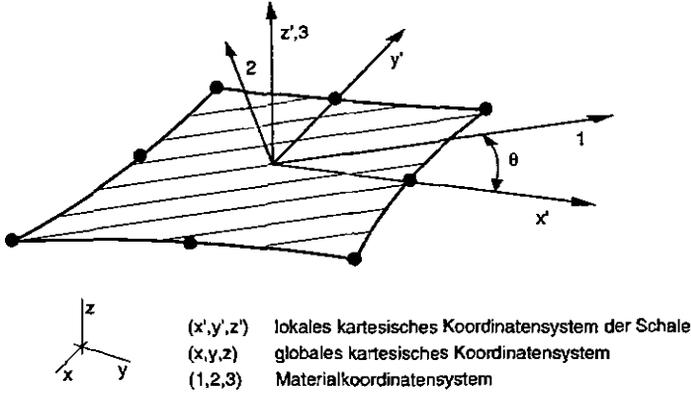


Bild 3.6: Koordinatensysteme zur Definition orthotroper Materialeigenschaften

3.1.3 Faserwinkeltransformation

Das Materialkoordinatensystem geht durch Drehung um den Betrag des Faserwinkels aus dem lokalen Schalenkoordinatensystem hervor

$$\begin{pmatrix} e_{x'} \\ e_{y'} \\ e_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Die anschließende Transformation der elastischen Materialmatrix in das globale System erfolgt nach folgender Vorschrift

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{Q}_3^T \mathbf{D} \mathbf{Q}_3 \quad \text{mit: } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

unter Verwendung der Transformationsmatrix \mathbf{Q}_3

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & l_1 n_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & l_2 n_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & l_3 n_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & l_1 n_2 + l_2 n_1 \\ 2l_1 l_3 & 2m_1 m_3 & 2n_1 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & l_2 n_3 + l_3 n_2 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_1 m_3 + l_3 m_1 & m_1 n_3 + m_3 n_1 & l_1 n_3 + l_3 n_1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

mit

$$\begin{aligned} l_1 &= e_{x'x} & m_1 &= e_{x'y} & n_1 &= e_{x'z} \\ l_2 &= e_{y'x} & m_2 &= e_{y'y} & n_2 &= e_{y'z} \\ l_3 &= e_{z'x} & m_3 &= e_{z'y} & n_3 &= e_{z'z} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Die Komponenten der Basisvektoren des lokalen Schalenkoordinatensystems bilden die Richtungskosini zwischen dem lokalen Schalen- und dem globalen Koordinatensystem. Die Transformationsvorschriften der orthotropen Wärmeleitfähigkeitsmatrix und des Vektors der orthotropen Wärmeausdehnungskoeffizienten lauten

$$\lambda^* = \mathbf{Q}_2^T \lambda \mathbf{Q}_2 \quad \text{mit: } \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

unter Verwendung der Matrix \mathbf{Q}_2

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

und

$$\alpha^* = \mathbf{Q}_3^T \alpha \quad \text{mit: } \alpha = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T \quad (3.9)$$

Die Ableitung der Transformationsvorschriften (3.3), (3.5) und (3.8) nach dem Faserorientierungswinkel wird zur Berechnung der Faserwinkelgradienten benötigt. Gleichung (3.3) wird abgeleitet

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial e_{x'}}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial e_{y'}}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial e_{z'}}{\partial \theta_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ -\cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Mit Hilfe der abgeleiteten Richtungskosini können die differenzierten Transformationsmatrizen aufgestellt werden

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_2}{\partial \theta_i} = \begin{pmatrix} l_{\theta 1} & m_{\theta 1} & n_{\theta 1} \\ l_{\theta 2} & m_{\theta 2} & n_{\theta 2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

und

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_3}{\partial \theta_i} = \begin{pmatrix} 2l_1 l_{\theta 1} & 2m_1 m_{\theta 1} & 2n_1 n_{\theta 1} \\ 2l_2 l_{\theta 2} & 2m_2 m_{\theta 2} & 2n_2 n_{\theta 2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2(l_{\theta 1} l_2 + l_1 l_{\theta 2}) & 2(m_{\theta 1} m_2 + m_1 m_{\theta 2}) & 2(n_{\theta 1} n_2 + n_1 n_{\theta 2}) & \dots \\ 2(l_{\theta 2} l_3) & 2(m_{\theta 2} m_3) & 2(n_{\theta 2} n_3) & \\ 2(l_{\theta 1} l_3) & 2(m_{\theta 1} m_3) & 2(n_{\theta 1} n_3) & \\ l_{\theta 1} m_1 + l_1 m_{\theta 1} & m_{\theta 1} n_1 + m_1 n_{\theta 1} & l_{\theta 1} n_1 + l_1 n_{\theta 1} \\ l_{\theta 2} m_2 + l_2 m_{\theta 2} & m_{\theta 2} n_2 + m_2 n_{\theta 2} & l_{\theta 2} n_2 + l_2 n_{\theta 2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & (l_{1\theta} m_2 + l_{2\theta} m_1) & (m_{1\theta} n_2 + m_{2\theta} n_1) & (l_{1\theta} n_2 + l_{2\theta} n_1) \\ + l_1 m_{2\theta} + l_2 m_{1\theta} & + m_1 n_{2\theta} + m_2 n_{1\theta} & + l_1 n_{2\theta} + l_2 n_{1\theta} \\ l_{2\theta} m_3 + l_3 m_{2\theta} & m_{2\theta} n_3 + m_3 n_{2\theta} & l_{2\theta} n_3 + l_3 n_{2\theta} \\ l_{1\theta} m_3 + l_3 m_{1\theta} & m_{1\theta} n_3 + m_3 n_{1\theta} & l_{1\theta} n_3 + l_3 n_{1\theta} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

mit den abgeleiteten Richtungskosini

$$\begin{aligned} l_{\theta 1} &= \frac{\partial e_{x'x}}{\partial \theta_i} & m_{\theta 1} &= \frac{\partial e_{x'y}}{\partial \theta_i} & n_{\theta 1} &= \frac{\partial e_{x'z}}{\partial \theta_i} \\ l_{\theta 2} &= \frac{\partial e_{y'x}}{\partial \theta_i} & m_{\theta 2} &= \frac{\partial e_{y'y}}{\partial \theta_i} & n_{\theta 2} &= \frac{\partial e_{y'z}}{\partial \theta_i} \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.1.4 Benutzerdefinition lokaler Schalenkoordinatensysteme

Die unmittelbare Definition lokaler Schalenkoordinatensysteme durch den Benutzer des Finite-Elemente-Systems ist häufig ineffektiv oder sogar unmöglich, besonders im Falle eines komplexen Bauteils mit gekrümmten Oberflächen. Vielmehr ist die Definition eines Benutzerkoordinatensystems (x'' , y'' , z'') sinnvoll, durch dessen Projektion in die gekrümmte Schalenebene das lokale Schalenkoordinatensystem an beliebiger Stelle berechnet werden kann. **Bild 3.7** zeigt die Situation eines nicht mit der gekrümmten Schalenebene gleichgerichteten Benutzerkoordinatensystems. Durch Projektion der x'' - und y'' -Achse in die Schalenebene und anschließender Orthogonalisierung wird das lokale Schalenkoordinatensystem bestimmt.

Für rotationssymmetrische Bauteile bietet sich die Definition lokaler Schalenkoordinatensysteme durch ein zylindrisches Benutzerkoordinatensystem an. **Bild 3.8** zeigt das zylindrische Benutzerkoordinatensystem, dessen Zylinderachse gleichzeitig die Richtung der x'' -Achse definiert. Das Lot vom Schalenpunkt GP zum Fußpunkt FP der Zylinderachse beschreibt die Richtung der z'' -Achse, die somit per Definition senkrecht auf der x'' -Achse

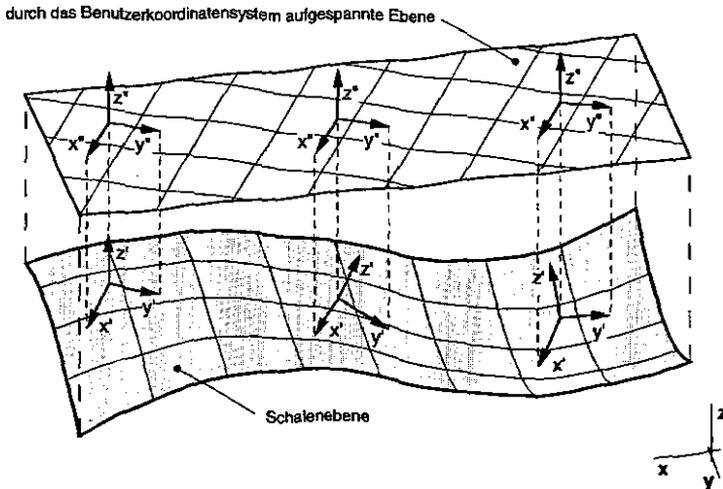


Bild 3.7: Projektion des Benutzerkoordinatensystems in die gekrümmte Schalenebene zur Definition lokaler Schalenkoordinatensysteme

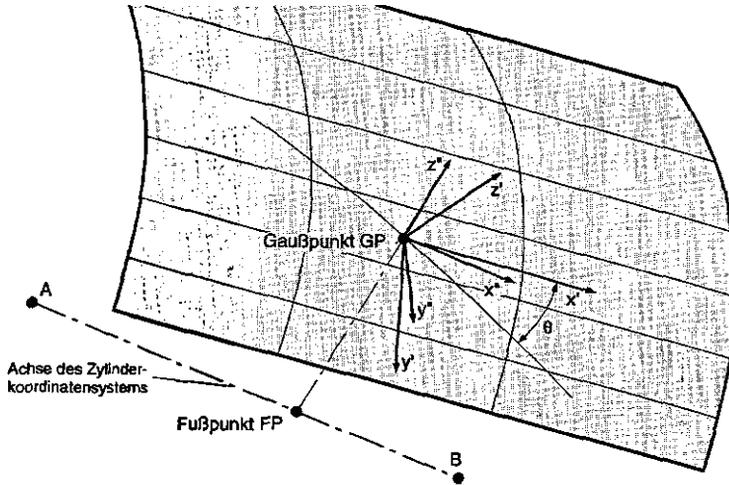


Bild 3.8: Definition lokaler Schalenkoordinatensysteme mit Hilfe zylindrischer Benutzerkoordinatensysteme

steht. Da die Achse des Zylinderkoordinatensystems nicht parallel zur Achse des zu beschreibenden Rotationskörpers sein muß, erfolgt in einem weiteren Schritt wiederum die Projektion des Systems (x'', y'', z'') in die Schalenebene.

3.2 Thermisches Verhalten

Die räumlich instationäre Wärmeleitung wird durch eine Differentialgleichung beschrieben, mit deren Hilfe die zeitliche Entwicklung der Temperaturverteilung in einem Kontinuum berechnet wird [80,81]. Sie lautet

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -q \quad (3.14)$$

unter Berücksichtigung der

$$\begin{aligned}
 \text{Dirichlet - Randbedingung:} & \quad T = T_A \\
 \text{Wärmestrom - Randbedingung:} & \quad -\lambda_n \frac{\partial T}{\partial n} = q \\
 \text{Konvektions - Randbedingung:} & \quad -\lambda_n \frac{\partial T}{\partial n} = \beta(T - T^R)
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

auf einem Teil der Oberfläche sowie der Anfangsbedingung

$$T(x, y, z, t_0) = T_0(x, y, z) \tag{3.16}$$

Unter Verwendung der Galerkin'schen Methode des gewichteten Residuums [44] erfolgt eine Diskretisierung der Gleichung (3.14), um sie in ein lineares Gleichungssystem zu überführen. Das betrachtete Kontinuum wird in finite Elemente unterteilt, und die Temperatur im Inneren durch folgenden Ansatz approximiert

$$T(x, y, z) = \sum_{i=1}^p N_i(x, y, z) T_i \tag{3.17}$$

mit N_i als der Formfunktion des Knotens i . Einsetzen von (3.17) in die Galerkin'sche Integralform der Wärmeleitungsgleichung ergibt

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^p \int_V \lambda_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{j=1}^p N_j T_j \right) + \lambda_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_{j=1}^p N_j T_j \right) \\
 & + \lambda_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{j=1}^p N_j T_j \right) dV + \int_V \rho c N_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{j=1}^p N_j T_j \right) dV \\
 & = \int_V N_i q^V dV + \int_A N_i q^A dA + \int_A N_i \left(\sum_{j=1}^p N_j T_j - T^R \right) dA
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Das resultierende Gleichungssystem mit n Unbekannten kann übersichtlich als Matrixgleichung geschrieben werden

$$CT + HT = Q \tag{3.19}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C} &= \int_V \mathbf{N}^T \rho c \mathbf{N} dV \\
 \mathbf{H} &= \mathbf{H}^L + \mathbf{H}^K = \int_V \nabla^T \mathbf{N}^T \lambda \nabla \mathbf{N} dV + \int_A \mathbf{N}^T \beta \mathbf{N} dA \\
 \mathbf{Q} &= \int_V \mathbf{N}^T q^V dV + \int_A \mathbf{N}^T q^A dA + \int_A \mathbf{N}^T \beta T^R dA + \sum_{i=1}^n Q_i
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

(3.19) beschreibt ein Anfangswertproblem, das mit einem inkrementellen numerischen Integrationsverfahren gelöst werden kann. Für Wärmeleitungsprobleme schlägt ZIENKIEWICZ [44] das Rückwärtsdifferenzenverfahren vor, das auch für große Zeitschritte eine unbedingt stabile Rekursion erlaubt, ohne daß die Lösung oszilliert. Nachteil des Rückwärtsdifferenzenverfahrens ist jedoch, daß für jeden Zeitschritt das lineare Gleichungssystem für eine neue rechte Seite gelöst werden muß. Für die Temperatur zum Zeitpunkt t_{i+1} wird folgender Ansatz verwendet

$$\mathbf{T}_{i+1} = \mathbf{T}_i + \dot{\mathbf{T}}_{i+1} \Delta t \tag{3.21}$$

wobei an die Größe des Zeitschritts Δt keine Stabilitätsbedingung geknüpft ist. Einsetzen in (3.19) ergibt

$$\mathbf{T}_{i+1} = \left[\frac{\mathbf{C}}{\Delta t} + \mathbf{H} \right]^{-1} \left\{ \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} \mathbf{T}_i + \mathbf{Q}_{i+1} \right\} \tag{3.22}$$

Die Ableitung der Temperaturverteilung nach den Entwurfsvariablen \mathbf{X} ist Gegenstand der Sensitivitätsanalyse. Zur Berechnung der Gradienten wird die Gleichung (3.19) abgeleitet [82-84]. Es gilt

$$\mathbf{C} \frac{d\dot{\mathbf{T}}}{d\mathbf{X}} + \frac{d\mathbf{C}}{d\mathbf{X}} \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{H} \frac{d\mathbf{T}}{d\mathbf{X}} + \frac{d\mathbf{H}}{d\mathbf{X}} \mathbf{T} = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{X}} \tag{3.23}$$

Für den stationären Fall ergibt (3.23)

$$\frac{d\mathbf{T}}{d\mathbf{X}} = \mathbf{H}^{-1} \left\{ \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{X}} - \frac{d\mathbf{H}}{d\mathbf{X}} \mathbf{T} \right\} \tag{3.24}$$

Im instationären Fall ist die Entwicklung des Temperaturgradienten über den gesamten betrachteten Zeitbereich zu integrieren. Bei Verwendung des Rückwärtsdifferenzenverfahrens wird neben dem Ansatz für die Temperatur nach Gleichung (3.21) der folgende Ansatz für den Temperaturgradienten verwendet

$$\frac{dT_{i+1}}{dX} = \frac{dT_i}{dX} + \frac{d\dot{T}_{i+1}}{dX} \Delta t \quad (3.25)$$

und in Gleichung (3.23) eingesetzt

$$\frac{dT_{i+1}}{dX} = \left[\frac{C}{\Delta t} + H \right]^{-1} \left\{ - \left(\frac{dC}{dX} \frac{1}{\Delta t} + \frac{dH}{dX} \right) T_{i+1} + \frac{C}{\Delta t} \frac{dT_i}{dX} + \frac{dC}{dX} \frac{1}{\Delta t} T_i \right\} \quad (3.26)$$

Die Lösung der Gleichungssysteme (3.22) und (3.26) erfolgt nach dem Cholesky-Verfahren in 3 Schritten

$$\begin{aligned} \text{Vorwärtselimination:} & \quad \left[\frac{C}{\Delta t} + H \right] = L^T L \\ \text{Vorwärtssubstitution:} & \quad -Lc - Q_{i+1} = 0 \\ \text{Rückwärtssubstitution:} & \quad -L^T T_{i+1} + c = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

wobei die Vorwärtselimination den rechenaufwendigsten Schritt darstellt. Abgesehen vom Inhalt der geschweiften Klammer besitzen die Gleichungssysteme (3.22) und (3.26) die gleiche äußere Form. Sie unterscheiden sich allein durch die rechten Seiten. Da sich das Cholesky-Verfahren zur nachträglichen Berechnung weiterer rechter Seiten eignet, für die lediglich die Schritte der Vorwärts- und Rückwärtssubstitution durchgeführt werden müssen, kann dieses Verfahrens effektiv zur Berechnung mehrerer Lastfälle, zur inkrementellen Zeitintegration nach dem Rückwärtsdifferenzenverfahren sowie zur nachträglichen Berechnung von Gradienten genutzt werden.

3.2.1 Ansatz für das Temperaturfeld

Die Berechnung von Temperaturverteilungen in faserverstärkten Kunststoffen ist gekennzeichnet durch die stark anisotropen Wärmeleiteigenschaften

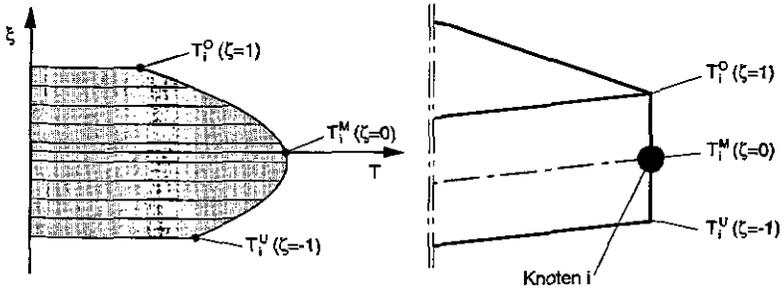


Bild 3.9: Parabolische Approximation der Temperaturverteilung in Richtung der Schalendicke

des Werkstoffs. Die Wärmeleitung in senkrechter Richtung zur Faserorientierung ist deutlich geringer als die Wärmeleitung parallel zur Faserorientierung. Deshalb ist auch bei relativ dünnen Flächentragwerken ein Temperaturgradient in Richtung der Schalendicke zu erwarten. Finite-Elemente-Vergleichsrechnungen mit Volumenelementen haben gezeigt, daß auch bei komplexen Laminataufbauten eine parabolische Interpolation der Temperatur in Richtung der Schalendicke eine effektive Näherung darstellt (Bild 3.9). Die Beschreibung der Temperaturverteilung erfolgt an 3 Punkten jeweils an der Unterseite, in der Mitte und an der Oberseite des Elementes, indem diese Werte dem jeweiligen Knoten zugeordnet werden. Für den Knoten i gilt

$$\begin{aligned} T_i^U &= T_i(\zeta = -1) \\ T_i^M &= T_i(\zeta = 0) \\ T_i^O &= T_i(\zeta = 1) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Es handelt sich demnach um ein subparametrisches Element, da die lineare Interpolation der Geometrie in Richtung der Schalendicke von niedrigerer Ordnung ist als die parabolische Interpolation der Temperaturverteilung. Der Ansatz für die Temperatur lautet folglich

$$\begin{aligned}
T(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^q N_i(\xi, \eta) N_i(\zeta = -1) T_i^U \\
&+ \sum_{i=1}^q N_i(\xi, \eta) N_i(\zeta = 0) T_i^M \\
&+ \sum_{i=1}^q N_i(\xi, \eta) N_i(\zeta = 1) T_i^O
\end{aligned} \tag{3.29}$$

3.2.2 Wärmeleitfähigkeitsmatrix

Zur Entwicklung der Wärmeleitfähigkeitsmatrix wird die Matrix der Formfunktionen zunächst nach den natürlichen Ortskoordinaten abgeleitet und anschließend durch Multiplikation mit der Jacobi-Matrix in das globale Koordinatensystem transformiert

$$\mathbf{vN} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

Anschließend läßt sich die Elementwärmeleitfähigkeitsmatrix aufstellen

$$\mathbf{H}^L = \int_V \nabla^T \mathbf{N}^T \boldsymbol{\lambda}^* \mathbf{vN} \, dV \tag{3.31}$$

Die Integration erfolgt schichtenweise im natürlichen Koordinatensystem (ξ, η, ζ) , so daß (3.31) umgeschrieben werden kann

$$\mathbf{H}^L = \sum_{i=1}^1 \iiint_{\zeta \eta \xi} \nabla^T \mathbf{N}^T \boldsymbol{\lambda}_i^* \mathbf{vN} \det \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \tag{3.32}$$

Den weitaus aufwendigsten Teil der Sensitivitätsanalyse stellt die Ableitung der Koeffizientenmatrizen nach den Entwurfsvariablen dar. Bei der Ableitung der Wärmeleitfähigkeitsmatrix eines gekrümmten Schalenelementes, dessen Koeffizientenmatrizen durch eine Volumenintegration berechnet

werden, muß zusätzlich die Volumenänderung durch Variation der Grenzen der schichtenweisen Integration berücksichtigt werden [85]. Diese vielfältige und komplexe Abhängigkeit der Koeffizientenmatrizen von der Schichtdicke macht eine analytische Ableitung dieser Matrizen zu aufwendig. Aus diesen Gründen ist die numerische Ableitung mit einem zentralen Differenzenverfahren vorzuziehen. Es gilt

$$\frac{d\mathbf{H}^L}{dt_i} \approx \frac{\mathbf{H}^L(t_i + \Delta t_i) - \mathbf{H}^L(t_i - \Delta t_i)}{2\Delta t_i} \quad (3.33)$$

Dieses als semianalytisch bezeichnete Verfahren, bei dem die Koeffizientenmatrizen numerisch und das Gleichungssystem geschlossen differenziert werden, hat wegen seiner einfachen Implementation auch in bestehende Finite-Elemente-Programmsysteme weite Verbreitung gefunden. Die Verwendung des zentralen Differenzenquotienten führt nach HAFTKA, GÜRDAL und KAMAT [41] gerade in der Nähe des Optimums zu genaueren Ergebnissen gegenüber einem Vorwärtsdifferenzenverfahren. Trotzdem hat das semianalytische Verfahren gerade bei der Ableitung von volumenabhängigen Größen Schwächen in der Genauigkeit der Gradienten gezeigt, die abhängig von der inkrementellen Schrittweite des Differenzenquotienten und vom Rundungsfehler der verwendeten Rechenanlage sind [86]. Als optimale Schrittweite empfehlen IOTT, HAFTKA und ADELMAN [87]

$$\Delta t_i = 10^{-4} t_i \quad (3.34)$$

Die Ableitung der Wärmeleitfähigkeitsmatrix nach dem Faserorientierungswinkel θ_i der Schicht i erfolgt analytisch durch Differentiation der Transformationsmatrix \mathbf{Q}_2 . Es gilt

$$\frac{d\mathbf{H}^L}{d\theta_i} = \iiint_{\xi, \eta, \xi} \mathbf{V}^T \mathbf{N}^T \frac{d\lambda_i^*}{d\theta_i} \mathbf{V} \mathbf{N} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\xi \quad (3.35)$$

mit

$$\frac{d\lambda_i^*}{d\theta_i} = \frac{d\mathbf{Q}_2^T}{d\theta_i} \lambda_i \mathbf{Q}_2^T + \mathbf{Q}_2^T \lambda_i \frac{d\mathbf{Q}_2^T}{d\theta_i} \quad (3.36)$$

3.2.3 Konvektionsmatrix

Der temperaturabhängige Konvektionsterm bildet zusammen mit der Wärmeleitfähigkeitsmatrix die linke Seite des zu lösenden Gleichungssystems

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^L + \mathbf{H}^K \quad (3.37)$$

mit

$$\mathbf{H}^K = \int_A \mathbf{N}^T \beta \mathbf{N} \, dA \quad (3.38)$$

Die Wärmeübergangszahl β gibt den Wärmeübergang normal zur Oberfläche des Elementes an. Für die Integration im natürlichen Koordinatensystem wird das infinitesimale Flächenelement dA durch

$$dA = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{pmatrix} d\xi \, d\eta \quad (3.39)$$

ersetzt, wobei darauf zu achten ist, daß bei gekrümmten Elementen über die tatsächliche Oberfläche und nicht über die Mittelfläche zu integrieren ist.

3.2.4 Wärmekapazitätsmatrix

Die Integration der Elementwärmekapazitätsmatrix zur Berechnung instationärer Temperaturverteilungen erfolgt wiederum schichtenweise im natürlichen Koordinatensystem unter Verwendung der Jacobi-Transformation

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^I \iiint_{\zeta \eta \xi} \mathbf{N}^T \rho_i c_i \mathbf{N} \det \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (3.40)$$

Die Ableitung der Wärmekapazitätsmatrix nach Schichtdicken wird auch hier mit dem zentralen Differenzenquotienten durchgeführt

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt_i} \approx \frac{\mathbf{C}(t_i + \Delta t_i) - \mathbf{C}(t_i - \Delta t_i)}{2\Delta t_i} \quad (3.41)$$

Da die Wärmekapazitätsmatrix von der Faserorientierung unabhängig ist, ergibt sich deren Ableitung nach Faserorientierungswinkeln zu

$$\frac{dC}{d\theta_i} = 0 \quad (3.42)$$

3.2.5 Test der Elementformulierung

Die entwickelten Schalenelemente zur Temperaturberechnung werden exemplarisch anhand zweier einfacher Beispiele getestet. Als Beispiel für eine normal zur Mittelfläche wirkende thermische Last wird ein langer Hohlzylinder betrachtet. Als Beispiel für eine in der Schalenebene wirkende zweidimensionale Temperaturverteilung wird der Querschnitt eines quadratischen Hohlquerschnitts betrachtet.

Ein langer Hohlzylinder (**Bild 3.10**) wird an seiner Innenfläche durch einen Wärmestrom q^A belastet. An der Außenfläche bewirkt freie Konvektion eine Wärmeabfuhr. Die Temperatur an der Stirfläche A_1 ist vorgegeben. Ge-

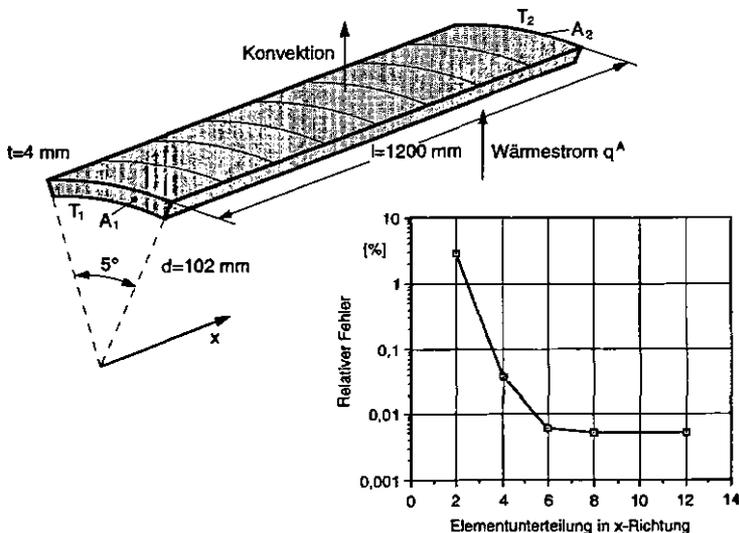


Bild 3.10: Konvergenztest der Temperaturverteilung anhand eines langen Hohlzylinders

sucht ist die Temperatur T_2 an der Stirnfläche A_2 auf der gegenüberliegenden Seite. Gegenstand der Testrechnung ist der Vergleich der analytischen Lösung mit den Ergebnissen der Finite-Elemente-Rechnung bei zunehmender Netzfeinheit in Rohrlängsrichtung. Die Referenzlösung wurde auf analytische Weise ermittelt. Aus Symmetriegründen reicht die Modellierung eines Ausschnitts von 5° des Zylinderumfangs aus. Die Abnahme des relativen Fehlers mit zunehmender Elementfeinheit in Rohrlängsrichtung demonstriert die Konvergenz des vorgestellten finiten Elements.

Der in Bild 3.11 dargestellte Querschnitt eines quadratischen Profils ist Gegenstand eines weiteren Konvergenztests, mit dem die Konvergenz der Elemente bei zweidimensionaler Wärmeleitung gezeigt werden soll. An der Außenseite des Hohlquerschnitts ist eine konstante Temperatur von 273 K und auf der Innenseite eine konstante Temperatur von 773 K vorgegeben. Aus Symmetriegründen reicht die Modellierung eines Viertels des Querschnittes aus. In genügendem Abstand von den Stirnflächen des Hohlprofils stellt sich ein zweidimensionaler Wärmeleitungszustand ein. Verglichen werden die Temperaturen an den Punkten A und B. Mit dem in [88] vorgestellten Relaxationsverfahren kann als Referenzlösung eine obere Schranke für die Tem-

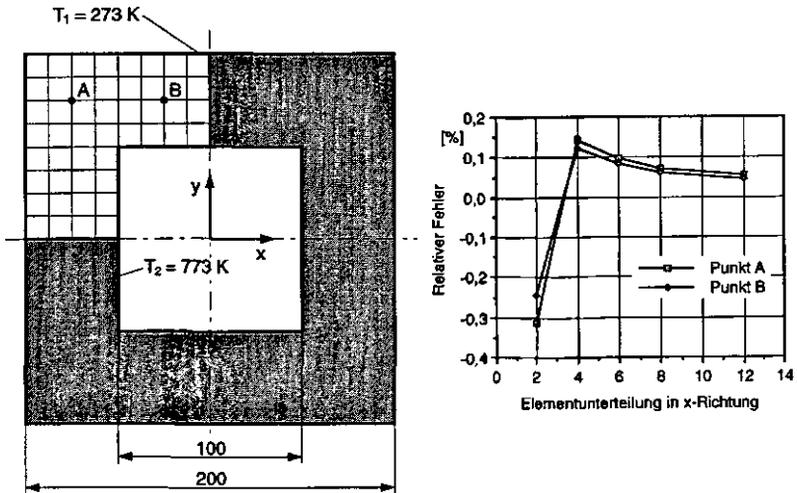


Bild 3.11: Konvergenztest eines zweidimensionalen Wärmecleitungsproblems anhand eines quadratischen Hohlquerschnitts

peratur angegeben werden. Der relative Fehler nimmt mit zunehmender Netzfeinheit ab und zeigt die Konvergenz der Elemente für ein zweidimensionales Wärmeleitungsproblem.

Anhand von Temperaturmessungen an einem KFZ-Rad aus faserverstärktem Kunststoff soll gezeigt werden, daß der für das beschriebene finite Element gewählte Ansatz zulässig ist. Bild 3.12 zeigt den Meßaufbau mit insgesamt 10 Temperaturmeßstellen entlang zweier Speichen des Rades. Ein angenommener Wärmestrom von 21 W wurde zentral in die Nabe eingeleitet, so daß sich eine rotationssymmetrische Temperaturverteilung ergibt. Die Temperaturen zweier durchgeführter Messungen sind gemittelt und mit einer Wärmeübertragungsanalyse verglichen worden. Für die Rechnung wurde ein Finite-Elemente-Modell mit 1140 Elementen und 3468 Knoten verwendet. Neben dem im Nabenbereich eingeleiteten Wärmestrom ist der Wärmeübergang durch freie Konvektion an den freien Oberflächen des Rades berücksichtigt. Der maximale Fehler in den berechneten Temperaturen von unter 10% zeigt, daß selbst bei dickwandigen Laminataufbauten, wie sie die Speichen aufweisen, die parabolische Approximation der Temperaturverteilung zulässig ist.

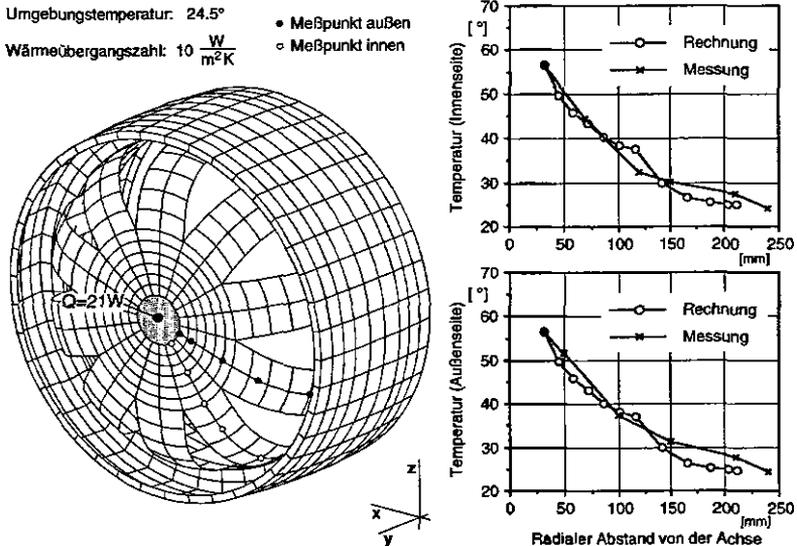


Bild 3.12: Vergleich der berechneten Temperaturverteilung eines faserverstärkten KFZ-Rades mit der Messung

3.3 Spannungs- / Verformungsanalyse von Faserverbundwerkstoffen

Das für eine Verformungsberechnung mit der Finite-Elemente-Methode zu lösende lineare Gleichungssystem wird mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit hergeleitet. Die Wärmeausdehnung wird als Anfangsdehnung ϵ_0 interpretiert. Dann gilt für die gesamte Verzerrungsenergie

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} \, dV - \int_V \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}_0 \, dV + \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\epsilon}_0^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}_0 \, dV \quad (3.43)$$

mit

$$\boldsymbol{\epsilon}_0 = \boldsymbol{\alpha} \Delta T \quad (3.44)$$

Für die Arbeit der äußeren Kräfte gilt hingegen

$$W = \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{p}^V \, dV + \int_A \mathbf{u}^T \mathbf{p}^A \, dA + \sum_i u_i^T F_i \quad (3.45)$$

Das Prinzip der virtuellen Arbeit sagt aus, daß die Differenz aus virtueller Verzerrungsenergie und virtueller Arbeit der äußeren Kräfte verschwindet, wenn sich der Körper im Gleichgewicht befindet

$$\delta \Pi = \delta(U - W) = 0 \quad (3.46)$$

Demzufolge können die Gleichungen (3.43) und (3.45) differenziert und gleichgesetzt werden

$$\begin{aligned} & \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} \, dV - \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}_0 \, dV \\ & - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}^V \, dV - \int_A \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}^A \, dA - \sum_i \delta u_i^T F_i = 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Verformungen und Dehnungen sowie deren virtuelle Größen werden durch Ansatzfunktionen ausgedrückt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(x, y, z) &= \sum_{i=1}^p N_i \mathbf{u}_i & \delta \mathbf{u}(x, y, z) &= \sum_{i=1}^p N_i \\
 \boldsymbol{\varepsilon}_i(x, y, z) &= \sum_{j=1}^p \mathbf{B}_{ij} \mathbf{u}_j & \delta \boldsymbol{\varepsilon}_i(x, y, z) &= \sum_{j=1}^p \mathbf{B}_{ij}
 \end{aligned}
 \tag{3.48}$$

Die Diskretisierung geschieht durch Einsetzen der Ansatzfunktionen in die Gleichung (3.47)

$$\begin{aligned}
 \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{u} &= \\
 \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{p}^V dV + \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{p}^A dA + \sum_i \mathbf{F}_i
 \end{aligned}
 \tag{3.49}$$

Anschließend kann (3.49) als Matrixgleichung geschrieben werden

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}
 \tag{3.50}$$

mit

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV
 \tag{3.51}$$

als der Steifigkeitsmatrix des Systems. Der Term

$$\mathbf{F}_T = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{N} \Delta T dV
 \tag{3.52}$$

wird als thermische Ersatzkraft interpretiert, die in der Struktur einen der Temperaturerhöhung ΔT äquivalenten Verzerrungszustand hervorruft.

Die Ableitung der Verformungen und aller verformungsabhängigen Größen von den Entwurfsvariablen basiert auf der Ableitung der Gleichung (3.50)

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{X}} = \mathbf{K}^{-1} \left\{ \frac{d\mathbf{F}_T}{d\mathbf{X}} - \frac{d\mathbf{K}}{d\mathbf{X}} \mathbf{u} \right\}
 \tag{3.53}$$

3.3.1 Ansatz für das Verformungsfeld

Unter Verwendung der Voraussetzungen der Schalentheorie:

- Die Normalspannung senkrecht zur Schalenmittelfläche verschwindet
- Die Schalenquerschnitte verwölben sich nicht

kann ein gekrümmtes dickwandiges Schalenelement mit unabhängiger Neigungs- und Verschiebungsinterpolation entwickelt werden, das den Einfluß der transversalen Schubverformung berücksichtigt [89] und dadurch die Kompatibilität an den Elementrändern sichert (**Bild 3.13**). Während die klassische Theorie dünner Platten fordert, daß auch die Ableitungen der Ansatzfunktionen über die Elementränder stetig sind (C_1 -Kompatibilität), reicht hier lediglich die Stetigkeit der Ansatzfunktionen (C_0 -Kompatibilität). Die

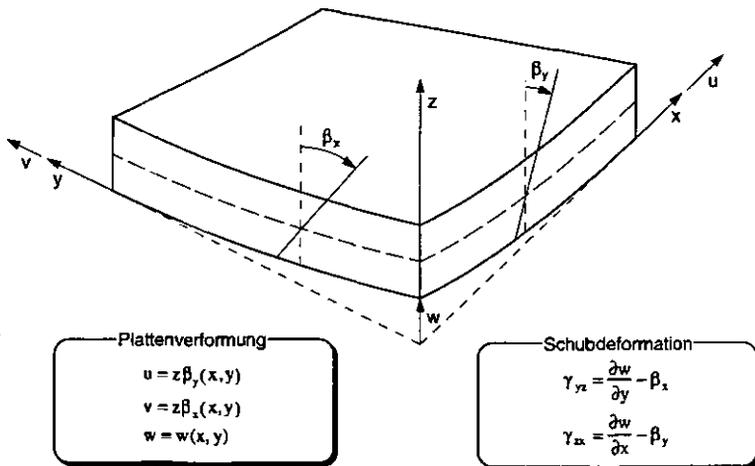


Bild 3.13: Plattenverformung unter Einbeziehung der Schubdeformation

Verformungen im Element lassen sich durch drei unabhängige translatorische und zwei rotatorische Freiheitsgrade ausdrücken

$$\begin{aligned}
 u(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^q N_i(\xi, \eta) u_i + \frac{t}{2} \zeta \sum_{i=1}^q N_i(V_{xi}^2 \alpha_i - V_{xi}^1 \beta_i) \\
 v(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^q N_i(\xi, \eta) v_i + \frac{t}{2} \zeta \sum_{i=1}^q N_i(V_{yi}^2 \alpha_i - V_{yi}^1 \beta_i) \\
 w(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^q N_i(\xi, \eta) w_i + \frac{t}{2} \zeta \sum_{i=1}^q N_i(V_{zi}^2 \alpha_i - V_{zi}^1 \beta_i)
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Bild 3.14 zeigt das durch die Vektoren V^1 , V^2 und V^n aufgespannte Dreibein, mit dessen Hilfe die Rotationsfreiheitsgrade α_i und β_i beschrieben werden.

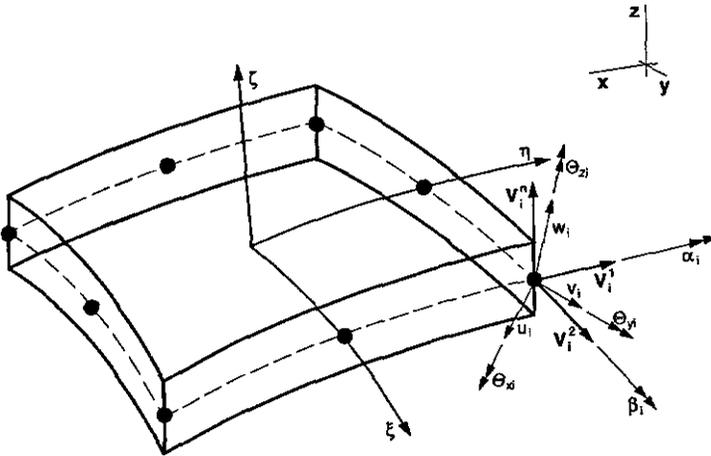


Bild 3.14: Gekrümmtes achtknotiges Schalenelement mit unabhängiger Neigungs- und Verschiebungsinterpolation

3.3.2 Steifigkeitsmatrix

Ausgangspunkt für die Aufstellung der Elementsteifigkeitsmatrix ist die Bestimmung der Verzerrungs-/Verschiebungsmatrix B . Die isoparametrischen

Ansatzfunktionen nach (3.54) werden zunächst nach natürlichen Koordinaten abgeleitet und anschließend mit Hilfe der Jacobi-Transformation in das globale Koordinatensystem transformiert. Die **B**-Matrix eines Knotens lautet dann

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} & 0 & 0 & g_{1x} G_x & g_{2x} G_x \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial y} & 0 & g_{1y} G_y & g_{2y} G_y \\ 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial z} & g_{1z} G_z & g_{2z} G_z \\ \frac{\partial N}{\partial y} & \frac{\partial N}{\partial x} & 0 & g_{1x} G_y + g_{1y} G_x & g_{2x} G_y + g_{2y} G_x \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial z} & \frac{\partial N}{\partial y} & g_{1y} G_z + g_{1z} G_y & g_{2y} G_z + g_{2z} G_y \\ \frac{\partial N}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N}{\partial x} & g_{1x} G_z + g_{1z} G_x & g_{2x} G_z + g_{2z} G_x \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

mit

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad \text{und:} \quad \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{pmatrix} = \zeta \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial z} \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

sowie

$$g_1 = -\frac{1}{2} t V^2 \quad g_2 = \frac{1}{2} t V^t \quad (3.57)$$

Anschließend kann die Elementsteifigkeitsmatrix aufgestellt werden

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}^* \mathbf{B} \, dV \quad (3.58)$$

Die Integration erfolgt wiederum im natürlichen Koordinatensystem (ξ, η, ζ) . Während für die Richtungen ξ und η das Gauß-Verfahren mit reduzierter Ordnung angewendet wird, kommt in der ζ -Richtung eine 3-Punkt-Simpson-

Formel zur Anwendung, mit der die spätere Ermittlung der Dehnungen an den Gaußpunkten ohne weitere Extrapolation möglich ist

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^1 \iiint_{\zeta \eta \xi} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_i^* \mathbf{B} \det \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (3.59)$$

Die rotatorischen Freiheitsgrade der Elementsteifigkeitsmatrix liegen nun in einem Koordinatensystem vor, welches durch die Vektoren \mathbf{V}^1 , \mathbf{V}^2 und \mathbf{V}^n aufgespannt wird, die translatorischen Freiheitsgrade sind hingegen auf das globale Koordinatensystem bezogen. Sollen Schalenknicke berücksichtigt werden, muß eine Transformation der rotatorischen Freiheitsgrade ins globale Koordinatensystem durchgeführt werden. Nach Einführen eines fiktiven Freiheitsgrades γ wird die Steifigkeitsmatrix knotenweise in vier Untermatrizen unterteilt

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uvw,uvw} & \mathbf{K}_{uvw,\alpha\beta\gamma} \\ \mathbf{K}_{\alpha\beta\gamma,uvw} & \mathbf{K}_{\alpha\beta\gamma,\alpha\beta\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

die einzeln der Transformation unterzogen werden

$$\mathbf{K}_{ij}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uvw,uvw} & \mathbf{K}_{uvw,\alpha\beta\gamma} \mathbf{T}_j \\ \mathbf{T}_i^T \mathbf{K}_{\alpha\beta\gamma,uvw} & \mathbf{T}_i^T \mathbf{K}_{\alpha\beta\gamma,\alpha\beta\gamma} \mathbf{T}_j \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

mit

$$\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} V_{xi}^1 & V_{yi}^1 & V_{zi}^1 \\ V_{xi}^2 & V_{yi}^2 & V_{zi}^2 \\ V_{xi}^n & V_{yi}^n & V_{zi}^n \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

als Transformationsmatrix des Knotens i .

Genau wie bei der Differentiation der Wärmeleitfähigkeits- und Wärmekapazitätsmatrizen nach der Einzelschichtdicke ist bei der Differentiation der Steifigkeitsmatrix das semianalytische Verfahren vorzuziehen. Die Ableitung mit einem zentralen Differenzenquotienten lautet demnach

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt_i} \approx \frac{\mathbf{K}(t_i + \Delta t_i) - \mathbf{K}(t_i - \Delta t_i)}{2\Delta t_i} \quad (3.63)$$

Die Ableitung der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} nach dem Faserorientierungswinkel der Einzelschicht ergibt sich zu

$$\frac{d\mathbf{K}}{d\theta_i} = \iiint_{\zeta_i \eta \xi} \mathbf{B}^T \frac{d\mathbf{D}_i^*}{d\theta_i} \mathbf{B} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \quad (3.64)$$

mit

$$\frac{d\mathbf{D}_i^*}{d\theta_i} = \frac{d\mathbf{Q}_3^T}{d\theta_i} \mathbf{D}_i \mathbf{Q}_3 + \mathbf{Q}_3^T \mathbf{D}_i \frac{d\mathbf{Q}_3}{d\theta_i} \quad (3.65)$$

3.3.3 Thermische Ersatzkräfte

Die Berechnung thermomechanischer Verformungen mit der Finite-Elemente-Methode erfordert die Berechnung thermischer Ersatzkräfte, die dem Modell aufgeprägt werden, um einen dem thermoelastischen Verzerrungszustand äquivalenten Verformungszustand zu erhalten. Gleichung (3.52) wurde aus dem Term der Anfangsverzerrung der Verzerrungsenergie hergeleitet. Für die Modellierung eines mehrschichtigen Verbundes ist wiederum die schichtenweise Integration unter Verwendung der für die jeweilige Schicht relevanten Materialdaten erforderlich. (3.52) kann dann ausformuliert werden

$$\mathbf{F}_T = \sum_{i=1}^l \iiint_{\zeta \eta \xi} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_i^* \boldsymbol{\alpha}_i^* N \Delta T \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \quad (3.66)$$

mit

$$\mathbf{D}_i^* = \mathbf{Q}_3^T \mathbf{D}_i \mathbf{Q}_3 \quad \text{und:} \quad \boldsymbol{\alpha}_i^* = \mathbf{Q}_3^T \boldsymbol{\alpha}_i, \quad (3.67)$$

wobei ΔT der Vektor der Temperaturdifferenz zwischen der aktuellen Temperatur und der Temperatur des verzerrungsfreien Zustands ist.

Die Ableitung der thermischen Ersatzkräfte nach Schichtdicken lautet

$$\frac{d\mathbf{F}_T}{dt_i} = \frac{\partial \mathbf{F}_T}{\partial t_i} + \frac{\partial \mathbf{F}_T}{\partial T} \frac{dT}{dt_i} \quad (3.68)$$

wobei die Ableitung des ersten Terms numerisch mit Hilfe des zentralen Differenzenquotienten erfolgt, so daß gilt

$$\frac{d\mathbf{F}_T}{dt_i} \approx \frac{\mathbf{F}_T(t_i + \Delta t_i) - \mathbf{F}_T(t_i - \Delta t_i)}{2\Delta t_i} + \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}^* \boldsymbol{\alpha}^* \mathbf{N} \frac{dT}{dt_i} dV \quad (3.69)$$

Bei der Ableitung der thermischen Ersatzkräfte nach Faserorientierungswinkeln ist sowohl die Abhängigkeit der orthotropen Materialmatrix, des Vektors der orthotropen Wärmeausdehnungskoeffizienten als auch der Temperatur von der Faserorientierung zu berücksichtigen. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{F}_T}{d\theta_i} = & \int_V \mathbf{B}^T \frac{d\mathbf{D}_i^*}{d\theta_i} \boldsymbol{\alpha}_i^* \mathbf{N} \Delta T dV + \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_i^* \frac{d\boldsymbol{\alpha}_i^*}{d\theta_i} \mathbf{N} \Delta T dV \\ & + \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}^* \boldsymbol{\alpha}^* \mathbf{N} \frac{dT}{d\theta_i} dV \end{aligned} \quad (3.70)$$

mit

$$\frac{d\mathbf{D}_i^*}{d\theta_i} = \frac{d\mathbf{Q}_3^T}{d\theta_i} \mathbf{D}_i \mathbf{Q}_3 + \mathbf{Q}_3^T \mathbf{D}_i \frac{d\mathbf{Q}_3}{d\theta_i} \quad (3.71)$$

und

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}_i^*}{d\theta_i} = \frac{d\mathbf{Q}_3^T}{d\theta_i} \boldsymbol{\alpha}_i \quad (3.72)$$

3.3.4 Dehnungen und Spannungen

Eine aussagekräftige Definition von Spannungen und Dehnungen erfolgt im Materialkoordinatensystem (1,2,3) der einzelnen Schichten, denn die auf das Materialkoordinatensystem bezogenen Spannungskomponenten erlauben ei-

ne unmittelbare Berechnung der Versagenskriterien ohne weitere Transformation (Bild 3.15). Darüber hinaus können die Spannungen der Schicht i ohne weitere Transformation des orthotropen Materialgesetzes durch Multiplikation der Dehnungen mit der Materialmatrix D_i berechnet werden

$$\sigma_i = \begin{Bmatrix} \sigma_{i11} \\ \sigma_{i22} \\ 0 \\ \tau_{i12} \\ \tau_{i23} \\ \tau_{i31} \end{Bmatrix} = D_i (\varepsilon_i - \varepsilon_{i0}) \quad \text{mit: } \varepsilon_{i0} = \begin{Bmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \alpha_{i3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T \quad (3.73)$$

Da in der Schale per Definition ein schichtenweise linearer Verlauf von Spannungen und Dehnungen vorliegt, erfolgt deren Repräsentation durch zwei Punkte an der Unter- und der Oberseite jeder Schicht. Da die Dehnungen an den Integrationspunkten berechnet werden, ist bei Verwendung des Simpson-Verfahrens eine fehlerbehaftete Extrapolation der Dehnungen auf die Schichtgrenzen überflüssig. Die Extrapolation von den Gaußpunkten auf

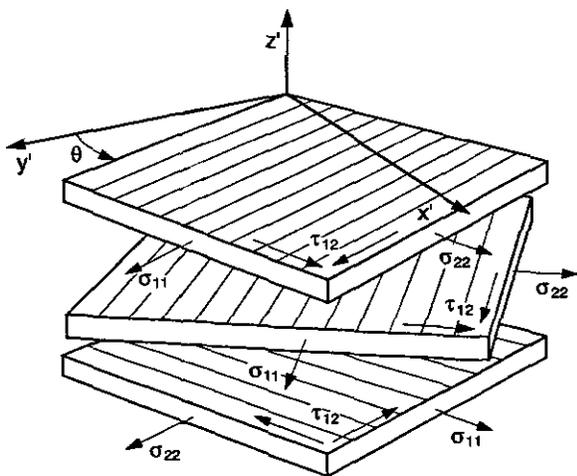


Bild 3.15: Definition von Spannungen in den Materialkoordinatensystemen der Schichten eines Laminates

die Elementknoten erfolgt mit dem von HINTON und CAMPBELL [90] beschriebenen Verfahren nach der Methode kleinster Fehlerquadrate.

Die Dehnungen werden durch Multiplikation der Verzerrungs-/Verschiebungsmatrix \mathbf{B} mit den Verformungen zunächst in globalen Koordinaten berechnet

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.74)$$

mit

$$\mathbf{u} = \{u \quad v \quad w \quad \alpha \quad \beta\}^T \quad (3.75)$$

als dem auf das Dreibein ($\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2, \mathbf{V}^n$) bezogene Verformungsvektor und

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

Die \mathbf{B} -Matrix wird für jede Schichtober- und -unterseite ausgewertet und liefert die Dehnungen im globalen Koordinatensystem. Anschließend erfolgt die Transformation in das Materialkoordinatensystem der Schicht

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{Q}_3 \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.77)$$

Die Schichtspannungen können dann nach Gleichung (3.73) unmittelbar unter Verwendung des Materialgesetzes berechnet werden.

Zur Berechnung der Ableitung der Dehnungen nach der Dicke einer einzelnen Laminatschicht wird Gleichung (3.74) abgeleitet

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt_i} = \frac{d\mathbf{B}}{dt_i} \mathbf{u} + \mathbf{B} \frac{d\mathbf{u}}{dt_i} \quad (3.78)$$

Die Ableitung der \mathbf{B} -Matrix nach der Schichtdicke geschieht wiederum numerisch mit dem zentralen Differenzenquotienten. Das Ergebnis sind die *Dehnungsgradienten im globalen Koordinatensystem*, die mit folgender Beziehung in das Materialkoordinatensystem transformiert werden

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}'}{dt_i} = \mathbf{Q}_3 \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt_i} \quad (3.79)$$

Die Ableitung der Dehnungen nach Faserorientierungswinkeln berechnet sich zu

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\theta_i} = \mathbf{B} \frac{d\mathbf{u}}{d\theta_i} \quad (3.80)$$

Zur Transformation der *Dehnungsgradienten* muß zusätzlich die Abhängigkeit der Transformationsmatrix von der Faserorientierung berücksichtigt werden

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}'}{d\theta_i} = \frac{d\mathbf{Q}_3}{d\theta_i} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{Q}_3 \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\theta_i} \quad (3.81)$$

Sind die *Dehnungsgradienten im lokalen Koordinatensystem* bekannt, können durch Multiplikation mit der \mathbf{D} -Matrix auf einfache Weise die *Spannungsgradienten* berechnet werden, denn durch die Formulierung der *Dehnungsgradienten im Materialkoordinatensystem* der Schicht ist die *Materialmatrix unabhängig vom Faserorientierungswinkel*. Für die *Spannungsableitungen nach Schichtdicken* gilt demnach

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}'}{dt_i} = \mathbf{D} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}'}{dt_i} \quad (3.82)$$

und für die *Ableitungen nach Faserorientierungswinkeln*

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}'}{d\theta_i} = \mathbf{D} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}'}{d\theta_i} \quad (3.83)$$

3.3.5 Versagensanalyse faserverstärkter Kunststoffe

Die thermomechanischen Versagensmechanismen in faserverstärkten Kunststoffen sind nur sehr unvollkommen zu beschreiben, weil der inhomogene Aufbau des Werkstoffs aus verschiedenen steifen und festen Materialien, unvermeidbare Imperfektionen sowie eine statistische Verteilung der Fasern das Versagensverhalten stark beeinflussen. Schon bei geringen Dehnungen quer zur Faser kommt es zu Spannungskonzentrationen an der Grenzfläche zwischen Matrix und Faser (Bild 3.16) und damit zum frühen Versagen der Schicht durch Matrix- oder Zwischenfaserbruch. Bild 3.17 stellt die Zug-, Druck- und Schubfestigkeiten einer glasfaserverstärkten Einzelschicht einander gegenüber. Während die Zugfestigkeit parallel zur Faser hohe Werte erreicht, sind die Druck- und Schubfestigkeiten weitaus geringer, da sie im wesentlichen von den Eigenschaften der Matrix dominiert sind.

Mit Hilfe einer Bruchhypothese kann der in der Praxis auftretende mehrachsige Belastungszustand auf experimentell ermittelte Bruchspannungen zurückgeführt werden. Aufgrund des komplexen Versagensverhaltens der Faserverbundkunststoffe konnte bislang kein einheitliches Versagenskriterium

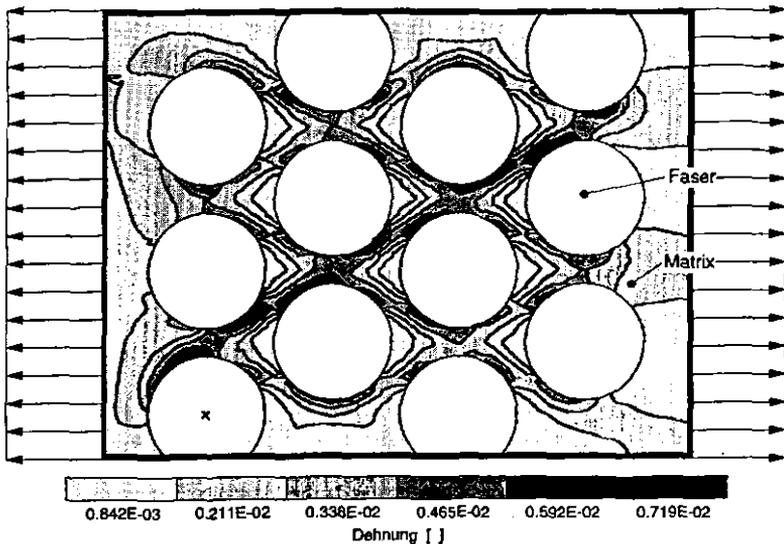


Bild 3.16: Überhöhung der Querzugdehnung in einem Faserverbundkunststoff

entwickelt werden. Das Tensor-Polynom-Kriterium von TSAI-WU [91] sowie das Versagenskriterium von PUCK [92] stimmen sehr gut mit Experimenten überein und liegen den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Optimierungrechnungen zugrunde.

Das Tensor-Polynom-Kriterium von TSAI-WU beschreibt einen Ellipsoiden im Spannungsraum $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12})$. Liegt ein mehrachsiger Spannungszustand innerhalb des Bruchkörpers, tritt kein Versagen ein. Spannungszustände auf der Oberfläche des Ellipsoiden führen zum Versagen der Schicht. Der Ellipsoid ist durch folgende Gleichung beschrieben

$$B = F_{11}\sigma_{11}^2 + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + F_{22}\sigma_{22}^2 + F_{66}\tau_{12}^2 + F_1\sigma_{11} + F_2\sigma_{22} \leq 1 \quad (3.84)$$

mit

$$\begin{aligned} F_{11} &= \frac{1}{\sigma_{11Bz}\sigma_{11Bd}} & F_{22} &= \frac{1}{\sigma_{22Bz}\sigma_{22Bd}} \\ F_1 &= \frac{1}{\sigma_{11Bz}} - \frac{1}{\sigma_{11Bd}} & F_2 &= \frac{1}{\sigma_{22Bz}} - \frac{1}{\sigma_{22Bd}} \\ F_{66} &= \frac{1}{\tau_{12B}^2} & F_{12} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\sigma_{11Bz}\sigma_{11Bd}} \frac{1}{\sigma_{22Bz}\sigma_{22Bd}}} \end{aligned} \quad (3.85)$$

Zur Berechnung der Gradienten des Versagenskriteriums wird die Ableitung der Gleichung (3.84) gebildet

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial X_i} &= F_{11}2\sigma_{11} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial X_i} + 2F_{12} \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial X_i} \sigma_{22} + \sigma_{11} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial X_i} \right) \\ &+ F_{22}2\sigma_{22} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial X_i} + F_{66}2\tau_{12} \frac{\partial \tau_{12}}{\partial X_i} + F_1 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial X_i} + F_2 \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial X_i} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Das von Puck [89] eingeführte Versagenskriterium unterscheidet zwischen Faser- und Zwischenfaserbruch. Damit ist eine differenzierte Aussage möglich, ob es zu einem Versagen der Faser oder lediglich zu einem Matrix- oder Grenzflächenbruch kommt. Für Faserbruch gilt

$$B_{FB} = \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11Bz}} \leq 1 \quad (3.87)$$

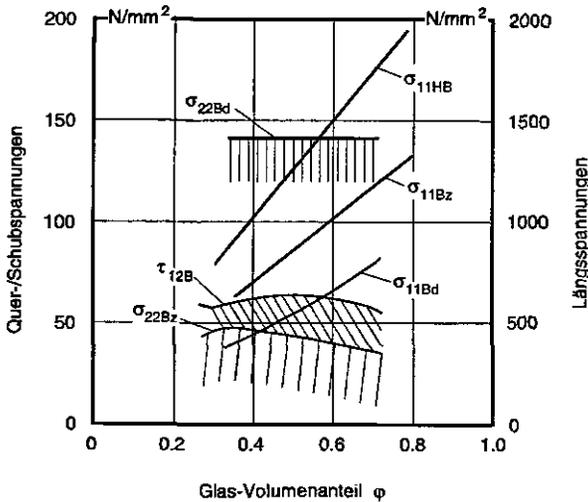


Bild 3.17: Zug-, Druck- und Schubfestigkeiten der glasfaserverstärkten Einzelschicht (nach: [65])

und für Zwischenfaserbruch

$$B_{ZFB} = \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11HB}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22B}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{12B}} \right)^2 \leq 1 \quad (3.88)$$

mit σ_{11HB} als einer fiktiven Bruchspannung der Matrix in Faserrichtung, die jedoch bei richtiger Auswahl der Faser- und Matrixmaterialien höher liegt als die Bruchspannung σ_{11B} der Faser. Im Druckbereich sind die entsprechenden Druckfestigkeiten in die Formel einzusetzen. Die Ableitung des Versagenskriteriums nach PUCK lautet für Faserbruch

$$\frac{\partial B_{ZFB}}{\partial X_i} = \frac{1}{\sigma_{11Bz}} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial X_i} \quad (3.89)$$

und für Zwischenfaserbruch

$$\frac{\partial B_{ZFB}}{\partial X_i} = \frac{2\sigma_{11}}{\sigma_{11HB}^2} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial X_i} + \frac{2\sigma_{22}}{\sigma_{22B}^2} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial X_i} + \frac{2\tau_{12}}{\tau_{12B}^2} \frac{\partial \tau_{12}}{\partial X_i} \quad (3.90)$$

3.3.6 Test der Elementformulierung

MACNEAL und HARDER [93] haben eine Reihe von Standard-Testfällen für Schalenelemente vorgeschlagen, die eine Überprüfung des Einflusses der Elementgeometrie, Belastung und Netzfeinheit auf die Ergebnisgenauigkeit gestatten. Die entwickelten Schalenelemente werden anhand dieser Testfälle überprüft und mit Testergebnissen aus der Literatur [93,94] verglichen. **Table 3.1** faßt die Eigenschaften der getesteten Elemente zusammen. Die Testergebnisse zeigen, daß schon bei geringen Verzerrungen der Elementgeometrie oder Elementkrümmung signifikante Unterschiede in der Ergebnisgenauigkeit auftreten können.

Degenerierte Schalenelemente neigen dazu, bei dünnen Wanddicken eine zu große Steifigkeit zu besitzen. Dieser als Schub- und Membransperre bezeichnete Effekt entsteht durch eine Überbewertung der Schub- und MembranstEIFigkeiten bei kleinen Wanddicken. Dieser Effekt kann durch eine Reduzierung der Integrationsordnung ausgeglichen werden. Die häufig verwendete selektive Integration der Schub-, Membran- und Biegesteifigkeiten

eigene Elemente				
Name	Form	Freiheitsgrade	Beschreibung	
Q8R		6	Gekrümmtes isoparametrisches 8-knotiges Schalenelement mit reduzierter (2x2)-Integration	
T6R		6	Gekrümmtes isoparametrisches 6-knotiges Schalenelement mit reduzierter 3-Punkt-Integration	
Referenzlösungen				
Name	Form	Beschreibung	Referenz	
QUAD8		6	Gekrümmtes isoparametrisches 8-knotiges Schalenelement mit reduzierter selektiver Integration	[93]
Semiloof-Q		6	Gekrümmtes 8-knotiges 'Semiloof'-Schalenelement mit reduzierter (2x2)-Integration	[94]
Semiloof-T		6	Gekrümmtes 6-knotiges 'Semiloof'-Schalenelement mit reduzierter 3-Punkt-Integration auf den Elementkanten	[94]

Tab. 3.1: Eigenschaften der getesteten finiten Elemente

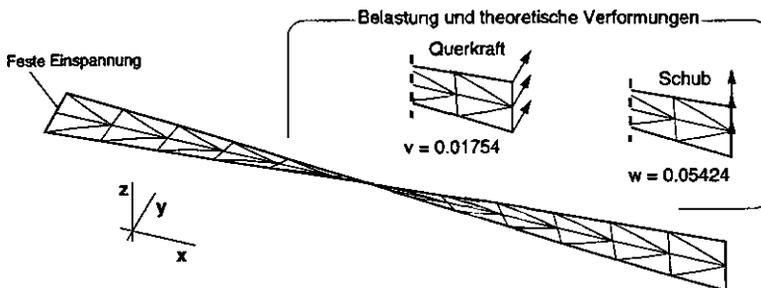
ist bei faserverstärkten Werkstoffen wegen der in nichtsymmetrischen Laminaten auftretenden Schub- und Biegekopplung nicht einzusetzen [95].

Tordierter Balken

MACNEAL und HARDER [93] sehen eine Reihe von Balken-Testmodellen vor, um den Einfluß verschiedener Lastzustände, der geometrischen sowie der räumlichen Elementverzerrung, zu untersuchen. Bild 3.18 zeigt einen tordierten Balken, der unter den zwei dargestellten Lastfällen getestet wurde. Die Ergebnisse zeigen geringe Abweichungen bis zu 3%, was darauf hinweist, daß die Elemente unempfindlich auf eine räumliche Elementkrümmung reagieren. Das Semiloof-Element [94] zeigt demgegenüber um 36% zu große Verformungen.

Kugelschale

Das Konvergenzverhalten bei räumlicher Krümmung der Elemente ist ebenfalls Gegenstand des in Bild 3.19 dargestellten Beispiels einer Kugelschale, die an ihrem Äquator durch eine punktförmige Querkraft belastet ist. Aus



Lastrichtung	Normalisierte Verformung in Lastrichtung				
	Q8R	T8R	QUAD8	Semiloof-Q	Semiloof-T
Querkraft	0.998	0.997	0.998	1.235	0.995
Schub	0.998	0.998	0.998	1.360	0.994

Bild 3.18: Elementtest mit einem tordierten Balken

Symmetriegründen reicht ein Viertel der Schale für die Analyse aus. Die Kugelschale ist mit Netzfeinheiten zwischen 2 und 20 Elementen pro Kante getestet worden. Das achtknotige rechteckige Element mit reduzierter Integration zeigt ein zu dem rechteckigen Semiloof-Element ähnliches Konvergenzverhalten; das sechsknotige dreieckige Element zeigt erwartungsgemäß ein schwächeres Konvergenzverhalten.

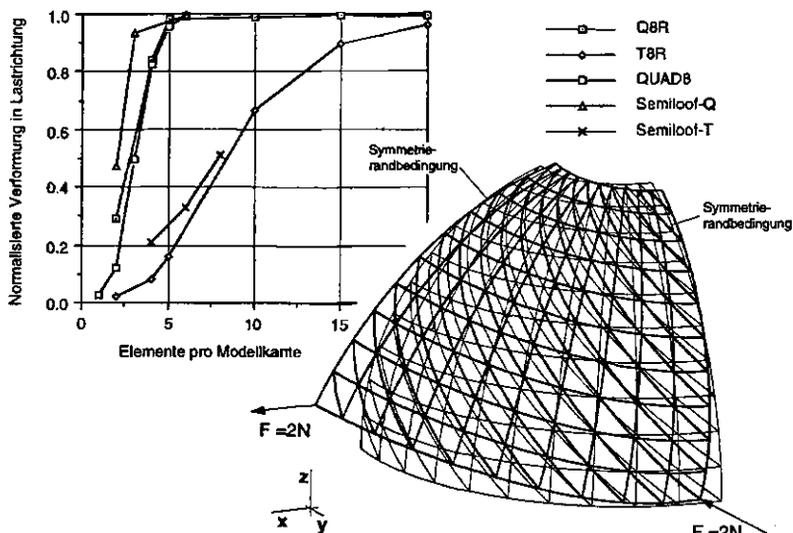


Bild 3.19: Elementtest mit einer auf Biegung belasteten Kugelschale

4 Optimierungstrategien und -methoden

Die Lösung von Entwurfsaufgaben mit Methoden der Strukturoptimierung erfordert eine problemabhängige Auswahl geeigneter Optimierungsverfahren. Dazu benötigt der Anwender eine umfassende Kenntnis der mathematischen Eigenschaften von Ziel- und Restriktionsfunktionen und deren Abhängigkeit von den Entwurfsvariablen. Darüber hinaus haben die Konvexität des Entwurfsraumes sowie die Anzahl der Entwurfsvariablen und Restriktionen wesentlichen Einfluß auf die Wahl des Optimierungsalgorithmus. Ferner sind unterschiedliche Konvergenzgenauigkeiten und -geschwindigkeiten ein Merkmal für die Leistungsfähigkeit der Algorithmen. Restringierte Entwurfsprobleme, aber auch Probleme mit mehrfacher Zielsetzung oder mit zeitvarianten Entwurfsfunktionen können nicht direkt einem numerischen Optimierungsalgorithmus zugänglich gemacht werden. Vielmehr müssen sie mit Hilfe einer geeigneten Optimierungsstrategie auf eine einfachere Ersatzformulierung zurückgeführt werden.

4.1 Nichtlineare und restringierte Optimierung

Die bei der Strukturoptimierung faserverstärkter Kunststoffe vorliegenden Problemstellungen sind restringiert, meist hochgradig nichtlinear und im allgemeinen nicht konvex. Die Existenz von Restriktionen erfordert eine Transformation des Optimierungsproblems, beispielsweise mit Hilfe des LAGRANGE-Verfahrens. Die LAGRANGE-Funktion Λ beschreibt ein nicht-restringiertes Ersatzproblem, das mit Algorithmen der nichtrestringierten Optimierung gelöst werden kann

$$\Lambda(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{X}) - \sum_{j=1}^{m_h} \lambda_j h_j(\mathbf{X}) - \sum_{j=1}^{m_t} \lambda_j (g_j(\mathbf{X}) - t_j^2) \quad (4.1)$$

Die LAGRANGE-Parameter λ_j beschreiben das Maß, inwieweit die zugehörige Restriktion das Minimum der LAGRANGE-Funktion beeinflusst. Ist eine Restriktion nicht aktiv, ist der zugehörige LAGRANGE-Parameter null. Im

Fälle von Ungleichungsrestriktionen muß eine Schlupfvariable t^2 ergänzt werden, die den Abstand der Restriktion vom kritischen Wert darstellt und damit beschreibt, in welchem Maße die Restriktion kritisch ist. Die Bedingungen für die Existenz eines Optimums werden durch Ableiten der LAGRANGE-Funktion bestimmt

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial X_i} &= \frac{\partial f}{\partial X_i} - \sum_{j=1}^{m_h} \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial X_i} - \sum_{j=1}^{m_g} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial X_i} = 0 & i = 1, n \\
 (2) \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_j} &= h_j(\mathbf{X}) = 0 & j = 1, m_h \\
 (3) \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_j} &= -g_j(\mathbf{X}) + t_j^2 = 0 & j = 1, m_g \\
 (4) \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial t_j} &= 2\lambda_j t_j = 0 & j = 1, m_g
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Unter der Voraussetzung, daß der Entwurfsraum keine leere Menge ist und die Gradienten aller Restriktionen linear unabhängig sind, beschreiben (1) und (4) die KUHN-TUCKER-Bedingungen [41] als notwendige Bedingungen für die Existenz eines stationären Punktes. Bild 4.1 zeigt eine grafische Interpretation der KUHN-TUCKER-Bedingungen für einen Entwurfsraum, der durch zwei Ungleichungsrestriktionen begrenzt ist. Liegt der negative Gradient der Zielfunktion zwischen den negativen Gradienten der Restriktionsfunktionen, so wäre eine Verbesserung der Zielfunktion nur durch die Verletzung mindestens einer der Restriktionen möglich. Die KUHN-TUCKER-Bedingungen sind im allgemeinen Fall notwendige, im Falle eines konvexen Entwurfsraumes sogar hinreichende Bedingungen für ein Optimum. Nichtkonvexe Entwurfsräume können im allgemeinen mehr als ein Optimum besitzen, so daß neben dem globalen Optimum noch weitere, lokale Optima existieren. Im Anwendungsbereich der Finite-Elemente-Strukturoptimierung existiert kein Verfahren, mit dem unter vertretbarem Aufwand das globale Optimum eines nichtkonvexen Optimierungsproblems bestimmt werden kann. Aufgrund der trigonometrischen Abhängigkeit der Entwurfsvorgänge führt gerade die Optimierung der Faserorientierung häufig auf nichtkonvexe Problemstellungen. Bild 4.2 zeigt, wie durch die Wahl verschiedener Startentwürfe oder durch eine geschickte Begrenzung des Entwurfsraumes in einigen Fällen das globale Optimum bestimmt werden kann. Dies setzt je-

doch eine genaue Kenntnis des Entwurfsproblems voraus. SVANBERG [96] hat Problemklassen der Gewichtsm minimierung auf Konvexität überprüft und festgestellt, daß Verformungs- und Spannungsrestriktionen nichtkonvexe Optimierungsprobleme hervorrufen können. Ferner zeigt er, daß die Formulierung von Restriktionen der Verzerrungsenergie oder die Formulierung von Verformungsrestriktionen an den Knoten und in der Richtung des Lastangriffs zu symmetrischen Restriktionen führt, die konvexe Entwurfsräume bilden.

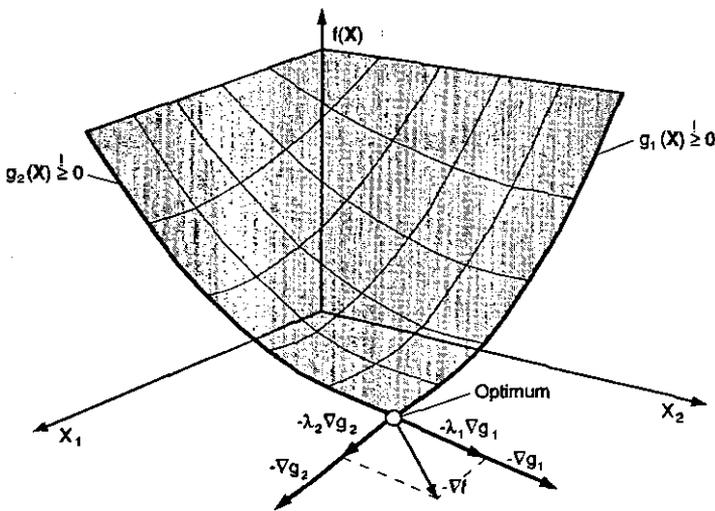


Bild 4.1: Graphische Interpretation der KUHN-TUCKER-Bedingungen für ein Optimierungsproblem mit zwei Ungleichungsrestriktionen

Eine wesentliche Steigerung der Konvergenzgeschwindigkeit und damit eine Reduzierung aufwendiger Finite-Elemente-Analysen läßt sich durch Kombination numerischer Optimierungsalgorithmen mit expliziten Approximationsstrategien erreichen. Numerische Algorithmen, wie das Quasi-Newton-Verfahren oder die Methode des steilsten Abstiegs, benötigen stets mehrere Iterationsschritte zur Bestimmung des stationären Punktes einer nichtlinearen Funktion. Die Anzahl der Funktionsauswertungen kann so groß werden, daß der Aufwand für die Finite-Elemente-Analysen nicht mehr gerechtfertigt ist. Durch Anwendung einer sequentiellen expliziten Approximation der

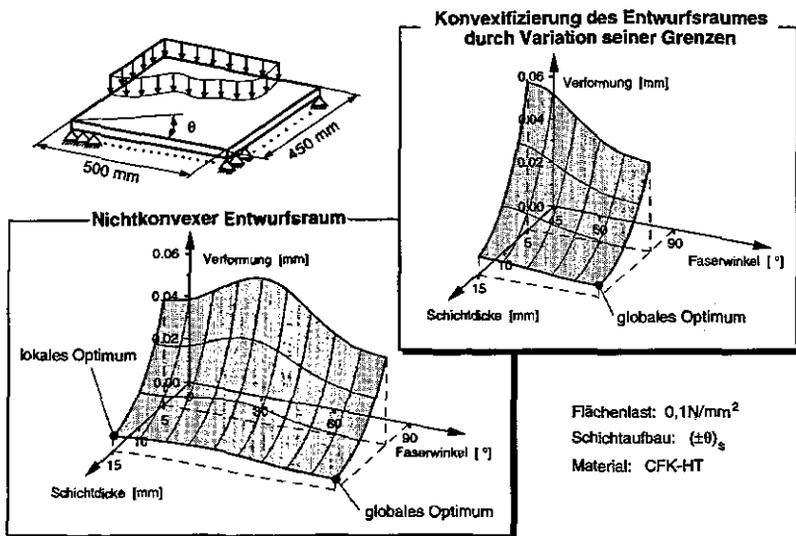


Bild 4.2: Konvexifizierung des Entwurfsproblems durch Variation der Grenzen des Entwurfsraumes

Ziel- und Restriktionsfunktionen kann mit geringem Rechenaufwand die Anzahl der Funktionsaufrufe zwischen den Finite-Elemente-Analysen erhöht werden (Bild 4.3). Je exakter die Approximation das Originalproblem beschreibt, desto weniger Finite-Elemente-Analysen werden zur Aktualisierung des approximierten Optimierungsproblems benötigt. Dieser von SCHMIT und FARSHI [97] erstmals vorgeschlagene Ansatz führte zur Entwicklung einer Vielzahl von Spezialverfahren, deren Approximationsstrategie auf bestimmte Optimierungsproblemlklassen zugeschnitten ist.

Im folgenden werden zwei Verfahren vorgestellt, die im Rahmen dieser Arbeit für die Optimierung des thermoelastischen Verhaltens faserverstärkter Werkstoffe eingesetzt werden. Das SQP-Verfahren ermöglicht die Behandlung allgemeiner Optimierungsprobleme mit Schichtdicken und Faserorientierungswinkeln als Entwurfsvariablen. Duale Verfahren eignen sich für die Optimierung verformungsabhängiger Kriterien mit kontinuierlichen und diskreten Schichtdicken als Entwurfsvariablen.

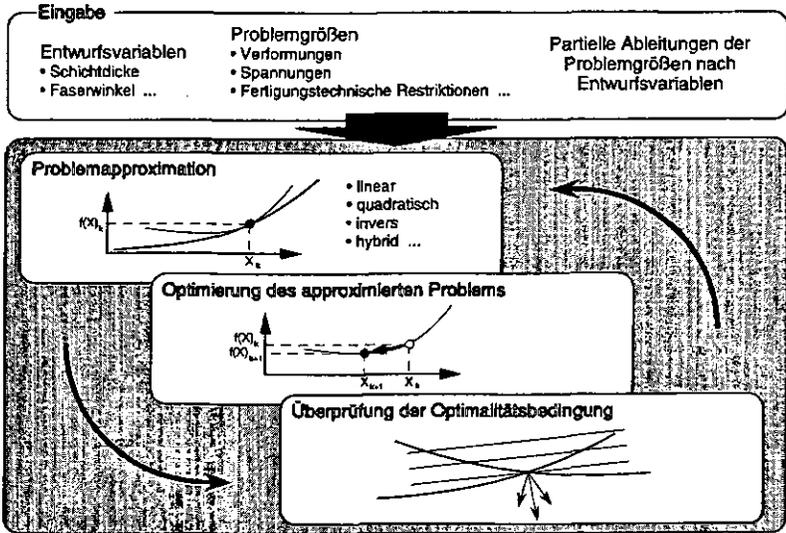


Bild 4.3: Vorgehensweise bei der Lösung nichtlinearer Strukturoptimierungsprobleme

4.1.1 Sequentielle Quadratische Programmierung

Die Sequentielle Quadratische Programmierung (SQP) gehört zu den leistungsfähigsten Optimierungsverfahren für allgemeine Problemstellungen [31,32,98]. Anstatt des Originalproblems wird in jeder Iteration ein quadratisches Subproblem optimiert, das durch eine quadratische Approximation der Zielfunktion und eine lineare Approximation der Restriktionsfunktionen gewonnen wird. X_k sei eine Approximation der Optimallösung, λ_k eine Approximation der LAGRANGE-Multiplikatoren und B_k sei eine Näherung der HESSE-Matrix der k -ten Iteration. Gesucht wird der Vektor einer Suchrichtung d_k als Lösung des quadratischen Subproblems

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \frac{1}{2} d^T B_k d + \nabla f(X_k)^T d & d \in \mathbb{R}^n \\
 \nabla h_j(X_k)^T d + h_j(X_k) &= 0 & j=1, m_h \\
 \nabla g_j(X_k)^T d + g_j(X_k) &\geq 0 & j=1, m_g
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Die Lösung des quadratischen Subproblems (4.3) ergibt die neuen Entwurfsvariablen

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k \quad (4.4)$$

mit α_k als der Schrittweite, die durch eine Penalty-Optimierung bestimmt wird [31,98]. Anschließend erfolgt die Aktualisierung der HESSE-Matrix nach folgendem Gesetz

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k - \frac{\mathbf{B}_k \Delta \mathbf{X} \Delta \mathbf{X}^T \mathbf{B}_k}{\Delta \mathbf{X}^T \mathbf{B}_k \Delta \mathbf{X}} + \frac{\Delta \mathbf{l} \Delta \mathbf{l}^T}{\Delta \mathbf{X}^T \Delta \mathbf{X}} \quad (4.5)$$

mit

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k \quad \Delta \mathbf{l} = \nabla \Lambda(\mathbf{X}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_k) - \nabla \Lambda(\mathbf{X}_k, \boldsymbol{\lambda}_k)$$

Die KUHN-TUCKER-Bedingungen fungieren als Abbruchkriterien für den Optimierungsprozeß des quadratischen Subproblems.

Mit der SQP-Methode lassen sich auch nichtrestringierte Problemstellungen effektiv lösen, wie sie beispielsweise bei der Verformungsminimierung mit Faserorientierungswinkeln als Entwurfsvariablen vorkommen. Es ist jedoch zu beachten, daß wegen der Verwendung einer numerisch ermittelten HESSE-Matrix nach Gleichung (4.5) Unstetigkeiten in den Ziel- und Restriktionsfunktionen ausgeschlossen werden müssen.

Eine wichtige Voraussetzung zur Erzielung optimaler Konvergenzeigenschaften ist die Skalierung des Optimierungsproblems, so daß Änderungen der Entwurfsvariablen Änderungen in den Entwurfsmethoden in der gleichen Größenordnung verursachen. Die Skalierung von Ziel- und Restriktionsfunktionen sowie ihrer Gradienten erfolgt nach folgender Vorschrift

$$f(\mathbf{X})_{\text{skal.}} = f(\mathbf{X}) \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_{k=1}^2} \quad (4.6)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_{\text{skal.}} = \frac{\partial f}{\partial X_i} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_{k=1}^2} \quad (4.7)$$

4.1.2 Duale Verfahren

Neben den SQP-Methoden für allgemeine Optimierungsprobleme sind speziell für die Gewichtsminimierung unter verformungsabhängigen Restriktionen leistungsfähige Spezialverfahren entwickelt worden [34,35], die effektiv für die Optimierung der Schichtdicken faserverstärkter Bauteile eingesetzt werden können. Unter der Voraussetzung, daß ein beschränktes Optimierungsproblem mit konvexer Zielfunktion und konkaven Restriktionsfunktionen vorliegt, kann anstatt des originalen oder primalen Problems folgendes duale Problem gelöst werden:

Maximiere die LAGRANGE-Funktion

$$\max \Lambda(\boldsymbol{\lambda}) \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}_+^m$$

so daß

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, m_h \quad (4.8)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, m_g$$

dann gilt

$$\max \Lambda(\boldsymbol{\lambda}) = \min \Lambda(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{X}) \quad \mathbf{X} \in C$$

mit C als endlichen und konvexen Entwurfsraum des Optimierungsproblems. Die Maximierung der LAGRANGE-Funktion ist ein unbeschränktes Problem und kann anschließend mit einem Standardverfahren, beispielsweise der Methode des steilsten Anstiegs, erfolgen. Die Eigenschaft, daß das Maximum bezüglich der dualen Variablen $\boldsymbol{\lambda}$ und das Minimum bezüglich der primalen Variablen \mathbf{X} auf einen Punkt fallen, bedingt die in Bild 4.4 dargestellte sattelförmige Gestalt der LAGRANGE-Funktion. Da das Optimierungsproblem allein für die dualen Variablen gelöst wird, ist die Problemgröße unabhängig von der Anzahl der Entwurfsvariablen. Im Gegensatz zur SQP-Methode, die einen oszillierenden Optimierungsverlauf zeigt, liefern die Dualen Verfahren ständig verbesserte Lösungen und nähern sich monoton dem Optimum.

Duale Verfahren sind besonders leistungsfähig, wenn sie in Zusammenhang mit einer konvexen und separablen Approximationsstrategie eingesetzt werden, denn dann erfüllt das approximierte Problem die Voraussetzungen zur

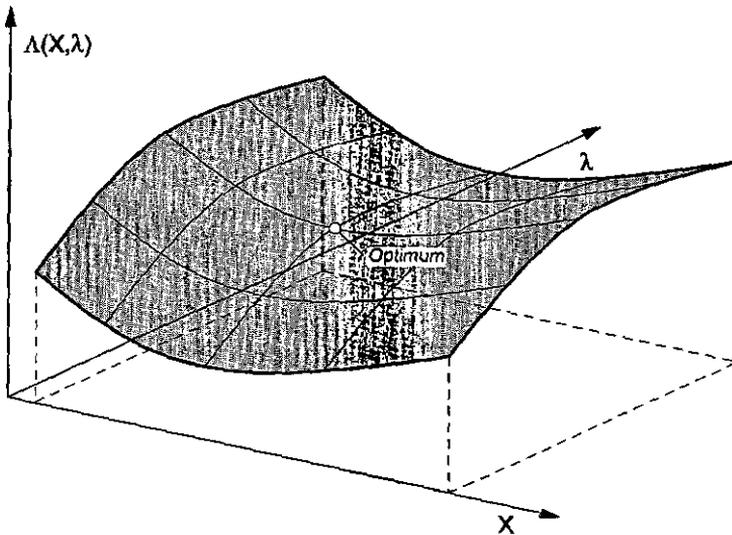


Bild 4.4: Lösung eines Optimierungsproblems als Sattelpunkt der LAGRANGE-Funktion

Anwendung des Dualitätsprinzips, und außerdem kann die Maximierung der LAGRANGE-Funktion als Sequenz eindimensionaler Optimierungsprobleme gelöst werden. Die von FLEURY [35] vorgeschlagene hybride Approximation der Ziel- und Restriktionsfunktionen hat sich besonders für die Optimierung der Schichtdicken faserverstärkter Werkstoffe bewährt

$$\tilde{f}(X_i) = f(X_{i0}) + \sum_{+} \frac{\partial f}{\partial X_i} (X_i - X_{i0}) + \sum_{-} \frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{X_{i0}}{X_i} (X_i - X_{i0}) \quad (4.9)$$

Abhängig vom Vorzeichen der Gradienten wird entweder eine lineare oder eine inverse Approximation durchgeführt. Damit ist diese Approximationsstrategie speziell auf die Gewichtsminimierung unter verformungsabhängigen Restriktionen zugeschnitten, denn die Zielfunktion wird linear und damit exakt approximiert, während die verformungsabhängigen Restriktionen im allgemeinen hyperbolische Funktionen der Schichtdicken mit negativen Gradienten darstellen und damit besser invers approximiert werden.

Die Anwendung der hybriden Approximation auf Optimierungsprobleme unter komplexen statischen und thermoelastischen Belastungszuständen so-

wie auf schlecht skalierte Probleme, die wegen großer Unterschiede in den Schichtdicken gerade bei der Optimierung faserverstärkter Werkstoffe auftreten, bietet nicht immer eine ausreichende Approximationsqualität, die sich in einer Abschwächung der Konvergenzeigenschaften des Algorithmus äußert. Die von SVANBERG [36] eingeführte Method of Moving Asymptotes stellt eine Erweiterung der hybriden Approximationsstrategie dar, die es erlaubt, die Krümmung der hyperbolischen Approximationsfunktionen an die Entwurfslinien anzupassen

$$\begin{aligned} \tilde{f}(X_i) = f(X_{i0}) + \sum_{+} \frac{\partial f}{\partial X_i} (U_i - X_{i0})^2 \left(\frac{1}{U_i - X_i} - \frac{1}{U_i - X_{i0}} \right) \\ + \sum_{-} \frac{\partial f}{\partial X_i} (X_{i0} - L_i)^2 \left(\frac{1}{X_i - L_i} - \frac{1}{X_i - L_{i0}} \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Mit Hilfe der Werte L und U kann die Krümmung der Asymptoten gesteuert werden, so daß eine Beeinflussung der Approximationsqualität der Entwurfslinien gegeben ist. SVANBERG [36,37] gibt Regeln zur Auswahl der Asymptotenkrümmungen L und U an, die auch für die Optimierung faserverstärkter Werkstoffe geeignet sind.

Ferner ist die Duale Methode erfolgreich um die Behandlung diskreter Entwurfsvariablen erweitert worden [99], so daß es beispielsweise möglich ist, Schichtdicken in diskreten Sequenzen zu optimieren. KÖLSCH [39] zeigt, daß eine Rundung der Ergebnisse einer kontinuierlichen Optimierung auf die diskreten Werte zu falschen Ergebnissen führen kann und begründet damit den Einsatz diskreter Optimierungsverfahren.

4.2 Optimierung nach mehreren Zielen

In den seltensten Fällen liegt ein Strukturoptimierungsproblem mit einem einzelnen Zielkriterium vor, vielmehr sind gleichzeitig mehrere Entwurfsziele zu berücksichtigen. Im allgemeinen widersprechen sich diese Ziele, so daß die Verbesserung des einen zur Verschlechterung mindestens eines der anderen Ziele führt. Dieser Zielkonflikt wird deutlich bei der gleichzeitigen Forderung nach dem 'minimalen Volumen' und der 'minimalen Verformung'

einer Struktur; aber auch die ausschließliche Berücksichtigung thermoelastischer Verformungskriterien ergibt vielfach eine Auslegung, die mit statischen Steifigkeitskriterien konkurriert. Es muß also eine Kompromißlösung gefunden werden, die allen Anforderungen so gut wie möglich genügt.

Kann der Anwender das Anspruchsniveau angeben, das an ein Kriterium zu stellen ist, ist die Formulierung dieses Kriteriums als Restriktion möglich. Anderenfalls müssen Methoden der Multikriterien- oder Vektoroptimierung angewendet werden. Sie liefern eine Menge von Kompromißlösungen, die den sogenannten funktionaleffizienten Rand des Entwurfsraumes bilden, aus der sich der Anwender diejenige optimale Kompromißlösung auswählen kann, die seinen Anforderungen am besten genügt. Optimalpunkte des funktionaleffizienten Randes zeichnen sich dadurch aus, daß die Verbesserung eines Kriteriums nur durch die Verschlechterung mindestens eines der anderen erreicht werden kann. **Bild 4.5** zeigt den funktionaleffizienten Rand eines konvexen und eines nichtkonvexen Optimierungsproblems mit zwei Zielfunktionen. Es ist ersichtlich, daß nur bei konvexen Problemstellungen der funktionaleffiziente Rand eine zusammenhängende Kurve ist.

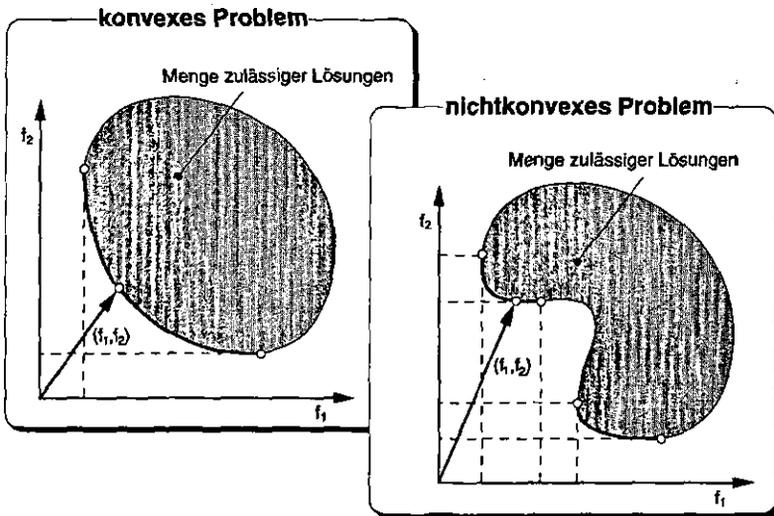


Bild 4.5: Funktionaleffizienter Rand konvexer und nichtkonvexer Vektoroptimierungsprobleme mit zwei Zielfunktionen

Zur Lösung von Multikriterienproblemen werden Verfahren herangezogen, die eine vektorielle Zielfunktion in eine Präferenzfunktion transformieren, deren Optimum einen einzelnen Punkt des funktionaleffizienten Randes liefert. Die Lage dieses Lösungspunktes auf dem funktionaleffizienten Rand kann durch die Wahl von Wichtungsfaktoren der Präferenzfunktion beeinflusst werden. DUCKSTEIN [100] gibt eine Übersicht der verbreiteten Ersatzproblemformulierungen. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Methode der Zielgewichtung, die restriktionsorientierte Transformation sowie Normmethoden für die thermoelastische Optimierung faserverstärkter Werkstoffe eingesetzt und deren Eignung anhand von Beispielen verglichen (Bild 4.6).

4.2.1 Methode der Zielgewichtung

Die Methode der Zielgewichtung bildet eine Präferenzfunktion in Form der gewichteten und normierten Summe der Komponenten des Zielfunktionsvektors. Die Wichtungsfaktoren bieten die einfache Möglichkeit, die Zielvorstellungen zu formulieren, wobei die Steigung der Tangente an den funk-

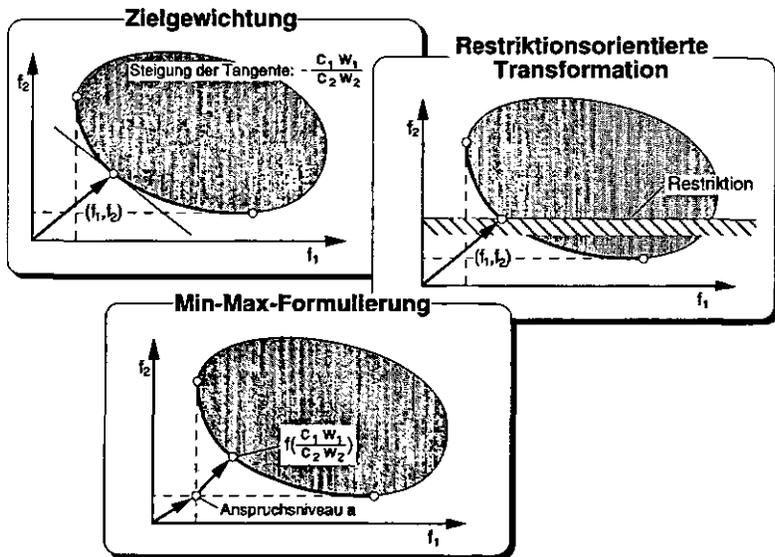


Bild 4.6: Verwendete Methoden der Vektroptimierung der thermoelastischen Eigenschaften faserverstärkter Kunststoffe

tionaleffizienten Rand dem Quotient der Wichtungsfaktoren entspricht

$$p[\mathbf{f}(\mathbf{X})] = \sum_{j=1}^{m_f} w_j c_j f_j(\mathbf{X}) \quad w_j \geq 0 \quad (4.11)$$

mit

$$c_j = \frac{1}{f_j^*} \quad (4.12)$$

als Normierungsfaktor, der sich aus den Startwerten f_j^* der einzelnen Zielfunktionskomponenten berechnet. Der einfachen Implementation und Anwendung der Methode steht der wesentliche Nachteil gegenüber, daß durch die Wahl der Gewichtungsfaktoren keine direkte Zielvorstellung ausgedrückt werden kann, da lediglich die Tangentensteigung und nicht etwa konkrete Punkte des funktionaleffizienten Randes durch die Gewichte bestimmt werden. Außerdem kann die Zielgewichtung nur auf konvexe Problemstellungen angewendet werden (KOSKI [101]).

4.2.2 Restriktionsorientierte Transformation

Die restriktionsorientierte Transformation wird von KOSKI [102] als Basistechnik der Multikriterienoptimierung bezeichnet. Die vektorielle Zielfunktion wird durch ihre erste Komponente ersetzt

$$p[\mathbf{f}(\mathbf{X})] = f_1(\mathbf{X}) \quad (4.13)$$

und alle weiteren Zielfunktionskomponenten werden als Restriktionen formuliert

$$f_j(\mathbf{X}) - \bar{f}_j \geq 0 \quad j = 2, m_f \quad (4.14)$$

Werden die Sollwerte aller Restriktionen systematisch variiert, kann der gesamte funktionaleffiziente Rand konvexer Probleme bestimmt werden.

Als Beispiel für die Anwendung der restriktionsorientierten Transformation zeigt **Bild 4.7** die Optimierung der thermoelastischen Verformungen einer Werkzeugzustelleinrichtung für eine Ultrapräzisionsdrehmaschine. Das Bauteil aus einem metallischen Werkstoff ist mit einem Piezotranslator ausgerü-

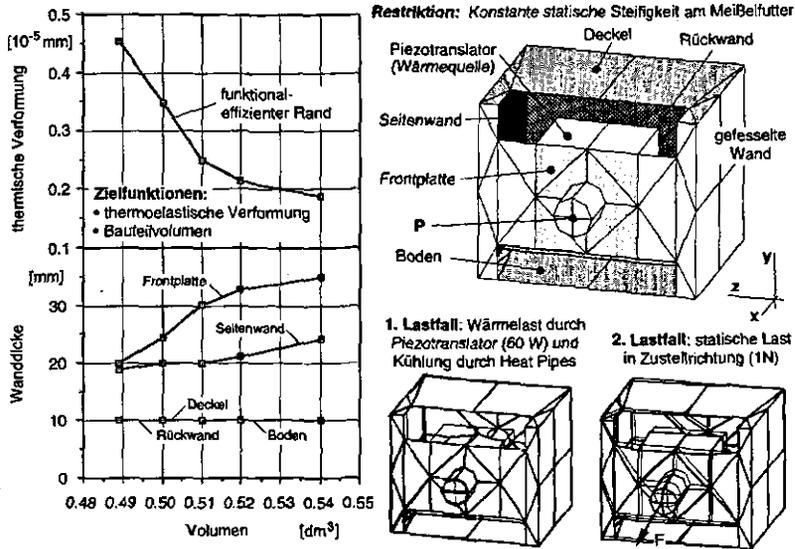


Bild 4.7: Vektoroptimierung des thermoelastischen Verhaltens der Werkzeugzustelleinrichtung einer Ultrapräzisionsdrehmaschine unter Verwendung der restriktionsorientierten Transformation

stet, der hochfrequente Meißelbewegungen in Zustellrichtung ausführt. Der Piezotranslator hat eine Verlustleistung von 60 W, und trotz eingebrachter Kühlung durch Heat Pipes kommt es zu einer thermoelastischen Verformung am Meißelfutter. Die gleichzeitige Minimierung des Bauteilvolumens und der thermoelastischen Verformung sind die Optimierungsziele. Zusätzlich wird eine konstante statische Steifigkeit am Meißelfutter als Restriktion formuliert. Insgesamt wurden fünf Optimierungsrechnungen mit der thermoelastischen Verformung als Ersatzzielfunktion durchgeführt, während das Bauteilvolumen als Restriktion zwischen 0.49 und 0.54 dm³ variiert wurde.

4.2.3 Normmethoden

Normmethoden erlauben die Formulierung der Zielvorstellungen durch die Angabe von Anspruchsniveaus für jede Zielfunktionskomponente. Aufgabe der Ersatzformulierung ist die Suche nach demjenigen funktionaleffizienten Lösungspunkt, der den minimalen Abstand zum Anspruchsniveau darstellt.

Besondere Aufmerksamkeit muß in diesem Zusammenhang der TSCHEBEY-SCHEFF-Norm [103] geschenkt werden, da mit ihr die Lösung nichtkonvexer Vektoroptimierungsprobleme möglich ist. Die Präferenzfunktion lautet

$$p[\mathbf{f}(\mathbf{X})] = \max_{j=1, m_t} \{a_j - f_j\} \quad (4.15)$$

Durch Setzen von $a_j=0$ und Einführen zusätzlicher Wichtungsfaktoren für die normierten Zielfunktionskomponenten erhält man die Min-Max-Formulierung

$$p[\mathbf{f}(\mathbf{X})] = \max_{j=1, m_t} \{w_j c_j f_j\} \quad (4.16)$$

die von FUCHS [104] erfolgreich für die Optimierung faserverstärkter Werkstoffe eingesetzt wurde. Bild 4.8 zeigt die Optimierung eines T-förmigen Rohrkrümmers aus glasfaserverstärktem Kunststoff mit den Zielen minimaler Verformung am Punkt P sowie minimalem Bauteilvolumen. Entwurfsvariablen sind die Dicken des zweischichtigen Laminats sowie die Faserorientierungen in den gezeigten sechs Bereichen des Bauteils. Das Diagramm

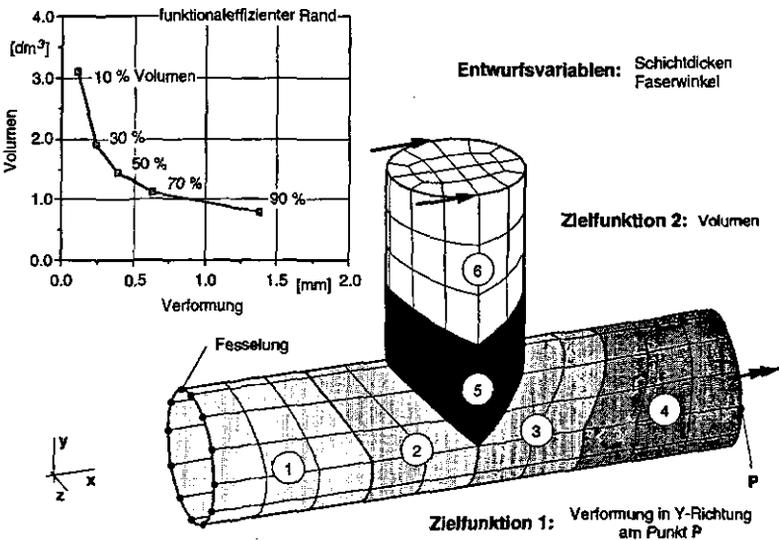


Bild 4.8: Vektoroptimierung eines faserverstärkten Rohrkrümmers unter Verwendung Min-Max-normierter Ersatzzielfunktionen

zeigt den funktionaleffizienten Rand, der durch fünf Optimierungsrechnungen mit verschiedenen Gewichtungsfaktoren erhalten wurde.

Vektoroptimierungsverfahren sind in der Lage, Optimierungsprobleme hinsichtlich mehrerer Zielvorgaben zu lösen. Sie erhöhen jedoch in einigen Fällen die Komplexität des Optimierungsproblems in einem Maße, das die Konvergenz der Lösung abschwächt oder sogar verhindert. Ferner wird bei allen Verfahren vorausgesetzt, daß die Zielvorstellungen dem Konstrukteur vorab bekannt sind, um während der laufenden Optimierungsrechnung aktiv in den Prozeß eingreifen zu können. Solche interaktiven Vektoroptimierungsstrategien sind in neuerer Zeit entwickelt worden [40]. Sie lassen sich jedoch für die Finite-Elemente-Strukturoptimierung wegen der hohen Rechenzeiten in naher Zukunft noch nicht einsetzen.

4.3 Lösung zeitvarianter Optimierungsprobleme

Bei der Optimierung thermoelastischer Kriterien ist in vielen Fällen die zeitlich instationäre Temperaturentwicklung über einen gewissen Zeitraum zu betrachten. Es reicht demzufolge nicht aus, lediglich den stationären Zustand zu optimieren, wenn sich aufgrund zeitlich veränderlicher Wärmequellen während des Betriebes kein Beharrungszustand einstellt oder der stationäre Zustand nicht dimensionierend ist. So können während einer anfänglichen Erwärmungsphase durchaus größere thermoelastische Verformungen auftreten als im thermischen Gleichgewicht. Im Werkzeugmaschinenbau sind es insbesondere Umgebungseinflüsse durch das Hallenklima oder direkte Sonneneinstrahlung sowie innere Wärmequellen durch Verlustleistung der Lager, Antriebe und Führungen und nicht zuletzt die Prozeßwärme, die eine zeitvariante Optimierung des thermoelastischen Verformungsverhaltens notwendig werden lassen [105,106].

Die Lösung eines zeitvarianten Optimierungsproblems verlangt die Minimierung einer zeitabhängigen Zielfunktion. Die zeitabhängigen Restriktionsfunktionen müssen als Nebenbedingungen über den gesamten betrachteten Zeitbereich erfüllt sein, so daß ein zeitvariantes Optimierungsproblem wie folgt formuliert werden kann:

Minimiere die zeitabhängige Zielfunktion

$$\min f(\mathbf{X}, t) \quad 0 \leq t \leq t_f$$

unter Berücksichtigung der Restriktionsfunktionen

$$\begin{aligned} h_j(\mathbf{X}, t) &= 0 & j &= 1, m_h & 0 \leq t \leq t_f \\ g_j(\mathbf{X}, t) &\geq 0 & j &= 1, m_g & 0 \leq t \leq t_f \end{aligned} \quad (4.17)$$

und den unteren bzw. oberen Grenzen der Entwurfsvariablen

$$X_i^a \leq X_i \leq X_i^o \quad i = 1, n$$

Zeitvariante Optimierungsprobleme sind nicht ohne weiteres mit den vorhandenen Optimierungsverfahren lösbar. Vielmehr muß im Vorfeld die Zeitabhängigkeit mit Hilfe einer geeigneten Strategie eliminiert werden. Vorteilhaft ist die Auswahl einer zeitunabhängigen Größe, wie des Bauteilvolumens als Zielfunktion, so daß nur bezüglich der zeitvarianten Restriktionen äquivalente Ersatzformulierungen gefunden werden müssen. Die zur Anwendung kommenden Strategien lassen sich grundsätzlich in diskretisierende und integrative Verfahren einteilen.

4.3.1 Diskretisierende Strategien

Die Diskretisierung der im Zeitbereich $[0, t_f]$ aktiven zeitabhängigen Ziel- und Restriktionsfunktionen stellt die einfachste Ersatzformulierung dar. Dazu wird die zeitabhängige Funktion in n_t diskrete Werte umgewandelt

$$g_i(\mathbf{X}, t_i) \geq 0 \quad i = 1, n_t \quad (4.18)$$

Ein wesentlicher Nachteil dieser Strategie ist die zur Erfassung aller kritischen Zeitpunkte notwendige feine Diskretisierung im Zeitbereich. Daraus folgt häufig eine unzulässig hohe Anzahl von Funktionswerten und damit ein nicht mehr vertretbarer Optimierungsaufwand.

Dieser Nachteil der Diskretisierung wird umgangen, wenn Ziel- und Restriktionsfunktionen lediglich zu kritischen Zeitpunkten diskretisiert und optimiert werden. Diese Überlegung führt zu der von GRANDHL, HAFTKA und WATSON [42] eingeführten Critical Point Constraint. Ähnlich wie bei der Diskretisierung wird die Funktion zu diskreten Zeitpunkten betrachtet; es wird allerdings eine Auswahl kritischer Zeitpunkte vorgenommen, an denen

die Funktion maximale Werte erreicht

$$g_i(\mathbf{X}, t_{mi}) \geq 0 \quad i = 1, n_m \quad (4.19)$$

wobei die zeitvariante Funktion zu den Zeitpunkten t_{mi} ein lokales Maximum besitzt. GREENE [43] beschreibt einen Algorithmus, der bei der Bestimmung der kritischen Zeitpunkte zwischen Haupt- und Nebenmaxima unterscheidet, denn nur die größten Hauptmaxima sind für eine Optimierung relevant.

Die kritischen Zeitpunkte behalten bei Veränderung der Entwurfsvariablen ihre Position auf der Zeitachse bei. Diese Eigenschaft beweisen HAFTKA, GÜRDAL und KAMAT [41] durch Ableiten von (4.19)

$$\frac{\partial g(t_{mi})}{\partial X_i} = \frac{\partial g}{\partial X_i} + \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial X_i} + \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial t_{mi}}{\partial X_i} \quad (4.20)$$

Der letzte Term von (4.20) ist sowohl an inneren Extrempunkten als auch an Randextrema null, so daß Änderungen in den Entwurfsvariablen keinen

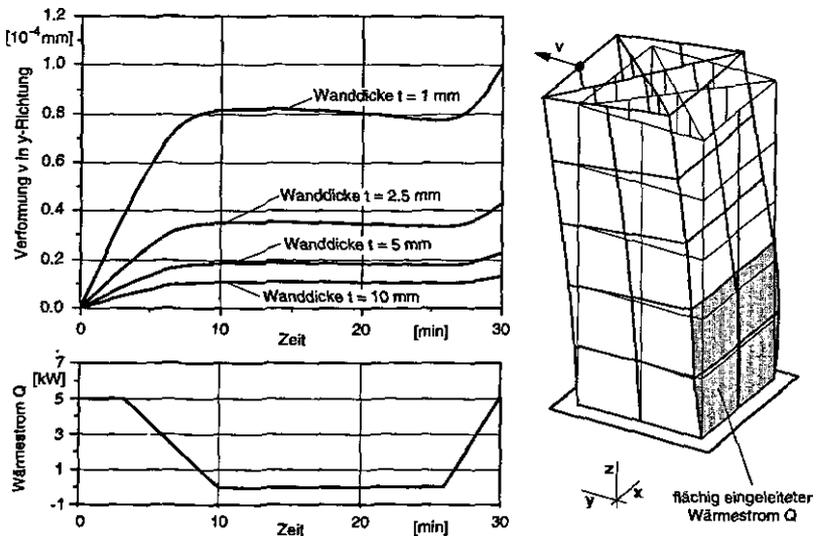


Bild 4.9: Abhängigkeit des Zeitpunktes der Verformungsmaxima von der Wanddicke eines thermisch belasteten Ständerbauteils

Einfluß auf t_{mi} haben. Unter Ausnutzung dieser Eigenschaft ist es möglich, auf einen aufwendigen Algorithmus zur Suche nach kritischen Zeitpunkten zu verzichten. Anstattdessen wählt der Konstrukteur nach einer anfänglichen Strukturanalyse des Startlayouts die kritischen Punkte selbst aus und formuliert sie im Optimierungsmodell als Restriktionen oder Zielfunktionskomponenten. Bild 4.9 zeigt den Verformungsverlauf über der Zeit für verschiedene Wanddicken eines thermisch belasteten Ständerbauteils. Es ist ersichtlich, daß beide Verformungsmaxima ihre Position auf der Zeitachse bei Änderung der Wanddicke beibehalten.

Bild 4.10 zeigt exemplarisch die zeitvariante Minimierung der thermoelastischen Verformungen des in Bild 4.9 dargestellten Ständerbauteils unter gleicher zeitvarianter thermischer Last. Es ergeben sich zwei Maxima der Verformung nach 13 min und nach 30 min, die als kritische Zeitpunkte der transienten Zielfunktion angenommen werden. Mit der Methode der Zielgewichtung wird aus den beiden vektoriellen Zielfunktionskomponenten eine Präferenzfunktion gebildet. Zusätzlich soll die Biegesteifigkeit des Ständers den Wert des Startentwurfs nicht unterschreiten, so daß die Verformung auf-

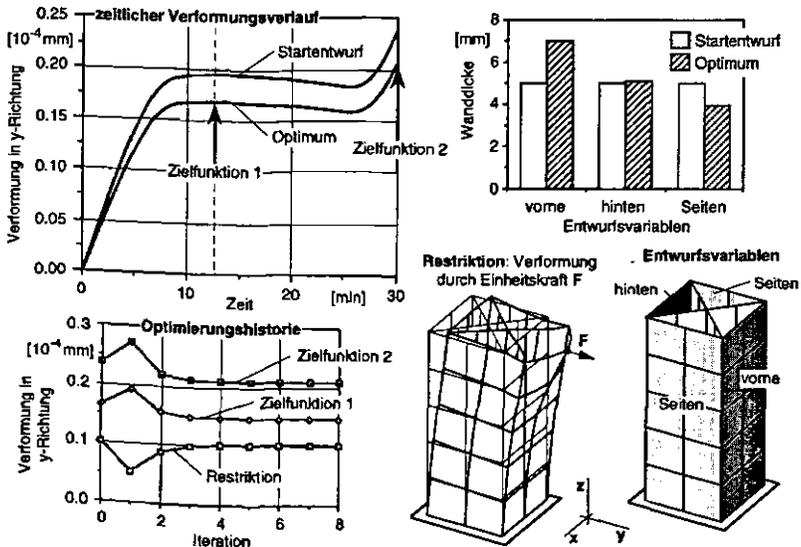


Bild 4.10: Wanddickenoptimierung eines thermisch belasteten Ständerbauteils mit Restriktionsdiskretisierung zu kritischen Zeitpunkten

grund einer Einheitskraft F als Restriktion formuliert wird. Als Entwurfsvariablen werden die Dicken der vorderen und hinteren Wand sowie der Seitenwände gewählt. Nach vier Iterationen ist bereits die optimale Wanddickenverteilung vom Algorithmus gefunden. Die thermoelastische Verformung kann bei gleicher statischer Steifigkeit im gesamten Zeitbereich um 12% reduziert werden. Der Optimierungsverlauf zeigt die schon vielfach beobachtete gegensätzliche Abhängigkeit der thermischen und der statischen Verformungen von den Wanddicken.

4.3.2 Integrative Strategien

Im Gegensatz zu den diskretisierenden Strategien bilden integrative Methoden eine Ersatzformulierung für Ziel- und Restriktionsgrößen, die die Zeitabhängigkeit durch Integration über den betrachteten Zeitbereich eliminiert. Auf diese Weise erhöht sich die Anzahl der Restriktionen nicht. ADELMAN, SAWYER und SHORE [16] formulierten zuerst folgende Ersatzrestriktion als zeitlichen Mittelwert über dem betrachteten Zeitbereich

$$\bar{g}(\mathbf{X}) = \frac{1}{t_f} \int_{t=0}^{t_f} g(\mathbf{X}, t) dt \quad (4.21)$$

Diese Form der Ersatzformulierung neigt allerdings zu einer Glättung der Funktion, die dazu führen kann, daß Entwurfsänderungen nicht empfindlich genug von den Funktionsmaxima gesteuert werden.

Im Gegensatz zu (4.21) bildet die KREISSELMEIER-STEINHAUSER-Funktion [107,108] eine Einhüllende der zeitvarianten Funktion und ist demzufolge immer kritischer als deren zeitlicher Maximalwert g_{\max}

$$\bar{g}(\mathbf{X}) = g_{\max} + \frac{1}{\rho} \ln \left[\sum_{i=1}^{n_t} e^{\rho(g_i - g_{\max})} \right] \quad (4.22)$$

Die KREISSELMEIER-STEINHAUSER-Funktion ist zur Optimierung regelungstechnischer Systeme mit einer großen Anzahl von Entwurfsspezifikationen eingeführt worden [107] und eignet sich im gleichen Maße zur Optimierung zeitvarianter Restriktionen, da sie aus einer Menge von Restriktionen die kritischen in einer Weise gewichtet, daß sich ihr Wert am Maximal-

wert der Funktion g_{\max} orientiert

$$g_{\max} \leq \bar{g} \leq g_{\max} + \frac{1}{\rho} \ln(n_t) \quad (4.23)$$

Je größer der Wert von ρ , desto näher liegt die KREISSELMEIER-STEINHAUSER-Funktion bei g_{\max} . BARTHELEMY und RILEY [108] wählen die Größe von ρ in Abhängigkeit von der Toleranz ε des Optimierungsverfahrens zu

$$\rho = \frac{\ln(n_t)}{\varepsilon} \quad (4.24)$$

Gute Ergebnisse sind mit $\varepsilon=1/1000$ g_{\max} erzielt worden. Die Restriktionsgradienten berechnen sich zu

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial X_i} = \sum_{i=1}^{n_t} e^{\rho(g_i - \bar{g})} \frac{\partial g_i}{\partial X_i} \quad i = 1, n \quad (4.25)$$

Ein wesentlicher Vorteil der KREISSELMEIER-STEINHAUSER-Funktion ist die Bestimmung einer über den gesamten Zeitbereich gültigen Ersatzziel- oder Ersatzrestriktionsfunktion, so daß die Anzahl der Kriterien sich gegenüber der zeitvarianten Problemstellung nicht erhöht. Da der Wert der KREISSELMEIER-STEINHAUSER-Funktion immer größer als g_{\max} ist, ist er stets kritischer als die zeitvariante Funktion selbst, so daß eine Glättung der Funktionswerte und damit eine Unempfindlichkeit gegenüber Änderungen der Entwurfsvariablen nicht auftritt. Die Dominanz von g_{\max} kann allerdings zu Diskontinuitäten führen, wenn es von einer Optimierungsiteration zur nächsten zu einem Wechsel des globalen Maximums kommt. Die Optimierungsverfahren reagieren auf solche Diskontinuitäten in den Entwurfsfunktionen in den meisten Fällen mit einer Abnahme der Konvergenzgeschwindigkeit oder sogar mit divergentem Verhalten.

5 Optimierungssystemlösung

Obwohl die Strukturoptimierung auf eine mehr als dreißigjährige Entwicklungsgeschichte zurückblicken kann, die in wesentlichen Zügen parallel zur Entwicklung der Finite-Elemente-Methode verlief, hat sie nicht in dem Maße Verbreitung gefunden, wie dies für die Finite-Elemente-Methode der Fall ist. Dies ist insofern bemerkenswert, da dem Konstrukteur mit der Strukturoptimierung ein effektives Werkzeug zur Verfügung steht, mit dem er Bauteile und Baugruppen hinsichtlich seiner Anforderungen optimal auslegen kann und das ihn bei den im Laufe konstruktiver Prozesse immer wieder vorkommenden Parameterstudien sinnvoll unterstützt. Im folgenden sollen die Anforderungen an ein Strukturoptimierungssystem sowie eine Systemlösung vorgestellt werden, die einen effektiven Einsatz von Strukturoptimierungsverfahren in der Produktentwicklung erlauben.

5.1 Anforderungen an ein Optimierungssystem

Eine wesentliche Voraussetzung für den effektiven Einsatz der Strukturoptimierung ist die Umsetzung leistungsfähiger Algorithmen in ein Softwaresystem, das hohe Anforderungen hinsichtlich Benutzerführung, Flexibilität bei der Definition von Entwurfsproblemen, Zuverlässigkeit sowie Visualisierung und Nachvollziehbarkeit der Optimierungsergebnisse bietet. Darüber hinaus sind im zunehmenden Maße interdisziplinäre Entwurfsaufgaben zu lösen, bei denen die Wechselwirkung des Strukturverhaltens mit weiteren Einflußgrößen Gegenstand der Optimierung ist. Es lassen sich folgende Anforderungen an ein Optimierungssystem formulieren:

Optimierungsmodellbildung

Bei der Formulierung einer Entwurfsaufgabe als Strukturoptimierungsproblem ist die Urteilsfähigkeit und Erfahrung des Konstrukteurs von entscheidender Bedeutung. Bei der Umsetzung seiner Zielvorstellungen und Anforder-

derungen in ein mathematisches Modell muß das System ihn in sinnvoller Weise unterstützen. Vielfach sind zu Beginn eines Entwurfsprozesses nicht alle Zielvorstellungen und Restriktionen bekannt, so daß Änderungen des Optimierungsmodells sowie Änderungen der Entwurfsvariablen auf einfache und zuverlässige Weise möglich sein müssen. Ferner lassen sich Kompromißlösungen von Zielkonflikten nur durch wiederholte Optimierungsrechnungen unter Variation der Präferenz der beteiligten Zielgrößen finden.

Einbindung in eine CAE-Umgebung

Der interaktive Eingriff in den rechnerunterstützten Optimierungsprozeß bedingt zunächst eine umfassende, grafisch unterstützte Information des Benutzers über den Verlauf von Ziel- und Restriktionsfunktionen, aktuelle Werte der Entwurfsvariablen sowie eine Darstellung der Gradienteninformation, so daß mit Hilfe von trade-off-studies das weitere Optimierungspotential eines Entwurfes ermittelt werden kann [109,110]. Eine derartige Einbindung ist zum einen notwendig, um den Optimierungsprozeß für den Anwender nachvollziehbar zu machen, und zum anderen, um das Vertrauen in die Optimierungsergebnisse und in das Verfahren zu unterstützen.

Um diesen Anforderungen gerecht zu werden, muß das Optimierungssystem integraler Bestandteil einer CAE-Umgebung sein, die es erlaubt, eine schnelle und umfassende Ergebnisdarstellung in grafischer Form durchzuführen, auf deren Basis der Konstrukteur den Entwurf bewertet. Moderne multitasking-Betriebssysteme erlauben eine Abarbeitung der Optimierungsrechnung im Hintergrund, so daß währenddessen am Rechner weitergearbeitet werden kann.

Abbruch und Neustart

Der hochgradig interaktive Charakter des Optimierungsprozesses wird unterstützt durch einfache Möglichkeiten des Abbruchs, der erneuten Initialisierung und des Neustarts der Optimierungsrechnung mit einem unter Umständen geänderten Optimierungsmodell. Dies setzt wiederum voraus, daß Zwischenergebnisse der Optimierung während der laufenden Rechnung betrachtet werden können.

Fehlerdokumentation

Die umfassende Dokumentation sämtlicher Fehlerzustände, von der fehlerhaften Dateneingabe bis zu Fehlerzuständen des Analyse- und Optimierungsmoduls, ist heute selbstverständlicher Bestandteil eines jeden Softwaresystems. Fehlerzustände des Optimierungsalgorithmus, die auf eine unsaubere Optimierungsmodellbildung zurückzuführen sind, können auftreten, wenn durch inkonsistente Restriktionen der Entwurfsraum eine leere Menge ist oder durch fehlerhafte Gradienten keine sinnvolle Lösung gefunden werden kann.

Verschiedene Optimierungsverfahren

Die Leistungsfähigkeit der Optimierungsverfahren ist zum großen Teil in deren Spezialisierung auf bestimmte Problemstellungen begründet, so daß ein Optimierungssystem eine Bibliothek sorgsam ausgewählter Algorithmen enthalten muß. Zur Auswahl eines für eine Problemstellung am besten geeigneten Algorithmus schlagen BALACHANDRAN, GERO [111] und SCHITTKOWSKI [112] den Einsatz wissensbasierter Systeme vor, die aufgrund von Regelwerken abhängig von der Problemstellung dem Benutzer einen geeigneten Algorithmus vorschlagen.

5.2 Beschreibung und Aufbau des Optimierungssystems STRATHOS

Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Methoden haben in dem Optimierungssystem STRATHOS eine softwaremäßige Realisierung gefunden. Das System besteht aus einem FEM-Analysemodul, das die Struktur- und Sensitivitätsanalyse durchführt, sowie einem Optimierungsmodul, das die Aufgabe der Datenakquisition, die Steuerung des Optimierungsablaufes sowie den Aufruf der Optimierungsstrategie und des Optimierungsverfahrens übernimmt. Die Steuerung des Optimierungsablaufes sowie die Anbindung an einen grafisch-interaktiven Pre- und Postprozessor geschieht auf Kommandoprozedurebene. Daten werden über Datensätze zwischen den Programmen ausgetauscht. **Bild 5.1** zeigt die Integration der Module zu einer CAE-Umgebung. Das Programm FEMLINK übernimmt die Datenkonver-

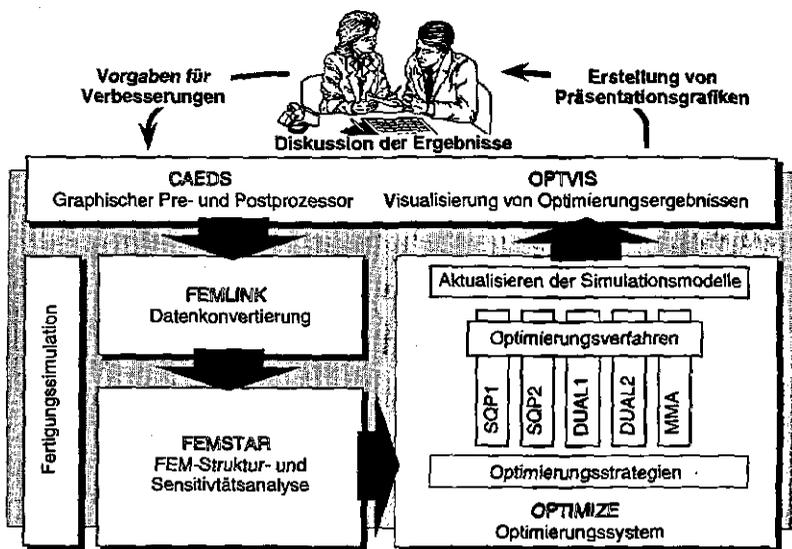


Bild 5.1: Integriertes graphisch unterstütztes Strukturoptimierungssystem als Teil einer CAE-Umgebung

tierung zwischen dem marktgängigen Pre- und Postprozessor und dem Optimierungssystem; das Programm OPTVIS ergänzt das CAE-System hinsichtlich der Darstellung der Optimierungsverläufe und Histogramme.

Die Dateistruktur wird in **Bild 5.2** deutlich. Der Datenaustausch zwischen dem Optimierungssystem und dem graphischen Pre- und Postprozessor wird über ein neutrales Dateiformat gehandhabt. Das Programm FEMLINK übernimmt die Datenkonvertierung, so daß die Integration in andere CAE-Umgebungen durch Austausch dieses Programms bewerkstelligt werden kann und keinerlei Änderungen am eigentlichen Optimierungssystem notwendig sind. Als Eingabe dienen die Dateien des Strukturmodells sowie die Datei des Optimierungsmodells. STRATHOS unterstützt eine redundanzfreie formatfreie und keywordgesteuerte Eingabe, so daß erfahrene Benutzer auch durch direkte Änderung in den Dateien mit dem System arbeiten können. Eine strikte Trennung von Optimierungs- und Strukturmodell erleichtert den Austausch des Finite-Elemente-Systems gegen andere Analysesysteme.

Das Finite-Elemente-Analysesystem produziert während des Analysevorgangs temporäre Dateien, die nach Abschluß der Analyse wieder gelöscht

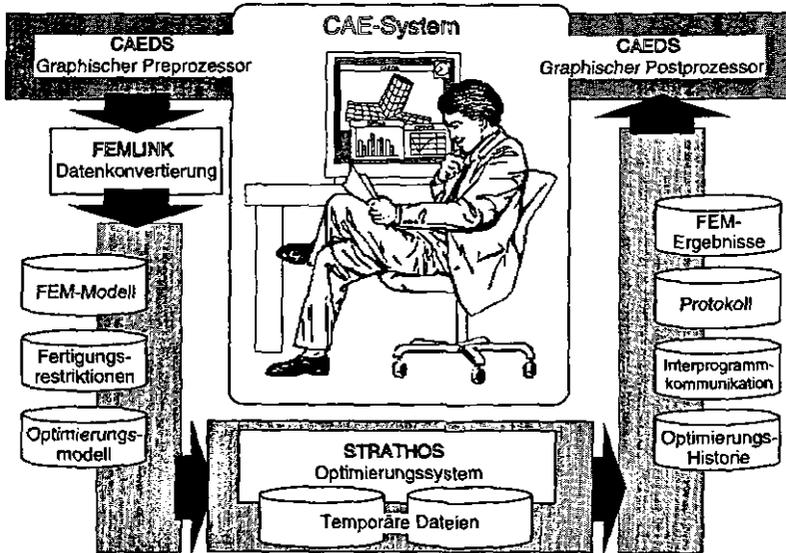


Bild 5.2: Dateistruktur und Integration in eine CAE-Umgebung

werden. Besonders hervorzuheben ist die Möglichkeit, die temporären Daten auf bis zu acht gleichgroße Dateien zu verteilen, um für umfangreiche Analysen den verteilten Plattenspeicher nutzen zu können. Eine Routine prüft zu Beginn der Analyse den benötigten Externspeicherbedarf, der vom Benutzer bereitgestellt werden muß.

Die Inter-Programm-Kommunikation macht bei umfangreichen Optimierungsrechnungen eine schnelle Datenablage und -rückgewinnung über eine gemeinsame Datenbasis notwendig, andererseits muß gerade bei im Hintergrund ablaufenden Programmen eine Plausibilitätskontrolle der Daten gewährleistet sein. In diesem Falle wurde hierzu ein keywordgesteuertes und binäres Datenformat entwickelt, das die Datenrückgewinnung anhand der Keywords zu Beginn jedes Records und eine gleichzeitige Plausibilitätsprüfung der folgenden Daten erlaubt, um so eine effektive und zuverlässige Datenrückgewinnung zu gewährleisten.

5.3 Programmentwicklung und Test

Neben den Anforderungen von seiten des Benutzers stehen Anforderungen des Softwareentwicklers an das System im Vordergrund, die in erster Linie eine gute Wartbarkeit, Erweiterbarkeit und Qualitätssicherung der Software betreffen. Für die Entwicklung von STRATHOS wurden von Anfang an Prinzipien und Methoden des Software-Engineering eingesetzt [113-115], um ein System, das als Forschungsplattform ständiger Fortentwicklung unterworfen ist, mit minimalem Aufwand und maximaler Effizienz und Zuverlässigkeit entwickeln zu können. Folgende Anforderungen standen dabei im Vordergrund:

- Parallelisierung der Softwareentwicklung zur Reduzierung der Entwicklungszeiten
- Leichte Austauschbarkeit von Softwarepaketen durch klar definierte Schnittstellen
- Maximierung des Anteils wiederverwendbarer Software
- Automatisierte Einrichtung zum Systemtest mit dem Ziel maximaler Zuverlässigkeit und Softwarequalität

Der Schlüssel zur effektiven Entwicklung umfangreicher Softwaresysteme ist die modulare Softwareentwicklung, die vom Prinzip der Abstraktion von Daten und Prozeduren Gebrauch macht. Die einzelnen Module sollen sowohl von ihrer Funktion als auch von den ausgetauschten Daten her abgeschlossene und logische Einheiten bilden, denen eine spezifische Aufgabe zugeordnet ist. Abstraktion und Modularität unterstützen nicht nur die Verständlichkeit der Software, sondern auch die Wiederverwendung einzelner Module für andere Fälle, in denen gleiche Teilaufgaben zu lösen sind. Ein exemplarischer Fall soll anhand des Datenflußdiagramms zur Berechnung der Ableitung thermischer Ersatzkräfte nach Entwurfsvariablen erläutert werden (Bild 5.3). Durch Variation der Eingabedaten des Moduls M können die Summanden der Formel berechnet werden, da ihnen der gleiche mathematische Zusammenhang zugrunde liegt. Anschließende Summation sowie die Division durch Δt , ergibt dann den Gradienten. Nicht nur, daß durch diese Anwendung der Prinzipien der Modularität der Entwicklungs- und Test-

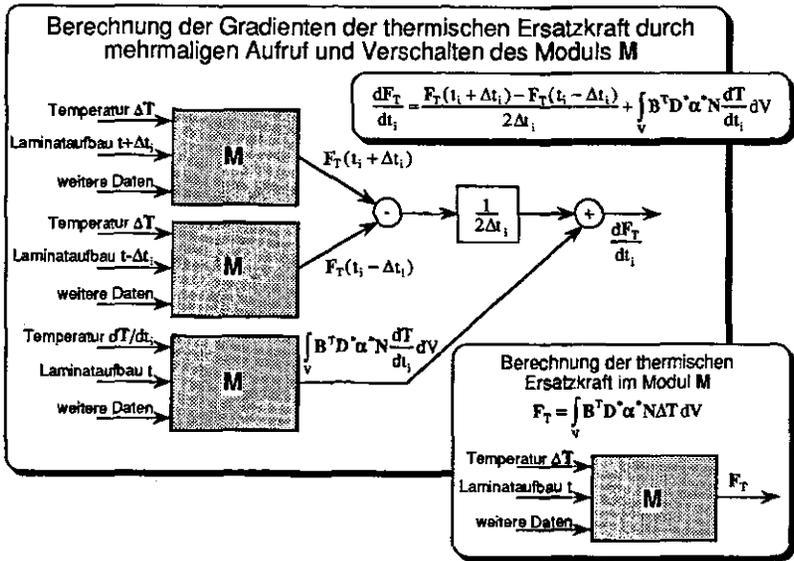


Bild 5.3: Wiederverwendung von Softwaremodulen zur Berechnung von Gradienten der thermischen Ersatzkraft

aufwand wesentlich reduziert werden konnte, zusätzlich wird die Verständlichkeit und Nachvollziehbarkeit des Programmcodes dadurch gefördert, daß die Programmstruktur der mathematisch logischen Struktur des Algorithmus folgt.

Darüber hinaus hat sich im Laufe der Programmentwicklung gezeigt, daß durch Abstraktion und Modularität eine einfache Weiterentwicklung der Software gegeben ist, da selbst eine Erweiterung der Datenstruktur durch die überwiegende Verwendung lokaler, auf die Module beschränkter Datendefinitionen sowie die notwendigen Umstellungen der Programmstruktur auf Systemebene unproblematisch möglich waren. Modularität und lokale Daten sind die Grundlage der parallelen Softwareentwicklung durch mehrere Entwickler. Sie können gleichzeitig an verschiedenen Modulen des Systems arbeiten, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen. Der Aufwand, die getesteten Module in das System zu integrieren, wird auf ein Minimum beschränkt.

Die konsequente Weiterführung der Grundsätze von Modularität und Abstraktion führt auf den Begriff des objektorientierten Entwurfs, der in neuerer Zeit besonders bei der Entwicklung grafischer Systeme weite Anwen-

dung findet [116,117]. Erste Ansätze, die objektorientierte Entwurfsprinzipien auch auf Finite-Elemente-Systeme auszudehnen, beschreibt MACKIE [118]. Der Vorteil des objektorientierten Modells liegt in der Auflösung der strikten Trennung von Daten und Prozeduren. Vielmehr stellen Objekte eine Zusammenfassung zugeordneter Daten und Operationen dar. Objekte haben folgende herausragende Eigenschaften: Sie gestatten Datenverarbeitung durch Übermittlung von Nachrichten zwischen Objekten. Objekte werden hierarchisch zu Klassen zusammengefaßt. Die Eigenschaften der übergeordneten Klasse kann auf die untergeordnete vererbt werden. Die Klassenstruktur unterstützt die Wiederverwendung von Prozeduren für verschiedene Nachkommen der gleichen Klasse. Der objektorientierte Ansatz kann zu einer sinnvollen Strukturierung der Problemstellung führen, die vor allem die Wiederverwendbarkeit von Software, die Erweiterbarkeit und die Robustheit komplexer Softwaresysteme fördert. Inwieweit der objektorientierte Softwareentwurf die Entwicklung von Optimierungssystemen unterstützen kann, soll exemplarisch anhand der objektorientierten Interpretation von Struktur- und Optimierungsmodell sowie deren Relation zueinander gezeigt werden (Bild 5.4).

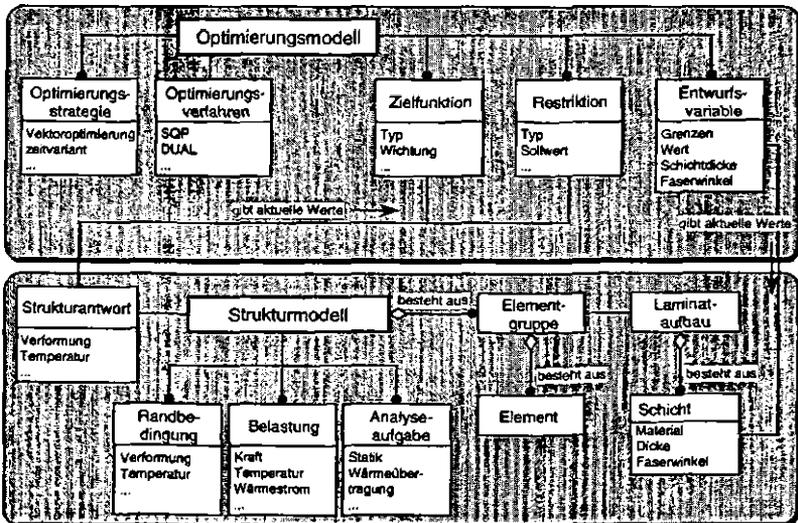


Bild 5.4: Objektorientierte Interpretation von Struktur- und Optimierungsmodell sowie deren Relation zueinander

Das Strukturmodell besteht aus finiten Elementen, Randbedingungen und Belastungen, die durch Definition einer Analyseaufgabe eine vollständige Beschreibung des Strukturverhaltens ermöglichen. Durch die Einführung von Elementgruppen, denen ein Laminataufbau mit sämtlichen erforderlichen Materialeigenschaften zugeordnet ist, wird die Definition von Elementeigenschaften wesentlich vereinfacht. Elementgruppen repräsentieren zusammenhängende, aus einem Material bestehende Gebiete des Gesamtmodells.

Das Optimierungsmodell dient zur Definition der Entwurfsaufgabe sowie der Festlegung der verwendeten Optimierungsstrategie und des Algorithmus. Die Definition von Ziel- und Restriktionsfunktionen bezieht sich auf physikalische Größen, die das Strukturmodell zur Verfügung stellt. Ferner ist durch die direkte Zuordnung der Entwurfsvariablen zu einer oder zu mehreren Elementgruppen eine einfache, leicht nachvollziehbare und logische Verknüpfung der beiden Modelle gegeben.

Darüber hinaus bietet die dargestellte saubere Trennung von Struktur- und Optimierungsmodell die Möglichkeit, auf einfache Weise weitere Simula-

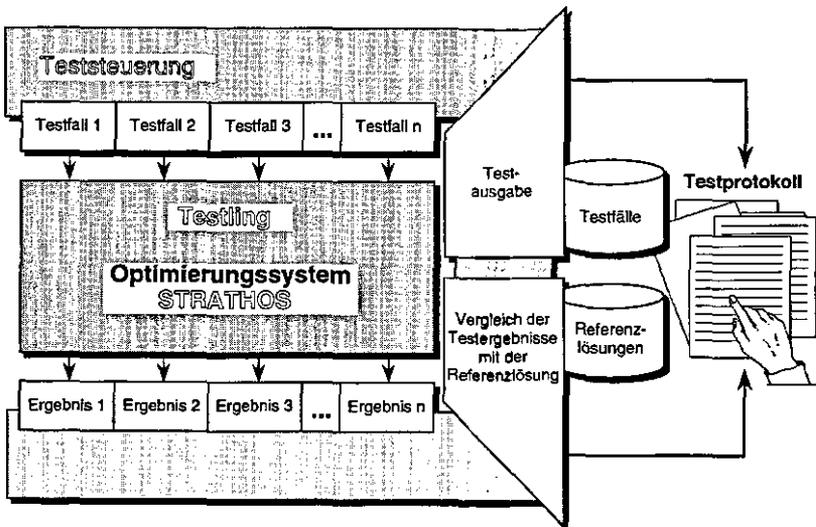


Bild 5.5: Testumgebung für das Optimierungssystem STRATHOS

tionsmodelle einzubinden und damit beispielsweise eine Fertigungssimulation oder weitere Strukturanalysesysteme zu integrieren.

Jede Weiterentwicklung eines Programmsystems bedingt umfassende Systemtests, um einen überprüfbaren und jederzeit reproduzierbaren Nachweis der Korrektheit, Zuverlässigkeit und anforderungsgerechten Leistungsfähigkeit des Systems zu führen [115]. Der Test umfangreicher Softwaresysteme kann mit Hilfe eines Testsystems automatisiert durchgeführt werden, in welches das Programmsystem als Testling eingebettet ist und das anhand einer Reihe ausgewählter Testfälle möglichst viele kritische Zustände der Software überprüft. Bild 5.5 zeigt das für STRATHOS entwickelte Testsystem. Ein Testtreiber steuert als Kommandoprozedur den Aufruf des Testlings mit in einer Testbibliothek abgelegten Testfällen. Die Ergebnisse werden anschließend mit in der Testbibliothek ebenfalls abgelegten Referenzergebnissen verglichen. Ein Protokoll gibt Aufschluß über die erfolgreiche Durchführung des Tests oder meldet gegebenenfalls Unterschiede zur Referenzlösung. Der Auswahl der Testfälle muß große Aufmerksamkeit gewidmet werden, denn zur Verfolgung einer vollständigen Testüberdeckung muß jeder Programmpfad mindestens einmal durchlaufen werden. Ferner müssen die Steuerung des Programmablaufes sowie die Algorithmen gleichermaßen getestet werden. Der Test ist nur aussagekräftig, wenn Grenzzustände der Software überprüft werden. Zum vollständigen Systemtest gehört die Provokation von Systemfehlern und die Überprüfung, ob diese Systemfehler korrekt abgefangen werden.

Ein automatisiertes Testsystem bietet die Möglichkeit, mit einem minimalen Personalaufwand eine maximale Softwarequalität zu erreichen. Zu jeder Erweiterung des Systems gehört dann selbstverständlich neben der Dokumentation der Software die Ausarbeitung adäquater Testbeispiele.

6 Anwendung

6.1 KFZ-Rad unter thermischer Last durch die Scheibenbremse

KFZ-Räder aus Faserverbundkunststoffen gelten als Alternative zu Rädern aus Aluminium, weil sie neben einem geringeren Gewicht eine größere Schadenstoleranz aufweisen. Da in der Praxis bislang wenig Erfahrung mit dem Einsatz faserverstärkter Kunststoffe für KFZ-Räder vorliegt, sind umfangreiche Berechnungen und Optimierungsmaßnahmen notwendig, um ein gewichtsoptimales Rad zu entwerfen. Neben statischen und thermischen Belastungen im Fahrbetrieb wirken zusätzlich hygrothermische Langzeiteinflüsse sowie Beanspruchungen durch Steinschlag oder etwa durch Montage des Reifens auf die Felge. Beschädigungen des Felgenhorns durch Kollision können durch die Verwendung des CTS-Systems weitgehend vermieden werden. Dabei greift der Reifen um das Rad herum und umschließt auf diese

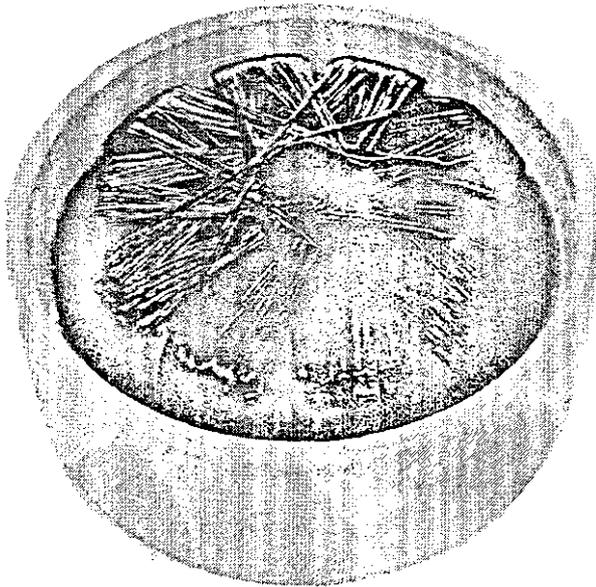


Bild 6.1: KFZ-Rad aus faserverstärktem Kunststoff (System CTS)

Weise das Felgenhorn (Bild 6.1). Untersuchungen haben gezeigt [119], daß sowohl der Lastfall "Kurvenfahrt mit gleichzeitigem Abbremsen" als auch die thermische Belastung durch die Scheibenbremse nach einer Paßfahrt mit anschließendem Stand zu den dimensionierenden Lastzuständen führen.

Die entwickelten Methoden und Softwaresysteme sind auf die Gewichtsminderung des CTS-Rades angewendet worden, wobei geforderte Steifigkeits- und Festigkeitskriterien bei thermischer Kurzzeitbelastung sowie Belastung durch angreifende Kräfte im Fahrbetrieb eingehalten werden sollten. Bild 6.2 zeigt das Finite-Elemente-Modell mit 1140 achtknotigen gekrümmten Schalenelementen und 3468 Knoten.

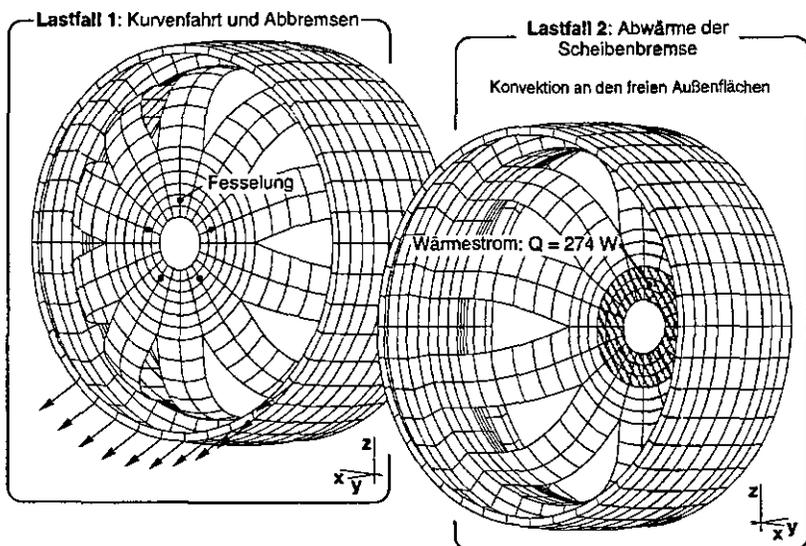


Bild 6.2: Finite-Elemente-Modell mit eingezeichneten Belastungen

Der thermische Lastzustand wird durch eine maximale Aufheizung der Bremsscheibe beschrieben, die aufgrund der Isolierung des Radspiegels mit einem Temperaturdistanzring geringer Wärmeleitfähigkeit zu einer Aufheizung der Nabe auf 120°C führt. Die auf die Innenseite des Rades wirkende Strahlung der glühenden Bremsscheibe kann aufgrund einer geeigneten Abschirmung vernachlässigt werden [119].

Das Rad wird in Wickeltechnik gefertigt und basiert auf einer zweiteiligen Bauweise, bestehend aus Radscheibe und Radfelge. Während die Radscheibe aus CFK-HT mit Epoxidharzmatrix so gewickelt ist, daß die Fasern radial in den Speichen verlaufen und der Radspiegel als Kreuzungszone dient, wird die Radfelge aus einem ($\pm 45^\circ, 90^\circ$)-Gelege aus GFK mit Epoxidharzmatrix gefertigt, das anschließend durch gewickelte Fasern auf der Form fixiert wird. Der Hohlkörper wird mit einem Schaumkern ausgefüllt.

Die Elastizitäts- und Festigkeitskennwerte sowie die thermischen Materialkenngrößen sind in **Tab. 6.1** aufgeführt. Die Materialkennwerte werden aus den Werten für Faser und Matrix berechnet.

Elastizitätskenngrößen								
Material	E_{11} [MPa]	E_{22} [MPa]	ν_{12} []	G_{12} [MPa]	G_{13} [MPa]	G_{23} [MPa]	Referenz	
E-Glas	45200	8970	0.29	5530	5530	1300	[54]	
CFK-HT	144200	6790	0.31	5710	5710	1300	[54]	
Thermische Kenngrößen								
Material	λ_{11} [W/mK]	λ_{22} [W/mK]	λ_{33} [W/mK]	α_{11} [10^{-6}K^{-1}]	α_{22} [10^{-6}K^{-1}]	α_{33} [10^{-6}K^{-1}]	c [J/kgK]	Referenz
E-Glas	1.1	0.9	0.9	6.55	31.55	31.55		[76]
CFK-HT	10.0	1.5	1.5	-0.16	29.21	29.21	1000	[76,120]
Festigkeitskenngrößen								
Material	σ_{11Bz} [MPa]	σ_{11Bz} [MPa]	σ_{22Bz} [MPa]	σ_{22Bz} [MPa]	τ_{12B} [MPa]		Referenz	
E-Glas	1000	645	40	142	62		[54]	
CFK-HT	1250	1250	50	142	84		[54]	

Tab. 6.1: Materialkennwerte der verwendeten faserverstärkten Werkstoffe

Eine anfängliche Strukturanalyse des Startentwurfs zeigte eine geringe Reserve zur Versagensgrenze durch Zwischenfaserbruch im Lastfall "Kurvenfahrt und Abbremsen" sowie eine Verformung von 2 mm im Radaufstandspunkt (**Bild 6.3**). Der thermische Lastfall führte zu einem Faserbruchkriterium von 0.3 und vernachlässigbaren Verformungen im Radaufstandspunkt (**Bild 6.4**).

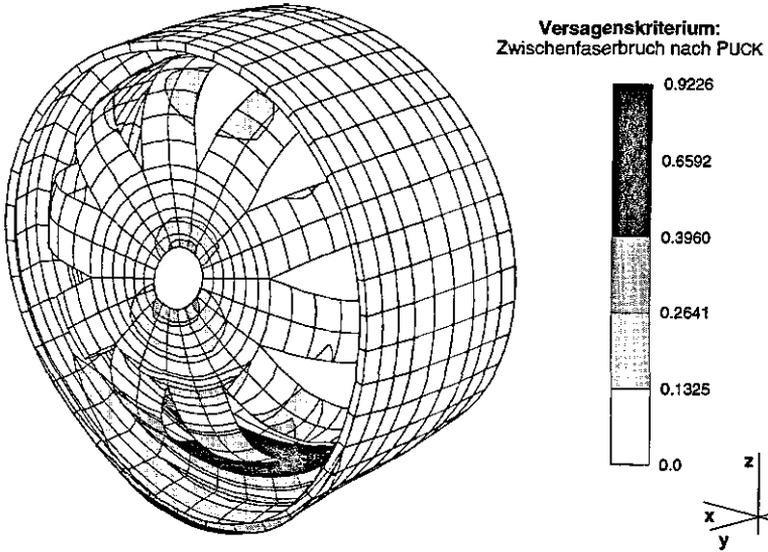


Bild 6.3: Ergebnis der Strukturanalyse für den Lastfall "Kurvenfahrt und gleichzeitiges Abbremsen"

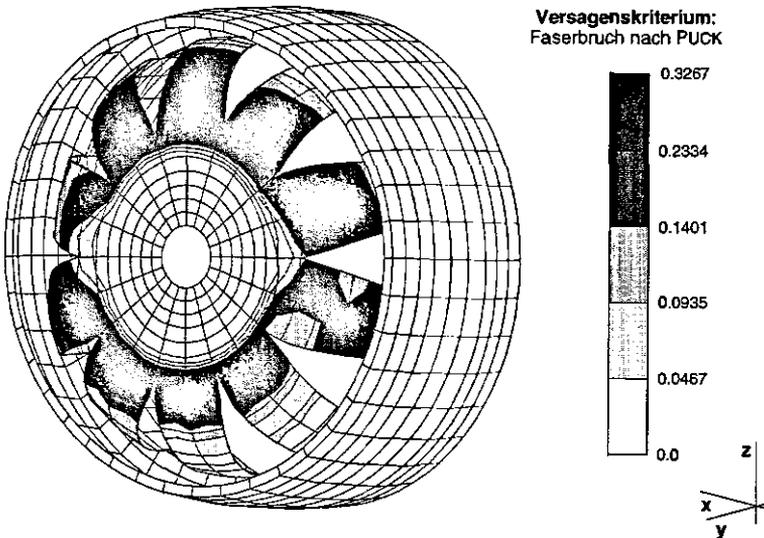


Bild 6.4: Ergebnis der Strukturanalyse für den thermischen Lastfall "Abwärme durch die Scheibenbremse"

Ziel der anschließenden Optimierung ist die Gewichtsminimierung des Rades unter Berücksichtigung folgender Restriktionen:

- Verformungen in x - und y -Richtung durch Lastfall "Kurvenfahrt und Abbremsen" im Radaufstandspunkt $v \leq 3 \text{ mm}$, $w \leq 3 \text{ mm}$
- Versagenskriterien durch Lastfall "Kurvenfahrt und Abbremsen" $B \leq 0.6$
- Versagenskriterien durch thermischen Lastfall $B \leq 0.6$

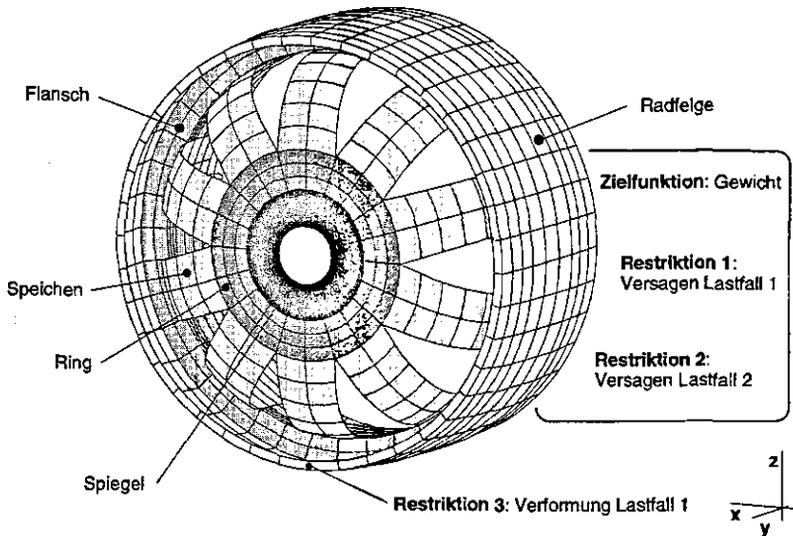


Bild 6.5: Optimierungsmodell und Einteilung der Struktur in Entwurfsvariablen

Das Rad ist in 5 Optimierungsbereiche unterteilt (Bild 6.5), innerhalb derer die Schichtdicken variieren können. Fertigungstechnische Restriktionen des Wickelprozesses bestimmen die Verteilung der Schichtdicke in den Speichen, im Ring und im Spiegel. Während die Fasern in den Speichen radial angeordnet sind, wird im Ring und im Spiegel als Kreuzungszone der Fasern ein quasiisotroper Laminataufbau angenommen. Nach der Kontinuitätsbedingung ist das Dickenverhältnis in den Strukturbereichen Speichen, Ring und Spiegel nahezu 1:2:3. Diese Relation ist durch variable linking verschiedener Schichten zu einer Entwurfsvariablen realisiert.

Da die Zeit der Wärmeeinwirkung auf das Rad nicht begrenzt ist, soll der thermisch stationäre Zustand der Optimierung zugrunde gelegt werden. Er liefert die maximalen Temperaturen und ist demzufolge dimensionierend. Als Versagenrestriktionen werden ohne Benutzereingriff die fünf größten Werte pro Lastfall als Restriktion formuliert.

Das Optimum wird nach 9 Iterationen erreicht. Der Optimierungsverlauf ist in **Bild 6.6** illustriert. Das Gewicht konnte bei gleichzeitiger Beschränkung der Verformung auf 3 mm um 39 % gegenüber dem Startentwurf reduziert werden. Die Versagenkriterien durch Lastfall 1 verringerten sich auf 0.6. Die thermischen Versagenkriterien stellen mit ihrem Maximalwert von 0.32 keine aktiven Restriktionen des Optimierungsproblems dar.

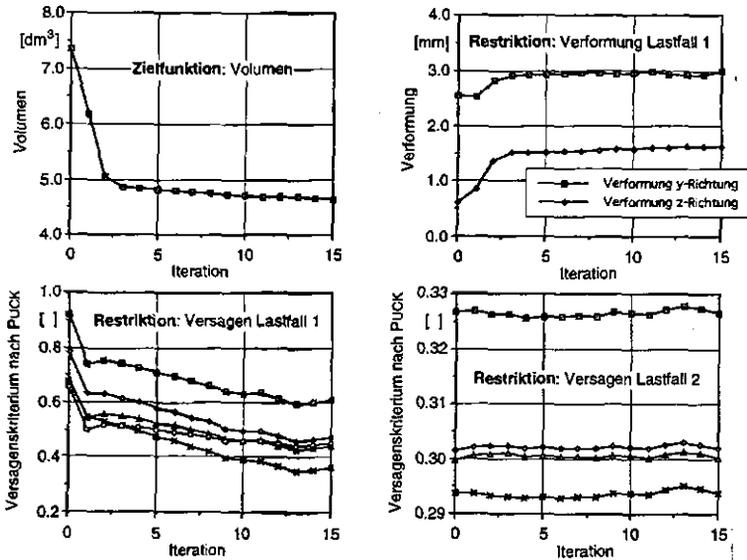


Bild 6.6: Verlauf der Optimierungsrechnung

Bild 6.7 stellt die Schichtdicken des Startentwurfes den optimalen Schichtdicken gegenüber. Während alle Schichten in der Radfelge den Wert der unteren Grenze annehmen, ist die optimale Dicke der Speichen 9.2 mm. Demzufolge liegen die optimalen Dicken im Ring bei 18.2 mm und im Spiegel bei 27.3 mm. Die im Bereich des Flansches auftretenden maximalen Versa-

genskriterien führen zu einer Vergrößerung der Laminatdicke auf 10.6 mm, wobei die 90°-Schichten mit 2.5 mm gegenüber den $\pm 45^\circ$ -Schichten mit 1.4 mm etwas höher bewertet werden.

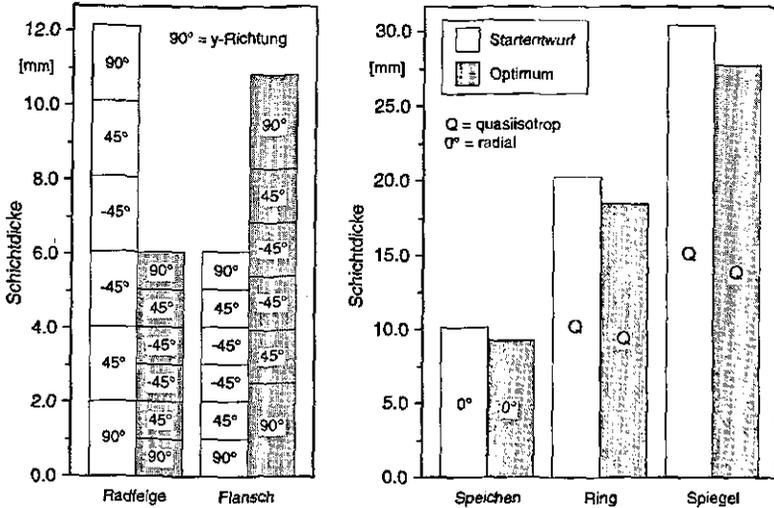


Bild 6.7: Entwurfsvariablen des Startentwurfs und der optimalen Lösung

6.2 Schieberfräseinheit einer Portalfräsmaschine unter zeitvariantem Temperatureinfluß in der Maschinenhalle

Beim Einsatz von Großwerkzeugmaschinen können zeitvariante Raumtemperaturschwankungen in der Maschinenhalle zu thermoelastischen Verformungen führen, die für geforderte Arbeitsgenauigkeiten kritisch sein können. Bild 6.8 zeigt eine Portalfräsmaschine, wie sie zur Formenbearbeitung eingesetzt wird. Um eine möglichst große thermoelastische Stabilität zu erzielen, soll der Einsatz von kohlenstoffaserverstärktem Kunststoff für die senkrecht am Kreuzschlitten geführte Schieberfräseinheit untersucht werden. Durch eine Optimierung des Laminataufbaus soll bei konstanter statischer

Steifigkeit die thermoelastische Verformung *minimiert* werden.

An den Außenflächen des Gehäuses wirkt freie Konvektion, so daß durch schwankende Temperatur in der Maschinenhalle ein instationärer Wärmeübergang auf die Außenwandung der Schieberfräseinheit stattfindet. Einbauteile wie Motoren, Getriebe und Spindel werden gekühlt, so daß sie keine Wärme an die Schieberfräseinheit abgeben.

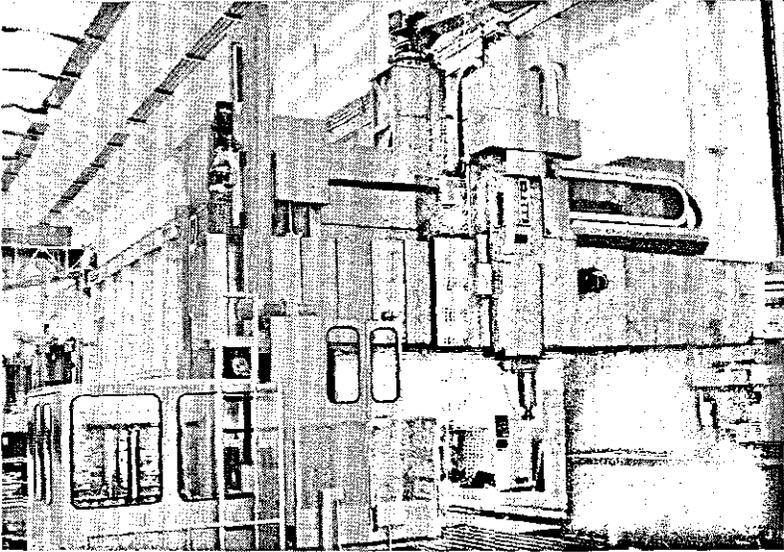


Bild 6.8: Senkrechtfräsmaschine in Portalbauweise

Bild 6.9 zeigt das Finite-Elemente-Modell mit 558 achtknotigen rechteckigen und sechsknotigen dreieckigen Schalenelementen sowie 1595 Strukturknoten. Der Schieberkörper und die Spindelaufnahme können im Wickelverfahren hergestellt werden, so daß als Laminataufbau ein $(\pm\theta)_s$ -Verbund angenommen wird. Die Einbauteile werden nachträglich in den Schieberkörper eingeklebt. Als Material stellt CFK-HT mit Epoxidharzmatrix auch unter wirtschaftlichen Gesichtspunkten eine optimale Lösung dar. Die Werkstoffkennwerte können Tab. 6.1 entnommen werden.

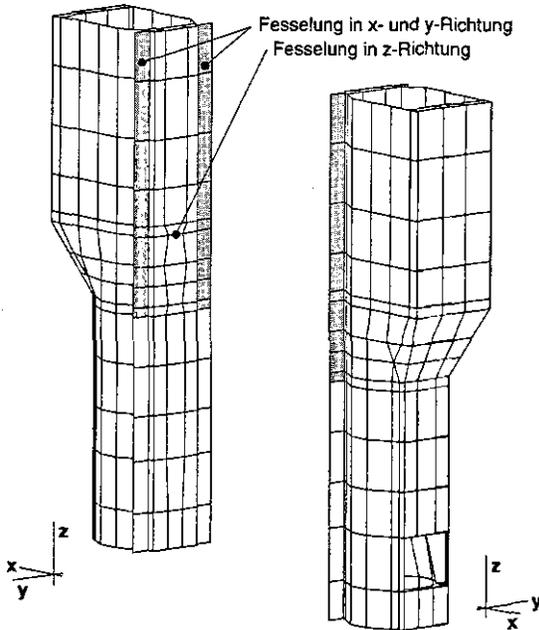


Bild 6.9: Finite-Elemente-Modell der Schieberfräseinheit mit eingezeichneten Fesselungen an den Führungsbahnen

Die Schieberfräseinheit ist an den Führungsbahnen in x- und y-Richtung gefesselt, die Fesselung in z-Richtung erfolgt am Angriffspunkt der Kugelrollspindel an der Rückseite. Die Fesselung entspricht der untersten Stellung in den Führungsbahnen, in der an der Fräskopfaufnahme die größte Kragarmlänge auftritt. Da der Wärmeübergang durch Konvektion von der Temperaturschichtung in der Maschinenhalle abhängt, führt die örtliche und zeitliche Erhöhung der Hallentemperatur zu einer instationären Erwärmung der Schieberfräseinheit. In Übereinstimmung mit Messungen [106] wurde angenommen, daß die Temperatur sich pro Stunde in der Halle um 1 K erhöht und zusätzlich eine Temperaturschichtung von 1 K/m vorhanden ist. Die Temperaturschichtung ist, wie in **Bild 6.10** dargestellt, als stufenförmige Funktion modelliert. Zur Bestimmung eines gemittelten Konvektionskoeffizienten erfolgte eine Abschätzung nach VDI-Wärmeatlas [121].

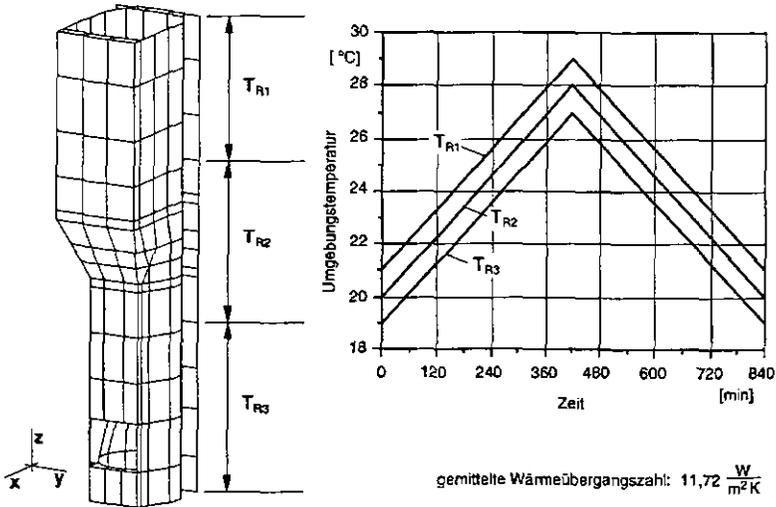


Bild 6.10: Wärmübergangszahlen und Umgebungstemperaturen für den Lastfall 'Temperaturschichtung in der Maschinenhalle'

Der betrachtete Lastfall 'Temperaturschichtung in der Maschinenhalle' wurde den Optimierungsrechnungen zugrunde gelegt. Die Forderung nach einer konstanten statischen Steifigkeit ist durch einen weiteren Lastfall berücksichtigt worden, der die Fräskopfaufnahme in x -Richtung mit einer Kraft von 1000 N belastet. Eine Strukturanalyse des Startentwurfes zeigt aufgrund der thermischen Last eine maximale Verformung von 0.027 mm an der Fräskopfaufnahme. **Bild 6.11** stellt die maximal verformte Struktur nach 630 min mit der entsprechenden Temperaturverteilung dar.

Das Ziel der durchgeführten Optimierung ist die Minimierung der thermoelastischen Verformung an der Fräskopfaufnahme. Die statische Verformung aufgrund der Referenzkraft in x -Richtung und das Gewicht sollten während der Optimierung einen zulässigen Wert nicht überschreiten und sind als Restriktionen formuliert worden. Als Entwurfsvariablen wurden insgesamt vier Strukturbereiche des Finite-Elemente-Modells definiert (**Bild 6.12**). Für diese Strukturbereiche erfolgte die Definition von jeweils drei Entwurfsvariablen. Dies sind zwei Faserwinkel sowie die Dicke einer Schicht des $(\pm\theta)_s$ -Laminats. Die Dicken der insgesamt vier Laminatschicht-

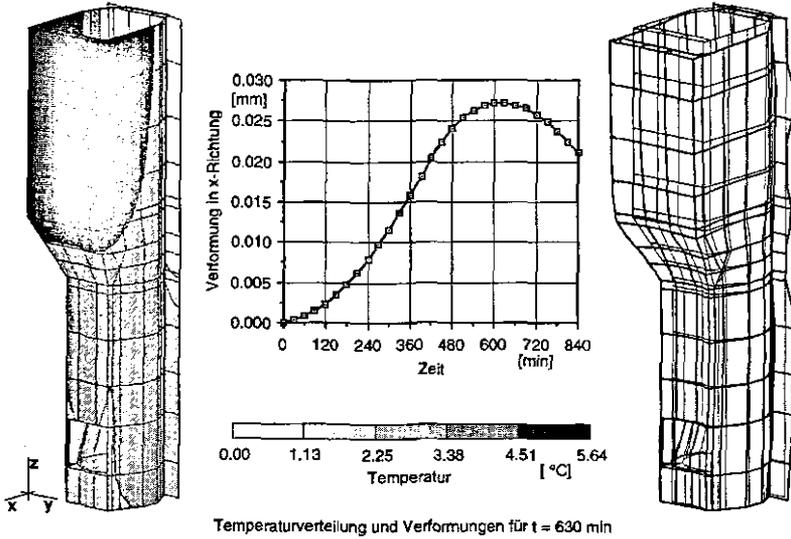


Bild 6.11: Temperaturverteilung und Verformung des Startentwurfs durch den Lastfall 'Temperaturschichtung in der Maschinenhalle'

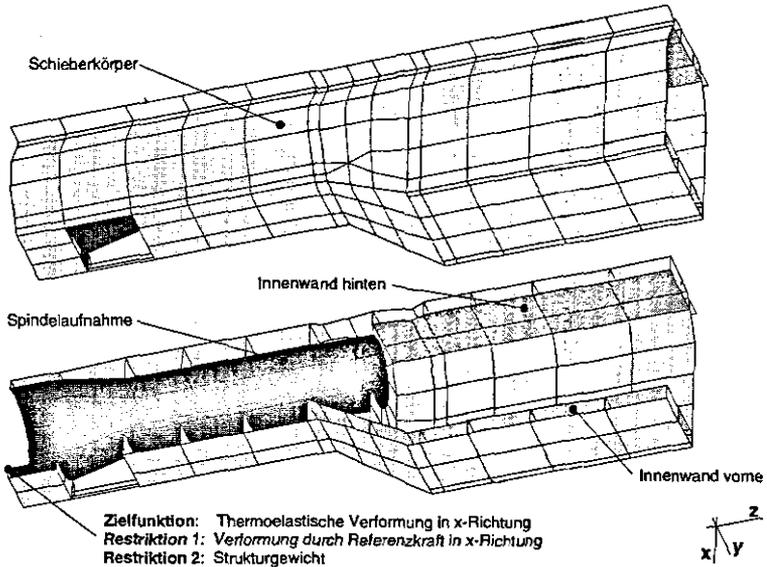


Bild 6.12: Optimierungmodell und zu Entwurfsvariablen zusammengefaßte Elementgruppen

ten wurden durch 'variable linking' zu einer Entwurfsvariablen zusammengefaßt. Durch zusätzlich definierte fertigungstechnische Gleichungsrestriktionen wurden die Faserwinkelvariablen gezwungen, betraglich gleiche Werte unterschiedlichen Vorzeichens anzunehmen, um den durch das Wickelverfahren vorgegebenen $(\pm\theta)_s$ -Verbund zu erhalten.

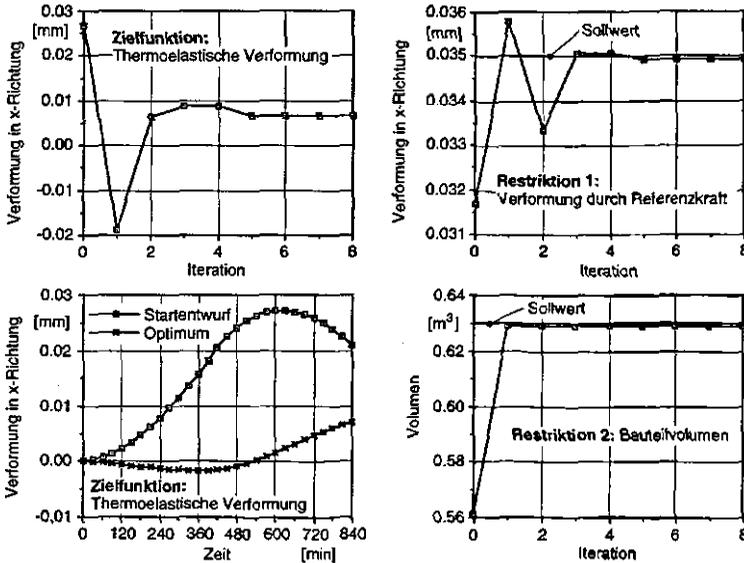


Bild 6.13: Verlauf der Optimierungsrechnung

Das zeitvariante Optimierungsproblem ist mit Hilfe der KREISSELMEIER-STEINHAUSER-Funktion auf ein stationäres Ersatzproblem reduziert und mit dem Optimierungsverfahren von POWELL gelöst worden. **Bild 6.13** gibt den Optimierungsverlauf mit 8 gerechneten Iterationen wieder. Die maximale thermoelastische Verformung an der Fräskopfaufnahme nimmt in x-Richtung von 0.027 mm auf 0.007 mm ab. Der Startwert der Verformungsrestriktion durch die statische Referenzkraft wird unterschritten. Die Volumenrestriktion, deren Obergrenze auf 0.63 m³ festgelegt ist, wurde bereits nach der ersten Iteration angenommen. Es handelt sich um eine lineare Funktion der Entwurfsvariablen, die vom Optimierungsverfahren nach POWELL exakt ap-

proximiert wird. **Bild 6.14** zeigt die Entwurfsvariablen des Startentwurfs und der Optimallösung im Vergleich. Der Schieberkörper nimmt eine Faserorientierung von $\pm 0^\circ$ an, während die Spindelaufnahme eine Faserorientierung von $\pm 45^\circ$, die Innenwand hinten eine Faserorientierung von $\pm 17.7^\circ$ und die Innenwand vorne eine Faserorientierung von $\pm 6.9^\circ$ bezogen auf die z-Achse der Schieberfräseinheit annimmt. Die Laminatdicke der Spindelaufnahme nimmt den Maximalwert von 80 mm an, während die Laminatdicke der anderen Entwurfsvariablen den Startwert nur mäßig überschreiten.

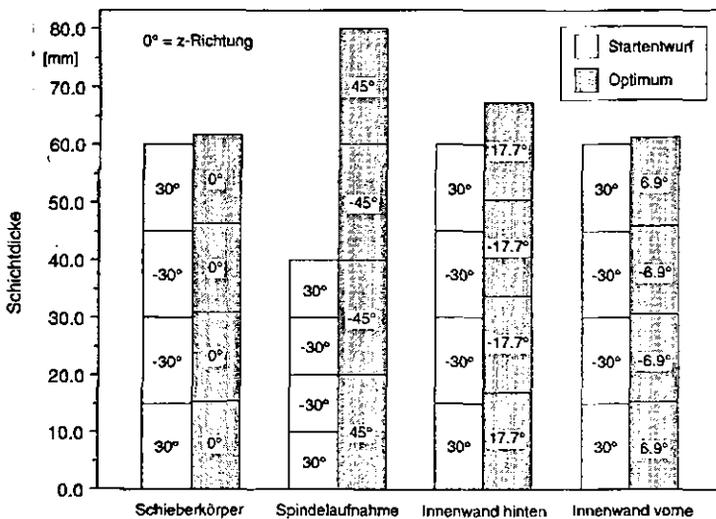


Bild 6.14: Entwurfsvariablen des Startentwurfs sowie der optimalen Lösung

7 Zusammenfassung und Ausblick

Für den Einsatz faserverstärkter Kunststoffe spricht neben der hohen Festigkeit und Steifigkeit bei geringem Gewicht die niedrige und in weiten Grenzen einstellbare thermische Ausdehnung. Der Wärmeausdehnungskoeffizient eines Mehrschichtverbundes kann durch Variation von Schichtdicken und deren Faserorientierung in weiten Bereichen variiert werden. Bei komplexeren Bauteilen ist diese Aufgabe jedoch vom Konstrukteur nicht mehr intuitiv oder mit analytischen Rechenverfahren zu lösen, so daß hier nur der Einsatz von Strukturoptimierungsverfahren das Potential nutzen kann, das diese Werkstoffe bieten. In der vorliegenden Arbeit ist ein Konzept entwickelt und realisiert worden, mit dem durch den Einsatz von Strukturoptimierungsverfahren das zeitvariante thermoelastische Festigkeits- und Steifigkeitsverhalten von faserverstärkten Bauteilen optimiert werden kann.

Grundlegende Voraussetzung zur Lösung von Entwurfsaufgaben ist die Entwicklung mathematischer Modelle, die sowohl das Verhalten der Struktur beschreiben als auch die Optimierungsaufgabe definieren. Die Optimierung faserverstärkter Werkstoffe verlangt, gerade in Hinblick auf realisierbare Faserorientierungen, eine besondere Berücksichtigung der fertigungstechnisch bedingten Restriktionen. Anhand eines im Wickelverfahren hergestellten Bauteils wird gezeigt, daß durch die Integration des Modells einer Fertigungssimulation fertigungstechnische Restriktionen im Optimierungsprozeß berücksichtigt werden können.

Ausgehend von den Grundlagen der Finite-Elemente-Methode werden die notwendigen mathematischen Beziehungen für Struktur- und Sensitivitätsanalyse mehrschichtiger faserverstärkter Bauteile hergeleitet. Die Entwicklung eines gekrümmten finiten Schalenelementes zur Temperaturanalyse in mehrschichtig aufgebauten Faserverbundkunststoffen erlaubt mit einem Minimum an Modellierungs- und Rechenaufwand die Berechnung der orthotropen Wärmeleitung in den einzelnen Laminatschichten und berechnet eine parabolische Temperaturverteilung, auch in Richtung der Schalendicke. Durch Vergleichsmessungen an einem KFZ-Rad ist die auf diese Weise berechnete Temperaturverteilung mit ausreichender Genauigkeit validiert wor-

den. Aufbauend auf der Temperaturverteilung erfolgt die Analyse von Verformungen, Spannungen und Versagenskriterien unter instationärer thermischer Last sowie deren Gradienten nach Faserwinkeln und Dicken der einzelnen Laminatschichten.

Die Optimierung zeitvarianter thermoelastischer Verformungen ist besonders im Maschinenbau von hoher Relevanz, da aufgrund der Umgebungseinflüsse oder auch instationärer innerer Wärmequellen der stationäre Verformungszustand während des Betriebs nicht immer erreicht wird. Ausgehend von der Formulierung eines Optimierungsproblems mit zeitvarianten Ziel- und Restriktionsgrößen werden Strategien zur Lösung diskutiert und anhand praktischer Beispiele verglichen. Die auf der Funktionsdiskretisierung basierende Methode der kritischen Zeitpunkte betrachtet Ziel- und Restriktionsfunktionen zu diskreten Zeitpunkten, an denen ihr Wert maximal, also kritisch ist. Das kann zu einer Erhöhung der Anzahl aktiver Restriktionen und Zielfunktionskomponenten und damit zu einem erhöhten Optimierungsaufwand führen. Integrative Strategien, wie die hier verwendete KREISSEL-MEIER-STEINHAUSER-Funktion, bilden ein gewichtetes Integral über den betrachteten Zeitbereich und eliminieren die Zeitabhängigkeit auf diese Weise, so daß sich die Anzahl aktiver Restriktionen nicht erhöht. Die Verfahren werden exemplarisch anhand eines Ständerbauteils einander gegenübergestellt.

Das Verformungs- und Festigkeitsverhalten unter statischer Last muß als weiteres wichtiges Kriterium neben dem thermoelastischen Verhalten berücksichtigt werden. Da thermomechanische und statische Steifigkeitskriterien in einigen Fällen zu gegensätzlichen Auslegungen führen, werden Vektoroptimierungsstrategien angewendet, um eine optimale Kompromißlösung zwischen thermischen und statischen Verformungs- oder Festigkeitskriterien zu erhalten. Die Methoden der Zielgewichtung, der restriktionsorientierten Transformation sowie die Min-Max-Formulierung werden anhand von Beispielen diskutiert und deren Eignung für diese Art von Problemstellungen gezeigt.

Der effektive Einsatz von Strukturoptimierungsmethoden in der Produktentwicklung erfordert leistungsfähige Softwaresysteme, die den Anforderungen des Konstrukteurs genügen. Es werden Anforderungen an ein modernes Programmsystem formuliert und diese an dem System STRATHOS gespiegelt,

das zur Umsetzung der in dieser Arbeit entwickelten Konzepte und Methoden entwickelt wurde. Besonderer Wert wird auf die Integration in eine CAE-Umgebung mit ihren Möglichkeiten des interaktiven Eingriffs in den Optimierungsablauf gelegt, um die Vorteile moderner multitaskingfähiger Betriebssysteme nutzen zu können. Schließlich werden Vorschläge diskutiert, wie Softwareentwicklung und Systemtest von Optimierungssystemen effektiv gestaltet werden können.

Anwendungsbeispiele aus der Praxis des Maschinenbaus und der Automobilindustrie demonstrieren die Leistungsfähigkeit der entwickelten Methoden. Es hat sich gezeigt, daß der Einsatz instationärer Optimierungsverfahren wegen der hohen Rechenzeiten auf kleinere Modelle beschränkt ist, so daß sorgfältig geprüft werden muß, ob die zeit- und kostenaufwendige zeitvariante Optimierung für die Lösung eines vorliegenden Problems notwendig ist.

Aufgrund steigender Anforderungen an die Produkte wird es in Zukunft zum verstärkten Einsatz von Strukturoptimierungsverfahren in der Produktentwicklung kommen. Parameterstudien können wesentlich vereinfacht und automatisiert werden. Wegen der hohen Bearbeitungs- und Materialkosten faserverstärkter Werkstoffe sind ein gezielter Einsatz und eine umfassende Auslegung von Bauteilen aus diesen Werkstoffen unumgänglich. Mit der Strukturoptimierung wird dem Konstrukteur ein Hilfsmittel an die Hand gegeben, mit dem er effektiv und kostensparend aus einer großen Anzahl von Entwürfen den optimalen auswählt und in einem frühen Entwurfsstadium konkrete Vorentscheidungen bezüglich der Gestalt und des optimalen Laminataufbaus machen kann.

Die hohen Rechenzeiten, die umfangreiche Optimierungsrechnungen heutzutage benötigen, stellen eine Herausforderung an moderne Höchstleistungsrechner dar. Die Implementation von Optimierungssystemen auf modernen Arbeitsplatzrechnern und Massiv Parallelen Systemen wird in Zukunft von herausragender Bedeutung sein.

8 Literaturverzeichnis

- [1] KERSTIENS, P.: *Strukturelemente für Produktionsmaschinen aus carbonfaserverstärkten Kunststoffen: Einsatzkriterien, Konstruktionsrichtlinien, Bauteilbeispiele*. Dissertation RWTH Aachen 1990
- [2] HERBERG, F.: *Werkzeugmaschinenspindeln aus CFK: Eigenschaftsspektrum, Auslegung und Einsatz*. Dissertation RWTH Aachen 1991
- [3] EFFING, M.: *Rechnergestützte Auslegung und Fertigung von Faserverbundbauteilen*. Dissertation RWTH Aachen 1988
- [4] BERCHTOLD, G.; KLENNER, J.: Zur integrierten Konstruktion, Berechnung und Fertigung von Luftfahrtstrukturen in Faserverbund-Ta-
pelegebauweise. *Tagungsband zur DGLR-Jahrestagung Paper No. 92-03-073*. Bremen 1992
- [5] SCHMIT, L. A. jr.; FARSHI, B.: Optimum Laminate Design for Strength and Stiffness. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 7 (1973) 519-536
- [6] SCHMIT, L. A. jr.; FARSHI, B.: Optimum Laminated Fibre Composite Plates. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 11 (1977) 623-640
- [7] STARNES, H. jr.; HAFTKA, R. T.: Preliminary Design of Composite Wings for Buckling, Strength and Displacement Constraints. *AIAA Paper No. 78-466*
- [8] NSHANIAN, Y. S.; PAPPAS, M.: Optimal Design of Laminated Composite Shells. *AIAA Paper No. 81-0555*
- [9] PARK, W. J.: An Optimal Design of Simple Symmetric Laminates Under the First Ply Failure Criterion. *J. Composite Materials* 16 (1982) 341-352
- [10] WATKINS, R. I.: Limiting the Size of Composite Optimization Problems. *Computers & Structures* 28 (1988) 237-240
- [11] MCKEOWN, J. J.: A Quasi-Linear Programming Algorithm for Optimising Fibre-Reinforced Structures of Fixed Stiffness. *Comp. Meths.*

- App. Mech. Eng.* 6 (1975) 123-154
- [12] MCKEOWN, J. J.: Optimal Composite Structures by Deflection-Variable Programming. *Comp. Meths. App. Mech. Eng.* 12 (1977) 155-179
- [13] KHOT, N. S.; VENKAYYA, V. B.; BERKE, L.: Optimum Design of Composite Structures with Stress and Displacement Constraints. *AIAA Paper No. 75-141*
- [14] ESCHENAUER, H.: Optimierung ebener Flächentragwerke aus Verbundwerkstoff. *ZFW* 8 (1984) 367-378
- [15] ADELMAN, H. M.; NARAYANASWAMI, R.: Resizing Procedure for Structures Under Combined Mechanical and Thermal Loading. *AIAA Journal* 14 (1976) 622-629
- [16] ADELMAN, H. M.; SAWYER, P. L.; SHORE, C. P.: Optimum Design of Structures at Elevated Temperatures. *AIAA Journal* 17 (1979) 622-629
- [17] ESCHENAUER, H.; FUCHS, W.: Optimale Auslegung einer Zylinderschale aus Faserverbundwerkstoff unter Flüssigkeitsdruck und Temperatur. *ZAMM* 67 (1987) T397-T399
- [18] POST, U.: *Optimierung von Verbundbauweisen unter Berücksichtigung des zeitabhängigen Materialverhaltens*. Dissertation Uni-GH Siegen 1989
- [19] WECK, M.; NOTTEBAUM, T.: Optimization of Large Composite Structures. *Annals of the CIRP* 40 (1991) 411-414
- [20] NOTTEBAUM, T.: Optimierung von Bauteilen aus faserverstärkten Werkstoffen. *Industrie-Anzeiger* 113 Heft 55 (1991) 34-35
- [21] WECK, M.; FELDERMANN, J.: Berechnung und Steifigkeitsoptimierung von Bauteilen aus Faserverbundwerkstoffen. *VDI-Z* 131 (1989) 84-88
- [22] WECK, M.; FELDERMANN, J.: Optimierung des CFK-Querbalkens eines Portalroboters. *VDI-Z* 132 (1990) 95-98
- [23] FELDERMANN, J.: *Einsatz der adaptiven Finite-Elemente-Netzverfeinerung zur Berechnung und Optimierung von Bauteilen aus*

Faserverbundwerkstoffen. Dissertation RWTH Aachen 1990

- [24] WECK, M.; FELDERMANN, J.: Anwendungsmöglichkeiten von adaptiven Finite-Element-Verfahren bei der Strukturoptimierung. *Konstruktion* 41 (1989) 325-331
- [25] WECK, M.; NOTTEBAUM, T.: Adaptive Meshing - Saving Computational Costs During the Optimization of Composite Structures. *Structural Optimization* 6 (1993) Nr. 2 108-115
- [26] MÄDER, H. F.; STENVERS, K.-H.; GATZLAFF, H.; WILMS, H.-F.: Vektoroptimierung und CFK-Werkstoffe: Voraussetzungen für eine neue Teleskop-Generation. *Werkstoff und Innovation* 3 (1991) Heft 5 46-50 und Heft 6 46-51
- [27] WELLEN, H.; HERTEL, K.: Erfahrung beim Einsatz von Optimierungssoftware. *Tagungsband zum VDI-Seminar "Optimierungsstrategien mit der Finite-Elemente-Methode"*, Aachen, 1992
- [28] SCHMIT L. A. jr.: Structural Optimization - Some Key Ideas and Insights. In: *New Directions in Structural Design*. Hrsg.: ATREK, E. GALLAGHER, R. H.; RAGSDALL, K. M.; ZIENKIEWICZ, O. C. Chichester: J. Wiley & Sons 1984
- [29] FÖRTSCH, F.: *Entwicklung und Anwendung von Methoden zur Optimierung des mechanischen Verhaltens von Bauteilen*. Dissertation RWTH Aachen 1988
- [30] STEINKE, P.: *Verfahren zur Spannungs- und Gewichtsoptimierung von Maschinenbauteilen*. Dissertation RWTH Aachen 1983
- [31] POWELL, M. J. D.: A Fast Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations. *Lecture Notes in Mathematics 630*, Berlin: Springer Verlag 1978 144-157
- [32] POWELL, M. J. D.: Extensions to Subroutine VF02AD. *Lecture Notes in Control and Information Science*, Berlin: Springer Verlag 1982 529-538
- [33] RAGSDALL, K. M.: The Utility of Nonlinear Programming Methods for Engineering Design. In: *New Directions in Structural Design*. Hrsg.: ATREK, E. GALLAGHER, R. H.; RAGSDALL, K. M.; ZIENKIEWICZ,

- O. C. Chichester: J. Wiley & Sons 1984
- [34] FLEURY, C.: Structural Weight Optimization by Dual Methods of Convex Programming. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 14 (1979) 1761-1783
- [35] FLEURY, C.; BRAIBANT, V.: Structural Optimization: A New Dual Method Using Mixed Variables. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 23 (1986) 409-428
- [36] SVANBERG, K.: Method of Moving Asymptotes - A New Method for Structural Optimization. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 24 (1987) 359-373
- [37] SVANBERG, K.: The Method of Moving Asymptotes (MMA) with Some Extensions. In: *Optimization of Large Structural Systems*. Vol.1 555-566 Hrsg.: ROZVANY, G. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers 1993
- [38] FLEURY, C.: Large Scale Structural Optimization by Finite Elements. In: *New Directions in Structural Design*. Hrsg.: ATREK, E. GALLAGHER, R. H.; RAGSDALL, K. M.; ZIENKIEWICZ, O. C. Chichester: J. Wiley & Sons 1984
- [39] KÖLSCH, G.: *Diskrete Optimierungsverfahren zur Lösung konstruktiver Problemstellungen im Werkzeugmaschinenbau*. Dissertation RWTH Aachen 1992
- [40] SCHÄFER, E.: *Interaktive Strategien zur Bauteiloptimierung bei mehrfacher Zielsetzung und Diskretheitsforderungen*. Dissertation Uni-GH Siegen 1990
- [41] HAFTKA, R. T.; GÜRDAL, Z.; KAMAT, M. P.: *Elements of Structural Optimization*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers 2. Auflage 1990
- [42] GRANDHI, R. V.; HAFTKA, R. T.; WATSON, L. T.: Design-Oriented Identification of Critical Times in Transient Response. *AIAA Journal* 24 (1986) 649-656
- [43] GREENE, W. H.: *Computational Aspects of Sensitivity Calculations*

- in Linear Transient Structural Analysis*. NASA TM-4156 1990
- [44] ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.: *The Finite Element Method*. London: Mc Graw-Hill Book Company 4. Auflage 1989
- [45] GALLAGHER, R. H.: *Finite-Element-Analysis: Grundlagen*. Berlin: Springer Verlag 1976
- [46] HINTON, E.; OWEN, D. R. J.: *Finite Element Programming*. London: Academic Press 1977
- [47] SCHWARZ, H. R.: *Methode der Finiten Elemente*. Stuttgart: Teubner Verlag 2. Auflage 1984
- [48] BRUCH, J. C.; ZYVOLOSKI, G.: Transient Two-Dimensional Heat Conduction Problems Solved by the Finite Element Method. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 8 (1974) 481-494
- [49] AHMAD, S.; IRONS, B. M.; ZIENKIEWICZ, O. C.: Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 2 (1970) 419-451
- [50] SURANA, K. S., PHILLIPS, R. K.: Isoparametric Curved Shell Finite Element for Heat Conduction with Temperature and Temperature Gradients as Primary Variables. *Numerical Methods in Heat Transfer, ASME Winter Annual Meeting* 62 (1986) 107-115
- [51] JONES, R. M.: *Mechanics of Composite Materials*. Tokyo: Mc Graw-Hill Kogakusha 1975
- [52] TSAI, S. W.; HAHN, H. T.: *Introduction to Composite Materials*. Westport: Technomic Publishing Company 1980
- [53] VINSON, J. R.; SIERAKOWSKI, R. L.: *The Behaviour of Structures Composed of Composite Materials*. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers 1986
- [54] MOSER, K.: *Faser-Kunststoff-Verbund: Entwurfs- und Berechnungsgrundlagen*. Düsseldorf: VDI-Verlag 1992
- [55] YUNUS, S. M.; KOHNKE, P. C.; SAIGAL, S.: An Efficient Through-Thickness Integration Scheme in an Unlimited Layer Doubly Curved Isoparametric Composite Shell Element. *Int. J. Num. Meth. Engng.*

- 28 (1989) 2777-2793
- [56] SEIDE, P.; CHAUDHURI, R. A.: Triangular Finite Element for Analysis of Thick Laminated Shells. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 24 (1987) 1563-1579
- [57] ROLFES, R.: A New Finite Element for Thermal Analysis of Laminated Composite Plates. *Proceedings of the 17th MSC European User's Conference.* Paris 1990
- [58] HAFTKA, R. T.; ADELMAN, H. M.: Recent Developments in Structural Sensitivity Analysis. *Structural Optimization* 1 (1989) 137-151
- [59] SANTOS, J. L. T.: Sizing Design Sensitivity Analysis of Linear Steady Heat Transfer Systems Using Established Finite Element Codes. *Num. Meth. Heat Transfer.* 15 (1989) 49-71
- [60] CHOI, K. K.; SANTOS, J. L. T.; FREDERICK, M. C.: Implementation of Design Sensitivity Analysis with Existing Finite Element Codes. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design* 109 (1987) 385-391
- [61] HAFTKA, R. T.: Techniques for Thermal Sensitivity Analysis. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 17 (1981) 71-80
- [62] NIEDERSTADT, G.: Konstruieren mit faserverstärkten Polymeren - Das heterogene Wärmeausdehnungsverhalten als neues Dimensionierungskriterium für Verbundwerkstoffe. *Proceedings Verbundwerk.* Wiesbaden 1988 17.00-17.17
- [63] GÄDKE, M.: *Hygrothermomechanisches Verhalten kohlenstoffaser-verstärkter Epoxidharze.* VDI-Fortschritt-Berichte Reihe 5 Nr. 136. Düsseldorf: VDI-Verlag 1988
- [64] COLLINGS, T. A.; STONE, D. E. W.: Hygrothermal Effects in CFRP Laminates: Strains induced by Temperature and Moisture. *Composites* 16 (1985) 307-316
- [65] HEISSLER, H.: *Verstärkte Kunststoffe in der Luft- und Raumfahrt-technik.* Stuttgart: Kohlhammer 1986
- [66] EHRENSPIEL, K.; BAUMANN, G.; FIGEL, K.; FINKENWIRTH, K.:

- Anwendungsmöglichkeiten für die mathematische Optimierung im Konstruktionsprozeß. *Konstruktion* 34 (1982) 437-442
- [67] WELLEN, H.: Anwendung der rechnergestützten Strukturoptimierung bei der Auslegung von Flugzeugbauteilen. *Konstruktion* 37 (1985) 185-192
- [68] WULFHORST, B.; HÖRSTING, K.: Rechnergestützte Simulation der Drapierbarkeit von Geweben aus Hochleistungsfasern für Faserverbundwerkstoffe. *Chemiefasern-Textilindustrie* 40/92 (1990)
- [69] KLENNER, J.: Production Techniques for Integrated Compositized Aircraft Structures. *Proceedings Verbundwerk.* Wiesbaden 1990 13.1-13.46
- [70] WECK, M.; ZENDER, H.: CAD/CAM - Hilfsmittel zur Automatisierung des Tapelegeverfahrens. *Ingenieur-Werkstoffe* 2 (1990) Heft 12 52-54
- [71] WECK, M.; ZENDER, H.: Automatisierte Fertigung von Faserverbundbauteilen im Wickelverfahren. *VDI-Z* 131 (1989) 47-52
- [72] ROSENBAUM, U.: *Fertigung von faserverstärkten Kunststoffbauteilen unter Einsatz der Flechttechnik*. Dissertation RWTH Aachen 1990
- [73] MICHAELI, W.; WEGENER, M.: *Einführung in die Technologie der Faserverbundwerkstoffe*. München: Carl Hanser Verlag 1989
- [74] WECK, M.; SCHÄFER, W.: Verbesserte Modellbildung für FE-Temperaturfeld- und Verformungsberechnungen. *Konstruktion* 44 (1992) 333-337
- [75] HASHIN, Z.: *Theory of Fiber Reinforced Materials*. NASA CR-1974 1972
- [76] SPRINGER, G. S.; TSAI, S. W.: Thermal Conductivities of Unidirectional Materials. *J. Composite Materials* 1 (1967) 166-173
- [77] HASHIN, Z.; ROSEN, B. W.: The Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials. *J. Applied Mechanics* 31 (1964) 223-232
- [78] YATES, B.; OVERY, M. J. et al.: The Thermal Expansion of Carbon

- Fire-Reinforced Plastics. Part 2: The Influence of Fibre Volume Fraction. *J. Materials Science* 13 (1978) 433-440
- [79] CHAMIS, C. C.; SENDECKYJ, G. P.: Critique on Theories Predicting Thermoelastic Properties of Fibrous Composites. *J. Composite Materials* 2 (1968) 332-358
- [80] ECKERT, E.: *Einführung in den Wärme- und Stoffaustausch*. Berlin: Springer Verlag 2. Auflage 1959
- [81] BOLEY, B. A.; WEINER, J. H.: *Theory of Thermal Stresses*. New York: J. Wiley & Sons 1960
- [82] HAUG, E. J.; CHOI, K. K.; KOMKOV, V.: *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. London: Academic Press 1986
- [83] ARORA, J. S.; HAUG, E. J.: Methods of Design Sensitivity Analysis in Structural Optimization. *AIAA Journal* 17 (1979) 970-1408
- [84] HSIEH, C. C.; ARORA, J. S.: Design Sensitivity Analysis and Optimization of Dynamic Response. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 43 (1984) 195-219
- [85] WANG, S.-Y.; YANBING, S.; GALLAGHER, R. H.: Sensitivity Analysis in Shape optimization of Continuum Structures. *Computers & Structures* 20 (1985) 855-867
- [86] BARTHELEMY, B.; CHON, C. T.; HAFTKA, R.T.: Accuracy Problems Associated with Semi-Analytical Derivatives of Static Response. *Finite Elements in Analysis and Design* 4 (1988) 249-265
- [87] IOTT, J.; HAFTKA, R. T.; ADELMAN, H. M.: Selecting Step Sizes in Sensitivity Analysis by Finite Differences. NASA TM-86382 1985
- [88] DE G. ALLEN, D. N.: *Relaxation Methods*. London: McGraw-Hill 1955
- [89] COWPER, G. R.: The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory. *J. Applied Mechanics* 33 (1966) 335-340
- [90] HINTON, E.; CAMPBELL, J. S.: Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Approach.

- Int. J. Num. Meth. Engng.* 8 (1974) 461-480
- [91] TSAL, S. W.; WU, E. M.: A General Theory of Strength for Anisotropic Materials. *J. Composite Materials* 5 (1971) 58-80
- [92] PUCK, A.: Festigkeitsberechnung an Glasfaser/Kunststoff-Laminaten bei zusammengesetzter Beanspruchung: Bruchhypothesen und schichtenweise Bruchanalyse. *Kunststoffe* 59 (1969) Heft 11 780-786
- [93] MACNEAL, R. H.; HARDER, R. L.: A Proposed Standard Set of Problems to Test Finite Element Accuracy. *Finite Elements in Analysis and Design* 1 (1985) 3-20
- [94] WHITE, D. W.; ABEL, J. F.: Testing of Shell Finite Element Accuracy and Robustness. *Finite Elements in Analysis and Design* 6 (1989) 129-151
- [95] HUGHES, T. J. R.; COHEN, M.; HARONN, M.: Reduced and Selective Integration Techniques in the Finite Element Analysis of Plates. *Nucl. Eng. Design* 46 (1978) 203-222
- [96] SVANBERG, K.: Local and Global Optima. In: *Optimization of Large Structural Systems*. Vol.1 579-588 Hrsg.: ROZVANY, G. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers 1993
- [97] SCHMIT, L. A.; FARSHI, B.: Some Approximation Concepts for Structural Synthesis. *AIAA-Journal* 12 (1974) 692-699
- [98] SCHITTKOWSKI, K.: On the Convergence of a Sequential Quadratic Programming Method with an Augmented Lagrangian Line Search Function. *Mathematische Operationsforschung und Statistik, Serie Optimization* 14 (1983) 207-216
- [99] SCHMIT, L. A.; FLEURY, C.: Discrete-Continuous Variable Structural Synthesis Using Dual Methods. *AIAA-Journal* 18 (1980) 1515-1524
- [100] DUCKSTEIN, L.: Multiobjective Optimization in Structural Design: The Model Choice Problem. In: *New Directions in Structural Design*. Hrsg.: ATREK, E. GALLAGHER, R. H.; RAGSDALL, K. M.; ZIENKIEWICZ, O. C. Chichester: J. Wiley & Sons 1984
- [101] KOSKI, J.: Defectiveness of Weighting Method in Multicriterion Op-

- timization of Structures. *Communications in Applied Numerical Methods* 1 (1985) 333-337
- [102] KOSKI, J.: Multicriterion Optimization in Structural Design. In: *New Directions in Structural Design*. Hrsg.: ATREK, E. GALLAGHER, R. H.; RAGSDALL, K. M.; ZIENKIEWICZ, O. C. Chichester: J. Wiley & Sons 1984
- [103] KOSKI, J.; SILVENNOINEN, R.: Norm Methods and Partial Weighting in Multicriterion Optimization of Structures. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 24 (1987) 1101-1121
- [104] FUCHS, W.: *Strukturanalyse und Optimierung anisotroper Schalen aus Faserverbundwerkstoff*. Dissertation Uni-GH Siegen 1986
- [105] WECK, M.: *Werkzeugmaschinen, Fertigungssysteme Band 2: Konstruktion und Berechnung*. Düsseldorf: VDI-Verlag 4. Auflage 1990
- [106] WECK, M.: *Werkzeugmaschinen Band 4: Meßtechnische Untersuchung und Beurteilung*. Düsseldorf: VDI-Verlag 4. Auflage 1992
- [107] KREISSELMEIER, G.; STEINHAUSER, R.: Systematic Control Design by Optimizing a Vector Performance Index. *Proceedings of IFAC Symposium on Computer Aided Design of Control Systems*. Zürich 1979 113-117
- [108] BARTHELEMY, J-F. M.; RILEY, M. F.: An Improved Multilevel Optimization Approach for the Design of Complex Engineering Systems. *AIAA Journal* 26 (1988) 353-360
- [109] SANTOS, J. L. T.; GODSE, M. M.; CHANG, K.-H.: An Interactive Post-Processor for Structural Design Sensitivity Analysis and Optimization: Sensitivity Display and What-If Study. *Computers & Structures* 35 (1990) 1-13
- [110] VAN DEN DAM, R. F.; BOERSTOEL, J. W.; DANIELS, H. A. M.: Optimization in Design Process: An Informatics Point of View. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 22 (1986) 433-450
- [111] BALACHANDRAN, M.; GERO, J. S.: Development of a Knowledge-Based System for Structural Optimization. In: *Structural Optimization*. Hrsg.: ROZVANY, G. I. N.; KARIHALOO, B. L. Dordrecht:

Kluwer Academic Publishers 1988

- [112] SCHITTKOWSKI, K.: An Integrated Knowledge-Based Problem Solving System for Structural Optimization. In: *Structural Optimization*. Hrsg.: ROZVANY, G. I. N.; KARIHALOO, B. L. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers 1988
- [113] JACKSON, M. A.: *Grundsätze des Programmmentwurfs*. Darmstadt: Toeche-Mittler 2. Auflage 1980
- [114] BELL, D.; MORREY, I.; PUGH, J.: *Software Engineering: A Programming Approach*. London: Prentice Hall 2. Auflage 1992
- [115] DENERT, E.: *Software-Engineering*. Berlin: Springer 1991
- [116] RUMBAUGH, J.; BLAHA, M.; PREMERLANI, W.; EDDY, F.; LORENSEN, W.: *Object-Oriented Modeling and Design*. London: Prentice Hall 1991
- [117] GEBHARDT, R.; AMELING, W.: Aspekte und Perspektiven zur Anwendung der objektorientierten Programmierung bei der Entwicklung großer Software-Systeme. *Angewandte Informatik* 10 (1989) 429-435
- [118] MACKI, R. I.: Object Oriented Programming of the Finite Element Method. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 35 (1992) 425-436
- [119] *Arbeits- und Ergebnisbericht 1992 des Sonderforschungsbereiches 332 'Produktionstechnik für Bauteile aus nichtmetallischen Faserverbundwerkstoffen'*. RWTH Aachen 1992
- [120] HENDERSON, J. B.; EMMERICH, W.-D.: Measurement of the Specific Heat of a Glass-filled Polymer Composite to High Temperatures. *Thermochimica Acta* 131 (1988) 7-14
- [121] *VDI-Wärmeatlas: Berechnungsblätter für den Wärmeübergang*. 5. Auflage Hrsg.: Verein Deutscher Ingenieure. Düsseldorf: VDI-Verlag (1988)

Lebenslauf

zur Person

Thorsten Nottebaum
geb. am 2. April 1962 in Mettmann

Schulbildung

1968 - 1972 Gebrüder-Grimm-Grundschule in Ratingen

1972 - 1981 Theodor-Heuss-Gymnasium in Ratingen,
Abiturzeugnis vom 12. Juni 1981

Grundwehrdienst

1981 - 1982 Instandsetzungskompanie 730 in Hilden/Rhld.

Studium

1982 - 1989 Maschinenbau, Fachrichtung Luft- und Raumfahrt,
an der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hoch-
schule Aachen, Diplomzeugnis vom 7. Juli 1989

1986 Studentenaustausch mit dem University of Tennessee
Space Institute, Tullahoma, Tennessee, USA

1987 DGLR-/Schmetz-Preis zur Förderung des wissen-
schaftlichen Nachwuchses

Berufstätigkeit

1989 - 1992 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für
Werkzeugmaschinen des Laboratoriums für Werk-
zeugmaschinen und Betriebslehre an der Rheinisch-
Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

seit 1992 Leiter der Gruppe "Konstruktion und Berechnung"
am o.g. Lehrstuhl

ISBN 3-86111-784-3

