

Aachener Berichte aus dem Leichtbau

Effektive Steifigkeiten und das Stabilitätsverhalten von Gitterstrukturen

Jannik Bühring



Institut für
Strukturmechanik
und Leichtbau

RWTHAACHEN
UNIVERSITY

Effektive Steifigkeiten und das Stabilitätsverhalten von Gitterstrukturen

Effective Stiffnesses and the Stability Behaviour of Lattice Structures

Von der Fakultät für Maschinenwesen der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften
genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Jannik Bühring

Berichter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Schröder
Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Wirt.-Ing. Johannes Henrich Schleifenbaum

Tag der mündlichen Prüfung: 28. Mai 2024

Diese Dissertation ist auf den Internetseiten der Universitätsbibliothek online verfügbar.

Aachener Berichte aus dem Leichtbau
herausgegeben von Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Schröder

Band 4/2024

Jannik Bühring

**Effektive Steifigkeiten und das Stabilitätsverhalten
von Gitterstrukturen**

Shaker Verlag
Düren 2024

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: D 82 (Diss. RWTH Aachen University, 2024)

Copyright Shaker Verlag 2024

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

Print-ISBN 978-3-8440-9737-5
PDF-ISBN 978-3-8440-9837-2
ISSN 2509-663X
eISSN 2944-702X
<https://doi.org/10.2370/9783844098372>

Shaker Verlag GmbH • Am Langen Graben 15a • 52353 Düren
Telefon: 02421 / 99 0 11 - 0 • Telefax: 02421 / 99 0 11 - 9
Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Danksagungen

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Strukturmechanik und Leichtbau der RWTH Aachen University im Zeitraum vom Februar 2018 bis Dezember 2023. Für die Hilfe und Unterstützung möchte ich mich von ganzem Herzen bei allen bedanken, die nachfolgend nicht persönlich genannt werden.

Mein ganz besonderer Dank gilt meinem Doktorvater, Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Schröder. Ich möchte mich für die fortwährende Unterstützung auf fachlicher und persönlicher Ebene, die ermutigenden und ermunternden Gespräche, den Freiraum für Kreatives und meine Forschung sowie das Vertrauen in meine Person recht herzlich bedanken.

Weiterhin möchte ich mich bei Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Wirt.-Ing. Johannes Henrich Schleifenbaum für die Übernahme des Koreferats sowie bei Univ.-Prof. Dr.-Ing. Christian Brecher für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes bedanken.

Die meiste Zeit der letzten Jahre habe ich mit den zahlreichen Kollegen und Kolleginnen verbracht, woraus nicht nur fachliche Meisterleistung entstanden ist, sondern auch viel Quatsch, verrückte Ideen, viel Freude und ganz wichtig: neue Freundschaften. Besonders möchte ich der Kaffeerrunde danken, die die Coronazeit durch die morgendlichen Treffen in der digitalen Kaffeeküche erträglich gemacht hat. Ich danke euch weiterhin für die fachlichen Gespräche, die Hilfe bei Problemen sowie die Anregungen und Impulse. Hervorzuheben ist mein Erfolgsteam, welches mir der Wegweiser war, um meiner Arbeit die nötige Substanz zu verleihen und sie final abzuschließen. Ferner bedanke ich mich bei dem nicht wissenschaftlichen Personal, denn wozu würden wir überhaupt kommen, wenn ihr nicht da wäret? Ich möchte euch herzlichst danken, dass ich mich durch eure Arbeit im Wesentlichen auf meine wissenschaftlichen Ziele konzentrieren konnte. Natürlich darf auch ein Dank an all meine studentischen Hilfskräfte und Abschlussarbeiter, die allesamt wesentlich zu dieser Dissertation, zu meinen Projekten oder unseren Ideen abseits der tiefen Wissenschaften beigetragen haben. Hervorzuheben ist insbesondere die Arbeit von Johannes Soika, Rafael Paintner und Caroline Krämer.

Drei ganz besonderen Kollegen möchte ich einen eigenen Absatz widmen, da sie es die waren, die meine Zeit in ganz besonderem Maße geprägt und beeinflusst haben. Tobias Meinert, Stefano Piacquadio und Maximilian Schirp, unser Ideenreichtum, der Wille, Dinge voranzutreiben und verrückte Sachen umzusetzen, tiefgehend zu verschiedensten Themen zu diskutieren, das war genau der Grund, warum ich mich entschieden habe, eine Stelle als wissenschaftlicher Mitarbeiter anzutreten. Ohne euch wäre die Zeit am Institut nicht die gewesen, die sie war.

Weiterhin möchte ich meiner gesamten Familie danken, die immer an mich geglaubt, mich ermutigt, mich in allem unterstützt und mir die Freiräume geschaffen hat, die ich gebraucht habe. Natürlich möchte ich hier meine Mutter und meinen Bruder Max hervorheben, die mich zu dem gemacht haben, der ich bin, immer für mich da sind und immer an mich geglaubt haben. Weiterer besonderer Dank gilt auch meiner *Neuen Familie*. Ilona, Uli, Dieter, Chris und Consti, vielen Dank für alles, was ihr für mich getan habt und dass ihr mich so herzlichst in euren Familien aufgenommen habt. Es ist zudem ein ganz besonderes Privileg, wenn die besten Freunde einem ebenfalls das Gefühl von Familie geben. Manuel und Fabienne, Robin und Franzi, Sebastian und Natascha, Max und Yvonne, Arno und Lotte, Sven und Lio, liebe neue Generation, ohne euch wäre für mich die Welt nicht die, die sie ist. Ihr seid mein sicherer Hafen und die Menschen, auf die ich immer zählen kann.

Zuletzt möchte ich mich bei den Personen bedanken, die wahrscheinlich das meiste der negativen Dinge, die mit der Anfertigung einer solchen Arbeit einhergehen, abbekommen haben. Was eine solche Arbeit nämlich im großen Umfang benötigt, ist Zeit. Zeit am Abend, Zeit im Urlaub, Zeit am Wochenende, Zeit, die man nicht für die Familie hat. Zeit ist aber leider wie Entropie nicht umkehrbar; einmal aufgewendet, ist sie für immer vergangen. Meiner Frau Jenny möchte ich an dieser Stelle den größten Dank ausrichten. Ohne die unendliche Unterstützung, das Verständnis und die Nachsicht wäre es nicht möglich gewesen, meine beruflichen und privaten Ziele in Einklang zu bringen. Ich bin sehr glücklich darüber und dankbar dafür, wie gut wir diese Zeit gemeinsam überstanden haben und mit welcher Hingabe du mir beigestanden hast. Auch wenn meine Kinder sich wahrscheinlich gar nicht dran erinnern können, mussten auch sie zurückstecken. Unvorstellbar ist doch, wie gut die kleine Mara es verstanden hat, wenn der Papa gerade Ruhe braucht. Danke, liebe Mara und lieber Marlon, einfach dafür, dass ihr so wundervolle Kinder seid und ich euch habe.

Wie in meinem Vortrag möchte ich dieses Vorwort mit einem Zitat schließen, das meine Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter perfekt zusammenfasst, wobei das *Lügen* bitte doch als *großzügige Auslegung* zu verstehen ist.

*«Many times I've lied, many times I've listened,
many times I've wondered how much there is to know.»*
Jimmy Page und Roger Plant

Aachen, im September 2024

Jannik Bühring

Kurzfassung

Die Natur ist eine unerschöpfliche Quelle für innovative Ideen und Lösungsansätze im Bereich der Ingenieurwissenschaften. Bio-inspirierte Bauweisen finden ihre Grundlagen in sich über Jahrhunderte herausgebildeten und optimierten Strukturen der Natur. Die Übertragung dieser Prinzipien auf technische Anwendungen verspricht nicht nur eine verbesserte Leistungsfähigkeit technischer Lösungen, sondern auch einen schonenden Umgang mit Ressourcen. Ein Beispiel sind zelluläre Strukturen oder Werkstoffe, die sich üblicherweise durch eine hohe Porosität auszeichnen. Diese Strukturen besitzen in der Regel eine im Vergleich zu ihrem Grundwerkstoff geringe Dichte und sind somit naturgemäß prädestiniert für Leichtbauanwendungen. Ein Beispiel für solche Strukturen stellen (strebenbasierte) Gitterstrukturen dar.

Mithilfe von Homogenisierungsstrategien wird die Beschreibung des strukturmechanischen Verhaltens von Gitterstrukturen für die Berechnung und Auslegung zugänglich. Um effektive Eigenschaften zu bestimmen, ist es notwendig, die Struktur auf wesentliche Größen zu reduzieren. In der Literatur existieren zwar Ansätze, mit denen sich die mechanischen Eigenschaften beschreiben lassen, allerdings sind diese Modelle nur von unzureichender Genauigkeit oder verlangen umfangreiche empirische Untersuchungen. Weiterhin existieren bislang keine Ansätze, die das Stabilitätsverhalten von Gitterstrukturen beschreiben.

Ziel dieser Arbeit ist die Schließung dieser Lücken, wodurch eine methodische Grundlage für die Vorauslegung von Gitterstrukturen geschaffen wird. Den Kern der entwickelten Methode bildet dabei die Reduktion der mechanischen Eigenschaften auf die charakterisierenden Parameter der Einheitszelle. Die so gewonnenen Ausdrücke dienen dann als Grundlage zur Beschreibung der effektiven mechanischen Eigenschaften auf Zellverbundebene. Diese effektiven Eigenschaften beschreiben schließlich das homogenisierte Werkstoffverhalten der Gitterstruktur und können zur weiteren Berechnung strukturmechanischer Problemstellungen verwendet werden. Im Rahmen dieser Arbeit gelingt dies unter Voraussetzungen sowohl für die Dehnsteifigkeiten als auch für die Schubsteifigkeiten. Weiterhin wird die entwickelte Methode verwendet, um reduzierte Flächenträgheitsmomente zu bestimmen, mit denen sich effektive Biegesteifigkeiten herleiten lassen. Mit diesen grundlegenden, effektiven Eigenschaften kann schließlich die globale Knicklast von Gitterstrukturen beschrieben werden. Weiterhin wird untersucht, wie sich auch die lokale Knicklast bestimmen lässt.

Die vorliegende Arbeit liefert somit Ansätze zur vollständigen Charakterisierung des linear-elastischen, effektiven Werkstoffverhaltens von Gitterstrukturen sowie zur Beschreibung des Stabilitätsverhaltens. Die entwickelte Methode wird exemplarisch auf f2cc,z und bcc Gitterstrukturen angewandt und die Ergebnisse werden vollständig dargestellt. Es erfolgen sowohl Vergleiche mit Finite Elemente Simulationen als auch mit experimentellen Ergebnissen.

Abstract

Nature is an inexhaustible source of innovative ideas and solutions in the field of engineering. Bio-inspired design methods draw on structures from nature that have been developed and optimized over centuries. The transfer of these principles to technical applications promises not only improved performance of technical solutions, but also a resource-saving approach. An example are cellular structures or materials, which are usually characterized by high porosity. These structures generally have a low density compared to their base material and are therefore naturally predestined for lightweight design. One example are (strut-based) lattice structures.

With the help of homogenization strategies, the description of the structural-mechanical behaviour of lattice structures becomes accessible for design calculations. For this purpose, it is necessary to reduce the structure to essential parameters and thereby determine effective properties. Although there are approaches in the literature that can be used to determine the mechanical properties, these models are insufficiently accurate or require extensive empirical investigations. Furthermore, there are no approaches that describe the stability behaviour of lattice structures.

The aim of this work is to close these gaps, thereby creating a methodological basis for the design of lattice structures. The core of the developed method is the reduction of the mechanical properties to the characterizing parameters of the unit cell of the lattice structure. The expressions obtained in this way then serve as the basis for describing the effective mechanical properties on macroscopic level. These effective properties ultimately describe the homogenized material behaviour of the lattice structure and can thus be used for the further calculation of structural-mechanical problems. In the context of this work, this is achieved under certain conditions for both the tensile stiffnesses and the shear stiffnesses. Furthermore, the developed method is used to determine reduced moments of inertia, which can be used to derive effective bending stiffnesses. Finally, these basic effective properties can be used to describe the global buckling load of lattice structures. Furthermore, it is investigated how the local buckling load of these lattice structures can also be determined.

The present work thus provides approaches for the full characterization of the linear-elastic, effective material behaviour of lattice structures as well as for the description of the stability behaviour. The developed method is exemplary applied to f2cc,z and bcc lattice structures and the results are presented in their entity. Further comparisons are made with finite element simulations as well as with experimental results.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Charakterisierung und Berechnung von Gitterstrukturen	11
2.1	Charakterisierung von Gitterstrukturen	11
2.1.1	Relative Dichte	12
2.1.2	Dehnungsdominierte und biegedominierte Gitterstrukturen	14
2.1.3	Einfluss der Schubweichheit	17
2.2	Berechnung von stabförmigen Strukturen	18
2.2.1	Steifigkeiten von Balken	19
2.2.2	Knicken von schlanken Strukturen	22
2.2.3	Ersatzstabverfahren	25
2.2.4	Geometrische Steifigkeitstmatrix	26
2.2.5	Verfahren nach Rayleigh-Ritz	29
3	Effektive Dehnsteifigkeiten von Gitterstrukturen	31
3.1	Ansatz zur Bestimmung der effektiven Dehnsteifigkeiten	31
3.2	Effektive Dehnsteifigkeiten eingefasster Gitterstrukturen	34
3.2.1	Analytische Beschreibung effektiver Dehnsteifigkeiten eingefasster Gitterstrukturen	36
3.2.2	Vergleich der effektiven mechanischen Eigenschaften	40
3.3	Beschreibung der Dehnsteifigkeiten nicht eingefasster Gitterstrukturen	44
3.3.1	Ansatz zur Bestimmung der Einflussfaktoren	45
3.3.2	Erweiterung der Ansätze für nicht kubische Zellen	48
3.4	Experimentelle Validierung	52
3.4.1	Prüfmethodik	52
3.4.2	Material und Probekörper	52
3.4.3	Ergebnisse	54
3.5	Diskussion der Ergebnisse	55
4	Effektive Schub- und Biegesteifigkeiten von Gitterstrukturen	57
4.1	Ansatz zur Bestimmung effektiver Schub- und Biegesteifigkeiten	57
4.2	Schubsteifigkeiten von Gitterstrukturen	61
4.3	Biegesteifigkeiten von Gitterstrukturen	68
4.4	Diskussion der Ergebnisse	75

5	Stabilitätsverhalten von Gitterstrukturen	79
5.1	Ansatz zur Beschreibung der globalen Knicklast	81
5.1.1	Zweidimensionale Analysen	82
5.1.2	Dreidimensionale Analysen	89
5.2	Ansatz zur Beschreibung der lokalen Knicklast	95
5.2.1	Zweidimensionale Analysen	95
5.2.2	Dreidimensionale Analysen	103
5.3	Diskussion der Ergebnisse	105
6	Schlussfolgerung und Ausblick	109
	Literatur	113
A	Anhang	123
A.1	Reduzierte Eigenschaften	123
A.1.1	Reduzierte Flächen der f2cc,z Zelle	123
A.1.2	Reduzierte Flächen der bcc Zelle	124
A.1.3	Reduzierte Flächenträgheitsmomente	126
A.2	Effektive Schubsteifigkeiten	128
A.2.1	Effektive Schubsteifigkeiten der bcc Gitterstruktur	128
A.2.2	Effektive Schubsteifigkeiten der f2cc,z Gitterstruktur	130
A.3	U-Faktoren zur Bestimmung der Knicklast von Gitterstrukturen	134
A.4	Knickkurven	138
A.4.1	Knickkurven für bcc Gitterstrukturen	138
A.4.2	Knickkurven für f2cc,z Gitterstrukturen	141

Abkürzungsverzeichnis

bcc	Einheitszelle mit raumzentrierten Streben.
bcc,z	Einheitszelle mit raumzentrierten Streben und z-Streben.
CAD	Computer Aided Design.
DIC	Direct Image Correlation.
E-Modul	Elastizitätsmodul.
f2bcc	Einheitszelle mit flächenzentrierten Streben und raumzentrierten Streben.
f2bcc,z	Einheitszelle mit flächenzentrierten Streben und raumzentrierten Streben und z-Streben.
f2cc	Einheitszelle mit zwei flächenzentrierten Streben.
fcc	Einheitszelle mit einer flächenzentrierten Strebe.
fcc,z	Einheitszelle mit zwei flächenzentrierten Streben und z-Streben.
fcc,z	Einheitszelle mit einer flächenzentrierten Strebe und z-Streben.
L-PBF	Laser Powder Bed Fusion.
RVE	Repräsentatives Volumenelement.
SLA	Stereolithographie.
TPMS	Triply Periodic Minimal Surfaces.
UV	Ultraviolett.

Symbolverzeichnis

Zeichen	Einheit	Beschreibung
GRIECHISCHE ZEICHEN		
α	$^{\circ}$	Winkel allgemein
κ_s	–	Schubkorrekturfaktor
λ	1/mm	Abkürzung im Rahmen der DGL-Lösungen zur Bestimmung der Knicklasten
ν	–	Querkontraktionszahl allgemein
ω	$^{\circ}$	Winkel der Diagonalstreben einer Gitterstruktur
Φ	$^{\circ}$	Winkel allgemein
Π	–	Potenzial
φ, φ_i	mm	Verdrehung allgemein bzw. um spezifische Koordinatenrichtung
ρ	kg/m ³	Dichte allgemein
ρ_p	–	Partikuläre Lösung der Differentialgleichungen.
$\bar{\rho}_{rel}$	–	Relative Dichte
ρ_s	kg/m ³	Dichte der Grundwerkstoffs
ρ^*	kg/m ³	Dichte der Gitterstruktur
σ	MPa	Spannung allgemein
σ^*	MPa	Homogenisierte Spannung der Gitterstruktur
$\sigma_{y,s}$	MPa	Fließspannung des Grundwerkstoffs
Θ	$^{\circ}/mm$	Winkel allgemein
ϑ	$^{\circ}/mm$	Verdrillung
LATEINISCHE ZEICHEN		
A, A_i	mm ²	Fläche allgemein und spezifisch
$a_1 - a_4$	–	Faktoren/Gewichte zur Ermittlung des Gitterparameters
A_{red}	mm ²	Reduzierte Fläche

Zeichen	Einheit	Beschreibung
B	mm	Breite einer Gitterstruktur
$b_1 - b_6$	–	Faktoren/Gewichte zur Ermittlung des Einflussfaktors
b	–	Ordinatenabschnitt der linearen Einflussfunktion
b	mm	Zellbreite
C	–	Vorfaktor im Gibson-Ashby Modell
$c_1 - c_4$	–	Exponenten zur Ermittlung des Einflussfaktors
c	N/mm	Federsteifigkeit
d	mm	Durchmesser einer Strebe allgemein
E, E_{ii}	MPa	Elastizitätsmodul allgemein bzw. für die entsprechende Koordinatenrichtungen
E_{red}	MPa	Reduzierter Elastizitätsmodul
F, F_i	N	Kraft allgemein bzw. in spezifischer Koordinatenrichtung
M, M_i	Nmm	Moment allgemein bzw. in spezifischer Koordinatenrichtung
f	–	Empirischer Einflussfaktor
f	–	Anteil einer Strebe im repräsentativen Volumenelement (RVE)
G, G_{ij}	MPa	Schubmodul allgemein bzw. für die entsprechende Koordinatenrichtungen
g	–	Empirischer Einflussfaktor
h	mm	Zellhöhe
J, J_{ii}	mm ⁴	Flächenträgheitsmoment allgemein oder für die entsprechende Koordinatenrichtungen
J_{red}	mm ⁴	Reduziertes Flächenträgheitsmoment
K	–	Gitterparameter
k_{ij}	–	Einträge der Steifigkeitsmatrix; i -Zeile, j -Spalte
k_{an}	N/mm	Analytisch ermittelte Dehnsteifigkeit
k_{korr}	N/mm	Durch den Einflussfaktor korrigierte Dehnsteifigkeit
\mathbf{K}	–	Steifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_g	–	Geometrische Steifigkeitsmatrix
K_s	–	Allgemeine Eigenschaft des Grundwerkstoffs im Gibson-Ashby Modell
K^*	–	Allgemeine Eigenschaft der Gitterstruktur im Gibson-Ashby Modell
L	mm	Länge der Gitterstruktur
l, l_i	mm	Länge einer Strebe allgemein und spezifisch

Zeichen	Einheit	Beschreibung
l_d	mm	Länge einer Diagonalstrebe
L_{eff}	mm	Effektive Länge des Knickstabes
L_f	mm	Länge des unversteiften Bereichs
L_r	mm	Länge des versteiften Randstörungsbereich
l_v	mm	Länge einer Vertikalstrebe
m	–	Steigung der linearen Einflussfunktion
M	–	Maxwell-Zahl
N	–	Parameter zur Abschnittsteilung von Einflussfunktionen
N	N	Normalkraft
n	–	Hierarchiegrad einer Struktur
n, n_i	mm	Zellanzahl allgemein bzw. in entsprechende Koordinatenrichtung
n_{Gitter}	–	Anzahl Punkte im Gitter für Monte Carlo Simulation
n_{RVE}	–	Anzahl Punkte im RVE für Monte Carlo Simulation
P_{kr}	N	Kritische Druckkraft
P	N	Externe Druckkraft
q	–	Proportionalitätsfaktor
p	–	Anzahl Knoten
Q_s	–	Zusammenfassung des Schubeinflusses
Q	N	Querkraft
r	mm	Radius einer Strebe allgemein
s	–	Anzahl Streben
T	–	Transformationsmatrix
t	–	Exponent im Gibson-Ashby Modell
U	–	Zusammenfassung von Parametern
u, u_i	mm	Verschiebung allgemein bzw. in spezifische Koordinatenrichtung
u_b	mm	Verschiebungsanteil aus Biegedeformation
u_s	mm	Verschiebungsanteil aus Schubdeformation
V_{ges}	mm ³	Volumen allgemein
V	N	Externe Querkraft
v_1, v_2	–	Faktoren zur vereinfachten Darstellung der geometrischen Steifigkeitsmatrix

Zeichen	Einheit	Beschreibung
\bar{v}_1, \bar{v}_2	—	Faktoren zur vereinfachten Darstellung der geometrischen Steifigkeitsmatrix
v^*	—	Faktor zur vereinfachten Darstellung der geometrischen Steifigkeitsmatrix
w	mm	Verschiebung in 3-Richtung
x_i	mm	Koordinate in spezifischer Koordinatenrichtung

1 Einleitung

Die Natur ist eine unerschöpfliche Quelle für innovative Ideen und Inspirationen im Bereich der Ingenieurwissenschaften und der Werkstofftechnik. Bio-inspirierte Bauweisen, oft als bionische oder biomimetische Ansätze bezeichnet, schöpfen von sich über Jahrhunderte herausgebildete und optimierte Strukturen der Natur. Die Übertragung dieser Prinzipien auf technische Anwendungen verspricht nicht nur eine verbesserte Leistungsfähigkeit, sondern auch nachhaltige und ressourcenschonende Lösungen. Bio-inspirierte Strukturen und Bauweisen sind längst Gegenstand unterschiedlichster technischer Anwendungen. Ein einfaches Beispiel stellen hexagonale Wabenstrukturen dar, meist aufgrund ihrer Ähnlichkeit zu Bienenwaben einfach "honeycomb" genannt, die in unterschiedlichsten Formen und Materialien häufig für Sandwichkerne verwendet werden. Solche zellulären Strukturen werden im Allgemeinen in 2D-Strukturen (z.B. Wabenstrukturen oder Isogrids) und 3D-Strukturen (z.B. Schäume oder Gitterstrukturen) unterteilt [1]. Weiterhin lässt sich eine Unterteilung in offenzellige und geschlossenzellige Strukturen vornehmen. Technisch relevante dreidimensionale zelluläre Strukturen sind vor allem sogenannte Gitterstrukturen und Schäume. Sie unterscheiden sich dabei in ihrem grundsätzlichen Aufbau: Schäume zeichnen sich durch einen stochastischen Aufbau aus, wohingegen Gitterstrukturen in der Regel eine definierte Topologie aufweisen. Durch ebendiesen definierten Aufbau lassen sich mit Gitterstrukturen ganz gezielte Eigenschaften einstellen. So weisen sie insbesondere hervorragende gewichtsspezifische Steifigkeiten und Festigkeiten auf [2]. Aufgrund der klaren Vorteile hinsichtlich ihrer weitestgehend freien Gestaltung und dem Potenzial einer multifunktionalen Anwendung, z.B. durch Kopplung mechanischer und thermischer Funktionen, wecken Gitterstrukturen ganz allgemein besonderes Interesse im industriellen und universitären Kontext. Insbesondere für sehr spezifische Anwendungen z.B. zur Energieabsorption [3, 4, 5], Dämpfung [6, 7] oder Wärmedämmung [8, 9] lassen sich über Gitterstrukturen höchst interessante Eigenschaften einstellen.

Zur Herstellung von Gitterstrukturen werden üblicherweise additive Fertigungsverfahren verwendet, siehe Abbildung 1.1. Insbesondere Pulverbettverfahren (vor allem L-PBF, Laser Powder Bed Fusion oder auch Selektives Laserschmelzen) sind hier als Schlüsseltechnologie für die individualisierte und ressourcenschonende Herstellung hochfunktionaler Bauteile zu sehen. Sie sind ein Türöffner für den Einsatz von Gitterstrukturen in technischen Anwendungen. Die sich stetig verbessernde Anlagentechnologie führt zur sich weiter ausbauenden Intensivierung des Interesses auf universitärer und auch industrieller Seite. Pulverbettverfahren erlauben die Produktion komplexer Gitterstrukturen mit sehr hoher Genauigkeit zu akzeptablen Kosten in Prototypenphasen [10, 11, 12]. Gleichwohl existieren neue Herausforderungen, wie die Berücksichtigung des sich durch den Fertigungsprozess bedingten schichtweisen Aufbaus, bzw. der daraus

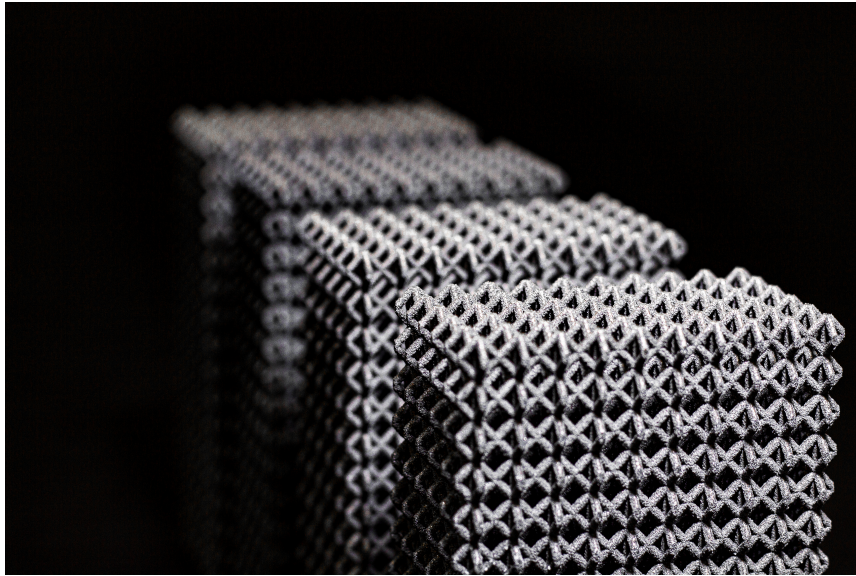


Abb. 1.1: Beispiel für eine additiv gefertigte Gitterstruktur.

resultierenden anisotropen Werkstoffeigenschaften. Verstärkt wird dies noch durch Fertigungsfehler oder Abweichungen von der Sollgeometrie, die zu einer großen Abweichung zwischen Konstruktion und realem Bauteil führen können [13, 14]. Insbesondere für Vorentwurfsphasen stellt sich somit die Frage, was eigentlich eine hinreichend genaue Beschreibung des strukturellen Verhaltens ist. Unter der Familie der Gitterstrukturen unterscheidet man strebenbasierte und flächenbasierte Strukturen, sogenannte TPMS (engl. Triply-Periodic-Minimal-Surfaces). Im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich strebenbasierte Strukturen untersucht. Betrachtet man Gitterstrukturen mit periodisch wiederkehrender Mesostruktur, erhält man ein offenzelliges, dreidimensionales und homogenes Zellgefüge. Makroskopisch betrachtet verhält sich dieses Zellgefüge wie ein Werkstoff, dessen homogenisierte strukturmechanische Eigenschaften diesen charakterisieren. Zelluläre Strukturen können folglich als eine Art hierarchischer Werkstoff betrachtet werden. Vielmehr lassen sich in Abhängigkeit der strukturellen Parameter effektive mechanische Eigenschaften herleiten. Kork ist ein Beispiel für eine solche natürliche dreidimensionale zelluläre Struktur. Die mechanischen Eigenschaften von zellulären Strukturen lassen sich in Abhängigkeit topologischer Parameter, wie z.B. der Porosität, in guter Näherung beschreiben. Ganz grundsätzlich lassen sich die resultierenden mechanischen Eigenschaften zudem auf unterschiedlichen Ebenen abbilden. Es ist folglich auch in Bezug auf die Terminologie, die in dieser Arbeit verwendet wird, eine Definition zu treffen. Abbildung 1.2 zeigt verschiedene Strukturebenen, auf denen sich Eigenschaften von Gitterstrukturen definieren lassen. Diese Arbeit verwendet die dort dargestellte Nomenklatur, in der die kleinste Strukturebene, der atomare Aufbau, der Mikrostrukturebene zuzuordnen ist. Das resultierende Gefüge dient dann als Bindeglied zwischen der Mikro- und Mesostruktur. Die Mesostrukturebene wird durch die einzelnen Streben und die aus diesen Streben zusammengesetzte repräsentative Einheitszelle charakterisiert. Werden die resultierenden mechanischen Eigenschaften eines Verbundes aus Gitterzellen homogenisiert, erhält man ein homogenisiertes Gittergefüge, welches zwischen Mesostrukture-

bene und Makrostrukturebene einzuordnen ist. Der Makrostrukturebene ist das Bauteil mit den homogenisierten Materialeigenschaften zuzuordnen, welche aus der strukturmechanischen Beschreibung des homogenisierten Gittergefüges resultieren.

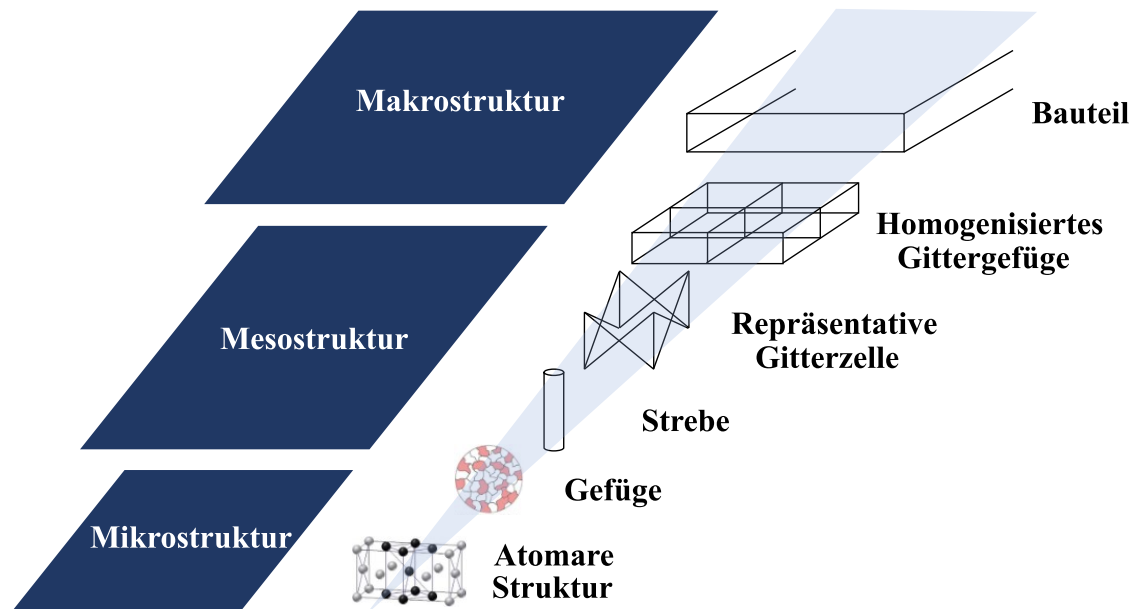


Abb. 1.2: Von der Mikro- zur Makrostruktur – Unterteilung eines Gitterstrukturbauteils in verschiedene Hierarchieebenen.

Ein weiterer Detailgrad wird durch den sogenannten Hierarchiegrad (n) definiert, welcher abhängig von der Anzahl struktureller Ebenen auf der Mesostrukturebene ist. Ein Hierarchiegrad $n = 0$ bezeichnet folglich eine einfache Kontinuumsstruktur, wohingegen eine Fachwerkstruktur einen Hierarchiegrad $n = 1$ besitzt. Ist wiederum die Strebe aus einer Struktur ausgebildet, ist dies als Hierarchiegrad $n = 2$ zu bezeichnen. Grundsätzlich könnte man eine additiv gefertigte Gitterstruktur als Struktur mit Hierarchiegrad $n = 1$ bezeichnen. Bei Einbezug des anisotropen Materialverhaltens, genauer gesagt des schichtweisen Aufbaus, würde man allerdings eher von einem Hierarchiegrad $n = 2$ ausgehen. Die Arbeit beschäftigt sich mit einer vereinfachten Betrachtung und allgemein isotropen Werkstoffeigenschaften, wodurch ein Hierarchiegrad $n = 1$ zugrunde gelegt wird. Ganz grundsätzlich lässt sich aber definieren, dass, wenn man eine Unterstruktur von der höherliegenden Hierarchieebene betrachtet, sich diese Unterstruktur durch homogenisierte Eigenschaften beschreiben lässt, die einem Verhalten bzw. der Definition eines Werkstoffs ähneln. Dies kann gezielt ausgenutzt werden, um Eigenschaften auf einer beliebigen Hierarchieebene zu erzeugen, die auf einfacher oder herkömmlicher Werkstoffebene nicht erzeugbar sind. Ein Beispiel ist die Querkontraktion. Werden sogenannte auxetische Gitterzellen verwendet, können beispielsweise negative Querkontraktionszahlen erzeugt werden, was aus der Sicht herkömmlicher Werkstoffe unphysikalisch erscheint (siehe Abbildung 1.3) [15]. Durch den stetigen Fortschritt bei den additiven Fertigungsverfahren können mitt-

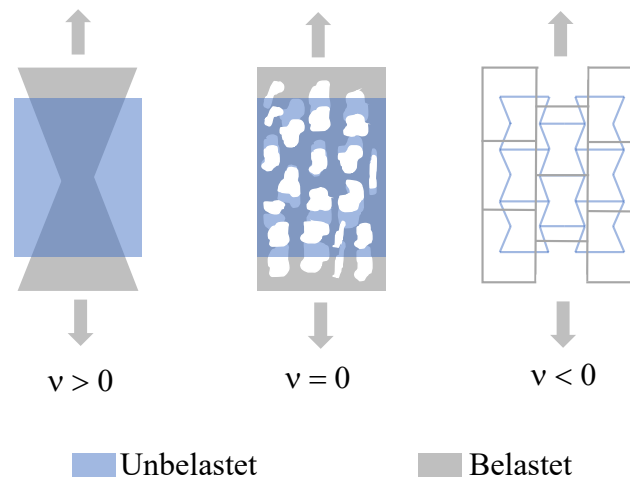


Abb. 1.3: Unterschiedliche Querkontraktionszahlen realisiert durch hierarchische Strukturen.

lerweile Strukturen generiert werden, die wenige Nanometer [16] bis zu mehrere Millimeter messen [17]. Folglich können dadurch beinahe beliebig viele Hierarchieebenen erzeugt und somit eine schier unendliche Freiheit an Gestaltungsmöglichkeit bereitgestellt werden, bzw. lassen sich gezielte mechanische Eigenschaften erreichen. Aufgrund der zunehmenden Komplexität ist es dann nicht mehr sinnvoll, Strukturantworten auf der Mesoebene zu bestimmen oder zu beschreiben. Die strukturellen Eigenschaften müssen für eine gezielte Auslegung weitestgehend homogenisiert werden. Von außen betrachtet, also auf der Makrostrukturebene, besteht dann die Unterstruktur gemäß der zuvor dargestellten Definition aus beliebigen Hierarchieebenen und verhält sich wie ein Werkstoff [18]. So lassen sich gezielte, belastungsoptimierte Strukturen erzeugen [19]. Begrenzt wird die Gestaltungsfreiheit eigentlich nur durch die Fertigungsrandbedingungen. Rehme [20] gibt dabei drei Haupteinschränkungen in Bezug auf die Gestaltung der Einheitszelle an [21]:

- Orientierungsbeschränkung der Streben im Raum
- Durchmesserbeschränkung der Streben
- Längenbeschränkung der Streben

Weiterhin stellt Ashby [22] drei Charakteristiken einer repräsentativen Einheitszelle auf, die die mechanischen Eigenschaften der Gitterstruktur maßgeblich beeinflussen:

- Biege- oder dehnungsdominiertes Verhalten
- Topologie der Zelle
- Eigenschaften des Grundwerkstoffs

Dieser Zusammenhang ist ausführlicher in Abbildung 1.4 dargestellt. Mittlerweile ist nahezu jede Materialklasse additiv herstellbar. Bei metallischen Werkstoffen ist eine Vielzahl unterschiedlicher kommerzieller Legierungen auf dem Markt erhältlich. Insbesondere Aluminium-, Titan- und Magnesiumlegierungen sind für Leichtbauanwendungen, z. B. in der Automobil-

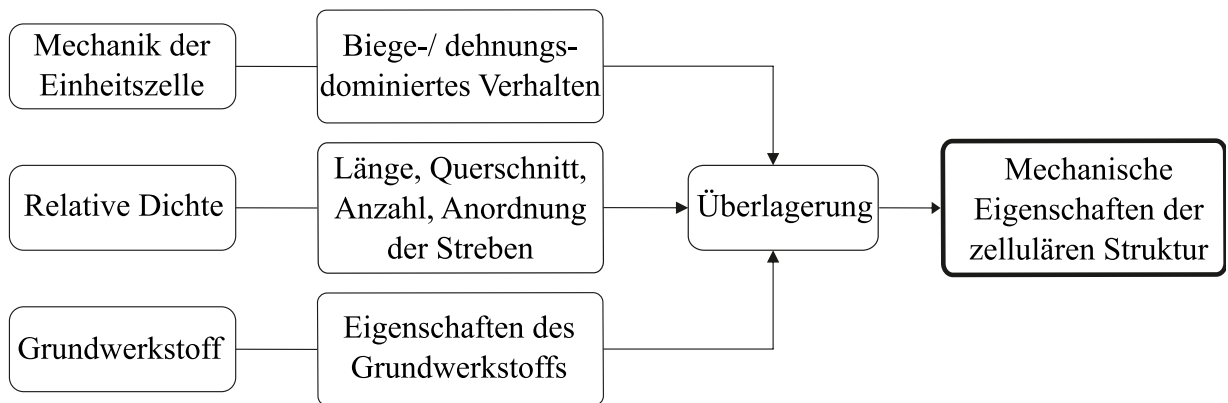


Abb. 1.4: Charakterisierung der mechanischen Eigenschaften von Gitterstrukturen durch drei dominierende Faktoren (in Anlehnung an [22], [21]).

[23, 24] oder Luftfahrtindustrie [25, 26, 27, 28, 29], von besonderem Interesse. Doch auch diverse Keramiken [30, 31, 32] und Kunststoffe [33, 34] sind in einer Vielzahl an Publikationen für verschiedenste Anwendungsfälle untersucht. Die in der Literatur am häufigsten betrachteten Zelltypen weisen eine kubische Form auf. Es existieren nahezu unendliche verschiedene Einheitszellen, die alle ganz unterschiedlichste Eigenschaften aufweisen. Üblicherweise finden Methodenentwicklungen an acht von Rehme [20] definierten kubischen Grundtypen statt, die in Abbildung 1.4 dargestellt sind. Sie stellen sozusagen einen Grundstock an kubischen Gitterzellen dar, die sich vor allem auch gut mittels additiver Fertigungsverfahren herstellen lassen. Die von Rehme definierten Gittertypen, setzen sich aus Kombinationen raumzentrierter Diagonalstreben (bcc – engl. body-centered-cubic), flächenzentrierter Diagonalstreben (fcc – engl. face-centered-cubic) und vertikaler Streben (z – vertikale Streben, meist lokale z-Richtung) zusammen. Grundsätzlich wären auch Horizontalstreben, also x-Streben und y-Streben, denkbar. Diese werden aber faktisch durch die Herstellungsrandbedingungen ausgeschlossen.

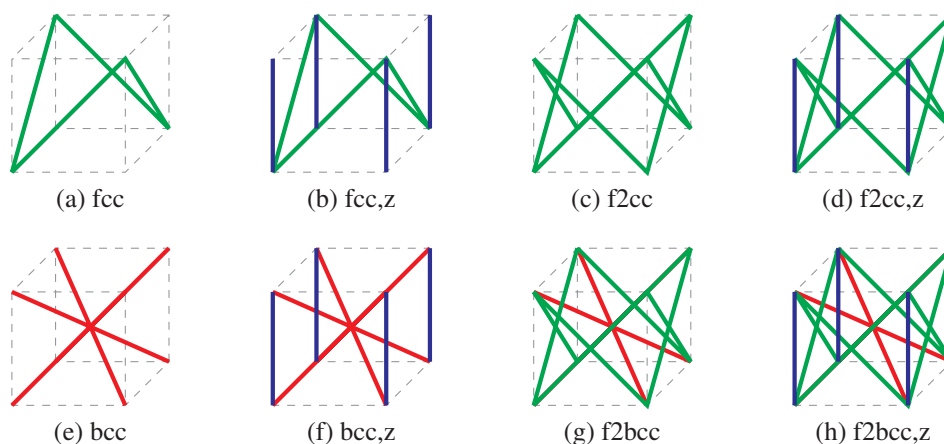


Abb. 1.5: Übersicht über kubische Einheitszellen, angelehnt an Rehme [20]. Flächenzentrierte Streben sind grün, raumzentrierte rot und z-Streben blau dargestellt.

In der Literatur ist eine Vielzahl an Strategien zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Gitterstrukturen zu finden. Die meisten Studien verwenden kontinuumsmechanische Homogenisierungsstrategien, um ein allgemeines Materialmodell für Gitterstrukturen abzuleiten. Beispiele für die elastische Beschreibung des mechanischen Verhaltens finden sich bei Gonella et al. [35], die den effektiven Elastizitätsmodul, den Schubmodul und die Querkontraktion für regelmäßige hexagonale Gitter unter Verwendung der homogenisierten Bewegungsgleichungen berechneten. Ferner implementierten Vigliotti und Pasini [36] eine Homogenisierungsmethode, indem sie unter der Annahme periodischer Randbedingungen die makroskopische Spannungsenergiedichte der deformierten Struktur mit der der Elementarzelle gleichsetzten. Weiterhin findet sich ein ähnlicher energiebasierter Ansatz in der Arbeit von Abdoul-Anziz [37]. Andere Arbeiten konzentrieren sich auf die Feststellung einer Abhängigkeit zwischen relativer Dichte und mechanischen Eigenschaften. Beispiele hierfür finden sich bei Gibson & Ashby [22], die als erste darüber berichteten, Ahmadi et al. [38], die das Kompressionsverhalten und die daraus resultierenden Elastizitätsmodule von sechs verschiedenen Elementarzellen untersuchten, oder Challapalli et al. [39], die effektive Steifigkeiten durch Mittelung über das Elementarzellvolumen entwickelten. Abhängig von der Homogenisierungsstrategie hat die Schlankheit der Streben bzw. das Verhältnis von Strebenradius zu Strebenlänge (r/l) einen wichtigen Einfluss auf die mechanischen Eigenschaften und steht in engem Zusammenhang mit der relativen Dichte [13, 40, 41], auf die in Kapitel 2.1.1 näher eingegangen wird. Ushijima et al. [40] entwickelten eine analytische Gleichung für den E-Modul von bcc-Gitterstrukturen, die auf prinzipiell beobachteten Verformungsmechanismen dieser Zellen basiert. Aufbauend auf dieser Studie haben Gümruk et al. [41] gezeigt, dass diese analytischen Berechnungen für niedrige r/l sehr genau sind. Ferner berichten sie, dass bei Porosität unter 70 % oder 60 %, die Abweichungen der analytischen Berechnungen im Vergleich zu den experimentellen Ergebnissen zu groß seien und die analytischen Lösungen nicht mehr als hinreichend genau betrachtet werden können. Um eine hohe Genauigkeit zu gewährleisten, empfehlen sie die Verwendung der Ansätze nur für Porosität von mehr als 90 %. Auch Lei et al. [42] präsentieren analytische Näherungen zur Beschreibung der Steifigkeit von bcc und bcc,z Gitterzellen unter Kompressionslasten. Generell sind die in der Literatur zu findenden analytischen Lösungen hauptsächlich für die bcc-Zelle. Die unterschiedlichen Ansätze, z. B. [43, 44, 45], führen dabei zu sehr unterschiedlichen Ergebnissen, sodass hieraus zu schließen ist, dass eine Beschreibung bisher nicht hinreichend gelungen ist. Die Zelltopologie selbst hat einen großen Einfluss auf die Steifigkeit der Gitterstruktur. Beispielsweise führt das Hinzufügen vertikaler Streben zu Zelltypen wie fcc oder bcc zu einer deutlichen Erhöhung der Steifigkeit. Als Beispiel: Im Fall von fcc kann eine z-Strebe zu einer 21-fach höheren Steifigkeit bei einer Erhöhung der relativen Dichte von nur 2 % führen [13]. Aufgrund des unterschiedlichen Verformungsverhaltens in Abhängigkeit von der Strebenanordnung werden dehnungsdominierte und biegedominierte Strukturen weiter differenziert [46]. Diese Unterscheidung stellt ein häufig verwendetes Kriterium [9, 13, 45, 47] zur Definition grundlegender Eigenschaften und des allgemeinen Versagensverhaltens von Gitterstrukturen dar. Im Allgemeinen haben biegedominierte Strukturen eine geringere Festigkeit, weisen aber ein günstigeres Fließverhalten mit einem konstanten Spannungsplateau auf, was z. B. für Dämpfungsanwendungen vorteilhaft sein kann und generell ein eher gutmütiges Ver-

sagensverhalten darstellt. Dehnungsdominierte Strukturen haben eine höhere Festigkeit, können aber nach einem Versagen das hohe Kraftniveau nicht aufrechterhalten [45, 48], was eher zu einem bösartigen Versagensverhalten führt. Ushijima et al. [45] zeigen allerdings, dass sich insbesondere bei mehrachsigen Belastungsbedingungen das vorherrschende charakteristische Verhalten ändern kann. Das charakteristische Verformungsverhalten hat auch direkten Einfluss auf die mechanischen Eigenschaften, und die daraus resultierenden Anwendungsmöglichkeiten. Während biegedominierten Strukturen nachgesagt wird, die Energieabsorption zu begünstigen, kann mit dehnungsdominierten Strukturen eine deutlich höhere Festigkeit und Steifigkeit erreicht werden [22, 20]. Dies zeigt, dass die Wahl der Elementarzelle bereits einen erheblichen Einfluss auf die Eigenschaften der resultierenden Gitterstruktur hat.

Ein häufig verwendeter Ansatz zur Beschreibung mechanischer Eigenschaften von Gitterstrukturen ist der Ansatz nach Gibson und Ashby [1]. Sie zeigen, dass die Steifigkeit und Festigkeit von Gitterstrukturen in guter Näherung als Funktion der relativen Dichte und des E-Moduls des verwendeten Materials dargestellt werden können. Hierauf wird näher in Kapitel 2.1.2 eingegangen. Diese Methode wird z. B. von Meza et al. [49] aufgegriffen, um die mechanischen Eigenschaften von dreidimensionalen Gitterstrukturen zu beschreiben. Der Zusammenhang zwischen dem Verhältnis der Dichten und dem E-Modul erfolgt dabei anhand eines Potenzmodells und die entsprechenden Faktoren werden anhand von experimentellen Untersuchungen bestimmt. Alternativ kann, der effektive E-Modul aus der Steifigkeit der Zelle berechnet werden. Umer et al. [50] bestimmen auf diese Weise die Kompressionssteifigkeit einzelner Gitterzellen. Souza et al. [13] bestimmen die Steifigkeitswerte von verschiedenen Gitterzellen aufbauend auf dem Verhalten der Einheitszelle und dos Reis und Ganghoffer [51] bestimmen die Steifigkeit zweidimensionaler, auxetischer Gitterstrukturen. Auf diesen Wegen kann folglich von der Steifigkeit, und dem Verhalten der repräsentativen Einheitszelle im Sinne einer hierarchischen Modellierung auf die Eigenschaften der Makrostruktur geschlossen werden. Noor et al. [52] beschreiben beispielsweise gitterbasierte Balken- und Plattenstrukturen auf Grundlage kontinuumsmechanischer Ansätze, Burgardt und Cartraud modellieren [53] stabähnliche Gitterstrukturen auf Basis von Energiemethoden, indem die auftretenden Verschiebungen durch lineare Funktionen dargestellt werden und Desmoulins und Kochmann [54] stellen eine Methode vor, mit der auch lokal auftretende, inelastische Effekte abgebildet werden können. Yoder [55] und Yan et al. [56] gehen weiterhin auf Fehler ein, die durch die genannten Homogenisierungsansätze entstehen. Sie beschreiben, dass sich mit der Probengröße ändernde Verhalten von Gitterstrukturen, definieren folglich einen *size effect*. Fan et al. [57] beschreiben zudem den bereits erwähnten Einfluss von Randbedingungen und versteiften Kanten. Ein weiteres Phänomen, welches bei schlanken Strukturen auftritt, ist das Stabilitätsproblem, welches sowohl lokal als auch global auftreten kann. Für schlanke Strukturen wird dies in der Regel Knicken genannt. Insbesondere ein lokal auftretendes Knicken einer Strebe muss nicht zwingend zu einem verfrühtem Versagen der Struktur führen. Speziell bei Gitterstrukturen ist die dadurch entstehende Lastumleitung auf andere Bereiche in der Struktur ggf. sogar ein Weg für mögliche Redundanzen. Dennoch stellt eine lokal knickende Strebe ein nicht zu vernachlässigendes Risiko dar, welches zu berücksichtigen ist. Folglich ist zu beachten, dass auch bei grundsätzlich linearem Materialverhalten ein nicht lineares Strukturverhalten resultieren kann. Dies führt dazu, dass

bei Verwendung einer homogenisierten Beschreibung einer hierarchischen Mesostruktur definitiv zumindest zu prüfen ist, inwieweit ein lokales Knicken auftreten kann. Dennoch hilft die homogenisierte Beschreibung bei der Bestimmung globaler Knicklasten von Gitterstrukturen, wie diese Arbeit zeigen wird. Grundlegende Untersuchungen hierzu wurden zum Beispiel von Bazant [58], Timoshenko [59] und Razdolsky [60] im Rahmen einer Beschreibung des Knickverhaltens zusammengesetzter Balkenstrukturen angestellt. In anderen Ansätzen, wie von McCallen und Roustad [61] oder Moreau und Caillerie [62] wird das Stabilitätsversagen auf Basis eines Kontinuumsmodells des Balkens bestimmt. Sui et al. [63, 64] beschreiben zudem, dass es möglich ist, bei Bestimmung einer effektiven Biegesteifigkeit einer Gitterstruktur über die Euler-Formel eine globale Knicklast zu ermitteln. Weiterhin untersuchen Fan et al. [65] das Stabilitätsverhalten auf Einheitszellebene. Dennoch ist eine vereinfachte Beschreibung des Knickverhaltens von Gitterstrukturen, zur Beschreibung des resultierenden makroskopischen Strukturverhaltens, bisher nicht ausreichend gelungen.

Ziele und Übersicht dieser Arbeit

Aus der dargestellten Literaturübersicht ergeben sich für Gitterstrukturen insbesondere bei der analytischen Berechnung effektiver Steifigkeiten und dem Knickverhalten auf lokaler und globaler Ebene signifikante Lücken. Diese Arbeit beschäftigt sich mit der methodischen Schließung dieser Lücken. Aus der Literaturlauswertung und dem allgemeinen Bestreben nach Lösungen zur Beschreibung des Strukturverhaltens von Gitterstrukturen lassen sich die nachfolgend dargestellten logischen Forschungshypothesen ableiten, auf denen die Untersuchungen dieser Arbeit beruhen.

Hypothese I: Die effektiven Steifigkeiten von Einheitszellen lassen sich durch den E -Modul und die Querkontraktionszahl ν des Werkstoffs und durch die wesentlichen geometrischen Zellparameter Zellhöhe h , Strebenwinkel ω und Strebendurchmesser r vollständig beschreiben. Auf Grundlage dieser Parameter lassen sich weiterhin analytische Ausdrücke zur Ermittlung der Steifigkeiten herleiten.

Hypothese II: Die sich ergebenden analytischen Ausdrücke für die Steifigkeiten von Einheitszellen (Hypothese I) lassen sich auf Zellverbundebene (Gitterstruktur) übertragen. Somit lässt sich das effektive Steifigkeitsverhalten von Gitterstrukturen mittels analytischer Ausdrücke in Abhängigkeit der Zellparameter bestimmen.

Hypothese III: Auf Basis der effektiven Eigenschaften lässt sich eine Homogenisierung der Gitterstruktur durchführen, die Ausgang für ein Werkstoffmodell sein kann.

Hypothese IV: Mithilfe der effektiven Eigenschaften lässt sich das Knickverhalten von Gitterstrukturen beschreiben.

Der Aufbau dieser Arbeit folgt dabei der systematischen Behandlung dieser Hypothesen. In Kapitel 2 werden zunächst die theoretischen Grundlagen und Methoden behandelt, die fundamental für die in dieser Arbeit entwickelten Ansätze sind. Hierzu wird zunächst eine allgemeine Charakterisierung von Gitterstrukturen vorgenommen. Dies beinhaltet insbesondere eine Beschreibung und Diskussion gängiger Größen und Einflüsse, wie der relativen Dichte, dem charakteristischen Deformationsverhalten von Gitterstrukturen und den daraus resultierenden Konsequenzen für die mechanischen Eigenschaften, sowie den Einfluss von Schubweichheit. Es folgt eine Vorstellung der verwendeten Methoden und Berechnungsverfahren. Dafür wird zunächst auf die allgemeine Beschreibung von Balkensteifigkeiten und dem Knickverhalten von schlanken Strukturen eingegangen. Daraufhin wird das Ersatzstabverfahren vorgestellt. Es folgt eine Beschreibung der nicht linearen Steifigkeitsmatrix und eine Erläuterung des Verfahrens nach Rayleigh-Ritz. Den Kern der Arbeit stellen drei Hauptkapitel dar, die sich mit der Beschreibung der effektiven Dehnsteifigkeiten, der effektiven Schub- und Biegesteifigkeiten und dem Knickverhalten von Gitterstrukturen beschäftigen. In Kapitel 3 wird eine Methode zur analytischen Bestimmung der Dehnsteifigkeiten von Gitterstrukturen vorgestellt. Es werden mit diesem Ansatz parameterabhängige Ausdrücke für zwei ausgewählte Gitterzellen hergeleitet. Diese entwickelte Methode kann verwendet werden, um die Dehnsteifigkeiten von eingefassten Gitterstrukturen, also solchen, die keine verschieblichen Ränder aufweisen, zu ermitteln. Die Methode wird um semi-analytisch ermittelte Einflussfaktoren erweitert, um auch die Steifigkeiten von nicht eingefassten, sogenannten freien Gitterstrukturen, beschreiben zu können. Die Ergebnisse werden mit Literaturlösungen und experimentellen Ergebnissen abschließend verglichen. In Kapitel 4 folgt eine Beschreibung der Schub- und Biegesteifigkeiten von Gitterstrukturen. Hierzu wird zunächst allgemein die Methode an einem zweidimensionalen Beispiel beschrieben. Der entwickelte Ansatz beruht auf der Bestimmung reduzierter Eigenschaften, mit denen die effektiven Eigenschaften des Gitters beschrieben werden können. Anschließend erfolgt die Adaption auf dreidimensionale Gitterstrukturen und es werden für die exemplarisch ausgewählten Gittertypen die jeweiligen effektiven Schub- und Biegesteifigkeiten bestimmt. Die Ergebnisse werden mit Finite Elemente Simulationen verglichen. In Kapitel 5 wird eine Methode zur Ermittlung lokaler und globaler Knicklasten von Gitterstrukturen vorgestellt. Die Beschreibung beruht auf den bereits im vorigen Kapitel hergeleiteten reduzierten Eigenschaften. Es werden unterschiedliche Einflüsse auf die Ergebnisse diskutiert und schließlich die analytischen Lösungen mittels Finite Elemente Simulationen sowohl für das lokale als auch das globale Knickverhalten verglichen. Zum Schluss der Arbeit folgt in Kapitel 6 eine Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse dieser Arbeit, insbesondere in Hinblick auf die zuvor genannten Forschungshypothesen.

2 Charakterisierung und Berechnung von Gitterstrukturen

Das nachfolgende Kapitel bildet die Grundlagen, auf denen die in dieser Arbeit entwickelten Methoden beruhen. Zuerst wird ein Überblick über Methoden zur Charakterisierung von Gitterstrukturen gegeben. Hierbei wird insbesondere Bezug auf die relative Dichte von Gitterstrukturen, dehnungs- und biegedominiertem Verhalten sowie den Einfluss von Schubweichheit genommen. Anschließend werden grundlegende Berechnungsmethoden vorgestellt. Hierzu wird Bezug auf die Steifigkeiten von Balkenstrukturen, sowie auf die Herleitung der Steifigkeitsmatrix genommen. Diese bildet die Grundlage für die Bestimmung von effektiven Steifigkeiten von Gitterstrukturen. Anschließend folgt eine Einführung in die lineare und nichtlineare Stabilitätstheorie, in das Ersatzstabverfahren sowie in das Verfahren nach Rayleigh-Ritz. Diese Verfahren dienen als Grundlage für die hergeleiteten Zusammenhänge zur Beschreibung der Knicklasten von Gitterstrukturen.

2.1 Charakterisierung von Gitterstrukturen

Die meisten Untersuchungen zum strukturmechanischen Verhalten von Gitterstrukturen und hierarchischen Werkstoffen sind nach dem in Abbildung 1.2 gezeigten Schema zwischen der Mesostruktur- und der Makrostrukturebene einzuordnen. Ohne Betrachtung von Fertigungseinflüssen gibt es drei Haupteinflussfaktoren auf eine zelluläre Struktur: die relative Dichte, den Grundwerkstoff und die Mechanik der Einheitszelle (vgl. Abbildung 1.4) [22]. Die resultierenden effektiven mechanischen Eigenschaften lassen sich gezielt über diese drei Parameter einstellen. Bezüglich ihrer spezifischen Eigenschaften lassen sich zelluläre Strukturen weiterhin in dehnungsdominierte und biegedominierte Strukturen [66] unterteilen. Dehnungsdominierte Strukturen bringen besonders Vorteile in Bezug auf Steifigkeit und Festigkeit [67]. Im Gegensatz dazu eignen sich biegedominierte Strukturen besonders für Applikationen, bei denen eine hohe spezifische Energieabsorption gefordert ist [46]. Frühere Untersuchungen, wie von Deshpande et al. [46], Doyoyo et al. [68, 69], Wicks et al. [70], Knott et al. [71], Kooistra et al. [72], Wallach et al. [73] oder Luxner [74] fokussieren insbesondere die analytische, numerische und experimentelle Bestimmung von makroskopischen Festigkeiten und Steifigkeiten. Maßgebliche Arbeiten sind hier vor allem die Untersuchungen von Deshpande et al. [46] und Wicks et al. [70] zur analytischen und numerischen Beschreibung der Versagensmoden von „Kagome“ Zellen und „octet-truss“ Strukturen. Weiterhin untersuchen Doyoyo et al. [68, 69] das Versagensverhalten von multi-axial belasteten Gitterstrukturen mit dünnen und kurzen Streben, sowie das plastische Versagensverhalten von uniaxial und transversal belasteten gitterförmigen auxetischen Strukturen. Weitergehend stellten Luxner et al. [74] numerische Untersuchungen

an, um die elastischen Eigenschaften und den Grad der Anisotropie für verschiedene geometrische Konfigurationen zu bestimmen. Gümrück et al. [75] untersuchten zudem experimentell das Stauchverhalten von Gitterstrukturen mit sehr kleinen Zellmaßen unter verschiedenen Last- und Randbedingungen. Sie stellen zudem fest, dass bedingt durch die durch den Fertigungsprozess eingebrachten Imperfektionen unter Schublasten große Unterschiede im Strukturverhalten resultieren, wohingegen dies bei Drucktests nicht beobachtet werden kann. Zudem können fertigungsbedingte Abhängigkeiten je nach Zelltyp unterschiedlich stark ausgeprägt sein. Weiterhin zeigen sie [41], dass durch die starke Abhängigkeit der mechanischen Eigenschaften von der relativen Dichte Materialüberlappungen in Strebenverbindungspunkten vor allem bei Strukturen mit hoher relativer Dichte berücksichtigt werden sollten (vgl. Kapitel 2.1.1). Labeas et al. [76] stellen für eine Reihe von Einheitszellen Methoden vor, um das linear elastische und plastische Verhalten, insbesondere unter Berücksichtigung von Knickproblemen, zu beschreiben, um so die wichtigsten strukturellen Eigenschaften von verschiedenen Zelltypen abzubilden.

2.1.1 Relative Dichte

Die relative Dichte $\bar{\rho}_{\text{rel}}$ beschreibt das Verhältnis zwischen der Dichte der Gitterstruktur ρ^* und der Dichte des verwendeten Werkstoffs ρ_s , wie in Gleichung 2.1 dargestellt. [66]

$$\bar{\rho}_{\text{rel}} = \frac{\rho^*}{\rho_s} \quad (2.1)$$

Übliche Wertebereiche liegen zwischen 0,03% und 30%, wobei für die meisten Zelltypen bereits für $\bar{\rho} > 0,2$ insbesondere vorhandene Diagonalstreben so gedrunen sind, dass sie nicht mehr als Balken tragen. Je nach Zelltyp liegt bei gleichem Streben-Aspektverhältnis, welches als das Verhältnis zwischen Zellhöhe h und Strebendicke d definiert wird, eine unterschiedliche relative Dichte vor. Ein Zusammenhang zwischen der relativen Dichte und dem Streben-Aspektverhältnis kann mit dem Gibson-Ashby-Modell [2, 77] hergestellt werden:

$$\frac{\rho^*}{\rho_s} = C \cdot \left(\frac{h}{d}\right)^t \quad (2.2)$$

Die Ermittlung der Parameter C und t geschieht üblicherweise empirisch, kann aber für einige wenige Zellstrukturen auch analytisch hergeleitet werden.

Mithilfe des etablierten, häufig verwendeten Gibson-Ashby-Modells können über die relative Dichte gewisse mechanische Eigenschaften angenähert werden, wie zum Beispiel die Steifigkeit und die Festigkeit. Hierzu wird im Gibson-Ashby-Modell ein Skalierungsgesetz, Formel 2.3 verwendet: [66]

$$\frac{K^*}{K_s} = C \cdot \left(\frac{\rho^*}{\rho_s}\right)^t \quad (2.3)$$

Dieses beschreibt ganz allgemein den Zusammenhang zwischen einer effektiven Eigenschaft und der relativen Dichte. Die Variablen K^* und K_s beschreiben dabei die effektive Eigenschaft der Gitterstruktur und die des Vollmaterials. Die Berechnung der relativen Dichte erfolgt auf verschiedene Arten. Eine gängige Abschätzung in Gleichung 2.4 gegeben. [77]

$$\frac{\rho^*}{\rho_s} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i f_i l_i}{V_{\text{ges}}} \quad (2.4)$$

A_i , f_i und l_i beschreiben dabei den Strebenquerschnitt, den Anteil der jeweiligen Strebe im repräsentativen Volumenelement (RVE) und die Strebenlänge, während V_{ges} das Gesamtvolumen des RVE beschreibt. Bei der Berechnung ist zu beachten, dass es in den Knoten Überlappungsbereiche der Streben gibt, die schnell zu einer Überschätzung der relativen Dichte führen. Da die relative Dichte über das Skalierungsgesetz mit den mechanischen Eigenschaften der Struktur zusammenhängt, kann dies schnell zu erheblichen Fehlern führen. Für Wabenstrukturen, die häufig als Kernmaterial für Sandwichstrukturen verwendet werden, geben Gibson und Ashby [66] an, dass bis zu einer relativen Dichte von 20% die Abschätzung über Gleichung 2.4 zulässig ist. Für die in dieser Arbeit näher betrachteten Zelltypen bcc und f2cc,z ergibt sich für die relative Dichte nach Gleichung 2.4:

$$\bar{\rho}_{\text{rel,bcc}} = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{8}{\sin(\omega)} \right] \tan^2(\omega) \quad (2.5)$$

$$\bar{\rho}_{\text{rel,f2ccz}} = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[1 + \frac{4}{\sin(\omega)} \right] \tan^2(\omega) \quad (2.6)$$

Die Beschreibung der effektiven Eigenschaften von Gitterstrukturen, wie der relativen Dichte, erfolgt in dieser Arbeit auf Basis der Parameter Strebenradius r , Zellhöhe h und dem Winkel der Diagonalstreben ω . Eine genauere Bestimmung der relativen Dichte bieten zudem gängige CAD-Werkzeuge oder eine Monte-Carlo-Integration. Diese erzeugt sowohl im betrachteten Gittertyp als auch im repräsentativen Volumenelement eine zufällige Anzahl an Punkten. Wie in Gleichung 2.7 dargestellt, wird daraus dann unter Berücksichtigung der Überlappung die relative Dichte bestimmt. [77]

$$\frac{\rho^*}{\rho_s} = \frac{n_{\text{Gitter}}}{n_{\text{RVE}}} \quad (2.7)$$

n_{Gitter} und n_{RVE} beschreiben dabei die Anzahl der Punkte im Gittervolumen und im Gesamtvolumen des RVE. Die Monte-Carlo-Integration ist ein iteratives Verfahren. Es wird eine zufällige Anzahl an Punkten erzeugt, welche sich willkürlich im RVE verteilen.

Der gängige Näherungsansatz aus Gleichung 2.4 liefert nur bedingt zufriedenstellende Lösungen. Für kleinere relative Dichten und wenige Überlappungspunkte ist die Abschätzung zwar recht genau, allerdings nimmt der Fehler mit größer werdenden relativen Dichten und größerer Streben- und Knotenanzahl überproportional zu. Für eine genauere Bestimmung der relativen Dichte kann eine analytische Näherung verwendet werden, die auf einer genaueren Beschrei-

bung der Strebenüberlappung mittels Steinmetzkörpern beruht. Nachfolgend dargestellt sind die mit der verbesserten analytischen Näherung hergeleiteten Ausdrücke für bcc und f2cc,z:

$$\bar{\rho}_{\text{bcc}} = 2 \tan(\omega)^2 \frac{r^2}{h^2} \left[\pi \left(\frac{4}{\sin(\omega)} \right) - \frac{16 r}{3 h} \left(\frac{8}{\sin(\pi - 2\omega)} \right) \right] \quad (2.8)$$

$$\bar{\rho}_{\text{f2cc,z}} = \tan(\omega)^2 \frac{r^2}{h^2} \left[\pi \left(1 + \frac{4}{\sin(\omega)} \right) - \frac{16 r}{3 h} \left(\frac{6}{\sin(\pi - 2\omega)} + \frac{1,65}{\sin(\frac{\pi}{2} - \omega)} \right) \right] \quad (2.9)$$

Der Vergleich der beiden analytischen Näherungslösungen ist in Abbildung 2.1 (a) für bcc und in Abbildung 2.1 (b) für f2cc,z dargestellt. Die Unterschiede werden insbesondere bei relativen Dichten über 5% deutlich. Die von Gibson und Ashby [66] aufgestellte Annahme für hexagonale Wabenstrukturen, dass die Berechnung der relativen Dichte nach Gleichung 2.4 bis 20% als valide angenommen werden kann, ist folglich nicht uneingeschränkt auf Gitterstrukturen anwendbar. Hier liegt die Abweichung von bcc zur verbesserten Näherungslösung aus Gleichung 2.8 bei circa 28,8% und für f2cc,z zu Gleichung 2.9 bei circa 31,26%.

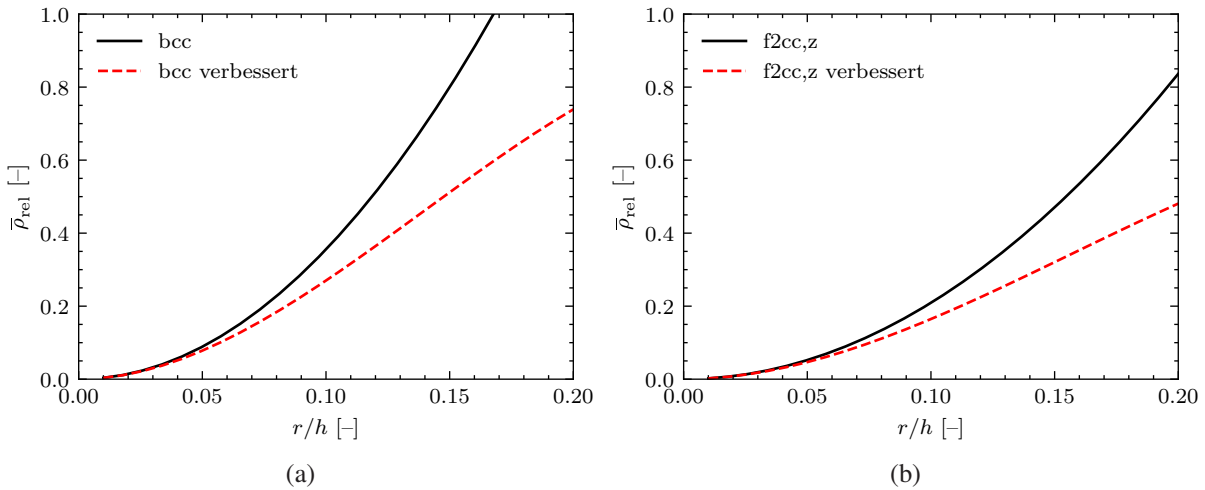


Abb. 2.1: Vergleich der beiden Näherungslösungen für (a) bcc (b) f2cc,z.

2.1.2 Dehnungsdominierte und biegedominierte Gitterstrukturen

Neben einer Differenzierung durch die Topologie ist die dominierende Belastung der Streben ein weiteres Unterscheidungsmerkmal von Gitterstrukturen. Grundsätzlich werden dabei zwei Typen unterschieden: Dehnungsdominierte und biegedominierte Gitterstrukturen. Erstere zeichnen sich durch ihre hohe Steifigkeit und Festigkeit aus, da ihre Verformung überwiegend auf axialer Dehnung der Streben zurückzuführen ist. Aufgrund dessen eignen sich diese Gittertypen für statische, strukturelle Konstruktionsaufgaben besonders. Zu den dehnungsdominierten Zelltypen gehören beispielsweise f2cc,z und fcc,z, sofern sie in Richtung der z-Streben belastet

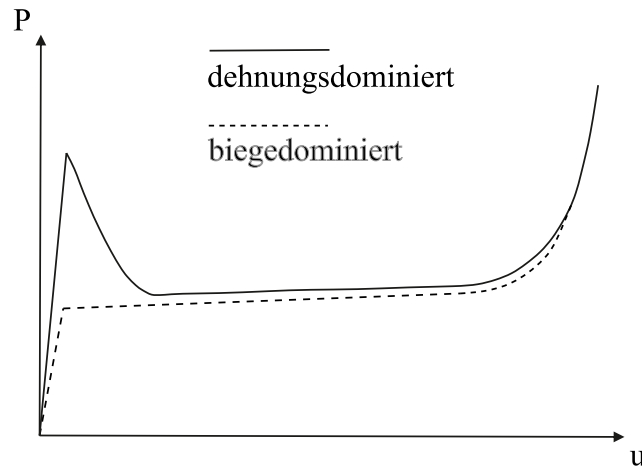


Abb. 2.2: Schematischer Vergleich der Kraft-Weg Kurven von biege- und dehnungsdominierten Gitterstrukturen bei gleicher relativer Dichte unter einer Druckkraft P (in Anlehnung an [21, 78]).

werden. Biegedominierte Gitterstrukturen, wie bcc und fcc, sind hingegen äußerst nachgiebig, was zu guten Eigenschaften bezüglich Energieabsorption und Dämpfung führt und auf die fehlenden z-Streben zurückzuführen ist. [21] Abbildung 2.2 zeigt einen schematischen Vergleich zwischen einer dehnungsdominierten und einer biegedominierten Gitterstruktur bei gleicher relativer Dichte. Sowohl das effektive Elastizitätsmodul als auch die effektive Fließgrenze sind bei dehnungsdominierten Gittertypen üblicherweise deutlich höher. [21]. Beim Erreichen der effektiven Fließgrenze ist in der Regel ein plastisches Knicken der z-Streben (bei ausreichender Duktilität des Werkstoffs) zu beobachten, wodurch ein Kraftabfall entsteht. Anschließend werden die Lasten auf deutlich geringerem Kraftniveau von der Struktur über Biegung abgetragen. Auch das Gibson-Ashby-Modell berücksichtigt diese Unterscheidung in Bezug auf den Zusammenhang zwischen der relativen Dichte und dem Elastizitätsmodul E^* oder der Fließgrenze σ^* in Form des vorliegenden Exponenten. Gleichung 2.10 und Gleichung 2.11 repräsentieren ein biegedominiertes Verhalten, während Gleichung 2.12 und Gleichung 2.13 für dehnungsdominiertes Verhalten herangezogen werden. [66]

$$\frac{E^*}{E_s} = C \cdot \left(\frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^2 \quad (2.10)$$

$$\frac{\sigma^*}{\sigma_{y,s}} = C \cdot \left(\frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.11)$$

$$\frac{E^*}{E_s} = C \cdot \left(\frac{\rho^*}{\rho_s} \right) \quad (2.12)$$

$$\frac{\sigma^*}{\sigma_{y,s}} = C \cdot \left(\frac{\rho^*}{\rho_s} \right) \quad (2.13)$$

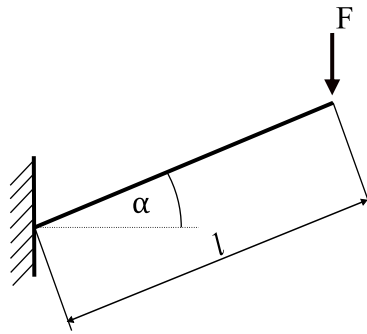


Abb. 2.3: Ersatzmodell zur Verdeutlichung des biege- oder dehnungsdominierten Verhaltens von Gitterstrukturen.

Wie in Gleichung 2.10 zu sehen, ist der Elastizitätsmodul von biegedominierten Gitterstrukturen quadratisch von der relativen Dichte abhängig. Auch in Bezug auf die Festigkeit ist dies bei der Betrachtung der Abhängigkeit der Fließgrenze von der relativen Dichte mit Exponenten $t = 1,5$ der Fall. Der lineare Zusammenhang zwischen der relativen Dichte und dem Elastizitätsmodul und der Fließgrenze für dehnungsdominierte Gitterstrukturen deutet auf eine hohe Steifigkeit und Festigkeit hin. Da für die relative Dichte grundsätzlich $\bar{\rho} \leq 1$ gilt, wird aus diesem Modell ersichtlich, dass biegedominierte Strukturen hier unterlegen sind. Um zu bestimmen, welche Belastungsart in den Streben kubischer Gitterzellen vorliegt, kann die Maxwell-Zahl M verwendet werden. Die Berechnung dieser erfolgt nach Gleichung 2.14. [22]

$$M = s - 3 \cdot p + 6 \quad (2.14)$$

Die Maxwell-Zahl hängt lediglich von der Anzahl der Streben s und Knoten p in der betrachteten Gitterstruktur ab. Dabei gilt, dass eine Maxwell-Zahl kleiner null auf biegedominiertes Verhalten schließen lässt und eine Maxwell-Zahl gleich oder größer null auf dehnungsdominiertes Verhalten hindeutet. [22]

Dehnungsdominierte Zelltypen verfügen in der Regel über Streben parallel zur Belastungsrichtung, wie bei der $f2cc,z$ Zelle. Die Unterschiede in der Belastung dieser Streben im Vergleich zu den restlichen Streben wird bei der Betrachtung des Normalkraft- und Biegeanteils der Normalspannung deutlich. Abbildung 2.3 zeigt einen unter dem Winkel α angestellten Kragbalken mit Radius r und Länge l . $\alpha = 0^\circ$ entspricht dabei einem waagerechten Balken und $\alpha = 90^\circ$ einem senkrechten Balken. Das Verhältnis der Normalspannung aus Biegung und Normalkraft ψ in Abhängigkeit von α , r und l , kann durch Gleichung 2.15 bestimmt werden.

$$\psi = \frac{4l}{r \tan(\alpha)} \quad (2.15)$$

Abbildung 2.4 zeigt ψ als Funktion des Kehrwerts des Strebenaspektverhältnisses l/r für verschiedene Winkel α . Dabei wird deutlich, dass die Normalspannung aus Biegung auch für große Winkel im gesamten Betrachtungsbereich deutlich über dem Anteil aus der axialen Belastung liegt. Folglich kann die Annahme getroffen werden, dass die Normalspannung aus dem Normal-

kraftanteil bei $\alpha = 45^\circ$ vernachlässigt werden kann. Somit wird die Annahme getroffen, dass bei Streben, die nicht parallel zur Belastungsrichtung ausgerichtet sind, die Biegenormalspannung überwiegt. Hieraus erschließt sich auch zuvor erwähntes, dass die f2cc,z Zelle nur bei Belastung in Richtung der z-Streben ein dehnungsdominiertes Verhalten aufweist.

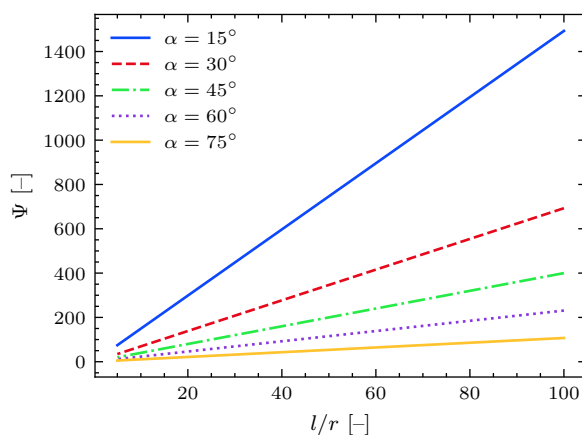


Abb. 2.4: Verhältnis der Biegenormalspannung zu Normalspannung aus der axialen Lastkomponente bei verschiedenen α (mit Referenz auf Abbildung 2.3).

2.1.3 Einfluss der Schubweichheit

Schubweichheit wird bei der Betrachtung von Gitterstrukturen in der Regel vernachlässigt. Dies ist bei Einhaltung gewisser Grenzen zulässig, wie die nachfolgenden Ausführungen zeigen sollen. Es wird ein beidseitig fest eingespannter Balken mit einer Einheitsverschiebung des rechten Lagers betrachtet (Abbildung 2.5). Aus der Balkensteifigkeitsmatrix (Gleichung 2.21), auf die näher im nachfolgenden Kapitel eingegangen wird, kann das Verhältnis zwischen dem Biege- und Schubanteil der Verschiebung hergeleitet werden.

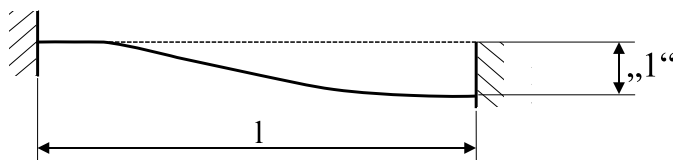


Abb. 2.5: Balken zur Berechnung des Einflusses der Schubweichheit.

Für den in Abbildung 2.5 dargestellten Fall ergibt sich für die Reaktionskraft am verschobenen Lager $P = 12EJ_{22}u_3 / (l^3(12Q_s^3 + 1))$, und für die Verschiebung u :

$$u = \frac{F_3 l}{\kappa_s GA} + \frac{Pl^3}{12EJ_{22}} \quad (2.16)$$

$$\frac{u_s}{u_b} = \frac{6(1+\nu)r^2}{\kappa_s l^2} \quad (2.17)$$

Hierbei beschreibt J_{22} das Flächenträgheitsmoment um die 2-Achse, u_3 und F_3 Verschiebung und Kraft in 3-Richtung, Q_s den zusammengefassten Einfluss des Schubs, κ_s den Schubkorrekturfaktor, GA die Schubsteifigkeit und ν die Querkontraktionszahl. Abbildung 2.6 zeigt das Verhältnis des Verschiebungsanteils aus Biegung u_b und aus Schubverformung u_s über l/r . Es ist deutlich zu sehen, dass die Biegeverformung gegenüber der Schubverformung größer ist. Für kleine relative Dichten und dementsprechend kleinen r/l überwiegt der Einfluss der Biegeverformung deutlich. Bei einem Verhältnis von Strebenlänge zu Strebenradius von circa 80 liegt das Verhältnis bei circa 600. Auch bei großen relativen Dichten überwiegen die Biegeverformungen. Bei einem Verhältnis von 10 ist der Anteil aus der Verformung durch Biegung immer noch ungefähr zehnmal größer als durch die Schubverformung. Daher ist die Annahme von Schubstarrheit für Gitterstrukturen in technisch relevanten Parameterbereichen in der Regel gerechtfertigt.

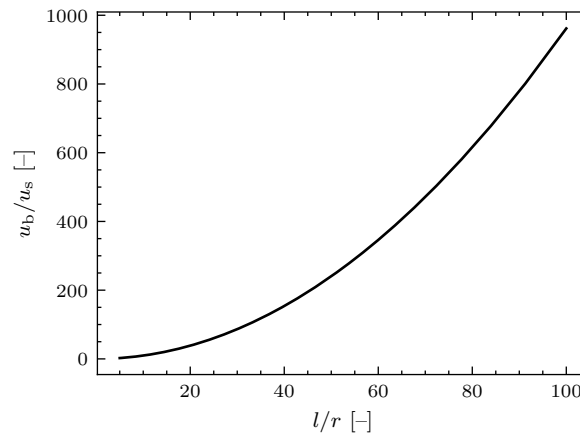


Abb. 2.6: Verhältnis der Verschiebungsanteile aus Biegung u_b und Schubverformung u_s in Abhängigkeit des Verhältnisses Strebenlänge l zu Strebenradius r .

2.2 Berechnung von stabförmigen Strukturen

Zur Berechnung der Steifigkeiten und Stabilitätslasten von Gitterstrukturen werden in dieser Arbeit verschiedene Berechnungsmethoden verwendet. Es soll zuerst auf die Bestimmung von Steifigkeiten von Balkenstrukturen eingegangen und anschließend die Bestimmung von Stabilitätslasten näher erläutert werden. Zudem wird im Rahmen dieser Arbeit das Ersatzstabverfahren verwendet, um globale Stabilitätslasten von Gitterstrukturen annähern zu können. Weiterhin erfolgt eine kurze Vorstellung des Verfahrens nach Rayleigh-Ritz.

2.2.1 Steifigkeiten von Balken [79, 80, 81]

Die Steifigkeit eines Systems beschreibt den Zusammenhang zwischen Kräften und Verformungen. An einem mechanischen System kann zu jedem Verformungszustand \mathbf{u} ein entsprechender Lastvektor \mathbf{F} zugewiesen werden. Dies geschieht mithilfe der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} des Systems. Sofern keine Nichtlinearitäten vorliegen, kann dieser Zusammenhang als linear betrachtet werden: $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{u}$. Auf diese Weise können sowohl kinematisch unbestimmte Systeme, also Systeme mit unbekanntem Verschiebungen, als auch kinematisch bestimmte Systeme untersucht werden. Im Folgenden soll näher auf die Herleitung von Steifigkeiten von Stäben und Balken eingegangen werden, um eine theoretische Grundlage für die Bestimmung effektiver Steifigkeiten von Gitterstrukturen zu legen. Hierzu werden in einem ersten Schritt die Einträge der Steifigkeitsmatrix hergeleitet. Dies geschieht z. B. mithilfe des Verfahrens der virtuellen Verschiebungen. Der betrachtete Balken wird dafür in ein kinematisch bestimmtes 0-System und, mittels Aufbringen einer virtuellen Einheitsverschiebung, in ein weggebendes System aufgeteilt. Abbildung 2.7 zeigt die entsprechenden weggebenden Systeme eines Balkens. Nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit muss die äußere geleistete virtuelle Arbeit δA der virtuellen Formänderungsarbeit δW entsprechen. Die geleistete virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte ergibt sich durch Überlagerung des 0-Systems und 1-Systems gemäß dem Kraftgrößenverfahren. Für eine in Richtung der Balkenachse wirkende Normalkraft F_1 ergibt sich für die virtuellen Arbeiten:

$$\begin{aligned}\partial A &= 1 \cdot F_1 \\ \partial W &= \int_0^l u_1' N_1 dx_1\end{aligned}\quad (2.18)$$

Hierbei beschreibt u_1 die aus der Normalkraft resultierende Verschiebung und N_1 die aus der Kraft resultierende Normalkraft im Balken. Da der Normalkraftverlauf unter der wirkenden Kraft konstant ist, kann durch Ableiten von Gleichung 2.18 über das Hooke'sche Gesetz und der Bedingung $\delta A - \delta W = 0$ ein Ausdruck für die Dehnsteifigkeit des Balkens in Abhängigkeit der Querschnittsfläche A , des E-Moduls E und der Balkenlänge l hergeleitet werden:

$$k_{11} = \frac{F_1}{u_1} = \frac{EA}{l}\quad (2.19)$$

Die Ermittlung der Steifigkeitszahlen für Biegebelastungen erfolgt analog unter Zuhilfenahme der den Randbedingungen entsprechenden Biegelinien. Für die Bestimmung der Einträge des 2D Timoshenko-Balkens, ergibt sich nachfolgender allgemeiner Zusammenhang:

$$k_{ij} = \int_1 u_i' u_j' EA dx_1 + \int_1 w_i'' w_j'' EJ_{22} dx_1 + \int_1 w_i' w_j' GA_3 dx_1\quad (2.20)$$

Es ergibt sich in Gleichung 2.21 schließlich die Balkensteifigkeitsmatrix des 2D Timoshenko-Balkens, wobei u_1^i und u_3^i die Verschiebungen in 1- und 3-Richtung und φ^i die Verdrehung um die 2-Achse am jeweiligen Knoten i sind. F_1^i , F_3^i und M_2^i sind die Kräfte in 1- und 3-Richtung und das Moment um die 2-Achse am Knoten i .

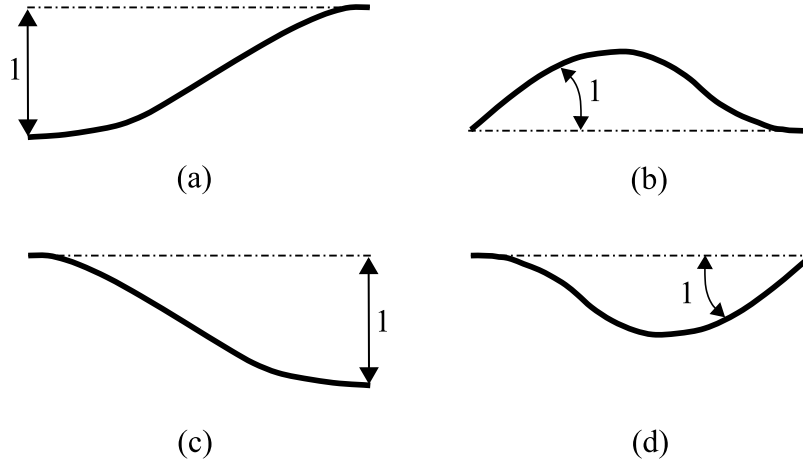


Abb. 2.7: Einheitsverformungen zur Ermittlung der Steifigkeitszahlen eines Balkens. (a) Einheitsverschiebung am linken Stabende; (b) Einheitsverdrehung am linken Stabende; (c) Einheitsverschiebung um rechten Stabende; (d) Einheitsverdrehung am rechten Stabende.

$$\begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_3^1 \\ M_2^1 \\ F_1^2 \\ F_3^2 \\ M_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_{22}}{l^3(12Q_{s,2}+1)} & \frac{6EJ_{22}}{l^2(12Q_{s,2}+1)} & 0 & -\frac{12EJ_{22}}{l^3(12Q_{s,2}+1)} & \frac{6EJ_{22}}{l^2(12Q_{s,2}+1)} \\ 0 & \frac{6EJ_{22}}{l^2(12Q_{s,2}+1)} & \frac{4EJ_{22}(3Q_{s,2}+1)}{l(12Q_{s,2}+1)} & 0 & -\frac{6EJ_{22}}{l^2(12Q_{s,2}+1)} & -\frac{2EJ_{22}(6Q_{s,2}-1)}{l(12Q_{s,2}+1)} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ_{22}}{l^3(12Q_{s,2}+1)} & -\frac{6EJ_{22}}{l^2(12Q_{s,2}+1)} & 0 & \frac{12EJ_{22}}{l^3(12Q_{s,2}+1)} & -\frac{6EJ_{22}}{l^2(12Q_{s,2}+1)} \\ 0 & \frac{6EJ_{22}}{l^2(12Q_{s,2}+1)} & -\frac{2EJ_{22}(6Q_{s,2}-1)}{l(12Q_{s,2}+1)} & 0 & -\frac{6EJ_{22}}{l^2(12Q_{s,2}+1)} & \frac{4EJ_{22}(3Q_{s,2}+1)}{l(12Q_{s,2}+1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_3^1 \\ \varphi_2^1 \\ u_1^2 \\ u_3^2 \\ \varphi_2^2 \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

Der Einfluss der Schubverformung ist im Faktor $Q_{s,i} = (EJ_{ii}) / (\kappa_i l^2 A_i G)$ enthalten, wobei κ_i hier der querschnittsabhängige Schubkorrekturfaktor ist und G den Schubmodul bezeichnet. Zur Erweiterung der Steifigkeitsmatrix aus Gleichung 2.21 um die dritte Dimension, muss das System um die Biegung um die 3-Achse $k_{ij} = \int_1 w_i'' w_j'' EJ_{33} dx_1$, dem Torsionsanteil $k_{ij} = \int_1 \vartheta_i' \vartheta_j' EJ_{11} dx_1$, mit der Verdrehung ϑ und dem Torsionsträgheitsmoment J_{11} sowie dem weiteren Querkraftterm $k_{ij} = \int_1 w_i' w_j' GA_2 dx_1$ erweitert werden. Die resultierende Gesamtsteifigkeitsmatrix ist in Gleichung 2.22 dargestellt. Im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich Kreisquerschnitte betrachtet. Dementsprechend gilt: $J_{22} = J_{33} = J$ und $Q_{s,22} = Q_{s,33} = Q_s$. Weiterhin werden aus Gründen der Übersichtlichkeit folgende Abkürzungen eingeführt: $a = EA/l$, $b = GJ_{11}/l$ und $c = EJ/(l^3(12Q_s + 1))$.

2.2.2 Knicken von schlanken Strukturen [58, 59]

Um das Knickverhalten von Gitterstrukturen beschreiben zu können, werden an dieser Stelle die theoretischen Grundlagen erläutert. Betrachtet man einen idealen, zentrisch mit einer Drucklast P belasteten Balken unter beliebigen Randbedingungen und steigert die Last, dann herrscht bis zu einer Grenzlast P_{kr} ein stabiles Gleichgewicht im System. Beim Überschreiten dieser Grenzlast wird das Gleichgewicht instabil, was man bei Stäben Knicken nennt. Eine Störung, etwa eine angreifende Querkraft oder eine Imperfektion im System, führt zu einer Auslenkung, die nicht wieder verschwindet, wenn die Störung entfernt wird. Hierzu werden üblicherweise vier charakteristische Randbedingungen betrachtet, die als Eulerfälle bezeichnet werden (siehe Abbildung 2.8).

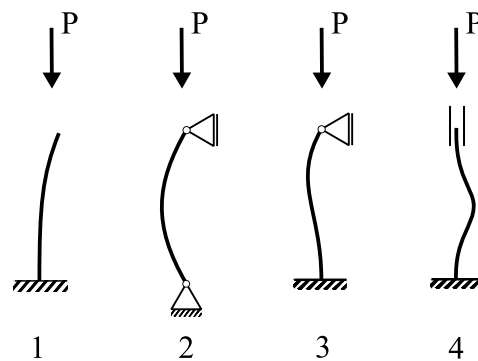


Abb. 2.8: Eulerfälle nach [80].

Um die kritische Knicklast eines Stabs zu ermitteln, muss das Gleichgewicht am verformten System aufgestellt werden. Hierfür wird das Gleichgewicht an einer beliebigen Stelle eines sich unter Drucklast P befindenden Balkens betrachtet (siehe Abbildung 2.9).

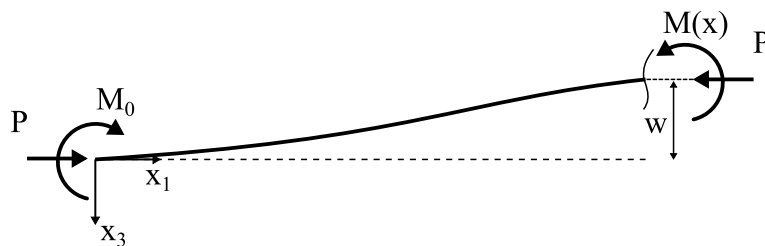


Abb. 2.9: Momentengleichgewicht am aufgeschnittenen System nach [59].

Das Momentengleichgewicht am System $-M_0 + Pw(x_1) + M(x_1) = 0$, mit dem Einspannmoment M_0 , der Auslenkung w und dem Schnittmoment M , kann mithilfe der zweiten Ableitung der Biegelinie $M = EJw''$, mit dem E-Modul E und dem Flächenträgheitsmoment J sowie der Definition $\lambda = \sqrt{P/(EJ)}$, in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung überführt werden:

$$w'' + \lambda^2 w = \lambda^2 \frac{M_0}{P} \quad (2.23)$$

Eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung 2.23 lässt sich wie folgt finden:

$$\begin{aligned} w &= A \sin(\lambda x_1) + B \cos(\lambda x_1) + \rho_p \\ w' &= A \lambda \cos(\lambda x) - B \lambda \sin(\lambda x_1) \\ w'' &= -A \lambda^2 \sin(\lambda x) - B \lambda^2 \cos(\lambda x_1) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Hierbei sind A und B die Integrationskonstanten. ρ_p entspricht der partikulären Lösung und kann hier als weitere Konstante betrachtet werden. Es verbleiben also die Unbekannten A , B , und λ , die sich durch Einsetzen der entsprechenden Randbedingungen für die Eulerfälle (siehe Abbildung 2.8) bestimmen lassen. Auf diesem Wege lassen sich die Lösungen für die Eulerfälle 1, 2 und 4 ermitteln:

$$\begin{aligned} P_{\text{kr},E_1} &= \frac{\pi^2 E J}{4l^2} \\ P_{\text{kr},E_2} &= \frac{\pi^2 E J}{l^2} \\ P_{\text{kr},E_4} &= \frac{4\pi^2 E J}{l^2} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Der Eulerfall 3 stellt einen Sonderfall dar, da er nicht symmetrisch ist. Dementsprechend wird zur Lösung ein Ansatz höherer Ordnung benötigt, bei dem auch die Querkraft berücksichtigt wird. Betrachtet wird erneut ein infinitesimales Balkenelement eines sich unter Drucklast P befindenden Balkens. Es wird das Kräftegleichgewicht gebildet, wobei P und V die Kräfte in die Koordinatenrichtungen x_1 und x_3 bezeichnen:

$$\begin{aligned} (V + dV) - V &= 0 \\ (M + dM) - M + V dx_1 + P dw &= 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Die Normalkraft N und die Querkraft Q ergeben sich aus den Kräften zu:

$$\begin{aligned} Q &= V \cos \Theta + P \sin \Theta \simeq V + P w' \\ N &= V \sin \Theta - P \cos \Theta \simeq V w' - P \end{aligned} \quad (2.27)$$

Schließlich kann noch verwendet werden, dass $M' = -Q$ und $M = EJw''$ ist. Setzt man dann Gleichung 2.27 in Gleichung 2.26 ein, ergibt sich eine Differentialgleichung vierter Ordnung, mit der die Knicklast für Eulerfall 3 bestimmt werden kann:

$$w'''' + \lambda^2 w'' = 0 \quad (2.28)$$

Die Lösungen der DGL und die ersten beiden Ableitungen können wie folgt angegeben werden:

$$\begin{aligned} w &= A \sin(\lambda x_1) + B \cos(\lambda x_1) + Cx_1 + D + \rho_p \\ w' &= A\lambda \cos(\lambda x_1) - B\lambda \sin(\lambda x_1) + C \\ w'' &= -A\lambda^2 \sin(\lambda x_1) - B\lambda^2 \cos(\lambda x_1) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Die partikuläre Lösung ρ_p entspricht hier einer äußeren Linienlast. Da diese hier zu null angenommen wurde, gilt $\rho_p = 0$. Die Lösung des Gleichungssystems führt letztlich zur Knicklast für Eulerfall 3:

$$P_{\text{kr,E3}} = \frac{\pi^2 EJ}{(0.699l)^2} \quad (2.30)$$

Mit Gleichungen 2.25 und Gleichung 2.30 kann die Knicklast schlanker Stäbe beschrieben werden. Bei gedrungenen Stäben spielt bei der Bestimmung der Knicklast zudem die Schubverformung eine Rolle. Abbildung 2.10 zeigt einen freigeschnittenen Balken. Für die Querkraft gilt: $Q = Pw'$. Die durch die Querkraft resultierende Verdrehung ergibt sich aus $w' = Pw'\kappa_s / (AG)$, wobei A die Querschnittsfläche, G den Schubmodul und κ_s den querschnittsabhängigen Schubkorrekturfaktor bezeichnet. Die Krümmung ergibt sich zu $w'' = w''P\kappa_s / (AG)$. Löst man Gleichung 2.23 nun nach der Krümmung auf und addiert den hergeleiteten schubabhängigen Term w'' ergibt sich:

$$w'' = \frac{\lambda^2}{1 - P\kappa_s / AG} \left(\frac{M_0}{P} - w \right) \quad (2.31)$$

Diese Gleichung unterscheidet sich nur um den Faktor $1 - P\kappa_s / (AG)$ von Gleichung 2.23. Löst man nun Gleichung 2.31 und ermittelt die Knicklast P_{kr} ergibt sich diese in Gleichung 2.32 als Funktion der Euler-Knicklast P_e .

$$P_{\text{kr}} = \frac{P_e}{1 + P_e \frac{\kappa_s}{AG}} \quad (2.32)$$

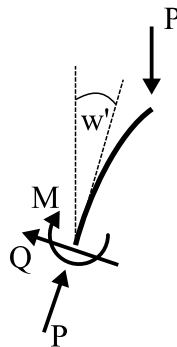


Abb. 2.10: Schubkraft am verformten Balken nach [59].

2.2.3 Ersatzstabverfahren [58, 59, 80]

Mithilfe des Ersatzstabverfahrens kann die Knicklast von Tragwerken aus eingebundenen Stäben ermittelt werden. Als Beispiel sei hier der in Abbildung 2.11 (a) dargestellte Rahmen betrachtet. In Abbildung 2.11 (b) ist die zugehörige Knickfigur abgebildet. Bei vertikaler Belastung knicken nur die vertikalen Stäbe, während der horizontale Stab auf Biegung belastet wird. Mit dem Ersatzstabverfahren lässt sich nun die Knicklast des Systems bestimmen, indem die knickenden Stäbe freigeschnitten und der horizontale Stab durch eine Drehfeder mit Federsteifigkeit c ersetzt wird (siehe Abbildung 2.11 (c)). Zur Berechnung der Knicklast kann Gleichung 2.24 verwendet werden. Für die unteren Enden der vertikalen Stäbe gelten dieselben Randbedingungen, wie im Eulerfall 2. Folglich erfolgt die Berechnung der Verschiebung über $w = A \sin(\lambda x_1)$. Für das obere Ende des Stabes ergibt sich die Randbedingung über das Momentengleichgewicht und verknüpft die dort auftretende Verdrehung $\Theta = w(x_1 = l)'$ über die Federgleichung $M = c \Theta$ mit dem dort wirkenden Moment:

$$w'(x_1 = l)c + EJw''(x_1 = l) = 0 \quad (2.33)$$

Setzt man die entsprechenden Ableitungen ein, folgt:

$$\frac{c}{EJ} = \lambda \tan(\lambda l) \quad (2.34)$$

Die Federsteifigkeit c ergibt sich aus der Verformung des horizontalen Balkens. Betrachtet man einen Balken der Länge l und der Biegesteifigkeit EJ , an dem an jedem Ende ein Moment M wirkt, ergibt sich dieses zu $M = 6EJ\Theta/b$. Die entsprechende Federsteifigkeit beträgt dann $c = 6EJ/b$. Bei Annahme gleicher Balkenlängen und gleicher Biegesteifigkeiten der Balken vereinfacht sich Gleichung 2.34 zu $\lambda \tan(\lambda l) = 6$. Dieser Ausdruck lässt sich numerisch,

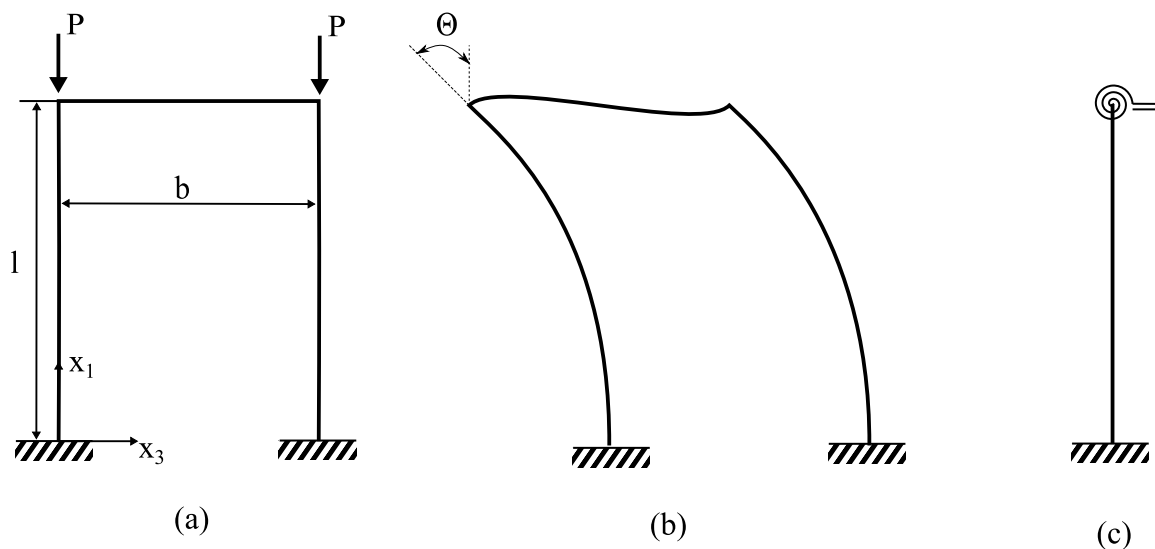


Abb. 2.11: Verformter Rahmen und Ersatzstab nach [59].

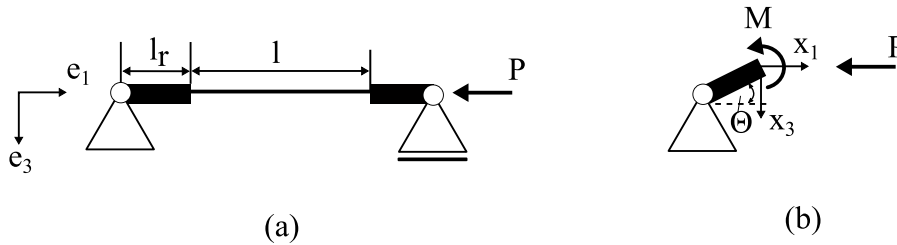


Abb. 2.12: Stab mit steifen Randelementen.

z. B. mittels Newton-Verfahren, lösen. Die Knicklast folgt zu $P_{\text{kr}} = 1,82EJ/l^2$. Neben der Verwendung von Federn sind auch biegesteife Elemente im Ersatzstabverfahren anwendbar. Exemplarisch sei ein gemäß Eulerfall 2 gelagerter Stab der Länge l mit steifen Randelementen betrachtet (Abbildung 2.12 (a)). Es wird ein Schnitt durch das steife Randelement durchgeführt und das positive Schnittufer betrachtet. Aufgrund der Systemsymmetrie kann ein Ansatz zweiter Ordnung verwendet werden (Gleichung 2.23). Die erste Randbedingung lautet $w(x_1 = 0) = w(x_1 = l) = 0$. Daraus folgt $B = -M/P$. Zur Ermittlung der weiteren Randbedingungen wird das Momentengleichgewicht am aufgeschnittenen System aufgestellt (s. Abbildung 2.12 (b)):

$$Pl_r\Theta + M = Pl_r w(x_1 = 0)' + EJw(x_1 = 0)'' = 0 \quad (2.35)$$

Setzt man die entsprechenden Ableitungen ein, folgt $A = -(M)/(P\lambda l_r)$. Da es sich um ein symmetrisches System handelt, muss gelten $EJw(x_1 = l)'' = M$. Setzt man nun A und B ein, ersetzt P mit $EJ\lambda^2$, führt die Abkürzung $U = \lambda l$ ein und löst diese Gleichung numerisch nach U , folgt schlussendlich die Knicklast des Ersatzstabs:

$$P_{\text{kr}} = \frac{EJU^2}{l^2} \quad (2.36)$$

2.2.4 Geometrische Steifigkeitsmatrix [58]

Die in Gleichung 2.22 hergeleitete Steifigkeitsmatrix berücksichtigt ausschließlich lineare Zusammenhänge von Last und Verschiebung und berücksichtigt dabei nicht den Einfluss der Axiallast auf die Verdrehung und die transversale Verschiebung. Dies ist zur Herstellung ausreichender Genauigkeiten bei der Ermittlung der Stabilitätslast von Gitterstrukturen aber in gewissen Fällen notwendig. Abbildung 2.13 zeigt die am Balken angreifenden Kräfte und Ver-

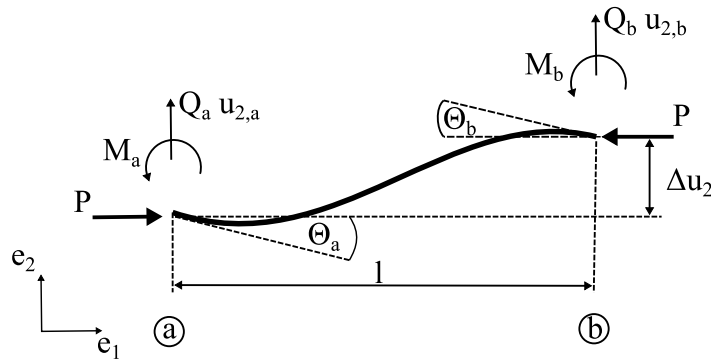


Abb. 2.13: Lasten und Verformungen am Balkenelement mit Druckkraft.

formungen, auf die in diesem Abschnitt eingegangen wird. Zur Ermittlung der kritischen Last wird ein Ansatz vierter Ordnung verwendet (siehe Gleichung 2.28). Es wird eine Verdrehung an der Stelle $x_1 = 0$ von $w'(x_1 = 0) = \Theta_a$ betrachtet. Die übrigen Kinematiken werden blockiert. Gleichung 2.37 zeigt die sich ergebenden Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
 B + D &= 0 \\
 \lambda A + C &= \Theta_a \\
 A \sin(\lambda l) + B + Cl + D &= 0 \\
 A \lambda \cos(\lambda l) - B \lambda \sin(\lambda l) + C &= 0
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Die an den beiden Enden angreifenden Momente M_a und M_b ergeben sich aus der zweiten Ableitung der Biegelinie zu: $M_a = EJw''(x_1 = 0) = -EJU^2/l^2 B$ und $M_b = -EJw''(x_1 = l) = EJU^2/l^2 (A \sin U + B \cos U)$. Es gilt $U = \lambda l$. Die Parameter A bis D können eliminiert werden, sodass nach einigen Umformungen $M_a = k\Theta_a = EJ/lv_1\Theta_a$ und $M_b = v_2 M_a$ folgt. Die von der Axiallast abhängigen Faktoren v_1 und v_2 sind in Gleichung 2.38 gegeben:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{U(\sin U - U \cos U)}{2 - 2 \cos U - U \sin U} \\
 v_2 &= \frac{U - \sin U}{\sin U - U \cos U}
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Bei einer zusätzlichen transversalen Verschiebung eines Endknotens ergibt sich an beiden Knotenenden eine Verdrehung von $\Delta u_2/l$, wobei Δu_2 die Differenz der Knotenverschiebungen ist: $\Delta u_2 = u_{2,b} - u_{2,a}$. Für die Momente ergibt sich Gleichung 2.39:

$$\begin{aligned}
 M_a &= \frac{EJ}{l} \left(v_1 \Theta_a + v_1 v_2 \Theta_b + \frac{v_1(1 + v_2)}{l} \Delta u_2 \right) \\
 M_b &= \frac{EJ}{l} \left(v_1 v_2 \Theta_a + v_1 \Theta_b + \frac{v_1(1 + v_2)}{l} \Delta u_2 \right)
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Zudem ergibt sich durch die Verschiebung der Querkraft $\Delta Q = Q_b - Q_a$. Diese kann mithilfe des Momentengleichgewichts bestimmt werden: $M_a + M_b/\Delta Q - \Delta u_2 F = 0$. Daraus folgt für die Querkraft schließlich Gleichung 2.40:

$$\Delta Q = \frac{M_a + M_b}{l} - F \frac{\Delta u_2}{l} \quad (2.40)$$

Gleichung 2.39 und 2.40 können zu der in Gleichung 2.41 abgebildeten, geometrischen Steifigkeitsmatrix zusammengefasst werden. Es gilt $\bar{v} = v_1(1 - v_2)$ und $v^* = 2\bar{v} - U^2$. Lläuft U gegen 0 ergibt sich wiederum die lineare Steifigkeitsmatrix.

$$\begin{pmatrix} Q_a \\ M_a \\ Q_b \\ M_b \end{pmatrix} = \frac{EJ}{l} \begin{pmatrix} v_1/l^2 & -\bar{v}/l & -\bar{v}/l & -v^*/l^2 \\ -\bar{v}/l & s & \bar{v}/l & v_1 v_2 \\ -v_1/l^2 & \bar{v}/l & \bar{v}/l & v^*/l^2 \\ -\bar{v}/l & v_1 v_2 & \bar{v}/l & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2,a} \\ \Theta_a \\ u_{2,b} \\ \Theta_b \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Geht man von kleinen, im Balken wirkenden, axialen Schnittkräften relativ zur Knicklast des Balkens aus, lassen sich die Faktoren v_1 , v_2 , \bar{v} und v^* mithilfe von Taylorreihen um den Punkt $Q = 0$ und $U = 0$ linearisieren. Daraus folgt nach Subtraktion der linearen Steifigkeitsmatrix der nicht-lineare Anteil der Verformung, und die geometrische Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_g (siehe Gleichung 2.42) in Abhängigkeit der N Normalkraft im Balken. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix eines Balkens kann nun als Summe der elastischen und der geometrischen Steifigkeitsmatrix geschrieben werden. In dieser Arbeit ist, sofern nicht anders beschrieben, mit *Steifigkeitsmatrix* die elastische Steifigkeitsmatrix gemeint.

$$\mathbf{K}_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6N}{5l} & -\frac{N}{10} & 0 & -\frac{6N}{5l} & -\frac{N}{10} \\ 0 & -\frac{N}{10} & \frac{2Nl}{15} & 0 & \frac{N}{10} & -\frac{Nl}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6N}{5l} & \frac{N}{10} & 0 & \frac{6N}{5l} & \frac{N}{10} \\ 0 & -\frac{N}{10} & -\frac{Nl}{30} & 0 & \frac{N}{10} & \frac{2Nl}{15} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Die nichtlineare, geometrische Steifigkeitsmatrix ermöglicht zudem, die Knicklast eines Systems zu bestimmen. Diese entspricht der kleinsten nicht-trivialen Lösung von $\det(\mathbf{K}) = 0$ und dem kleinsten Eigenwert. Um die genaue Knicklast zu ermitteln, kann allerdings nicht die durch die Verwendung von Taylorreihen vereinfachte Matrix (siehe Gleichung 2.42) verwendet werden. Es muss die exakte Matrix (siehe Gleichung 2.41) verwendet werden. Aufgrund der trigonometrischen Terme ist der Eigenwert in der Regel so nicht direkt analytisch ermittelbar. Eine weitere Näherung ist in Gleichung 2.43 gegeben. Diese ergibt sich aus der Reihenentwicklung der Transponierten der nichtlinearen Steifigkeitsmatrix und beschreibt direkt den Einfluss der Axiallast auf eine rein aus einer transversalen Last resultierenden Verformung. Die Gesamt-

verformung u_2 ergibt sich dann aus dem Produkt der linearen Verformung $u_{2,\text{lin}}$ und einem von der Knicklast abhängigen Faktor. P_{kr} ist hier die Knicklast des Eulerfall 2 und P die auf den Balken wirkende axiale Druckkraft.

$$u_2 = \frac{u_{2,\text{lin}}}{1 - P/P_{\text{kr}}} \quad (2.43)$$

2.2.5 Verfahren nach Rayleigh-Ritz [82]

Das Verfahren nach Rayleigh-Ritz ist ein Näherungsverfahren, das auf dem Stationärwert des Potentials basiert. Damit lassen sich analytisch nicht geschlossen lösbar Probleme approximieren. Mit diesem Verfahren lässt sich zum einen die Biegelinie, aber auch die Knicklast annähern. Das Potenzial eines auf Biegung verformten Balkens lässt sich mit der Gleichung 2.44 bestimmen.

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^l EJw''(x_1)^2 dx_1 \quad (2.44)$$

Die Biegelinie $w(x_1)$ wird durch eine Funktion angenähert, die zwar die geforderten Randbedingungen erfüllen muss, sonst aber beliebig ist. Üblicherweise werden hierfür Polynome verwendet. Die Ordnung des Ansatzes ist durch die Anzahl der unbekannt Koeffizienten bestimmt. Der Polynomgrad und die Anzahl der Koeffizienten wird durch die Ordnung des Ansatzes und die Anzahl der Randbedingungen bestimmt. Neben dem im Balken wirkenden inneren Potenzial muss zusätzlich auch das aus der angreifenden Kraft resultierende äußere Potenzial bestimmt werden. Bei einer wirkenden Einzelkraft ergibt sich dieses aus dem Produkt der Kraft und der Verformung des Kraftangriffspunktes koaxial zur Richtung der Kraft: $\Pi_a = -Fu(x)$. Knickstäbe sind axial belastet, verformen sich allerdings lateral. Um die Beziehung zwischen der Biegelinie und der Verformung in Axialrichtung zu ermitteln, wird ein infinitesimales Element des verformten Balkens betrachtet (s. Abbildung 2.14). Da die Länge dx_1 des verformten Elements unverändert bleibt, gilt $du = dx_1 - \cos(\Theta)dx_1 = dx_1(1 - \cos(w'))$.

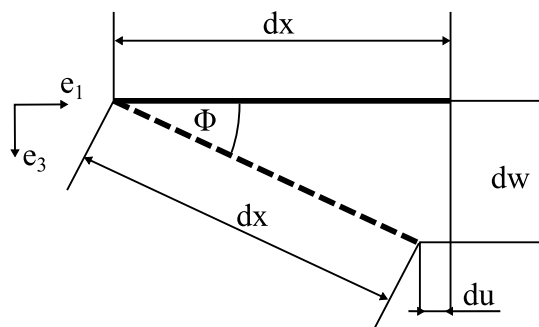


Abb. 2.14: Zusammenhang zwischen Verdrehung Θ und Axialverformung du eines Balkens; Gestrichelte Linie: Verformtes infinitesimales Element, durchgezogene Linie: Unverformtes infinitesimales Element.

Ersetzt man den Kosinusterm durch die ersten beiden Glieder der zugehörigen Taylorreihe folgt: $du = dx_1(1 - (1 - 1/2w'^2)) = 1/2w'^2$. Die gesamte Längenänderung ergibt sich aus dem Integral von du über die Länge des Stabes. Für das äußere Potenzial eines Knickstabes folgt Gleichung 2.45.

$$\Pi_i = -P \frac{1}{2} \int_0^l w'(x_1)^2 dx_1 \quad (2.45)$$

Die Summe des inneren und des äußeren Potenzials ergibt schließlich das Gesamtpotenzial: $\Pi = \Pi_a + \Pi_i$. Um die Bedingung der Stationarität zu erfüllen, wird das Potenzial nach den unbekanntenen Koeffizienten der Ansatzfunktion a_i abgeleitet und gleich null gesetzt (s. Gl 2.46).

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \quad (2.46)$$

Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, dessen Ordnung, der des Ansatzes entspricht und es können die Koeffizienten der Biegelinie bestimmt werden. Zur Bestimmung der Knicklast lässt sich ein Koeffizient kürzen, sodass stattdessen nach der kritischen Last P aufgelöst werden kann. Das beschriebene Vorgehen soll nun kurz exemplarisch anhand des zweiten Eulersfalls demonstriert werden. Der Einfachheit halber wird hier ein Ansatz erster Ordnung für die Biegelinie verwendet (siehe Gleichung 2.47). Dieser erfüllt die notwendige Bedingung $w(0) = w(l) = w'(0) = w'(l) = 0$. Gleichung 2.48 gibt das zugehörige Potenzial und Gleichung 2.49 dessen Ableitung nach A an.

$$w(x_1) = \frac{A}{3}(x_1^5 - 10l^2x_1^3 + 7l^4x_1) \quad (2.47)$$

$$\Pi = -\frac{(32A^2l^7(Fl^2 + 10EJ))}{21} \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A} = -\frac{(64l^7A(Fl^2 + 10EJ))}{21} = 0 \quad (2.49)$$

Wie zu erkennen, lässt sich A kürzen, sodass nach der Last P aufgelöst werden kann. Diese ergibt sich zu $P_{kr} = 10(EJ)/l^2$. Der relative Fehler zur exakten Knicklast beträgt 1,3%. Er lässt sich allerdings durch Verwenden eines Ansatzes höherer Ordnung weiter verringern.

3 Effektive Dehnsteifigkeiten von Gitterstrukturen

Das nachfolgende Kapitel behandelt eine Methode zur Ermittlung effektiver Dehnsteifigkeiten und Elastizitätskonstanten von Gitterstrukturen. Teile der dargestellten Untersuchungen beruhen auf zwei veröffentlichten Artikel [25, 83]. Eine zentrale These dieser Arbeit, vorgestellt in Kapitel 1, ist, dass sich effektive Steifigkeiten von Gitterstrukturen durch elementare Parameter der Gitterzelle, meinentend den E-Modul E , die Zellhöhe h , den Strebenwinkel ω und den Strebenradius r , beschreiben lassen. Die Ausdrücke lassen sich herleiten, indem die Steifigkeitsmatrix der Gitterzelle in Abhängigkeit dieser Parameter aufgestellt wird und durch Aufgeben einer Einheitsverschiebung, entsprechend der gesuchten Eigenschaft, sowie der Aufgabe weiterer Randbedingungen, ein Gleichungssystem entsteht, welches sich dann nach der entsprechenden Reaktionskraft lösen lässt. Das Vorgehen ist im Detail in Kapitel 3.1 dargestellt. Die hieraus resultierende Lösung für die Steifigkeit ist sowohl auf Einheitszellenebene gültig, als auch, da periodische Randbedingungen gewählt wurden, für eine von einer steiferen Struktur eingefassten Gitterstruktur (Kapitel 3.2). Für Gitterstrukturen, bei denen die Randknoten orthogonal zur Lastrichtung eine entsprechende Verschiebung zulassen, sind diese Ansätze aufgrund der auftretenden Randstörung nicht uneingeschränkt anwendbar. Zur Beschreibung der effektiven Dehnsteifigkeiten solcher Gitterstrukturen, wurden im Rahmen dieser Arbeit Einflussfaktoren empirisch ermittelt. Mithilfe dieser Einflussfaktoren und der analytischen Lösungen für das unendliche und eingefasste Gitter lassen sich auch die Steifigkeiten dieser nicht eingefassten Gitterstrukturen in guter Näherung beschreiben. Dies ist in Kapitel 3.3 näher dargestellt.

3.1 Ansatz zur Bestimmung der effektiven Dehnsteifigkeiten

Zur Bestimmung effektiver Dehnsteifigkeiten wird in einem ersten Schritt zu jedem Balken die lokale Steifigkeitsmatrix gebildet. Diese liegt in lokalen Koordinaten der Streben vor und muss mithilfe einer Transformationsbeziehung in globalen Koordinaten überführt werden. Mithilfe der direkten Steifigkeitsmethode lässt sich dann die Gesamtsteifigkeitsmatrix des Systems aufstellen. Durch Aufgeben von entsprechenden Randbedingungen und Einheitsverschiebungen ergeben sich nach Lösung des Gleichungssystems $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{u}$ von den Zellparametern abhängige Ausdrücke für die Steifigkeiten der Einheitszelle. Nachfolgend soll die Methode an einem einfachen Beispiel dargestellt werden. In Abbildung 3.1 ist ein System aus zwei Balken dargestellt, die im Winkel ω zur 1–2 Ebene stehen. Die Balken haben beiden einen Kreisquerschnitt mit Durchmesser d . Die Höhe des Systems wird durch h beschrieben. Das System bildet folglich eine einfache Einheitszelle mit zwei Streben a und b . Strebe a verbindet die Knoten $[i-j]$ und Strebe b verbindet die Knoten $[j-k]$. Die lokalen Steifigkeitsmatrizen der Balken werden nun

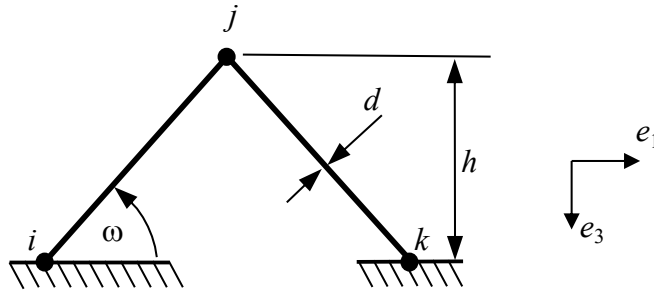


Abb. 3.1: Ein System aus zwei Balken zur Erläuterung der angewandten Methodik.

als Funktion der drei Zellparameter d , bzw. dem Radius $r = d/2$, h , ω sowie dem E -Modul des Grundwerkstoffs gebildet. Da die Balken bis auf den Winkel identisch sind, ergeben sich die gleichen Matrizen in den jeweiligen lokalen Koordinaten. Um die lokalen Steifigkeitsmatrizen in globale Koordinaten zu transformieren, werden sie mit einer vom Strebenwinkel abhängigen Transformationsmatrix multipliziert. Diese Transformationsmatrix kann aus den Richtungs cosini gebildet werden. Folgt man diesem Vorgehen, erhält man von den Zellparametern abhängige Steifigkeitsmatrizen der Balken in globalen Koordinaten:

1. Lokale Steifigkeitsmatrizen von Balken a [i - j] und Balken b [j - k] (Abbildung 3.1):

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} F_1^i \\ F_3^i \\ M_2^i \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{l} F_1^j \\ F_3^j \\ M_2^j \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{l} F_1^j \\ F_3^j \\ M_2^j \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{l} F_1^k \\ F_3^k \\ M_2^k \end{array} \right\}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 (EA)_a/l_a & 0 & 0 & -(EA)_a/l_a & 0 & 0 \\
 0 & 12(EJ_{22})_a/l_a^3 & 6(EJ_{22})_a/l_a^2 & 0 & -12(EJ_{22})_a/l_a^3 & 6(EJ_{22})_a/l_a^2 \\
 0 & 6(EJ_{22})_a/l_a^2 & 4(EJ_{22})_a/l_a & 0 & -6(EJ_{22})_a/l_a^2 & 2(EJ_{22})_a/l_a \\
 -(EA)_a/l_a & 0 & 0 & (EA)_a/l_a & 0 & 0 \\
 0 & -12(EJ_{22})_a/l_a^3 & -6(EJ_{22})_a/l_a^2 & 0 & 12(EJ_{22})_a/l_a^3 & -6(EJ_{22})_a/l_a^2 \\
 0 & 6(EJ_{22})_a/l_a^2 & 2(EJ_{22})_a/l_a & 0 & -6(EJ_{22})_a/l_a^2 & 4(EJ_{22})_a/l_a \\
 (EA)_b/l_b & 0 & 0 & -(EA)_b/l_b & 0 & 0 \\
 0 & 12(EJ_{22})_b/l_b^3 & 6(EJ_{22})_b/l_b^2 & 0 & -12(EJ_{22})_b/l_b^3 & 6(EJ_{22})_b/l_b^2 \\
 0 & 6(EJ_{22})_b/l_b^2 & 4(EJ_{22})_b/l_b & 0 & -6(EJ_{22})_b/l_b^2 & 2(EJ_{22})_b/l_b \\
 -(EA)_b/l_b & 0 & 0 & (EA)_b/l_b & 0 & 0 \\
 0 & -12(EJ_{22})_b/l_b^3 & -6(EJ_{22})_b/l_b^2 & 0 & 12(EJ_{22})_b/l_b^3 & -6(EJ_{22})_b/l_b^2 \\
 0 & 6(EJ_{22})_b/l_b^2 & 2(EJ_{22})_b/l_b & 0 & -6(EJ_{22})_b/l_b^2 & 4(EJ_{22})_b/l_b
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} u_1^i \\ u_3^i \\ \varphi_2^i \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{l} u_1^j \\ u_3^j \\ \varphi_2^j \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{l} u_1^j \\ u_3^j \\ \varphi_2^j \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{l} u_1^k \\ u_3^k \\ \varphi_2^k \end{array} \right\}
 \end{array}$$

2. Transformationsmatrizen:

$$\mathbf{T}_a = \text{diag}(\mathbf{t}_a), \quad \mathbf{t}_a = \begin{bmatrix} \cos(\omega) & \sin(\omega) & 0 \\ -\sin(\omega) & \cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_b = \text{diag}(\mathbf{t}_b), \quad \mathbf{t}_b = \begin{bmatrix} \cos(\omega) & \sin(\omega) & 0 \\ -\sin(\omega) & \cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Transformation von lokale in globale Koordinaten:

$$\mathbf{K}_{a,gl} = \mathbf{T}_a^T \mathbf{K}_a \mathbf{T}_a \quad \text{und} \quad \mathbf{K}_{b,gl} = \mathbf{T}_b^T \mathbf{K}_b \mathbf{T}_b$$

Die resultierenden Steifigkeitsmatrizen werden anschließend zur Gesamtsteifigkeitsmatrix zusammengesetzt. Hierfür wird die Dimension der Steifigkeitsmatrizen der einzelnen Balken auf die Anzahl der Knoten im Gesamtsystem erhöht, indem die Zeilen und Spalten jener Knoten, die nicht mit dem Balken verbunden sind, in den Steifigkeitsmatrizen der einzelnen Balken zu null gesetzt werden. Anschließend führt eine einfache Addition die Einzelsteifigkeitsmatrizen zur Gesamtsteifigkeitsmatrix des Systems mit den globalen Einträgen k_{ij} :

$$\begin{pmatrix} F_1^i \\ F_3^i \\ M_2^i \\ F_1^j \\ F_3^j \\ M_2^j \\ F_1^k \\ F_3^k \\ M_2^k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^a & 0 & 0 & k_{14}^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}^a & k_{23}^a & 0 & k_{25}^a & k_{26}^a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{32}^a & k_{33}^a & 0 & k_{35}^a & k_{36}^a & 0 & 0 & 0 \\ k_{41}^a & 0 & 0 & k_{44}^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{52}^a & k_{53}^a & 0 & k_{55}^a & k_{56}^a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{62}^a & k_{63}^a & 0 & k_{65}^a & k_{66}^a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{11}^b & 0 & 0 & k_{14}^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{22}^b & k_{23}^b & 0 & k_{25}^b & k_{26}^b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{32}^b & k_{33}^b & 0 & k_{35}^b & k_{36}^b \\ 0 & 0 & 0 & k_{41}^b & 0 & 0 & k_{44}^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{52}^b & k_{53}^b & 0 & k_{55}^b & k_{56}^b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{62}^b & k_{63}^b & 0 & k_{65}^b & k_{66}^b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1^i \\ u_3^i \\ \varphi_2^i \\ u_1^j \\ u_3^j \\ \varphi_2^j \\ u_1^k \\ u_3^k \\ \varphi_2^k \end{pmatrix}$$

Werden nun die wie in Abbildung 3.1 dargestellten Randbedingungen eingesetzt und eine Einheitsverschiebung an Knoten j in 3-Richtung aufgegeben, kann ein reduziertes System hergestellt werden, indem die Spalten und Zeilen mit Nulleinträgen im Kraft- und Verschiebungsvektor gestrichen werden. Da alle Verschiebungen und Rotationen im dargestellten Beispiel Null

sind, abgesehen von der aufgegebenen Verschiebung, führt das reduzierte System sofort zur Reaktionskraft:

$$F_3^j = (k_{55}^a + k_{22}^b) u_3^j = 2 \left(\frac{E\pi \sin^3(\omega)}{h} + \frac{3\pi E r^4 \sin^5(\omega)}{h^3 \tan^2(\omega)} \right) u_3^j \quad (3.1)$$

was letztlich zur gesuchten effektiven Steifigkeit in 3-Richtung führt:

$$k_{33} = \frac{F_3^j}{u_3^j} = \frac{2\pi E r^2}{h} \left[1 + 3 \frac{r^2}{h^2} \sin^3(\omega) \cos^2(\omega) \right] \sin^2(\omega) \quad (3.2)$$

3.2 Effektive Dehnsteifigkeiten eingefasster Gitterstrukturen

Betrachtet man zunächst das allgemeine Tragverhalten von Gitterstrukturen, so sind je nach Randbedingungen verschiedene Fälle zu unterscheiden. Abbildung 3.2 zeigt die resultierenden von Mises-Spannungen von f2cc,z-Gitterstrukturen unter vertikaler Belastung (3-Richtung) bei verschiedenen Randbedingungen: (a) einer Sperrung aller Freiheitsgrade an einem Knoten in der Mitte der Struktur, um eine freie Kontraktion in alle Richtungen zu ermöglichen, (b) eine Sperrung aller Freiheitsgrade an der Ober- und Unterseite, wobei sich die Oberseite allerdings in vertikaler Richtung (Belastungsrichtung) frei bewegen kann, sowie Sperrung der Bewegung der seitlichen Knoten orthogonal zur Belastungsrichtung, und (c) gleiche Bedingungen wie (b) für die Ober- und Unterseite, aber freie seitliche Seiten. Es ergibt sich im Fall (a), dass die Spannung in den vertikalen Streben nur auf Normalkräfte zurückzuführen ist, während die Diagonalen auf Biegung belastet sind. Generell wäre dies die Randbedingung der Wahl, wenn man äquivalente homogenisierte Materialeigenschaften ableiten wollen würde. Bei näherer Betrachtung fällt jedoch auf, dass aufgrund der Kinematik der Struktur Querkontraktionszahlen von $\nu_{31} = \nu_{32} \approx 1$ resultieren würden. Übliche Konstitutivmodelle erlauben allerdings nur Querkontraktionen $\nu < 0,5$. Dies führt dazu, dass sich für die meisten Gitterstrukturen keine allgemeinen Homogenisierungen darstellen lassen. Im Fall (b) werden aufgrund der blockierten seitlichen Kontraktion und der daraus resultierenden Reaktionskräfte an den Seitenknoten die Diagonalen sowohl durch Normalkräfte, als auch durch Querkräfte belastet, während die Vertikalen rein durch Normalkräfte belastet werden. Dies führt folglich zu einer Erhöhung der Steifigkeit, verglichen mit Fall (a). Im Fall (c) wird im Einspannbereich eine Störung initiiert, die auf die blockierte Querkontraktion im Einspannbereich zurückzuführen ist, während sich die Seiten frei bewegen können. In 1-Richtung, und äquivalent in 2-Richtung, können ähnliche Effekte beobachtet werden (siehe Abbildung 3.3). Im Gegensatz zur 3-Richtung werden im Fall (a) die Diagonalen allerdings sowohl durch Normalkräfte, als auch durch Biegung belastet, was sich auf die vertikalen Streben zurückführen lässt. In Fall (b) sind ähnliche Bedingungen zu beobachten, jedoch bei deutlich erhöhter Steifigkeit. In (c) tritt wiederum eine Randstörung auf, die sich aus der blockierten seitlichen Kontraktion ergibt.

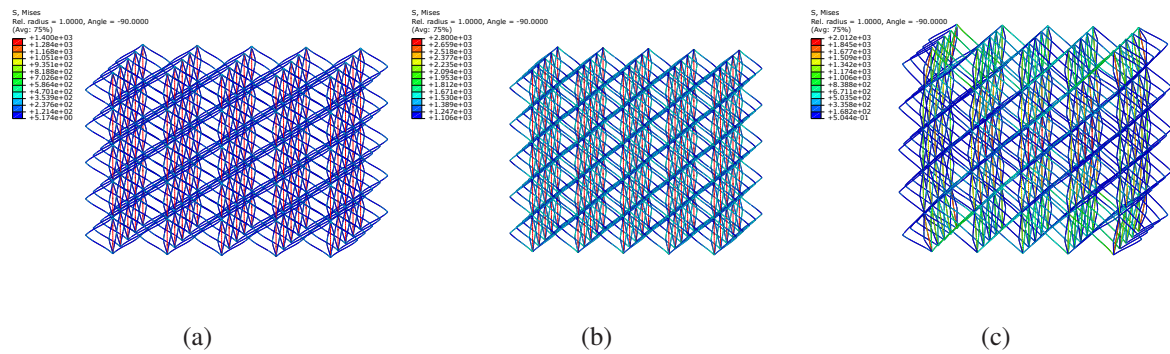


Abb. 3.2: Resultierende von-Mises Spannung für f2cc,z unter vertikalem Druck (3-Richtung) und verschiedenen Randbedingungen: (a) alle Seiten frei, (b) alle Seiten eingespannt und 3-Richtung frei, (c) oben und unten eingespannt.

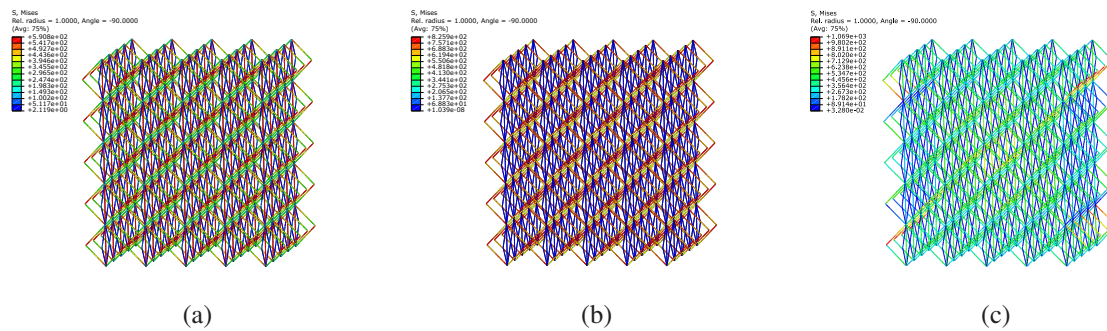


Abb. 3.3: Resultierende von-Mises Spannung für f2cc,z unter horizontalem Druck (1-Richtung) und verschiedenen Randbedingungen: (a) alle Seiten frei, (b) alle Seiten eingespannt und in 1-Richtung frei, (c) linke und rechte Seite eingespannt.

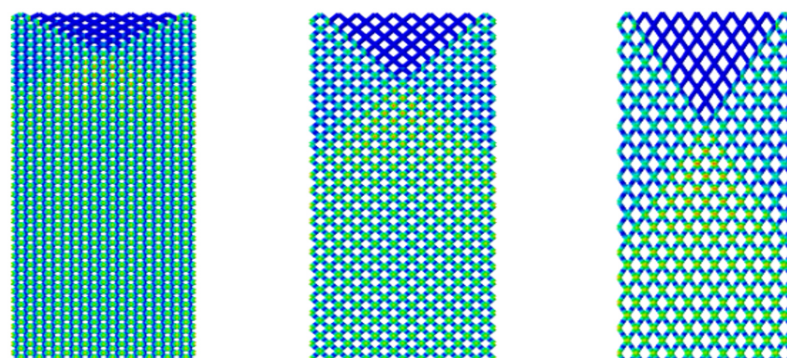


Abb. 3.4: Randeffect im Bereich der Einspannung; (l) mit 30° Inklination; (m) mit 45° Inklination; (r) mit 60° Inklination. Dargestellt ist eine qualitative Visualisierung der von-Mises Spannung.

Nachfolgend werden die technisch relevanten Fälle (b) und (c) betrachtet. Im Folgenden wird der Fall (b) als eingefasste Gitterstruktur bezeichnet, da diese Randbedingung jenen Fall repräsentiert, bei dem das Gitter von einer anderen Komponente, z. B. einem Profil oder einem komplexeren Bauteil umgeben ist. Aufgrund der Betrachtung in technisch relevantem Kontext soll davon ausgegangen werden, dass die Gitter an den lasteinleitenden Rändern grundsätzlich mit einer Platte oder einer ähnlichen Struktur zur Aufbringung der Last verbunden sind. Bei nicht eingefassten Gittern lässt sich, wie zuvor dargestellt, für die meisten Gittertypen durch die blockierte Querdehnung dann ein gestörter Randbereich beobachten. Diese Randstörung führt zu einer abnehmenden Steifigkeit der Gitterstruktur, deren Größe von den mesoskopischen Zellparametern (Einheitszelle) als auch der makroskopischen Gittergeometrie (äußere Abmessungen) abhängig ist. Auf diese Störbereiche soll im Folgenden näher eingegangen werden. Bei Gitterstrukturen mit diagonalen Streben, wie bei den in dieser Arbeit exemplarisch ausgewählten Zelltypen bcc und f2cc,z, ist dieser Randeffect hauptsächlich von der Inklination der Diagonalen abhängig (siehe Abbildung 3.4). Die sich ergebende Randstörung bildet sich zudem erst ab einer bestimmten Länge der Struktur vollständig aus. Abbildung 3.5 zeigt, wie sich die Randstörung in repräsentative Zonen einteilen lässt und sich hierdurch Aussagen über den Einfluss dieser Störung treffen lassen. Dabei werden drei Hauptfälle und ein Grenzfall mit vier charakteristischen Zonen A – D definiert. Bei kubischen Einheitszellen (Seitenverhältnis $b/h = 1$) müssen die Strukturen doppelt so hoch wie breit sein, damit alle Bereiche voll ausgebildet sind. Für nicht kubische Zellen mit $b/h \neq 1$ muss dieses Kriterium angepasst werden. Hohe Gitterstrukturen können als solche definiert werden, bei denen die Zonen D bis zum äußeren Rand des Gitters reichen. Zwischen den Randstörungen bildet sich ein homogener Bereich A. Bei Gitterstrukturen mittlerer Höhe ist der Übergangsbereich D nicht vollständig ausgebildet. Die Bereiche C des oberen und unteren Endes berühren sich allerdings nicht mehr. Daraus ergibt sich eine vollständig ausgebildete Region C, aber nicht vollständig ausgebildete Region B. Bei flachen Strukturen bildet sich keine abgeschlossene Region C und die Region D existiert nicht. Bei voll ausgebildeter Randstörung kann ihr Einfluss als konstant betrachtet werden. Diese Überlegungen werden Eingang in die nachfolgenden Betrachtungen finden, insbesondere in Kapitel 3.3, in dem ebendiese nicht eingefassten Gitterstrukturen näher betrachtet werden.

3.2.1 Analytische Beschreibung effektiver Dehnsteifigkeiten eingefasster Gitterstrukturen

Zunächst sollen auf Grundlage der in Kapitel 3.1 vorgestellten Methode Ausdrücke für die effektiven Dehnsteifigkeiten hergeleitet werden. Es wird die Bernoulli-Balkentheorie verwendet und somit keine Schubverformungen berücksichtigt. Dementsprechend ist der Parameterbereich, in dem die Ausdrücke gültig sind, eingeschränkt. Eine grobe Näherung für den Gültigkeitsbereich kann für bcc und f2cc,z über die relative Dichte hergestellt werden. Solange die relative Dichte weniger als 20 % beträgt, was zu einer Schlankheit der Streben von etwa ≈ 16 führt, ist diese Annahme zu rechtfertigen (siehe Untersuchungen in Kapitel 2.1.3). Abbildung 3.6 zeigt die verwendete Definition der Einheitszellen. Da die üblicherweise verwendete Defini-

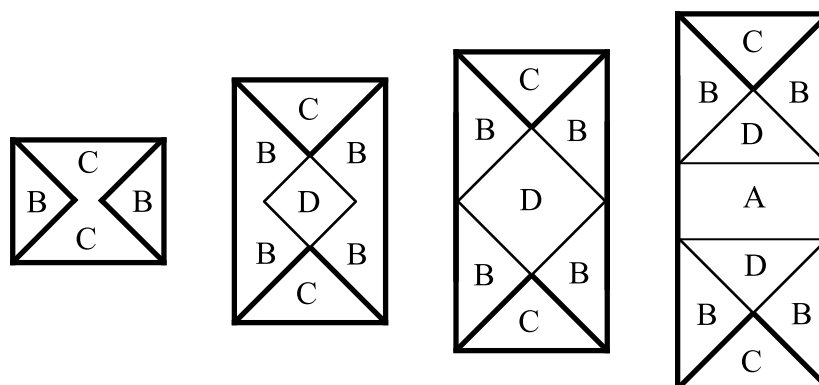


Abb. 3.5: Charakteristische Bereiche bei Gitterstrukturen mit freien Rändern; (links) flache Strukturen, (mitte) mittelhohe Strukturen, (rechts) hohe Strukturen.

tion von $f_{2cc,z}$ dazu führt, dass bei Bildung eines Zellverbunds die Vertikalstreben (z-Streben) übereinanderliegen und somit mehrfach gezählt werden, wird eine Neudefinition der Einheitszelle vorgenommen, die eine periodische Anordnung der Zellen vereinfacht. Die typischerweise verwendete Definition für bcc würde zudem zu überhängenden Einzelstreben in den Ecken führen, was insbesondere bei den Belastungs- und Randbedingungen in den experimentellen Untersuchungen zu Problemen führen kann. Daher wird auch hier eine Neudefinition durchgeführt. Auf Grundlage der in Kapitel 3.1 vorgestellten Methode, lassen sich parameterabhängige Ausdrücke für die Dehnsteifigkeiten sowie den effektiven Elastizitätsmodulen herleiten. Zur Herleitung der Ausdrücke werden zunächst die lokalen Balkensteifigkeitsmatrizen bestimmt, diese in globale Koordinaten transformiert und dann zur Gesamtsteifigkeitsmatrix überlagert. Nach Aufgabe entsprechender Randbedingungen und Einheitsverschiebungen können durch

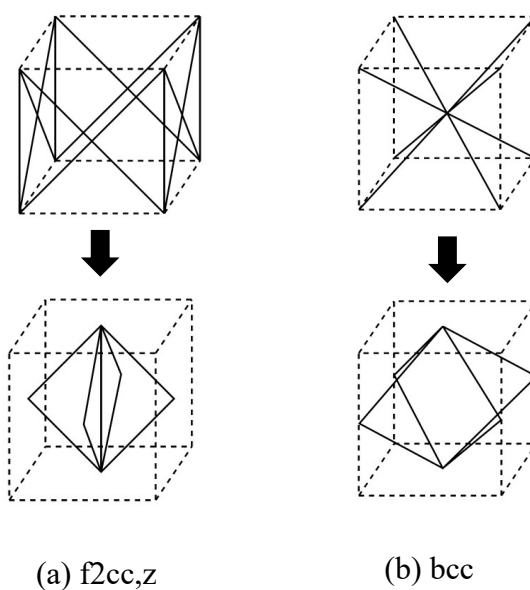


Abb. 3.6: Definition der verwendeten Einheitszellen; (a) $f_{2cc,z}$ Zelle, (b) bcc Zelle.

Lösung des Gleichungssystems Ausdrücke für die Steifigkeiten ermittelt werden (siehe Gleichungen 3.3-3.5 und 3.9-3.11). Die Randbedingungen für die verschiedenen Steifigkeitswerte sind in Tabelle 3.1 und Tabelle 3.2 zusammengefasst. Die Zuordnung der Knoten ist in Abbildung 3.7 definiert. Dargestellt sind die Komponenten der Verschiebungsvektoren für alle Knoten der jeweiligen Einheitszelle, wobei die drei translatorischen Freiheitsgrade mit (u_1, u_2, u_3) gekennzeichnet sind und die drei rotatorischen Freiheitsgrade mit $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Nach dem Hooke'schen Gesetz können die Elastizitätsmodule berechnet werden, indem die Steifigkeiten auf die normal zur Last stehenden Querschnittsflächen bezogen und mit der entsprechenden Zelllänge in Krafrichtung multipliziert werden: $F_i/u_i = k_{ii} = E_i A_{jk}/l_i$, wobei l_i die Zelllänge in der Richtung der aufgebrachten Last ist. Es ergeben sich die in Gleichungen 3.6-3.6 und 3.12-3.14 abgebildeten effektiven Elastizitätskonstanten für bcc und f2cc,z Gitterstrukturen. Die Faktoren n_i bezeichnen die Anzahl der Einheitszellen in der Koordinatenrichtung i . Strenggenommen beschreiben die in Gleichungen 3.6-3.8 und 3.12-3.14 dargestellten E-Module kein homogenisiertes Materialverhalten. Wie bereits erläutert, sowie in Abbildung 3.2 und Abbildung 3.3 dargestellt, dürften die seitliche Ausdehnung der Struktur dafür nicht behindert werden. Die hier dargestellten Lösungen stellen vielmehr eine Darstellung eines unendlichen Gitters dar.

Knoten	k_{11}	k_{22}	k_{33}
1	$(u_1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$
2	$(u_1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
3	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$
4	$(1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$
5	$(1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$
6	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$

Tabelle 3.1: Verwendete Randbedingungen für bcc.

Knoten	k_{11}	k_{22}	k_{33}
1	$(u_1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$
2	$(u_1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
3	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$
4	$(1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$
5	$(u_1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$
6	$(u_1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$

Tabelle 3.2: Verwendete Randbedingungen für f2cc,z.

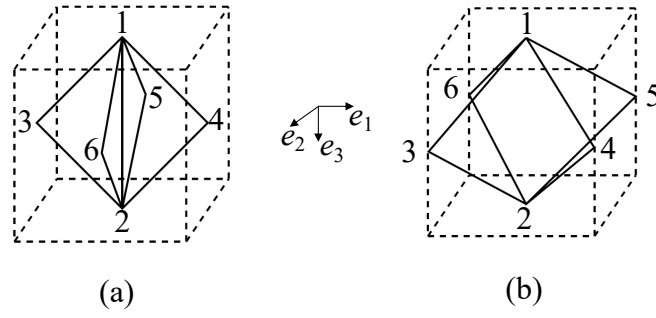


Abb. 3.7: Knotendefinition für die verwendeten Randbedingungen (a) für bcc, (b) für f2ccz.

bcc:

$$k_{11} = \frac{2\pi E r^2}{h} \left[1 + 12 \frac{r^2}{h^2} (\sin^2(\omega) + 1) \tan^2(\omega) \right] \sin(\omega) \cos^2(\omega) \frac{n_2 n_3}{n_1} \quad (3.3)$$

$$k_{22} = \frac{2\pi E r^2}{h} \left[1 + 12 \frac{r^2}{h^2} (\sin^2(\omega) + 1) \tan^2(\omega) \right] \sin(\omega) \cos^2(\omega) \frac{n_1 n_3}{n_2} \quad (3.4)$$

$$k_{33} = \frac{4\pi E r^2}{h} \left[1 + 12 \frac{r^2}{h^2} \cos^2(\omega) \right] \sin^3(\omega) \frac{n_1 n_2}{n_3} \quad (3.5)$$

$$E_1 = \frac{2\pi E r^2}{h^2} \left[1 + 12 \frac{r^2}{h^2} (\sin^2(\omega) + 1) \tan^2(\omega) \right] \sin(\omega) \cos^2(\omega) \quad (3.6)$$

$$E_2 = \frac{2\pi E r^2}{h^2} \left[1 + 12 \frac{r^2}{h^2} (\sin^2(\omega) + 1) \tan^2(\omega) \right] \sin(\omega) \cos^2(\omega) \quad (3.7)$$

$$E_3 = \frac{8\pi E r^2}{h^2} \left[1 + 12 \frac{r^2}{h^2} \cos^2(\omega) \right] \sin^3(\omega) \tan^2(\omega) \quad (3.8)$$

f2cc,z:

$$k_{11} = \frac{2\pi E r^2}{h} \left[1 + 12 \frac{r^2}{h^2} \sin^2(\omega) \tan^2(\omega) \right] \sin(\omega) \cos^2(\omega) \frac{n_2 n_3}{n_1} \quad (3.9)$$

$$k_{22} = \frac{2\pi E r^2}{h} \left[1 + 12 \frac{r^2}{h^2} \sin^2(\omega) \tan^2(\omega) \right] \sin(\omega) \cos^2(\omega) \frac{n_1 n_3}{n_2} \quad (3.10)$$

$$k_{33} = \frac{\pi E r^2}{h} \left[1 + 4 \sin^3(\omega) \left(1 + 12 \frac{r^2}{h^2} \cos^2(\omega) \right) \right] \frac{n_1 n_2}{n_3} \quad (3.11)$$

$$E_1 = \frac{2\pi E r^2}{h^2} \left[1 + 12 \frac{r^2}{h^2} \sin^2(\omega) \tan^2(\omega) \right] \sin(\omega) \cos^2(\omega) \quad (3.12)$$

$$E_2 = \frac{2\pi E r^2}{h^2} \left[1 + 12 \frac{r^2}{h^2} \sin^2(\omega) \tan^2(\omega) \right] \sin(\omega) \cos^2(\omega) \quad (3.13)$$

$$E_3 = \frac{\pi E r^2}{h^2} \left[1 + 4 \sin^3(\omega) \left(1 + 12 \frac{r^2}{h^2} \cos^2(\omega) \right) \right] \tan^2(\omega) \quad (3.14)$$

3.2.2 Vergleich der effektiven mechanischen Eigenschaften

Auf Grundlage der in Kapitel 3 ermittelten Zusammenhänge, werden nachfolgend die resultierenden mechanischen Eigenschaften der bcc und f2cc,z Zellen in Abhängigkeit verschiedener Parameter miteinander verglichen. Abbildung 3.8 zeigt den Einfluss der relativen Dichte auf die Steifigkeiten, bzw. auf die durch den Elastizitätsmodul des Materials normierten Elastizitätsmodule, für verschiedene Aspektverhältnisse der Zelle. Die relativen Dichten werden mittels Gleichung 2.8 und 2.9 bestimmt. Die entsprechenden Winkel der Diagonalstreben können aus $\omega_{\text{bcc}} = \arctan(h/(\sqrt{2}b))$ und $\omega_{\text{f2ccz}} = \arctan(h/b)$ berechnet werden. Es besteht sowohl für f2cc,z als auch für bcc im Bereich von 0-20 % relativer Dichte eine nahezu lineare Beziehung zwischen der relativen Dichte und der Steifigkeit. Dieser Zusammenhang wird auch von Gibson & Ashby aufgestellt. Der entsprechende Ansatz ist in Kapitel 2.1 näher erläutert. Aus den Verläufen können auch entsprechende Parameter C ermittelt und über Gleichung 2.10 die effektiven Steifigkeiten bestimmt werden. Die dargestellten Verläufe zeigen, dass bei höheren Zellseitenverhältnissen b/h , d. h. niedrigem ω , die Elastizitätsmodule $E_1 = E_2$ zunehmen und E_3 abnimmt. Dies lässt sich bei näherer Betrachtung der Gleichungen darauf zurückführen, dass der Anteil der Normallast in den Diagonalstreben einen stärkeren Einfluss auf die Steifigkeiten hat als die Biegelasten. Da der Winkel ω also immer mit der 1–2 Ebene zusammenhängt, ist es bei den Steifigkeiten E_1 und E_2 in der Ebene umgekehrt. Außerdem ist f2cc,z im Vergleich zu bcc in 3-Richtung viel steifer, was auf die vertikalen Streben zurückzuführen ist. In 1- und 2-Richtung ist bcc für das Seitenverhältnis $b/h \leq 1$ steifer als f2cc,z, da die vertikalen Streben hier nicht zur Steifigkeit beitragen. Dies wird bei höheren Aspektverhältnissen bei f2cc,z dadurch kompensiert, dass die Normalkraftkomponente der flächenzentrierten Diagonalen im Vergleich zu bcc mit abnehmendem Neigungswinkel schneller wächst. Interessant ist auch, dass bcc bei hohen Seitenverhältnissen fast seine gesamte Steifigkeit in der 3-Richtung und bei niedrigen Seitenverhältnissen in 1- und 2-Richtung verliert. Bei f2cc,z ist dies nur in 1- und 2-Richtung bei niedrigem Aspektverhältnis der Fall.

Abbildung 3.9 zeigt den Einfluss des Strebenradius auf die normalisierten Elastizitätsmodule von bcc- und f2cc,z-Gitterstrukturen für verschiedene Aspektverhältnisse b/h . Hierbei besteht ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen dem Strebenradius und den resultierenden Elastizitätsmodulen, der sich auch direkt aus den Gleichungen erkennen lässt. Analog zu den zuvor gezeigten Ergebnissen ist f2cc,z bei gleichen Radien immer steifer in 3-Richtung als bcc. Bei kleinen Aspektverhältnissen und gleichen Radien ist bcc in 1- und 2-Richtung steifer. Bei hohen Aspektverhältnissen und gleichen Radien weist f2cc,z in 1- und 2-Richtung eine höhere Steifigkeit auf und die Steifigkeit von bcc geht gegen null.

Abbildung 3.10 zeigt die Beziehung zwischen den Diagonalen Strebenwinkeln ω und den resultierenden Dehnsteifigkeiten für verschiedene Strebenradien. Dies ist gleichbedeutend mit der Variation des Zellseitenverhältnisses. Es ist nur ein quantitativer Einfluss des Strebenradius auf die Dehnsteifigkeiten bei unterschiedlichen Winkeln der Diagonalstreben erkennbar. Mit höheren Strebenradien werden die erreichten Steifigkeiten ebenfalls größer. Für die Module E_1 und E_2 ist kein großer Unterschied bei den Steifigkeiten von f2cc,z und bcc zu erkennen, allerdings ist die relative Dichte von bcc-Zellen bei gleichem Strebenradius und gleichem Winkel höher.

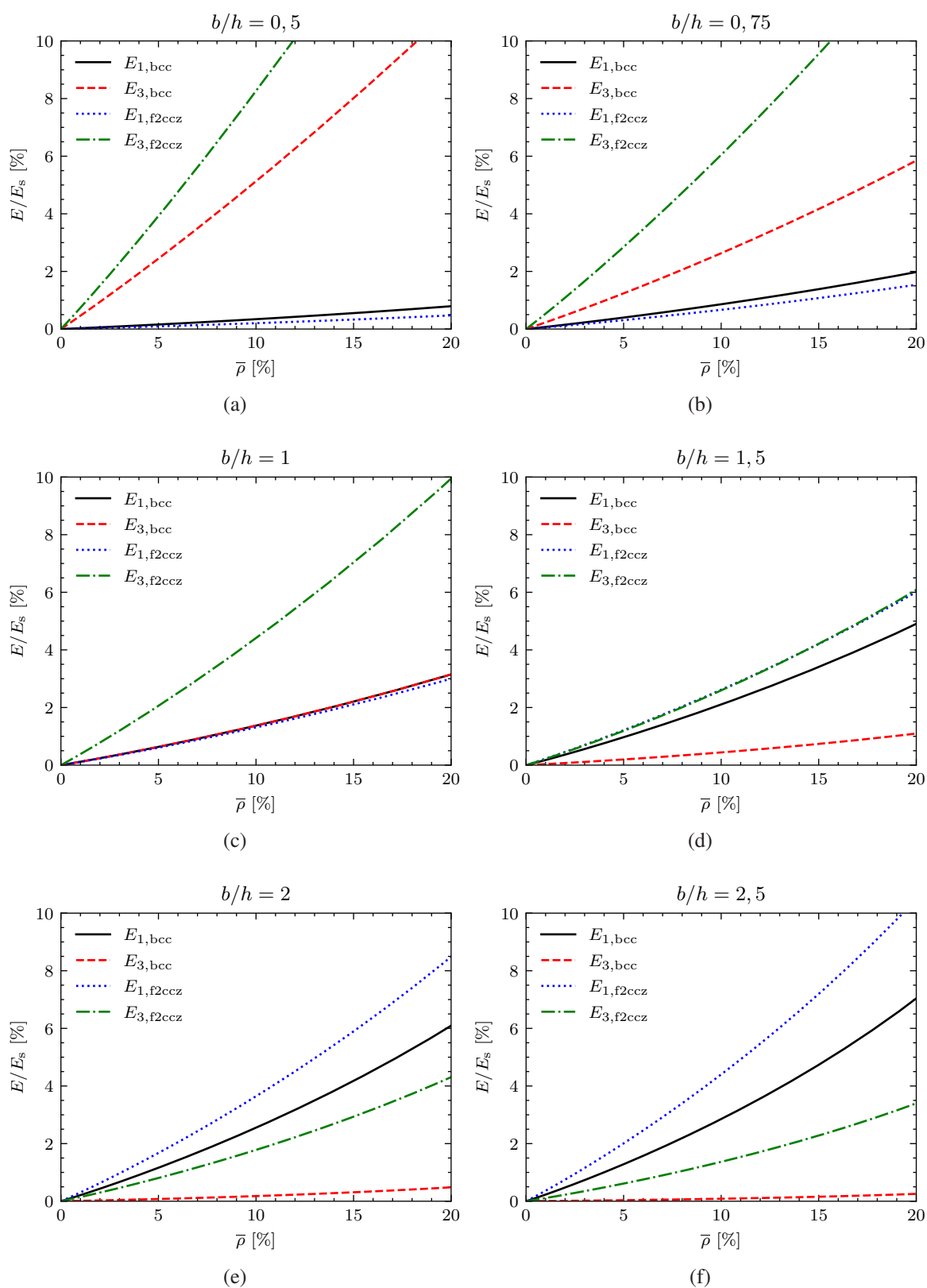


Abb. 3.8: Vergleich der resultierenden Steifigkeiten von bcc und f2cc,z in Abhängigkeit der relativen Dichte und unterschiedlichen Aspektverhältnissen (Strebenwinkel) b/h bei $h = 10$ mm.

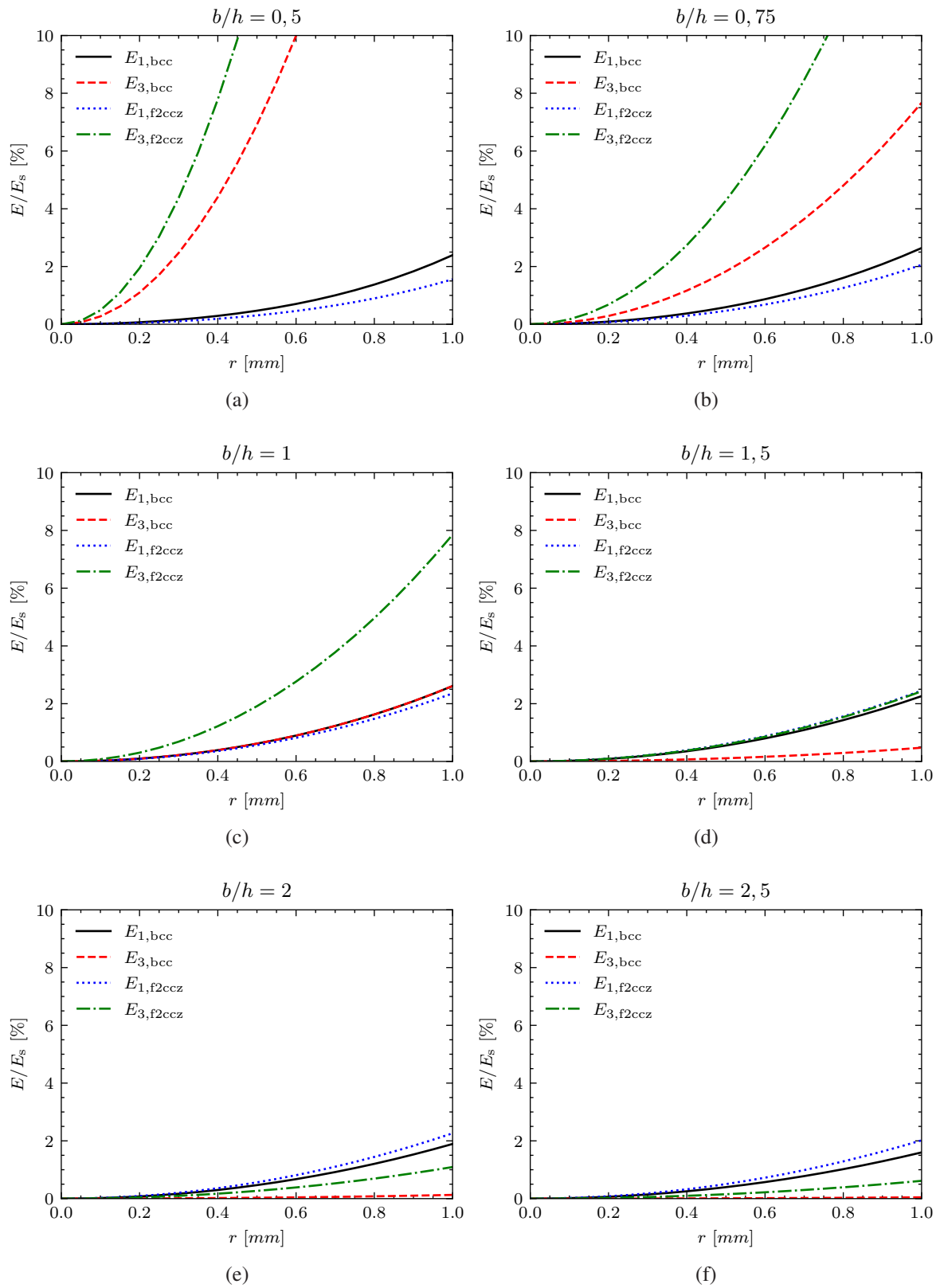


Abb. 3.9: Vergleich der resultierenden Steifigkeiten von bcc und f2cc,z in Abhängigkeit des Strebenradius und unterschiedlichen Aspektverhältnissen (Strebenwinkel) b/h bei $h = 10$ mm.

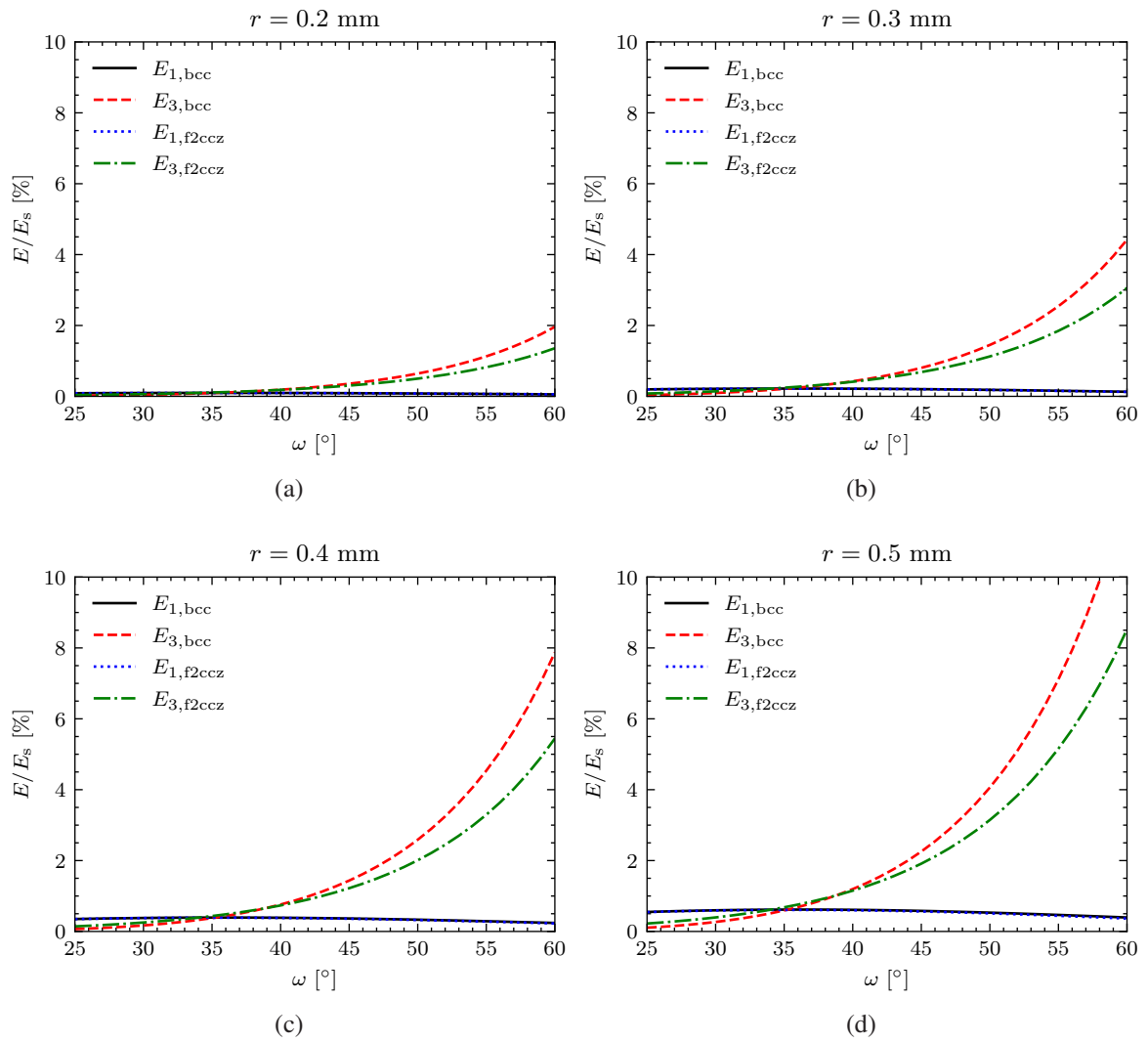


Abb. 3.10: Vergleich der resultierenden Steifigkeiten von bcc und f2cc,z in Abhängigkeit des Strebenwinkels für unterschiedliche Strebenradien r bei konstanter Zellhöhe $h = 10$ mm.

Für E_3 gibt es einen Wendepunkt, der auch aus den vorherigen Diagrammen ersichtlich wird. Wenn die E-Module gleich gesetzt werden (unter der Annahme gleicher Strebenradien und gleicher Zellenhöhe), ergibt sich die Gleichung $1 + 2 \sin^3(\omega) + 24 \sin^3(\omega) \cos^5(\omega) r^2/h^2 = 0$. Da diese Gleichung transzendent ist, ist sie nicht direkt lösbar und muss iterativ gelöst werden. Die resultierenden Lösungen für ω sind in Abbildung 3.11 als Funktion von r^2/h^2 aufgetragen. Hier ist zu erkennen, dass mit zunehmendem r^2/h^2 der Neigungswinkel, bei dem die Module in 3-Richtung für bcc und f2cc,z gleich sind, abnimmt.

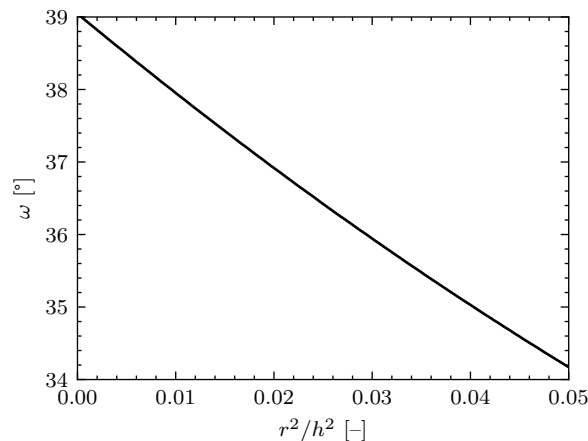


Abb. 3.11: Werte für die Strebenwinkel in Abhängigkeit von r^2/h^2 für die die Elastizitätsmodule in 3-Richtung für f2cc,z und bcc gleich sind.

3.3 Beschreibung der Dehnsteifigkeiten nicht eingefasster Gitterstrukturen

Mit der zuvor vorgestellten Methode lassen sich für die als nicht eingefasste Gitterstrukturen definierten Strukturen aufgrund einer auftretenden Randstörung keine analytischen Lösungen ermitteln (vgl. Kapitel 3.2, insbesondere Abbildungen 3.2 - 3.5). Zur Findung einer Näherung werden empirische Einflussfaktoren mittels Finite Elemente Simulationen bestimmt. Es wird die nachfolgende Beziehung aufgestellt, die die analytische Lösung zur Ermittlung der Dehnsteifigkeiten für eingefasste Gitterstrukturen, k_{an} , gemäß Gleichungen 3.3 - 3.5 und 3.9 - 3.11, über den empirischen Einflussfaktor f , mit der korrigierten Steifigkeit k_{korr} in Beziehung setzt:

$$k_{korr} = f k_{an} \quad (3.15)$$

3.3.1 Ansatz zur Bestimmung der Einflussfaktoren

Zur Entwicklung des Ansatzes soll zunächst der vereinfachte Fall untersucht werden, bei dem die Zellen kubisch sind und die Anzahl der Zellen in 1- und 2-Richtung gleich sind. Die Ergebnisse einer ersten Parameterstudie zeigen, dass der resultierende Einflussfaktor f stark abhängig von den Zellparametern ist. Für $f_{2cc,z}$ nimmt mit zunehmender Zellhöhe h und mit zunehmender Anzahl Zellen in vertikaler Richtung der Einflussfaktor ab. Bei einer Vergrößerung des Strebenradius r und mit mehr Zellen in 1- bzw. 2-Richtung steigt f . Hieraus kann eine empirische Beziehung zwischen der zuvor vorgestellten analytischen Lösung und dem Korrekturfaktor f bestimmt werden. Hierfür wird ein Hilfsfaktor, der Gitterparameter K , eingeführt, der sich aus den Zell- und Gitterparametern ergibt. Um die spezifischen Einflüsse zu berücksichtigen, werden die Parameter zusätzlich mit den faktoriellen Gewichten a_i und den exponentiellen Gewichten c_i versehen:

$$K = a_1 \left(\frac{n_{1,2}}{n_3} \right)^{c_1} + a_2 \left(\frac{r}{h} \right)^{c_2} + N \quad (3.16)$$

In einem ersten Schritt wird von dem vereinfachten Fall ausgegangen, dass die Zellanzahl in 1-Richtung und 2-Richtung gleich ist, also $n_1 = n_2 = n_{1,2}$ gilt. n_3 beschreibt die Anzahl der Zellen in 3-Richtung, r den Strebenradius und h die Zellhöhe. In Gleichung 3.16 wurde zudem die Größe N eingeführt, die eine weitere Korrektur für voll ausgebildete Randstörungen darstellt. Hierauf wird später näher eingegangen. Um geeignete Gewichte zu finden, kann eine Korrelationsoptimierung durchgeführt werden. Dazu wird in einem ersten Schritt eine lineare Regression zwischen f und K bestimmt:

$$f = 1 - g = 1 - (b + m K) \quad (3.17)$$

Der Korrekturfaktor g wurde eingeführt, um eine Erweiterung des Modells, z. B. um eine beliebige umgebende Wandstärke, die nicht gleich einer Einspannung des Gitters entspricht, zu erleichtern. Es hat keinen Einfluss auf die optimierten Parameter, ob der Einflussfaktor f oder der Korrekturfaktor g verwendet wird. Die Güte der Näherung wird durch einen Korrelationskoeffizienten des angepassten Modells bewertet. m und b sind die Werte der Funktion, die durch die lineare Anpassung der Datenpunkte erhalten werden. a_1 und a_2 werden abhängig vom abnehmenden oder zunehmenden Einfluss der Gitterparameter auf die Steifigkeit angepasst. Nimmt f ab ist der entsprechende Parameter a_i positiv, nimmt f zu, ist a_i negativ. Die Gewichte c_i können auf die gleiche Weise bestimmt werden.

Das erste Ergebnis ist in Abbildung 3.12 (a) dargestellt. Hieraus geht hervor, dass der Korrekturfaktor für kleinere Werte von g linear mit K ansteigt. Bei höheren Werten von K steigt die Streuung allerdings enorm. Weiterhin nimmt K mit mehr Zellen in 3-Richtung und mit weniger Zellen in 1-Richtung und 2-Richtung zu. Wie bereits beschrieben, resultiert für die nicht eingefassten Gitterstrukturen aufgrund der Randbedingungen eine parameterabhängige Randstörung, die sich weiterhin in repräsentative Bereiche einteilen lässt (siehe Abbildung 3.5). Wenn der Bereich D voll ausgebildet ist, kann der Einfluss der Randstörung als konstant auf die effektive

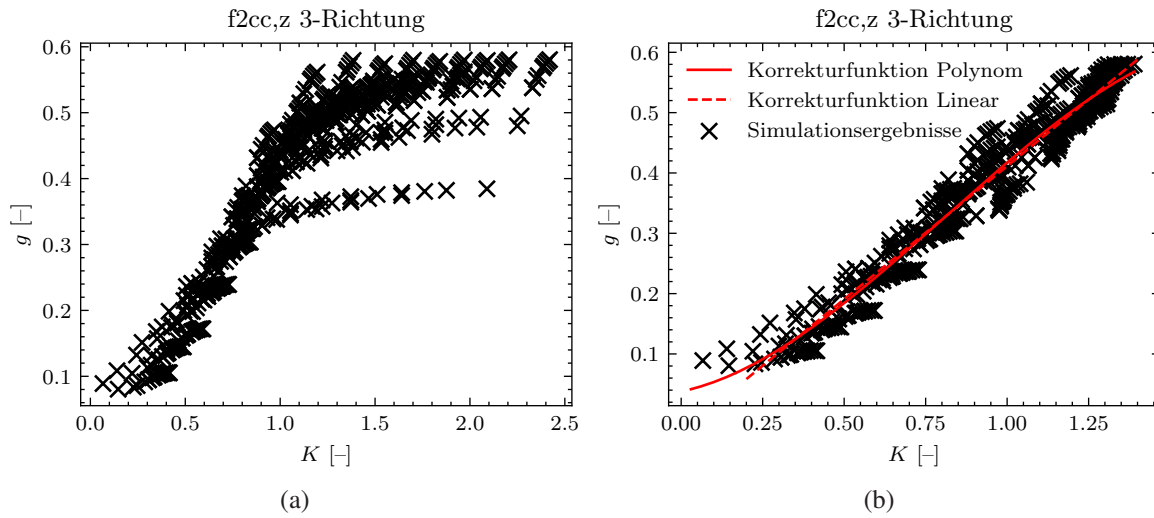


Abb. 3.12: Korrekturfaktor $g = 1 - f$ in Abhängigkeit vom Gitterparameter K für f2cc,z in 3-Richtung; (a) Simulationsergebnisse ohne Berücksichtigung des Grenzwertes N ; (b) Simulationsergebnisse und Korrekturfunktionen mit Berücksichtigung des Grenzwertes N .

Dehnsteifigkeit der Gitterstruktur angenommen werden. Daher führt ab einem bestimmten Verhältnis $n_{1,2}/n_3$ eine zunehmende Anzahl von Zellen in 3-Richtung nicht mehr zu signifikanten Änderungen des Korrekturfaktors. Um dies zu berücksichtigen, wird ein Schwellenwert definiert, um die Funktion von K in zwei Teile aufzuteilen. N berücksichtigt den Randeffect, der immer noch auftritt, aber unterhalb der Schwelle $n_{1,2}/n_3$ konstant bleibt. In Abbildung 3.12 (b) ist das Ergebnis unter Berücksichtigung dieser Teilung aufgetragen. Dabei weichen die empirisch ermittelten Ergebnisse nur noch um weniger als 5 % von den Simulationen ab. Zusammengefasst führt die Optimierung zu den folgenden Parametern:

Für $\frac{n_{1,2}}{n_3} > 0,6$: $N = 0 \rightarrow a_1 = 1,0$; $a_2 = -2,0$; $c_1 = -0,5$; $c_2 = 1,0$

Für $\frac{n_{1,2}}{n_3} \leq 0,6$: $N = 1,3 \rightarrow a_1 = 0,02$; $a_2 = -2,0$; $c_1 = -1,0$; $c_2 = 1,0$

Daraus ergibt sich:

$$\text{Wenn } \frac{n_{1,2}}{n_3} > 0,6: K = \left(\frac{n_{1,2}}{n_3}\right)^{-0,5} - 2 \left(\frac{r}{h}\right)$$

$$\text{Wenn } \frac{n_{1,2}}{n_3} \leq 0,6: K = 0,02 \left(\frac{n_{1,2}}{n_3}\right)^{-1} - 2 \left(\frac{r}{h}\right) + 1,3$$

Und damit die lineare Korrekturfunktion für f2cc,z in 3-Richtung:

$$g = (1 - f) = -0,0299 + 0,4413K$$

Alternativ kann anstelle einer linearen Anpassung auch eine Anpassung über ein Polynom verwendet werden, wodurch deutlich bessere Ergebnisse erzielt werden. Die ebenfalls in Abbildung 3.12 dargestellte Polynom-Anpassung ist von Ordnung drei und hat die folgende Form:

$$f = 1 - g = 1 - (b_0 + b_1K + b_2K^2 + b_3K^3 + b_4K^4 + b_5K^5 + b_6K^6) \quad (3.18)$$

mit: $b_0 = 0,04$; $b_1 = 0,11$; $b_2 = 0,46$; $b_3 = -0,19$; $b_4 = 0$; $b_5 = 0$; $b_6 = 0$

Die vorgestellte Methode wird nachfolgend auch auf die 1- und 2-Richtung der f2cc,z-Zelle und die bcc-Zelle angewandt. Da bcc im kubischen Fall isotrop ist, sind die Ergebnisse in allen Hauptrichtungen gültig. Die Parameter für alle Korrekturfunktionen sind in Tabelle 3.3 zusammengefasst. Für f2cc,z wird als Belastungsrichtung die 1-Richtung verwendet. Daher wird hierbei die Zellanzahl in 2-, 3-Richtung anstelle in 1-, 2-Richtung konstant gehalten.

In Abbildung 3.13 sind die Ergebnisse für f2cc,z in 1-, 2-Richtung dargestellt. Wieder werden in Abbildung 3.13 (a) die charakteristischen Bereiche nicht berücksichtigt. In Abbildung 3.13 (b) wird ein Grenzwert $n_{1,2}/n_3 > 0,8$ gewählt. Das Ergebnis kann dahingehend interpretiert werden, dass für diese Lastrichtung der sich einstellende Randeffekt nicht so stark ausgeprägt ist wie in 3-Richtung. Dies lässt sich durch die vertikale Strebe der f2cc,z Zelle erklären, die senkrecht zur Lastrichtung steht. Die Strebe hat dabei die gleiche Wirkung wie die Wände in einer eingebetteten Struktur: Sie erhöht die Steifigkeit senkrecht zur Last. Dies führt zu einer höheren Gesamtsteifigkeit und reduziert den Randeffekt. Daher führt die Verwendung eines Grenzwerts zur Korrektur von K in diesem Fall nicht zu signifikanten Änderungen.

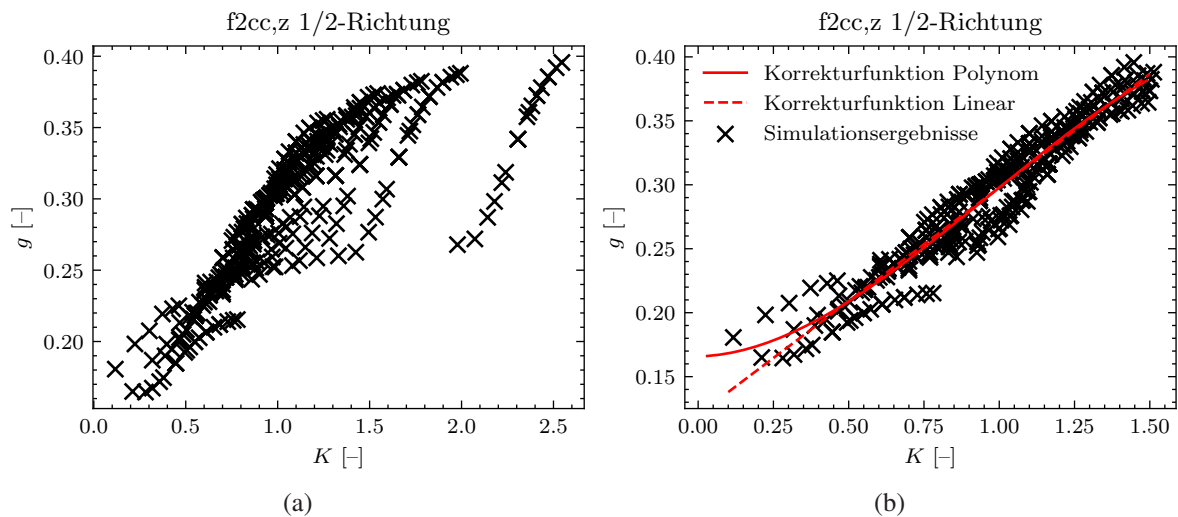


Abb. 3.13: Korrekturfaktor $g = 1 - f$ in Abhängigkeit vom Gitterparameter K für f2cc,z in 1/2-Richtung; (a) Simulationsergebnisse ohne Berücksichtigung des Grenzwertes N ; (b) Simulationsergebnisse und Korrekturfunktionen mit Berücksichtigung des Grenzwertes N .

In den Abbildungen 3.14 sind zudem die Ergebnisse für bcc dargestellt. Bei höheren K ist beim Ergebnis für den nicht korrigierten Fall (Abbildung 3.14 (a)) erneut eine hohe Streuung zu erkennen. Durch Anpassung von K mit Grenzwert $n_{1,2}/n_3 > 1$ kann das Ergebnis verbessert werden (Abbildung 3.14 (b)). Für $K \rightarrow 0,5$ resultiert $g \rightarrow 1$ und damit $f \rightarrow 0$, was zu hohen Abweichungen führt. Sofern $g \rightarrow 1$ sollte daher für bcc die polynomische Korrekturfunktion aus Gleichung 3.18 verwendet werden.

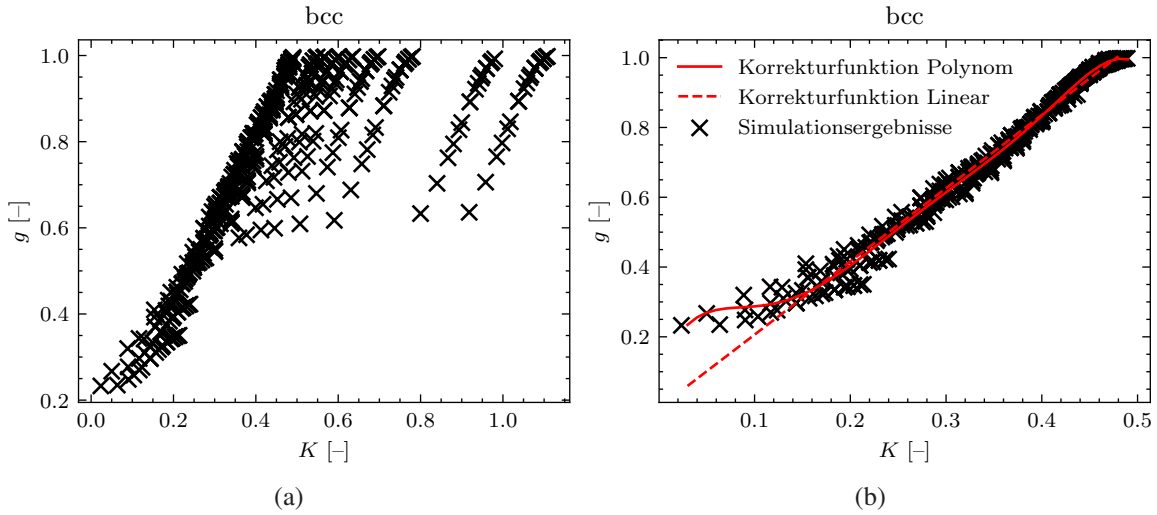


Abb. 3.14: Korrekturfaktor $g = 1 - f$ in Abhängigkeit vom Gitterparameter K für bcc; (a) Simulationsergebnisse ohne Berücksichtigung des Grenzwertes N ; (b) Simulationsergebnisse und Korrekturfunktionen mit Berücksichtigung des Grenzwertes N .

3.3.2 Erweiterung der Ansätze für nicht kubische Zellen

Die zuvor dargestellten und veröffentlichten Ergebnisse [83] zur Bestimmung der Einflussfaktoren werden nachfolgend um den Parameter *Strebenwinkel*, ω , sowie einer nicht gleichen Anzahl an Zellen in 1- und 2-Richtung erweitert. Es wird weiterhin der in Gleichung 3.15 definierte Zusammenhang zwischen der korrigierten und der analytisch bestimmten Lösung der eingebetteten Struktur verwendet. Der Einflussfaktor f ergibt sich analog zu Gleichung 3.18 aus einem Polynom sechsten Grades. Die zugehörigen Parameter b_0 bis b_6 und der untersuchte Parameterbereich können Tabelle 3.4 entnommen werden. Zur Bestimmung des Gitterparameters K muss die Funktion aus Gleichung 3.16 um die neuen Parameter erweitert bzw. angepasst werden. Der folgende Ausdruck wurde durch Analyse der zugehörigen Simulationsergebnisse bestimmt und aus diesen durch Herstellung intuitiver Zusammenhänge aufgestellt:

$$K = a_1 \left(\frac{n_1 n_2}{n_3^2} \right)^{c_1} + a_2 \left(\frac{|n_1 - n_2|}{n_1 + n_2} \right)^{c_2} + a_3 \left(\frac{r}{h} \right)^{c_3} + a_4 (\tan(\omega))^{c_4} \quad (3.19)$$

	f2cc,z 3-Richtung	f2cc,z 1,2-Richtung	bcc
Untersuchter Parameterbereich			
$n_{1,2/1,3}$	[2; 11]	[3; 11]	[2; 10]
$n_{3/1}$	[2; 12]	[5; 11]	[2; 10]
r	[0,1; 0,9]	[0,2; 0,8]	[0,2; 1,0]
h	[5; 20]	[5; 15]	[5; 20]
Kritisches Zellverhältnis $n_{1,2}/n_3$ bzw. $n_{2,3}/n_1$			
	0,6	0,8	1,0
Koeffizienten und Exponenten für K und $(n_{i,j}/n_k) > (n_{i,j}/n_k)_{\text{krit}}$			
a_1	1,0	1,5	0,5
a_2	-2,0	-2,0	-1,0
c_1	-0,5	-0,5	-0,5
c_2	1,0	0,5	1,0
N	0	0	0
Koeffizienten und Exponenten für K und $(n_{i,j}/n_k) \leq (n_{i,j}/n_k)_{\text{krit}}$			
a_1	0,02	0,02	0,02
a_2	-2,0	-2,0	-1,0
c_1	-0,5	-1,0	2,0
c_2	1,0	0,5	1,0
N	1,3	1,7	0,5
Koeffizienten für die lineare Korrekturfunktion			
b	-0,0299	0,1202	0,0148
m	-0,4413	0,1777	2,0134
Koeffizienten für die polynomische Korrekturfunktion			
b_0	0,04	0,17	0,09
b_1	0,11	0,01	7,54
b_2	0,46	0,19	-113,86
b_3	-0,19	-0,07	814,61
b_4	0	0	-2763,0
b_5	0	0	4520,39
b_6	0	0	-2868,23

Tabelle 3.3: Untersuchter Parameterbereich der semi-empirischen Korrektur und Koeffizienten der Funktionen, für kubische Zellen bei gleicher Anzahl Zellen in 1-Richtung und 2-Richtung.

Die Koeffizienten a_i und c_i können ebenfalls Tabelle 3.4 entnommen werden. Die Abbildungen 3.15 und 3.16 zeigen zudem die Ergebnisse der Korrekturfunktion im Vergleich mit den Simulationsergebnissen.

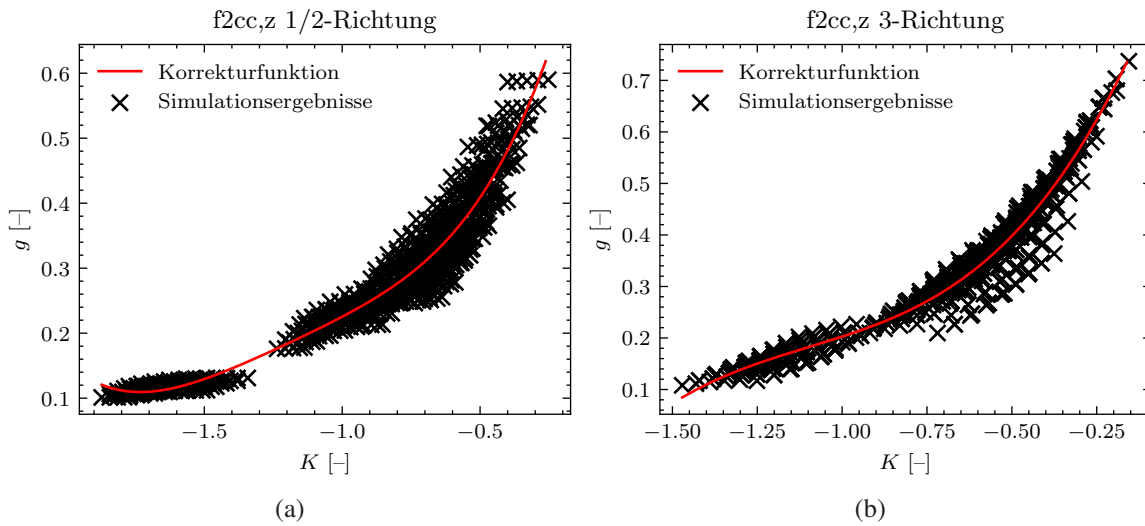


Abb. 3.15: Korrekturfaktor $g = 1 - f$ in Abhängigkeit vom Gitterparameter K für $f2cc,z$ mit allgemeinem Winkel und ungleicher Anzahl Zellen in 1- und 2-Richtung. (a) Für die 1/2-Richtung und (b) für die 3-Richtung.

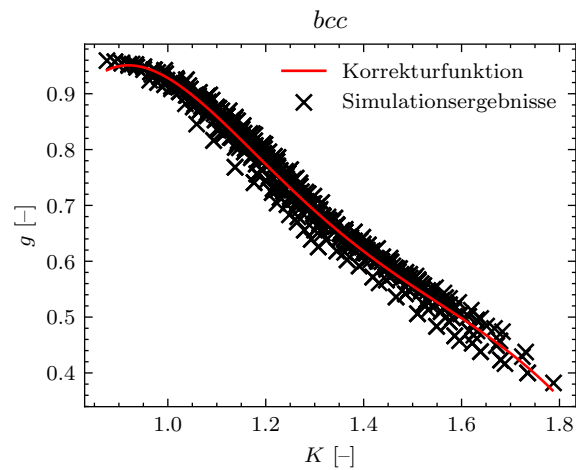


Abb. 3.16: Korrekturfaktor $g = 1 - f$ in Abhängigkeit vom Gitterparameter K für bcc mit allgemeinem Winkel und ungleicher Anzahl Zellen in 1- und 2-Richtung.

	f2cc,z 3-Richtung	f2cc,z 1,2-Richtung	bcc
Untersuchter Parameterbereich			
$n_{1,2}/n_3$	[0,5; 1,5]	–	[0,5; 2,25]
$n_{2,3}/n_1$	–	[0,5; 1,5]	–
r/h	[0,01; 0,11]	[0,01; 0,11]	[0,01; 0,11]
ω	[25; 65]	[25; 65]	[25; 55]
Koeffizienten und Exponenten für K			
a_1	-0,218	-0,256	0,172
a_2	-0,141	-0,223	-0,052
a_3	-1,698	-1,613	2,001
a_4	-0,130	-0,249	0,282
c_1	0,762	0,479	0,769
c_2	2,012	1,988	1,391
c_3	0,889	0,693	0,388
c_4	-2,297	-1,997	0,516
Koeffizienten für die polynomische Korrekturfunktion			
b_0	1,035	1,050	15,44
b_1	2,532	2,190	57,87
b_2	3,415	2,401	-78,06
b_3	2,592	1,306	50,41
b_4	0,9016	0,271	-15,75
b_5	0,1125	0	-1,900
b_6	0	0	0

Tabelle 3.4: Untersuchter Parameterbereich der semi-empirischen Korrektur und Koeffizienten der Funktionen für nicht kubische Zellen und ungleicher Anzahl Zellen in 1-Richtung und 2-Richtung.

3.4 Experimentelle Validierung

Zur Validierung der analytischen und numerischen Ergebnisse wurden Druckversuche an Gitterstrukturen des Typs $f2cc,z$ und bcc durchgeführt. Es folgt eine Vorstellung der Prüfmethodik, der verwendeten Materialien und Prüfkörper sowie eine Vorstellung der Ergebnisse.

3.4.1 Prüfmethodik

Die Proben wurden auf einer elektrischen Zug-/Druckprüfmaschine vom Typ Instron 5567 mit einer 30 kN-Kraftmessdose getestet. Die Versuche wurden weggesteuert mit einer Traversengeschwindigkeit von 5 mm/min durchgeführt. Der nichtlineare Bereich zu Belastungsbeginn wird nicht weiter berücksichtigt, da er auf Fertigungseinflüsse zurückzuführen ist. Die Proben werden so lange belastet, bis sich ein linearer Bereich von etwa $\Delta u = 0,5$ mm eingestellt hat. Dabei wird sowohl der Traversenweg als auch die in der Kraftmessdose gemessene Kraft dokumentiert. Zusätzlich werden die Versuche mittels DIC-Technik (Digital Image Correlation) mit einem Aramis 4M-System von GOM überwacht, da kleine Verschiebungen im Versuchsaufbau zu Unterschieden zwischen der realen und der Traversenverschiebung führen können. Es werden grundsätzlich zwei Versuchsaufbauten verwendet: Für die Untersuchungen der nicht eingefassten Gitterstrukturen werden die Proben zwischen zwei Druckplatten platziert und keine weitere Einspannungen verwendet, da Vorversuche gezeigt haben, dass die Reibungskräfte zwischen den Probekörpern und den Druckplatten ausreichend sind, um horizontale Bewegungen zu verhindern. Somit kann eine äquivalente Randbedingung wie in der Analytik angenommen werden. Zur Validierung der analytischen Lösung für die eingefassten Strukturen, werden die Gitter in ein Aluminiumprofil mit 5 mm Wandstärke gesteckt, um äquivalente Randbedingungen zu erhalten. Um eine alleinige Belastung des Gitters zu erreichen, ist die Gesamthöhe der Gitterstrukturen auf der Krafteinleitungsseite einige Millimeter größer als die Höhe des Aluminiumprofils (vgl. Abbildung 3.17). Würden sowohl Profil als auch Gitter belastet, müsste der Steifigkeitsanteil des Profils wieder herausgerechnet werden. Aufgrund der hohen Wandstärke und der unterschiedlichen verwendeten Materialien, wäre der Beitrag des Gitters zur Gesamtsteifigkeit allerdings vernachlässigbar klein und somit die Validität des Ergebnisses anzuzweifeln.

3.4.2 Material und Probekörper

Die Probekörper wurden mittels Stereolithographie (SLA) auf einem Formlabs Form 2 Drucker mit grauem Standardharz und 50 μm Schichtdicke hergestellt. Alle Proben wurden bei 60 °C für 60 Minuten in einem UV-Ofen wärmebehandelt. Das verwendete Material wurde in einer Vorstudie durch Zugversuche (nach DIN EN ISO 527), Druckversuche (nach DIN EN ISO 604:2003) und 3-Punkt-Biegeversuche (nach DIN EN ISO 178:2019) charakterisiert. Dazu wurden Probekörper mit unterschiedlichen Ausrichtungen (0°, 60°, 90°) zur Bauplattform

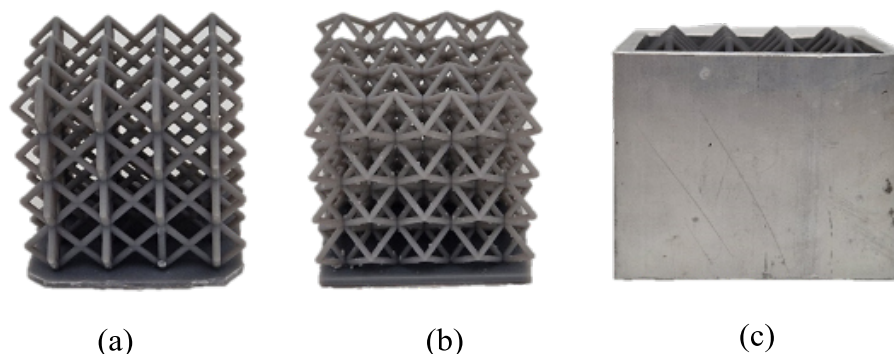


Abb. 3.17: Verwendete Probekörper für die Validierungsversuche (a) freie bcc Struktur, (b) freie f2ccz Struktur (c) eingebettete Struktur.

gedruckt. Tabelle 3.5 fasst die in einer Vorstudie ermittelten Materialeigenschaften für die verschiedenen Druckrichtungen zusammen. Weiterhin zeigt Tabelle 3.6 die Probengeometrien der geprüften Gitterstrukturen. Die Strebendicken (v - vertikale Streben; d - diagonale Streben) der Gitterstrukturen wurden vor den Versuchen mittels optischer Mikroskopie vermessen, da Abweichungen von den Sollwerten, insbesondere zwischen Vertikalen und Diagonalen, durch den Druckprozess zu erwarten sind. Für beide Zelltypen wurde für die Tests eine repräsentative Geometrie ausgewählt, die sich an den Fertigungsgrenzwerten und Randbedingungen der Tests orientierten (z. B., dass die Strukturen in das vorhandene Aluminiumprofil kraftschlüssig gefügt werden können). Für jede Geometrie und jeden Prüfaufbau wurde eine Gesamtzahl von drei Proben mit vier Zellen in jeder Richtung geprüft.

Test	E_{0° [MPa]	E_{60° [MPa]	E_{90° [MPa]	ν_{0° [-]	ν_{60° [-]	ν_{90° [-]
Zugversuch	1500	1620	1650	0,41	0,4	0,39
Druckversuch	2100	2200	1600	-	-	-
3-pkt Biegung	1600	1600	1700	-	-	-

Tabelle 3.5: Materialeigenschaften des für die Untersuchungen verwendeten Formlabs *Standard Grey* Harz nach eigenen Voruntersuchungen in Abhängigkeit der Ausrichtung im Druckraum.

Test	d_{nom} [mm]	d_v [mm]	d_d [mm]	h [mm]
f2cc,z	1,5	1,75	1,72	12,5
bcc	1,5	-	1,55	12,5

Tabelle 3.6: Geometrische Parameter der untersuchten Gitterstrukturen; nom - nominell, v - vertikale Streben, d - Diagonalstreben.

3.4.3 Ergebnisse

Abbildung 3.18 (a) zeigt die Ergebnisse der Tests und Finite Elemente (FE) Simulationen für f2cc,z, und Abbildung 3.18 (b) für bcc. Bei allen Versuchen und Simulationen wurde eine Belastung in 3-Richtung aufgegeben. Sowohl für f2cc,z als auch für bcc zeigen die Versuche ein reproduzierbares Verhalten. Für f2cc,z wurde eine Dehnsteifigkeit von $k_{33,f2ccz,b} \approx 3150$ N/mm für die eingefassten Proben und $k_{33,f2ccz,f} \approx 1950$ N/mm für die nicht eingefassten Proben gemessen, was zu einer Steifigkeitsreduktion von $k_{33,f2ccz,f} \approx 0,619k_{33,f2ccz,b}$ führt. Für bcc wird eine Dehnsteifigkeit $k_{33,bcc,b} \approx 700$ N/mm für die eingefassten und $k_{33,bcc,f} \approx 85$ N/mm für die nicht eingefassten Strukturen gemessen, was zu einer Steifigkeitsreduktion von $k_{33,bcc,f} \approx 0,12k_{33,bcc,b}$ führt. Hinsichtlich der Steifigkeitsabnahme stimmen die experimentellen Versuchsergebnisse sehr gut mit den Simulationen überein. Bei den Simulationen wurden die real gemessenen Strebendurchmesser verwendet, die in Tabelle 3.6 dokumentiert sind. Aus den FE Simulationen ergeben sich Werte von $k_{33,f2ccz,b,FE} \approx 2831$ N/mm, $k_{33,f2ccz,f,FE} \approx 1722$ N/mm, $k_{33,bcc,b,FE} \approx 718$ N/mm und $k_{33,bcc,f,FE} \approx 82$ N/mm, bzw. $k_{33,f2ccz,f} \approx 0,608k_{33,f2ccz,b}$ und $k_{33,bcc,f} \approx 0,114k_{33,bcc,b}$. Für bcc ergibt sich dabei nicht nur eine qualitative Übereinstimmung, sondern auch eine quantitative. Für f2cc,z liegen die Steifigkeiten aus den Simulationsergebnissen etwas unter denen der Experimente. Verglichen mit den empirisch korrigierten analytischen Lösungen aus Kapitel 3.2 und Kapitel 3.3 können ebenfalls sehr gute Übereinstimmungen erreicht werden. Aus dem Test kann für f2cc,z in 3-Richtung ein Einflussfaktor von $f_{exp} \approx 0,619$ ermittelt werden. Mit der empirischen Korrektur beträgt der berechnete Gitterparameter nach Gleichung 3.16 $K = 0,86$, und der empirische Einflussfaktor $f = 0,65$ bei Verwendung der linearen Korrekturfunktion (vgl. Gleichung 3.17) und $f = 0,646$ bei Verwendung der Polynomfunktion (vgl. Gleichung 3.18). Somit weicht das Ergebnis um $<5\%$ vom experimentellen Ergebnis ab. Bei bcc führen die Tests zu einem Einflussfaktor von $f_{exp} \approx 0,12$. Die empirische

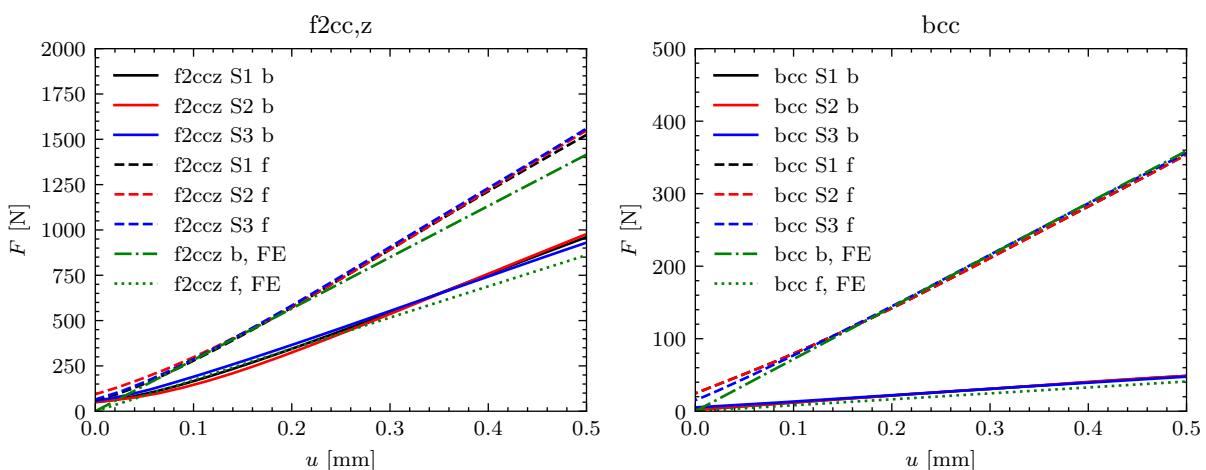


Abb. 3.18: Ergebnisse der Kompressionsversuche und vergleichenden FE-Simulationen: (a) für f2cc,z, (b) für bcc.

Korrektur liefert mit Gitterparameter aus Gleichung 3.16 $K = 0,42$ und damit ein Einflussfaktor von $f = 0,122$ bei Verwendung der linearen Korrekturfunktion (Gleichung 3.17) und $f = 0,118$ bei Verwendung der Polynom-Korrekturfunktion (Gleichung 3.18). Hier weicht das Ergebnis um $<2\%$ ab.

3.5 Diskussion der Ergebnisse

Die Ergebnisse zeigen, dass die entwickelten Lösungen mit den durchgeführten Tests und FE-Simulationen in sehr guter Übereinstimmung sind. Die Ansätze können somit zur Abschätzung der Dehnsteifigkeiten von Gitterstrukturen verwendet werden. Die empirische Studie zeigt weiterhin, dass das Verhalten der untersuchten Gitter skaleninvariant ist und nur von den Verhältnissen der Zellen orthogonal und parallel zur Lastrichtung $n_{i,j}/n_k$ und dem Verhältnis von Strebenradius zu Zellhöhe r/h abhängt. In der Literatur können analytische Ansätze zur Bestimmung der Dehnsteifigkeiten von bcc-Gitterstrukturen gefunden werden. Abbildung 3.19 zeigt einen Vergleich mit diesen Lösungen. In Abbildung 3.19 (a) wurden $5 \times 5 \times 5$ Einheitszellen und in Abbildung 3.19 (b) $5 \times 5 \times 10$ Einheitszellen verwendet. Die entwickelte analytische Lösung in Kombination mit dem empirischen Einflussfaktor, bestimmt aus der Polynomnäherung, stimmt sehr gut mit dem Simulationsergebnis überein. Die gefundenen Literaturlösungen führen hier zu deutlich größeren Abweichungen. Der Vergleich wurde auch für f2cc,z durchgeführt, siehe Abbildung 3.20. Da in der Literatur keine analytischen Lösungen gefunden werden konnten, wurden die Ergebnisse nur mit FE-Studien verglichen. Hierbei können ebenfalls sehr gute Übereinstimmung erreicht werden.

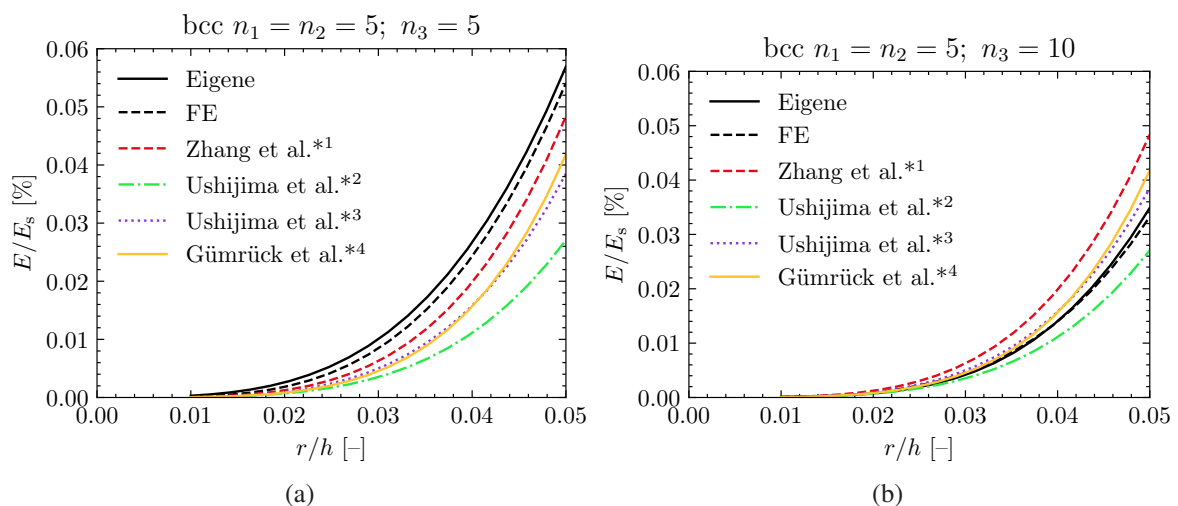


Abb. 3.19: Vergleich der semi-analytischen Lösung mit Lösungen aus der Literatur und der FE Lösung für bcc; $h = b = 10$ mm; (a) $n_{1,2} = 5, n_3 = 5$; (b) $n_{1,2} = 5, n_3 = 10$; *1[43], *2[40], *3[45], *4[41].

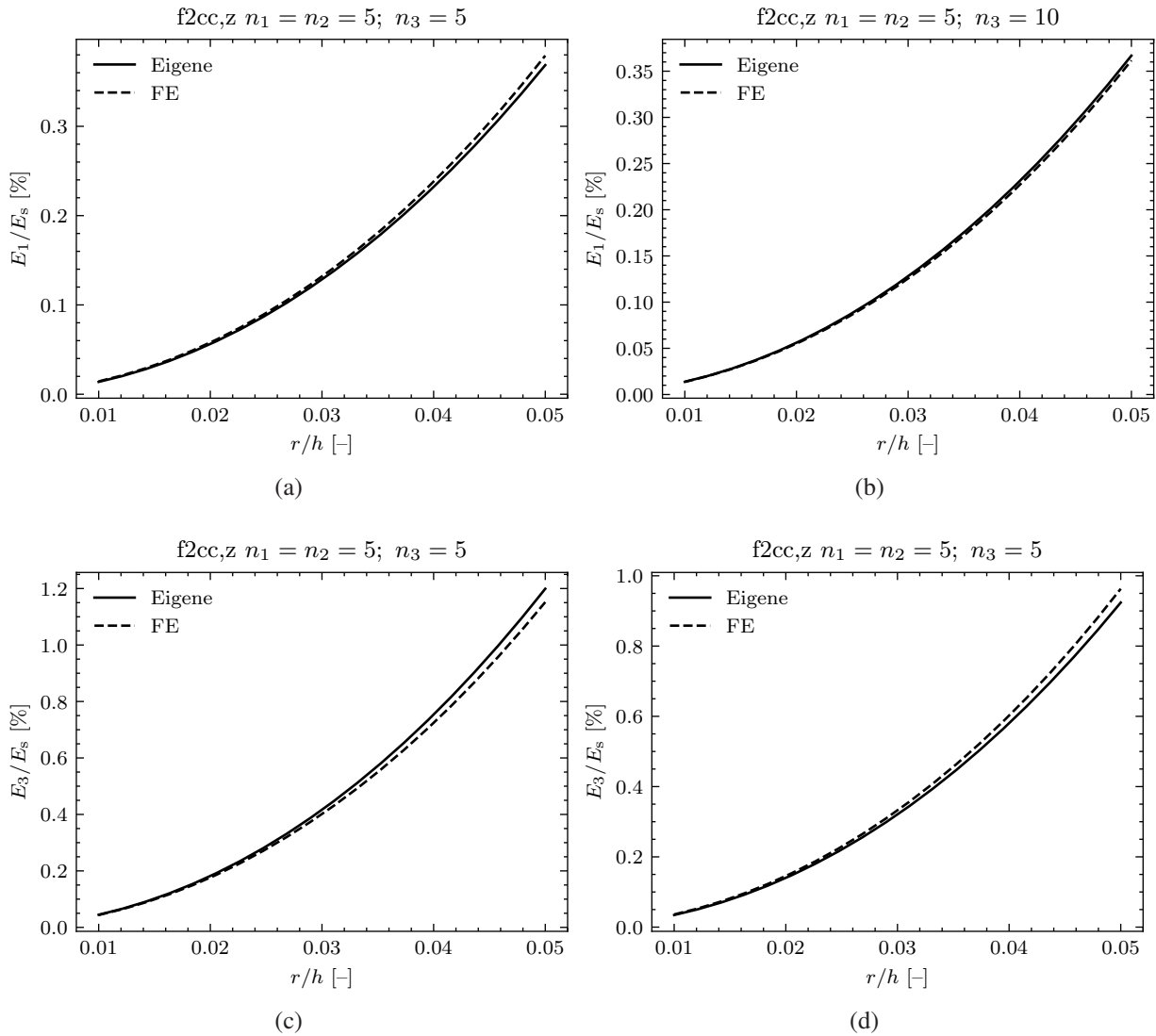


Abb. 3.20: Vergleich der semi-analytischen Lösung mit der FE Lösung; $h = b = 10$ mm; (a) 1-Richtung $n_{1,2} = 5$, $n_3 = 5$; (b) 1-Richtung $n_{1,2} = 5$, $n_3 = 10$; (c) 3-Richtung $n_{1,2} = 5$, $n_3 = 5$; (d) 3-Richtung $n_{1,2} = 5$, $n_3 = 10$.

4 Effektive Schub- und Biegesteifigkeiten von Gitterstrukturen

Gemäß Kapitel 2.1.3 ist die Berücksichtigung der Schubweichheit auf Strebenebene (Mesostrukturebene) bei Gitterstrukturen in gängigen Parameterbereichen vernachlässigbar. Auf Makrostrukturebene hingegen, zeigen gewisse Zelltypen ein schubweiches Verhalten, sodass die Strukturantworten ohne Berücksichtigung dieser nicht korrekt abgebildet werden. Auch bei der Bestimmung von Stabilitätslasten ist die Berücksichtigung der Schubweichheit der Makrostruktur von Bedeutung. Im Sinne einer homogenisierten Werkstoffbeschreibung ist es weiterhin unabdinglich, die effektiven Schubsteifigkeiten der Struktur zu beschreiben. Weiterhi wird in diesem Kapitel die Bestimmung effektiver Biegesteifigkeiten betrachtet. Es folgt zunächst die Erläuterung der Methode anhand eines zweidimensionalen Beispiels. Daraufhin werden anhand dieser Methode für die bcc und f2cc,z Zelle, bzw. aus diesen aufgebaute Gitterstrukturen, die resultierenden effektiven Schub- und Biegesteifigkeiten bestimmt.

4.1 Ansatz zur Bestimmung effektiver Schub- und Biegesteifigkeiten

Um eine Gitterstruktur als homogenisierten Werkstoff, in der Literatur oft auch Metamaterial genannt, betrachten zu können, werden oft Reduktionen gewisser Eigenschaften vorgenommen. Anschließend kann die Gitterstruktur als Kontinuum betrachtet werden und wird durch

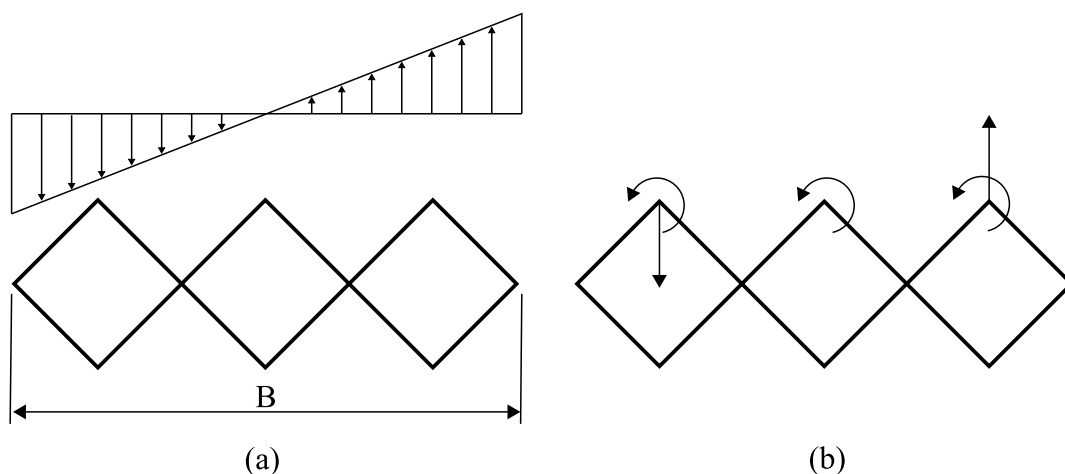


Abb. 4.1: Lastannahmen zur Bestimmung der effektiven Biegesteifigkeit: a) Über die Verwendung eines reduzierten E-Moduls, (b) über Verwendung einer reduzierten Fläche.

ihre homogenisierten Eigenschaften beschrieben. Betrachtet man etwa die in Abbildung 4.1 gezeigte zweidimensionale Gitterstruktur, kann eine effektive Biegesteifigkeit durch $(EJ)_{\text{red}} = E_{\text{red}}B^3/12$, also durch einen reduzierten Elastizitätsmodul, definiert werden. Dieses Vorgehen führt allerdings zu zwei entscheidenden Nachteilen: Es vernachlässigt zum einen die Biegesteifigkeit der Zelle und berücksichtigt zum anderen nicht die im Gitter vorherrschenden lokalen Randbedingungen, welche zu Randeffekten führen, die insbesondere bei Gittern mit wenig Zellen pro Breite überproportional Einfluss auf die Steifigkeiten nehmen (siehe auch Kapitel 3). Problematisch ist, dass hierbei eine über den Querschnitt kontinuierlich wirkende Spannungsverteilung angenommen wird. Tatsächlich werden aber nur an diskreten Punkten, und zwar an den Knoten, Kräfte übertragen. Dies führt speziell bei Strukturen mit wenigen Zellen in lateraler Richtung zu ungenauen Ergebnissen (siehe Abbildung 4.1 (a)). Deshalb beruht die entwickelte Methode auf dem in Abbildung 4.1 (b) gezeigten Ansatz. Es wird kein reduzierter E-Modul bestimmt, sondern ein Ersatzstab gebildet, welcher auf einer Reduktion der Fläche und des Flächenträgheitsmoments beruht. Der E-Modul bleibt konstant und entspricht dem E-Modul des Grundwerkstoffs. Die reduzierten Größen entsprechen folglich einem Stab, der dieselbe Verformung aufweist. Die effektive Biegesteifigkeit der Gitterstruktur ergibt sich dann aus Summe der Zellsteifigkeiten und dem aus der reduzierten Fläche gebildeten Steineranteil. Hieraus folgt sofort ein Zusammenhang für die Bestimmung einer effektiven Biegesteifigkeit von zweidimensionalen Strukturen:

$$\begin{aligned} \text{Wenn } n \text{ gerade : } EJ_{\text{red}} &= E \left[nJ_{\text{red}} + 2b^2A_{\text{red}} \sum_{i=0}^{n/2-1} (i + 1/2)^2 \right] \\ \text{Wenn } n \text{ ungerade : } EJ_{\text{red}} &= E \left[nJ_{\text{red}} + 2b^2A_{\text{red}} \sum_{i=0}^{n-1/2-1} (i + 1)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

Hierbei bezeichnet J_{red} die Biegesteifigkeit einer einzelnen Zelle, n die Anzahl an Zellen, b die Breite einer Zelle und A_{red} die reduzierte Fläche einer Zelle. Es muss weiterhin unterschieden werden, ob eine gerade oder ungerade Anzahl Zellen vorhanden ist. Gleichungen 4.1 können allerdings weiter vereinfacht werden, sodass eine allgemeine Form resultiert, die beide Fälle berücksichtigt:

$$EJ_{\text{red}} = E \left[nJ_{\text{red}} + b^2A_{\text{red}} \frac{n^3 - n}{12} \right] \quad (4.2)$$

Gleichung 4.2 wird beispielsweise auch von Bazant [58] zur Berechnung reduzierter Biegesteifigkeiten von sogenannten *simple-cubic* Zellen angegeben. Es verbleibt die Bestimmung der reduzierten Größen A_{red} und J_{red} . Sie können bestimmt werden, indem für die reduzierte Fläche eine äquivalente Kraft P oder für das reduzierte Flächenträgheitsmoment ein äquivalentes Moment M aufgegeben wird (siehe Abbildung 4.2). Die Reaktion der Zelle wird dann auf die Reaktion eines Balkens bezogen und so die reduzierte Größe berechnet:

$$A_{\text{red}} = \frac{P h}{E u} \quad (4.3)$$

$$J_{\text{red}} = \frac{M h}{E 2\varphi} \quad (4.4)$$

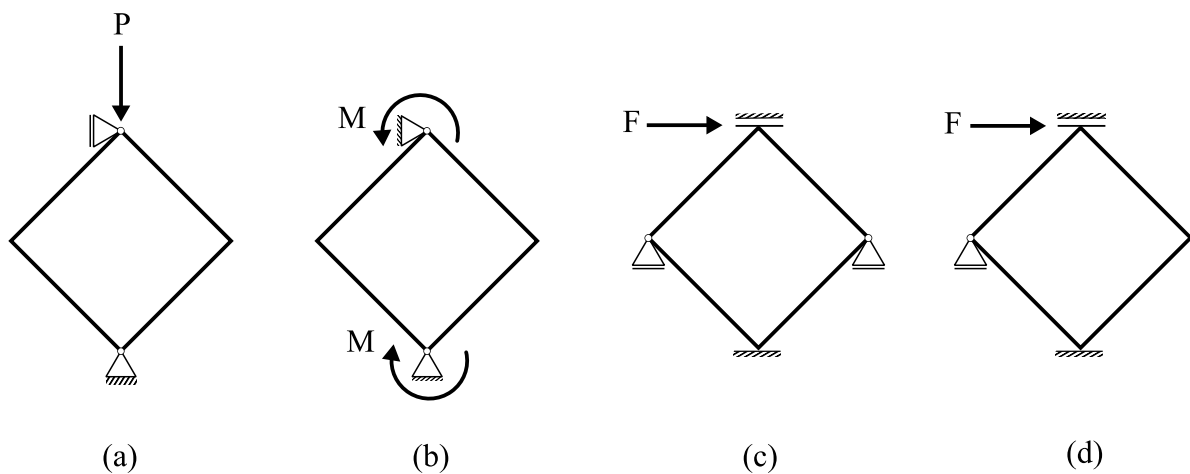


Abb. 4.2: Belastungen zur Bestimmung reduzierter Größen: (a) Drucklast zur Bestimmung der reduzierten Fläche, (b) Biegung zur Bestimmung des reduzierten Flächenträgheitsmoments, (c) Schubkraft zur Bestimmung der reduzierten Schubsteifigkeit einer mittleren Zelle, (d) Schubkraft zur Bestimmung der reduzierten Schubsteifigkeit einer Randzelle.

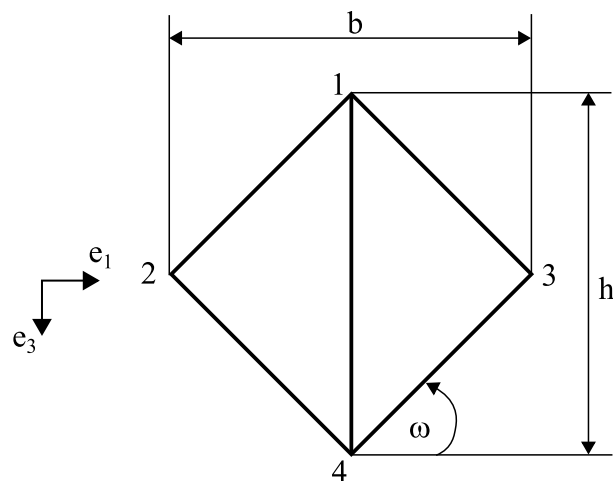


Abb. 4.3: Verwendete 2D f2cc,z Zelle zur Herleitung der reduzierten Ausdrücke.

Dabei sind u und φ die resultierende Verschiebung und Verdrehung. Die Verschiebungen und Verdrehungen können über die Steifigkeitsmatrix des Systems, bzw. der Zelle bestimmt werden. Dies ist nachfolgend für die zweidimensionale Form der f2cc,z Zelle in 3-Richtung gezeigt. Die Zelle besteht aus einer vertikalen Strebe mit Länge l_v und zugehöriger Steifigkeitsmatrix k_v , sowie vier diagonalen Streben der Länge l_d und Steifigkeitsmatrix k_d . Die relativen Lagen der Streben können, wie in Abbildung 4.3 dargestellt, über den Winkel ω beschrieben werden. Die Steifigkeitsmatrix der Zelle wird gemäß dem Vorgehen in Kapitel 2.2.1 und Kapitel 3.1 bestimmt. Durch Einsetzen entsprechender Randbedingungen gemäß Abbildung 4.2 können schließlich die resultierenden Gleichungssysteme gelöst und die Reaktionen bestimmt werden.

Wird die Zelle in vertikaler Richtung belastet, ergibt sich nach Gleichung 4.3, dass $P = F_3^1$ und $u = u_3^1$ und daraus die reduzierte Fläche:

$$A_{\text{red}} = \frac{\pi r^2 \left[1 - \sin^2(\omega) + 12 \frac{r^2}{h^2} (2 \sin^3(\omega) + \sin^4(\omega)) \right]}{1 - \sin^2(\omega) + 12 \frac{r^2}{h^2} \sin^4(\omega)} \quad (4.5)$$

Zur Ermittlung des reduzierten Flächenträgheitsmoments wird ein äquivalentes Vorgehen angewendet. Hierzu wird die Zelle, wie in Abbildung 4.2 dargestellt, durch ein Moment belastet. Lösen des resultierenden Gleichungssystems und Einsetzen in Gleichung 4.4 führt zum reduzierten Flächenträgheitsmoment der dargestellten 2D-Beispielstruktur:

$$J_{\text{red}} = \frac{\pi r^4 \left[1 + 8 \sin(\omega) - \sin^2(\omega) - 8 \sin^3(\omega) + 12 \frac{r^2}{h^2} (\sin^4(\omega) + 2 \sin^5(\omega)) \right]}{4 \left(1 - \sin^2(\omega) + 12 \frac{r^2}{h^2} \sin^4(\omega) \right)} \quad (4.6)$$

Es folgt mit Gleichung 4.2 ein Ausdruck für die Biegesteifigkeit der dargestellten 2D f2cc,z Struktur in Abhängigkeit der Zellanzahl n . Auf analogem Weg kann ein Ausdruck für eine reduzierte Schubsteifigkeit hergeleitet werden. Hierzu wird am genannten 2D-Beispiel die Schubreaktion einer Zellreihe bestimmt. Es werden dabei Randzellen $(AG)_{\text{red,r}}$ und Zellen, die zwischen diesen Randzellen liegen, also mittlere Zellen $(AG)_{\text{red,m}}$, unterschieden, um den Einfluss der unterschiedlichen Randbedingungen zu berücksichtigen. Die Zellen werden wie in Abbildung 4.2 (c) und Abbildung 4.2 (d) dargestellt belastet:

$$(AG)_{\text{red,m}} = \pi E r^2 \left[2 \sin(\omega) - 2 \sin^3(\omega) + 6 \frac{r^2}{h^2} \sin^5(\omega) + 3 \frac{r^2}{h^2} \right] \quad (4.7)$$

$$(AG)_{\text{red,r}} = \frac{\pi E r^2 \left[3 \frac{r^2}{h^2} (1 - 3 \frac{r^2}{h^2}) + \sin(\omega) (1 - \sin(\omega)^2 + 3 \frac{r^2}{h^2} \sin(\omega) (2 - 2 \sin(\omega)^2 + 2 \sin(\omega)^4 - 3 \frac{r^2}{h^2} (1 - \sin(\omega)^3 + \sin(\omega)^5))) \right]}{1 + 3 \frac{r^2}{h^2} (1 - \sin(\omega)^2)} \quad (4.8)$$

Die Schubsteifigkeit der 2D-Gitterstruktur ergibt sich dann allgemein aus der Summe der Einzelsteifigkeiten von zwei Randzellen und in Abhängigkeit der Zellanzahl in Lastrichtung n_i der mittleren Zellen:

$$(AG)_{ij} = 2 (AG)_{\text{red,r}} + (n_i - 2) (AG)_{\text{red,m}} \quad (4.9)$$

4.2 Schubsteifigkeiten von Gitterstrukturen

Es folgt die Ermittlung der effektiven Schubsteifigkeiten von dreidimensionalen Gitterstrukturen auf Grundlage der in Kapitel 4.1 dargestellten Ansätze. Es werden exemplarisch die Ergebnisse für die kubisch raumzentrierte Zelle (bcc) und die kubisch flächenzentrierte Zelle mit Vertikalstreben (f2cc,z), sowie ihrer durch eine Änderung des Zellwinkels adaptierten Formen dargestellt. Wiederum muss bei der Bestimmung der Schubsteifigkeit zwischen mittleren Zellen und Randzellen unterschieden werden, um den Einfluss der verschiedenen Randbedingungen zu erfassen. Die Schubsteifigkeit des Gitters ergibt sich dann aus der Summe der Schubsteifigkeiten der Einzelzellen. Die Indizierung erfolgt nach dem Ursache-Wirkungsprinzip, folglich beschreibt der erste Index die Richtung der Last, der zweite Index die Richtung des zugehörigen Normalenvektors der Wirkfläche. Es wird zudem angenommen, dass eine blockierte Querkontraktion an den Enden der Struktur (eingespannte Enden) keinen Einfluss auf die Schubsteifigkeit hat. Allgemein resultieren dann insgesamt sechs Schubsteifigkeiten:

$$(AG)_{12} = n_3 [2 (AG)_{12,r} + (n_1 - 2) (AG)_{12,m}] \quad (4.10)$$

$$(AG)_{21} = n_3 [2 (AG)_{21,r} + (n_2 - 2) (AG)_{21,m}] \quad (4.11)$$

$$(AG)_{13} = n_2 [2 (AG)_{13,r} + (n_1 - 2) (AG)_{13,m}] \quad (4.12)$$

$$(AG)_{31} = n_2 [2 (AG)_{31,r} + (n_3 - 2) (AG)_{31,m}] \quad (4.13)$$

$$(AG)_{23} = n_1 [2 (AG)_{23,r} + (n_2 - 2) (AG)_{23,m}] \quad (4.14)$$

$$(AG)_{32} = n_1 [2 (AG)_{32,r} + (n_3 - 2) (AG)_{32,m}] \quad (4.15)$$

Die Steifigkeitsmatrizen für bcc und f2cc,z werden gemäß der in Kapitel 2.2.1 und Kapitel 3.1 dargestellten Methoden ermittelt. Durch Einsetzen der entsprechenden Randbedingungen können dann die Reaktionslasten für die mittleren Zellen und für die Randzellen ermittelt werden. Die reduzierte Schubsteifigkeit der Zelle ergibt sich aus der Division der Reaktionslasten mit der entsprechenden orthogonal zur Lastrichtung vorhandenen Höhe der Zellreihe.

Grundsätzlich ergeben sich durch Symmetrie für die exemplarisch gewählten Gitterzellen je drei unabhängige Schubsteifigkeiten: $(AG)_{13} = (AG)_{23}$, $(AG)_{12} = (AG)_{21}$ und $(AG)_{31} = (AG)_{32}$, die sich mit den Gleichungen 4.10 - 4.15 bestimmen lassen. Die gewählten Randbedingungen können den Tabellen 4.1 und 4.2 entnommen werden. Die zugehörigen Knotendefinitionen sind in Abbildung 3.7 abgebildet. Nachfolgend dargestellt sind exemplarisch die Lösungen der bcc und der f2cc,z Zelle für die reduzierten Schubsteifigkeiten der Randzellen und der mittleren Zellen bei Last in 1-Richtung/2-Richtung, mit Normalenvektor in 3-Richtung, also $(AG)_{13} = (AG)_{23}$. Die restlichen Lösungen sind in Anhang A.1 gegeben.

Tabelle 4.1: Randbedingungen zur Ermittlung der reduzierten Schubsteifigkeiten von bcc Zellen.

Knoten	$(AG)_{r,13} = (AG)_{r,23}$	$(AG)_{r,31} = (AG)_{r,32}$	$(AG)_{r,12} = (AG)_{r,21}$
1	$(0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, u_3, 0, 0, \varphi_3)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
2	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, \varphi_3)^T$	$(u_1, u_2, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
3	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
4	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$	$(1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
5	$(0, u_2, u_3, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
6	$(0, u_2, u_3, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
Knoten	$(AG)_{m,13} = (AG)_{m,23}$	$(AG)_{m,31} = (AG)_{m,32}$	$(AG)_{m,12} = (AG)_{m,21}$
1	$(0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, \varphi_3)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
2	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, \varphi_3)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
3	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
4	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$	$(1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
5	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
6	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$

Tabelle 4.2: Randbedingungen zur Ermittlung der reduzierten Schubsteifigkeiten von f2cc,z Zellen.

Knoten	$(AG)_{r,13} = (AG)_{r,23}$	$(AG)_{r,31} = (AG)_{r,32}$	$(AG)_{r,12} = (AG)_{r,21}$
1	$(0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, u_2, u_3, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
2	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
3	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(u_1, u_2, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
4	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
5	$(0, u_2, u_3, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
6	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$	$(1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
Knoten	$(AG)_{m,13} = (AG)_{m,23}$	$(AG)_{m,31} = (AG)_{m,32}$	$(AG)_{m,12} = (AG)_{m,21}$
1	$(0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
2	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
3	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
4	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
5	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
6	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$	$(1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$

Für die **Randzellen** ergibt sich der Anteil an den Schubsteifigkeiten $(AG)_{13} = (AG)_{23}$:

$$(AG)_{r,bcc,13} = (AG)_{r,bcc,23} = \frac{A}{B} \quad (4.16)$$

$$A = E \pi r^2 \sin(\omega) (2h^4 \sin(\omega)^2 - 3h^4 \sin(\omega)^4 + 72r^4 \sin(\omega)^2 - 63r^4 \sin(\omega)^4 + 18r^4 \sin(\omega)^6 - 27r^4 \sin(\omega)^8 + h^4 + 6h^2 r^2 + 36h^2 r^2 \sin(\omega)^2 - 12h^2 r^2 \sin(\omega)^4 + 18h^2 r^2 \sin(\omega)^6 + 4h^4 v \sin(\omega)^2 - 4h^4 v \sin(\omega)^4 + 72v r^4 \sin(\omega)^4 - 36v r^4 \sin(\omega)^6 - 36v r^4 \sin(\omega)^8 + 24h^2 v r^2 \sin(\omega)^2 + 24h^2 v r^2 \sin(\omega)^6)$$

$$B = h^2 (4v \sin(\omega)^2 + 3 \sin(\omega)^2 + 1) (h^2 - 3r^2 \sin(\omega)^2 + 3r^2)$$

$$(AG)_{r,f2ccz,13} = (AG)_{r,f2ccz,23} = \frac{A}{B} \quad (4.17)$$

$$A = -E \pi r^2 (9h^2 r^2 (4v \sin(\omega)^9 + \sin(\omega)^7 + 3 \sin(\omega)^9) - \cos(\omega)^6 (4v \tan(\omega)^2 + 4 \tan(\omega)^2 + 1) (2h^2 \sin(\omega)^3 (h^2 \tan(\omega)^2 + 3r^2 \sin(\omega)^2) + 3r^2 \tan(\omega)^2 (h^2 \tan(\omega)^2 + 3r^2 \sin(\omega)^2) (5 \sin(\omega)^5 + 8 \sin(\omega)^3 + 1)) + 72r^2 \sin(\omega)^9 (h^2 + 3r^2 \cos(\omega)^2) (v + 1)) - \sin(\omega)^3 \tan(\omega)^2 (h^4 - 15h^2 r^2 \sin(\omega)^2 + 36r^4 \sin(\omega)^4)$$

$$B = h^2 \cos(\omega)^4 \sin(\omega)^2 (h^2 \tan(\omega)^2 + 3r^2 \sin(\omega)^2) (4v \tan(\omega)^2 + 4 \tan(\omega)^2 + 1)$$

Für die **mittleren Zellen** ergibt sich der Anteil an den Schubsteifigkeiten $(AG)_{13} = (AG)_{23}$:

$$(AG)_{m,bcc,13} = (AG)_{m,bcc,23} = \frac{A}{B} \quad (4.18)$$

$$A = 2E \pi r^2 \sin(\omega) (10h^2 \sin(\omega)^2 - 15h^2 \sin(\omega)^4 + 60r^2 \sin(\omega)^2 - 156r^2 \sin(\omega)^4 + 720r^2 \sin(\omega)^6 + 4h^2 v + 5h^2 + 12h^2 v \sin(\omega)^2 - 16h^2 v \sin(\omega)^4 + 48v r^2 \sin(\omega)^2 - 192v r^2 \sin(\omega)^4 + 768v r^2 \sin(\omega)^6)$$

$$B = h^2 (4v + 16v \sin(\omega)^2 + 15 \sin(\omega)^2 + 5)$$

$$(AG)_{m,f2ccz,13} = (AG)_{m,f2ccz,23} = \frac{A}{B} \quad (4.19)$$

$$A = E \pi r^2 (h^2 \sin(\omega)^3 (8v \tan(\omega)^2 + 8 \tan(\omega)^2 + 2) + 3r^2 \tan(\omega)^2 (4v \tan(\omega)^2 + 4 \tan(\omega)^2 + 1) (2 \sin(\omega)^5 + 8 \sin(\omega)^3 + 1) - r^2 \sin(\omega)^3 \tan(\omega)^4 (72v + 72))$$

$$B = h^2 \tan(\omega)^2 (4v \tan(\omega)^2 + 4 \tan(\omega)^2 + 1)$$

Es folgen die effektiven Schubsteifigkeiten gemäß Gleichungen 4.10 - 4.15. Die Ausdrücke können durch Bezug auf die jeweiligen Flächen so umgeformt werden, dass zellanzahlunabhängige effektive Schubmodule ermittelt werden können. Hierzu werden die jeweiligen effektiven

Schubsteifigkeiten durch ihre Wirkflächen geteilt. Es folgen sechs Ausdrücke für die Schubmodule:

$$G_{12} = \frac{(AG)_{12}}{n_1 n_3 b h} \quad (4.20)$$

$$G_{21} = \frac{(AG)_{21}}{n_2 n_3 b h} \quad (4.21)$$

$$G_{13} = \frac{(AG)_{13}}{n_1 n_2 b b} \quad (4.22)$$

$$G_{23} = \frac{(AG)_{23}}{n_1 n_2 b b} \quad (4.23)$$

$$G_{31} = \frac{(AG)_{13}}{n_3 n_2 h b} \quad (4.24)$$

$$G_{32} = \frac{(AG)_{23}}{n_3 n_1 h b} \quad (4.25)$$

Vergleich der mechanischen Eigenschaften

Auf Grundlage der zuvor dargestellten analytischen Zusammenhänge, werden nachfolgend die resultierenden mechanischen Eigenschaften der bcc und f2cc,z Zellen in Abhängigkeit verschiedener Parameter miteinander verglichen. Abbildungen 4.4 zeigt den Einfluss der relativen Dichte auf die effektive Schubsteifigkeit, bzw. auf die durch das Schubmodul des Grundwerkstoffs normierten effektiven Schubmodule, bei verschiedenen Aspektverhältnissen der Zelle. Die entsprechenden Strebenwinkel können aus $\omega_{\text{bcc}} = \arctan(h/(\sqrt{2}b))$ und $\omega_{\text{f2ccz}} = \arctan(h/b)$ berechnet werden. Es besteht sowohl für f2cc,z als auch für bcc im Bereich von $\bar{\rho} = 0 - 20\%$ ein nahezu linearer Zusammenhang zwischen der relativen Dichte und den Steifigkeiten. Allerdings deutet sich eine exponentielle Abhängigkeit bereits an. Die dargestellten Verläufe zeigen, dass bei steigendem Zellaspektverhältnis b/h , also mit sinkendem Winkel ω , die Schubmodule G_{13} und G_{31} sowohl für bcc als auch für f2cc,z zunächst zunehmen und ab einem Aspektverhältnis von $b/h = 1$ wieder abnehmen. G_{12} hingegen nimmt kontinuierlich zu. Dies erscheint logisch, da der Normalkraftanteil in den Streben bei einem Verhältnis $b/h = 1$ für G_{13} und G_{31} maximal ist und für G_{12} mit steigendem b/h immer größer wird. Grundsätzlich kann angemerkt werden, dass die gewichtsspezifische Schubsteifigkeit bei bcc in allen Belastungsrichtungen und für alle Parameterkombinationen größer als bei f2cc,z ist. Es zeigt sich weiterhin, dass f2cc,z insbesondere bei G_{12} bzw. G_{21} sehr geringe Schubsteifigkeiten aufweist. Hier scheint die Vertikalstrebe einen entsprechenden Kraftabtrag zu behindern. Allerdings zeigt sich, dass die f2cc,z Zelle bei entsprechender Belastung mit G_{13} oder G_{31} deutlich weniger sensibel auf eine Änderung des Zellaspektverhältnisses reagiert, wohingegen bcc bei hohem b/h nur noch eine sehr geringe Schubsteifigkeit aufweist.

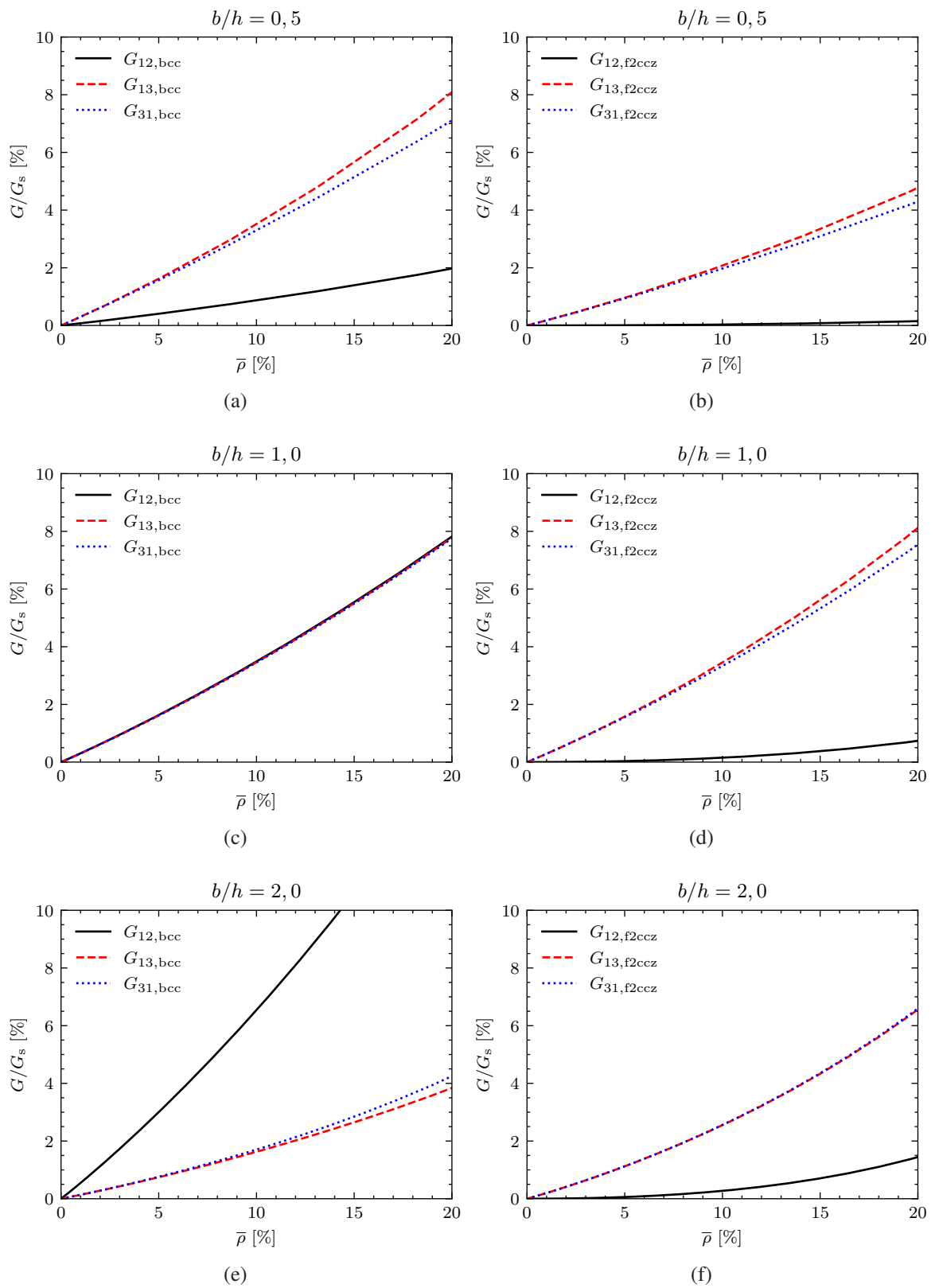


Abb. 4.4: Vergleich der resultierenden Schubsteifigkeiten von bcc und f2cc,z in Abhängigkeit der relativen Dichte und unterschiedlichen Aspektverhältnissen (Strebenwinkel) b/h bei $h = 10$ mm.

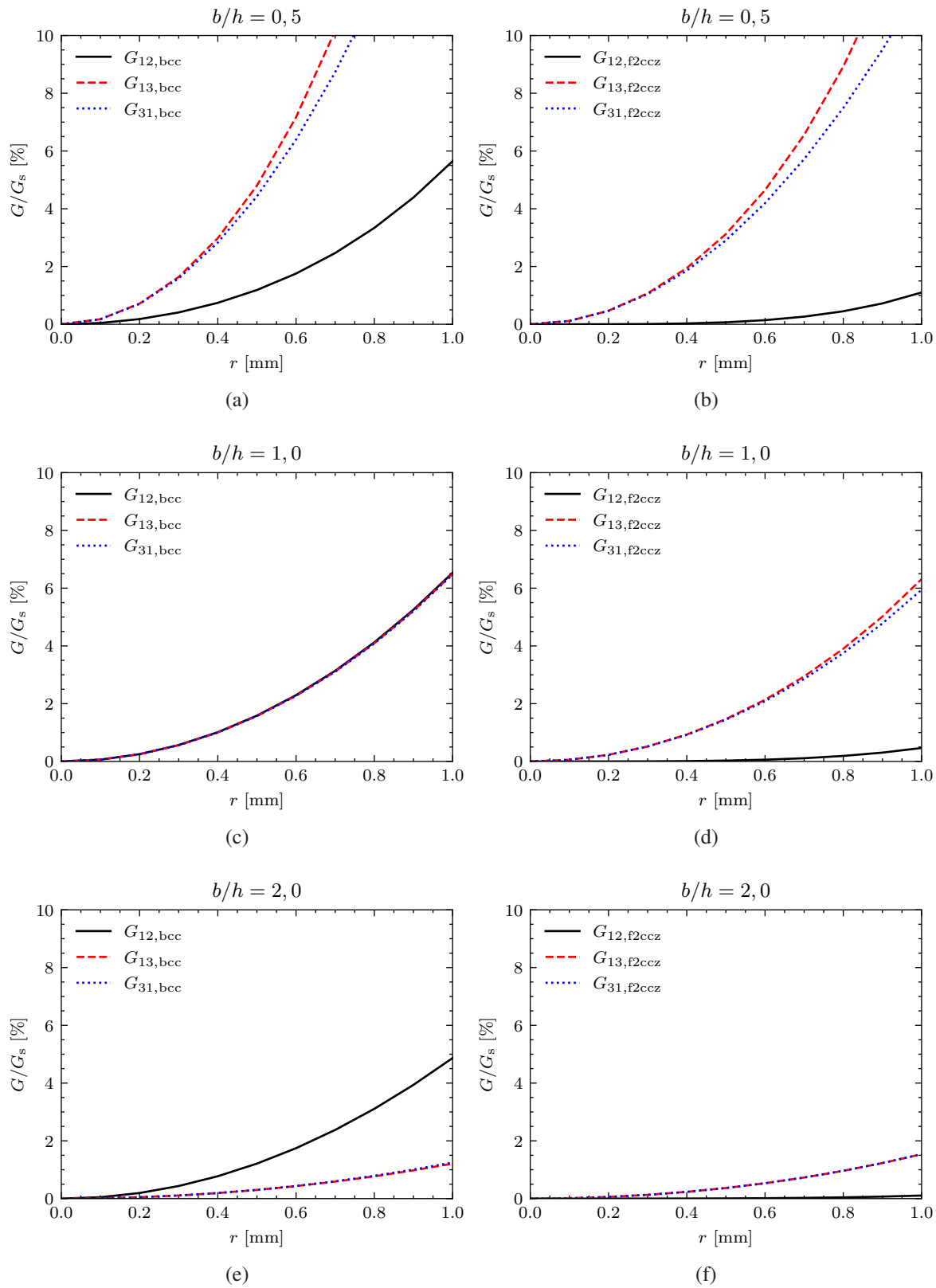


Abb. 4.5: Vergleich der resultierenden Schubsteifigkeiten von bcc und f2cc,z in Abhängigkeit der Strebendicke und unterschiedlichen Aspektverhältnissen (Strebenwinkel) b/h bei $h = 10$ mm.

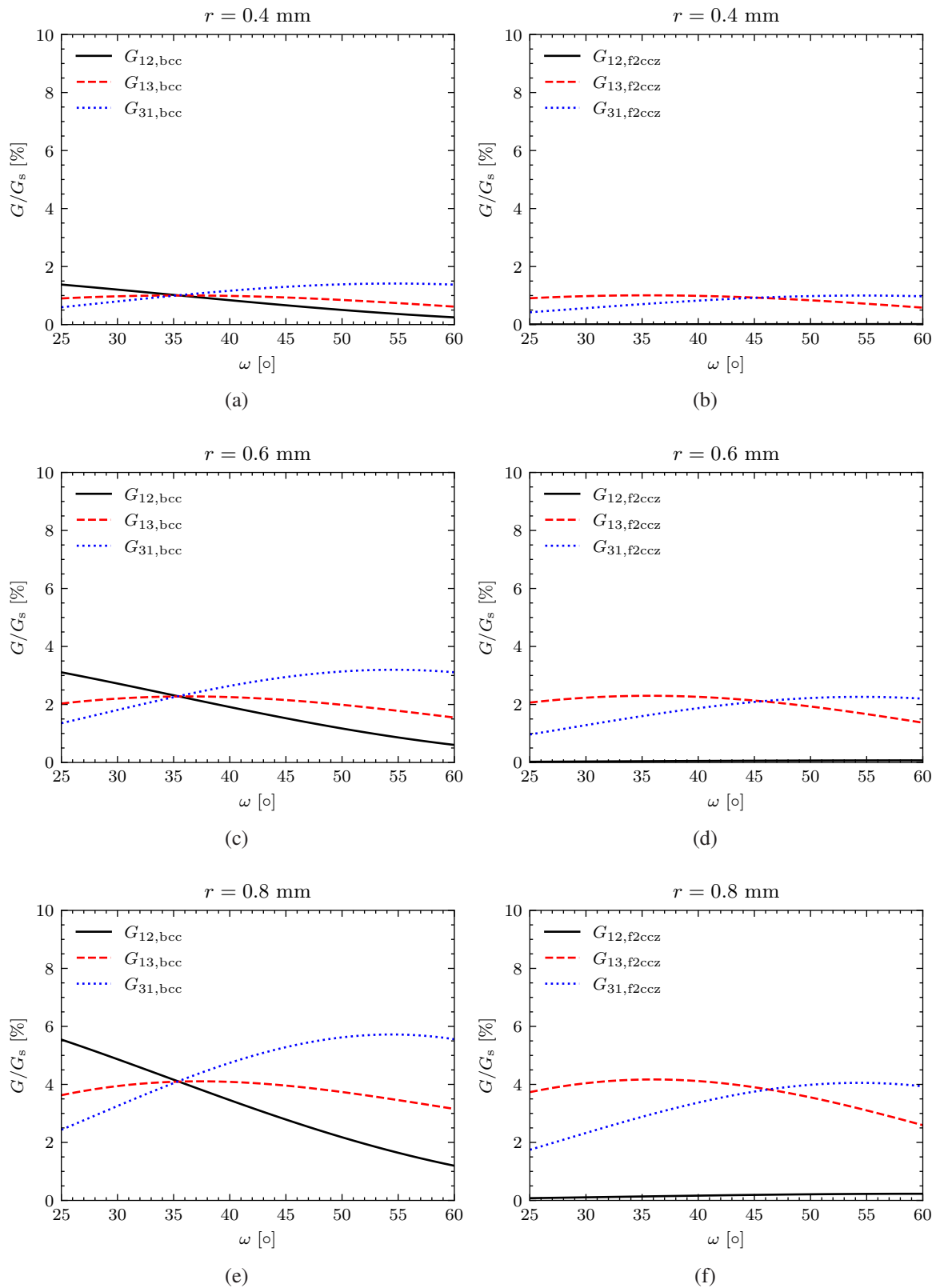


Abb. 4.6: Vergleich der resultierenden Schubsteifigkeiten von bcc und f2cc,z in Abhängigkeit des Strebenwinkels für unterschiedliche Strebenradien r bei konstanter Zellhöhe $h = 10$ mm.

Abbildung 4.5 zeigt zudem den Einfluss des Strebenradius auf die normierten Schubmodule von bcc und f2cc,z Gitterstrukturen für verschiedene Aspektverhältnisse b/h . Es ist ein stark nichtlinearer Zusammenhang zwischen dem Strebenradius und den resultierenden Schubmodulen erkennbar. Dies geht auch aus den Gleichungen hervor, da der Radius grundsätzlich einen quadratischen Einfluss auf die Schubsteifigkeiten hat. Qualitativ sind die Ergebnisse äquivalent zur Auswertung bezüglich der relativen Dichte zu sehen.

Abbildung 4.6 zeigt zudem die Beziehung zwischen dem Strebenwinkel ω und den resultierenden Schubsteifigkeiten für verschiedene Strebendicken. Die Variation der Winkel ist gleichbedeutend mit der Variation des Zellseitenverhältnisses. Es ist kein qualitativer Einfluss des Strebenradius für unterschiedliche Winkel der Diagonalstreben erkennbar, wohl aber ein quantitativer. Mit höheren Strebenradien steigen die Steifigkeiten. Grundsätzlich lässt auch diese Darstellung ähnliche Schlussfolgerungen zu, die auch zuvor getroffen wurden. Der Schubmodul G_{12} bleibt bei f2cc,z sehr gering und steigt leicht mit zunehmendem Winkel. Für bcc sinkt G_{12} mit steigendem Winkel. Die Abhängigkeit der Schubmodule G_{13} und G_{31} vom Winkel ist etwas komplexer. G_{13} erreicht sowohl für bcc als auch für f2cc,z bereits vor dem Punkt, an dem die Zelle kubisch wird ($\omega_{\text{kubisch}} = 35,26^\circ$ für bcc und $\omega_{\text{kubisch}} = 45^\circ$ für f2cc,z) ein Maximum, wohingegen dies für G_{31} erst nach diesem Punkt der Fall ist. Grundsätzlich kann angemerkt werden, dass G_{13} und G_{31} im kubischen Fall für beide Zellen den gleichen Wert annehmen. Für bcc nimmt zudem auch G_{12} diesen Wert an, was noch einmal auf die Isotropie im kubischen Fall hindeutet.

4.3 Biegesteifigkeiten von Gitterstrukturen

Auf Grundlage der zuvor bestimmten Ansätze für zweidimensionale Gitterstrukturen werden nachfolgend am Beispiel von bcc und f2cc,z Gitterstrukturen entsprechende Ausdrücke für dreidimensionale Strukturen ermittelt. Die Bestimmung der Biegesteifigkeit erfolgt analog zum zweidimensionalen Fall durch Gleichung 4.2, erweitert um die Zellanzahl um die Biegeachse:

$$(EJ)_{ij} = E \left[n_k J_{\text{red}} + B^2 A_{\text{red}} \frac{n_k^3 - n_k}{12} \right] n_i \quad (4.26)$$

Der in Gleichung 4.26 dargestellte Ausdruck kann allgemein zur Berechnung der Biegesteifigkeit bei Biegung um eine beliebige Achse i herangezogen werden. Der Index j bezeichnet die Normalenrichtung der Querschnittsfläche und folglich der Index k jene im Querschnitt liegende Richtung, die orthogonal zur Biegeachse orientiert ist. Weiterhin bezeichnet B die Zellbreite im Querschnitt in Richtung der k -Achse. Die Ermittlung des Reaktionsmoments der Struktur kann über Gleichung 4.4 erfolgen. Zur Berechnung der Biegesteifigkeit sind folglich noch die reduzierte Fläche A_{red} sowie das reduzierte Flächenträgheitsmoment J_{red} der Zellen zu ermitteln. Für die reduzierten Flächen ergeben sich für die bcc Zelle und die f2cc,z Zelle je zwei winkelabhängige Ausdrücke, eine für die vertikale Zellausrichtung (3-Richtung) und einer für die

Tabelle 4.3: Verwendete Randbedingungen zur Bestimmung der reduzierten Flächen für bcc und f2cc,z.

Knoten	bcc		f2cc,z	
	$A_{\text{red},12}$	$A_{\text{red},3}$	$A_{\text{red},12}$	$A_{\text{red},3}$
1	$(u_1, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$
2	$(u_1, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
3	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$
4	$(1, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$
5	$(1, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$	$0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$
6	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$	$0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$

horizontale Zellausrichtung (1/2-Richtung). Hierbei sei noch einmal auf die Winkeldefinition in Abbildung 3.1 verwiesen. Zur Bestimmung der reduzierten Flächen werden die in Tabelle 4.3 angegebenen Randbedingungen verwendet. Nachfolgend abgebildet sind exemplarisch die sich ergebenden reduzierten Flächen für die bcc Zelle. Die reduzierten Flächen der f2cc,z Zelle können Anhang A.1 entnommen werden.

$$A_{\text{red},\text{bcc},1/2} = \frac{48 \sqrt{2} \pi r^4 \sin^3(\omega)}{h^2 \left[1 + \sin^2(\omega) + 12 \frac{r^2}{h^2} (\sin^2(\omega) - \sin^4(\omega)) \right] \tan(\omega)} \quad (4.27)$$

$$A_{\text{red},\text{bcc},3} = \frac{48 \pi r^4 \sin(\omega)^3}{h^2 \left[1 - \sin(\omega)^2 + 12 \frac{r^2}{h^2} \sin(\omega)^4 \right]} \quad (4.28)$$

Bei Belastung von Knoten 1 bzw. Knoten 2 (vertikale Richtung) sind die reduzierten Flächenträgheitsmomente für eine Biegung um die 1-Achse und um die 2-Achse sowohl bei bcc als auch bei f2cc,z gleich. In horizontaler Richtung ergeben sich allerdings sowohl für bcc als auch für f2cc,z je zwei unabhängige reduzierte Flächenträgheitsmomente. Zur eindeutigen Identifizierung wird nachfolgend die Indizierung nach dem Ursache-Wirkungs-Prinzip verwendet. Der erste Index bezeichnet folglich die Biegeachse, der zweite Index gibt den Normalenvektor der Querschnittsfläche an. Das reduzierte Flächenträgheitsmoment $J_{\text{red},\text{bcc},13}$ bezeichnet folglich das reduzierte Flächenträgheitsmoment der bcc Zelle bei Biegung um die 1-Achse mit Lastangriff an jenen Knoten, die auf den Flächen mit Normalenvektor in 3-Richtung liegen. Insgesamt ergeben sich für bcc und f2cc,z dann je drei unabhängige Ausdrücke: $J_{\text{red},13} = J_{\text{red},23}$, $J_{\text{red},31} = J_{\text{red},32}$ und $J_{\text{red},12} = J_{\text{red},21}$. Die Randbedingungen zur Ermittlung der reduzierten Flächenträgheitsmomente sind in Tabelle 4.4 und Tabelle 4.5 gegeben. Es folgen die sich nach beschriebener Methode ergebenden reduzierten Flächenträgheitsmomente der bcc und f2cc,z Zelle für $J_{\text{red},31} = J_{\text{red},32}$. Die weiteren Flächenträgheitsmomente können Anhang A.1 entnommen werden.

Tabelle 4.4: Verwendete Randbedingungen zur Bestimmung der reduzierten Flächenträgheitsmomente für bcc Zellen.

Knoten	$J_{\text{red},13} = J_{\text{red},23}$	$J_{\text{red},31} = J_{\text{red},32}$	$J_{\text{red},12} = J_{\text{red},21}$
1	$(0, 0, 0, 1, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$
2	$(0, 0, 0, -1, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$
3	$(0, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$	$(0, 0, 0, 1, 0, 0)^T$
4	$(0, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$	$(0, 0, 0, 1, 0, 0)^T$
5	$(0, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, -1)^T$	$(0, 0, 0, -1, 0, 0)^T$
6	$(0, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, -1)^T$	$(0, 0, 0, -1, 0, 0)^T$

Tabelle 4.5: Verwendete Randbedingungen zur Bestimmung der reduzierten Flächenträgheitsmomente für f2cc,z Zellen.

Knoten	$J_{\text{red},13} = J_{\text{red},23}$	$J_{\text{red},31} = J_{\text{red},32}$	$J_{\text{red},12} = J_{\text{red},21}$
1	$(0, 0, 0, 1, 0, 0)^T$	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$
2	$(0, 0, 0, -1, 0, 0)^T$	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$
3	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$	$(0, 0, 0, 0, 1, 0)^T$
4	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, -1)^T$	$(0, 0, 0, 0, -1, 0)^T$
5	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$
6	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$

$$J_{\text{red},\text{bcc},31} = J_{\text{red},\text{bcc},32} = \frac{A}{B} \quad (4.29)$$

$$A = 4\sqrt{2}\pi r^4 ((\omega) + (\nu + 1)(h^2 + 48r^2 \sin^2(\omega) \tan^2(\omega) + 12r^2 \tan^2(\omega)) - 9r^2(\nu + 1) \tan^2 + (h^2 + 48r^2 \sin^2(\omega) \tan^2(\omega) + 12r^2 \tan^2(\omega)) \tan^2(\omega)) \sin^3(\omega)$$

$$B = (\nu + 1)(h^2 + 48r^2 \sin^2(\omega) \tan^2(\omega) + 12r^2 \tan^2(\omega)) \tan^3(\omega)$$

$$J_{\text{red},\text{f2cc},z,31} = J_{\text{red},\text{f2cc},z,32} = \frac{A}{B} \quad (4.30)$$

$$A = \pi r^4 \cos(\omega) (1 + \nu \cos^2(\omega))$$

$$B = 2(1 + \nu)$$

Mit Gleichung 4.26 und den reduzierten Flächen aus Gleichung 4.27 und Gleichung 4.28 sowie die für f2cc,z im Anhang A.1 abgebildeten reduzierten Flächen, lassen sich schließlich die zugehörigen Biegesteifigkeiten bestimmen.

Vergleich der mechanischen Eigenschaften

Auf Grundlage der zuvor dargestellten analytischen Zusammenhänge werden nachfolgend die resultierenden mechanischen Eigenschaften der bcc und f2cc,z Zellen in Abhängigkeit verschiedener Parameter miteinander verglichen. Für die nachfolgenden Untersuchungen wurden Gitterstrukturen mit $n_1 = n_2 = n_3 = 10$ Einheitszellen betrachtet. Die Zellhöhe h wurde dabei konstant gehalten und zu $h = 10$ mm gesetzt. Abbildung 4.7 zeigt den Einfluss der relativen Dichte auf die Biegesteifigkeiten, normiert auf die Biegesteifigkeit eines geometrisch äquivalenten Vollquerschnitts, die sich mittels b und h berechnen lässt. Die Winkel der Diagonalstreben können aus $\omega_{\text{bcc}} = \arctan(h/(\sqrt{2}b))$ und $\omega_{\text{f2ccz}} = \arctan(h/b)$ berechnet werden. Grundsätzlich steigen die Biegesteifigkeiten sowohl bei bcc Gitterstrukturen als auch bei f2cc,z Gitterstrukturen mit steigender relativer Dichte an. Dabei sind die gewichtsspezifischen Biegesteifigkeiten bei f2cc,z immer größer als bei bcc. Es zeigt sich, dass die Biegesteifigkeiten EJ_{12} und EJ_{31} für beide Zelltypen gleich sind. Weiterhin steigen die Biegesteifigkeiten EJ_{12} und EJ_{31} sowohl für bcc Gitterstrukturen als auch für f2cc,z Gitterstrukturen mit zunehmendem b/h an, wohingegen EJ_{13} sinkt. Insgesamt zeigen die Biegesteifigkeiten für beide Zelltypen exponentielle Verläufe. Zudem ist zu sehen, dass für $b/h = 1$ alle Biegesteifigkeiten der bcc Gitterstrukturen gleich sind. Weiterhin ist zu erkennen, dass je nach Topologie der Zelle, eine spezielle Biegerichtung zu präferieren ist. So liefert für $b/h \leq 1$ eher EJ_{13} eine hohe Steifigkeit und für $b/h > 1$ eher EJ_{12} oder EJ_{31} . Abbildung 4.8 zeigt zudem den Einfluss des Strebenradius auf die Biegesteifigkeit. Die Biegesteifigkeiten entwickeln sich grundsätzlich äquivalent zur relativen Dichte. Für f2cc,z ist ein sehr stark nichtlineares Verhalten auffällig, welches sich insbesondere auf die exponentielle Abhängigkeit (r^2 bzw. r^4) zurückführen lässt. Weiterhin kann angemerkt werden, dass bcc für Verhältnisse $r/h \leq 10$ und $b/h \geq 1$ nahezu keine Biegesteifigkeit mehr besitzt. Abbildung 4.9 zeigt zudem die Beziehung zwischen dem Strebenwinkel ω und den resultierenden effektiven Biegesteifigkeiten für verschiedene Strebenradien. Die Winkelvariation ist gleichbedeutend mit der Variation des Zellseitenverhältnisses b/h . Der Einfluss des Strebenradius ist hierbei eher quantitativ als qualitativ zu sehen. Mit steigendem Strebenradius steigen die Steifigkeiten. Grundsätzlich kann gesagt werden, dass für alle b/h gilt, dass EJ_{13} mit steigendem ω ebenfalls steigt. $EJ_{12} = EJ_{31}$ hingegen sinken für f2cc,z Gitterstrukturen leicht mit steigendem ω . Bei bcc Gitterstrukturen gilt umgekehrtes. Grundsätzlich kann auch aus dieser Untersuchung festgestellt werden, dass die Biegesteifigkeiten für f2cc,z grundsätzlich höher sind als für bcc.

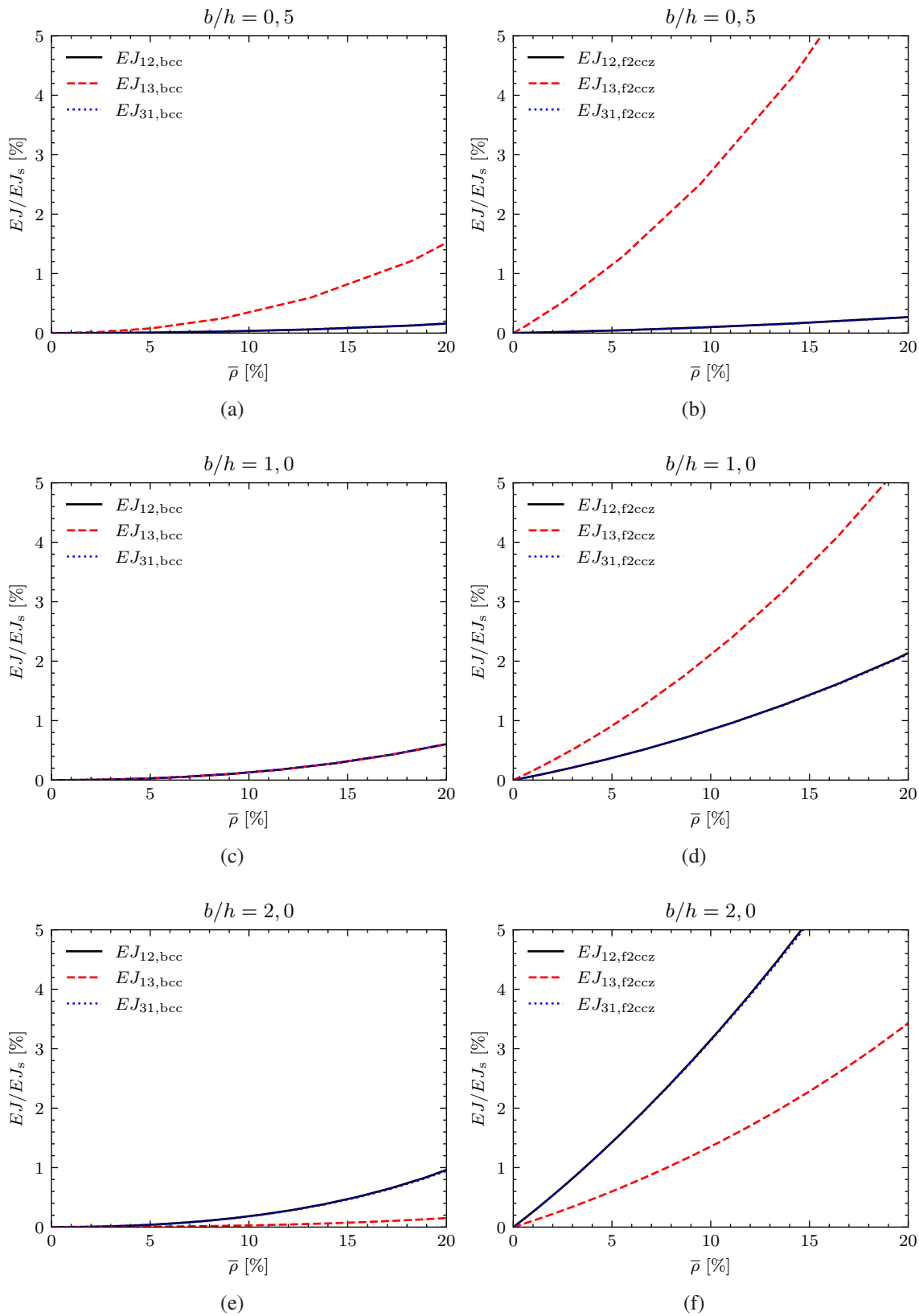


Abb. 4.7: Vergleich der resultierenden Biegesteifigkeiten von bcc und f2cc,z in Abhängigkeit der relativen Dichte und unterschiedlichen Aspektverhältnissen (Strebenwinkel) b/h bei $h = 10$ mm.

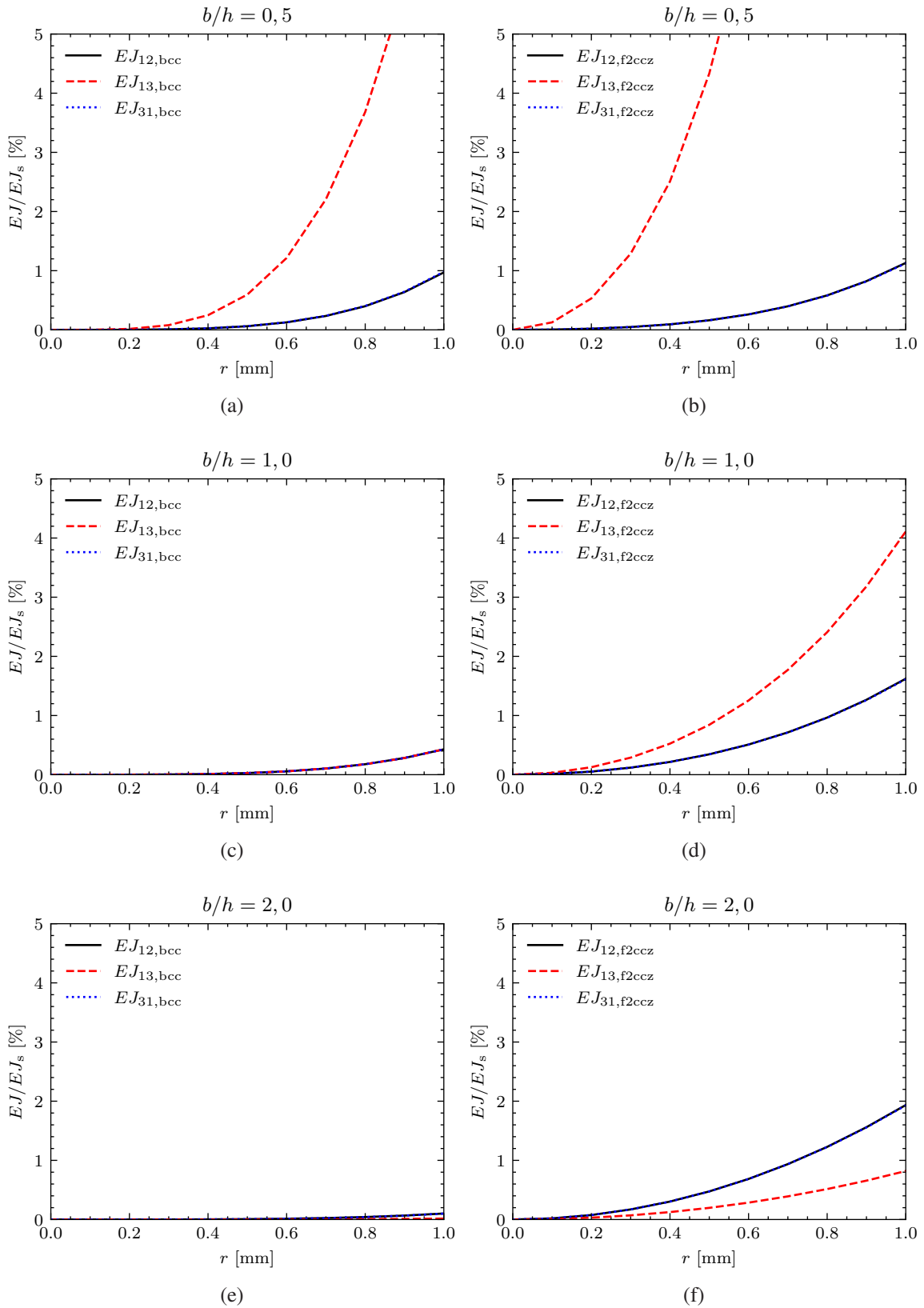


Abb. 4.8: Vergleich der resultierenden Biegesteifigkeiten von bcc und f2cc,z in Abhängigkeit der Strebendicke und unterschiedlichen Aspektverhältnissen (Strebenwinkel) b/h bei $h = 10$ mm.

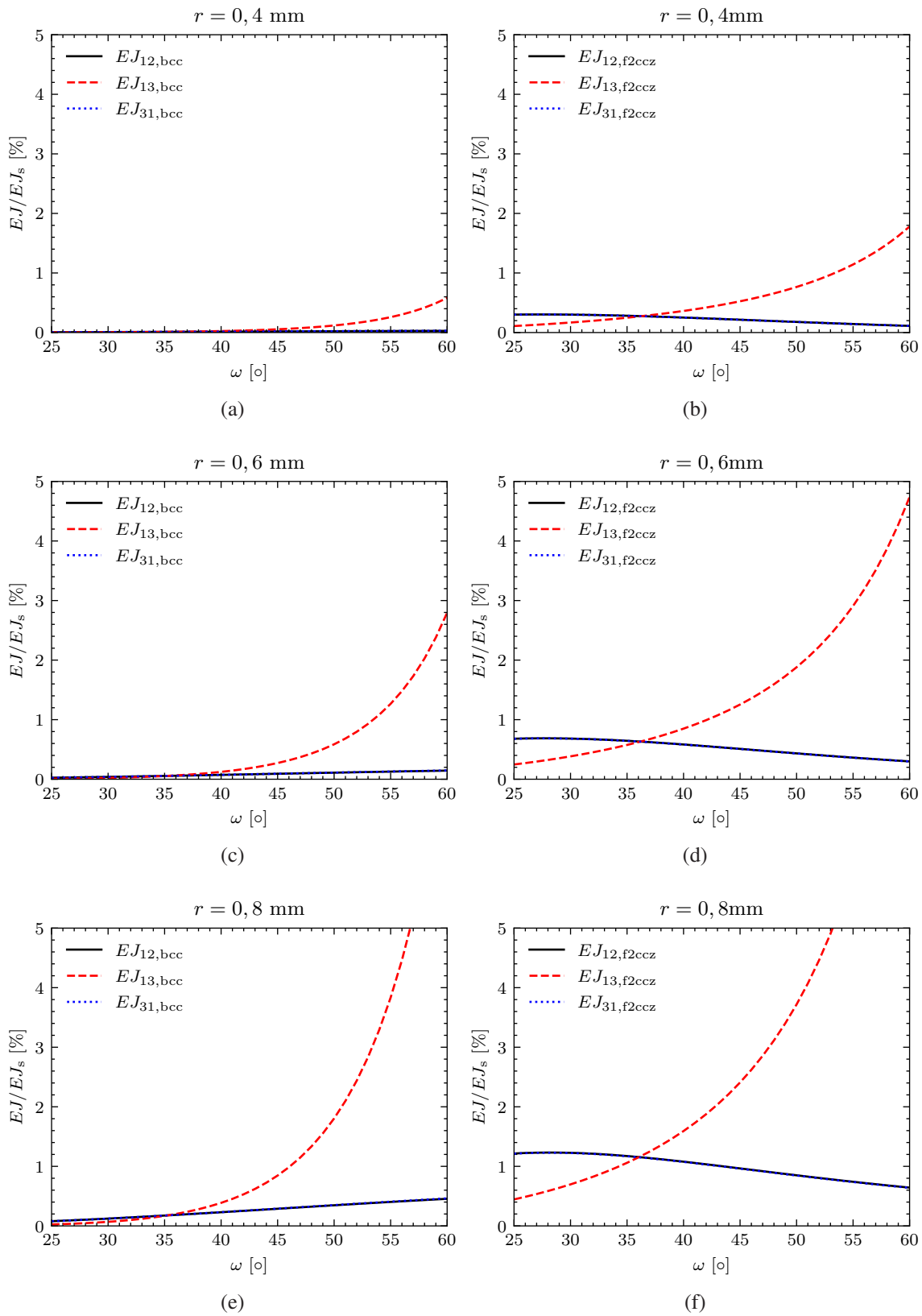


Abb. 4.9: Vergleich der resultierenden Biegesteifigkeiten von bcc und f2cc,z in Abhängigkeit des Strebenwinkels für unterschiedliche Strebenradien r bei konstanter Zellhöhe $h = 10$ mm.

4.4 Diskussion der Ergebnisse

Abbildung 4.10 zeigt einen Vergleich der mittels der analytischen Ansätze bestimmten Schubsteifigkeiten und dem Ergebnis einer Finite Elemente Parameterstudie. Pro Schubsteifigkeit und Zelltyp wurde im Parameterbereich von $h \in [10;20]$, $b \in [10;20]$, $r \in [0,25;0,5]$, $n_i \in [2;8]$ variiert. Folglich wurden jeweils 625 vergleichende Simulationen durchgeführt. Es wurde ein einfacher Scherlastfall für die numerischen Untersuchungen modelliert. In der jeweiligen Koordinatenrichtung, die orthogonal zur Belastungsrichtung steht, wurde jeweils eine Zellreihe verwendet, um den Biegeanteil an der Verformung zu minimieren. Für alle Schubsteifigkeiten und für beide Zelltypen können sehr gute Übereinstimmungen zwischen der Simulation und der analytisch bestimmten Schubsteifigkeit erreicht werden. Für die Schubsteifigkeiten von bcc stimmen die Ergebnisse für (AG_{12}) und (AG_{31}) nahezu exakt mit dem Simulationsergebnis überein. Für (AG_{13}) liegen die Abweichungen bei maximal 1,5%. Für f2cc,z können im untersuchten Parameterbereich für (AG_{13}) ebenfalls nahezu exakte Übereinstimmungen erreicht werden. Für (AG_{31}) liegen die Abweichungen bei unter 1% und für (AG_{12}) bei unter 3%. Die Ergebnisse zeigen folglich, dass die entwickelten analytischen Lösungen mit den durchgeführten Tests und FE-Simulationen in sehr guter Übereinstimmung sind. Die Ansätze können somit zur vereinfachten Abschätzung der Schubsteifigkeiten von Gitterstrukturen, insbesondere in Vorentwurfsphasen, verwendet werden. Die Studie zeigt weiterhin, dass auch das Schubverhalten bei den untersuchten Gittern skaleninvariant ist und nur von den Verhältnissen der Zellen orthogonal und parallel zur Lastrichtung $n_{i,j}/n_k$ sowie dem Verhältnis von Strebenradius zu Zellhöhe r/h abhängig ist.

Zur Bestimmung der effektiven Biegesteifigkeiten von Gitterstrukturen konnten ebenfalls analytische Ansätze hergeleitet werden. Abbildung 4.11 zeigt einen Vergleich der mittels der analytischen Lösungen bestimmten Biegesteifigkeiten und den Ergebnissen einer Finite Elemente Parameterstudie. Pro Biegesteifigkeit und Zelltyp wurde im Parameterbereich von $h \in [10;20]$, $b \in [10;20]$, $r \in [0,25;0,5]$, $n_i \in [2;6]$ variiert. In Längenrichtung wurden jeweils 150 Zellen verwendet, um den Randeinfluss zu minimieren. Folglich wurden jeweils 200 vergleichende Simulationen durchgeführt. Das analytische Modell basiert auf einer Modellierung der Streben als einzelner Bernoulli-Balken. In der Finite Elemente Simulation wurden pro Balken 3 quadratische Timoschenko-Elemente verwendet, um den Einfluss der Biegung und Schubverformung der Streben auf die globale Verformung abzubilden. Für die f2cc,z Zelle kann so eine sehr gute Übereinstimmung mit den Finite Elemente Simulationen hergestellt werden. Die Abweichungen der resultierenden Biegesteifigkeiten liegen unter 3%. Somit liefern die analytischen Lösungen für f2cc,z plausible Ergebnisse. Für bcc sind die Abweichungen deutlich größer. Weitergehende Analysen haben gezeigt, dass das Ergebnis sehr sensitiv auf eine Änderung der reduzierten Fläche reagiert. So konnte im Rahmen einer Sensitivitätsstudie analysiert werden, dass eine virtuelle Erhöhung der reduzierten Fläche um 5% bereits zu deutlich verbesserten Ergebnissen führt. Weiterhin sind die Ergebnisse für geringe Strebenradien, bzw. geringe r/h , deutlich schlechter als für große Verhältnisse von r/h .

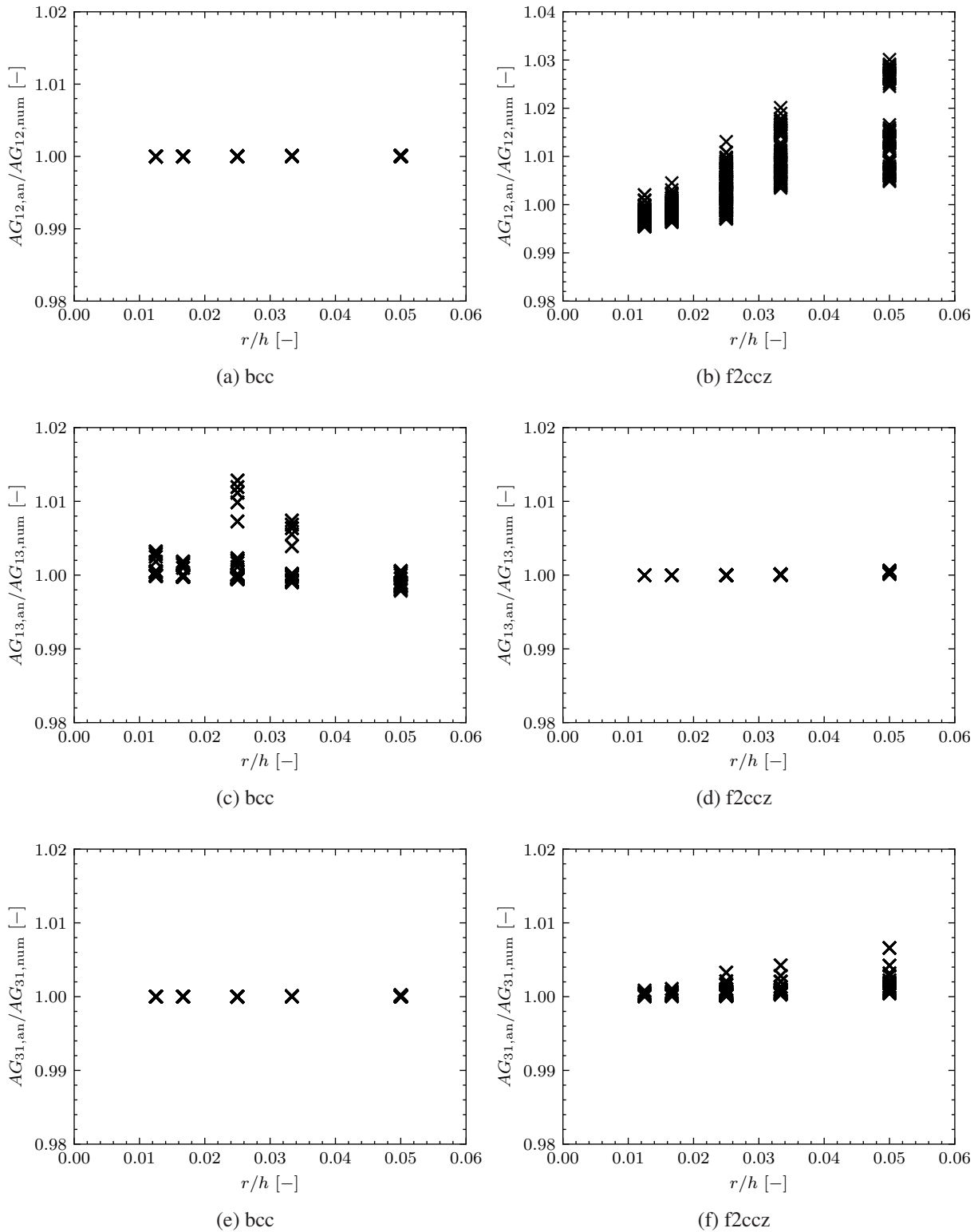


Abb. 4.10: Vergleich der analytischen Lösung mit der FE Lösung für die resultierenden Schubsteifigkeiten im Parameterbereich $h \in [10; 20]$, $b \in [10; 20]$, $r \in [0, 25; 0, 5]$, $n_i \in [2; 8]$ für (a) G_{12} für bcc, (b) G_{12} für f2cc,z, (c) G_{13} für bcc, (d) G_{13} für f2cc,z, (e) G_{31} für bcc, (f) G_{31} für f2cc,z.

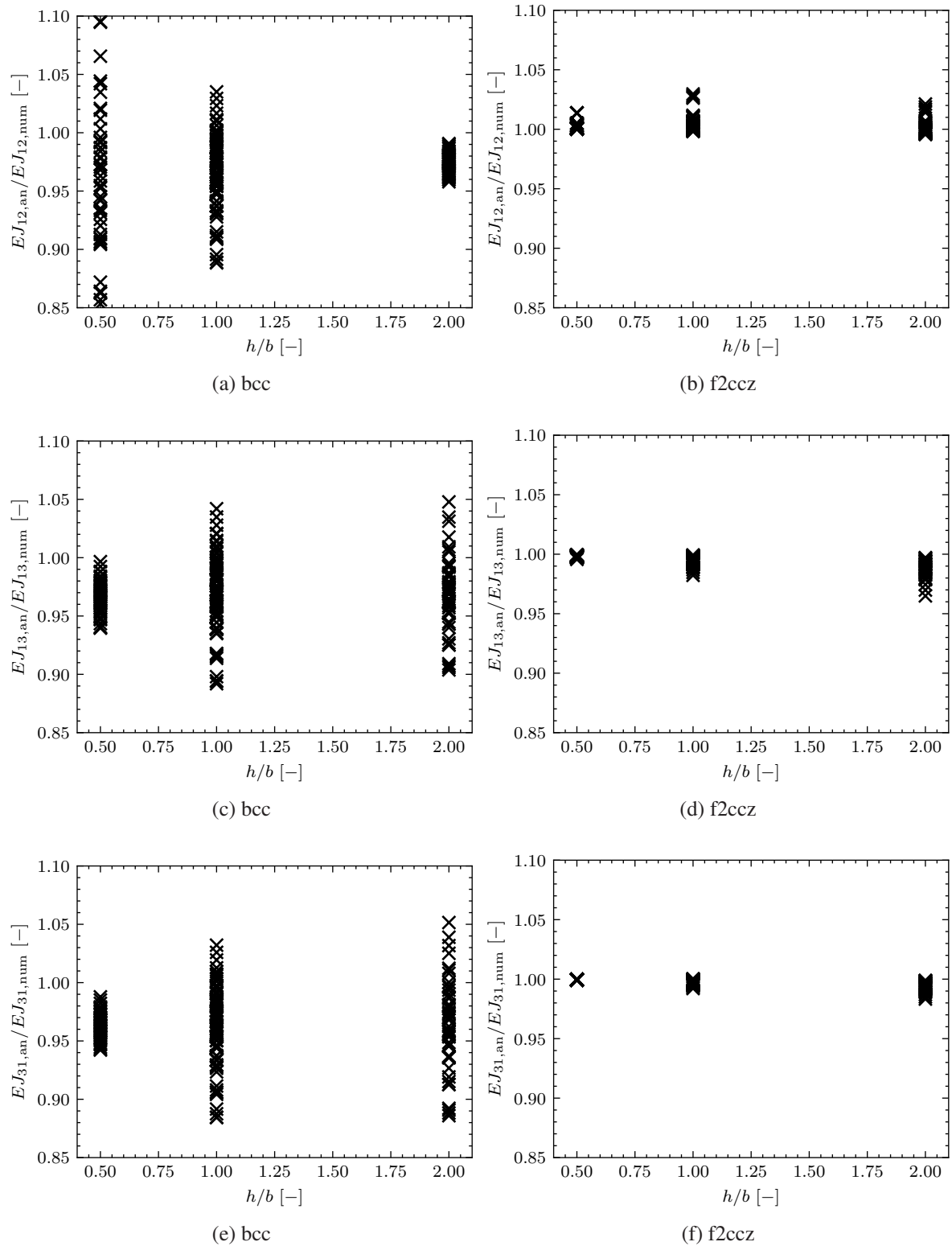


Abb. 4.11: Vergleich der analytischen Lösung mit der FE Lösung für die resultierenden Biegesteifigkeiten im Parameterbereich $h \in [10; 20]$, $b \in [10; 20]$, $r \in [0,25; 0,5]$, $n_i \in [2; 6]$ für (a) $(EJ)_{12}$ für bcc, (b) $(EJ)_{12}$ für f2cc,z, (c) $(EJ)_{13}$ für bcc, (d) $(EJ)_{13}$ für f2cc,z, (e) $(EJ)_{31}$ für bcc, (f) $(EJ)_{31}$ für f2cc,z.

5 Stabilitätsverhalten von Gitterstrukturen

Strukturen mit großer Schlankheit sind in der Regel stabilitätsgefährdet. Ähnlich zu dünnwandigen Profilstäben kann auch bei Gitterstrukturen zwischen einem globalen und einem lokalen Stabilitätsproblem unterschieden werden. So können insbesondere bei Strukturen, die makroskopisch eine geringe Schlankheit aufweisen, lokal einzelne Streben knicken. Auf geometrischer Seite wird zwischen makroskopischen Größen, etwa der äußeren Geometrie der Gitterstruktur und mesoskopischen Größen, jene, die die Einheitszelle definieren, unterschieden. Hierbei muss berücksichtigt werden, dass sich Makro- und Mesostruktur gegenseitig beeinflussen können. So bestimmt sich etwa die Breite der Makrostruktur aus dem Produkt von Zellenbreite und der Anzahl der Zellen in der entsprechenden Richtung. Deswegen werden unabhängige Größen zur Beschreibung verwendet. Die Topologie einer Einheitszelle mit quadratischer Grundfläche ist durch ihre Höhe und ihre Zellenbreite, oder durch die Höhe und den Winkel der Diagonalstreben definiert. Mit dem Radius der Zellstreben ist diese dann vollständig beschrieben. Die Makrostruktur ist schließlich durch den Zelltyp und die Anzahl der Zellen in 1-, 2-, und 3-Richtung vollständig beschrieben. Zuletzt verbleibt das E-Modul als Materialeigenschaft. Allerdings ist eine Variation des E-Moduls äquivalent zu einer Variation der Zelllänge, solange das Verhältnis der verbleibenden Parameter relativ zur Zelllänge konstant bleibt. Diese Skalenzinvarianz konnte bereits im Zusammenhang mit den Steifigkeiten von Gitterstrukturen gezeigt werden. Zusammenfassend scheint also die Untersuchung des Einflusses folgender Parameter auf das Stabilitätsverhalten von Gitterstrukturen als zielführend:

- Die Anzahl der Zellen in 1-, 2-, und 3-Richtung, bzw. die Verhältnisse n_1/n_3 , n_2/n_3 und n_1/n_2 stellvertretend für die makroskopische Schlankheit von Gitterstrukturen und der Querschnittsdefinition.
- Das Verhältnis von Zellhöhe h zu Zellenbreite b , bzw. die Zellhöhe h und der Strebenwinkel ω für den Einfluss der Inklination der Diagonalstreben.
- Das Verhältnis von Zellhöhe h zu Strebenradius r , stellvertretend für die lokale Schlankheit der Streben.
- Der E-Modul E zur Ermittlung des Einflusses des verwendeten Werkstoffs.

Im Nachfolgenden wird ein analytisches Modell entwickelt, um in Abhängigkeit dieser Parameter sowohl die lokale als auch die globale Knicklast von Gitterstrukturen zu bestimmen. Hierbei werden wiederum bcc und f2cc,z Zellen genauer gesagt daraus resultierende Gitterstrukturen verwendet. Zur Vorstellung der Methode und Einflüsse auf die kritischen Lasten wird hier nur eine Belastung in 3-Richtung diskutiert. Zunächst werden zweidimensionale Strukturen betrachtet, um die allgemeinen wirkenden Mechanismen zu verstehen. Die Erkenntnisse werden schließlich auf dreidimensionale Strukturen übertragen und um notwendige Terme erweitert.

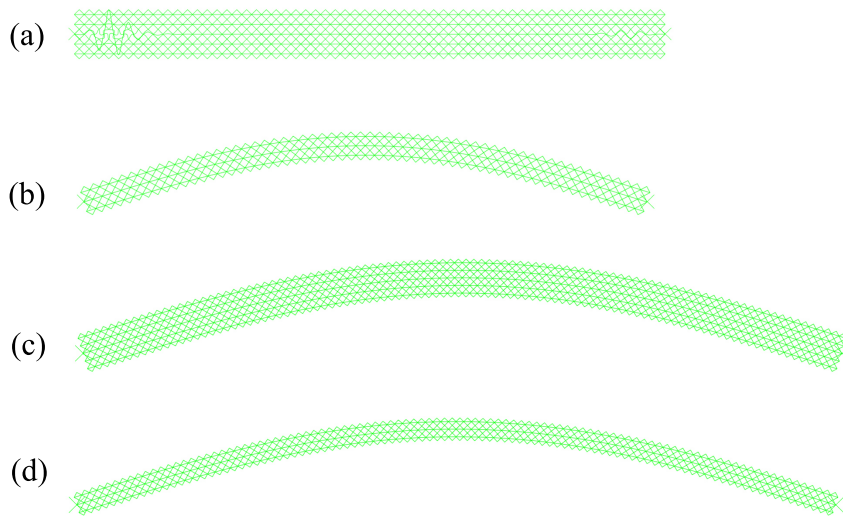


Abb. 5.1: Knickfiguren des f2cc,z-Gitters im Eulerfall 2 mit einem Zellwinkel von 45° und Anzahl Zellen in Länge/Breite (a) 60/5 (b) 60/3 (c) 100/5 (d) 100/3.

Die analytischen Ergebnisse werden mit Finite Elemente Simulationen verglichen. Abbildung 5.1 zeigt am Beispiel eines f2cc,z Gitters die im Eulerfall 2 resultierenden Knickfiguren für unterschiedliche Zellanzahlen. Es sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, dass die gewählte Konvention für die Koordinatenrichtungen von der üblichen Konvention von Balken abweicht, da die Koordinatenrichtungen in Abhängigkeit der Mesostruktur definiert sind. Bei Gitterstrukturen mit z-Streben (wie bei der f2cc,z Zelle), bezeichnet die 3-Richtung immer die Richtung ebendieser Streben. Bei Gittern ohne solcher ergibt sich die 3-Richtung aus der Definition des Winkels ω .

Abbildung 5.2 zeigt die Simulationsergebnisse linearer Eigenwertrechnungen für die kritische Knicklast P_{kr} aus einer Parameterstudie mit der 2D f2cc,z Zelle, normiert auf den E-Modul P_{kr}/E , in Abhängigkeit der axialen Zellanzahl n_3 und der Zellanzahl in Breitenrichtung n_1 . Auf das Simulationsmodell wird nachfolgend noch genauer eingegangen. Es fällt auf, dass sich in Abhängigkeit der Zellanzahlen zwei charakteristische Bereiche ausbilden: ein konstanter Plateaubereich und ein mit steigender Zellanzahl abfallender Bereich. Bei Betrachtung der Knickfiguren aus Abbildung 5.1 kann man weiterhin erkennen, dass im Fall (a) lokales Knicken auftritt, wohingegen in Fall (b)-(c) ein globales Knicken zu erkennen ist. Schaut man sich die zugehörigen Punkte in Abbildung 5.2 an, wird deutlich, dass der konstante Teil der Kurven offensichtlich lokales Knicken und der abfallende Teil der Kurven globales Knicken abbildet. Dies erscheint auch logisch, denn lokales Knicken sollte nur von den mesoskopischen Größen der Gitterstruktur und der Zellbreite abhängig sein, wohingegen eine größere Länge, also eine größere Anzahl Zellen in axialer Richtung (3-Richtung), maßgeblich globales Knicken fördert.

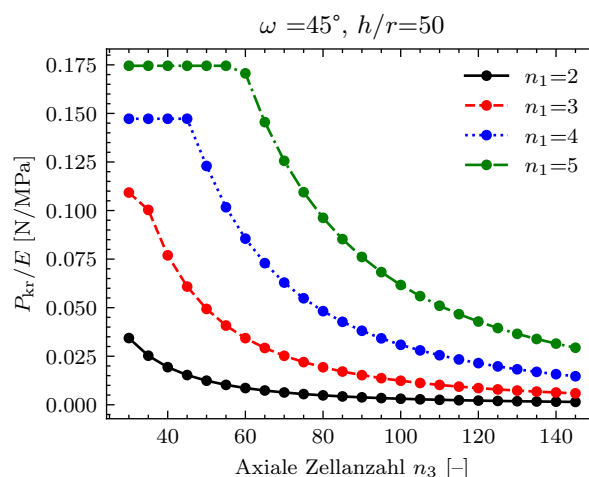


Abb. 5.2: Knickkurven des in Abbildung 5.1 gezeigten f2cc,z-Gitters des Eulerfall 2 mit einem Zellwinkel von 45° und Zellhöhen/Radius von $h/r = 50$.

Aufbau des Finite Elemente Modells

Zur numerischen Berechnung wird ABAQUS/Standard in der Version 2020 verwendet. Zur Diskretisierung werden sechs quadratische Balkenelemente pro Strebe verwendet, was zu guter Konvergenz führt. Es werden der Zellwinkel ω , das Verhältnis von Zellhöhe zu Strebenradius r/h sowie der E-Modul E variiert. Weiterhin werden die Strukturen so gelagert, dass alle vier Eulerfälle abgebildet werden. Der Einfluss von E-Modul und Strebenradius wird zusammen mit dem Zellwinkel für den Eulerfall eins und zwei untersucht. Die Breite der Makrostruktur wird im Bereich zwei bis sechs Zellen in beide Richtungen untersucht. Je höher der Eulerfall, desto längere Strukturen müssen untersucht werden, um ein globales Knicken hervorzurufen. Zusammengefasst werden folgende Größen variiert:

- Winkel der Diagonalstreben ω mit den diskreten Werten 35° , 45° , 55° .
- Das Verhältnis von Zellhöhe zu Strebenradius h/r mit den diskreten Werten 100, 50, 15.
- Aufgrund des linearen Einflusses des E-Moduls auf die Knicklast, wird das Ergebnis der Knicklast auf diesen normiert.

Um die Verdrehung der Makrostruktur an den Lagern zu realisieren, werden alle Endknoten an der Stirnseite mithilfe eines *rigid body constraint* mit einem Referenzpunkt gekoppelt, an welchem die globalen Randbedingungen aufgegeben werden.

5.1 Ansatz zur Beschreibung der globalen Knicklast

Wie Abbildung 5.1 zeigt, sind die von den Randbedingungen abhängigen Euler Fälle eines Knickstabs auch bei schlanken Gitterstrukturstäben zu beobachten. Um die globale Knicklast eines Gitterstabes herzuleiten, werden die analytisch angenäherten Steifigkeiten aus Kapitel 4

sowie die allgemeine Formel zur Bestimmung der Knicklast eines Stabes nach Euler (Kapitel 2.2.2) verwendet. Nach Euler, siehe Gleichung 2.25 und 2.30, wird zu Bestimmung der Knicklast die Länge des Stabes l sowie die Biegesteifigkeit EJ_{ii} benötigt. Für eine Gitterstruktur mit periodisch verteilten Zellen, bzw. unveränderter Zelltopologie, erfolgt die Berechnung der Stablänge aus der Multiplikation der Zelllänge in die entsprechende Richtung, also der Zellhöhe h oder Zellbreite b , und der Anzahl der Zellen in axialer Richtung des Knickstabes n_i . Die effektive Biegesteifigkeit der Gitterstruktur lässt sich wie erwähnt mit den in Kapitel 4 vorgestellten Ansätzen bestimmen. Um dann die Knicklast der Makrostruktur, also die globale Knicklast, zu ermitteln, wird die berechnete Steifigkeit in die Eulerformel eingesetzt. Dies führt unter gewissen Bedingungen bereits zu sehr guten Ergebnissen. Für manche Zellen und Parameterbereiche sind allerdings weitere Korrekturen notwendig. Dies soll zunächst anhand von zweidimensionalen Strukturen diskutiert werden.

5.1.1 Zweidimensionale Analysen

Es folgt eine Betrachtung, wie die Verwendung der linearen oder geometrischen Steifigkeitsmatrix, die Berücksichtigung von Schubverformung sowie wie die konkrete Modellierung der Randbedingungen die ermittelte globale kritische Last von zweidimensionalen Gitterstrukturen beeinflusst. Da für die bcc Zelle nicht unmittelbar eine zweidimensionale Form existiert, wird an dieser Stelle die f2cc Zelle verwendet, also eine Zelle bestehend aus flächenzentrierten Diagonalstreben (siehe Abbildung 1.5).

Verwendung nichtlinearer Steifigkeitsmatrizen zur Bestimmung der globalen Knicklast

Wie später gezeigt werden kann, führt die Verwendung linearer Steifigkeitsmatrizen zur Beschreibung des globalen Knickens von f2cc,z Zellen, zu guten Ergebnissen. Dies gilt allerdings nicht für alle Gittertypen. In diesem Abschnitt soll näher erläutert werden, inwieweit durch Berücksichtigung nichtlinearer Verformungen das Ergebnis in solchen Fällen verbessert wird. Untersucht man das Verformungsverhalten gängiger Zellen, so fällt auf, dass bei Zelltypen, die keine Vertikalstreben besitzen, z. B. bcc Zellen, die Verformung hauptsächlich auf Biegung der Streben zurückzuführen ist. Bei der f2cc,z Zelle nimmt je nach Belastungsrichtung die Vertikalstrebe den Großteil der Last auf, oder es wird die Biegeverformung der Diagonalen durch die Vertikalstrebe abgemindert oder gar verhindert. Es kann also angenommen werden, dass insbesondere bei Zelltypen ohne Vertikalstrebe die reduzierten Eigenschaften, signifikant durch die Verformung sinken und dementsprechend für die globale Knicklast dieser Fehler Einfluss nimmt. Genauer gesagt, nimmt die effektive Biegesteifigkeit ab, wenn die Streben zusätzlich durch eine Axialkraft belastet werden (siehe Kapitel 2.2.4). Um dies weiter zu verifizieren, werden nachfolgend Strukturen verglichen, die an den Enden verschieblich gelagert werden, um Axialkräfte zu vermeiden. Es zeigt sich in Abbildung 5.3, dass die Abweichung zwischen analytischer und numerischer Lösung zwischen der simulierten Knicklast und analytisch bestimmten Knicklast bei Verwendung der linearen Steifigkeitsmatrix insbesondere bei kürzeren

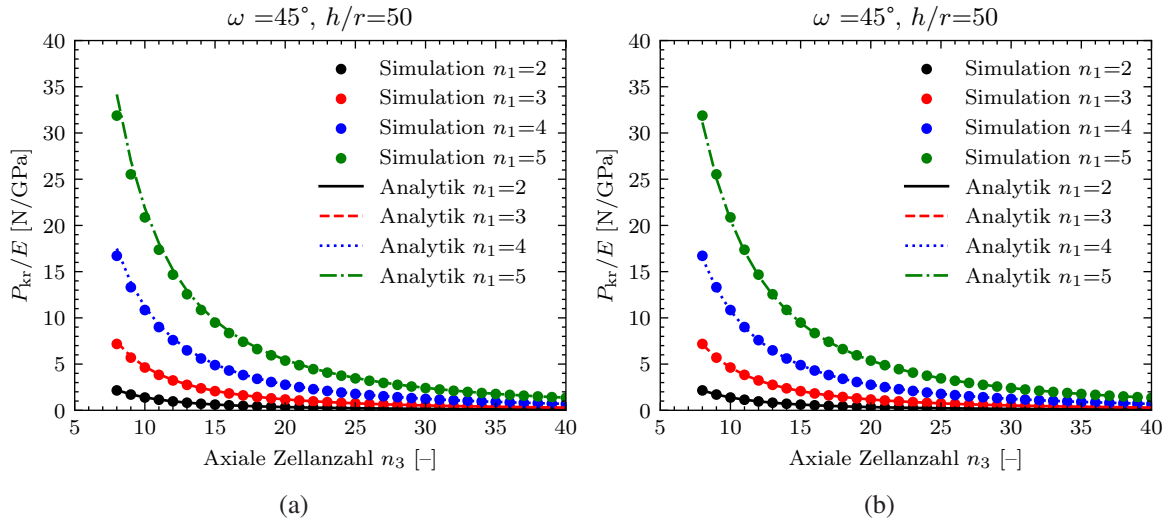


Abb. 5.3: Simulationsergebnisse im Vergleich zur analytischen Lösung der Knicklast von 2D f2cc-Gitterstrukturen normiert auf den E-Modul in Abhängigkeit der Zellanzahl in axialer Richtung n_3 und der Zellanzahl in Dickenrichtung n_1 , bei Verwendung (a) der linearen Steifigkeitsmatrix, (b) bei Verwendung der geometrischen Steifigkeitsmatrix.

Gitterstäben recht groß ist (bis zu 10%). Bei Verwendung der geometrischen, nichtlinearen Steifigkeitsmatrix, lässt sich dieser Fehler auf unter 3% reduzieren. Die Korrektur erfolgt, indem die reduzierte Fläche zwar aus der linearen Steifigkeitsmatrix bestimmt wird, allerdings werden die Einträge der lokalen Steifigkeitsmatrix der Streben aus der geometrisch nichtlinearen Steifigkeitsmatrix entnommen. Die in den Streben wirkende Axialkraft F_{st} ergibt sich dann zu $F_{st} = F_k \sin(\omega)$, wobei F_k die Knotenkraft ist. Zur Vereinfachung kann angenommen werden, dass der durch die Stauchung der Strebe resultierende Verformungsanteil vernachlässigbar ist. Somit kann Gleichung 2.43 direkt auf die vertikale Zellverformung angewandt werden. Die in einer Strebe wirkende Axialkraft ergibt sich durch Bildung des Kräftegleichgewichts an den Knoten zu $F_{st} = F_{ges} / (\sin(\omega)n_1)$. Damit ergibt sich mit der Strebenlänge l und dem Zusammenhang $l = h / (2 \sin(\omega))$ in erster Näherung bereits ein Ansatz für die lokale Knicklast von zweidimensionalen f2cc-Gitterstrukturen $P_{kr,lok}$:

$$P_{kr,lok} = \frac{2EJ_{red}\pi^2 \sin(\omega)n_1}{l^2} = \frac{4EJ_{red}\pi^2 \sin(\omega)^3 n_1}{h^2} \quad (5.1)$$

Aus Gleichung 4.3 folgt dann:

$$A_{red,nl} = A_{red,lin} \left(1 - \frac{P}{P_{kr,lok}} \right) \quad (5.2)$$

Für die globale Knicklast ergibt sich dann durch Umformung schließlich:

$$P_{\text{krit,gl}} = \frac{P_{\text{kr,lin}}}{1 + P_{\text{kr,lin}}/P_{\text{kr,lok}}} \quad (5.3)$$

Anhand der Verläufe in Abbildung 5.3 wird im Vergleich zu Abbildung 5.2 allerdings bereits deutlich, dass f2cc-Gitterstrukturen im Vergleich zu f2cc,z-Gitterstrukturen nicht zu lokalem Knicken neigen. Dies ist damit zu begründen, dass die Streben hauptsächlich Biegung erfahren.

Einfluss der Schubverformung auf die globale Knicklast

Abhängig vom Gittertyp ist die Berücksichtigung der globalen Schubverformung relevant. Zwar ist dieser Einfluss sowohl bei f2cc,z als auch bei bcc/f2cc nicht signifikant, dennoch wird an dieser Stelle der Vollständigkeit halber darauf eingegangen. Hierzu wird ein weiterer Zelltyp verwendet, bei dem ein deutlicher Einfluss zu beobachten ist. Abbildung 5.4 zeigt die Verformungsfigur eines sogenannten *simple cubic* (sc) Gitters. Es ist deutlich zu erkennen, dass das makroskopische Verformungsverhalten dem eines schubweichen Balkens ähnelt.

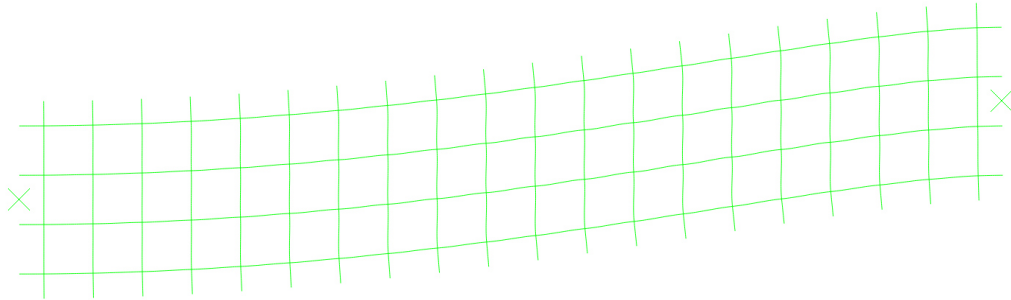


Abb. 5.4: Knickfigur des sc-Gitters im Eulerfall 1, zur Verdeutlichung der Schubweichheit.

In der Literatur [58, 59] wird vorgeschlagen die effektive Schubsteifigkeit anzunähern und in Gleichung 2.32 einzusetzen. Mithilfe der in Kapitel 4 vorgestellten Methode zur Ermittlung der Schubsteifigkeit kann diese auch für das 2D sc-Gitter bestimmt werden:

$$(AG)_{\text{red}} = \frac{E \pi r^4 (3n_1 - 2)}{2h^2 (3Q_s + 1)} \quad (5.4)$$

Hierbei beschreibt $Q_s = Er^2 / (4Gh^2 \kappa_s)$ die Berücksichtigung der Schubweichheit auf Strebenebene. Bei Verwendung der Bernoulli-Balkentheorie kann $Q_s = 0$ gesetzt werden und der Ausdruck in 5.4 vereinfacht sich zu:

$$(AG)_{\text{red}} = \frac{E \pi r^4}{2h^2} (3n_1 - 2) \quad (5.5)$$

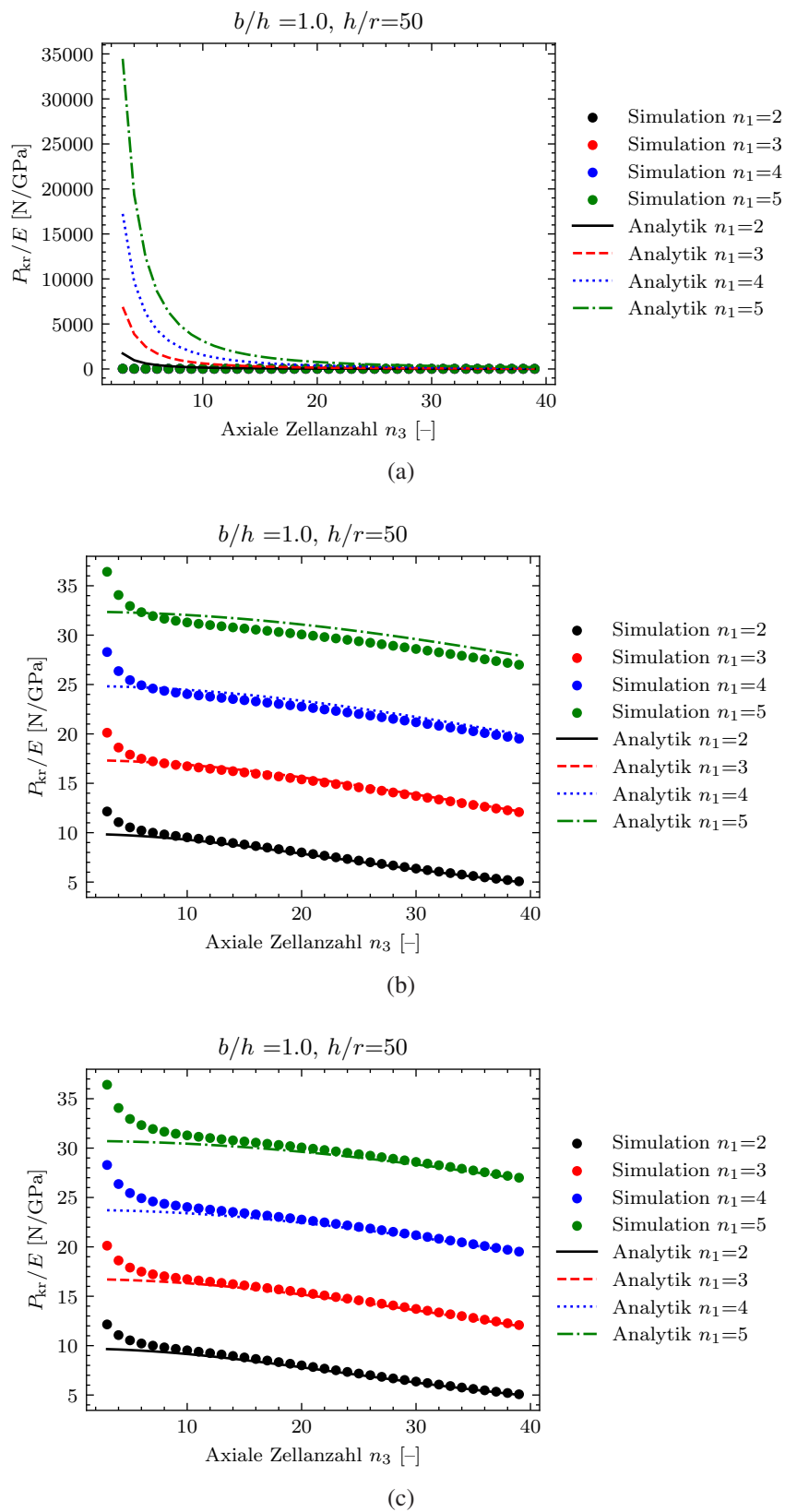


Abb. 5.5: Simulationsergebnisse im Vergleich zur analytischen Lösung der Knicklast von 2D sc-Gitterstrukturen normiert auf den E-Modul in Abhängigkeit der Zellanzahl in axialer Richtung n_3 und der Zellanzahl in Dickenrichtung n_1 , bei Verwendung (a) der linearen Steifigkeitsmatrix und Annahme von Schubstarrheit der Makrostruktur, (b) der linearen Steifigkeitsmatrix und Annahme von Schubweichheit der Makrostruktur, (c) der geometrischen Steifigkeitsmatrix und Annahme von Schubweichheit der Makrostruktur.

Durch die Berücksichtigung der Schubverformung lassen sich für das sc-Gitter deutlich bessere Ergebnisse erreichen, als unter Annahme einer schubsteifen Verformung (siehe Abbildung 5.5 (a)). Abbildung 5.5 (b) zeigt den Vergleich zwischen numerischer und analytischer Lösung bei Berücksichtigung der Schubverformung und Verwendung der linearen Steifigkeitsmatrix. Es zeigt sich allerdings, dass die resultierende Knicklast für etwas breitere Gitter überschätzt wird. Eine leichte Verbesserung kann erreicht werden, indem berücksichtigt wird, dass die effektive Biegesteifigkeit der vertikalen Streben durch die axiale Drucklast gesenkt wird. Dies sollte zwar mittels zuvor dargestelltem Ansatz, also durch die Verwendung der geometrischen Steifigkeitsmatrix (Abbildung 5.5 (c)) ausgeglichen werden, dennoch zeigen sich weiterhin Abweichungen. Durch die Verwendung der geometrischen Steifigkeitsmatrix kann allerdings eine Abschätzung zur sicheren Seite erfolgen.

Die eben dargestellten Beobachtungen lassen sich allerdings insoweit relativieren, als die großen Abweichungen eher bei kurzen Gittern auftauchen. Hier ist ein globales Knicken eigentlich eher auszuschließen, da die Streben vorher stark verformt sind, oder gar lokal bereits ein Knicken einzelner Streben auftaucht. Generell kann aber angemerkt werden, dass die Berücksichtigung der globalen Schubweichheit eher in Sonderfällen, wie beim sc Zelltyp, relevant ist.

Einfluss der Randbedingungen auf die globale Knicklast

Durch die Sperrung der lateralen Verschiebung der Knoten in der Einspannung wird die Querkontraktion behindert. Für die $f_{2cc,z}$ Zelle entstehen dadurch in Bezug auf die globale Knicklast keine nennenswerten Effekte. Zurückzuführen ist dies darauf, dass bei einer Biegebelastung die Zug- und Druckseite gegensätzlich verformen und daher die Querverformungen ein gegensätzliches Vorzeichen aufweisen, wodurch sich die Gesamtbreite des Querschnitts nicht verändert. Betrachtet man etwa die im vorigen Abschnitt untersuchte sc-Zelle, kann beobachtet werden, dass dieser Gittertyp auf makroskopischer Ebene eine Querkontraktionszahl von $\nu = 0,5$ aufweist, bei einer Kompression treten folglich in der Einspannung keine quer wirkenden Kräfte auf. Somit wird auch keine Störung am Rand hervorgerufen. In diesem Fall ist der Einfluss der Randbedingung eher sekundär und ggf. erst bei deutlich nichtlineareren Verformungszuständen relevant. Bei den 2D-Formen der f_{2cc} Zellen ist allerdings eine starke Abhängigkeit der Randbedingungen, insbesondere auf die Knicklast, zu beobachten.

Es sollen vorerst qualitative Beobachtungen angestellt werden, um die Unterschiede bzw. Abweichungen beschreibbar zu machen. Hierfür werden zunächst die Verformungsfiguren für eingespannte Gitterstrukturen und solcher mit drehbaren Enden betrachtet, siehe Abbildung 5.6. Bei der Betrachtung der dargestellten Spannungsverteilung fällt auf, dass sich bei einer Einspannung (Abbildung 5.6 (a)) eine dreieckförmige Aussteifung ausbildet und sich Zonen bilden, in denen sich die Struktur stärker verformt. Eine solche Aussteifung kann auch bei einer drehbaren Lagerung beobachtet werden (Abbildung 5.6 (b)), allerdings an einer anderen Stelle, da die Momentenbelastung am Lager null sein muss. Zurückzuführen ist dies auf eine entsprechende positionsabhängige behinderte Querkontraktion, was bereits in Kapitel 3 in Bezug auf die axialen Steifigkeiten näher erläutert wurde.

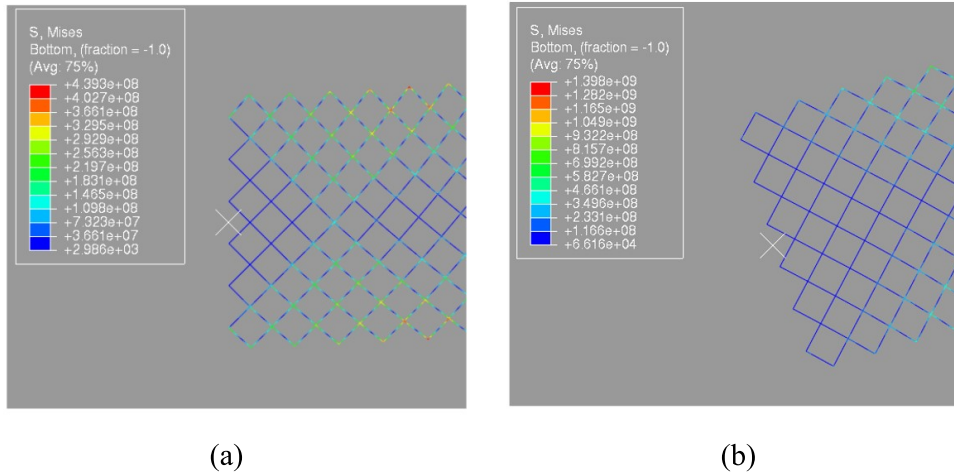


Abb. 5.6: Verformung und von Mises-Spannung eines 2D f2cc-Gitter bei a) eingespannten Rändern b) drehbaren Rändern.

Zur Beschreibung der Knicklast von Gitterstrukturen wird das Ersatzstabverfahren verwendet (siehe Kapitel 2). Die Gitterstruktur wird dafür in einen äquivalenten Ersatzstab überführt. Für eingespannte Enden wird dabei die Länge der Aussteifung als Starrkörper modelliert. Der Übergang zwischen dem Stab und der Aussteifung wird mit einer Drehfeder modelliert. Hierdurch können deutlich bessere Ergebnisse erreicht werden. Ein drehbar gelagerter Stab wird folglich mit einer verkürzten Länge und steifen Elementen an den Enden modelliert. Zudem wird angenommen, dass das steife Element einen Großteil der Drucklast aufnimmt, sodass zur Berechnung der Federsteifigkeit die reduzierten Werte der linearen Steifigkeitsmatrix ausreichend sind. Zur Bestimmung der Knicklast der Ersatzsysteme muss die Federsteifigkeit c und die Länge der steifen Elemente L_r initial abgeschätzt werden. Im Falle eingespannter Enden beträgt nach Abbildung 5.6 (a) die maximale Aussteifungslänge $L_r = (n_1 - 1)h/2$. Bei drehbaren Enden bildet sich am Lager keine Versteifung aus, siehe Abbildung 5.6 (b). Die Federsteifigkeit wird durch die sich einstellende Verformung der umgebenden Zellen bestimmt. Die Stauchung Δu einer mit einer Kraft F belasteten Zellenreihe lässt sich mit $\Delta u = LF / (EA_{\text{red}})$ beschreiben, wobei L die Länge einer Zellenreihe in Belastungsrichtung ist (z. B. $L = h$). Relativ zum Schwerpunkt ergibt sich eine Winkeländerung $\Delta\phi = \Delta u / x_{\text{SP}}$, wobei x_{SP} der Abstand der Zellenreihe zum Schwerpunkt ist. Der Beitrag zum Moment lässt sich über $M = c\Delta\phi = x_{\text{SP}}^2 EA_{\text{red}} \Delta\phi / L$ beschreiben. Ist die Zellanzahl in Breitenrichtung ungerade, ergibt sich $L = (i + 1)h$ und $x_{\text{SP}} = (i + 1)b$. Bei gerader Anzahl ergibt sich $L = (i + 0,5)h$ und $x_{\text{SP}} = (i + 0,5)b$. i ist hierbei eine bei 0 startende Zählvariable. Zusätzlich wird der Anteil der Biegung der Zellen zu $M = 2EJ_{\text{red}}/L$ addiert. Summiert man diese Terme auf, ergibt sich die Gesamtsteifigkeit c der Feder:

$$\begin{aligned}
 \text{Wenn } m \text{ gerade : } c &= 2E \left[\frac{b^2 A_{\text{red}}}{h} \sum_{i=0}^{n_1/2-1} \left(i + \frac{1}{2}\right) + 2 \frac{J_{\text{red}}}{h} \sum_{i=0}^{n_1/2-1} \frac{1}{i + \frac{1}{2}} \right] \\
 \text{Wenn } m \text{ ungerade : } c &= 2E \left[\frac{b^2 A_{\text{red}}}{h} \sum_{i=0}^{(n_1-1)/2} (i + 1) + 2 \frac{J_{\text{red}}}{h} \sum_{i=0}^{(n_1-1)/2} \frac{1}{i + 1} \right]
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

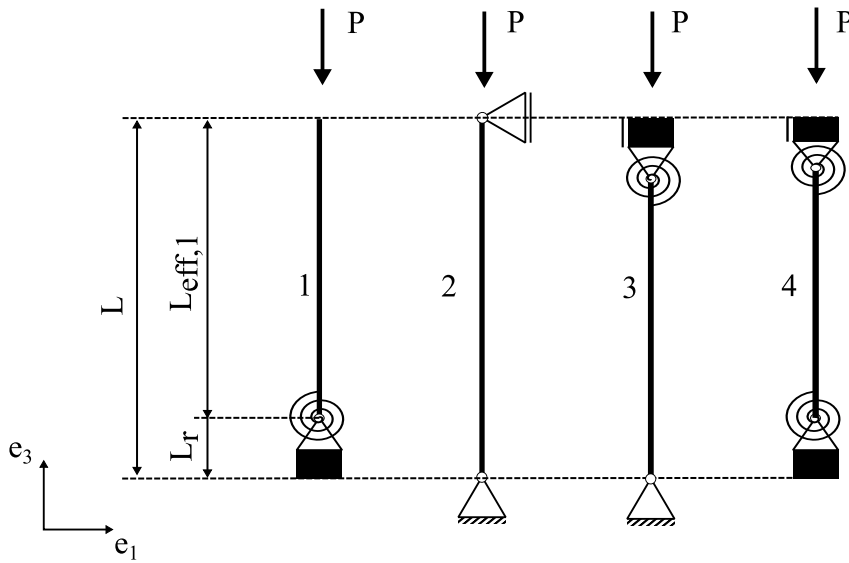


Abb. 5.7: Effektive Randbedingungen für die zweidimensionale f2cc-Gitterstruktur und effektive Längen.

Tabelle 5.1: Berechnung der effektiven Länge der zweidimensionalen f2cc-Struktur.

Eulerfall	effektive Stablänge
1	$L_{\text{eff}} = h(n_3 - (n_1 - 1)/2)$
2	$L_{\text{eff}} = h n_3$
3	$L_{\text{eff}} = h(n_3 - (n_1 - 1)/2)$
4	$L_{\text{eff}} = h(n_3 - (n_1 - 1))$

Unbekannt ist noch der Einfluss der Federn auf die Knicklast. Hierfür wird analog zum in Abschnitt 2.2.3 beschriebenen Vorgehen zum Ersatzstabverfahren vorgegangen. Für die Eulerfälle 1, 2 und 4 wird ein zweigliedriger Ansatz zur Bestimmung der Knicklast verwendet, für Eulerfall 3 ein viergliedriger. Die Knicklast wird schließlich wie in Kapitel 2.2.2 beschrieben mittels $P_{\text{kr}} = U^2 E J_{\text{red}} / L_{\text{eff}}^2$ bestimmt. Die effektiven Längen L_{eff} ergeben sich aus der Subtraktion der Länge der versteifenden Elemente von der Gesamtlänge der Gitterstruktur und können Tabelle 5.1 entnommen werden. Zum Lösen der Gleichungssysteme wird der Newton-Algorithmus verwendet. In Abbildung 5.7 sind zudem qualitativ die Länge des versteifenden Abschnitts L_r , sowie die effektive Stablänge L_{eff} und die zu den Eulerfällen zugehörigen Randbedingungen dargestellt. Die spezifischen Randbedingungen für die vier Eulerfälle sowie die Ansätze zur Berechnung des Faktors $U = \lambda L$, sowie eine grafische Darstellung von U , können Anhang A.3 entnommen werden.

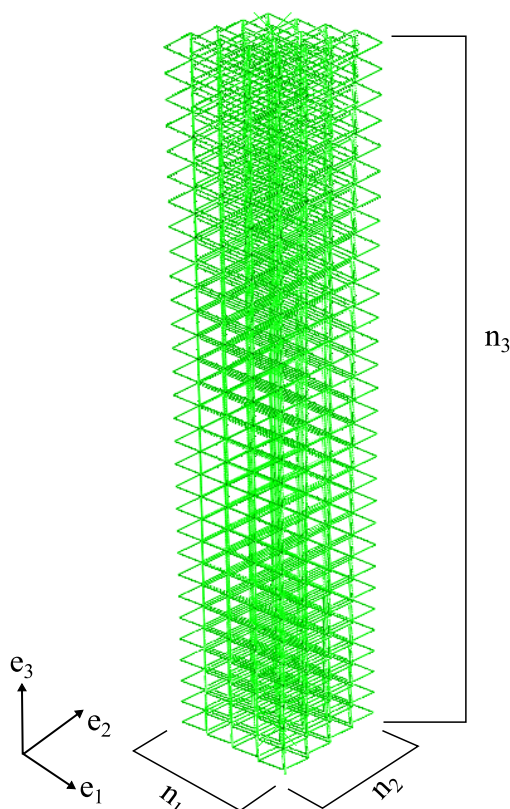


Abb. 5.8: Gewähltes Koordinatensystem am Beispiel eines bcc-Gitters.

5.1.2 Dreidimensionale Analysen

Die zuvor hergeleiteten Ansätze zur Bestimmung der globalen Knicklast von zweidimensionalen Gitterstrukturen werden nachfolgend erweitert, um auch dreidimensionale Strukturen beschreiben zu können. Es wird das in Abbildung 5.8 gezeigte Koordinatensystem verwendet. Folglich beschreiben die Größen in 1-Richtung und 2-Richtung die Querschnittseigenschaften des Ersatzstabs und die 3-Richtung die Eigenschaften in Längsrichtung. Im Eulerfall 1 werden Strukturen mit einer Zellanzahl von bis zu sechs Zellen in 1-Richtung und 2-Richtung verwendet, gekennzeichnet durch n_1 für die Anzahl der Zellen in 1-Richtung und n_2 für die Anzahl der Zellen in 2-Richtung. Für die Eulerfälle 2–4 werden aufgrund der sehr hohen Rechenzeiten nur Strukturen mit Zellanzahl n_1 und n_2 von zwei und vier Zellen betrachtet. Beim Eulerfall 2 und 3 wird die Rotation am Stabende nur in eine Richtung blockiert. Wie bereits für die zweidimensionalen Strukturen gezeigt, tritt globales Knicken bei geringeren Strebenschlankheiten früher auf. Um vertretbare Rechenzeiten zu erhalten, werden für folgende Beispiele mit einem Zellhöhen zu Durchmesser Verhältnis von $h/d = 20$ verwendet. Zur Bestimmung der effektiven Steifigkeiten, werden die in Kapitel 4.2 und Kapitel 4.3 dargestellten Ansätze verwendet. Auf dieser Grundlage kann die globale Knicklast analog zum zweidimensionalen Fall bestimmt werden.

Diskussion verschiedener Einflüsse auf die globale Knicklast von dreidimensionalen Gitterstrukturen

Die beim f2cc Gitter auftretenden Effekte sind äquivalent zum bcc Gitter zu sehen. Abbildung 5.9 zeigt erste Ergebnisse für f2cc,z und f2cc Gitterstrukturen. Es ist festzustellen, dass die Abweichungen zwischen analytisch bestimmter und simulierter Lösung sehr stark voneinander abweichen ($\Delta > 20\%$). Am stärksten sind die Abweichungen bei Gittern, mit unterschiedlicher Zellanzahl in 1-Richtung und 2-Richtung. Die Ursache für diese Abweichungen liegt unter anderem an der in der Einspannung behinderten Querkontraktion (siehe auch Kapitel 5.1.1 und Kapitel 3.2). Zwar reduziert sich die Abweichung auf unter 20%, für längere Gitter sogar auf unter 10%, wenn die laterale Verschiebung in der Einspannung zugelassen wird, bleibt allerdings weiterhin signifikant (siehe Abbildung 5.9). Begründen lässt sich dies darin, dass sich auch die Biegesteifigkeit der einzelnen Zellen bei blockierter Querkontraktion verändert, was bisher nicht berücksichtigt wird. Wie zu erwarten tritt dieser Effekt also auch nicht bei Gittern auf, die eine Querkontraktion von $\nu = 0$ aufweisen, wie das sc Gitter. Analog zum zweidimensionalen Fall sind auch hier Aussteifungen in den einzelnen auf Druck und Zug belasteten Zellschichten zu erkennen. Verglichen mit den zweidimensionalen Analysen treten diese aber normal zur Knickebene und nicht parallel dazu auf (siehe Abbildung 5.10 (a)). Gleichzeitig sind allerdings die aus den im zweidimensionalen Fall beobachteten Effekte, wie der Einfluss der Aussteifungen in der Knickebene beim f2cc Gitter, im Verhältnis zu den eben beschriebenen Einflüssen eher vernachlässigbar. Ebenso vernachlässigbar ist der Fehler, der aus der Vernachlässigung des geometrischen Anteils der Steifigkeitsmatrix resultiert. Der Einfluss der blockierten Querkontraktion muss abgeschätzt werden, da eine analytische Lösung des Problems nicht möglich ist. In der Literatur [84, 85] wird ein solches Problem hauptsächlich für unendlich lange Struk-

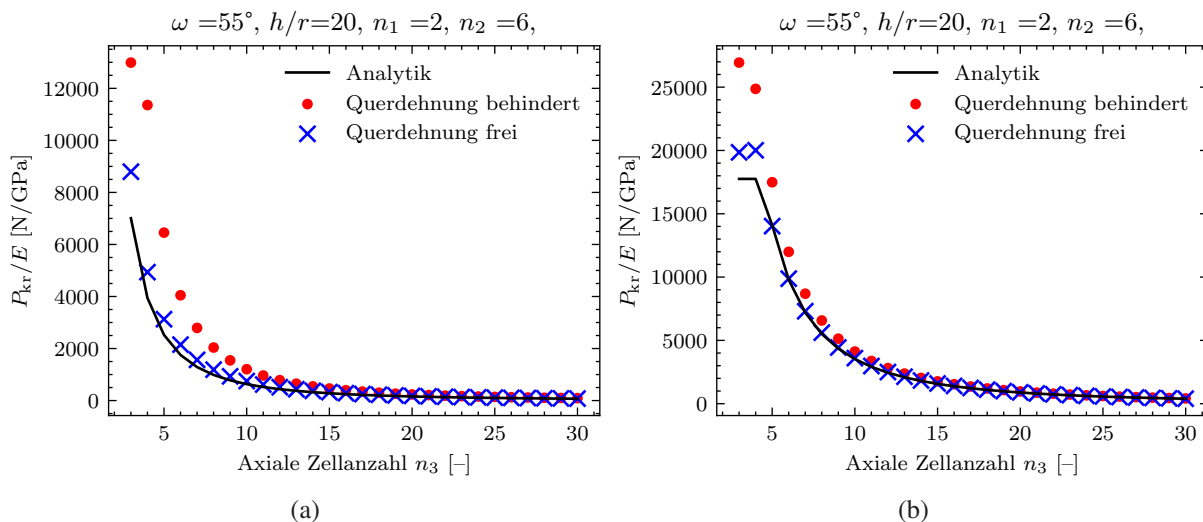
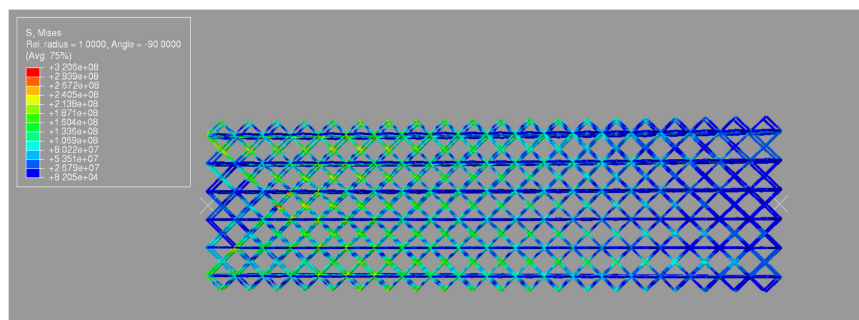
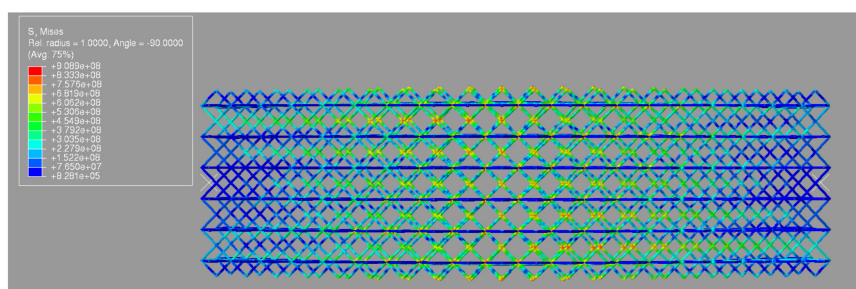


Abb. 5.9: Simulationsergebnisse im Vergleich zur analytischen Lösung der Knicklast von 3D Gitterstrukturen normiert auf den E-Modul in Abhängigkeit der Zellanzahl in axialer Richtung n_3 , bei Verwendung (a) von f2cc-Zellen, (b) bei Verwendung von f2cc,z-Zellen.

turen mit verschiedenen Querschnitten und einer Querkontraktionszahl von $\nu = 0,5$ diskutiert (z. B. für Elastomere). Es wird beschrieben, wie sich einerseits der Einfluss der Querkontraktion berücksichtigen lässt und andererseits die Topologie und die Dimension der Struktur diese beeinflusst. Der Verlauf der Querkontraktion kann über die Länge vereinfacht als Polynom beschrieben werden, wie als Parabel bei Gent und Meinecke [84], oder mittels Polynomen höherer Ordnung, wie bei Pinarbasi et al. [85]. Die Berechnung der daraus resultierenden Spannungsverteilung erfolgt zum Beispiel über einen hydrostatischen Ansatz. Da bei Gitterstrukturen allerdings allgemein keine Volumenkonstanz angenommen werden kann, entfällt eine hydrostatische Betrachtung. Die durch Schub veränderte Dehnsteifigkeit wird schließlich in Form eines Faktors berücksichtigt. Bei der Betrachtung von Körpern mit einer rechteckigen Grundfläche werden empirische Näherungen in Form eines weiteren Faktors herangezogen, um den Einfluss des Seitenverhältnisses auf die Dehn- und Biegesteifigkeit mitzuberechnen. Die gesamte Steifigkeit der Struktur ergibt sich schließlich aus der Lösung für eine Struktur ohne Störung, multipliziert mit der Summe der ermittelten Faktoren, so wie bereits bei den axialen Steifigkeiten vorgegangen wurde (siehe auch Kapitel 3.3).



(a)



(b)

Abb. 5.10: Verformungsfigur und Mises-Spannung bei einem dreidimensionalem f2cc-Gitter; (a) Eulerfall 1 mit Einspannung links, b) Eulerfall 2.

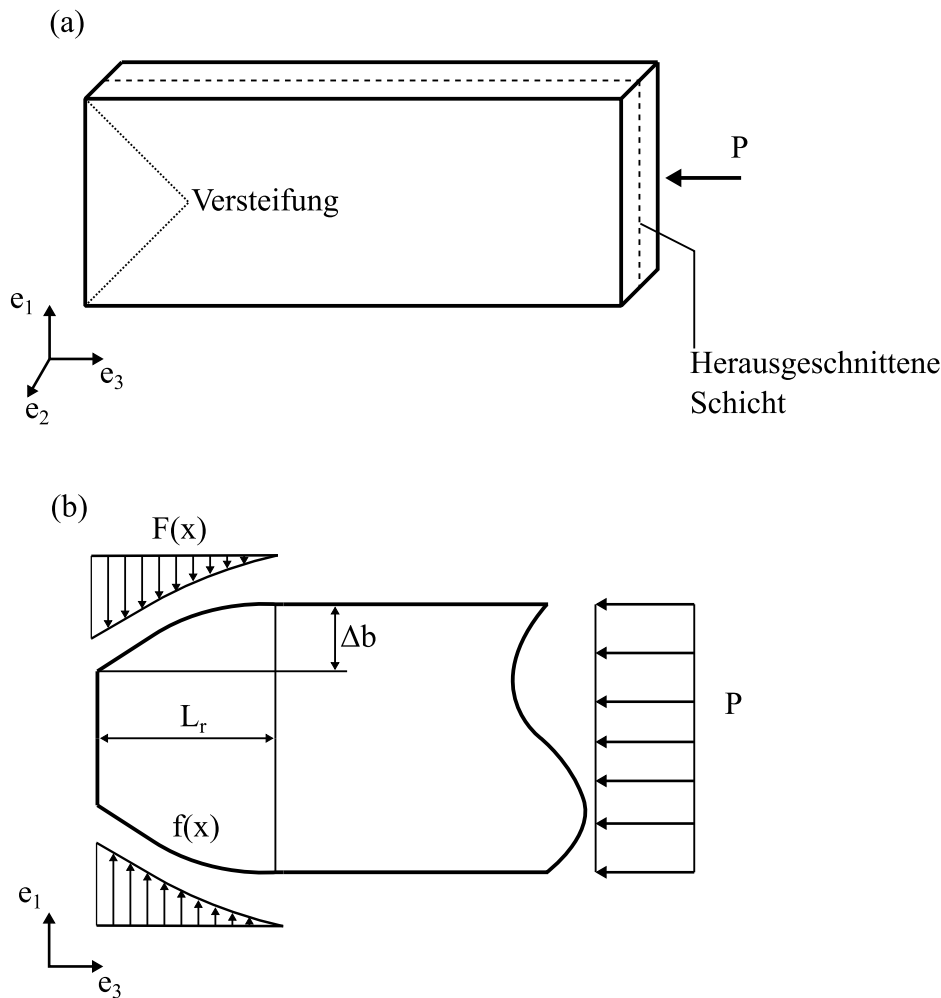


Abb. 5.11: Ersatzmodell zur Beschreibung des Einflusses des Randbereichs auf das Knickverhalten; (a) Darstellung der herausgeschnittenen Schicht. (b) Vereinfachtes Modell zur Bestimmung des Randeinflusses.

In Anlehnung an Gent und Meinecke [84] wird ein semi-analytischer Ansatz verwendet. Schubverformungen werden vernachlässigt. Dadurch kann die Struktur in Schichten mit einer Höhe von einer Zelle unterteilt werden, die durch das angreifende Einspannmoment auf Druck oder Zug belastet werden. Es wird eine Schicht mit einer Höhe von einer Zelle entlang der Längsachse herausgeschnitten, sodass ihr Normalenvektor parallel zur Knickrichtung verläuft (siehe Abbildung 5.11 (a)). Die Zellscheibe wird zunächst mit einer axialen Last belastet. Die Querkontraktion ist dabei ungestört. Anschließend wird eine Linienlast quer dazu aufgebracht, sodass die entstehende Querverformung den angenommenen Verlauf annimmt (siehe Abbildung 5.11 (b)), woraus der Verlauf der Dehnsteifigkeit einer Schicht und die Biegesteifigkeit der Struktur abgeleitet werden können. Danach erfolgt die Bestimmung der Knicklast durch das Verfahren nach Ritz (siehe Abschnitt 2.2.5). Da Schubverformungen vernachlässigt wer-

den, gilt für die Stauchung einer Zellreihe: $\Delta B = BF_1 / (EA_{\text{red},1})$, dabei ist F_1 die auf eine Zelle wirkende laterale Kraft, B ist die Breite der Schicht und $A_{\text{red},1}$ die reduzierte Fläche einer Zelle in Querrichtung (1-Richtung). Die Stauchung in Querrichtung wird durch eine Funktion angenähert, welche an der Stelle $x_3 = 0$ die gesamte Querkontraktion der Struktur ausgleichen muss und nach einer gewissen Abklinglänge eine Nullstelle besitzt. Diese Annäherungsfunktion kann als Vielfaches der Querkontraktion der gesamten Struktur geschrieben werden. Demnach gilt: $\Delta B = \Delta B_0 f(x_3) = BF_3 / (EA_{\text{red},3}) \nu_{31} f(x_3)$. F_3 ist die an der Zelle angreifende Längskraft, ν_{31} ist die Querkontraktionszahl bei einer Belastung in x_3 -Richtung. Die Stauchung einer Zellreihe Δv ergibt sich nun durch Superposition der aus der Längskraft resultierenden Verformung und der aus der Querkraft resultierenden Querkontraktion (siehe Gleichung 5.7).

$$\Delta v = \frac{F_3}{EA_{\text{red},3}} h - \frac{F_3}{EA_{\text{red},1}} \frac{A_{\text{red},1}}{A_{\text{red},3}} f(x_3) \nu_{31} \nu_{13} h = \frac{F_3}{EA_{\text{red},3}} h (1 - f(x_3) \nu_{31} \nu_{13}) \quad (5.7)$$

Die Dehnsteifigkeit einer Schicht ist in Abhängigkeit der axialen Position x_3 in Gleichung 5.8 gegeben. Da die Biegesteifigkeit proportional zur reduzierten Fläche ist, kann ihre Veränderung durch denselben Faktor bestimmt werden. Der Ausdruck $\nu_{31} \nu_{13}$ kann außerdem durch das Verhältnis der reduzierten Steifigkeit einer Zelle mit freier und blockierter Querkontraktion $A_{\text{red},c}$ beschrieben werden: $\nu_{31} \nu_{13} = 1 - A_{\text{red}} / A_{\text{red},c}$. Die reduzierten Flächen sind in Anhang A.1 gegeben.

$$\frac{J_{\text{red}}}{J_{\text{red},0}} = \frac{A_{\text{Schicht}}}{A_{\text{Schicht},0}} = \frac{1}{1 - (1 - A_{\text{red}} / A_{\text{red},c}) f(x_3)} \quad (5.8)$$

In einem letzten Schritt kann die Knicklast mit Hilfe des Ritz-Verfahrens angenähert werden, indem das sich ändernde Flächenträgheitsmoment in Gleichung 2.44 eingesetzt wird. Um die Biegelinie zu approximieren, wird ein Ansatz zweiter Ordnung verwendet:

$$\begin{aligned} \text{Eulerfall 1 : } w &= A (x_3^4 - 6L^2 x_3^2) + B (x_3^3 - 3Lx_3^2) \\ \text{Eulerfall 2 : } w &= A \left(x_3^5 - \frac{20}{6} L^2 x_3^3 + \frac{14}{6} L^4 x_3 \right) + B (x_3^4 - 2Lx_3^3 + L^3 x_3) \\ \text{Eulerfall 3 : } w &= Ax_3 (L - x_3)^2 \frac{L + 2x_3}{2} \\ \text{Eulerfall 4 : } w &= Ax_3^2 (x_3 - L)^2 + Bx_3^3 (x_3 - L)^3 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Es ergeben sich insgesamt drei getrennt voneinander zu betrachtende Bereiche. Jeweils ein Bereich an den Enden mit der Länge L_r in denen sich die Steifigkeit nach Gleichung 5.8 bestimmen lässt und einem ungestörten Bereich dazwischen, in dem die Randstörung abgeklungen ist. Das innere Potenzial ergibt sich aus der Summe des inneren Potenzials der Teilabschnitte. Um die Verformung der Struktur zu beschreiben, wurde ursprünglich ein Polynom zweiter Ordnung angesetzt, allerdings wird so das sich aus dem Verfahren nach Ritz ergebende Gleichungssystem analytisch unlösbar. Deshalb wird hier ein Polynom erster Ordnung verwendet.

Um die versteifte Länge abzuschätzen, wird die reduzierte Fläche des versteiften Bereichs bestimmt. Die Bestimmung erfolgt, indem beim Aufstellen der Steifigkeitsmatrix der Zellen zusätzlich die horizontale Verschiebung der Mittelknoten blockiert wird. Im dreidimensionalen Fall muss zudem unterschieden werden, ob die Querkontraktion nur in eine oder in beide Querschnittskoordinatenrichtungen behindert ist. Da die Querdehnungen der Zellen auf der Zug- und Druckseite der Makrostruktur unterschiedliche Vorzeichen haben können, können sie sich ausgleichen oder zumindest den Einfluss deutlich verringern. Um den Effekt näher zu untersuchen, wird folglich der Fall angenommen, dass die Querkontraktion nur in eine Richtung blockiert ist.

Wie bereits im zweidimensionalen Fall, oder bei der Betrachtung der axialen Steifigkeiten beobachtet, ergibt sich die Länge der Randstörung aus der Anzahl der Zellen in jener Richtung, in der die Querkontraktion blockiert ist. Es muss allerdings zusätzlich berücksichtigt werden, dass dabei für die Querverformung ein linearer Ansatz gewählt wurde, was in Bezug auf die Knicklast nicht hinreichend genau ist. Um dies auszugleichen, wird die effektive Länge des versteiften Bereichs empirisch ermittelt. Mit der Abschätzung $L_r = 2h(n_1 - 2)/3$ im Eulerfall 1 und $L_r = h(n_1 - 2)$ im Eulerfall 4 kann der resultierende Fehler bei $f_{2cc,z}$ und f_{2cc} Gittern minimiert werden. Für sehr flache Geometrien, also einem sehr geringem oder sehr großem Verhältnis von n_1/n_2 sind die dargestellten Ansätze und Überlegungen nicht anwendbar. Bei bcc- und auch bei bcc,z Gittern können bessere Ergebnisse erzielt werden, wenn für die Länge einen Wert von $L_r = h(n_1 - 2)/12$ im Eulerfall 1 und im Eulerfall 4 $L_r = h(n_1 - 2)/4$ angenommen wird. Diese Inkonsistenz erklärt sich dadurch, dass der Ritz-Ansatz bei den beiden Eulerfällen unterschiedlich gute Näherungen liefert. Zudem muss berücksichtigt werden, dass sich die reduzierte Fläche der Zellen mit blockierter Querkontraktion weniger stark von der freien Querkontraktion unterscheidet und die Querdehnungen durch die in den Raumdiagonalen liegenden Streben auf andere Art verteilt wird.

In Bezug auf die Eulerfälle 2 und 3 haben die diskutierten Korrekturfaktoren kaum merklichen Einfluss auf die Knicklast und können deshalb zu eins angenommen werden. Bei Eulerfall 2 verschwindet die Spannungskonzentration an den Enden der Struktur und bildet in der Mitte ein Maximum auf. Entsprechend treten auch die größten Querverformungen in einem Bereich auf, in dem die Randstörungen durch die Einspannungen bereits abgeklungen sind (siehe Abbildung 5.10). Ähnliches ist bei Eulerfall 3 zu beobachten. Zudem sind dort die global knickenden Gitter nochmals länger, sodass sich dadurch auch der Effekt der Randstörung relativiert.

Die Berücksichtigung des Einflusses der Schubweichheit erfolgt analog zu den zweidimensionalen Analysen, bzw. den Ansätzen aus Kapitel 4.2. Es wird folglich zwischen Randzellen und mittleren Zellen unterschieden und deren Steifigkeit berechnet. Die Schubsteifigkeit ergibt sich dann aus der Summe der Zellschubsteifigkeiten. Ein freier Rand, der nicht normal zur Knickrichtung liegt, hat dabei keinen Einfluss auf die Schubsteifigkeit. Diese berechnet sich demnach mit Gleichung 5.10. Zudem muss auch hier zwischen der Schubsteifigkeit in 1- und der in 2-Richtung unterschieden werden, indem n_1 und n_2 vertauscht werden. Es wird zudem vereinfachend angenommen, dass die blockierte Querkontraktion am Ende der Struktur keinen Einfluss

auf die Schubsteifigkeit der Struktur hat. Diese Annahme wird dadurch gestützt, dass auch bei einem Kontinuum die Schubsteifigkeit durch diese Randstörung nur unwesentlich beeinflusst wird. Entsprechend wird der Einfluss der Schubverformung auf die Knicklast nach Berechnung des Einflusses der Randstörung nach Gleichung 2.32 aufgeschlagen:

$$AG_{\text{red}} = n_2 (2(AG)_{\text{red,r}} + (n_1 - 2) (AG)_{\text{red,m}}) \quad (5.10)$$

5.2 Ansatz zur Beschreibung der lokalen Knicklast

Insbesondere bei kurzen Gitterstrukturen tritt in der Regel vor einem globalen Knicken der Makrostruktur ein lokales Knicken einer Strebe auf. Betrachtet man beispielsweise die Kurven in Abbildung 5.2 fällt auf, dass die Knicklast eines definierten Gitterquerschnitts vorerst konstant ist und mit steigender Zellanzahl in Lastrichtung nicht weiter zunimmt. Dies deutet auf ein lokales Stabilitätsproblem hin. Ab einer gewissen Gitterlänge nimmt die Knicklast allerdings mit steigender Zellanzahl ab, was nun auf ein globales Stabilitätsproblem zurückzuführen ist, da die Euler Knicklast quadratisch von der Länge der Makrostruktur abhängt. Ein solches Verhalten lässt sich bei den meisten gängigen Gitterstrukturen beobachten. Bei der Betrachtung eines sc Gitters ist der Übergang allerdings nicht klar trennbar, da hier der Einfluss der Schubverformung wesentlich höher ist, sodass bei typischen Gittertopologien bereits bei geringen Längen ein schubinduziertes globales Knicken auftritt (siehe beispielsweise Abbildung 5.5).

5.2.1 Zweidimensionale Analysen

Für die Einzelzelle wird, ähnlich zu dem von Fan et al. [86] vorgestellten Verfahren, mittels Ersatzstabverfahren die Knicklast ermittelt und anschließend daraus auf die lokale Knicklast der Struktur geschlossen (siehe Abbildung 5.12). Im Folgenden referenziert der Index $(\cdot)_{\text{st}}$ auf eine einzelne Strebe und der Index $(\cdot)_z$ auf eine Zelle. Die notwendigen Faktoren U zur Berücksichtigung von Randeffekten werden analog zur in Kapitel 5.1.1 dargestellten Methode ermittelt. Die Faktoren sind in Anhang A.3 abgebildet.

f2cc,z-Zelle in 3-Richtung

Die f2cc,z-Zelle wird in ein Ersatzsystem aus den Teilsystemen Diagonalstreben (f2cc) und Vertikalstrebe (z) überführt. Bei gleichem Strebendurchmesser wird aufgrund der höheren Strebenlänge und der höheren wirkenden Strebenkraft grundsätzlich die vertikale Strebe knicken. Die Diagonalstreben können dann als Drehfeder betrachtet werden (siehe Abbildung 5.12). Die zugehörige Federsteifigkeit c wird aus dem reduzierten Flächenträgheitsmoment der f2cc Zelle bestimmt, welches mit der in Kapitel 4.3 vorgestellten Methode bestimmt werden kann: $c = 2J_{\text{red}}E/h$. Analog zur Berechnung im vorigen Kapitel, ergibt sich die zu lösende Gleichung eines Stabes, an dem an beiden Enden Drehfedern angreifen, zu: $\cos(U) - UEJ_{\text{st}}/(hc) \sin(U) =$

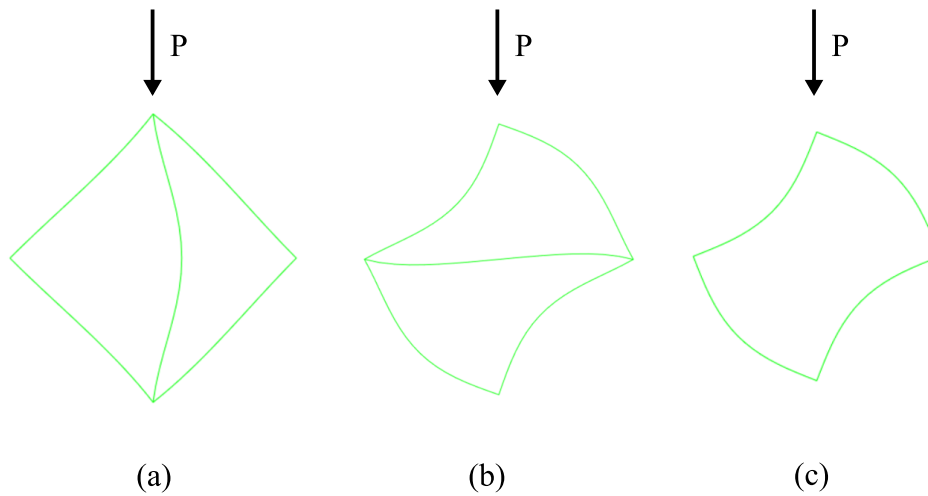


Abb. 5.12: Knickfiguren der zweidimensionalen Zellen; a) $f_{2cc,z}$ in 3-Richtung, b) $f_{2cc,z}$ in 1-Richtung, c) f_{2cc} .

1. Es resultiert die kritische Last auf Strebenebene $P_{kr,st} = EJ_{st}U^2/h^2$. Der Einfluss der Schubverformung kann mit Gleichung 2.32 berücksichtigt werden, ist aber nur für sehr dicke Streben relevant. Es kann zudem berücksichtigt werden, dass auch die Diagonalstreben einen Teil der Last aufnehmen. Hierfür wird ausgenutzt, dass die eigentliche Zelle und die vertikale Strebe dieselbe Stauchung aufweisen. Allgemein muss gelten, dass $F_{st}/A_{st} = F_z/A_{red}$ ist. Damit ergibt sich für die kritische Last der Zelle:

$$P_{kr,z} = P_{kr,st}A_{red}/A_{st} \quad (5.11)$$

Bei verschieblicher Lagerung der Ränder der Gitterstruktur, also bei zugelassener Querkontraktion, kann die lokale Knicklast berechnet werden, indem die Knicklast einer Zelle mit der Anzahl der Zellen in der Breite multipliziert wird. Abbildung 5.13 zeigt, dass sich im Fall einer behinderten Querkontraktion eine dreieckige Aussteifung einstellt. Diese führt zu einer Spannungskonzentration, sodass die Knicklast in diesem Fall geringer ist als die bei freien Rändern. In Bezug auf das lokale Knicken wirkt sich eine Einspannung also negativ auf diese aus. Aufgrund der Aussteifung wird bei eingespannten Rändern und ungerader Zellanzahl in Breitenrichtung folglich eine Zelle im Bereich hinter der Aussteifung zuerst knicken (siehe Abbildung 5.14 (a)), da hier die Strebenlasten am höchsten sind. Bei einer geraden Anzahl in Breitenrichtung werden unter Annahme einer perfekten Struktur entsprechend in zwei Zellreihen Streben gleichzeitig knicken (siehe Abbildung 5.14 (b)).

Um den Einfluss der Randstörung näher zu untersuchen, wird eine Analogie zum Prinzip von Saint-Venant hergestellt. Nach Saint-Venant klingen Randstörungen bei stabähnlichen Strukturen mit Kreisquerschnitt nach einer Länge ab, die in etwa dem Durchmesser des Stabes ent-

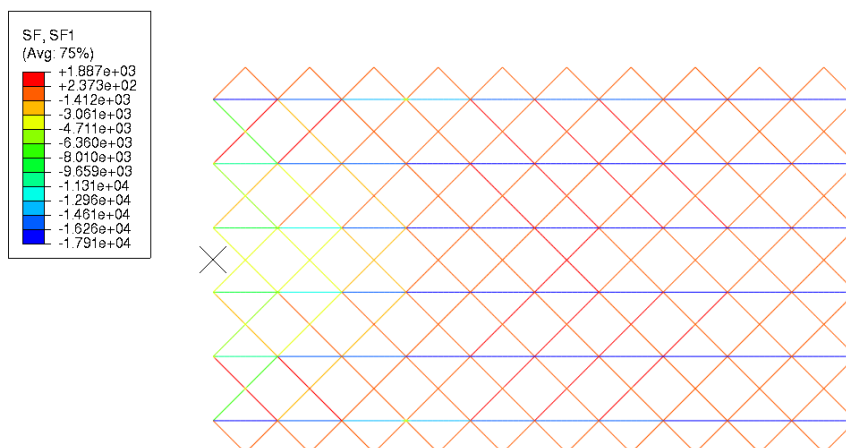


Abb. 5.13: Strebennormalkräfte (SF1) bei einer statischen Analyse eines f2cc,z Gitters.

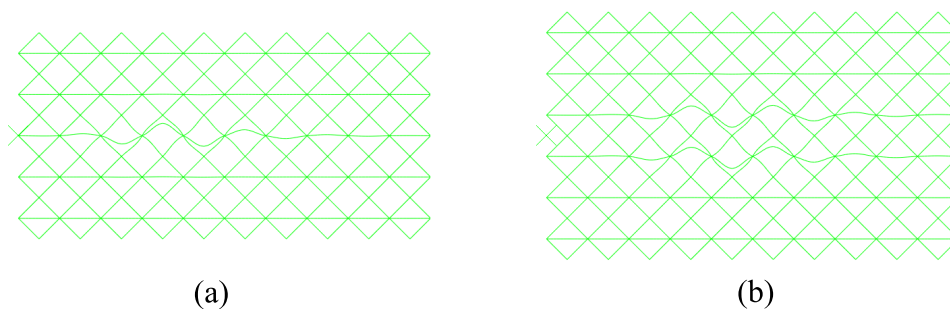


Abb. 5.14: Knickfigur eines f2cc,z Gitters, bei (a) gerader und (b) ungerader Zellenanzahl.

spricht [87]. Ähnliches kann auch bei Gitterstrukturen beobachtet werden, zumindest, sofern die Zellen kubisch sind (siehe auch Abbildung 3.5). Für Gitterstrukturen muss zur Herstellung einer Allgemeingültigkeit eine Anpassung bezüglich des Zellaspektverhältnisses bzw. Höhen zu Breitenverhältnisses vorgenommen werden. Abbildung 5.15 zeigt dies zur Verdeutlichung noch einmal. Die Stauchung der Gitterstruktur ist in guter Näherung etwa ab einer Länge von $n_3 = n_1$ Zellen konstant über die Breite. Die Länge der Versteifung beträgt hierbei wie bei der f2cc Zelle $h(n_1 - 1)/2$. Für eine Zellreihe folgt dadurch, dass $\Delta F = \Delta vE(L_r/A_{\text{red,c}} + L_f/A_{\text{red}})$ ist. Dabei ist ΔF die auf die Zellreihe wirkende Kraft, L_r ist die versteifte Länge, $L_f = n_1 h - L_r$ die unversteifte Länge der Struktur und $A_{\text{red,c}}$ ist die reduzierte Fläche einer Zelle mit blockierter Querkontraktion. Diese kann analog zu A_{red} berechnet werden und ist in Anhang A.1 gegeben. Die auf die Gitterstruktur wirkende Kraft entspricht dann der Summe der auf die Zellreihe wirkenden Kräfte (siehe Gleichung 5.12).

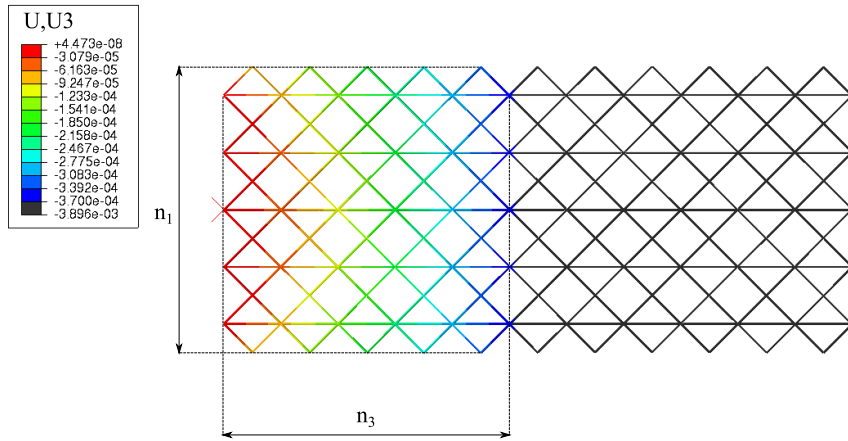


Abb. 5.15: Verschiebung in x_3 -Richtung U_3 eines f2cc,z Gitters, bei statischer Analyse. Der Skalierungsfaktor zur Visualisierung der Verformung wurde zu null gesetzt.

$$\begin{aligned} \text{Wenn } n_1 \text{ gerade: } \frac{F_{\text{ges}}}{\Delta v} &= 2E \sum_{i=0}^{n_1/2} \frac{1}{\frac{L_r}{A_{\text{red,c}}} + \frac{L_f}{A_{\text{red}}}} \\ \text{Wenn } n_1 \text{ ungerade: } \frac{F_{\text{ges}}}{\Delta v} &= 2E \sum_{i=0}^{(n_1-1)/2} \left[\frac{1}{\frac{L_r}{A_{\text{red,c}}} + \frac{L_f}{A_{\text{red}}}} + \frac{1}{h \left(\frac{(n_1-1)}{2A_{\text{red,c}}} + \frac{(n_1+1)}{2A_{\text{red}}} \right)} \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

Gleichung 5.12 gibt eine gute Näherung für den Zusammenhang von Kraft und Verformung des versteiften Bereichs an. Da die Stauchung der mittleren Zellreihe äquivalent zur Gesamtstrukturstauchung ist, kann durch Gleichsetzen der Verformungen ein Zusammenhang zwischen Gesamtkraft und der Kraft in den knickenden Streben hergeleitet werden. Hiermit kann dann schlussendlich die lokale Knicklast der Struktur bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \text{Wenn } n_1 \text{ gerade: } P_{\text{kr}} &= P_{\text{kr,z}} \frac{F_{\text{ges}}}{\Delta v} \left(\frac{L_r}{A_{\text{red,c}}} + \frac{L_f}{A_{\text{red}}} \right) \frac{1}{E} \\ \text{Wenn } n_1 \text{ ungerade: } P_{\text{kr}} &= P_{\text{kr,z}} \frac{F_{\text{ges}}}{\Delta v} \left(\frac{L_r}{A_{\text{red,c}}} + \frac{L_f}{A_{\text{red}}} \right) \frac{1}{E} \frac{n_1}{n_1 - 1} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Um das Ergebnis weiter zu verbessern, kann das Problem statt über eine diskrete Formulierung mittels Summen auch über ein Integral formuliert werden:

$$\frac{F_{\text{ges}}}{\Delta v} = 2E \frac{n_1}{n_1 - 1} \int_0^{\frac{n_1-1}{2}} \frac{1}{\frac{L_r}{A_{\text{red,c}}} + \frac{L_f}{A_{\text{red}}}} dx \quad (5.14)$$

Die Integralgrenzen ergeben sich aus dem Bereich der Versteifung, also beginnend an der Einspannung und endend an der Stelle $(n_1 - 1)/2$. Gleichzeitig muss gelten, dass $A_{\text{red,ges}} = n_1 A_{\text{red}}$. Der Faktor $n_1 / (n_1 - 1)$ skaliert die zur Bestimmung des Integrals betrachtete Ersatzstruktur, so dass diese wieder der tatsächlichen Struktur entspricht.

Für Strukturen mit einer geraden Anzahl von Zellreihen lassen sich auf diesem Wege sehr gute Ergebnisse erzielen. Bei ungerader Anzahl von Zellreihen zeigt sich allerdings, dass deutlich bessere Ergebnisse erzielt werden, wenn als Grenze des Integrals n_1 verwendet und der Skalierungsfaktor $n_1 / (n_1 - 1)$ weggelassen wird. Eine plausible Erklärung hierfür ist, dass die Spitze der Versteifung bei ungerader Anzahl zwischen zwei Zellen liegt, also nicht weiter durch eine vertikale Strebe gestützt wird. Es folgt die Lösung des Integrals:

Wenn n_1 gerade :

$$\frac{F_{\text{ges}}}{\Delta v} = \frac{n_1}{n_1 - 1} \frac{2A_{\text{red}}A_{\text{red,c}}E \left[\ln \left(\frac{n_1 (A_{\text{red}} + A_{\text{red,c}})}{2} \right) - \ln (n_1 A_{\text{red,c}}) \right]}{h (A_{\text{red}} - A_{\text{red,c}})}$$

Wenn n_1 ungerade :

$$\frac{F_{\text{ges}}}{\Delta v} = \frac{2A_{\text{red}}A_{\text{red,c}}E \left[\ln \left(n_1 A_{\text{red,c}} + \left(\frac{n_1}{2} - \frac{1}{2} \right) (A_{\text{red}} - A_{\text{red,c}}) \right) - \ln (n_1 A_{\text{red,c}}) \right]}{h (A_{\text{red}} - A_{\text{red,c}})} \quad (5.15)$$

f2cc,z-Zelle in 1-Richtung

Bei einer Belastung der f2cc,z Zelle in 1-Richtung können die Diagonalstreben knicken, wohingegen die z-Streben als Feder wirken (siehe Abbildung 5.12). Abhängig von den Randbedingungen der Makrostruktur ergeben sich unterschiedliche Randbedingungen zur Lösung des Ansatzes vierter Ordnung zur Bestimmung der Knicklast (Gleichung 2.29). Bei eingespannten Rändern lauten die Randbedingungen einer Diagonalstrebe mit Länge l_d :

- $w(x_3 = 0) = w(x_3 = l_d) = 0$
- $w''(x_3 = l_d) = 0$
- $2EJw''(x_3 = 0) = cw'(x_3 = 0)$

Der Faktor 2 in der letzten Randbedingung ist auf zwei knickende Stäbe zurückzuführen, da die obere und die untere Strebe ein Moment auf die Drehfeder aufbringen. Die Federsteifigkeit c ergibt sich aus der Steifigkeit der horizontalen Strebe. Da die kleinste Knicklast zu einer antimetrischen Knickfigur führt und dadurch die Verdrehungen an beiden Stabenden das gleiche Vorzeichen haben, gilt $c = 6EJ_{\text{st}}/b$, woraus folgt: $U / \tan U - 2U^2EJ_{\text{st}}/cl_d - 1 = 0$.

Bei verschieblichen Rändern führt der mittlere Knoten der Zelle eine laterale Verschiebung aus, die linear abhängig von der auf die Zelle wirkende Kraft ist. Dies wird durch den Proportionalitätsfaktor q beschrieben. Der Faktor q lässt sich letztlich aber wieder aus der Lösung kürzen, da die ermittelten Integrationskonstanten ebenfalls linear von q abhängen. Die zuletzt genannte Bedingung ergibt sich aus der globalen Momentenbilanz. Es ergeben sich folgende Randbedingungen:

- $w(x_3 = 0) = qP$
- $w(x_3 = l_d) = 0$
- $w''(x_3 = l_d) = 0$
- $2EJw''(x_3 = 0) = cw'(x_3 = 0)$
- $cw'(x_3 = 0) = 2qP^2$

Es folgt $U(2EJ_{st}U \sin(U) - cl_d \cos(U)) / (cl_d \sin(U)) = 0$. Es ist nicht die kleinste, sondern die zweitkleinste Lösung zu verwenden, da dem Stab durch die antimetrische Knickform der Zelle ein Maximum in der Knickkurve aufgezwungen wird.

Aus der Steifigkeitsmatrix lässt sich analog zur Bestimmung der reduzierten Fläche auch ein Ausdruck für die Querkontraktion herleiten und mit dem Hooke'schen Gesetz dann die in der vertikalen Strebe wirkende Kraft bestimmen. Aus dem Kräftegleichgewicht folgt die am oberen Knoten wirkende Kraft als Funktion der Schnittkraft in den Diagonalstreben (siehe Gleichung 5.16). Hierbei werden die in den Streben wirkenden Querkräfte vernachlässigt.

$$P_{kr,z} = 2P_{kr,st} \sin(\omega) \left[1 - 12 \frac{r^2}{h^2} \sin(\omega)^2 + 24 \frac{r^2}{h^2} \sin(\omega) \right] \quad (5.16)$$

Der Ausdruck in Gleichung 5.16 kann für schlanke Streben weiter vereinfacht werden, da $r^2/h^2 \rightarrow 0$. Hierdurch ergibt sich die folgende Gleichung für die kritische Last der Zelle:

$$P_{kr,z} = 2 \sin(\omega) P_{kr,st} \quad (5.17)$$

Wie in Abbildung 5.16 zu sehen ist, knickt die Struktur an derselben Stelle, wie bei Belastung in 3-Richtung, also kurz über der Versteifung (siehe Abbildung 5.14 zum Vergleich). Hier lassen sich die Ergebnisse durch die oben diskutierten Methoden nicht weiter verbessern. Dennoch, wird die Knicklast einer Zelle unter Annahme einer behinderten Querkontraktion bestimmt und mit der Gesamtbreite des Gitters multipliziert, ist die Lösung in guter Übereinstimmung mit dem Simulationsergebnis. Bei sehr schlanken Gittern mit einer Breite von nur zwei bis drei Zellen und bei verschieblich gelagerten Gitterstrukturen liefert die Lösung mit nicht behinderter Querkontraktion der Zelle ein besseres Ergebnis. Es folgt für die Knicklast in 1-Richtung für die 2D f2cc,z Gitterstruktur:

$$P_{kr} = P_{kr,z} n_1 \quad (5.18)$$

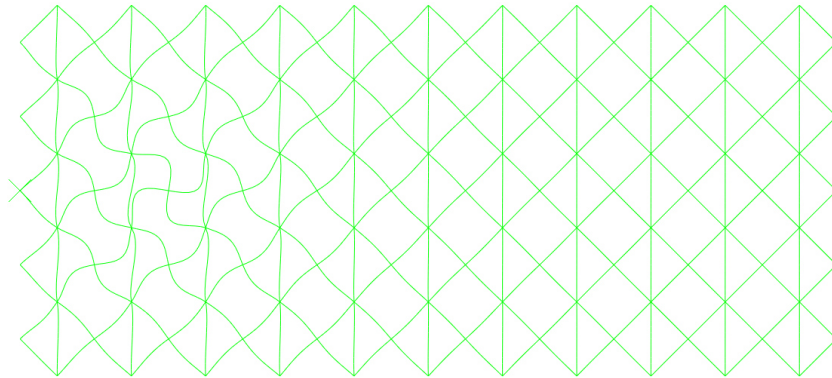


Abb. 5.16: Knickfigur eines in 1-Richtung belasteten 2D f2cc,z Gitters.

f2cc-Zelle

In üblichen Parameterbereichen knickt eine verschieblich gelagerte f2cc Struktur nicht. Werden Querverschiebungen blockiert, ist die sich ergebende antisymmetrische Knickfigur ähnlich zur f2cc,z Zelle in 1-Richtung. Die Knicklast einer Diagonalstrebe entspricht dem zweiten Eulerfall, mit $P_{kr,st} = \pi^2 EJ_{st}/l_d^2$, mit $l_d = h/(2 \sin(\omega))$. Dieser Fall tritt allerdings nur bei sehr gedrun- genen Strukturen auf. Bei längeren Strukturen bildet sich eine Aussteifung aus, in der die Kraft über die Diagonalstreben zu den äußeren Lagern abgeleitet wird. Entsprechend sind diese Streben stärker belastet, wodurch lokales Knicken hier auftreten kann. Die Knickfigur entspricht weniger der einer einzelnen Zelle (siehe Abbildung 5.12). Vielmehr knicken hier, wie in Abbildung 5.17 dargestellt, einzelne Streben entlang der Versteifung. Da am obersten Knoten der Versteifung das angreifende Moment verschwindet, ergibt sich ein an einer Seite mit einer Feder versteifter Ersatzstab. Die zu lösende Gleichung ergibt sich zu: $U/\tan U - U^2 EJ_{st}/(cl_d) = 1$. Die Federsteifigkeit berechnet sich aus den am Ende der knickenden Strebe angrenzenden Streben: $c = 8EJ_{st}/l_d$. Die Knicklast der f2cc Gitterstrukturen ist weitestgehend unabhängig von der Breite und kann in guter Näherung mit folgendem Ansatz bestimmt werden:

$$P_{kr} = 4 \sin(\omega) P_{kr,st} n_1 \quad (5.19)$$

Hierbei wird davon ausgegangen, dass die Struktur am obersten Knoten der Versteifung knickt. Es kann nicht angenommen werden, dass die gesamte auf die Struktur wirkenden Last in der Versteifung aufgenommen wird. In einer Parameterstudie konnte ermittelt werden, dass die umgebende Struktur in etwa die gleiche Last aufnimmt, wie der versteifte Bereich. Hieraus begründet sich die dargestellte Form von P_{kr} in 5.19. Weiterhin treten Mischformen aus globalem und lokalem Knicken auf, wobei das globale Knicken, wie in Abbildung 5.17 zu sehen, kaum wahrnehmbar ist und die entsprechenden Auslenkungen um mehrere Größenordnungen kleiner als die des lokalen Knickens sind. Es ist zudem anzumerken, dass f2cc-Strukturen vor allem in den Eulerfällen 1 und 2 bereits ab sehr kurzen Längen global knicken, sodass sich die hier beschriebene lokale Knickform kaum ausbilden kann.

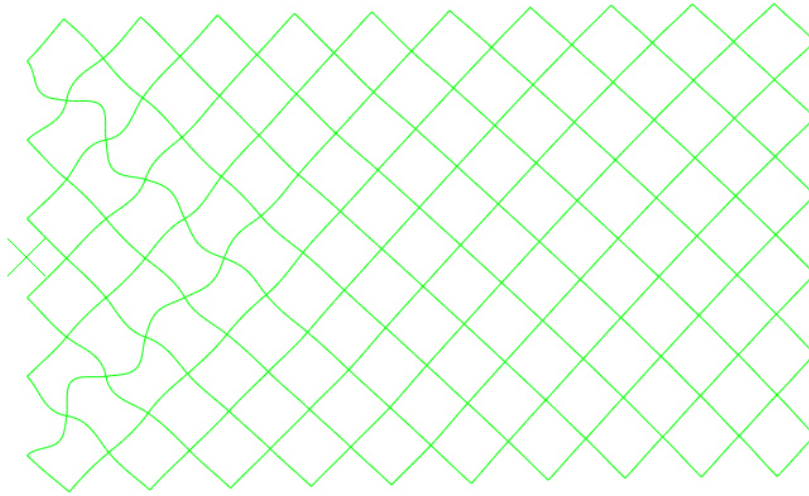


Abb. 5.17: Knickfigur eines f2cc Gitters.

Das hier beschriebene gilt für die diskutierten Gitter nur bis zu einer Breite von etwa zehn bis zwölf Zellen. Bei einer größeren Zellanzahl in Breitenrichtung knicken die Strukturen in den Ecken. Dies lässt sich durch zwei gegensätzliche Effekte erklären: Einerseits steigt dort die Strebenlast mit steigender äußerer Kraft schneller an als die der mittleren Streben, andererseits ist die Knicklast der Randzellen, da diese an einem Ende eingespannt sind, deutlich höher als die der mittleren Zellen. Dies lässt sich bei Betrachtung von Abbildung 5.13 erkennen. Abbildung 5.18 zeigt zudem die berechnete sowie die simulierte lokale Knicklast eines f2cc,z Gitters mit einem Seitenverhältnis von 1:3. Ab einer Breite von 11 Zellen ist ein Knick in der Kurve erkennbar, dieser resultiert aus einer geänderten Knickform.

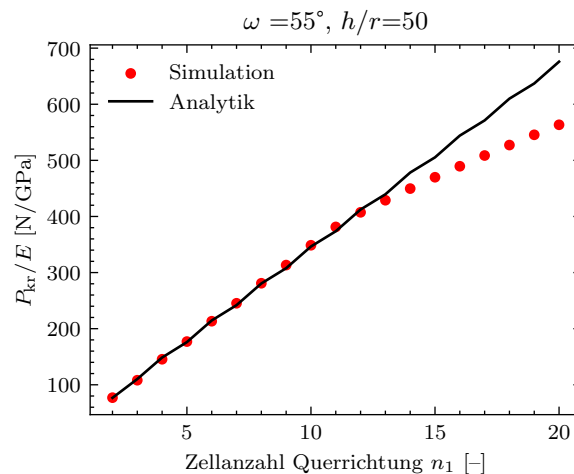


Abb. 5.18: Lokale Knicklast eines f2ccz-Gitters mit einem Zellwinkel von 55° aufgetragen über die Zellanzahl in Querrichtung n_1 .

5.2.2 Dreidimensionale Analysen

Die Herleitung der lokalen Knicklast dreidimensionaler Gitter erfolgt analog zu den zuvor vorgestellten Ansätzen für zweidimensionale Gitterstrukturen. Auch bei den dreidimensionalen Strukturen ändert sich der Ort, an dem die erste Strebe knickt, in Abhängigkeit der Querschnittsgrößen der Makrostruktur und kann sich folglich in der Mitte der Struktur oder in den Ecken befinden. Die Knicklast der f2cc,z Zelle lässt sich völlig analog zum zweidimensionalen Fall bestimmen. Auch hier knickt eine der vertikalen Streben, wobei die Diagonalstreben als Federn modelliert werden können. Die Federsteifigkeit berechnet sich aus der dreidimensionalen f2cc Zelle. Wie bereits bei den zweidimensionalen Analysen, oder auch im Kapitel 3 im Zusammenhang mit den axialen Steifigkeiten näher erläutert, bildet sich aufgrund der im Lager behinderten Querkontraktion eine pyramidenförmige Aussteifung aus. Auch hier kann von den sich in der Struktur befindenden versteifend und unversteifend wirkenden Zellen, bzw. von der auf die Struktur wirkenden Kraft auf die in den Zellen wirkende Kraft geschlossen werden. Mit Gleichung 5.20 kann das Verhältnis von Gesamtkraft zur Längenänderung für einen quadratischen Querschnitt bestimmt werden:

$$\frac{F_{\text{ges}}}{\Delta v} = 4E \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}n_1} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}n_1-x_1} \left(\frac{L_r(x_1, x_2)}{A_{\text{red,c}}} + \frac{L_f(x_1, x_2)}{A_{\text{red}}} \right)^{-1} dx_1 dx_2 \quad (5.20)$$

Die Länge der Versteifung entspricht wie im Zweidimensionalen maximal dem Wert $h(n_1 - 1)/2$. Da die Randstörung symmetrisch ist, genügt die Betrachtung eines Viertels der Struktur. Die x_3 -Koordinate des versteiften Bereichs lässt sich mit folgender Funktion beschreiben:

$$L_r = h \frac{n_1 - 1}{2} - h \frac{n_1 - 1}{2\sqrt{2}b} (x_1 + x_2) \quad (5.21)$$

Die Länge des unversteiften Bereichs entsprechend mittels $L_f = hn_1 - L_r$. Anschließend folgt die Berechnung analog zum Vorgehen im Zweidimensionalen. Gleichung 5.22 zeigt die Lösung von Gleichung 5.20 und liefert für quadratische Querschnitte der Gitterstruktur, also gleicher Anzahl Zellen in 1-Richtung und 2-Richtung, gute Ergebnisse.

$$\frac{F_{\text{ges}}}{\Delta v} = \frac{4A_{\text{red}}A_{\text{red,c}}E n_1^2 \left[\ln(A_{\text{red,c}}) - \ln\left(\frac{A_{\text{red,c}}}{2} - \frac{A_{\text{red}}}{2} + \frac{A_{\text{red}}n_1}{2} + \frac{A_{\text{red,c}}n_1}{2}\right) + \ln(n_1) + 1 \right]}{h(A_{\text{red}} - A_{\text{red,c}})(n_1 - 1)} - \frac{8A_{\text{red}}A_{\text{red,c}}^2E n_1^3 \left[\ln(A_{\text{red,c}}) - \ln\left(\frac{A_{\text{red,c}}}{2} - \frac{A_{\text{red}}}{2} + \frac{A_{\text{red}}n_1}{2} + \frac{A_{\text{red,c}}n_1}{2}\right) + \ln(n_1) \right]}{h(A_{\text{red}} - A_{\text{red,c}})^2(n_1 - 1)^2} \quad (5.22)$$

Für nicht quadratische Querschnitte kann der Ansatz durch n_1/n_2 skaliert werden, was allerdings zu deutlich schlechteren Ergebnissen führt. Erklären lassen sich die höheren Abweichungen zum Simulationsergebnis damit, dass der auf die 1-2-Ebene projizierte Winkel der Diagonalstreben nach wie vor 45° beträgt, sodass sich die Versteifung ungleichmäßig ausbildet und somit die zuvor getroffenen Annahmen nicht mehr ganz korrekt sind. Für diesen allgemeineren

Fall können durch Verwendung des modifizierten zweidimensionalen Ansatzes bessere Ergebnisse erzielt werden. Dabei wird angenommen, dass die Seite des Querschnitts mit der größeren Anzahl von Zellen zum größten Anteil der Spannungskonzentration beiträgt. Wird mit dem zweidimensionalen Ansatz entsprechend für diese Anzahl an Zellen die Knicklast bestimmt und anschließend mit der Anzahl der Zellen in der anderen Richtung multipliziert, somit eine Versteifung in Form eines Prismas angenommen, können deutlich bessere Ergebnisse erreicht werden. Die lokale Knicklast der f2cc,z Gitterstruktur kann dann bestimmt werden, indem Gleichung 5.22 in 5.13 eingesetzt und mit der Anzahl Zellen n_2 multipliziert wird. Abbildung 5.19 zeigt zudem noch ein Beispiel für eine lokal knickende f2cc,z Gitterstruktur.

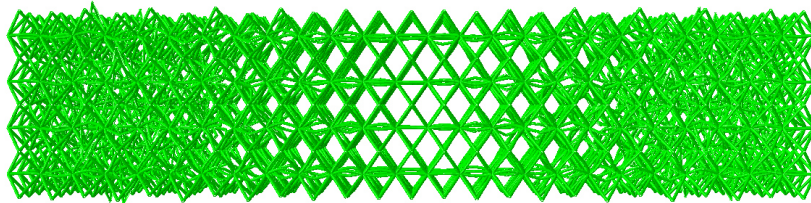


Abb. 5.19: Lokale Knickfigur einer dreidimensionalen f2cc,z Gitterstruktur.

Für Strukturen bestehend aus bcc Zellen oder f2cc Zellen konnten keine hinreichend genauen analytischen Lösungen zur Bestimmung der lokalen Knicklast ermittelt werden. Die Simulationen zeigen, dass sich bei bcc oder f2cc Gitterstrukturen, eine Knickform ähnlich zum zweidimensionalen Fall ausbildet, wenn das Verhältnis n_1/n_2 sehr groß oder sehr klein ist. Geht das Verhältnis $n_1/n_2 \rightarrow 1$, knicken die Streben an der Einspannung quer zur Belastung (siehe Abbildung 5.20). Die Verformung bzw. das Knicken der Streben resultiert folglich nicht aus der an der Struktur anliegenden Axiallast, sondern aus der sich in der Einspannung aufbauende Querbelastung durch die behinderte Querkontraktion. Bei Strukturen aus bcc Zellen bildet sich zwar eine pyramidenähnliche Versteifung aus, allerdings führt das für die f2cc,z Zelle vorgestellte Verfahren nicht zu besseren Ergebnissen. Eine Näherung kann erreicht werden, indem nur die Knicklast der einzelnen Zellen betrachtet wird. Diese kann analog zur zweidimensionalen f2cc Zelle ermittelt werden. Dabei wird in einem ersten Schritt die Knicklast der einzelnen Strebe berechnet, welche der eines Stabes mit einem freien und einem federgelagertem Ende entspricht. Die Knicklast der Zelle bestimmt sich dann über das Kräftegleichgewicht an den einzelnen Knoten:

$$P_{kr} = 4 \sin(\omega) P_{kr,st} \quad (5.23)$$

Danach wird die Zellknicklast mit der Anzahl der Zellen im Querschnitt multipliziert. Dennoch treten dabei Abweichungen von bis zu 25% auf.

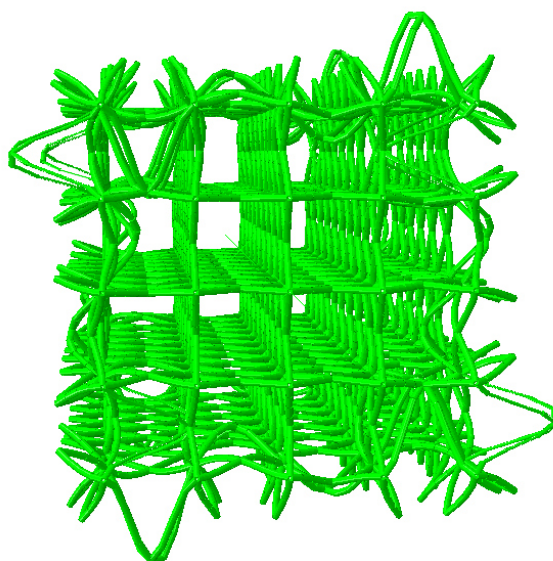


Abb. 5.20: Lokale Knickfigur einer dreidimensionalen f2cc Gitterstruktur.

5.3 Diskussion der Ergebnisse

Abschließend folgt eine kurze Zusammenfassung und Diskussion zu den ermittelten Ansätzen sowie ein Vergleich mit den Simulationsergebnissen. Abbildungen 5.21 und 5.22 zeigen die Ergebnisse für f2cc,z Gitterstrukturen und bcc Gitterstrukturen exemplarisch für kubische Zellen und ein Verhältnis von Zellhöhe zu Radius $h/r = 20$. Weitere Ergebnisse können Anhang A.4 entnommen werden. Es soll zuerst die aufgestellte Methode und das Vorgehen zur Bestimmung lokaler und globaler Knicklasten von Gitterstrukturen zusammengefasst werden. Zur Bestimmung der globalen Knicklast von Gitterstrukturen müssen in einem ersten Schritt die effektiven Biegesteifigkeiten bestimmt werden. Mit diesen effektiven Steifigkeiten kann dann mit der Euler-Formel die globale Knicklast ermittelt werden, wobei ggf. auch der Einfluss der Schubverformung zu berücksichtigen ist. Hierbei ist zu beachten, dass je nach Geometrie für eine spezifische Lagerung unterschiedliche Eulerfälle resultieren können. Es zeigt sich zudem, dass die an den Enden durch die Einspannung behinderte Querkontraktion im dreidimensionalen Fall einen deutlich größeren Einfluss auf die Knicklast hat als im zweidimensionalen Fall. Berücksichtigt werden kann dies bedingt durch einen angenäherten, vereinfachten Steifigkeitsverlauf in axialer Richtung. Anschließend kann mit der Ritz-Methode die Knicklast in guter Näherung bestimmt und in Form eines Faktors zur Eulerknicklast hinzugerechnet werden. Die hergeleiteten Ansätze eignen sich primär für solche Strukturen mit annähernd quadratischer Grundfläche bzw. quadratischem Querschnitt, also ähnlicher Anzahl Zellen in 1-Richtung und 2-Richtung. Je flacher die Struktur wird, desto schlechtere Ergebnisse werden erzielt. Zudem sind die erzielten Ergebnisse im Eulerfall 2 am genauesten, da der Bereich des Spannungsmaximums nicht in den Bereich der Randstörung fällt. Bei f2cc,z Gitterstrukturen ergeben sich deutlich bessere Ergebnisse als für bcc Gitterstrukturen. Insbesondere aber bei sehr kurzen Strukturen wird

die lokale Knicklast deutlich überschätzt. Bei sehr hohen Strebenradien oder bei relativ großen Zellwinkeln kann es deshalb passieren, dass die Struktur beginnt global zu knicken, bevor sich die lokale Knickform ausbildet. In diesen Fällen weist der berechnete Übergang vom lokalen zum globalen Knicken größere Fehler auf. Allgemein kann noch gesagt werden, dass bei größeren Strebenradien, also geringeren Schlankheiten, auch größere Abweichungen zu erwarten sind. Im Rahmen der Untersuchungen wurden weitere dehnungsdominierte Gittertypen, wie die bcc,z-Zelle analysiert. Auch hier können sehr gute Ergebnisse erzielt werden, sodass davon auszugehen ist, dass die dargestellten Ansätze für dehnungsdominierte Gitter, also solche mit Vertikalstrebe in Belastungsrichtung, sehr gut funktionieren. Bei biegedominierten Gittern wie bcc oder f2cc sind die Abweichungen deutlich höher. Dies ist unter anderem auch mit den größeren Abweichungen bei der Bestimmung der effektiven Biegesteifigkeit zu begründen. Für bcc Strukturen können die Abweichungen mit den vorgestellten Ansätzen beim globalen Knicken nur auf etwa 20 % gebracht werden. Hierbei ist allerdings anzumerken, dass die Abweichung auch bei unterschiedlichen Strebendurchmessern nicht deutlich größer wird. Beim lokalen Knicken können die Abweichungen auf etwa 25 % begrenzt werden. Hier ist allerdings anzumerken, dass auch Abweichungen mit negativen Vorzeichen auftreten, sodass die tatsächliche Knicklast überschätzt wird.

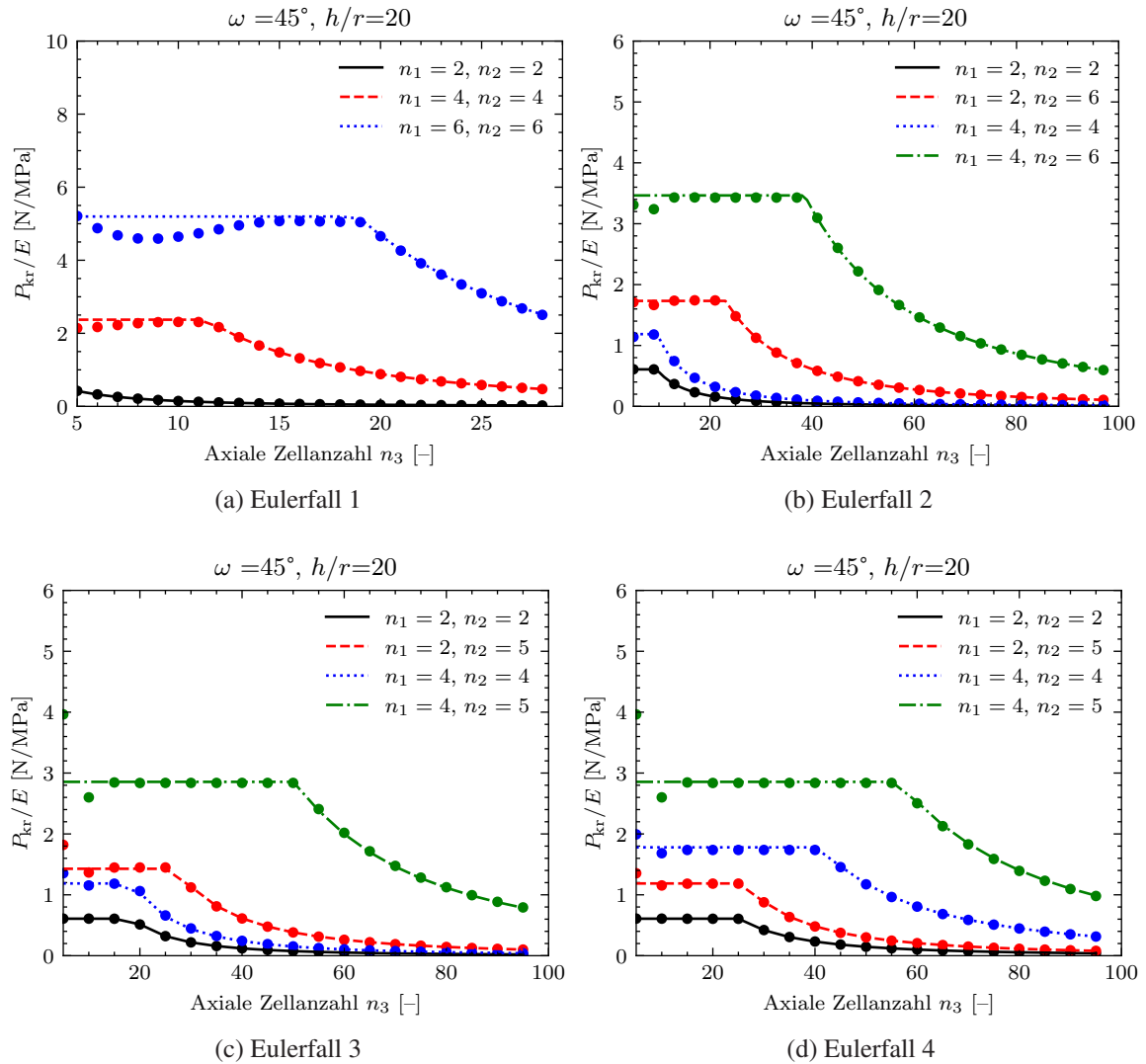


Abb. 5.21: Simulationsergebnisse im Vergleich zur analytischen Lösung der Knicklast von 3D f2cc,z-Gitterstrukturen mit $\omega = 45^\circ$, $b/h = 1$, normiert auf den E-Modul in Abhängigkeit der Zellanzahl in axialer Richtung n_3 und der Zellanzahl in Querschnittsrichtung n_1 und n_2 , für (a) Eulerfall 1, (b) Eulerfall 2, (c) Eulerfall 3 (d) Eulerfall 4.

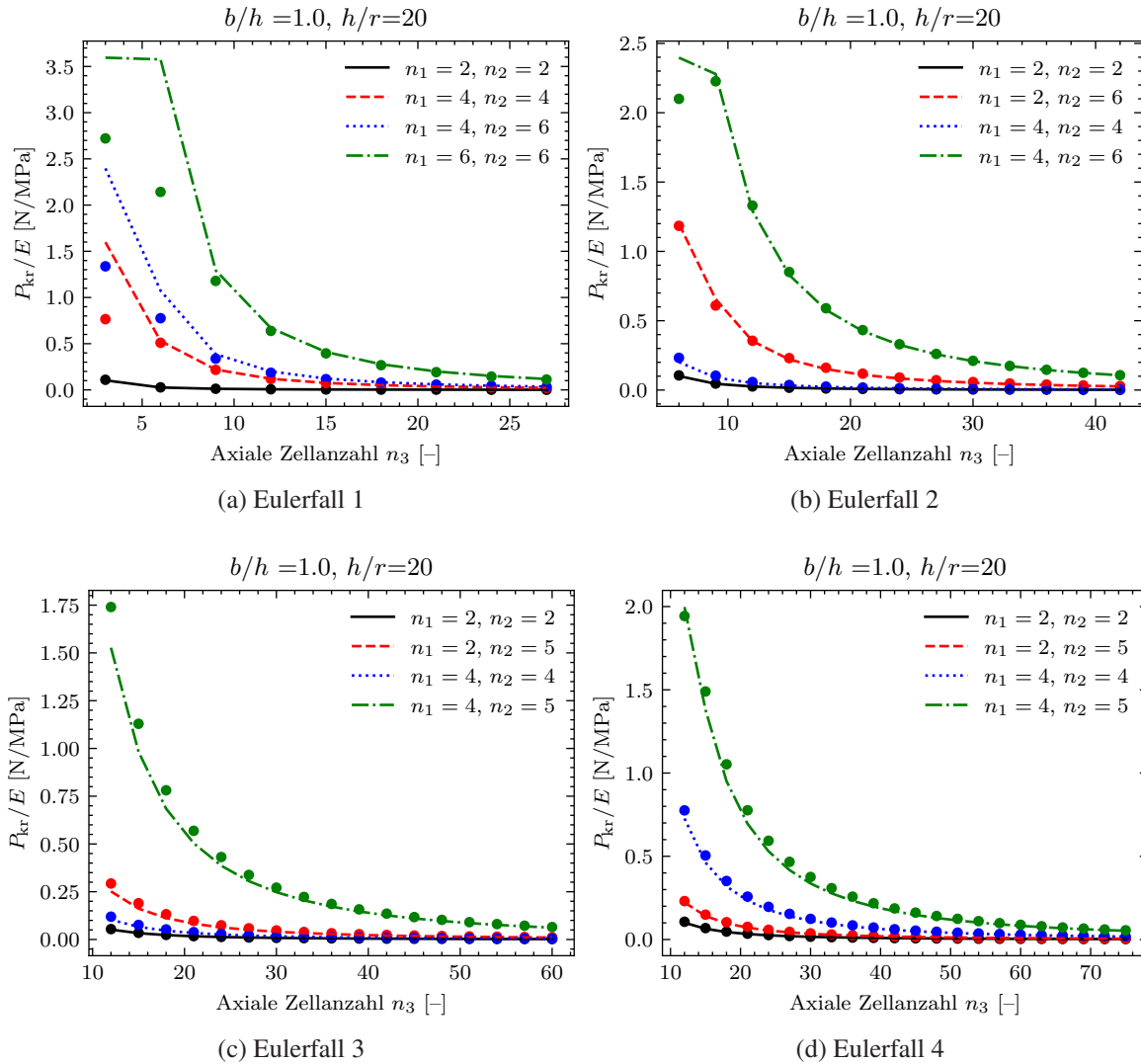


Abb. 5.22: Simulationsergebnisse im Vergleich zur analytischen Lösung der Knicklast von 3D bcc-Gitterstrukturen mit $\omega = 35,26^\circ$, $b/h = 1$, normiert auf den E-Modul in Abhängigkeit der Zellanzahl in axialer Richtung n_3 und der Zellanzahl in Querschnittsrichtung n_1 und n_2 , für (a) Eulerfall 1, (b) Eulerfall 2, (c) Eulerfall 3 (d) Eulerfall 4.

6 Schlussfolgerung und Ausblick

Die Motivation zu dieser Arbeit lieferte insbesondere die Tatsache, dass in der Literatur sehr wenige und überwiegend unzureichend genaue Ansätze zu finden sind, mit denen sich die grundlegenden mechanischen Eigenschaften oder vielmehr das strukturmechanische Verhalten von Gitterstrukturen effizient beschreiben lassen. Daher wurden in dieser Arbeit Ansätze entwickelt, mit denen sich sowohl die Dehnsteifigkeiten, als auch die Schubsteifigkeiten von Gitterstrukturen analytisch beschreiben lassen, denn dies genügt einer vollständig homogenisierten Beschreibung im Sinne einer Werkstoffformulierung. Die Grundlage zur Herleitung dieser Ansätze liefert die Steifigkeitsmatrix der Einheitszelle, die in Abhängigkeit der wesentlichen zur Beschreibung der Topologie der Zelle notwendigen Parameter aufgestellt wurde. Durch Lösen des Zusammenhangs zwischen Kraft, Steifigkeit und Verschiebung, oder vielmehr des daraus entstehenden Gleichungssystems, können nach Aufgabe entsprechender Randbedingungen parameterabhängige Ansätze zur Beschreibung der jeweiligen Steifigkeit aufgestellt werden. Auf Grundlage dieser Methode konnten weiterhin reduzierte Flächen und Flächenträgheitsmomente bestimmt werden, mit denen eine Beschreibung einer effektiven Biegesteifigkeit gelingt. Die ermittelten effektiven Biegesteifigkeiten konnten verwendet werden, um die Knicklast von stabförmigen Gitterstrukturen für alle vier Eulerfälle in guter Näherung zu beschreiben. Somit liefert diese Arbeit die wesentlichen, zur Beschreibung des Strukturverhaltens von Gitterstrukturen notwendigen Ansätze. Es folgt eine Zusammenfassung der grundlegenden Ergebnisse dieser Arbeit.

Effektive Dehnsteifigkeiten von Gitterstrukturen

Es wurde ein Ansatz aufgestellt, mit dem es gelingt, die effektiven Dehnsteifigkeiten von Gitterstrukturen zu beschreiben. Diese Dehnsteifigkeiten können weiterhin durch Bezug auf die entsprechenden Flächen in effektive Elastizitätskonstanten umgerechnet werden. So gelingt eine von der Zellanzahl unabhängige Beschreibung der effektiven Dehnsteifigkeit im Sinne einer Werkstoffformulierung. Nach der entwickelten Methode wird in Abhängigkeit der Randbedingungen entweder eine analytische Formel verwendet, oder das daraus ermittelte Ergebnis mit einem empirischen Korrekturfaktor multipliziert. Auf diese Weise gelingt eine Beschreibung der effektiven Dehnsteifigkeiten für technisch relevante Randbedingungen. Die Ergebnisse zeigen weiterhin, dass bei dehnungsdominiertem Verhalten des Gitters deutlich höhere Dehnsteifigkeiten erreicht werden können. Die Methode liefert weiterhin einen Ausgangspunkt zur Beschreibung der Eigenschaften beliebiger Randbedingungen. Dennoch zeigt sich, dass eine starke Abhängigkeit von den Randbedingungen besteht, sodass eine Homogenisierung im Sinne eines

effektiven Werkstoffmodells nur eingeschränkt möglich ist. Vielmehr lässt sich die Homogenisierung nur für spezifische Randbedingungen durchführen, da in Abhängigkeit der Randbedingungen die Streben unterschiedlich belastet werden, oder gar erst zur Steifigkeit beitragen. Dies kann in einem allgemeinen Ansatz nicht berücksichtigt werden, sodass sich für unterschiedliche Randbedingungen auch unterschiedliche Ansätze ergeben. Exemplarisch wurden anhand der dargestellten Methode für f2cc,z und bcc Gitterstrukturen Ausdrücke für die effektiven Steifigkeiten ermittelt. Die Ergebnisse wurden mit Finite Elemente Simulationen verglichen und eine sehr gute Übereinstimmung erreicht. Weiterhin wurde im Zuge der Untersuchungen der Dehnsteifigkeiten das dieser Arbeit zugrunde liegende Simulationsmodell durch experimentelle Untersuchungen validiert.

Effektive Schubsteifigkeiten von Gitterstrukturen

Analog zum Ansatz zur Ermittlung der effektiven Dehnsteifigkeiten wurde ein Ansatz zur Ermittlung der effektiven Schubsteifigkeiten entwickelt. Die Schubsteifigkeiten können bei Bezug auf die entsprechenden Bezugsflächen in effektive Schubmodule umgeformt werden, wodurch auch für die Schubsteifigkeit eine Zellanzahl unabhängige Formulierung gelingt. Zusammen mit den effektiven Dehnsteifigkeiten kann so unter Berücksichtigung der bei der Ermittlung der Dehnsteifigkeiten beschriebenen Einschränkungen eine Beschreibung des effektiven Werkstoffverhaltens erreicht werden. Analog zu den Dehnsteifigkeiten wurden die effektiven Schubsteifigkeiten für f2cc,z und bcc Gitterstrukturen in Abhängigkeit der wesentlichen geometrischen Zellparameter aufgestellt. Hierbei wird zwischen Randzellen und mittleren Zellen unterschieden. Die Summe aus den Schubsteifigkeiten dieser Zellen ergibt die Schubsteifigkeit der Gitterstruktur in Abhängigkeit der Zellanzahl, bzw. bei Bezug auf die entsprechende Fläche den entsprechenden Schubmodul. Sowohl für bcc, als auch für f2cc,z Gitterstrukturen konnte dabei eine sehr gute Übereinstimmung mit Simulationsergebnissen erreicht werden.

Effektive Biegesteifigkeiten von Gitterstrukturen

Zur Ermittlung der effektiven Biegesteifigkeiten von Gitterstrukturen wurde ein Ansatz ermittelt, der auf der Ermittlung reduzierter Flächenträgheitsmomente und reduzierter Flächen auf Einheitszellebene beruht. Zur Ermittlung der effektiven Biegesteifigkeit der Gitterstruktur wird das ermittelte reduzierte Flächenträgheitsmoment der Zellen als Eigenträgheitsmoment zugrunde gelegt. Die Ermittlung des Steineranteils erfolgt über den Abstand des Mittelpunkts der Zellen zur neutralen Achse, sowie der reduzierten Fläche der Einheitszelle. So gelingt eine gute Näherung des effektiven Flächenträgheitsmoments des Querschnitts und folglich auch der Biegesteifigkeit. Die Methode wurde wiederum auf bcc und f2cc,z Gitterstrukturen angewandt und mit Finite Elemente Simulationen verglichen. Für f2cc,z Gitterstrukturen kann eine sehr gute Übereinstimmung mit den Simulationsergebnissen erreicht werden. Für bcc Strukturen sind die Abweichungen in gewissen Parameterbereichen teilweise sehr groß. Dennoch liefert der aufgestellte Ansatz einen guten Ausgangspunkt für die Vorauslegung von biegebelasteten Gitterstrukturen sowie eine Grundlage für die Ermittlung globaler Knicklasten von Gitterstrukturen.

Ermittlung der globalen Knicklast von Gitterstrukturen

Die zuvor dargestellten Ansätze zur Ermittlung der Steifigkeiten von Gitterstrukturen finden Eingang in die Ermittlung der globalen Knicklast von stabförmigen Gitterstrukturen. Zur Bestimmung der globalen Knicklast wird in einem ersten Schritt die effektive Biegesteifigkeit bestimmt und diese schließlich in die Euler Formel eingesetzt. Abhängig von der Gitterzelle und den Mesostrukturparametern können oder sollten weitere Einflüsse, wie die Schubverformung berücksichtigt werden. Die aufgestellten Ansätze eignen sich dabei primär für Strukturen mit annähernd quadratischer Grundfläche. Allgemein sind die Abweichungen bei biegedominierten Gitterstrukturen höher als bei dehnungsdominierten Gitterstrukturen, oder solchen, die durch x -, y - oder z -Streben verstärkt sind. Ein entscheidender Grund ist hier definitiv die bereits unzureichend genaue Beschreibung der Biegesteifigkeit. Dennoch liefert der dargestellte Ansatz einen guten Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen und Verallgemeinerungen, sowie eine grundlegend geeignete Methode zur Vorauslegung oder vielmehr Dimensionierung von makroskopisch knickgefährdeten Gitterstrukturen, also solchen, bei denen die Makrostruktur eine tendenziell hohe Schlankheit aufweist. Im Rahmen dieser Arbeit wurden auch in Bezug auf die globalen Knicklasten bcc und $f2cc,z$ Gitterstrukturen näher untersucht.

Ermittlung der lokalen Knicklast von Gitterstrukturen

In Bezug auf die Ermittlung lokaler Knicklasten von Gitterstrukturen ist eine allgemeine Beschreibung nicht zielführend, da die kritische Last stark von der individuellen Topologie der Einheitszelle abhängt. Dementsprechend sind die lokalen Knicklasten immer für jeden Zelltyp individuell zu beschreiben. Weiterhin nehmen die Randbedingungen stark Einfluss auf den Ort der knickgefährdeten Strebe. Dementsprechend gehört zur Ermittlung der lokalen Knicklast in einem ersten Schritt die Identifikation der knickgefährdeten Strebe. Anschließend kann in einem *bottom-up* Ansatz die zugehörige makroskopische Last ermittelt werden. Konkret bedeutet dies, dass die ermittelte Strebenknicklast zuerst auf Zellebene und anschließend auf Zellverbundebene umgerechnet wird. Die Ansätze zur Beschreibung der lokalen Knicklast wurden erneut für bcc und $f2cc,z$ Gitterstrukturen näher untersucht.

In Bezug auf die in Kapitel 1 aufgestellten Forschungshypothesen lassen sich aus der Zusammenfassung der Ergebnisse nun folgende Schlussfolgerung aufstellen:

Hypothese I: Effektive Steifigkeiten auf Einheitszellebene

Die Beschreibung der effektiven Steifigkeiten auf Einheitszellebene durch wesentliche geometrische Parameter (Zellhöhe, Strebenradius, Zellwinkel) und wesentliche Parameter des Grundwerkstoffs (E-Modul, Querkontraktionszahl) gelingt sowohl für die Dehnsteifigkeiten als auch für die Schubsteifigkeiten.

Hypothese II: Übertragung auf Zellverbundebene

Die Übertragung dieser effektiven Zellsteifigkeiten auf Zellverbundebene gelingt für die Dehnsteifigkeiten, sofern die Randbedingungen explizit beachtet werden. Für die Schubsteifigkeiten gelingt die Übertragung für einen einfachen Scherlastfall.

Hypothese III: Homogenisierung des effektiven Werkstoffverhaltens

Die Beschreibung homogenisierter Werkstoffeigenschaften auf Grundlage der ermittelten effektiven Steifigkeiten gelingt eingeschränkt. Für die Dehnsteifigkeiten sind die Randbedingungen explizit im Werkstoffmodell zu berücksichtigen. Dies steht einer allgemeinen Homogenisierung im Sinne eines Werkstoffmodells im Wege. Zudem werden je nach Zelltyp Querkontraktionszahlen erreicht, die mit den üblichen Werkstoffmodellen nicht abgebildet werden können.

Hypothese IV: Beschreibung des Knickverhaltens durch effektive Eigenschaften

Die grundsätzliche Beschreibung des effektiven Knickverhaltens auf globaler Ebene gelingt in guter Näherung. Insbesondere für dehnungsdominierte Gitter können zufriedenstellende Genauigkeiten erreicht werden. Die Beschreibung auf lokaler Ebene ist stark abhängig vom Zelltyp und den Randbedingungen und somit sehr individuell. Eine allgemeine Beschreibung der lokalen Knicklasten gelingt folglich nicht, sehr wohl aber eine zell-individuelle Beschreibung. Auch hier können für dehnungsdominierte Gitter deutlich bessere Ergebnisse erzielt werden.

Zusammengefasst liefert diese Arbeit allgemeine Ansätze zur Beschreibung effektiver Eigenschaften und des strukturellen Verhaltens periodischer, homogen verteilter Gitterstrukturen. Die Ansätze liefern eine gute Ausgangslage für weitere Forschung, z.B. hinsichtlich einer vereinheitlichten, homogenisierten Beschreibung. Hierzu sind weitere Untersuchungen anzustellen, z.B. wie es gelingt, die durch die Randbedingungen entstehenden unterschiedlichen Belastungen der Streben effektiv in einem Modell abzubilden. Weiterhin bietet die Beschreibung der effektiven Biegesteifigkeiten biegedominierter Gitterstrukturen weiteres Optimierungspotenzial. Eine verbesserte Beschreibung der Biegesteifigkeiten wird auch einen positiven Einfluss auf die Ermittlung der globalen Knicklast haben. Dennoch bilden die entwickelten Ansätze eine Grundlage zur Ermittlung des strukturmechanischen Verhaltens allgemeiner, aperiodischer Gitterstrukturen mit beliebigen Randbedingungen. Die hierdurch mögliche zielgerichtete Verteilung von Material und die hierdurch frei erzeugbaren effektiven Eigenschaften, eröffnen nicht nur enormes Potenzial hinsichtlich einer optimalen, lastgerechten dreidimensionalen Auslegung, sondern auch hinsichtlich multidisziplinärer Optimierungsziele, z.B. bezüglich thermischer und mechanischer Anforderungen.

Literatur

- [1] Lorna J. GIBSON. Biomechanics of cellular solids. In: *Journal of Biomechanics* 38.3 (2005), S. 377–399. ISSN: 0021-9290. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2004.09.027. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jbiomech.2004.09.027>.
- [2] M. F. ASHBY und R. F. Mehl MEDALIST. The mechanical properties of cellular solids. In: *Metallurgical Transactions A* 14.9 (1983), S. 1755–1769. ISSN: 1543-1940. DOI: 10.1007/BF02645546. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/bf02645546>.
- [3] Thomas TANCOGNE-DEJEAN, Adriaan B. SPIERINGS und Dirk MOHR. Additively-manufactured metallic micro-lattice materials for high specific energy absorption under static and dynamic loading. In: *Acta Materialia* 116 (2016), S. 14–28. ISSN: 13596454. DOI: 10.1016/j.actamat.2016.05.054. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359645416304153>.
- [4] Zuhul OZDEMIR u. a. Energy absorption in lattice structures in dynamics: Experiments. In: *International Journal of Impact Engineering* 89 (2016), S. 49–61. ISSN: 0734-743X. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2015.10.007. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2015.10.007>.
- [5] Nan JIN u. a. Failure and energy absorption characteristics of four lattice structures under dynamic loading. In: *Materials & Design* 169.6058 (2019), S. 107655. ISSN: 02641275. DOI: 10.1016/j.matdes.2019.107655.
- [6] F. SCALZO u. a. Experimental study on the high-damping properties of metallic lattice structures obtained from SLM. In: *Precision Engineering* 71 (2021), S. 63–77. ISSN: 01416359. DOI: 10.1016/j.precisioneng.2021.02.010.
- [7] Wahyudin P. SYAM u. a. Design and analysis of strut-based lattice structures for vibration isolation. In: *Precision Engineering* 52 (2018), S. 494–506. ISSN: 01416359. DOI: 10.1016/j.precisioneng.2017.09.010.
- [8] SAKSHIKOKIL-SHAH u. a. Recent Advancements of Micro-Lattice Structures: Application, Manufacturing Methods, Mechanical Properties, Topologies and Challenges. In: *Arabian Journal for Science and Engineering* 46.12 (2021), S. 11587–11600. ISSN: 2191-4281. DOI: 10.1007/s13369-021-05992-y. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s13369-021-05992-y>.

- [9] Z. P. SUN, Y. B. GUO und V.P.W. SHIM. Characterisation and modeling of additively-manufactured polymeric hybrid lattice structures for energy absorption. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 191 (2021), S. 106101. ISSN: 0020-7403. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2020.106101. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.106101>.
- [10] Aamer NAZIR u. a. A state-of-the-art review on types, design, optimization, and additive manufacturing of cellular structures. In: *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 104.9 (2019), S. 3489–3510. ISSN: 0268-3768. DOI: 10.1007/s00170-019-04085-3. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00170-019-04085-3>.
- [11] D. A. RAMIREZ u. a. Open-cellular copper structures fabricated by additive manufacturing using electron beam melting. In: *Materials Science and Engineering: A* 528.16-17 (2011), S. 5379–5386. ISSN: 0921-5093. DOI: 10.1016/j.msea.2011.03.053. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.msea.2011.03.053>.
- [12] Andrea VIGLIOTTI und Damiano PASINI. Stiffness and strength of tridimensional periodic lattices. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 229-232 (2012), S. 27–43. ISSN: 0045-7825. DOI: 10.1016/j.cma.2012.03.018. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2012.03.018>.
- [13] José SOUZA, Alexander GROSSMANN und Christian MITTELSTEDT. Micromechanical analysis of the effective properties of lattice structures in additive manufacturing. In: *Additive Manufacturing* 23 (2018), S. 53–69. ISSN: 2214-8604. DOI: 10.1016/j.addma.2018.07.007. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.addma.2018.07.007>.
- [14] Evren YASA. Selective laser melting. In: *Additive Manufacturing*. Bd. 11. Elsevier, 2021, S. 77–120. ISBN: 9780128184110. DOI: 10.1016/B978-0-12-818411-0.00017-3.
- [15] Roderic LAKES. Materials with structural hierarchy. In: *Nature* 361.6412 (1993), S. 511–515. DOI: 10.1038/361511a0.
- [16] T. A. SCHAEGLER u. a. Ultralight metallic microlattices. In: *SCIENCE* 334.6058 (2011), S. 962–965. ISSN: 0036-8075. DOI: 10.1126/science.1211649.
- [17] Chunze YAN u. a. Evaluations of cellular lattice structures manufactured using selective laser melting. In: *INTERNATIONAL JOURNAL OF MACHINE TOOLS & MANUFACTURE* 62 (2012), S. 32–38. ISSN: 0890-6955. DOI: 10.1016/j.ijmachtools.2012.06.002.
- [18] Mark C. MESSNER. Optimal lattice-structured materials. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 96 (2016), S. 162–183. ISSN: 00225096. DOI: 10.1016/j.jmps.2016.07.010.
- [19] Tobias MACONACHIE u. a. SLM lattice structures: Properties, performance, applications and challenges. In: *Materials & Design* 183.3 (2019), S. 108137. ISSN: 02641275. DOI: 10.1016/j.matdes.2019.108137.

- [20] Olaf REHME. Cellular Design for Laser Freeform Fabrication. Cuvillier Verlag, 2010. ISBN: 9783736932739.
- [21] Alexander TAUBE u. a. Numerische und mechanische Untersuchung additiv gefertigter TiAl6V4 Gitterstrukturen. In: Additive Fertigung von Bauteilen und Strukturen. Hrsg. von Hans Albert RICHARD, Britta SCHRAMM und Thomas ZIPSNER. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2017, S. 201–214. ISBN: 978-3-658-17779-9. DOI: 10.1007/978-3-658-17780-5{\textunderscore}13.
- [22] M. F. ASHBY. The properties of foams and lattices. In: Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 364.1838 (2006), S. 15–30. ISSN: 1364503X. DOI: 10.1098/rsta.2005.1678.
- [23] Joel C. VASCO. Additive manufacturing for the automotive industry. In: Additive Manufacturing. Elsevier, 2021, S. 505–530. DOI: 10.1016/b978-0-12-818411-0.00010-0. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/b978-0-12-818411-0.00010-0>.
- [24] Alessandro BORRELLI u. a. Assessment of Crash Performance of an Automotive Component Made through Additive Manufacturing. In: Applied Sciences 10.24 (2020), S. 9106. ISSN: 2076-3417. DOI: 10.3390/app10249106. URL: <https://www.mdpi.com/930436>.
- [25] Jannik BÜHRING, Miguel NUÑO und Kai-Uwe SCHRÖDER. Additive manufactured sandwich structures: Mechanical characterization and usage potential in small aircraft. In: Aerospace Science and Technology 111 (2021), S. 106548. ISSN: 1270-9638. DOI: 10.1016/j.ast.2021.106548. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ast.2021.106548>.
- [26] Francis H. FROES und Rodney BOYER. Additive Manufacturing for the Aerospace Industry. Elsevier, 2019. ISBN: 9780128140635.
- [27] R. LIU u. a. Aerospace applications of laser additive manufacturing. In: Laser Additive Manufacturing. Elsevier, 2017, S. 351–371. DOI: 10.1016/b978-0-08-100433-3.00013-0. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/b978-0-08-100433-3.00013-0>.
- [28] Shahir MOHD YUSUF, Samuel CUTLER und Nong GAO. Review: The Impact of Metal Additive Manufacturing on the Aerospace Industry. In: Metals 9.12 (2019), S. 1286. ISSN: 2075-4701. DOI: 10.3390/met9121286. URL: <https://www.mdpi.com/584754>.
- [29] Joel C. NAJMON, Sajjad RAEISI und Andres TOVAR. Review of additive manufacturing technologies and applications in the aerospace industry. In: Additive Manufacturing for the Aerospace Industry. Elsevier, 2019, S. 7–31. DOI: 10.1016/b978-0-12-814062-8.00002-9. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/b978-0-12-814062-8.00002-9>.
- [30] Shoufeng YANG u. a. Rapid prototyping of ceramic lattices for hard tissue scaffolds. In: Materials & Design 29.9 (2008), S. 1802–1809. ISSN: 0264-1275. DOI: 10.1016/j.matdes.2008.03.024. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.matdes.2008.03.024>.

- [31] Tatevik MINASYAN u. a. Additively manufactured mesostructured MoSi₂-Si₃N₄ ceramic lattice. In: *Ceramics International* 45.8 (2019), S. 9926–9933. ISSN: 02728842. DOI: 10.1016/j.ceramint.2019.02.035.
- [32] Jin GUO u. a. Fine lattice structural titanium dioxide ceramic produced by DLP 3D printing. In: *Ceramics International* 45.17 (2019), S. 23007–23012. ISSN: 02728842. DOI: 10.1016/j.ceramint.2019.07.346.
- [33] Can TANG u. a. Effect of process parameters on mechanical properties of 3D printed PLA lattice structures. In: *Composites Part C: Open Access* 3 (2020), S. 100076. ISSN: 26666820. DOI: 10.1016/j.jcomc.2020.100076.
- [34] Katarina MONKOVA u. a. Mechanical Vibration Damping and Compression Properties of a Lattice Structure. In: *MATERIALS* 14.6 (2021), S. 1502. ISSN: 1996-1944. DOI: 10.3390/ma14061502. URL: <https://www.mdpi.com/1040066>.
- [35] Stefano GONELLA und RUZZENE, MASSIMO. Homogenization and equivalent in-plane properties of two-dimensional periodic lattices. In: *International Journal of Solids and Structures* 45.10 (2008), S. 2897–2915. ISSN: 0020-7683. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2008.01.002. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.01.002>.
- [36] Andrea VIGLIOTTI und Damiano PASINI. Mechanical properties of hierarchical lattices. In: *Mechanics of Materials* 62 (2013), S. 32–43. ISSN: 0167-6636. DOI: 10.1016/j.mechmat.2013.03.003. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmat.2013.03.003>.
- [37] Houssam ABDOUL-ANZIZ und Pierre SEPPECHER. Strain gradient and generalized continua obtained by homogenizing frame lattices. In: *2325-3444* 6.3 (2018), S. 213–250. ISSN: 2325-3444. DOI: 10.2140/memocs.2018.6.213.
- [38] Seyed Mohammad AHMADI u. a. Additively Manufactured Open-Cell Porous Biomaterials Made from Six Different Space-Filling Unit Cells: The Mechanical and Morphological Properties. In: *MATERIALS* 8.4 (2015), S. 1871–1896. ISSN: 1996-1944. DOI: 10.3390/ma8041871. URL: <https://www.mdpi.com/97004>.
- [39] Adithya CHALLAPALLI und Jaehyung JU. Continuum Model for Effective Properties of Orthotropic Octet-Truss Lattice Materials. In: *ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress and Exposition* (2015). DOI: 10.1115/IMECE2014-38925.
- [40] K. USHIJIMA u. a. An investigation into the compressive properties of stainless steel micro-lattice structures. In: *Journal of Sandwich Structures & Materials* 13.3 (2011), S. 303–329. ISSN: 1099-6362. DOI: 10.1177/1099636210380997.
- [41] R. GÜMRÜK und R.A.W. MINES. Compressive behaviour of stainless steel micro-lattice structures. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 68 (2013), S. 125–139. ISSN: 0020-7403. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2013.01.006. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.01.006>.

- [42] Hongshuai LEI u. a. Evaluation of compressive properties of SLM-fabricated multi-layer lattice structures by experimental test and m-CT-based finite element analysis. In: *Materials & Design* 169.6058 (2019), S. 107685. ISSN: 0264-1275. DOI: 10.1016/j.matdes.2019.107685.
- [43] Mingyang ZHANG u. a. Effective elastic properties and initial yield surfaces of two 3D lattice structures. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 138-139 (2018), S. 146–158. ISSN: 0020-7403. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.02.008. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.02.008>.
- [44] Zefeng XIAO u. a. Evaluation of topology-optimized lattice structures manufactured via selective laser melting. In: *Materials & Design* 143 (2018), S. 27–37. ISSN: 0264-1275. DOI: 10.1016/j.matdes.2018.01.023. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.matdes.2018.01.023>.
- [45] K. USHIJIMA, W. J. CANTWELL und D. H. CHEN. Prediction of the mechanical properties of micro-lattice structures subjected to multi-axial loading. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 68 (2013), S. 47–55. ISSN: 0020-7403. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2012.12.017. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.12.017>.
- [46] V. S. DESHPANDE, N. A. FLECK und M. F. ASHBY. Effective properties of the octet-truss lattice material. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 49.8 (2001), S. 1747–1769. ISSN: 00225096. DOI: 10.1016/S0022-5096(01)00010-2.
- [47] Clayton NEFF, Neil HOPKINSON und Nathan B. CRANE. Experimental and analytical investigation of mechanical behavior of laser-sintered diamond-lattice structures. In: *Additive Manufacturing* 22 (2018), S. 807–816. ISSN: 2214-8604. DOI: 10.1016/j.addma.2018.07.005. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.addma.2018.07.005>.
- [48] Abigail ORANGE, Yan WU und Li YANG. An Investigation of the Fatigue Strength of Multiple Cellular Structures Fabricated by Electron Beam Powder Bed Fusion Additive Manufacturing Process. University of Texas at Austin, 2018. DOI: 10.26153/tsw/17073. URL: <https://repositories.lib.utexas.edu/handle/2152/90152>.
- [49] Lucas R. MEZA u. a. Reexamining the mechanical property space of three-dimensional lattice architectures. In: *Acta Materialia* 140 (2017), S. 424–432. ISSN: 1359-6454. DOI: 10.1016/j.actamat.2017.08.052. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.actamat.2017.08.052>.
- [50] R. UMER u. a. Analysis of the compression behaviour of different composite lattice designs. In: *Journal of Composite Materials* 52.6 (2018), S. 715–729. DOI: 10.1177/0021998317714531.
- [51] F. DOS REIS und J. F. GANGHOFFER. Equivalent mechanical properties of auxetic lattices from discrete homogenization. In: *Computational Materials Science* 51.1 (2012), S. 314–321. ISSN: 0927-0256. DOI: 10.1016/j.commatsci.2011.07.014. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.commatsci.2011.07.014>.

- [52] Ahmed K. NOOR, Melvin S. ANDERSON und William H. GREENE. Continuum Models for Beam- and Platelike Lattice Structures. In: *AIAA Journal* 16.12 (1978), S. 1219–1228. ISSN: 0001-1452. DOI: 10.2514/3.61036. URL: <http://dx.doi.org/10.2514/3.61036>.
- [53] B. BURGARDT und P. CARTRAUD. Continuum modeling of beamlike lattice trusses using averaging methods. In: *Computers & Structures* 73.1-5 (1999), S. 267–279. ISSN: 0045-7949. DOI: 10.1016/s0045-7949(98)00274-0. URL: [http://dx.doi.org/10.1016/s0045-7949\(98\)00274-0](http://dx.doi.org/10.1016/s0045-7949(98)00274-0).
- [54] A. DESMOULINS und D. M. KOCHMANN. Local and nonlocal continuum modeling of inelastic periodic networks applied to stretching-dominated trusses. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 313 (2017), S. 85–105. ISSN: 0045-7825. DOI: 10.1016/j.cma.2016.09.027. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2016.09.027>.
- [55] Marcus YODER, Lonny THOMPSON und Joshua SUMMERS. Size effects in lattice-structured cellular materials: material distribution. In: *Journal of Materials Science* 54.18 (2019), S. 11858–11877. ISSN: 00222461. DOI: 10.1007/s10853-019-03758-4.
- [56] Jun YAN u. a. Size effect of lattice material and minimum weight design. In: *Acta Mechanica Sinica* 30.2 (2014), S. 191–197. ISSN: 1614-3116. DOI: 10.1007/s10409-014-0001-5. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10409-014-0001-5>.
- [57] Hualin FAN, Fennian JIN und Daining FANG. Characterization of edge effects of composite lattice structures. In: *Composites Science and Technology* 69.11-12 (2009), S. 1896–1903. ISSN: 0266-3538. DOI: 10.1016/j.compscitech.2009.04.007. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compscitech.2009.04.007>.
- [58] Zdeněk P. BAŽANT und Luigi CEDOLIN. *Stability of structures: Elastic, inelastic, fracture, and damage theories*. Dover ed., unabridged republication. Dover books on engineering. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2003. ISBN: 0486425681.
- [59] Stephen P. TIMOSHENKO und James M. GERE. *Theory of Elastic Stability*. Courier Corporation, 2009. ISBN: 9780486472072.
- [60] A. G. RAZDOLSKY. Flexural buckling of laced column with serpentine lattice. In: *The IES Journal Part A: Civil & Structural Engineering* 3.1 (2010), S. 38–49. DOI: 10.1080/19373260903425477.
- [61] D. B. MCCALLEN und K. M. ROMSTAD. A continuum model for the nonlinear analysis of beam-like lattice structures. In: *Computers & Structures* 29.2 (1988), S. 177–197. ISSN: 0045-7949. DOI: 10.1016/0045-7949(88)90252-0. URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949\(88\)90252-0](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949(88)90252-0).

- [62] G. MOREAU und D. CAILLERIE. Continuum modeling of lattice structures in large displacement applications to buckling analysis. In: *Computers & Structures* 68.1-3 (1998), S. 181–189. ISSN: 0045-7949. DOI: 10.1016/s0045-7949(98)00041-8. URL: [http://dx.doi.org/10.1016/s0045-7949\(98\)00041-8](http://dx.doi.org/10.1016/s0045-7949(98)00041-8).
- [63] Qianqian SUI, Hualin FAN und Changliang LAI. Failure analysis of 1D lattice truss composite structure in uniaxial compression. In: *Composites Science and Technology* 118 (2015), S. 207–216. ISSN: 0266-3538. DOI: 10.1016/j.compscitech.2015.09.003. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compscitech.2015.09.003>.
- [64] Qianqian SUI, Changliang LAI und Hualin FAN. Buckling failure modes of one-dimensional lattice truss composite structures. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering* 232.13 (2018), S. 2565–2583. DOI: 10.1177/0954410017716194.
- [65] Hualin FAN, Fengnian JIN und Daining FANG. Uniaxial local buckling strength of periodic lattice composites. In: *Materials & Design* 30.10 (2009), S. 4136–4145. ISSN: 0264-1275. DOI: 10.1016/j.matdes.2009.04.034. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.matdes.2009.04.034>.
- [66] Lorna J. GIBSON und Michael F. ASHBY. *Cellular solids: Structure and properties*. 2. ed., 1. paperback ed. (with corr.), digital print. Cambridge solid state science series. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001. ISBN: 0521495601.
- [67] Alan J. JACOBSEN, William BARVOSA-CARTER und Steven NUTT. Micro-scale truss structures with three-fold and six-fold symmetry formed from self-propagating polymer waveguides. In: *Acta Materialia* 56.11 (2008), S. 2540–2548. ISSN: 13596454. DOI: 10.1016/j.actamat.2008.01.051.
- [68] M. DOYOYO und J. W. HU. Plastic failure analysis of an auxetic foam or inverted strut lattice under longitudinal and shear loads. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 54.7 (2006), S. 1479–1492. ISSN: 00225096. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.12.007.
- [69] Mulalo DOYOYO und Jong Wan HU. Multi-axial failure of metallic strut-lattice materials composed of short and slender struts. In: *INTERNATIONAL JOURNAL OF SOLIDS AND STRUCTURES* 43.20 (2006), S. 6115–6139. ISSN: 0020-7683. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.12.001.
- [70] N. WICKS u. a. Kagome plate structures for actuation. In: *INTERNATIONAL JOURNAL OF SOLIDS AND STRUCTURES* 40.25 (2003), S. 6969–6980. ISSN: 0020-7683. DOI: 10.1016/S0020-7683(03)00348-2.
- [71] KNOTT, J.F. und MILLS, N.J. Analysis of the elastic properties of open-cell foams with tetrakaidecahedral cells. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 45.3 (1997), S. 319–343. ISSN: 00225096. DOI: 10.1016/S0022-5096(96)00090-7.

- [72] G. W. KOOISTRA, V. S. DESHPANDE und H. N.G. WADLEY. Compressive behavior of age hardenable tetrahedral lattice truss structures made from aluminium. In: *Acta Materialia* 52.14 (2004), S. 4229–4237. ISSN: 13596454. DOI: 10.1016/j.actamat.2004.05.039.
- [73] GIBSON, L.J. Mechanical behavior of a three-dimensional truss material. In: *INTERNATIONAL JOURNAL OF SOLIDS AND STRUCTURES* 38.40-41 (2001), S. 7181–7196. ISSN: 0020-7683. DOI: 10.1016/S0020-7683(00)00400-5.
- [74] M. H. LUXNER, J. STAMPFL und H. E. PETTERMANN. Finite element modeling concepts and linear analyses of 3D regular open cell structures. In: *Journal of Materials Science* 40.22 (2005), S. 5859–5866. ISSN: 00222461. DOI: 10.1007/s10853-005-5020-y.
- [75] Recep GUMRUK, R. A. W. MINES und Sami KARADENIZ. Static mechanical behaviours of stainless steel micro-lattice structures under different loading conditions. In: *Materials Science and Engineering: A* 586 (2013), S. 392–406. ISSN: 09215093. DOI: 10.1016/j.msea.2013.07.070.
- [76] G. N. LABEAS und M. M. SUNARIC. Investigation on the Static Response and Failure Process of Metallic Open Lattice Cellular Structures. In: *Strain* 46.2 (2010), S. 195–204.
- [77] Alexander GROSSMANN. Fertigungsgetriebene Gestaltung zellulärer Strukturen beim pulverbasierten Laserstrahlschmelzen. Diss. UNSPECIFIED, 2020. DOI: 10.25534/tuprints-00014474.
- [78] Wenjin TAO und Ming C. LEU. „Design of lattice structure for additive manufacturing“. In: 2016 International Symposium on Flexible Automation (ISFA). IEEE, 1.08.2016 - 03.08.2016, S. 325–332. ISBN: 978-1-5090-3467-3. DOI: 10.1109/ISFA.2016.7790182.
- [79] Bernd KLEIN. FEM: Grundlagen und Anwendungen der Finite-Element-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau ; mit 12 Fallstudien und 20 Übungsaufgaben. 9., verb. und erw. Aufl. Programm Maschinenelemente und Konstruktion. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2012. ISBN: 3834816035.
- [80] Wilfried B. KRÄTZIG u. a. *Tragwerke 2*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2019. ISBN: 978-3-642-41722-1. DOI: 10.1007/978-3-642-41723-8.
- [81] Markus MERKEL und Andreas ÖCHSNER. *Eindimensionale Finite Elemente*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2020. ISBN: 978-3-662-57993-0. DOI: 10.1007/978-3-662-57994-7.
- [82] Michael RIEMER u. a. *Mathematische Methoden der Technischen Mechanik: Für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 3., neu bearbeitete Auflage. Springer eBooks Computer Science and Engineering. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2019. ISBN: 978-3-658-25612-8. DOI: 10.1007/978-3-658-25613-5.

-
- [83] J. BÜHRING u. a. Elastic axial stiffness properties of lattice structures: Analytical approach and experimental validation for bcc and f 2 cc,z unit cells. In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* (2022), S. 1–17. ISSN: 1537-6494. DOI: 10.1080/15376494.2022.2139027.
- [84] A. N. GENT und E. A. MEINECKE. COMPRESSION, BENDING, AND SHEAR OF BONDED RUBBER BLOCKS. In: *POLYMER ENGINEERING AND SCIENCE* 10.1 (1970), S. 48–&. ISSN: 0032-3888.
- [85] Seval PINARBASI, Ugurhan AKYUZ und Yalcin MENGI. A new formulation for the analysis of elastic layers bonded to rigid surfaces. In: *INTERNATIONAL JOURNAL OF SOLIDS AND STRUCTURES* 43.14-15 (2006), S. 4271–4296. ISSN: 0020-7683. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.06.047.
- [86] Hualin FAN, Fengnian JIN und Daining FANG. Uniaxial local buckling strength of periodic lattice composites. In: *Materials & Design* 30.10 (2009), S. 4136–4145. ISSN: 02641275. DOI: 10.1016/j.matdes.2009.04.034.
- [87] Herbert BALKE. *Einführung in die technische Mechanik*. Berlin: Springer, 2008. ISBN: 9783540378907.

A Anhang

A.1 Reduzierte Eigenschaften

Nachfolgend dargestellt sind die reduzierten Flächen der bcc und f2cc,z Zellen, sowohl für eine nicht behinderte Querkontraktion, als auch für eine einseitig behinderte Querkontraktion.

A.1.1 Reduzierte Flächen der f2cc,z Zelle

Tabelle A.1: Verwendete Randbedingungen zur Bestimmung der reduzierten Flächen für f2cc,z.

Knoten	nicht behinderte Querdehnung		behinderte Querdehnung	
	$A_{\text{red},12}$	$A_{\text{red},3}$	$A_{\text{red},12}$	$A_{\text{red},3}$
1	$(u_1, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$
2	$(u_1, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
3	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$
4	$(1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$
5	$(u_1, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$
6	$(u_1, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$

Reduzierte Flächen bei unbehinderter Querdehnung

$$(A)_{\text{red},f2ccz,1/2} = \frac{A}{B} \tag{A.1}$$

$$A = 2\pi r^2 (48h^2 r^2 \sin^5(\omega) + r^4 (576 \sin^3(\omega) + 144) \sin^4(\omega) \tan^6(\omega) + r^2 (48h^2 \sin^3(\omega) + 24h^2 + 1152r^2 \sin^5(\omega)) \sin^2(\omega) \tan^4(\omega) + (h^4 + 96h^2 r^2 \sin^5(\omega) + 576r^4 \sin^7(\omega)) \tan^2(\omega) \sin^3(\omega)$$

$$B = (48h^2 r^2 (\tan^4(\omega) + \tan^2(\omega) + 1) \sin^5(\omega) + 12h^2 r^2 \sin^2(\omega) \tan^4(\omega) + (2h^4 \sin^3(\omega) + h^4 + 288r^4 \sin^7(\omega)) \tan^2(\omega) \tan^3(\omega)$$

$$(A)_{\text{red},f2\text{ccz},3} = \frac{A}{B} \quad (\text{A.2})$$

$$A = \pi r^2 (r^2 (48 \sin^3(\omega) + 12) \sin^2(\omega) \tan^4(\omega) + 48 r^2 \sin^5(\omega) + (h^2 + 96 r^2 \sin^5(\omega)) \tan^2(\omega))$$

$$B = (h^2 + 12 r^2 \sin^2(\omega) \tan^2(\omega)) \tan^2(\omega)$$

Reduzierte Flächen bei einseitig behinderter Querdehnung

$$(A)_{\text{red},c,f2\text{ccz},12} = \frac{A}{B} \quad (\text{A.3})$$

$$A = 2\pi r^2 (h^2 + 12 r^2 \sin^2(\omega) \tan^2(\omega)) (48 h^2 r^2 (2 \tan^4(\omega) + \tan^2(\omega) + 2) \sin^5(\omega) +$$

$$12 h^2 r^2 \sin^2(\omega) \tan^4(\omega) + (4 h^4 \sin^3(\omega) + h^4 + 48 h^2 r^2 \sin^5(\omega) +$$

$$576 r^4 \sin^7(\omega)) \tan^2(\omega)) \sin^3(\omega)$$

$$B = h^2 (48 h^2 r^2 (2 \tan^4(\omega) + \tan^2(\omega) + 2) \sin^5(\omega) + 12 h^2 r^2 \sin^2(\omega) \tan^4(\omega) + (6 h^4 \sin^3(\omega) +$$

$$h^4 + 864 r^4 \sin^7(\omega)) \tan^2(\omega)) \tan^3(\omega)$$

$$(A)_{\text{red},c,f2\text{ccz},3} = \frac{A}{B} \quad (\text{A.4})$$

$$A = \pi r^2 (48 r^2 (h^2 + 12 r^2 \sin^2(\omega) \tan^2(\omega)) \sin^5(\omega) + (h^2 (h^2 +$$

$$12 r^2 \sin^2(\omega) \tan^2(\omega)) (4 \sin^3(\omega) + 1) - 3 (h^2 - 12 r^2 \sin^2(\omega))^2 \sin^3(\omega)) \tan^2(\omega))$$

$$B = h^2 (h^2 + 12 r^2 \sin^2(\omega) \tan^2(\omega)) \tan^2(\omega)$$

A.1.2 Reduzierte Flächen der bcc Zelle

Reduzierte Flächen bei unbehinderter Querdehnung

$$A_{\text{red},\text{bcc},1/2} = \frac{\sqrt{2} 48 \pi r^4 \sin^3(\omega)}{h^2 (1 + \sin^2(\omega) + 12 \frac{r^2}{h^2} (\sin^2(\omega) - \sin^4(\omega))) \tan(\omega)} \quad (\text{A.5})$$

$$A_{\text{red},\text{bcc},3} = \frac{48 \pi r^4 \sin(\omega)^3}{h^2 (1 - \sin(\omega)^2 + 12 \frac{r^2}{h^2} \sin(\omega)^4)} \quad (\text{A.6})$$

Tabelle A.2: Verwendete Randbedingungen zur Bestimmung der reduzierten Flächen für bcc.

Knoten	nicht behinderte Querdehnung		behinderte Querdehnung	
	$A_{\text{red},12}$	$A_{\text{red},3}$	$A_{\text{red},12}$	$A_{\text{red},3}$
1	$(u_1, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$
2	$(u_1, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
3	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$
4	$(1, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(1, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$
5	$(1, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(1, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$
6	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$

Reduzierte Flächen bei einseitig behinderter Querdehnung

$$(A)_{\text{red,c,bcc},12} = \frac{A}{B} \quad (\text{A.7})$$

$$A = 48\sqrt{2}\pi r^4 (24h^2 r^2 \sin^2(\omega) \tan^4(\omega) + 24h^2 r^2 \sin^2(\omega) + (h^2 + 12r^2 \sin^2(\omega))^2 \tan^2(\omega)) \sin^3(\omega)$$

$$B = h^2 (24h^2 r^2 (\sin^2(\omega) + 1) \tan^4(\omega) + 24h^2 r^2 \sin^2(\omega) + (h^4 + 24h^2 r^2 \sin^2(\omega) + 144r^4 \sin^4(\omega) + 288r^4 \sin^2(\omega)) \tan^2(\omega)) \tan(\omega)$$

$$(A)_{\text{red,c,bcc},3} = \frac{A}{B} \quad (\text{A.8})$$

$$A = 24\pi r^4 (-h^4 \sin^4(\omega) - h^4 \sin^2(\omega) + 2h^4 + 24h^2 r^2 \sin^6(\omega) + 24h^2 r^2 \sin^2(\omega) - 144r^4 \sin^8(\omega) + 144r^4 \sin^6(\omega)) \sin^5(\omega)$$

$$B = h^2 (h^2 + 12r^2 (\sin^2(\omega) + 1) \tan^2(\omega)) (h^2 + 12r^2 \sin^2(\omega) \tan^2(\omega)) \cos^6(\omega) \tan^2(\omega)$$

A.1.3 Reduzierte Flächenträgheitsmomente

Nachfolgend dargestellt sind die reduzierten Flächenträgheitsmomente der bcc und f2cc,z Zellen. Die Indizierung erfolgt nach dem Ursache-Wirkung Prinzip. Folglich gibt der erste Index die Richtung der Last an und der zweite Index die zugehörige Richtung des Normalenvektors der Bezugsfläche.

Reduzierte Flächenträgheitsmomente der f2cc,z Zelle

Tabelle A.3: Verwendete Randbedingungen zur Bestimmung der reduzierten Flächenträgheitsmomente für f2cc,z Zellen.

Knoten	$J_{\text{red},13} = J_{\text{red},23}$	$J_{\text{red},31} = J_{\text{red},32}$	$J_{\text{red},12} = J_{\text{red},21}$
1	$(0, 0, 0, 1, 0, 0)^T$	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$
2	$(0, 0, 0, -1, 0, 0)^T$	$0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$
3	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$	$(0, 0, 0, 0, 1, 0)^T$
4	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, -1)^T$	$(0, 0, 0, 0, -1, 0)^T$
5	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$
6	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, u_2, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$

$$J_{\text{red},f2cc,z,31} = J_{\text{red},f2cc,z,32} = \frac{A}{B} \quad (\text{A.9})$$

$$A = \pi r^4 (\cos(\omega)) + v \cos^3(\omega)$$

$$B = 2(v + 1)$$

$$J_{\text{red},f2cc,z,13} = J_{\text{red},f2cc,z,23} = \frac{A}{B} \quad (\text{A.10})$$

$$A = \pi r^4 (-2h^2 v \sin^5(\omega) - 6h^2 v \sin^3(\omega) - h^2 v \sin^2(\omega) + 8h^2 v \sin(\omega) + h^2 v - 10h^2 \sin^3(\omega) - h^2 \sin^2(\omega) + 10h^2 \sin(\omega) + h^2 + 24vr^2 \sin^7(\omega) + 24vr^2 \sin^5(\omega) + 12vr^2 \sin^4(\omega) + 48r^2 \sin^5(\omega) + 12r^2 \sin^4(\omega))$$

$$B = 4(h^2 v \cos^2(\omega) + h^2 \cos^2(\omega) + 12vr^2 \sin^4(\omega) + 12r^2 \sin^4(\omega))$$

$$J_{\text{red},f2cc,z,12} = J_{\text{red},f2cc,z,21} = 2\pi r^4 \cos(\omega) \quad (\text{A.11})$$

Reduzierte Flächenträgheitsmomente der bcc Zelle

Tabelle A.4: Verwendete Randbedingungen zur Bestimmung der reduzierten Flächenträgheitsmomente für bcc Zellen.

Knoten	$J_{\text{red},13} = J_{\text{red},23}$	$J_{\text{red},31} = J_{\text{red},32}$	$J_{\text{red},12} = J_{\text{red},21}$
1	$(0, 0, 0, 1, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$
2	$(0, 0, 0, -1, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, 0)^T$
3	$(0, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$	$(0, 0, 0, 1, 0, 0)^T$
4	$(0, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$	$(0, 0, 0, 1, 0, 0)^T$
5	$(0, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, -1)^T$	$(0, 0, 0, -1, 0, 0)^T$
6	$(0, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, -1)^T$	$(0, 0, 0, -1, 0, 0)^T$

$$J_{\text{red,bcc},31} = J_{\text{red,bcc},32} = \frac{A}{B} \quad (\text{A.12})$$

$$A = 4\sqrt{2}\pi r^4 ((\omega) + (\nu + 1)(h^2 + 48r^2 \sin^2(\omega) \tan^2(\omega) + 12r^2 \tan^2(\omega)) - 9r^2(\nu + 1) \tan^2 + (h^2 + 48r^2 \sin^2(\omega) \tan^2(\omega) + 12r^2 \tan^2(\omega)) \tan^2(\omega) \sin^3(\omega))$$

$$B = (\nu + 1)(h^2 + 48r^2 \sin^2(\omega) \tan^2(\omega) + 12r^2 \tan^2(\omega)) \tan^3(\omega)$$

$$J_{\text{red,bcc},13} = J_{\text{red,bcc},23} = \frac{A}{B} \quad (\text{A.13})$$

$$A = \pi r^4 (-576r^2(\nu + 1) \sin^2(\omega) \tan^4(\omega) + (4\nu + 4)(4 \sin^2(\omega) + 1)(h^2 + 48r^2 \sin^2(\omega) \tan^2(\omega) + 12r^2 \tan^2(\omega)) \tan^2(\omega) + (h^2 + 48r^2 \sin^2(\omega) \tan^2(\omega) + 12r^2 \tan^2(\omega)) \sin^2(\omega) \sin(\omega))$$

$$B = 2(\nu + 1)(h^2 + 48r^2 \sin^2(\omega) \tan^2(\omega) + 12r^2 \tan^2(\omega)) \tan^2(\omega)$$

$$J_{\text{red,bcc},12} = J_{\text{red,bcc},21} = \frac{A}{B} \quad (\text{A.14})$$

$$A = \sqrt{2}\pi r^4 (-16h^2\nu \cos^2(\omega) + 20h^2\nu - 15h^2 \cos^2(\omega) + 20h^2 - 48\nu r^2(1 - \cos^2(\omega))^2 - 45\nu r^2 \cos^2(\omega) + 48\nu r^2 - 45r^2(1 - \cos^2(\omega))^2 - 39r^2 \cos^2(\omega) + 45r^2) \cos(\omega)$$

$$B = 2(h^2 + 3r^2 \cos^2(\omega))(\nu + 1)$$

A.2 Effektive Schubsteifigkeiten

Nachfolgend dargestellt sind die effektiven Schubsteifigkeiten von bcc und f2cc,z Gitterstrukturen. Die Indizierung erfolgt nach dem Ursache-Wirkung Prinzip. Folglich gibt der erste Index die Richtung der Last an und der zweite Index die zugehörige Richtung des Normalenvektors der Bezugsfläche.

A.2.1 Effektive Schubsteifigkeiten der bcc Gitterstruktur

Tabelle A.5: Randbedingungen zur Ermittlung der reduzierten Schubsteifigkeiten von f2cc,z Zellen.

Knoten	$(AG)_{r,13} = (AG)_{r,23}$	$(AG)_{r,31} = (AG)_{r,32}$	$(AG)_{r,12} = (AG)_{r,21}$
1	$(0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, u_2, u_3, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
2	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
3	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(u_1, u_2, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
4	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
5	$(0, u_2, u_3, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
6	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$	$(1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
Knoten	$(AG)_{m,13} = (AG)_{m,23}$	$(AG)_{m,31} = (AG)_{m,32}$	$(AG)_{m,12} = (AG)_{m,21}$
1	$(0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
2	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
3	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
4	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
5	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
6	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$	$(1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$

$$(AG)_{m,bcc,13} = (AG)_{m,bcc,23} = \frac{A}{B} \quad (\text{A.15})$$

$$A = 2E\pi r^2 \sin(\omega) (10h^2 \sin(\omega)^2 - 15h^2 \sin(\omega)^4 + 60r^2 \sin(\omega)^2 - 156r^2 \sin(\omega)^4 + 720r^2 \sin(\omega)^6 + 4h^2\nu + 5h^2 + 12h^2\nu \sin(\omega)^2 - 16h^2\nu \sin(\omega)^4 + 48\nu r^2 \sin(\omega)^2 - 192\nu r^2 \sin(\omega)^4 + 768\nu r^2 \sin(\omega)^6)$$

$$B = h^2 (4\nu + 16\nu \sin(\omega)^2 + 15 \sin(\omega)^2 + 5)$$

$$(AG)_{r,bcc,13} = (AG)_{r,bcc,23} = \frac{A}{B} \quad (\text{A.16})$$

$$A = E \pi r^2 \sin(\omega) (2h^4 \sin(\omega)^2 - 3h^4 \sin(\omega)^4 + 72r^4 \sin(\omega)^2 - 63r^4 \sin(\omega)^4 + 18r^4 \sin(\omega)^6 - 27r^4 \sin(\omega)^8 + h^4 + 6h^2 r^2 + 36h^2 r^2 \sin(\omega)^2 - 12h^2 r^2 \sin(\omega)^4 + 18h^2 r^2 \sin(\omega)^6 + 4h^4 v \sin(\omega)^2 - 4h^4 v \sin(\omega)^4 + 72v r^4 \sin(\omega)^4 - 36v r^4 \sin(\omega)^6 - 36v r^4 \sin(\omega)^8 + 24h^2 v r^2 \sin(\omega)^2 + 24h^2 v r^2 \sin(\omega)^6)$$

$$B = h^2 (4v \sin(\omega)^2 + 3 \sin(\omega)^2 + 1) (h^2 - 3r^2 \sin(\omega)^2 + 3r^2)$$

$$(AG)_{m,bcc,31} = (AG)_{m,bcc,32} = \frac{A}{B} \quad (\text{A.17})$$

$$A = 2\sqrt{2} E \pi r^2 \cos(\omega) \sin(\omega)^2 (3h^2 \sin(\omega)^2 + 12r^2 \sin(\omega)^2 - 36r^2 \sin(\omega)^4 + 4h^2 v + 12v r^2 + 5h^2 + 24r^2 + 4h^2 v \sin(\omega)^2 + 36v r^2 \sin(\omega)^2 - 48v r^2 \sin(\omega)^4)$$

$$B = h^2 (4v + 4v \sin(\omega)^2 + 3 \sin(\omega)^2 + 5)$$

$$(AG)_{r,bcc,31} = (AG)_{r,bcc,32} = \frac{A}{B} \quad (\text{A.18})$$

$$A = \sqrt{2} E \pi r^2 \cos(\omega) (1 + \cos(\omega)^2) (16h^4 v^2 \cos(\omega)^6 - 64h^4 v^2 \cos(\omega)^4 + 64h^4 v^2 \cos(\omega)^2 + 24h^4 v \cos(\omega)^6 - 112h^4 v \cos(\omega)^4 + 128h^4 v \cos(\omega)^2 + 9h^4 \cos(\omega)^6 - 48h^4 \cos(\omega)^4 + 64h^4 \cos(\omega)^2 + 384h^2 v^2 r^2 \cos(\omega)^8 - 1440h^2 v^2 r^2 \cos(\omega)^6 + 1920h^2 v^2 r^2 \cos(\omega)^4 - 1536h^2 v^2 r^2 \cos(\omega)^2 + 768h^2 v^2 r^2 + 576h^2 v r^2 \cos(\omega)^8 - 2328h^2 v r^2 \cos(\omega)^6 + 3120h^2 v r^2 \cos(\omega)^4 - 2592h^2 v r^2 \cos(\omega)^2 + 1536h^2 v r^2 + 216h^2 r^2 \cos(\omega)^8 - 936h^2 r^2 \cos(\omega)^6 + 1248h^2 r^2 \cos(\omega)^4 - 1056h^2 r^2 \cos(\omega)^2 + 768h^2 r^2 + 2304v^2 r^4 \cos(\omega)^{10} - 8064v^2 r^4 \cos(\omega)^8 + 13248v^2 r^4 \cos(\omega)^6 - 12672v^2 r^4 \cos(\omega)^4 + 5184v^2 r^4 \cos(\omega)^2 + 3456v r^4 \cos(\omega)^{10} - 11808v r^4 \cos(\omega)^8 + 19872v r^4 \cos(\omega)^6 - 21888v r^4 \cos(\omega)^4 + 10368v r^4 \cos(\omega)^2 + 1296r^4 \cos(\omega)^{10} - 4320r^4 \cos(\omega)^8 + 7056r^4 \cos(\omega)^6 - 9216r^4 \cos(\omega)^4 + 5184r^4 \cos(\omega)^2)$$

$$B = h^2 (8v - 4v \cos(\omega)^2 - 3 \cos(\omega)^2 + 8) (8h^2 \cos(\omega)^2 - 3h^2 \cos(\omega)^4 - 72r^2 \cos(\omega)^2 + 60r^2 \cos(\omega)^4 - 36r^2 \cos(\omega)^6 + 48v r^2 + 48r^2 + 8h^2 v \cos(\omega)^2 - 4h^2 v \cos(\omega)^4 - 96v r^2 \cos(\omega)^2 + 96v r^2 \cos(\omega)^4 - 48v r^2 \cos(\omega)^6)$$

$$(AG)_{m,bcc,12} = (AG)_{m,bcc,21} = \frac{A}{B} \quad (\text{A.19})$$

$$A = \sqrt{2} E \pi r^2 \sin(\omega)^3 (h^2 (\tan(\omega)^2 + 4\nu + 4) - 36 r^2 \tan(\omega)^2 (\nu + 1) + 12 r^2 \tan(\omega)^2 (\sin(\omega)^2 + 1) (\tan(\omega)^2 + 4\nu + 4))$$

$$B = h^2 \tan(\omega)^3 (\tan(\omega)^2 + 4\nu + 4)$$

$$(AG)_{r,bcc,12} = (AG)_{r,bcc,21} = \frac{A}{B} \quad (\text{A.20})$$

$$A = \sqrt{2} E \pi r^2 \sin(\omega)^3 (h^2 (\tan(\omega)^2 + 4\nu + 4) - 36 r^2 \tan(\omega)^2 (\nu + 1) + 12 r^2 \tan(\omega)^2 (\sin(\omega)^2 + 1) (\tan(\omega)^2 + 4\nu + 4))$$

$$B = h^2 \tan(\omega)^3 (\tan(\omega)^2 + 4\nu + 4)$$

A.2.2 Effektive Schubsteifigkeiten der f2cc,z Gitterstruktur

Tabelle A.6: Randbedingungen zur Ermittlung der reduzierten Schubsteifigkeiten von bcc Zellen.

Knoten	$(AG)_{r,13} = (AG)_{r,23}$	$(AG)_{r,31} = (AG)_{r,32}$	$(AG)_{r,12} = (AG)_{r,21}$
1	$(0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$	$(u_1, 0, u_3, 0, 0, \varphi_3)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
2	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, \varphi_3)^T$	$(u_1, u_2, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
3	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
4	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$	$(1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
5	$(0, u_2, u_3, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
6	$(0, u_2, u_3, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
Knoten	$(AG)_{m,13} = (AG)_{m,23}$	$(AG)_{m,31} = (AG)_{m,32}$	$(AG)_{m,12} = (AG)_{m,21}$
1	$(0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, \varphi_3)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
2	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, u_3, 0, 0, \varphi_3)^T$	$(u_1, 0, 0, 0, 0, \varphi_3)^T$
3	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
4	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$	$(1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
5	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
6	$(0, u_2, 0, \varphi_1, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$

$$(AG)_{m,f2ccz,13} = (AG)_{m,f2ccz,23} = \frac{A}{B} \quad (A.21)$$

$$A = E \pi r^2 (h^2 \sin(\omega)^3 (8v \tan(\omega)^2 + 8 \tan(\omega)^2 + 2) + 3 r^2 \tan(\omega)^2 (4v \tan(\omega)^2 + 4 \tan(\omega)^2 + 1) (2 \sin(\omega)^5 + 8 \sin(\omega)^3 + 1) - r^2 \sin(\omega)^3 \tan(\omega)^4 (72v + 72))$$

$$B = h^2 \tan(\omega)^2 (4v \tan(\omega)^2 + 4 \tan(\omega)^2 + 1)$$

$$(AG)_{r,f2ccz,13} = (AG)_{r,f2ccz,23} = \frac{A}{B} \quad (A.22)$$

$$A = -E \pi r^2 (9h^2 r^2 (4v \sin(\omega)^9 + \sin(\omega)^7 + 3 \sin(\omega)^9) - \cos(\omega)^6 (4v \tan(\omega)^2 + 4 \tan(\omega)^2 + 1) (2h^2 \sin(\omega)^3 (h^2 \tan(\omega)^2 + 3r^2 \sin(\omega)^2) + 3r^2 \tan(\omega)^2 (h^2 \tan(\omega)^2 + 3r^2 \sin(\omega)^2) (5 \sin(\omega)^5 + 8 \sin(\omega)^3 + 1)) + 72r^2 \sin(\omega)^9 (h^2 + 3r^2 \cos(\omega)^2) (v + 1)) - \sin(\omega)^3 \tan(\omega)^2 (h^4 - 15h^2 r^2 \sin(\omega)^2 + 36r^4 \sin(\omega)^4)$$

$$B = h^2 \cos(\omega)^4 \sin(\omega)^2 (h^2 \tan(\omega)^2 + 3r^2 \sin(\omega)^2) (4v \tan(\omega)^2 + 4 \tan(\omega)^2 + 1)$$

$$(AG)_{m,f2ccz,31} = (AG)_{m,f2ccz,32} = \frac{A}{B} \quad (A.23)$$

$$A = 2E \pi r^2 \sin(\omega)^3 (h^2 \tan(\omega)^2 (12v \tan(\omega)^2 + 12 \tan(\omega)^2 + \sin(\omega) (32v \tan(\omega)^2 + 32 \tan(\omega)^2 + 8) + \sin(\omega)^3 (24v \tan(\omega)^2 + 24 \tan(\omega)^2 + 24) + 3) - 72r^2 \sin(\omega)^3 (4v \tan(\omega)^2 + 4 \tan(\omega)^2 + 1) + 12r^2 \sin(\omega)^2 (12v \tan(\omega)^2 + 12 \tan(\omega)^2 + \sin(\omega) (32v \tan(\omega)^2 + 32 \tan(\omega)^2 + 8) + \sin(\omega)^3 (24v \tan(\omega)^2 + 24 \tan(\omega)^2 + 24) + 3))$$

$$B = h^2 \tan(\omega)^3 (12v \tan(\omega)^2 + 12 \tan(\omega)^2 + \sin(\omega) (32v \tan(\omega)^2 + 32 \tan(\omega)^2 + 8) + \sin(\omega)^3 (24v \tan(\omega)^2 + 24 \tan(\omega)^2 + 24) + 3)$$

$$(AG)_{r,f2ccz,31} = (AG)_{r,f2ccz,32} = \frac{A}{B} \quad (A.24)$$

$$A = E \pi r^2 \cos(\omega) \sin(\omega)^2 (-192h^4 v^2 \sin(\omega)^{10} - 256h^4 v^2 \sin(\omega)^8 - 120h^4 v^2 \sin(\omega)^7 + 192h^4 v^2 \sin(\omega)^6 - 8h^4 v^2 \sin(\omega)^5 + 244h^4 v^2 \sin(\omega)^4 + 128h^4 v^2 \sin(\omega)^3 + 12h^4 v^2 \sin(\omega)^2 - 144h^4 v \sin(\omega)^{10} - 672h^4 v \sin(\omega)^8 - 168h^4 v \sin(\omega)^7 + 48h^4 v \sin(\omega)^6 - 128h^4 v \sin(\omega)^5 + 683h^4 v \sin(\omega)^4 + 264h^4 v \sin(\omega)^3 +$$

$$\begin{aligned}
& 82h^4v\sin(\omega)^2 + 32h^4v\sin(\omega) + 3h^4v - 288h^4\sin(\omega)^8 - 54h^4\sin(\omega)^7 - \\
& 240h^4\sin(\omega)^6 - 102h^4\sin(\omega)^5 + 439h^4\sin(\omega)^4 + 118h^4\sin(\omega)^3 + 86h^4\sin(\omega)^2 + \\
& 38h^4\sin(\omega) + 3h^4 + 4608h^2v^2r^2\sin(\omega)^{12} - 768h^2v^2r^2\sin(\omega)^{10} + \\
& 2880h^2v^2r^2\sin(\omega)^9 - 3072h^2v^2r^2\sin(\omega)^8 - 2112h^2v^2r^2\sin(\omega)^7 + \\
& 6432h^2v^2r^2\sin(\omega)^6 + 960h^2v^2r^2\sin(\omega)^5 + 1392h^2v^2r^2\sin(\omega)^4 + \\
& 1728h^2v^2r^2\sin(\omega)^3 + 192h^2v^2r^2\sin(\omega)^2 + 3456h^2vr^2\sin(\omega)^{12} + \\
& 7488h^2vr^2\sin(\omega)^{10} + 4032h^2vr^2\sin(\omega)^9 - 10368h^2vr^2\sin(\omega)^8 - \\
& 1464h^2vr^2\sin(\omega)^7 + 9528h^2vr^2\sin(\omega)^6 - 24h^2vr^2\sin(\omega)^5 + 6732h^2vr^2\sin(\omega)^4 + \\
& 3936h^2vr^2\sin(\omega)^3 + 684h^2vr^2\sin(\omega)^2 + 432h^2vr^2\sin(\omega) + 48h^2vr^2 + \\
& 5616h^2r^2\sin(\omega)^{10} + 1296h^2r^2\sin(\omega)^9 - 4608h^2r^2\sin(\omega)^8 + 288h^2r^2\sin(\omega)^7 + \\
& 1128h^2r^2\sin(\omega)^6 - 600h^2r^2\sin(\omega)^5 + 6012h^2r^2\sin(\omega)^4 + 1944h^2r^2\sin(\omega)^3 + \\
& 588h^2r^2\sin(\omega)^2 + 528h^2r^2\sin(\omega) + 48h^2r^2 - 27648v^2r^4\sin(\omega)^{14} + \\
& 46080v^2r^4\sin(\omega)^{12} - 17280v^2r^4\sin(\omega)^{11} - 39168v^2r^4\sin(\omega)^{10} + \\
& 26496v^2r^4\sin(\omega)^9 + 7488v^2r^4\sin(\omega)^8 - 25632v^2r^4\sin(\omega)^7 + 11520v^2r^4\sin(\omega)^6 + \\
& 15264v^2r^4\sin(\omega)^5 + 1584v^2r^4\sin(\omega)^4 + 1152v^2r^4\sin(\omega)^3 + 144v^2r^4\sin(\omega)^2 - \\
& 20736vr^4\sin(\omega)^{14} + 6912vr^4\sin(\omega)^{12} - 24192vr^4\sin(\omega)^{11} + 19008vr^4\sin(\omega)^{10} + \\
& 36000vr^4\sin(\omega)^9 - 57168vr^4\sin(\omega)^8 - 43776vr^4\sin(\omega)^7 + 43920vr^4\sin(\omega)^6 + \\
& 25344vr^4\sin(\omega)^5 + 7380vr^4\sin(\omega)^4 + 6336vr^4\sin(\omega)^3 + 648vr^4\sin(\omega)^2 + \\
& 288vr^4\sin(\omega) + 36vr^4 - 25920r^4\sin(\omega)^{12} - 7776r^4\sin(\omega)^{11} + 58752r^4\sin(\omega)^{10} + \\
& 11232r^4\sin(\omega)^9 - 76752r^4\sin(\omega)^8 - 8216r^4\sin(\omega)^7 + 36432r^4\sin(\omega)^6 + \\
& 8568r^4\sin(\omega)^5 + 6948r^4\sin(\omega)^4 + 5832r^4\sin(\omega)^3 + 504r^4\sin(\omega)^2 + 360r^4\sin(\omega) + \\
& 36r^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B = & h^2(-192h^2v^2\sin(\omega)^{10} - 256h^2v^2\sin(\omega)^8 - 120h^2v^2\sin(\omega)^7 + 192h^2v^2\sin(\omega)^6 - \\
& 8h^2v^2\sin(\omega)^5 + 244h^2v^2\sin(\omega)^4 + 128h^2v^2\sin(\omega)^3 + 12h^2v^2\sin(\omega)^2 - \\
& 144h^2v\sin(\omega)^{10} - 672h^2v\sin(\omega)^8 - 168h^2v\sin(\omega)^7 + 48h^2v\sin(\omega)^6 - \\
& 128h^2v\sin(\omega)^5 + 683h^2v\sin(\omega)^4 + 264h^2v\sin(\omega)^3 + 82h^2v\sin(\omega)^2 + 32h^2v\sin(\omega) + \\
& 3h^2v - 288h^2\sin(\omega)^8 - 54h^2\sin(\omega)^7 - 240h^2\sin(\omega)^6 - 102h^2\sin(\omega)^5 + \\
& 439h^2\sin(\omega)^4 + 118h^2\sin(\omega)^3 + 86h^2\sin(\omega)^2 + 38h^2\sin(\omega) + 3h^2 + \\
& 2304v^2r^2\sin(\omega)^{12} + 768v^2r^2\sin(\omega)^{10} + 1440v^2r^2\sin(\omega)^9 - 768v^2r^2\sin(\omega)^8 - \\
& 336v^2r^2\sin(\omega)^7 + 2064v^2r^2\sin(\omega)^6 + 432v^2r^2\sin(\omega)^5 + 192v^2r^2\sin(\omega)^3 + \\
& 24v^2r^2\sin(\omega)^2 + 1728vr^2\sin(\omega)^{12} + 4608vr^2\sin(\omega)^{10} + 2016vr^2\sin(\omega)^9 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2304 \nu r^2 \sin(\omega)^8 + 276 \nu r^2 \sin(\omega)^7 + 3900 \nu r^2 \sin(\omega)^6 + 588 \nu r^2 \sin(\omega)^5 + \\
& 804 \nu r^2 \sin(\omega)^4 + 528 \nu r^2 \sin(\omega)^3 + 42 \nu r^2 \sin(\omega)^2 + 48 \nu r^2 \sin(\omega) + 6 \nu r^2 + \\
& 2808 r^2 \sin(\omega)^{10} + 648 r^2 \sin(\omega)^9 - 1008 r^2 \sin(\omega)^8 + 468 r^2 \sin(\omega)^7 + 1572 r^2 \sin(\omega)^6 + \\
& 240 r^2 \sin(\omega)^5 + 996 r^2 \sin(\omega)^4 + 312 r^2 \sin(\omega)^3 + 18 r^2 \sin(\omega)^2 + 60 r^2 \sin(\omega) + 6 r^2
\end{aligned}$$

$$(AG)_{m,f2ccz,12} = (AG)_{m,f2ccz,21} = \frac{A}{B} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned}
A &= 24 E \pi r^4 \sin(\omega)^3 (16 \nu^2 + 17 \nu \tan(\omega)^2 + 32 \nu + \tan(\omega)^4 + 17 \tan(\omega)^2 + 16) \\
B &= h^2 \tan(\omega) (28 \nu^2 + 20 \nu \tan(\omega)^2 + 56 \nu + \tan(\omega)^4 + 20 \tan(\omega)^2 + 28)
\end{aligned}$$

$$(AG)_{r,f2ccz,12} = (AG)_{r,f2ccz,21} = \frac{A}{B} \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned}
A &= 24 E \pi r^4 \sin(\omega)^3 (10 \nu^2 + 11 \nu \tan(\omega)^2 + 20 \nu + \tan(\omega)^4 + 11 \tan(\omega)^2 + 10) \\
B &= h^2 \tan(\omega) (22 \nu^2 + 14 \nu \tan(\omega)^2 + 44 \nu + \tan(\omega)^4 + 14 \tan(\omega)^2 + 22)
\end{aligned}$$

A.3 U-Faktoren zur Bestimmung der Knicklast von Gitterstrukturen

Nachfolgend dargestellt ist der Faktor $U = \lambda L$ zur Bestimmung der Knicklast mit $P_{kr} = U^2 EJ_{red} / L^2$. Weiterhin dargestellt sind die spezifischen Randbedingungen für die vier Eulerfälle sowie die Ansätze zur Bestimmung von $U = \lambda L$. Die Bezugslänge L ist in Abbildung A.1 dargestellt.

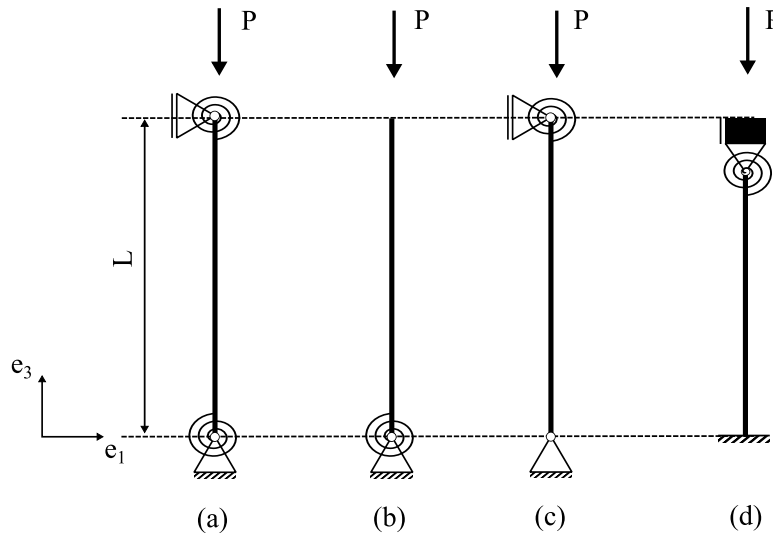


Abb. A.1: Federbelastete Stäbe mit verschiedenen Randbedingungen.

Eulerfall 1

- $w''(x_3 = L)c = 0$
- $w'(x_3 = 0)c - EJ_{red}w(x_3 = 0)'' = 0$
- $w(x_3 = 0)c = 0$

Es folgt: $U \tan(U) - cL_{eff}/EJ_{red} = 0$.

Eulerfall 2

- $w(x_3 = 0) = w(x = L_{eff}) = 0$
- $w''(x_3 = L_{eff}) = 0$

Es folgt: $1/UL_{eff}/L_r \sin(U) + \cos(U) = 1$

Eulerfall 3

- $w''(x_3 = L_{\text{eff}}) = 0$
- $w'(x_3 = 0)c - EJ_{\text{red}}w''(x_3 = 0) = 0$
- $w(x_3 = 0) = w(x = L_{\text{eff}}) = 0$

Es folgt: $(c(L - LU \cot(U))) / (EJ_{\text{red}}U^2) + 1 = 0$.

Eulerfall 4

- $EJ_{\text{red}}w''(x_3 = 0) = EJ_{\text{red}}w''(x_3 = L_{\text{eff}})$
- $w(x_3 = 0) = w(x_3 = L_{\text{eff}}) = 0$
- $w'(x_3 = 0)c = EJ_{\text{red}}w''(x_3 = 0)$

Es folgt: $\cos(U) - UEJ_{\text{red}} / (cL_{\text{eff}}) \sin(U) = 1$.

Stab mit Feder an beiden Enden, Abbildung A.1 (a)

- Berechnung der globalen Knicklast eines f2cc-Gitters im Eulerfall 2
- Berechnung der lokalen Knicklast von zwei- und dreidimensionalen, f2cc,z-, bcc,z-Zellen
- Gleichung: $\cos(U) - UEJ_{\text{red}} / (Lc) \sin(U) = 1$

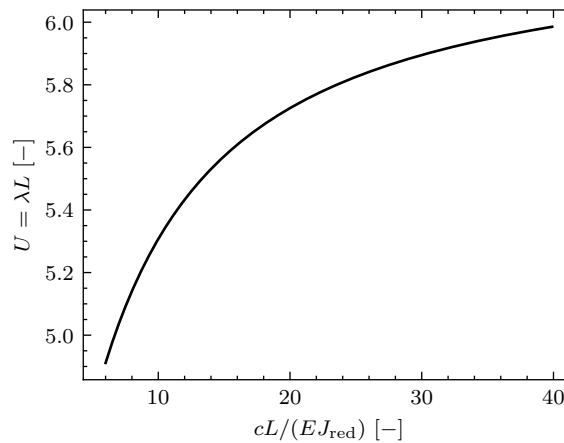


Abb. A.2: U bei einem Balken mit Federn an jedem Ende in Abhängigkeit von $EJ_{\text{red}} / (cL)$.

Stab mit einem federgelagertem Ende und einem freien Ende, Abbildung A.1 (b)

- Berechnung der globalen Knicklast eines f2cc-Gitters im Eulerfall 1
- Gleichung: $U \tan(U) - cL/EJ_{\text{red}} = 0$

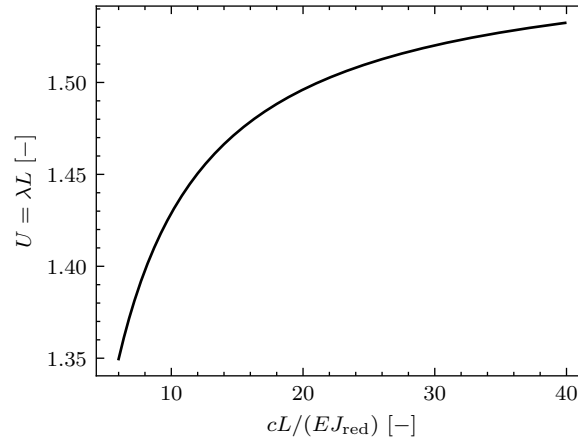


Abb. A.3: U bei einem Balken mit einem federgelagertem und einem freiem Ende in Abhängigkeit von $EJ_{\text{red}}/(cL)$.

Stab mit federgelagertem Ende und einem Festlager, Abbildung A.1 (c)

- Berechnung der globalen Knicklast eines f2cc-Gitters im Eulerfall 3
- Berechnung der lokalen Knicklast einer Strebe in einer f2cc- und bcc-Zelle
- Berechnung der lokalen Knicklast einer Strebe in einer f2cc,z-Zelle in 1/2-Richtung
- Gleichung: $(c(L - LU \cot(U)))/(EJ_{\text{red}}U^2) + 1 = 0$

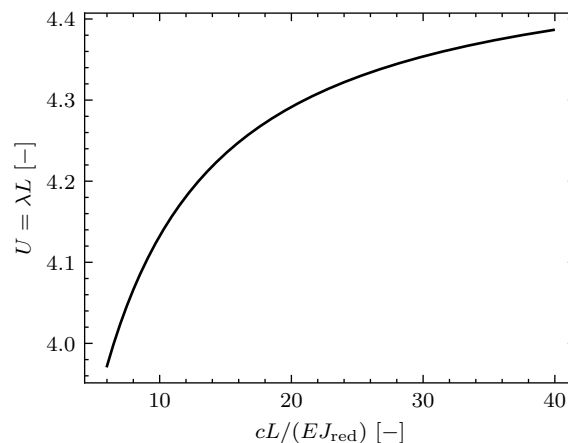


Abb. A.4: U bei einem Balken mit einem federgelagertem und einem los-gelagertem Ende in Abhängigkeit von $EJ_{\text{red}}/(cL)$.

Stab mit federgelagertem Ende und einem eingespannten Ende, Abbildung A.1 (d)

- Berechnung der lokalen Knicklast einer f2cc,z-Randzelle
- Gleichung: $(EJ_{\text{red}} U^2 + 2Lc) / (EJ_{\text{red}} cU^2 + (EJ_{\text{red}} U^2 - EJ_{\text{red}} U \sin(U) + LcU \sin(U)) / (EJ_{\text{red}} cU^2 (\cos(U) - 1))) = 0$

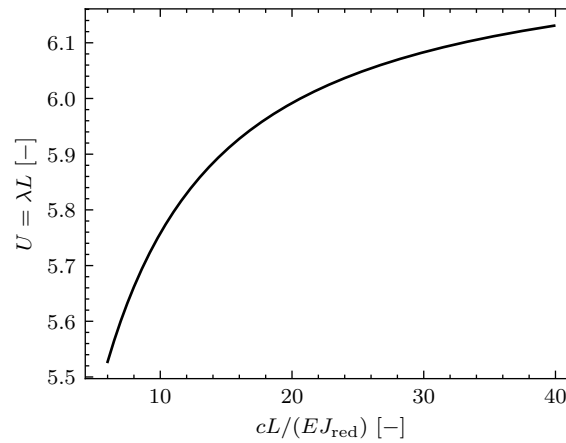


Abb. A.5: U bei einem Balken mit einem federgelagertem und einem eingespannten Ende in Abhängigkeit von $EJ_{\text{red}}/(cL)$.

A.4 Knickkurven

Nachfolgend dargestellt sind die Knickkurven für bcc und f2cc,z Gitterstrukturen für ein Verhältnis $h/r = 20$ in Abhängigkeit des Strebenwinkels ω bzw. des Seitenverhältnisses b/h für die vier Eulerfälle.

A.4.1 Knickkurven für bcc Gitterstrukturen

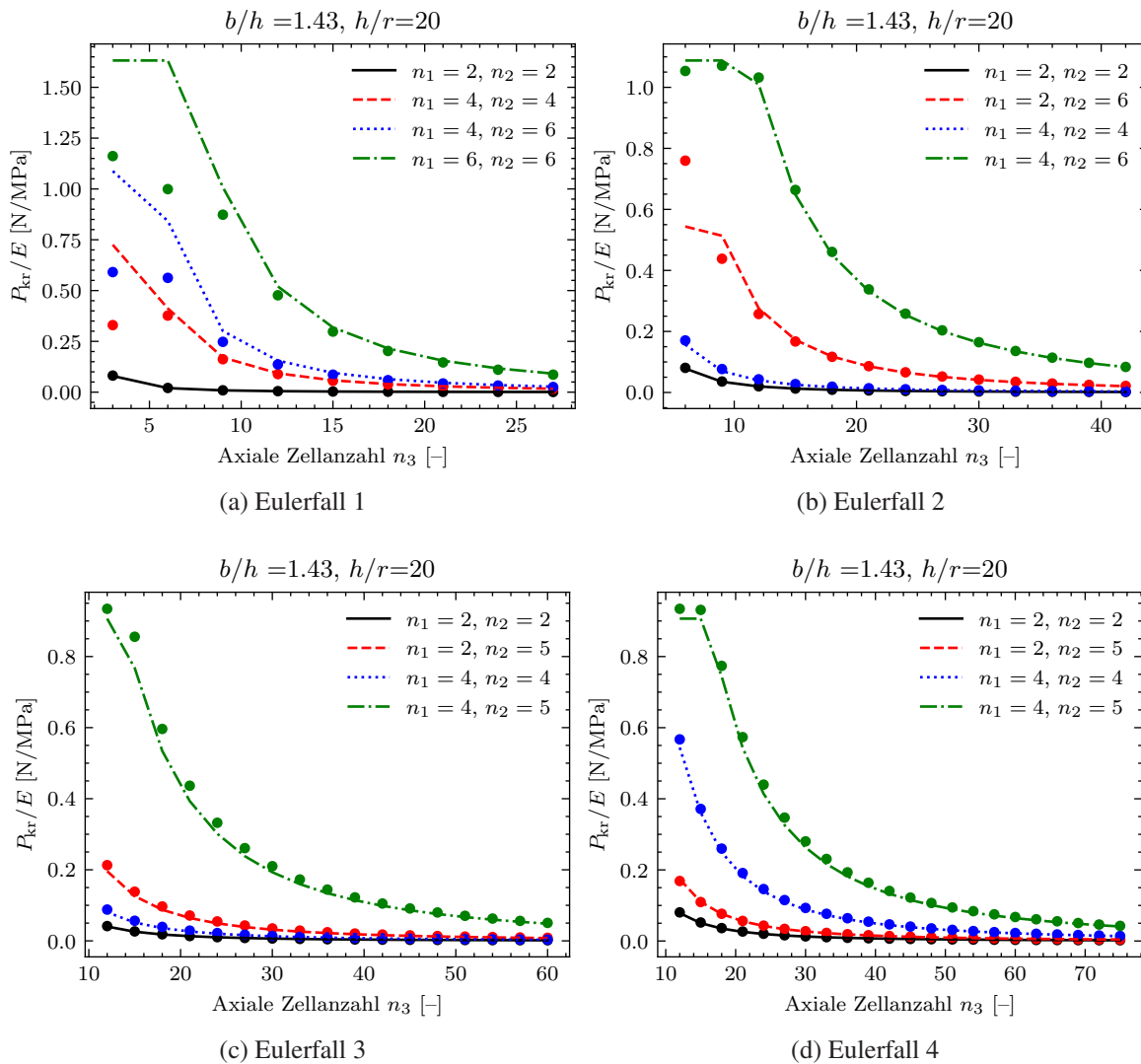


Abb. A.6: Simulationsergebnisse im Vergleich zur analytischen Lösung der Knicklast von 3D bcc-Gitterstrukturen mit $\omega = 26,31^\circ$, $b/h = 1,43$, normiert auf den E-Modul in Abhängigkeit der Zellanzahl in axialer Richtung n_3 und der Zellanzahl in Querschnittsrichtung n_1 und n_2 , für (a) Eulerfall 1, (b) Eulerfall 2, (c) Eulerfall 3 (d) Eulerfall 4.

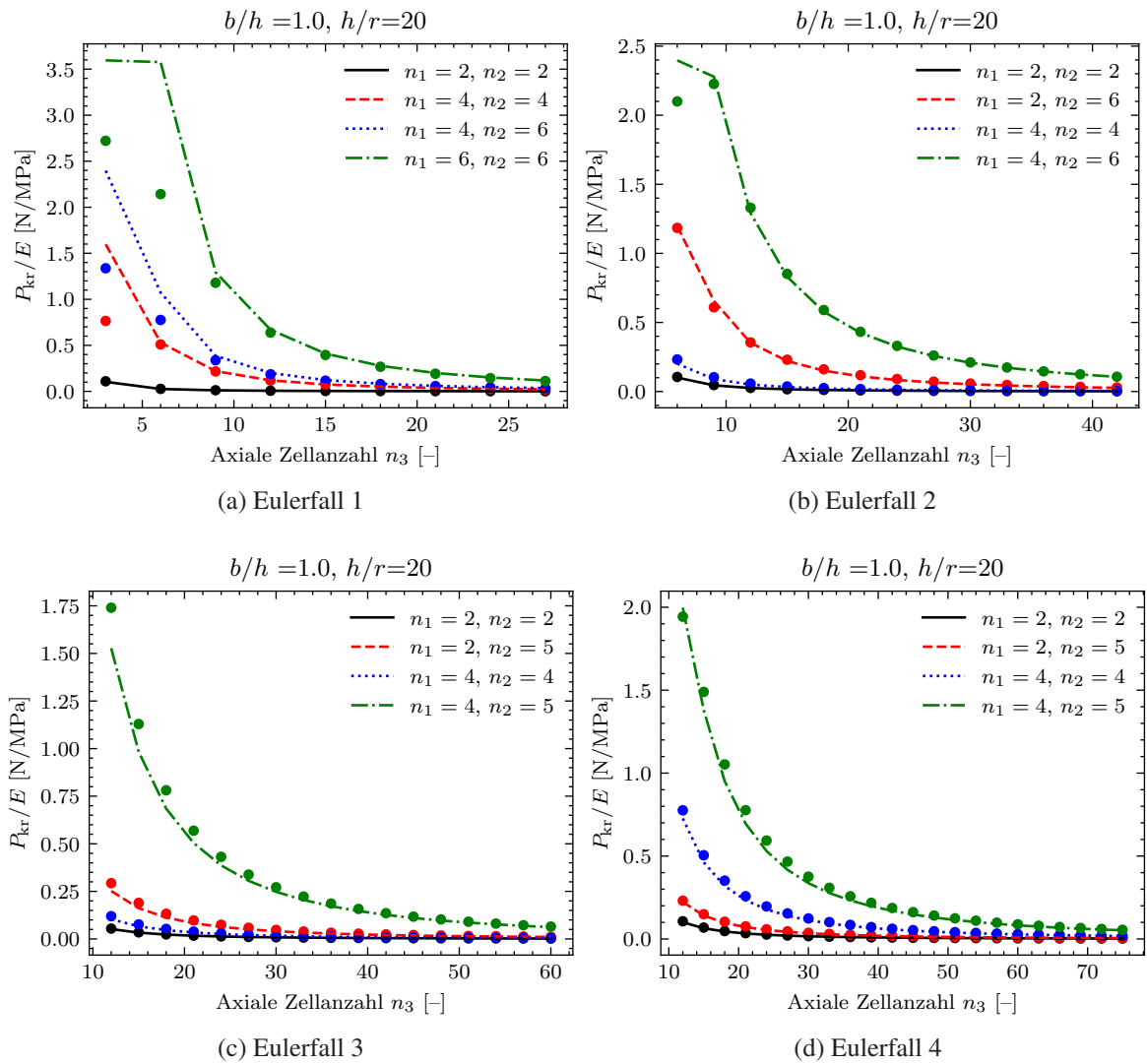


Abb. A.7: Simulationsergebnisse im Vergleich zur analytischen Lösung der Knicklast von 3D bcc-Gitterstrukturen mit $\omega = 35, 26^\circ$, $b/h = 1,0$, normiert auf den E-Modul in Abhängigkeit der Zellanzahl in axialer Richtung n_3 und der Zellanzahl in Querschnittsrichtung n_1 und n_2 , für (a) Eulerfall 1, (b) Eulerfall 2, (c) Eulerfall 3 (d) Eulerfall 4.

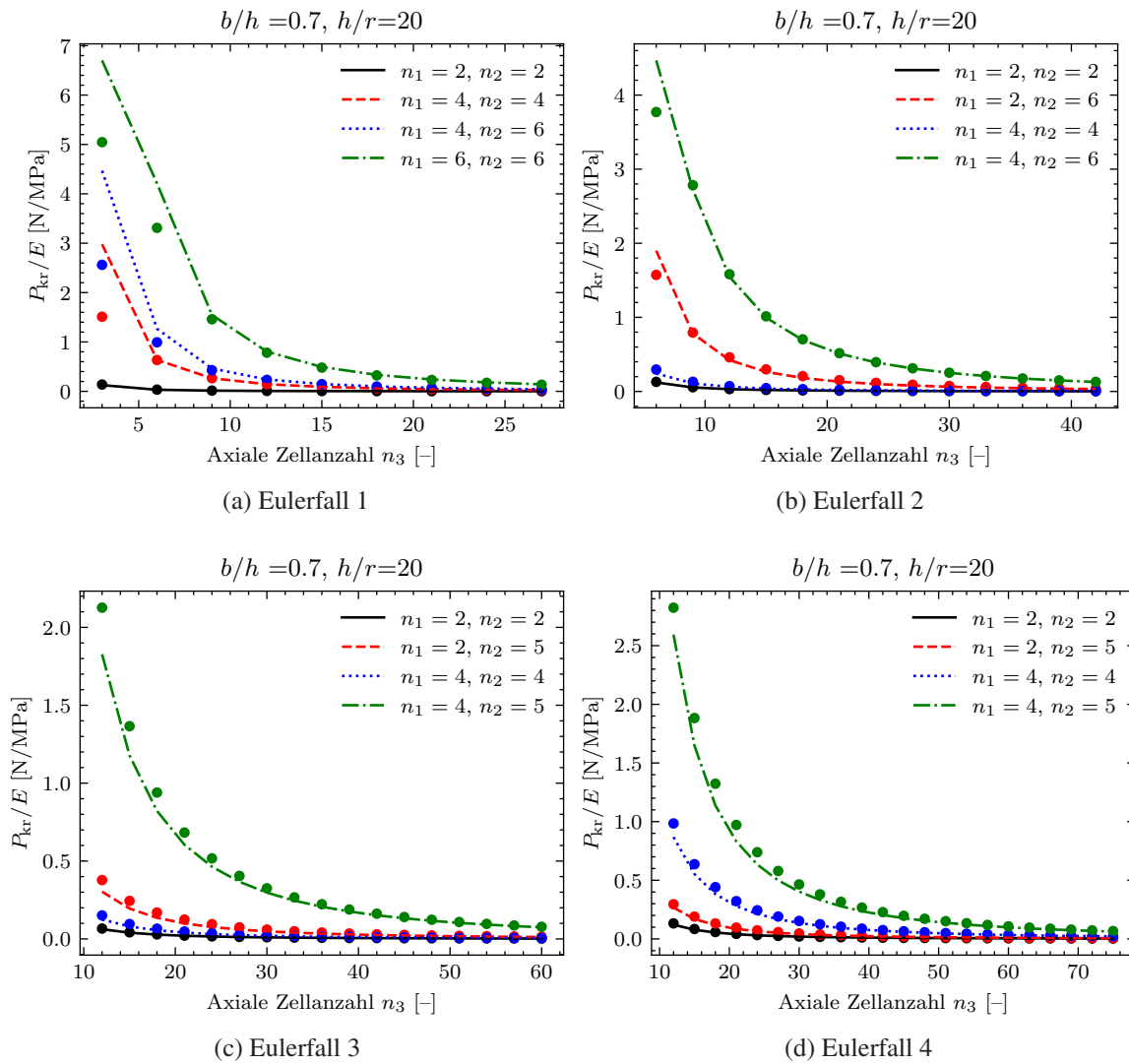


Abb. A.8: Simulationsergebnisse im Vergleich zur analytischen Lösung der Knicklast von 3D bcc-Gitterstrukturen mit $\omega = 45,29^\circ$, $b/h = 0,7$, normiert auf den E-Modul in Abhängigkeit der Zellanzahl in axialer Richtung n_3 und der Zellanzahl in Querschnittsrichtung n_1 und n_2 , für (a) Eulerfall 1, (b) Eulerfall 2, (c) Eulerfall 3 (d) Eulerfall 4.

A.4.2 Knickkurven für f2cc,z Gitterstrukturen

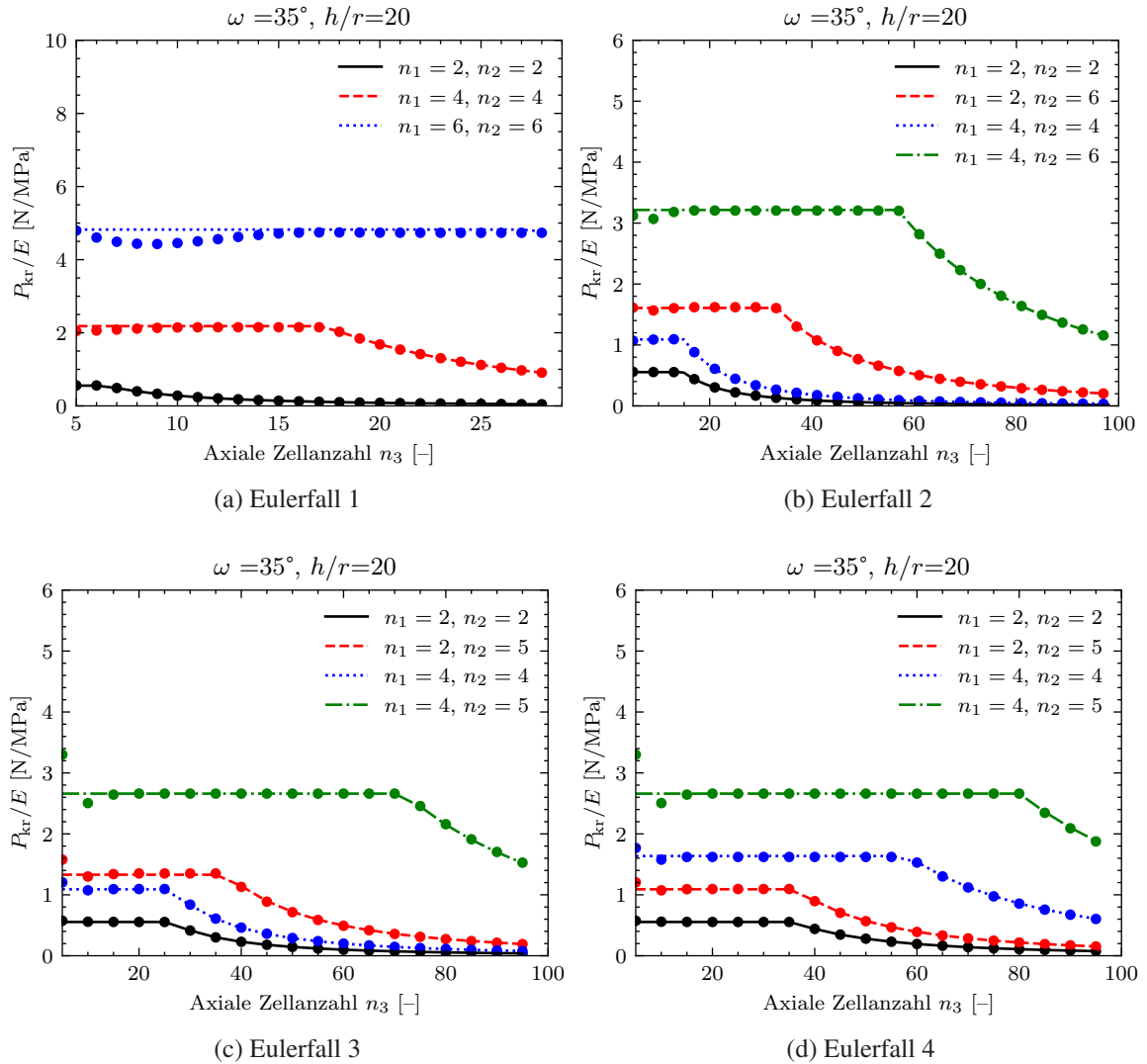


Abb. A.9: Simulationsergebnisse im Vergleich zur analytischen Lösung der Knicklast von 3D f2cc,z-Gitterstrukturen mit $\omega = 35^\circ$, $b/h = 1,43$, normiert auf den E-Modul in Abhängigkeit der Zellanzahl in axialer Richtung n_3 und der Zellanzahl in Querschnittsrichtung n_1 und n_2 , für (a) Eulerfall 1, (b) Eulerfall 2, (c) Eulerfall 3 (d) Eulerfall 4.

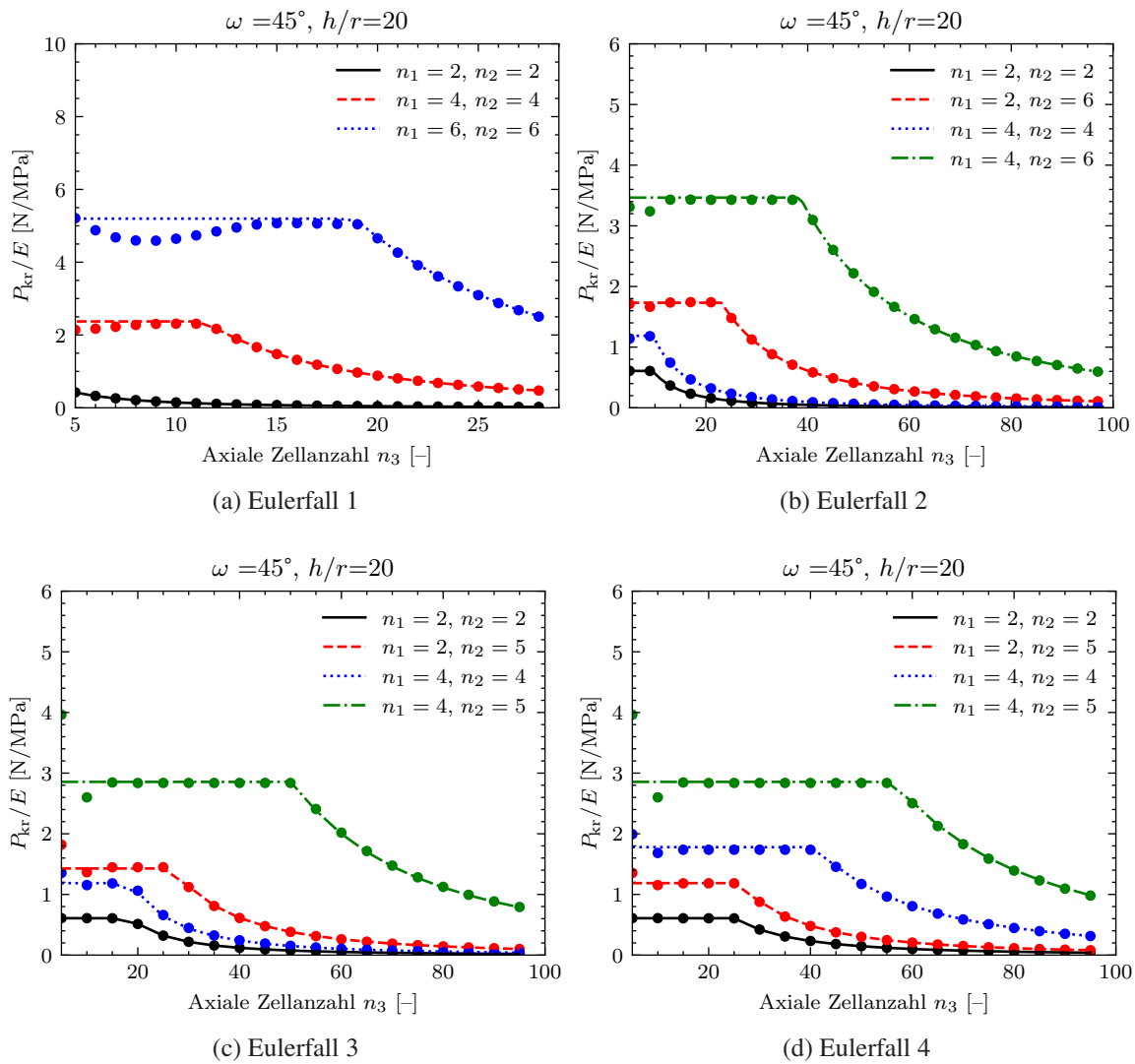


Abb. A.10: Simulationsergebnisse im Vergleich zur analytischen Lösung der Knicklast von 3D f2cc,z-Gitterstrukturen mit $\omega = 45^\circ$, $b/h = 1,0$, normiert auf den E-Modul in Abhängigkeit der Zellanzahl in axialer Richtung n_3 und der Zellanzahl in Querschnittsrichtung n_1 und n_2 , für (a) Eulerfall 1, (b) Eulerfall 2, (c) Eulerfall 3 (d) Eulerfall 4.

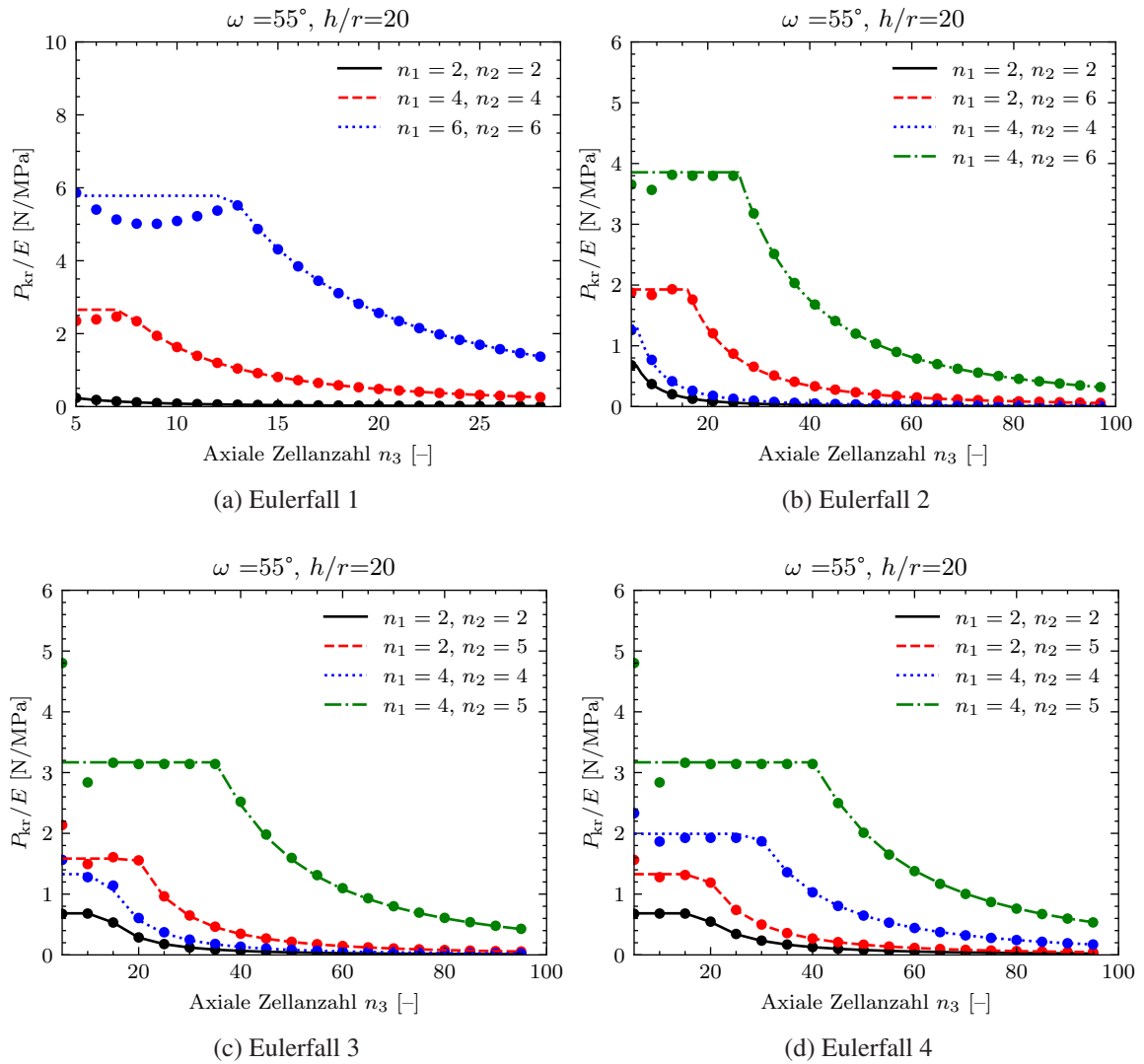


Abb. A.11: Simulationsergebnisse im Vergleich zur analytischen Lösung der Knicklast von 3D f2cc,z-Gitterstrukturen mit $\omega = 55^\circ$, $b/h = 0,7$, normiert auf den E-Modul in Abhängigkeit der Zellanzahl in axialer Richtung n_3 und der Zellanzahl in Querschnittsrichtung n_1 und n_2 , für (a) Eulerfall 1, (b) Eulerfall 2, (c) Eulerfall 3 (d) Eulerfall 4.

