Einfluss von Gas- und Machzahlvariationen auf die aerodynamischen Dämpfungen von Axialverdichtern

Influence of Gas and Mach Number Variations on the Aerodynamic Damping of Axial Compressors

Von der Fakultät für Maschinenwesen der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Ingenieurwissenschaften genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Lukas Stuhldreier

Berichter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Peter Jeschke
Hon.-Prof. Dr.-Ing. Hannes Benetschik

Tag der mündlichen Prüfung: 13.02.2025

Diese Dissertation ist auf den Internetseiten der Universitätsbibliothek online verfügbar.

Kurzfassung

In dieser Arbeit wird der Einfluss unterschiedlicher Gase auf die aerodynamischen Dämpfungen bei aerodynamisch fremderregten Schaufelschwingungen numerisch untersucht. Bei der Verdichtung unterschiedlicher Gase variiert insbesondere die Machzahl, weshalb ebenfalls der Einfluss der Machzahl auf die aerodynamischen Dämpfungen betrachtet wird. Gegenstand der voneinander entkoppelten Einflussuntersuchungen ist eine Rotorreihe eines subsonischen industriellen Axialverdichters, der für die Verdichtung von Luft ausgelegt wurde. Anhand der Ergebnisse wird eine Methode entwickelt, mit der sich die aerodynamische Dämpfung zwischen unterschiedlichen Gasen und Machzahlen transformieren lässt.

In den Einflussuntersuchungen werden die erste Biegeschwingung sowie die ersten beiden Torsionsschwingungen betrachtet. Die Berechnung der aerodynamischen Dämpfungen aller Knotendurchmesser erfolgt mithilfe der Methode der Einflusskoeffizienten. Der Einfluss des Gases wird für Argon, Kohlenstoffdioxid, Methan und Propan bei konstanter Machzahl analysiert. Dabei zeigt sich, dass für alle untersuchten Eigenformen und Frequenzen die aerodynamischen Dämpfungen nahezu exakt mit dem dynamischen Druck skalieren. Nur bei den Torsionmoden treten in der Nähe der akustischen Resonanzen geringfügige Skalierungsfehler auf. Der Einfluss der Machzahl auf die aerodynamischen Dämpfungen wird für Machzahlen zwischen 60 % und 110 % der Auslegungsmachzahl im Eintritt $M_{\text{ein}} = 0{,}52$ untersucht. Die Ergebnisse zeigen, dass der Einfluss der Machzahl ungleich größer als der Einfluss des Gases ist. Vor allem bei reduzierten Frequenzen größer eins sind die aerodynamischen Dämpfungen nicht mehr skalierbar. Der Grund dafür ist, dass hierbei die aerodynamische Dämpfung primär von akustischen Wellen induziert wird, deren Wellenlängen wiederum signifikant von der Machzahl abhängig sind. Mit der Variation der Machzahl verändern sich somit auch die Phasen der Einflusskoeffizienten. Zur Übertragung der aerodynamischen Dämpfungen zwischen unterschiedlichen Machzahlen wird daher eine Transformationsmethode entwickelt, die neben einer Skalierung auch eine machzahlabhängige Phasenverschiebung der Einflusskoeffizienten umfasst. Abschließend wird gezeigt, dass mit der Transformationsmethode die aerodynamischen Dämpfungen zumindest bei kleinen Variationen in der Machzahl von ± 10 % übertragen werden können.

Insgesamt sind die durchgeführten Analysen der Einflüsse auf die aerodynamischen Dämpfungen für die Adaptierung industrieller Axialverdichter für unterschiedliche Gase von großer Bedeutung. Während der Einfluss des Gases bei konstanter Machzahl skalierbar ist, ist der Einfluss der Machzahl signifikant und nicht skalierbar. Für eine genaue Übertragung der aerodynamischen Dämpfung zwischen unterschiedlichen Machzahlen ist daher eine korrekte Modellierung der Phasen der Einflusskoeffizienten notwendig. Die vorgestellte Transformationsmethode ermöglicht eine Abschätzung der veränderten aerodynamischen Dämpfungen und trägt zu einer schnellen Bewertung der strukturmechanischen Integrität bei. Somit eignet sich die Methode für den Einsatz in semi-analytischen Auslegungswerkzeugen modularer Verdichtersysteme.

Abstract

In this work, the influence of different gases on the aerodynamic damping of compressor blades in forced response vibration is numerically investigated. In particular, the Mach number varies when different gases are compressed. Thus, the influence of the Mach number on the aerodynamic damping is also considered. The uncoupled investigations are conducted on a rotor row of a subsonic industrial axial compressor originally designed to compress air. Based on the results, a method is developed to transform the aerodynamic damping between gases and Mach numbers.

The first bending mode and the first two torsional modes are considered in the investigations. The aerodynamic damping for all nodal diameters is determined using the influence coefficient method. The influence of the gas itself is analyzed using argon, carbon dioxide, methane and propane at a constant Mach number. It is shown that the aerodynamic damping scales exactly with the dynamic pressure for all investigated mode shapes and frequencies. Minor scaling errors occur only for the torsional modes in the vicinity of the acoustic resonances. The influence of the Mach number on the aerodynamic damping is investigated for Mach numbers between 60 % and 110 % of the design Mach number in the inlet $M_{\mathrm{ein}} = 0.52$. The results show that the influence of the Mach number is much larger than the influence of the gas. Especially at reduced frequencies exceeding unity the aerodynamic damping is no longer scalable. This is because the aerodynamic damping is induced by acoustic waves, which wavelengths depend significantly on the Mach number. As the Mach number varies, the phases of the influence coefficients also change. Therefore, a transformation method is developed to transfer the aerodynamic damping between different Mach numbers. In addition to scaling, this method also includes a Mach number dependent phase shift of the influence coefficients. Finally, it is shown that the transformation method is able to transfer the aerodynamic damping at least for small variations in Mach number of $\pm 10\,\%$.

Overall, the conducted evaluations of the influences on aerodynamic damping are of great importance for the design of industrial axial compressors for different gases. Whereas the influence of the gas at constant Mach number is directly scalable, the influence of the Mach number is significant and not scalable. Therefore, a correct modelling of the phase of the influence coefficients is necessary to accurately transfer the aerodynamic damping between different Mach numbers. The proposed transformation method enables a quick estimation of the changes in aerodynamic damping and contributes to a rapid evaluation of the structural integrity. Hence, the method is suitable to be applied in semi-analytical design tools for modular compressor systems.

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur iii

1. Einleitung 1

2. Physikalische Grundlagen 5
2.1. Eigenschwingungsverhalten beschaufelter Scheiben 5
2.1.1. Linear gedämpfte Schwingung mit einem Bewegungsfreiheitsgrad . 6
2.1.2. Reale Schaufelschwingungen 10
2.1.3. Überlagerung von Schaufel- und Scheibenschwingungen 13
2.2. Aerodynamisch erregte Schaufelschwingungen 17
2.2.1. Aeroelastische Formulierung 17
2.2.2. Aerodynamische Schaufelkopplung 18
2.2.3. Äußere aerodynamische Anregungen 21
2.2.4. Energiebetrachtung 23
2.3. Instationäre Profiltheorie 25
2.3.1. Analytischer Ansatz 25
2.3.2. Skalierung der bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeit . . 28
2.4. Bewegungsinduzierte Wellen in Fluiden 29
2.4.1. Ausbreitung akustischer Moden in ringförmigen Strömungskanälen 30
2.4.2. Anregung akustischer Moden durch Schaufelschwingungen 33
2.4.3. Einfluss von Wellen auf die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten 35
2.5. Ähnlichkeitsbetrachtungen zur Verdichtung unterschiedlicher Gase 36
2.5.1. Herstellung aerodynamischer Ähnlichkeit im Auslegungspunkt . . 37
2.5.2. Auswirkungen auf die aeroelastische Ähnlichkeit 39

3. Stand der Forschung 41
3.1. Einflüsse des Gases auf das Betriebsverhalten von Axialverdichtern . . . 41
3.2. Einflüsse auf bewegungsinduzierte aerodynamische Arbeiten 42
3.2.1. Instationäre Profiltheorie 42
3.2.2. Einflüsse auf die aerodynamischen Dämpfungen in Turbomaschinen 43
3.3. Einordnung und Ziele der Arbeit 48

4. Methodisches Vorgehen 51
4.1. Referenzgeometrie 51
4.2. Berechnung der bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten 53
4.2.1. Berechnung der Struktur 54
4.2.2. Berechnung der Strömung 56
4.2.3. Auswertung der instationären Strömungssimulation 59

4.3. Vorgehen zur Isolation der Einflüsse 61

5. Einfluss des Gases **65**
5.1. Ergebnisse der stationären Simulationen 65
5.2. Analyse der entdimensionierten aerodynamischen Arbeit 67
5.2.1. 1F-Mode 70
5.2.2. 1T-Mode 72
5.2.3. 2T-Mode 77

6. Einfluss der Machzahl **83**
6.1. Ergebnisse der stationären Simulationen 84
6.2. Analyse der entdimensionierten aerodynamischen Arbeit 85
6.2.1. Reduzierte Frequenz $k_1 = 0{,}65$ 85
6.2.2. Reduzierte Frequenz $k_1 = 2{,}37$ 89
6.2.3. Reduzierte Frequenz $k_1 = 5{,}87$ 93

7. Transformation aerodynamischer Dämpfungen bei Machzahlvariationen **99**
7.1. Transformationsmethode aerodynamischer Dämpfungen 99
7.2. Transformierte entdimensionierte Einflusskoeffizienten 103
7.2.1. Amplituden der schwingenden Schaufel $\iota = \mathbf{0}$ 103
7.2.2. Amplituden der nicht schwingenden Schaufeln $\iota \neq \mathbf{0}$ 105
7.2.3. Phasen 109
7.3. Transformierte S-Kurven 113
7.3.1. Reduzierte Frequenz $k_1 = 0{,}65$ 113
7.3.2. Reduzierte Frequenz $k_1 = 2{,}37$ 117
7.3.3. Reduzierte Frequenz $k_1 = 5{,}87$ 120

8. Zusammenfassung und Ausblick **125**

Literaturverzeichnis **129**

A. Netzunabhängigkeitsstudie **133**

B. Abhängigkeit der Amplituden der Einflusskoeffizienten von k^* **135**

Nomenklatur

Lateinische Buchstaben

A	Schaufeloberfläche	m^2
a	Schallgeschwindigkeit	$\mathrm{m/s}$
AR	Höhen-Seitenverhältnis (engl.: *Aspect Ratio*)	-
b	Maximale Amplitude des massennormierten Eigenvektors	$1/\sqrt{\mathrm{kg}}$
c	Steifigkeitskoeffizient	$\mathrm{kg/s}^2$
C_p	Druckbeiwert	-
C_o	Aerodynamische Koeffizienten in TWM-Koordinaten	-
d	Viskoser Dämpfungskoeffizient	$\mathrm{kg/s}$
e	Euler'sche Zahl	-
E	Energie	J
$\underline{E}$	Komplexer Fouriertransformationskoeffizient	-
EO	Erregerordnung	-
ER	Expansionsverhältnis (engl.: *Expansion Ratio*)	-
f	Frequenz	$1/\mathrm{s}$
f	Generalisierte Kraft	$\mathrm{m}\sqrt{\mathrm{kg}}/\mathrm{s}^2$
F	Kraft	N
g	Harmonischer Index	-
h	Schaufelhöhe	m
h_spalt	Radialspalt	m
i	Schaufelindex	-
j	Imaginäre Einheit	-
k	Reduzierte Frequenz $k = 2\pi f l/w_\infty$	-
k^*	machzahlkorrigierte reduzierte Frequenz	-
K	Wellenzahl	$1/\mathrm{m}$
$\check{K}_m$	Drallbehaftete Wellenzahl	$1/\mathrm{m}$
$\mathbf{K}$	Steifigkeitsmatrix	$\mathrm{kg/s}^2$
l	Sehnenlänge	m
L_i	Aerodynamische Einflusskoeffizienten	-
m	Azimuthalmodenordnung	-
m_n	modale Masse	-

M_S	Skalare Schaufelmasse	kg
M	Machzahl	-
$\mathbf{M}$	Massenmatrix	kg
n	Radialmodenordnung	-
n	Index einer Schaufelmode	-
n_R	Drehzahl	rpm
$\vec{n}$	Normalenvektor	m
N	Schaufelzahl	-
N_A	Anzahl Oberflächenelemente	-
N_h	Anzahl Harmonischer	-
N_s	Anzahl Störungen	-
o	Index der umlaufenden Eigenform	-
p	Druck	$\mathrm{N/m^2}$
q	Generalisierte Koordinate	$\mathrm{m}\sqrt{\mathrm{kg}}$
r	Radius	m
r_K	Korrelationskoeffizient	-
R	Spezifische Gaskonstante	$\mathrm{J\,K/kg}$
Re	Reynoldszahl	-
s	Allgemeine Zählvariable	-
t	Zeit	s
T	Periodendauer	s
T	Temperatur	K
T_u	Turbulenzintensität	-
u	Umfangsgeschwindigkeit	m/s
U	Konservative Strömungsgrößen	-
v	Phasengeschwindigkeit	m/s
$\boldsymbol{w}$	Strömungsgeschwindigkeit im Relativsystem	m/s
W	Aerodynamische Arbeit	$\mathrm{N\,m}$
$\vec{x}$	Orts- bzw. Verschiebungsvektor	m

Griechische Buchstaben

α_{mn}	Eigenwert einer akustischen Mode	-
β	Strömungswinkel im Relativsystem	°
γ_{mn}	Ausbreitungsfaktor einer akustischen Mode	-
δ	Maximale Verformungsamplitude	m
ζ	Lehr'sches Dämpfungsmaß	-
η	Nabenverhältnis	-
η	dynamische Viskosität	$\mathrm{kg/(m\,s)}$

ϑ	Umfangswinkel	$^\circ$
Θ	Entdimensionierte aerodynamische Arbeit	-
$\underline{\Theta}_{\mathrm{IC}}$	Entdimensionierter Einflusskoeffizient	-
κ	Isentropenexponent	-
Λ	Logarithmisches Dekrement	-
λ	Wellenlänge	m
μ	Masseverhältnis	-
ν	Umlaufende Eigenform	-
Π_{tt}	Totaldruckverhältnis	-
ρ	Dichte	$\mathrm{kg/m^3}$
ρ_{S}	Dichte des Schaufelmaterials	$\mathrm{kg/m^3}$
σ	Schaufelphasendifferenzwinkel (engl.: inter-blade phase angle)	$^\circ$
τ	Teilung	m
φ	Phasenwinkel	-
ϕ	Durchflusskennzahl $\phi = w_a / (2\pi r n_{\mathrm{R}})$	-
Φ	Instationäres Geschwindigkeitspotential	$\mathrm{m^2/s}$
ψ	Geschwindigkeitspotential einer harmonischen Bewegung	$\mathrm{m^2/s}$
$\vec{\Psi}$	Massennormierter Eigenvektor	$1/\sqrt{\mathrm{kg}}$
ω	Kreisfrequenz	$1/\mathrm{s}$
ω_0	Eigenkreisfrequenz	$1/\mathrm{s}$
ω_{d}	Gedämpfte Eigenkreisfrequenz	$1/\mathrm{s}$
ω_{R}	Resonanzkreisfrequenz	$1/\mathrm{s}$
Ω	Strömungsdrall	$1/\mathrm{s}$

Subskripte

$\square_0$	Zeitlich gemittelt
$\square_a$	Axialkomponente
$\square_{\mathrm{a}}$	Anregungskomponente
$\square_{\mathrm{aus}}$	Austritt
$\square_{\mathrm{d}}$	Dämpfungskomponente
$\square_{\mathrm{ein}}$	Eintritt
$\square_{\mathrm{g}}$	Gehäuse
$\square_{\mathrm{G}}$	Gas
$\square_\iota$	In Abhängigkeit der Schaufel mit dem Index ι
$\square_i$	In Abhängigkeit der Schaufel mit dem Index i
$\square_{\mathrm{L}}$	Luft
$\square_m$	In Abhängigkeit der Azimuthalmodenordnung n
$\square_{\mathrm{mech}}$	Mechanische Komponente

$\square_\nu$	In Abhängigkeit des Knotendurchmessers ν
$\square_n$	In Abhängigkeit der Radialmodenordnung n
$\square_n$	In Abhängigkeit des Schaufelmodes n
$\square_o$	In Abhängigkeit der umlaufenden Eigenform o
$\square_{\text{ref}}$	Referenzgröße
$\square_{\text{rel}}$	Im Relativsystem
$\square_{\text{tip}}$	An der Schaufelspitze (engl.: *tip*)
$\square_u$	Umfangskomponente
$\square_\infty$	Flächengemittelte Größe der ungestörten Anströmung
$\underline{\square}$	Komplexe Größe

Superskripte

$\hat{\square}$	Amplitude
$\overline{\square}$	Arithmetisches bzw. zeitliches Mittel
$\square'$	Schwankungsanteil
$\vec{\square}$	Vektorielle Größe
$\widetilde{\square}$	Entdimensioniert

Abkürzungen

1F	Erster Flachkantbiegemode
1T	Erster Torsionmode
2F	Zweiter Flachkantbiegemode
2T	Zweiter Torsionsmode
Ar	Argon
AR	Höhen-Seitenverhältnis (engl.: *Aspect Ratio*)
C_3H_8	Propan
CH_4	Methan
CO_2	Kohlenstoffdioxid
CFD	Numerische Strömungsmechanik (engl.: *Computational Fluid Dynamics*)
FEM	Finite-Elemente Methode
IBPA	Schaufelphasendifferenzwinkel (engl.: *Inter-Blade Phase Angle*)
IC	Einflusskoeffizient (engl.: *Influence Coefficient*)
KD	Knotendurchmesser
KK	Knotenkreise
RANS	Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen
TWM	Umlaufende Eigenform (engl.: *Travelling Wave Mode*)

Mathematische Operatoren

$\boldsymbol{\square}$	Matrix

$\{\square\}$	Vektorielle Größe
$\lvert\square\rvert$	Betrag einer komplexen Größe
$\partial\square$	Partielles Differential
$\mathrm{d}\square$	Totales Differential bzw. infinitesimale Differenz
$\arg(\square)$	Phase einer komplexen Größe
$\Re(\square)$	Realteil einer komplexen Größe
$\Im(\square)$	Imaginärteil einer komplexen Größe

1. Einleitung

Der groß angelegte Einsatz von Verfahren wie *Carbon Capture Utilisation and Storage* (CCUS) oder *Power to Gas* (PtG) erfordert die effiziente Verdichtung großer Volumenströme von Gasen wie z. B. Kohlenstoffdioxid (CO_2) (*Haszeldine*, 2009) und Methan (CH_4) (*Schiebahn et al.*, 2015). Zur Verdichtung großer Volumenströme eignen sich insbesondere industrielle Axialverdichter, die bisher vor allem mit Luft betrieben werden. Aufgrund deutlich unterschiedlicher Anforderungen sind für industrielle Axialverdichter anwendungsspezifische Auslegungen notwendig. Da individuelle Neuauslegungen jedoch sehr zeit- und kostenintensiv sind, greifen Hersteller stattdessen auf ein modulares System zurück. Dabei werden Geometrien einmalig ausgelegt und die aerodynamischen und mechanischen Eigenschaften für diese bestimmt. Für einen spezifischen Anwendungsfall wird diese geometrische Basis mithilfe von Skalierungs- und Transformationsverfahren individuell angepasst. Für einen breiten Betriebsbereich mit großen Wirkungsgraden wird bei industriellen Axialverdichtern üblicherweise eine große Anzahl inzidenzunempfindlicher Stufen mit kleinem Stufendruckverhältnis verwendet. Mit der Stufenanzahl steigt wiederum die Anzahl der aerodynamischen Interaktionen durch Potentialfelder und viskose Nachläufe zwischen den einzelnen Schaufelreihen. Dadurch können Resonanzschwingungen einzelner Schaufelreihen bei einer Vielzahl an Drehzahlen und damit Betriebspunkten angeregt werden. Solche aerodynamisch fremderregten Schwingungen sind in der Auslegung nicht vollständig für den gesamten Betriebsbereich vermeidbar. Um die trotzdem einzuhaltende Dauerfestigkeit bewerten zu können, ist eine Abschätzung der auftretenden Schwingspannungen in diesen Resonanzsituationen erforderlich. Die Schwingspannungen ergeben sich aus den Amplituden der Schwingung, die sich wiederum aus dem Gleichgewicht zwischen anregenden und dämpfenden Kräften bestimmen lassen. Die dämpfenden Kräfte setzten sich aus der mechanischen und aerodynamischen Dämpfung zusammen. Bei den direkt in die Welle gesteckten Schaufeln industrieller Axialverdichter ist aufgrund fehlender Reibung zwischen Schaufel und Welle die mechanische Dämpfung gering. Damit hat die aerodynamische Dämpfung einen signifikanten Anteil an der Gesamtdämpfung. Deshalb ist für eine Vorhersage der auftretenden Schwingspannungen im Betrieb eine genaue Kenntnis der aerodynamischen Dämpfungen erforderlich. Beeinflusst wird diese Dämpfung dabei maßgeblich von der aerodynamischen und aeroakustischen Kopplung zwischen den Schaufeln innerhalb der betrachteten Reihe.

Bei den modularen Systemen industrieller Axialverdichter sind die aerodynamischen Dämpfungen bisher nur für die Verdichtung von Luft bekannt. Für den zukünftigen Einsatz solcher Axialverdichter in Verfahren wie Carbon Capture Utilisation and Storage und Power to Gas ist jedoch die Kenntnis über die sich mit dem Gas verändernden aerodynamischen Dämpfungen erforderlich. Mit dem Gas verändert sich die Schallgeschwindigkeit und folglich die Machzahl. Dadurch wird die aerodynamische sowie

aeroakustische Kopplung der Schaufeln beeinflusst, was sich direkt auf die aerodynamischen Dämpfungen auswirkt. Deshalb ist ein gutes Verständnis des Einflusses des Gases und den damit einhergehenden Machzahländerungen auf die aerodynamischen Dämpfungen notwendig. Für die Gewährleistung der strukturmechanischen Integrität bei der Verdichtung von Luft abweichender Gase ist eine Erweiterung der Skalierungs- und Transformationsverfahren des modularen Systems erforderlich. Dies macht wiederum eine Methode zur Übertragung der für Luft bekannten aerodynamischen Dämpfungen auf ein anderes Gas notwendig.

In der Literatur wurden nach dem Wissen des Autors bisher weder die Veränderungen der aerodynamischen Dämpfungen durch einen Austausch des Gases und den damit einhergehenden Machzahlvariationen untersucht noch eine Methode zur Übertragung der aerodynamischen Dämpfungen auf andere Gase und Machzahlen entwickelt. Vor dem Hintergrund der Anpassung modularer Systeme zur Verdichtung von Luft abweichender Gase führte *Hoffmann* (2023) Untersuchungen im Rahmen des auch der vorliegenden Arbeit zugrundeliegenden umfassenderen Projekts durch. Er fokussierte sich dabei jedoch auf den Einfluss des Gases auf das aerodynamische Betriebsverhalten und leitete Anpassungsmaßnahmen zur Wiederherstellung der aerodynamischen Ähnlichkeit mit dem für Luft ausgelegten Verdichter her. Strukturmechanische und aeroelastische Aspekte wurden von *Hoffmann* nicht betrachtet.

Diese Arbeit hat somit als erstes Ziel, die Einflüsse zu bestimmen, die das Gas auf die aerodynamischen Dämpfungen industrieller Axialverdichter bei aerodynamisch fremderregten Schwingungen hat. Die dazu durchgeführten Untersuchungen umfassen die Bestimmung der isolierten Einflüsse der Stoffeigenschaften eines Gases, wie z. B. die des Isentropenexponenten und der spezifischen Gaskonstante. Wenn ein von Luft abweichendes Gas verdichtet wird, verändern sich aufgrund unterschiedlicher Schallgeschwindigkeiten die Machzahlen der Betriebspunkte aerodynamisch fremderregter Schwingungen. Daher ist das zweite Ziel dieser Arbeit die Bestimmung des Einflusses der Machzahl auf die aerodynamischen Dämpfungen. Mittels physikalischer Erklärungsansätze soll das allgemeine Verständnis der Mechanismen der aerodynamischen Dämpfungsentstehung unter Gas- und Machzahlvariationen verbessert werden. Darauf aufbauend ist das dritte Ziel dieser Arbeit die Entwicklung einer Methode, welche die bekannten aerodynamischen Dämpfungen eines Referenzverdichters für Luft in die aerodynamischen Dämpfungen eines für ein beliebiges Gas angepassten Verdichters transformiert. Diese Methode soll den Herstellern industrieller Axialverdichter helfen, die durch eine Änderung des Gases auftretenden Veränderungen der Spannungen aerodynamisch fremderregter Schaufelschwingungen ohne zusätzliche instationäre Strömungssimulationen zur Dämpfungsberechnung abzuschätzen. Das vierte Ziel umfasst die Bestimmung der Genauigkeit dieser Methode und soll eine Aussage hinsichtlich der Eignung der Methode zum Einsatz im industriellen Umfeld geben. Insgesamt soll diese Arbeit dazu beitragen, die modularen Systeme der Hersteller industrieller Axialverdichter für die Berücksichtigung unterschiedlicher Gase zu erweitern.

Zur Bestimmung der aerodynamischen Dämpfungen werden in dieser Arbeit instationäre numerische Strömungssimulationen im Frequenzbereich durchgeführt. Die Fluid-Struktur-Interaktion wird dabei über eine Ein-Wege-Kopplung der Strömungssimulationen mit

den ebenfalls numerisch ermittelten Eigenformen berücksichtigt. Als Geometrie wird der Rotor einer hinteren Stufe eines für Luft ausgelegten achtstufigen industriellen Axialverdichters untersucht. Bei der Einflussuntersuchung des Gases werden bei konstanter Eintrittsmachzahl neben Kohlenstoffdioxid und Methan auch Argon und Propan verwendet. Diese Gasauswahl erlaubt es, einen größtmöglichen Bereich unterschiedlicher Isentropenexponenten zu berücksichtigen. Bei den Untersuchungen zum Einfluss der Machzahl werden für Luft die Eintrittsmachzahlen über den gesamten Betriebsbereich des Referenzverdichters von 0,3 bis 0,6 variiert. In beiden Einflussuntersuchungen werden die Eigenformen der ersten Biegeschwingung sowie der ersten beiden Torsionsschwingungen bei den jeweils korrespondierenden reduzierten Frequenzen berücksichtigt. Bei der Einflussuntersuchung der Machzahl wird zusätzlich der Einfluss der Eigenform unabhängig von der reduzierten Frequenz mit einbezogen.

Zur Einleitung in die oben genannte Thematik werden in Kapitel 2 zunächst die physikalischen Grundlagen der Aeroelastik von Turbomaschinenschaufeln beschrieben. Aufbauend auf dem Schwingungsverhalten beschaufelter Scheiben werden die physikalischen Mechanismen der Induktion aerodynamischer Dämpfungen erläutert. Abgeschlossen wird das Kapitel mit Ähnlichkeitsbetrachtungen zur Verdichtung unterschiedlicher Gase. Insbesondere die Auswirkungen des Gases auf die aeroelastische Ähnlichkeit bei aerodynamisch fremderregten Schwingungen werden herausgearbeitet. In Kapitel 3 wird der für diese Arbeit relevante Stand der Forschung vorgestellt. Anschließend werden in Kapitel 3.3 die Arbeit in diesen Forschungsstand eingeordnet und vier spezifische Forschungsziele aufgestellt. Die in dieser Arbeit untersuchte Geometrie, die angewandten Methoden zur Struktur-, Strömungs- und aerodynamischen Dämpfungsberechnung sowie das Vorgehen der Einflussuntersuchungen werden in Kapitel 4 beschrieben.

In den ersten beiden Ergebniskapiteln 5 und 6 wird das erste und zweite in Kapitel 3.3 aufgestellte Forschungsziel verfolgt, indem die isolierten Einflüsse des Gases (Kapitel 5) und der Machzahl (Kapitel 6) auf die aerodynamischen Dämpfungen bestimmt werden. Unter Zuhilfenahme analytischer Vorhersagen der akustischen Resonanzen werden dazu die Einflüsse des Gases und der Machzahl auf die sogenannten S-Kurven und Einflusskoeffizienten analysiert. In diesen ersten beiden Ergebniskapiteln wird die Grundlage für die Entwicklung der Methode zur Übertragung der aerodynamischen Dämpfungen von Luft auf andere Gase und Machzahlen gelegt. Diese Transformationsmethode wird in Kapitel 7 hergeleitet und mit den numerischen Ergebnissen aus den vorangegangenen Untersuchungen validiert. Mit diesem dritten und letzten Ergebniskapitel wird schließlich das dritte und vierte Forschungsziel verfolgt.

2. Physikalische Grundlagen

In diesem Kapitel werden grundlegende Zusammenhänge der Turbomaschinenaeroelastik erläutert. Dabei wird insbesondere auf die physikalischen Entstehungsmechanismen aerodynamischer Dämpfungen eingegangen. Zunächst wird dazu ein Überblick über das Eigenschwingungsverhalten beschaufelter Scheiben mithilfe mathematischer Formulierungen des dynamischen Systems gegeben. Zusätzlich werden aerodynamisch angeregte Schaufelschwingungen mit besonderem Fokus auf die aerodynamische Schaufelkopplung behandelt. Anschließend werden die Grundlagen der bewegungsinduzierten instationären Aerodynamik dargelegt. Neben einer analytischen Betrachtung aus der instationären Profiltheorie wird auf die Anregung und Ausbreitung bewegungsinduzierter Wellen in Fluiden eingegangen. Um die in dieser Arbeit zu untersuchenden Einflüsse unterschiedlicher Gase auf die aerodynamischen Dämpfungen zu identifizieren, werden abschließend Ähnlichkeitsbetrachtungen durchgeführt.

2.1. Eigenschwingungsverhalten beschaufelter Scheiben

Zur umfänglichen Beschreibung des Schwingungsverhaltens beschaufelter Scheiben werden zunächst die Schaufeln isoliert betrachtet. Dazu werden anhand des Modells des Einmassenschwingers, als einfachstes schwingfähiges System mit einem Bewegungsfreiheitsgrad, grundlegende mathematische Formulierungen der Strukturdynamik aufgestellt. Anschließend wird auf die Eigenschwingungen realer Schaufeln eingegangen. Reale Schaufeln weisen als elastische Festkörper eine unendliche Anzahl an Bewegungsfreiheitsgraden auf. Mit einer Diskretisierung der realen Schaufeln auf eine endliche Anzahl an Bewegungsfreiheitsgraden sowie einer anschließenden modalen Reduktion werden die Schaufelschwingungen in generalisierte Koordinaten[1] überführt. Diese modale Reduktion ermöglicht es, das reale Eigenschwingungsverhalten der Schaufeln auf die eindimensionalen Formulierungen des Einmassenschwingers zu übertragen. Abschließend wird das gesamte Eigenschwingungsverhalten einer beschaufelten Scheibe anhand der Überlagerung einzelner modal reduzierter Schaufelschwingungen mit Scheibenschwingungen erläutert.

[1] In der Mechanik bezeichnen generalisierte Koordinaten die kleinstmögliche Gruppe an unabhängigen Koordinaten mit denen der Zustand eines mechanischen Systems beschrieben werden kann.

2.1.1. Linear gedämpfte Schwingung mit einem Bewegungsfreiheitsgrad

Das lineare System des Einmassenschwingers besteht aus einer Punktmasse mit einem Bewegungsfreiheitsgrad, die über ein Feder-Dämpfer System mit der Umgebung verbunden ist. In Abbildung 2.1a ist dieses mechanische Modell mit einer zeitabhängigen anregenden Kraft $F(t)$ und der zeitabhängigen Verschiebung der Masse $x(t)$ schematisch dargestellt. Die in Abbildung 2.1b abgebildeten auf die Masse wirkenden Kräfte sind zu jedem Zeitpunkt im Gleichgewicht. Daraus ergibt sich zur Beschreibung der Bewegung der Masse m die Differentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + cx(t) = F(t), \tag{2.1}$$

mit dem Dämpfungskoeffizienten d und dem Steifigkeitskoeffizienten c. Zur mathematischen Beschreibung einer harmonischen Schwingung mit harmonischer Anregung wird die Bewegungsgleichung in komplexer Notation und Normalform

$$\underline{\ddot{x}}(t) + 2\zeta\omega_0\underline{\dot{x}}(t) + \omega_0^2\underline{x}(t) = \frac{\underline{F}(t)}{m} \tag{2.2}$$

geschrieben. Dabei entspricht

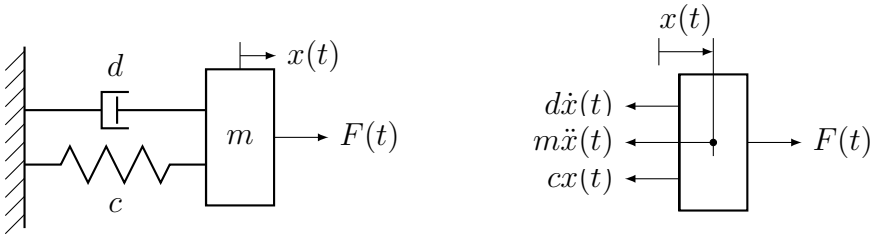
$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \tag{2.3}$$

der Eigenkreisfrequenz bzw. f_0 der Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung mit $d = 0$. Die Dämpfung wird durch das dimensionslose *Lehr'sche Dämpfungsmaß*

$$\zeta = \frac{d}{2\sqrt{cm}} \tag{2.4}$$

definiert.

Die allgemeine Lösung von (2.2) setzt sich aus einem homogenen und einem partikulärem Anteil zusammen. Das Eigenschwingungsverhalten, gegeben für $\underline{F}(t) = 0$, wird durch die homogene Lösung der Differentialgleichung (2.2) beschrieben.



(a) Mechanisches Modell **(b)** Kräftegleichgewicht

Abbildung 2.1.: Schematische Darstellung des linearen Systems des Einmassenschwingers bestehend aus einer Punktmasse m, einer Feder c und einem Dämpfer d sowie Darstellung der an die Punktmasse angreifenden Kräfte

Durch Einsetzen des homogenen Lösungsansatzes

$$\underline{x}_{\mathrm{h}}(t) = \underline{\hat{C}} e^{\underline{\lambda} t} \tag{2.5}$$

und $\underline{F}(t) = 0$ in (2.2) ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$\left(\underline{\lambda}^2 + 2\zeta\omega_0\underline{\lambda} + \omega_0^2\right)\underline{\hat{C}} e^{\underline{\lambda} t}, \tag{2.6}$$

dessen Wurzeln $\underline{\lambda}_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ mit der imaginären Einheit j entsprechen. Mit den komplexen Amplituden $\underline{\hat{C}}_{1,2}$ und der Definition der gedämpften Eigenkreisfrequenz

$$\omega_{\mathrm{d}} = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \tag{2.7}$$

ergibt sich als homogene Lösung der Differentialgleichung (2.2)

$$\underline{x}_{\mathrm{h}}(t) = \underline{\hat{C}}_1 e^{(-\zeta\omega_0 + j\omega_{\mathrm{d}})t} + \underline{\hat{C}}_2 e^{(-\zeta\omega_0 - j\omega_{\mathrm{d}})t}. \tag{2.8}$$

Zusätzlich wird angenommen, dass die komplexe Amplitude $\underline{\hat{C}}_1$ der reellen initialen Auslenkung der Masse $\hat{x}_0$ entspricht und für die zweite komplexe Amplitude $\underline{\hat{C}}_2 = 0$ gilt. Zusammen mit dem Nullphasenwinkels φ_0 wird somit nach einigen Umformungen aus (2.8) der Weg der freien, gedämpften Schwingung der Masse zu

$$x_{\mathrm{h}}(t) = \Re\left(\underline{x}_{\mathrm{h}}(t)\right) = \hat{x}_0 e^{-\zeta\omega_0 t} cos\left(\omega_{\mathrm{d}} t + \varphi_0\right) \tag{2.9}$$

bestimmt. An dem exponentiellen Faktor in (2.9) ist ersichtlich, dass bei positiver Dämpfung die Schwingung ohne eine äußere anregende Kraft exponentiell mit $e^{-\zeta\omega_0 t}$ abklingt. Aus diesem Grund ist bei einer fremderregten Schwingung der homogene Anteil nur während des Einschwingvorgangs relevant. Eine weitaus größere Bedeutung hat deshalb die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2.2). Bei einer harmonischen Anregungskraft mit der Kreisfrequenz ω und Amplitude $\underline{\hat{F}}$

$$\underline{F}(t) = \underline{\hat{F}} e^{j\omega t} \tag{2.10}$$

wird für den Weg der Masse bei einer fremderregten Schwingung der partikuläre Lösungsansatz

$$\underline{x}_{\mathrm{p}}(t) = \underline{\hat{x}} e^{j\omega t} \tag{2.11}$$

gewählt. Eingesetzt in (2.2) und nach einigen Umformungen ergibt sich die komplexe Lösung

$$\underline{\hat{x}} = \frac{\underline{\hat{F}}}{m\omega_0^2} \frac{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - j2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\zeta^2\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \hat{x} e^{j\varphi} \tag{2.12}$$

mit der reellen Schwingungsamplitude

$$\hat{x} = \frac{\left|\hat{\underline{F}}\right|}{m\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \tag{2.13}$$

und der Phase

$$\tan\varphi = \frac{\Im(\hat{\underline{x}})}{\Re(\hat{\underline{x}})} = -\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}. \tag{2.14}$$

Die Nullstelle der ersten Ableitung von (2.13) nach ω entspricht der Resonanzkreisfrequenz

$$\omega_\mathrm{R} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}, \tag{2.15}$$

bei der die maximale Schwingungsamplitude auftritt. Diese Resonanzkreisfrequenz unterscheidet sich damit, wie die Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung ω_d, von der Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung ω_0. Allerdings sind die Dämpfungen bei Schaufelschwingungen in der Regel mit $\zeta \leq 1\,\%$ gering. Die Abweichungen zwischen den verschiedenen Kreisfrequenzen sind daher kleiner als 0,01 % und damit vernachlässigbar. Aus diesem Grund werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit die drei Kreisfrequenzen zu $\omega_0 \approx \omega_\mathrm{d} \approx \omega_\mathrm{R}$ als gleich angenommen.

Logarithmisches Dekrement

Dimensionslos kann die Dämpfung neben dem Lehr'schen Dämpfungsmaß auch als *logarithmisches Dekrement* Λ angegeben werden. Dieses ist definiert als der natürliche Logarithmus des Verhältnisses der Amplituden zweier aufeinanderfolgender Schwingungszyklen einer freien gedämpften Schwingung

$$\Lambda = \ln\left(\frac{\hat{x}\,(t)}{\hat{x}\,(t+T)}\right). \tag{2.16}$$

Mit der homogenen Lösung (2.9), der Periodendauer $T = 2\pi/\omega_\mathrm{d}$ und der 2π-Periodizität des Kosinus ergibt sich die Beziehung zwischen logarithmischem Dekrement und Lehr'schem Dämpfungsmaß zu

$$\Lambda = \ln\left(\frac{\hat{x}_0 e^{-\omega_0\zeta t} cos\,(\omega_\mathrm{d} t + \varphi_0)}{\hat{x}_0 e^{-\omega_0\zeta(t+T)} cos\,(\omega_\mathrm{d}(t+T) + \varphi_0)}\right) = \ln\left(\frac{e^{-\omega_0\zeta t}}{e^{-\omega_0\zeta t} e^{-\frac{\omega_0}{\omega_\mathrm{d}}\zeta 2\pi}}\right) = 2\pi\zeta\frac{\omega_0}{\omega_\mathrm{d}}. \tag{2.17}$$

Unter Verwendung von (2.7) und Annahme kleiner Dämpfungen ist der Zusammenhang zwischen logarithmischem Dekrement und Lehr'schem Dämpfungsmaß schließlich

$$\Lambda = 2\pi \frac{\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)}} \approx 2\pi\zeta. \tag{2.18}$$

Alternativ kann das logarithmische Dekrement über eine Energiebetrachtung hergeleitet werden. Dazu wird die Bewegungsgleichung (2.1) durch Multiplikation mit der Geschwindigkeit der Masse $\dot{x}(t)$ und Bildung des Zeitintegrals über eine Schwingungsperiode T in die Energiegleichung der Schwingung

$$\underbrace{\int_T m\ddot{x}(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t}_{E_{\mathrm{kin}}} + \underbrace{\int_T d\dot{x}(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t}_{E_{\mathrm{d}}} + \underbrace{\int_T cx(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t}_{E_{\mathrm{pot}}} - \underbrace{\int_T F(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t}_{E_{\mathrm{ext}}} = \underbrace{\text{konst.}}_{E_0} \tag{2.19}$$

überführt. Bei ungedämpften Systemen $E_{\mathrm{d}} = 0$ ohne äußere Energiezufuhr $E_{\mathrm{ext}} = 0$ entspricht die Summe aus kinetischer E_{kin} und potentieller Energie E_{pot} immer der Gesamtenergie E_0 des Systems. Weiterhin werden während einer Periode potentielle und kinetische Energie vollständig ineinander umgewandelt, sodass die kinetische Energie maximal ist, wenn die potentielle Energie null ist, d. h. $x(t) = 0$, und die potentielle Energie maximal ist, wenn die kinetische Energie null ist, d. h. $\dot{x}(t) = 0$. Bei gedämpften Systemen ohne äußere Energiezufuhr wird während einer Schwingungsperiode die Energie E_{d} dissipiert. Jedoch kann hierbei mit der Annahme kleiner Dämpfungen $\zeta \ll 1$ ebenfalls von der gleichen Energieumwandlung zwischen kinetischer und potentieller Energie ausgegangen werden.

Um die bei einer freien gedämpften Schwingung auftretenden Energien während einer Schwingungsperiode einfach berechnen zu können, muss zunächst die Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ abgeschätzt werden. Diese Abschätzung basiert auf der Ableitung der homogenen Lösung des Wegs der Masse aus (2.9) und der Annahme kleiner Dämpfungen $\zeta \ll 1$. Für die Geschwindigkeit während einer Periode mit der initialen Auslenkung $\hat{x}_0$ ergibt sich die Approximation

$$\dot{x}(t) = \hat{x}_0[-\underbrace{\underbrace{\zeta\omega_0}_{\zeta\omega_0 \ll \omega_0}}_{\approx 0} \underbrace{e^{-\zeta\omega_0 t}}_{\approx 1} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \omega_0 \underbrace{e^{-\zeta\omega_0 t}}_{\approx 1} \sin(\omega_0 t + \varphi_0)] \tag{2.20}$$

$$\approx -\hat{x}_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{2.21}$$

Damit entspricht die Gesamtenergie des Systems während einer Schwingungsperiode der maximalen kinetischen Energie

$$E_{\mathrm{kin,max}} = \max\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)\right) = \frac{1}{2}m\max\left(\hat{x}_0^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)\right) = \frac{1}{2}m\hat{x}_0^2\omega_0^2. \tag{2.22}$$

Für die während einer Schwingungsperiode dissipierte Energie ergibt sich mit dem entsprechenden Term in (2.19) sowie (2.3) und (2.4)

$$E_\mathrm{d} = \int_{t_0}^{t_0+T} d\dot{x}^2\,(t)\,\mathrm{d}t = 2m\zeta\omega_0 \int_{t_0}^{t_0+T} \omega_0^2\hat{x}_0^2 \sin^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)\mathrm{d}t \tag{2.23}$$

$$= 2m\zeta\omega_0^2\hat{x}_0^2\pi. \tag{2.24}$$

Das Verhältnis der dissipierten Energie zur doppelten maximalen kinetischen Energie entspricht somit dem angenäherten logarithmischen Dekrement aus (2.18)

$$\Lambda = \frac{E_\mathrm{d}}{2E_\mathrm{kin,max}} = \frac{2m\zeta\omega_0^2\hat{x}_0^2\pi}{m\omega_0^2\hat{x}_0^2} = 2\pi\zeta. \tag{2.25}$$

Dieser Zusammenhang ermöglicht es in Kapitel 2.2.4 aerodynamische Arbeiten zwischen dem Fluid und der schwingenden Schaufel in ein logarithmisches Dekrement und damit eine dimensionslose Dämpfungsgröße zu übertragen.

2.1.2. Reale Schaufelschwingungen

Anders als Einmassenschwinger sind Turbomaschinenschaufeln elastische Festkörper mit unendlich vielen Bewegungsfreiheitsgraden. Damit einher geht ebenfalls eine unendliche Anzahl an Eigenfrequenzen. Bei einer Schwingung mit einer Eigenfrequenz verformt sich die Schaufel in der jeweils dazugehörigen Eigenform. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden die Eigenfrequenzen und -formen zusammenfassend auch als *Moden* bezeichnet.

Eine genaue Bestimmung der Moden realer Schaufeln ist aufgrund der komplexen Geometrien mit analytischen Verfahren nicht möglich. Daher müssen die Schaufeln z. B. mithilfe der Methode der finiten Elemente (*FEM*) diskretisiert werden. Unter Vernachlässigung des Dämpfungsterms ist die Bewegungsgleichung einer diskretisierten Schaufel i

$$\mathbf{M}_i\ddot{\underline{\vec{x}}}_i\,(t) + \mathbf{K}_i\underline{\vec{x}}_i\,(t) = \underline{\vec{F}}_i(t), \tag{2.26}$$

wobei $\mathbf{M}_i$ der Massenmatrix, $\mathbf{K}_i$ der Steifigkeitsmatrix, $\underline{\vec{x}}_i$ dem Verschiebungsvektor und $\underline{\vec{F}}_i(t)$ dem anregenden Kraftvektor entspricht. Um die verschiedenen Schaufelmoden zu bestimmen, wird zunächst die freie Schwingung ohne äußere Anregung, d. h. $\underline{\vec{F}}_i(t) = 0$, betrachtet. Als Lösungsansatz dieser homogenen Differentialgleichung wird der komplexe Verschiebungsvektor

$$\underline{\vec{x}}_i(t) = \vec{\hat{x}}_i e^{\underline{\lambda}_i t} \tag{2.27}$$

verwendet. Wird dieser schließlich in (2.26) eingesetzt, ergibt sich mit $\underline{\vec{F}}_i(t) = 0$ das Eigenwertproblem

$$\left(\mathbf{K}_i + \underline{\lambda}_i^2\mathbf{M}_i\right)\vec{\hat{x}}_i = 0. \tag{2.28}$$

Die Lösungen der Gleichung (2.28) sind die Eigenwerte $\underline{\lambda}_{i,n} = j\omega_{0,i,n}$ und zugehörigen Eigenvektoren $\vec{\Psi}_{i,n}$ der Mode n. Die Eigenvektoren entsprechen den Eigenformen der jeweiligen Mode.

Damit die Gleichungen zur Beschreibung des Schwingungsverhaltens des Einmassenschwingers aus Kapitel 2.1.1 auch für reale Schaufeln angewandt werden können, wird im Folgenden gezeigt, wie mithilfe einer *modalen Reduktion* die Anzahl der Freiheitsgrade auf einen pro Mode n reduziert werden kann. Aufgrund der einfachen Unterbestimmtheit von (2.28) ist die Amplitude des Eigenvektors $\vec{\Psi}_{i,n}$ zunächst beliebig. Diese Amplitude wird deshalb so gewählt, dass sich für die modale Masse

$$m_{i,n} = \vec{\Psi}_{i,n}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_i \vec{\Psi}_{i,n} = 1 \tag{2.29}$$

ergibt. Damit reduziert sich die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_i$ auf

$$\vec{\Psi}_{i,n}^{\mathrm{T}} \mathbf{K}_i \vec{\Psi}_{i,n} = \omega_{0,i,n}^2. \tag{2.30}$$

Der Verschiebungsvektor einer Mode n wird mithilfe des Eigenvektors und der eindimensionalen generalisierten Verschiebung $\underline{q}_{i,n}(t)$ mit

$$\vec{\underline{x}}_{i,n}(t) = \vec{\Psi}_{i,n} \underline{q}_{i,n}(t) \tag{2.31}$$

bestimmt. Für die Schaufel i kann schließlich aus (2.26) und den Gleichungen (2.29) bis (2.31) für die Mode n die ungedämpfte modale Bewegungsgleichung

$$\ddot{\underline{q}}_{i,n}(t) + \omega_{0,i,n}^2 \underline{q}_{i,n}(t) = \vec{\Psi}_{i,n}^{\mathrm{T}} \vec{F}_i(t) = \underline{f}_{i,n}(t) \tag{2.32}$$

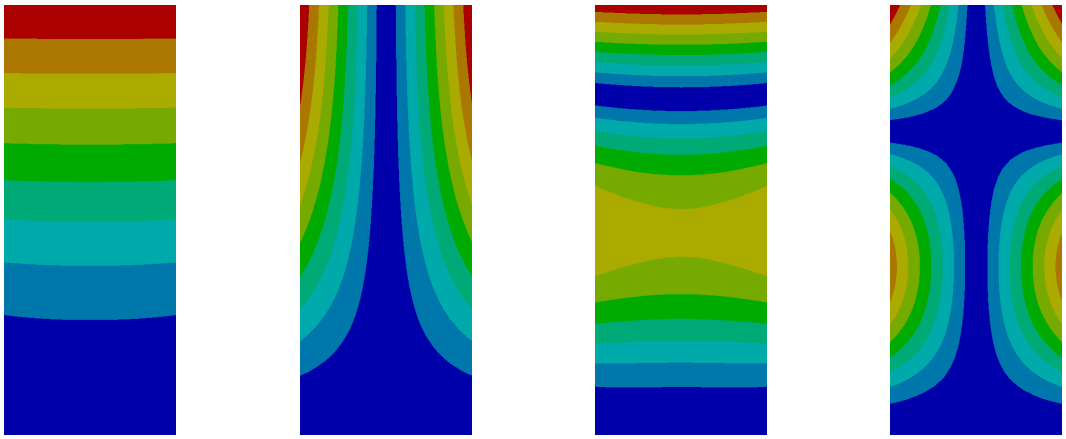
aufgestellt werden. Dabei entspricht $\underline{f}_{i,n}(t)$ der generalisierten Kraft.

Beispiele verschiedener Eigenformen einer einseitig eingespannten rechteckigen dünnen Platte sind in Abbildung 2.2 dargestellt. Die in dieser Arbeit für die Moden verwendeten Bezeichnungen basieren dabei auf der Art und Ordnung der Eigenformen. Die zwei wesentlichen Arten sind die Biegung um die flache Kante (engl. *flapwise bending*), abgekürzt als F, und die Torsion, abgekürzt als T. Die Biegung um die flache Kante in der ersten Ordnung 1F weist dabei in der Regel die geringste Eigenfrequenz auf, da die Steifigkeit gegenüber Verformungen um die flache Kante am geringsten ist. Je größer die Steifigkeit einer Eigenform ausfällt, desto größer fällt auch die Eigenfrequenz aus.

Die wesentlichen Einflüsse auf die Steifigkeiten und damit Eigenfrequenzen haben die Schaufelgeometrie, die Temperatur und die Drehzahl der Schaufel. Diese Einflüsse fallen je nach Art und Ordnung der Mode unterschiedlich aus. Im Folgenden werden Proportionalitäten zu diesen Einflüssen vorgestellt, die es ermöglichen, die auftretenden Veränderungen der Eigenfrequenzen in erster Größenordnung abzuschätzen.

Dazu werden zunächst die Formulierungen aus der Balkentheorie zur Berechnung der Eigenkreisfrequenzen eines einseitig eingespannten Balkens herangezogen. Die Eigenkreisfrequenzen der Biegemoden eines Balkens mit der Biegesteifigkeit EI, der Dichte des Materials ρ_{S}, dem Balkenquerschnitt A_{Q} und der Balkenhöhe h sind mit

$$\omega_{0,\mathrm{F}} = \frac{\lambda_n^2}{h^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho_{\mathrm{S}} A_{\mathrm{Q}}}} \tag{2.33}$$



(a) Biegung erster Ordnung (1F) **(b)** Torsion erster Ordnung (1T) **(c)** Biegung zweiter Ordnung (2F) **(d)** Torsion zweiter Ordnung (2T)

Abbildung 2.2.: Grundlegende Eigenformen erster und zweiter Ordnung einer einseitig eingespannten ebenen Platte. Farblich dargestellt ist die Auslenkungsamplitude. Blau entspricht keiner Auslenkung und rot der maximalen Auslenkung.

gegeben. Dabei entspricht λ_n den Lösungen der Eigenwertgleichung $\cosh\lambda\cos\lambda = 1$ und $n \in \mathbb{N}$ den Ordnungen der Biegeschwingungen. Für die ersten drei Biegemoden lauten diese beispielsweise $\lambda_1 = 1{,}875$, $\lambda_2 = 4{,}694$ und $\lambda_3 = 7{,}855$ (*Freymann*, 2011). Zur Repräsentation von Torsionsmoden lassen sich die Eigenkreisfrequenzen für einen Torsionsstab mit der Torsionssteifigkeit G mit

$$\omega_{0,\mathrm{T}} = \frac{(2n-1)}{2h}\sqrt{\frac{G}{\rho_\mathrm{S} A_\mathrm{Q}}} \tag{2.34}$$

bestimmen. Hierbei entspricht $n \in \mathbb{N}$ der Ordnung der Torsionsschwingung. Aufbauend auf den Gleichungen (2.33) und (2.34) kann für reale Schaufeln als allgemeine Proportionalität der Eigenkreisfrequenzen mit der Schaufelhöhe h

$$\omega_0 \propto \frac{1}{h^s} \tag{2.35}$$

abgeleitet werden. Da reale Schaufelgeometrien sich von idealen Balken oder Torsionsstäben unterscheiden, ist der Exponent s individuell für die jeweilige Eigenform einer Schaufelgeometrie zu bestimmen. Dafür müssen genauere Verfahren, wie z. B. Balkenschnittverfahren oder die Methode der finiten Elemente (*FEM*), herangezogen werden.

Weiterhin verändern sich die Eigenkreisfrequenzen mit der Temperatur der Schaufel T_S. Unter der Annahme eines metallischen Schaufelwerkstoffes mit dem E-Modul E kann dabei vereinfacht von der Proportionalität

$$\omega_0 \propto \sqrt{E\left(T_\mathrm{S}\right)} \approx \sqrt{E_0 + \alpha T_\mathrm{S}}, \tag{2.36}$$

mit den materialabhängigen Größen $\alpha < 0$ und $E_0 > 0$, ausgegangen werden.

Aufgrund von Fliehkraftversteifung, Entwindung und *Spin Softening*[2] sind die Eigenkreisfrequenzen bei Laufschaufeln zusätzlich von der Drehzahl abhängig. Dieser Einfluss der Drehzahl n_R auf die Eigenkreisfrequenz kann mit dem Proportionalitätsfaktor c_B über

$$\omega_{0,n_\mathrm{R}}^2 = \omega_{0,n_\mathrm{R}=0}^2 + c_\mathrm{B} n_\mathrm{R}^2 \tag{2.37}$$

abgeschätzt werden (*Traupel*, 1982). Bei Torsionsmoden ist dieser Einfluss jedoch vernachlässigbar und $c_\mathrm{B} \to 0$, da anders als bei der Biegung der Fliehkraftvektor nahezu parallel zur Torsionsachse zeigt.

2.1.3. Überlagerung von Schaufel- und Scheibenschwingungen

In Turbomaschinen treten Schaufelschwingungen nicht isoliert auf, sondern sind durch die Verbindung mit der Scheibe sowohl mit der Scheibe selbst als auch untereinander mechanisch gekoppelt. Aus diesem Grund werden in diesem Abschnitt die einzelnen, modal reduzierten Schaufelschwingungen im Verbund mit der Scheibe betrachtet. Dafür wird zunächst das axiale Eigenschwingungsverhalten einer rotationssymmetrischen Scheibe beschrieben. Analog zu Schaufelschwingungen sind die Eigenformen von Scheiben durch verschiedene Ordnungen charakterisiert. Diese Ordnungen werden durch die Anzahl an *Knotenkreisen KK* und *Knotendurchmessern KD* definiert. Knotenkreise bezeichnen zur Scheibe konzentrische Kreise auf denen die auftretenden Schwingungsknoten liegen. Die Knotendurchmesser sind wiederum Geraden, die durch den Mittelpunkt der Scheibe verlaufen und analog zu den Knotenkreisen Schwingungsknoten verbinden. Da eine Scheibenschwingung über die jeweilige Anzahl der Knotenkreise und Knotendurchmesser charakterisiert wird, ist es üblich, diese Anzahl direkt mit den Worten Knotenkreis bzw. Knotendurchmesser zu bezeichnen. In Abbildung 2.3 sind schematisch Scheibenschwingungen mit den Knotendurchmessern $KD1$, $KD2$ und $KD4$ und dem Knotenkreis $KK0$ dargestellt. Die Kennzeichnung + bzw. − ist dabei das Vorzeichen der aktuellen axialen Auslenkung der Scheibe in Bezug auf die Ruhelage. Zusätzlich ist eine Scheibenschwingung mit $KK1$ und $KD0$ in Abbildung 2.3 dargestellt. Allerdings spielen im Kontext der Überlagerung von Schaufel- mit Scheibenschwingungen $KK > 0$ keine Rolle. Daher wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit zur Beschreibung der Schwingungen lediglich der Knotendurchmesser verwendet und der Wert des Knotenkreises $KK0$ nicht mehr zusätzlich angegeben.

Bei den in diesem Abschnitt betrachteten Scheibenschwingungen handelt es sich jedoch nicht um stehende, sondern um das Scheibenzentrum rotierende Eigenformen. Daher wird zusätzlich die Drehrichtung über ein Vorzeichen berücksichtigt. Der vorzeichenbehaftete Knotendurchmesser $\nu = +KD$ beschreibt so eine drehende Schwingung in Rotationsrichtung und $\nu = -KD$ entgegen Rotationsrichtung der Laufräder. Diese so beschriebenen rotierenden Eigenformen werden auch als *umlaufende Eigenformen* (engl.: *Travelling Wave Modes*, Abk.: TWM) bezeichnet.

[2] Eine mit Fliehkraft belastete rotierende Schaufel erfährt zusätzlich eine geometrische Längung in radialer Richtung, was nach (2.35) zu einer niedrigeren Eigenkreisfrequenz führt. Dieser Effekt wird als *Spin-Softening* bezeichnet und schwächt den Anstieg der Eigenkreisfrequenz durch Fliehkraftversteifung ab.

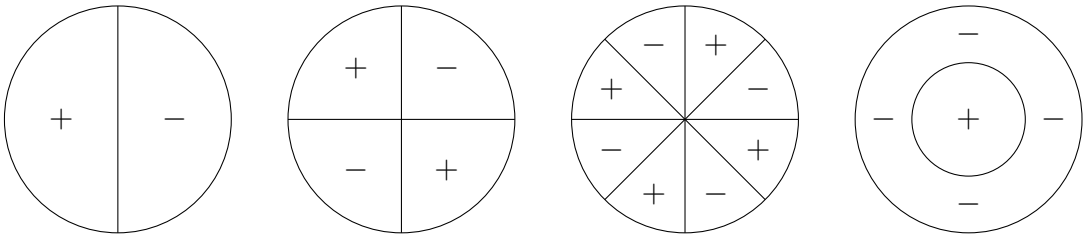
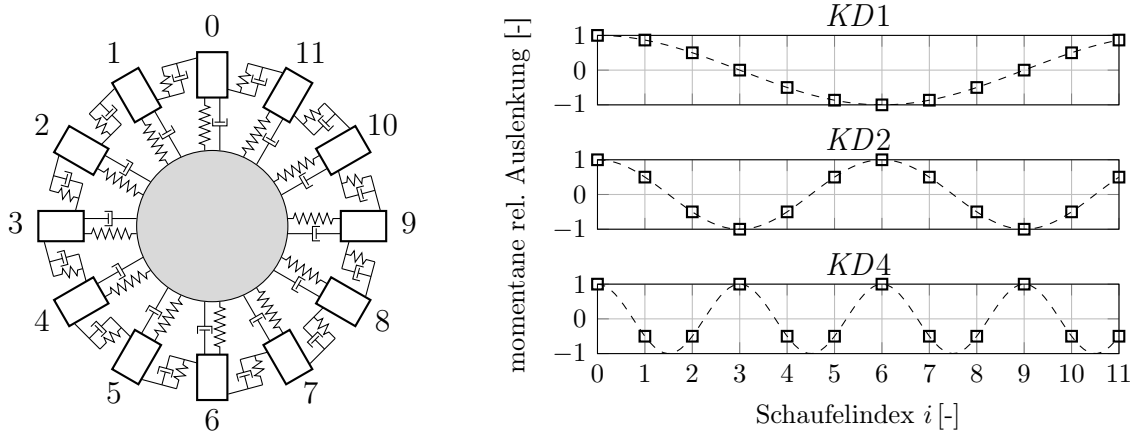


Abbildung 2.3.: Schematische Darstellung der Eigenformen axialer Scheiben mit unterschiedlichen Knotenkreisen (KK) und Knotendurchmessern (KD)

Für eine mit Schaufeln bestückte Scheibe tritt eine Kopplung von Schaufel- und Scheibenschwingungen auf. Als vereinfachtes Modell zur Beschreibung dieser gekoppelten Schwingungen wird ein zyklisch-symmetrischer Mehrmassenschwinger mit N über den Umfang äquidistant verteilten Einzelmassen als modal reduzierte Schaufeln angenommen. Ein solcher Mehrmassenschwinger mit zwölf Einzelmassen ist exemplarisch in Abbildung 2.4a dargestellt. Die Einzelmassen stellen im Modell somit Schaufeln dar, die alle mit derselben Eigenfrequenz und Eigenform der Mode n schwingen. Jedoch können die Einzelmassen untereinander eine Phasendifferenz aufweisen, die anlog zu den betrachteten Scheibenschwingungen eine umlaufende Eigenform charakterisiert. Dazu sind in Abbildung 2.4b die Auslenkungen der über den Umfang verteilten Schaufeln zu einem Zeitpunkt t für drei verschiedene Knotendurchmesser dargestellt.



(a) Dynamisches Modell einer beschaufelten Scheibe nach *Strehlau* (2011)

(b) Momentane auf die maximale Amplitude bezogene Auslenkungen der Einzelmassen bei Schwingungen mit unterschiedlichen Kontendurchmessern

Abbildung 2.4.: Dynamisches Modell einer Scheibe mit zwölf Schaufeln als Mehrmassenschwinger sowie beispielhafte Darstellung momentaner Auslenkungen der einzelnen Schaufeln für verschiedene Knotendurchmesser

Die Phasendifferenz zwischen zwei benachbarten Schaufeln wird als *Inter-Blade Phase Angle* (Abk.: IBPA) bezeichnet und lässt sich aus dem vorzeichenbehafteten Knotendurchmesser der umlaufenden Eigenform zu

$$\sigma_\nu = 2\pi\frac{\nu}{N} \tag{2.38}$$

bestimmen. Aus der diskreten Anzahl an Schaufeln über den Umfang ist der maximale Knotendurchmesser auf

$$KD_{\max} = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{für gerade N} \\ \frac{N-1}{2} & \text{für ungerade N} \end{cases} \tag{2.39}$$

begrenzt. Aufgrund der 2π-Periodizität gilt bei einer geraden Anzahl an Schaufeln $\sigma_\nu(\nu = KD_{\max}) \equiv \sigma_\nu(\nu = -KD_{\max})$. Damit beschränkt sich sowohl bei einer geraden als auch bei einer ungeraden Anzahl an Schaufeln der IBPA auf den Bereich $-\pi < \sigma_\nu \leq \pi$. Diese aus dem Knotendurchmesser abgeleitete Definition des IBPA σ_ν wird auch im Ergebnisteil dieser Arbeit verwendet. Für einige mathematische Formulierungen und Herleitungen bietet es sich jedoch an, den IBPA alternativ in einem Bereich von $0 \leq \sigma_o < 2\pi$ mit dem Index der umlaufenden Eigenform $o = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ zu definieren. Für den IBPA gilt der Zusammenhang

$$\sigma_o = 2\pi\frac{o}{N} = \begin{cases} \sigma_\nu + 2\pi & \nu < 0 \\ \sigma_\nu & \nu \geq 0 \end{cases} \tag{2.40}$$

sowie für den Knotendurchmesser

$$\nu = \begin{cases} o & o \leq \frac{N}{2} \\ N - o & o > \frac{N}{2} \end{cases} \tag{2.41}$$

bzw. die Indizes der umlaufenden Eigenformen

$$o = \begin{cases} \nu + N & \nu < 0 \\ \nu & \nu \geq 0. \end{cases} \tag{2.42}$$

Die für eine Schaufelmode n generalisierten Verschiebungen $\left\{\underline{q}_i(t)\right\}_o$ der einzelnen Schaufeln $i = 0, 1, \ldots, N-1$ können für eine umlaufende Eigenform mit dem IBPA σ_o und der Amplitude $\hat{q}_o$ durch

$$\left\{\underline{q}_i(t)\right\}_o = \hat{q}_o \begin{pmatrix} \cos(0\sigma_o) + j\sin(0\sigma_o) \\ \vdots \\ \cos(i\sigma_o) + j\sin(i\sigma_o) \\ \vdots \\ \cos((N-1)\sigma_o) + j\sin((N-1)\sigma_o) \end{pmatrix} e^{j\omega t} = \hat{q}_o \begin{pmatrix} e^{j0\sigma_o} \\ \vdots \\ e^{ji\sigma_o} \\ \vdots \\ e^{j(N-1)\sigma_o} \end{pmatrix} e^{j\omega t} \tag{2.43}$$

beschrieben werden. Der Index der Schaufelmode n wird aus Gründen der Übersichtlichkeit in diesem und den folgenden Abschnitten weggelassen. Anhand (2.43) ist ersichtlich, dass die Koordinate

$$\underline{q}_o(t) = \hat{q}_o e^{j\omega t} \tag{2.44}$$

mit der Amplitude $\hat{q}_o$ zur Charakterisierung einer umlaufenden Eigenform o ausreicht. Damit entspricht $\underline{q}_o(t)$ der generalisierten Koordinate der umlaufenden Eigenform o und wird als *TWM-Koordinate* bezeichnet. Der Vektor aller umlaufenden Eigenformen in TWM-Koordinaten lautet

$$\left\{\underline{q}_o(t)\right\} = \left\{\hat{q}_o\right\} e^{j\omega t}. \tag{2.45}$$

Die kinematische Beziehung zwischen den TWM-Koordinaten $\underline{q}_o$ und Einzelschaufelkoordinaten $\underline{q}_i$ ist mit der Überlagerung aller umlaufenden Eigenformen mit ihren jeweiligen IBPA σ_o und Amplituden $\hat{q}_o$ durch

$$\underline{q}_i(t) = \sum_{o=0}^{N-1} \hat{q}_o e^{j(\omega t + i\sigma_o)} \tag{2.46}$$

gegeben. Um die Bewegung aller Schaufeln i zu erhalten, kann der Verschiebungsvektor mit

$$\left\{\underline{q}_i(t)\right\} = \underline{\mathbf{E}} \left\{\hat{q}_o\right\} e^{j\omega t} \tag{2.47}$$

aus den TWM-Koordinaten bestimmt werden. Hierbei ist

$$\underline{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{j\frac{2\pi(N-1)}{N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j\frac{2\pi(N-1)}{N}} & \dots & e^{j\frac{2\pi(N-1)(N-1)}{N}} \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

die komplexe Fourier Transformationsmatrix mit den Komponenten $\underline{E}_{i,o} = e^{j\frac{2\pi io}{N}}$. Analog zu (2.32) lautet schließlich das in TWM-Koordinaten formulierte und somit generalisierte Bewegungsgleichungssystem einer beschaufelten Scheibe für einen Schaufelmode n

$$\left\{\ddot{\underline{q}}_o(t)\right\} + \operatorname{diag}\left\{\omega_0^2\right\} \left\{\underline{q}_o(t)\right\} = \left\{\underline{f}_o(t)\right\}. \tag{2.49}$$

Für ausführlichere Herleitungen dieser mathematischen Formulierungen des dynamischen Schaufel-Scheibe-Systems sei an dieser Stelle auf *Crawley* (1988), *Strehlau* (2011) und *Olson et al.* (2014) verwiesen. Weiterhin sei angemerkt, dass durch die Kopplung mit der Scheibe die Schaufelmoden eine Abhängigkeit vom Knotendurchmesser aufweisen können. Da die Schaufeln bei den in dieser Arbeit untersuchten industriellen Axialverdichtern direkt in die sehr steife Vollwelle montiert sind, wird der Effekt der Knotendurchmesserabhängigkeit jedoch vernachlässigt. Für weitere Informationen bezüglich dieser Thematik wird stattdessen auf *Ewins* (1973), *Irretier* (1981) und *Klauke* (2007) verwiesen.

2.2. Aerodynamisch erregte Schaufelschwingungen

Nachdem in den vorherigen Kapiteln auf das Eigenschwingungsverhalten von beschaufelten Scheiben eingegangen wurde, wird in diesem Kapitel das gesamte aeroelastische System betrachtet. Im Folgenden werden somit zusätzlich die auf die Schaufeln einwirkenden aerodynamischen Kräfte mit einbezogen. Diese aerodynamischen Kräfte bestehen aus einem bewegungsinduzierten und einem externen Anteil. Der bewegungsinduzierte Anteil koppelt die einzelnen Schaufeln in Abhängigkeit des IBPA aerodynamisch miteinander. Der externe Anteil wird durch aerodynamische Störungen verursacht, die unabhängig von der Schaufelschwingung entstehen. Abschließend werden diese aerodynamischen Kräfte über eine Energiebetrachtung in eine aerodynamische Arbeit überführt.

2.2.1. Aeroelastische Formulierung

Um das aeroelastische Problem einer schwingenden Schaufel in ihrem umgebenden Fluid zu beschreiben, werden für die externe Kraft $\underline{\vec{F}}_i(t)$ der Bewegungsgleichung (2.26) die aerodynamischen Kräfte der Schaufel eingesetzt. Diese Kräfte lassen sich basierend auf ihrem Ursprung in zwei Arten unterteilen:

1. Bewegungsinduzierte Kräfte $\underline{\vec{F}}_{\mathrm{d}}\left(\ddot{x},\dot{x},x,t\right)$ und
2. Äußere Kräfte $\underline{\vec{F}}_{\mathrm{a}}\left(t\right)$.

Erstere entstehen einzig durch die Schaufelschwingungen innerhalb der betrachteten Reihe. Deshalb sind diese Kräfte neben der Zeit zusätzlich von der Verformung x, der Geschwindigkeit $\dot{x}$ und der Beschleunigung $\ddot{x}$ der Schaufel abhängig. Da diese Kräfte im Allgemeinen dämpfend wirken, werden sie als *aerodynamische Dämpfungskräfte* mit dem Index d bezeichnet. Die äußeren Kräfte bezeichnen die Kräfte, die unabhängig von der Schaufelbewegung selbst sind und ihren Ursprung in der Regel außerhalb der betrachteten Reihe haben. Diese Kräfte wirken im Allgemeinen anregend und werden daher als *aerodynamische Anregungskräfte* mit dem Index a bezeichnet.

Mit diesen aerodynamischen Kräften sowie der mechanischen Dämpfungsmatrix $\mathbf{D}_{\mathrm{mech}}$ kann anstelle der ungedämpften Bewegungsgleichung (2.26) die gedämpfte aeroelastische Bewegungsgleichung der Schaufel i

$$\mathbf{M}_i\underline{\ddot{\vec{x}}}_i\left(t\right)+\mathbf{D}_{\mathrm{mech},i}\underline{\dot{\vec{x}}}_i\left(t\right)+\mathbf{K}_i\underline{\vec{x}}_i\left(t\right)=\underline{\vec{F}}_{\mathrm{d},i}\left(\ddot{x},\dot{x},x,t\right)+\underline{\vec{F}}_{\mathrm{a},i}\left(t\right) \tag{2.50}$$

aufgestellt werden. Analog zu (2.32) ist die generalisierte aeroelastische Bewegungsgleichung einer Schaufel i

$$\underline{\ddot{q}}_i\left(t\right)+2\zeta_i\omega_i\underline{\dot{q}}_i\left(t\right)+\omega_i^2\underline{q}_i\left(t\right)=\underline{f}_{\mathrm{d},i}\left(\ddot{x},\dot{x},x,t\right)+\underline{f}_{\mathrm{a},i}\left(t\right). \tag{2.51}$$

Wegen der grundlegend unterschiedlichen physikalischen Mechanismen werden die Fluidkräfte in den beiden nachfolgenden Abschnitten getrennt voneinander behandelt. In Kapitel 2.2.2 wird die aerodynamische Schaufelkopplung durch die bewegungsinduzierten

Kräfte vorgestellt und in Kapitel 2.2.3 die wichtigsten Grundlagen äußerer aerodynamischer Anregungen beschrieben.

2.2.2. Aerodynamische Schaufelkopplung

Jede schwingende Schaufel induziert Fluktuationen in der Strömung, die sich als Störungen über den Umfang ausbreiten. Die Schwingung beeinflusst so u. a. neben der instationären Druckverteilung der Schaufel ebenfalls die instationären Druckverteilungen der benachbarten Schaufeln. Somit werden die einzelnen Schaufeln durch das Fluid miteinander gekoppelt.

Die bewegungsinduzierte aerodynamische Kraft $\underline{f}_{\mathrm{d},i,o}$, die bei einer Schwingung mit der umlaufenden Eigenform o auf die einzelne Schaufel i wirkt, setzt sich daher aus allen von den Schaufeln $l = \{0, \ldots, N-1\}$ auf die Schaufel i induzierten Kraftanteilen $\underline{f}_{\mathrm{id},i,o,l}$ zu

$$\underline{f}_{\mathrm{d},i,o} = \sum_{l=0}^{N-1} \underline{f}_{\mathrm{id},i,o,l} \tag{2.52}$$

zusammen. In Abbildung 2.5 sind beispielhaft die induzierten Kraftanteile der fünf Schaufeln $N-2$ bis 2, die jeweils auf die Schaufel 0 wirken, dargestellt. Mit der bereits in Kapitel 2.1.3 getroffenen Annahme eines zyklisch-symmetrischen Systems schwingen alle Schaufeln mit derselben Eigenform und unterscheiden sich bei einer umlaufenden Eigenform o lediglich durch den Phasenversatz $i\sigma_o$. Damit, sowie mit (2.31) und (2.43), ergibt sich für den Verformungsvektor der Schaufeln $\underline{\vec{x}}_0 e^{ji\sigma_o}$. Genauso unterscheiden sich die auf die Schaufeln wirkenden bewegungsinduzierten aerodynamischen Kräfte allein durch den Phasenversatz $i\sigma_o$. Aufgrund der zyklischen Symmetrie kann somit die auf eine Schaufel i wirkende bewegungsinduzierte aerodynamische Kraft $\underline{f}_{\mathrm{d},i,o}$ analog zu (2.43) mithilfe der generalisierten TWM-Koordinate (2.44) und des sogenannten *aerodynamischen Koeffizienten* $\underline{C}_o$ mit

$$\underline{f}_{\mathrm{d},i,o} = \underline{C}_o \hat{q}_o e^{j(\omega t + i\sigma_o)}, \tag{2.53}$$

beschrieben werden. Der Koeffizient $\underline{C}_o$ ist dabei vom Strömungsfeld, der Schaufelmode sowie der umlaufenden Eigenform abhängig. Für alle umlaufenden Eigenformen und somit in TWM-Koordinaten kann der Vektor der einzelnen generalisierten instationären Kräfte, die jeweils auf die Schaufel i wirken, mit

$$\left\{\underline{f}_{\mathrm{d},o}\right\}_i = \underbrace{\begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \underline{C}_o & \\ & & \ddots \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{C}}} \left\{\hat{q}_o e^{j(\omega t + i\sigma_o)}\right\}_i \tag{2.54}$$

aufgestellt werden. Analog zu (2.46) ist für die Schaufel i die kinematische Beziehung der generalisierten bewegungsinduzierten Kräfte zwischen TWM-Koordinaten und Einzel-

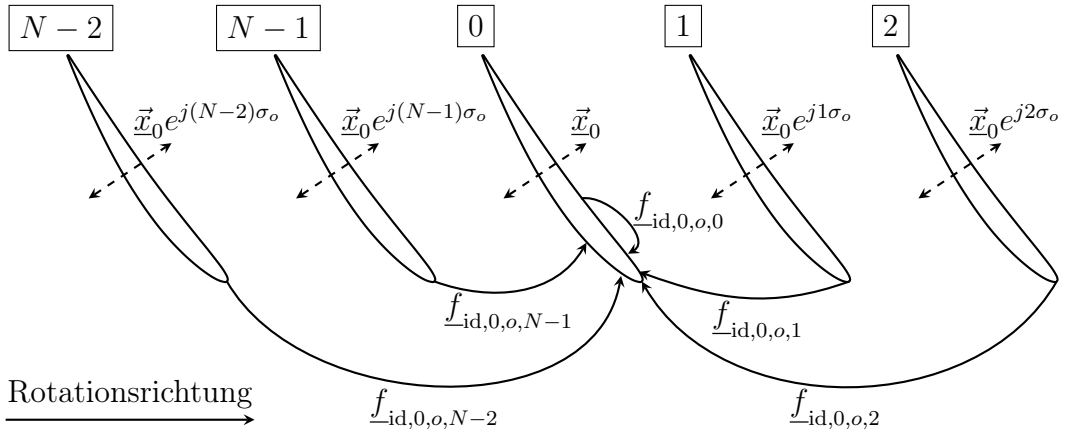


Abbildung 2.5.: Illustration der von den Schaufeln l auf die Schaufel $i = 0$ bei einer Schwingung mit der umlaufenden Eigenform o und dem Schaufelverformungsvektor $\underline{\vec{x}}_0$ induzierten generalisierten Kräfte $\underline{f}_{\mathrm{id},i,o,l}$

schaufelkoordinaten durch die Überlagerung der Kräfte aller umlaufenden Eigenformen o mit

$$\underline{f}_{\mathrm{d},i} = \sum_{o=0}^{N-1} \underline{f}_{\mathrm{d},i,o} = \sum_{o=0}^{N-1} \underline{C}_o \hat{q}_o e^{j(\omega t + i\sigma_o)} \tag{2.55}$$

gegeben. Der generalisierte Kraftvektor aller Schaufeln ergibt sich schließlich mithilfe der Transformationsmatrix $\underline{\mathbf{E}}$ aus (2.48) sowie dem aus (2.47) abgeleiteten Zusammenhang $\underline{\mathbf{E}}^{-1} \left\{ \underline{q}_i \right\} = \{\hat{q}_o\} e^{j\omega t}$ zu

$$\left\{ \underline{f}_{\mathrm{d},i} \right\} = \underline{\mathbf{E}}\,\underline{\mathbf{C}}\,\{\hat{q}_o\}\, e^{j\omega t} = \underline{\mathbf{E}}\,\underline{\mathbf{C}}\,\underline{\mathbf{E}}^{-1} \left\{ \underline{q}_i \right\} = \underline{\mathbf{L}} \left\{ \underline{q}_i \right\}. \tag{2.56}$$

Dabei weist die Matrix $\underline{\mathbf{L}}$ mit

$$\underline{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} \underline{L}_0 & \underline{L}_{N-1} & \underline{L}_{N-2} & \cdots & \underline{L}_1 \\ \underline{L}_1 & \underline{L}_0 & \underline{L}_{N-1} & \cdots & \underline{L}_2 \\ \underline{L}_2 & \underline{L}_1 & \underline{L}_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \underline{L}_{N-1} \\ \underline{L}_{N-1} & \underline{L}_{N-2} & \cdots & \underline{L}_1 & \underline{L}_0 \end{pmatrix} \tag{2.57}$$

eine zirkulante Form auf und wird als *Einflusskoeffizientenmatrix* bezeichnet. Die einzelnen Komponenten werden dementsprechend *Einflusskoeffizienten* genannt und stellen den Einfluss einer einzeln schwingenden Schaufel auf jeweils eine andere dar. Diese Betrachtungsweise der Einflusskoeffizienten ist in Abbildung 2.6 dargestellt. Dabei verursacht eine einzelne schwingende Schaufel mit dem Index $i = 0$ aerodynamische Störungen, die sowohl auf diese schwingende Schaufel selbst, als auch auf die übrigen ruhenden Schaufeln auftreffen und dort instationäre Fluidkräfte induzieren. Im Allgemeinen ist die Einflusskoeffizientenmatrix $\underline{\mathbf{L}}$ nicht symmetrisch, da die induzierten Kräfte sich je nach Ausbreitungsrichtung der Störungen unterscheiden.

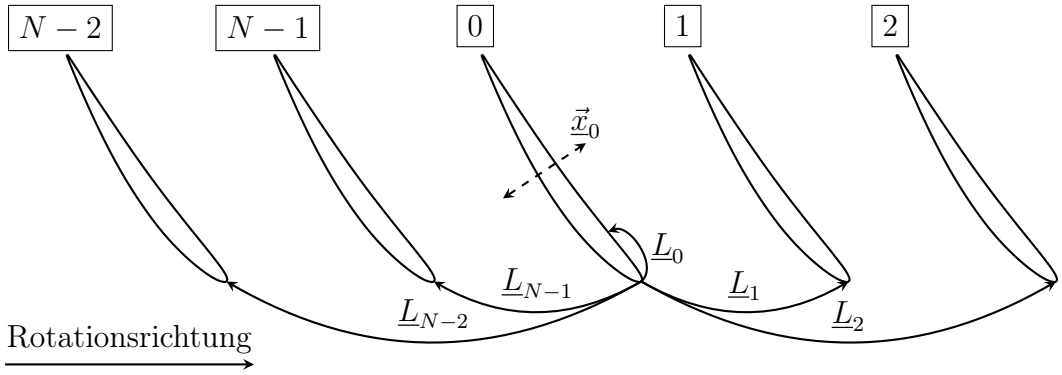


Abbildung 2.6.: Illustration der Einflusskoeffizienten $\underline{L}_i$, die die von einer schwingenden Schaufel $i = 0$ auf alle Schaufeln i induzierten Kräfte repräsentieren

Aus den Einflusskoeffizienten $\underline{L}_i$ werden für eine umlaufende Eigenform o mit dem IBPA σ_o die aerodynamischen Koeffizienten über eine inverse Fourier-Transformation

$$\underline{C}_o = \sum_{i=0}^{N-1} \underline{L}_i e^{-j\frac{2\pi io}{N}} \tag{2.58}$$

in TWM-Koordinaten berechnet. Umgekehrt werden die Einflusskoeffizienten aus den aerodynamischen Koeffizienten $\underline{C}_o$ aller umlaufenden Eigenformen über eine Fourier-Transformation

$$\underline{L}_i = \frac{1}{N} \sum_{o=0}^{N-1} \underline{C}_o e^{j\frac{2\pi io}{N}} \tag{2.59}$$

bestimmt.

Somit ist mathematisch nachgewiesen, dass die aerodynamische Kopplung zwischen den in einer umlaufenden Eigenform schwingenden Schaufeln durch eine lineare Superposition der Kräfte aller Schaufeln beschrieben werden kann. Diese Kräfte werden dabei durch eine einzelne schwingende Schaufel induziert. Die bewegungsinduzierten Kräfte können sowohl in der TWM- als auch der Einflusskoeffizientennotation bestimmt werden. Die Betrachtungsweise der Einflusskoeffizienten ermöglicht es, das Verhalten der bewegungsinduzierten Arbeiten und damit aerodynamischen Dämpfungen in Abhängigkeit des IBPA physikalisch zu erklären.

Anhand (2.58) ist ersichtlich, dass bis auf den Einflusskoeffizienten $\underline{L}_0$ alle anderen Koeffizienten in der komplexen Ebene rotieren. Damit ist der Einfluss der schwingenden Schaufel auf sich selbst unabhängig vom IBPA. Das bedeutet, dass für alle umlaufenden Eigenformen der Einflusskoeffizient $\underline{L}_0$ die aerodynamischen Koeffizienten in TWM-Koordinaten $\underline{C}_o$ gleich beeinflusst und damit keine Abhängigkeit vom IBPA vorhanden ist. Dahingegen weisen die Einflusskoeffizienten der direkten Nachbarschaufeln $\underline{L}_{N-1}$ und $\underline{L}_1$ einen 2π-periodischen Verlauf mit dem IBPA in TWM-Koordinaten auf. Die weiteren Einflusskoeffizienten zeigen darüber hinaus eine Periodizität mit Vielfachen von 2π mit dem IBPA.

Zusätzlich klingen die von der schwingenden Schaufel ausgelösten Störungen mit steigendem Abstand zu dieser ab. Auf die in der Schaufelreihe gegenüber der schwingenden Schaufel entfernter liegenden Schaufeln wirken so im Allgemeinen deutlich geringere Kräfte als auf die direkt benachbarten Schaufeln. Deshalb spielt in der Betrachtungsweise der Einflusskoeffizienten der Abstand der jeweils betrachteten Schaufel zur schwingenden Schaufel eine bestimmende Rolle. Aus diesem Grund wird analog zu der auf den vorzeichenbehafteten Knotendurchmessern ν basierenden Definition des IBPA σ_ν aus (2.38) der Schaufelindex

$$\iota = \begin{cases} -\frac{N}{2}-1,\ldots,-1,0,1,\ldots,\frac{N}{2} & \text{für gerade } N \\ -\frac{N-1}{2},\ldots,-1,0,1,\ldots,\frac{N-1}{2} & \text{für ungerade } N \end{cases} \tag{2.60}$$

eingeführt. Mit dieser Indizierung lässt sich somit unabhängig von der Schaufelanzahl direkt der Abstand zur schwingenden Schaufel $\iota = i = 0$ ablesen. Die Schaufeln die entgegen der Rotationsrichtung von der schwingenden Schaufel liegen weisen somit ein negatives Vorzeichen auf. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden je nach Anwendungsfall beide Indizierungsvarianten der Schaufeln in Einflusskoeffizientennotation verwendet. Diese können über

$$\iota \equiv \begin{cases} i & i \leq \frac{N}{2} \\ i-N & i > \frac{N}{2} \end{cases} \tag{2.61}$$

und

$$i \equiv \begin{cases} \iota+N & \iota < 0 \\ \iota & \iota \geq 0 \end{cases} \tag{2.62}$$

ineinander umgerechnet werden.

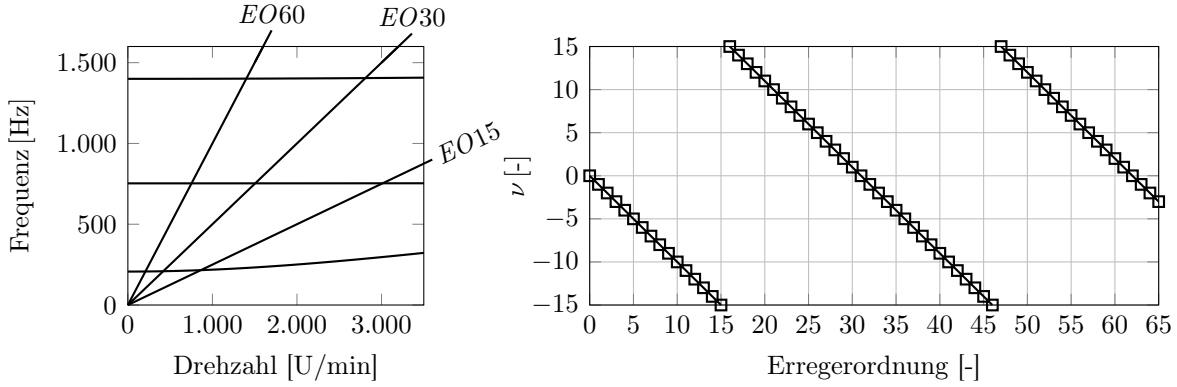
Für ausführliche Erläuterungen und Herleitungen zur aerodynamischen Schaufelkopplung in Turbomaschinen sei an dieser Stelle auf *Crawley* (1988) und *Nipkau* (2011) verwiesen.

2.2.3. Äußere aerodynamische Anregungen

Äußere aerodynamische Anregungskräfte werden im Allgemeinen durch stationäre Ungleichförmigkeiten über den Umfang im Strömungsfeld verursacht. Durch den Übergang zwischen den Relativsystemen von Stator und Rotor werden die Ungleichförmigkeiten im jeweils anderen Relativsystem instationär und weisen dabei Frequenzen proportional zur Drehzahl n_R auf. Die Erregerkreisfrequenz ω bestimmt sich demnach zu

$$\omega = 2\pi\, EO\, n_\mathrm{R} \tag{2.63}$$

mit der Erregerordnung EO, die der Anzahl an Störungen über dem Umfang entspricht. In einem *Campbell-Diagramm*, wie es beispielhaft in Abbildung 2.7a dargestellt ist, werden diese Erregerfrequenzen zusammen mit den Eigenfrequenzen der Schaufeln über die Drehzahl aufgetragen. Anhand von Kreuzungen der Erregerfrequenzen mit den Eigenfrequenzen können Resonanzanregungen während des Betriebs identifiziert werden. Weiterhin regt eine äußere aerodynamische Störung mit der Erregerordnung EO genau



(a) Campbell-Diagramm

(b) Aliasing-Diagramm eines Verdichterrotors mit 31 Schaufeln

Abbildung 2.7.: Beispielhaftes Campbell- und Aliasing-Diagramm

eine umlaufende Eigenform mit einem Knotendurchmesser ν an. Für einen Rotor ist die angeregte umlaufende Eigenform durch

$$e^{j2\pi\frac{\nu}{N}} = e^{-j2\pi\frac{EO}{N}} \text{ mit } EO \in \mathbb{N} \text{ und } \nu = \begin{cases} -\frac{N}{2}-1,\ldots,-1,0,1,\ldots,\frac{N}{2} & \text{für gerade } N \\ -\frac{N-1}{2},\ldots,-1,0,1,\ldots,\frac{N-1}{2} & \text{für ungerade } N \end{cases} \tag{2.64}$$

bestimmt. Das negative Vorzeichen berücksichtigt, dass die stationären Ungleichförmigkeiten im Relativsystem des Stators im Relativsystem des Rotors entgegen der Rotordrehrichtung rotieren. Bei Erregerordnungen, die größer als die Anzahl des maximalen Knotendurchmessers sind, führt die 2π-Periodizität in (2.64) zu *Aliasing*. Durch dieses Aliasing wird somit ein Knotendurchmesser, der kleiner als die Erregerordnung selbst ist, angeregt. Für einen Verdichterrotor mit 31 Schaufeln und damit einem maximalen Knotendurchmesser von 15 ist der angeregte, vorzeichenbehaftete Knotendurchmesser über die Erregerordnung in einem *Aliasing-Diagramm* in Abbildung 2.7b dargestellt.

Die zwei wichtigsten äußeren aerodynamischen Anregungskräfte stammen von *viskosen Nachläufen* stromaufliegender Schaufelreihen, sowie *Potentialfeldern* stromauf und stromab liegender Schaufelreihen. Die Erregerordnungen entsprechen den jeweiligen Schaufelzahlen der verursachenden Reihen und deren Vielfachen. Diese beiden äußeren aerodynamischen Anregungsmechanismen werden im Folgenden erläutert.

Viskose Nachläufe

Bei der viskosen Umströmung einer Schaufel bildet sich ein Geschwindigkeitsprofil normal zur Oberfläche aus. Auf der Schaufeloberfläche ist aufgrund der Haftbedingung die Geschwindigkeit der Strömung null. Mit ansteigendem Abstand normal zur Oberfläche steigt die Strömungsgeschwindigkeit bis zur Geschwindigkeit der Kernströmung an. Der Bereich der Strömung, der durch die Reibung des Fluids mit der Schaufeloberfläche beeinflusst wird, wird auch als Grenzschicht bezeichnet. Die Grenzschichten der Saug- und Druckseite verursachen in der Abströmung der Hinterkante ein Geschwindigkeits-

defizit in Umfangsrichtung, was als viskoser Nachlauf bezeichnet wird. Diese Nachläufe mischen sich theoretisch erst in einem unendlichen Abstand von der Hinterkante vollständig aus und treffen somit auf die stromabliegenden Schaufelreihen. Dadurch wird die Anströmgeschwindigkeit und somit Inzidenz der stromab liegenden Schaufeln periodisch verändert, was wiederum eine periodische Schwankung der aerodynamischen Schaufelkraft zur Folge hat. Wenn die Erregerfrequenzen dieser drehzahlharmonischen Schwankungen der Profilumströmung nahe einer Schaufeleigenfrequenz liegen, kommt es schließlich zu aerodynamisch fremderregten Schwingungen.

Potentialfeldanregungen

Die Verdrängung bei der Umströmung von Körpern generiert ein Potentialfeld, was bei Schaufelkaskaden zu periodischen Umfangsinhomogenitäten im Strömungsfeld führt. Diese Umfangsinhomogenitäten breiten sich sowohl stromauf als auch stromab aus und klingen quadratisch mit dem axialen Abstand ab. Die Axialabstände sind in Turbomaschinen für ein vollständiges Abklingen üblicherweise zu gering, weshalb die Potentialfelder schließlich auf die Schaufeln der benachbarten Reihen treffen. Auf diesen Schaufeln verursachen die potentialtheoretisch begründeten periodischen Störungen eine ebenfalls periodische Änderung der aerodynamischen Schaufelkraft. Analog zu Anregungen durch viskose Nachläufe führen somit auch Potentialfelder zu aerodynamisch fremderregten Schwingungen der Schaufeln, wenn die Erregerfrequenz mit einer Eigenfrequenz der Schaufel übereinstimmt. Beim Betrieb von Axialverdichtern sind jedoch die Anregungen durch Potentialfelder um eine Größenordnung geringer als die Anregungen durch viskose Nachläufe. Daher sind die Anteile der Potentialfelder bei Anregungen durch die stromauf liegenden Schaufelgitter gegenüber den Anteilen der viskosen Nachläufe vernachlässigbar. Aus diesen Gründen sind Potentialfeldanregungen hauptsächlich bei Anregungen durch stromab liegende Schaufelgitter für die Entstehung instationärer aerodynamischer Anregungskräfte von Relevanz.

2.2.4. Energiebetrachtung

Eine Energiebetrachtung kann schließlich zeigen, ob die auf die Schaufel wirkenden instationären Kräfte anregend oder dämpfend wirken. Die aerodynamischen Kräfte verrichten durch die Bewegung der Schaufel eine aerodynamische Arbeit. Diese vom Fluid auf die Schaufel eingebrachte aerodynamische Arbeit W bildet sich aus dem instationären Druck $p(t)$, multipliziert mit der Geschwindigkeit der Schaufelverformung $\dot{\vec{x}}$ und integriert über eine Schwingungsperiode T sowie die gesamte Schaufeloberfläche A. Die durch Fluktuationen der viskosen Spannungen hervorgerufenen Kräfte werden an dieser Stelle vernachlässigt, da diese Kräfte im Vergleich zu den instationären Druckkräften um mehrere Größenordnungen geringer ausfallen. Die Formulierung der aerodynamischen Arbeit im Zeitbereich ist entsprechend

$$W = -\int_A \int_0^T \dot{\vec{x}}\,(t) \cdot p\,(t)\,\vec{n}\mathrm{d}t\mathrm{d}A, \tag{2.65}$$

mit $\vec{n}$ als Normalenvektor auf dem infinitesimalen Oberflächenelement dA. Wenn während einer Schwingungsperiode der Schaufel mehr Energie entzogen als hinzugefügt wird, wirken die aerodynamischen Kräfte dämpfend und die aerodynamische Arbeit ist negativ. Wenn der Schaufelbewegung hingegen Energie pro Schwingungsperiode hinzugefügt wird, ist die aerodynamische Arbeit positiv und die instationären Fluidkräfte regen die Schaufel an.

Bei einer harmonischen Schwingung kann die aerodynamische Arbeit zusätzlich im Frequenzbereich in komplexer Schreibweise mit

$$\underline{W} = -j\pi \int_A \underline{\vec{\hat{x}}} \cdot \underline{\hat{p}}\vec{n}\mathrm{d}A \tag{2.66}$$

berechnet werden. Hierbei beschreibt der Realteil den Energietransfer vom Fluid zur Schaufel, d. h. $\Re\left(\underline{W}\right)$ entspricht der in (2.65) beschriebenen aerodynamischen Arbeit im Zeitbereich. Die aerodynamischen Dämpfungen oder Anregungen sind daher allein durch den Realteil von (2.66) bestimmt. Der Imaginärteil von (2.66) beschreibt hingegen die Energieumverteilungen des Systems ohne jegliche Einflussnahme auf die Anregungen oder Dämpfungen. $\Im\left(\underline{W}\right)$ wird deshalb auch als blinde Komponente bezeichnet und kann als aerodynamische Steifigkeit angesehen werden (*May*, 2011).

Um die aerodynamische Arbeit in strukturdynamischen Formulierungen zu berücksichtigen, kann diese Arbeit entdimensioniert und als logarithmisches Dekrement geschrieben werden. Analog zu (2.25) ergibt sich mit der Formulierung der maximalen kinetischen Energie eines Einmassenschwingers (2.22) und $\hat{\delta}$ als maximaler reeller Amplitude des Verformungsvektors der Schaufel $\underline{\vec{x}}$ das aerodynamische logarithmische Dekrement

$$\Lambda = \frac{-\Re\left(\underline{W}\right)}{M_\mathrm{S}\omega^2\hat{\delta}^2} = \frac{-\Re\left(\underline{W}\right)}{\omega^2\dfrac{\hat{\delta}^2}{\hat{b}^2}}. \tag{2.67}$$

Das negative Vorzeichen bewirkt, dass bei einer negativen und somit dämpfend wirkenden aerodynamischen Arbeit das logarithmische Dekrement als Größe zur Beschreibung der Dämpfung positiv ist. Die Variable $\hat{b}$ in (2.67) entspricht der maximalen Amplitude der Eigenvektoren die gewählt werden muss, damit die modale Masse m_n nach der modalen Reduktion eins ergibt. Demnach gilt für den Mode n einer Schaufel mit der Massematrix $\mathbf{M}$ sowie der skalaren Schaufelmasse M_S

$$m_n = \vec{\Psi}_n^T \mathbf{M} \vec{\Psi}_n = 1 \tag{2.68}$$

$$\hat{b} = \max\left(\vec{\Psi}_n\right) \tag{2.69}$$

$$\hat{b}^2 M_\mathrm{S} = 1. \tag{2.70}$$

2.3. Instationäre Profiltheorie

In diesem Kapitel werden die physikalischen Zusammenhänge zur Entstehung von instationären bewegungsinduzierten Schaufelkräften anhand einer ebenen Platte erläutert. Dazu wird ein analytischer Ansatz zur Berechnung der bewegungsinduzierten instationären Drücke aus der subsonischen instationären Profiltheorie angewandt. Anschließend wird mithilfe dieses Ansatzes eine Proportionalitätsbeziehung der bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeit aufgestellt.

2.3.1. Analytischer Ansatz

In diesem Abschnitt wird als Modell eine einzelne schwingende ebene Platte in einer subsonischen reibungsfreien Strömung betrachtet, anhand dessen eine charakteristische Differentialgleichung sowie analytische Formulierungen für den bewegungsinduzierten instationären Druck aufgestellt werden.

In Abbildung 2.8 ist eine ebene Platte in der Ruhelage als durchgezogene schwarze Linie dargestellt. Die gestrichelte Linie zeigt die ebene Platte zum Zeitpunkt t mit der Verformung $\delta(x,t)$. Weiterhin befindet sich die Platte in einer gleichförmigen stationären Strömung in axialer Richtung mit der Strömungsgeschwindigkeit w_∞.

Mit der Annahme kleiner Störungen, d. h. kleiner Verformungen $\delta \ll l$, setzen sich die zeitabhängigen Größen aus einem Mittelwert und einem Störungsanteil zusammen. Damit gilt für den Druck

$$p = \overline{p} + p' \tag{2.71}$$

und die Dichte

$$\rho = \overline{\rho} + \rho'. \tag{2.72}$$

Für den Geschwindigkeitsvektor $\vec{w}$ ergibt sich mit der Annahme, dass die stationäre Strömung parallel zur Platte verläuft

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{w}_x + w'_x \\ \overline{w}_y + w'_y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} w_\infty + w'_x \\ w'_y \end{pmatrix}. \tag{2.73}$$

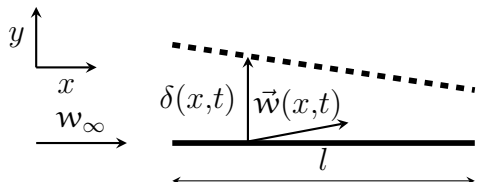


Abbildung 2.8.: Modell einer mit der Verformung $\delta(x,t)$ schwingenden ebenen Platte mit der Sehnenlänge l in einer stationären, reibungsfreien Strömung mit der Geschwindigkeit w_∞ sowie mit dem lokalen Geschwindigkeitsvektor auf der Oberfläche $\vec{w}(x,t)$

Mit der Schallgeschwindigkeit a werden schließlich die Kontinuitätsgleichung, die Impulsgleichungen und die Energiegleichung in linearisierter Form

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + w_\infty \frac{\partial \rho'}{\partial x} = -\overline{\rho} \left(\frac{\partial w'_x}{\partial x} + \frac{\partial w'_y}{\partial y} \right) \tag{2.74}$$

$$\frac{\partial w'_x}{\partial t} + w_\infty \frac{\partial w'_x}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{\overline{\rho}} \right) \tag{2.75}$$

$$\frac{\partial w'_y}{\partial t} + w_\infty \frac{\partial w'_y}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p'}{\overline{\rho}} \right) \tag{2.76}$$

$$p' = a^2 \rho' \tag{2.77}$$

geschrieben. Zur Lösung der Differentialgleichungen wird das Geschwindigkeitspotential der Störung Φ verwendet. Dieses ist über

$$w'_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{2.78}$$

$$w'_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{2.79}$$

mit den Geschwindigkeiten w'_x und w'_y verknüpft. Eingesetzt in die Impulsgleichung in x-Richtung (2.75) ergibt sich für den instationären Druckanteil

$$p' = -\overline{\rho} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + w_\infty \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right). \tag{2.80}$$

Durch Einsetzen von (2.80) in die linearisierte Energie- (2.77) und Kontinuitätsgleichung (2.74) folgt schließlich die konvektive Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + w_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Phi = 0. \tag{2.81}$$

Zur Vereinfachung dieser Differentialgleichung (2.81) werden als dimensionslose Variablen die Machzahl

$$M = \frac{w_\infty}{a} \tag{2.82}$$

und die dimensionslosen räumlichen Koordinaten

$$\widetilde{x} = \frac{x}{l} \tag{2.83}$$

$$\widetilde{y} = \sqrt{1 - M^2}\, \frac{y}{l} \tag{2.84}$$

mit der Sehnenlänge l eingeführt.

An dieser Stelle wird zusätzlich eine zentrale dimensionslose Kennzahl der Aeroelastik, die *reduzierte Frequenz* k, eingeführt. Diese Kennzahl charakterisiert instationäre Effekte

in einer Strömung und verhält sich proportional zur Strouhalzahl Sr. Im Kontext von Schaufelschwingungen beschreibt die reduzierte Frequenz

$$k = 2\pi Sr = 2\pi \frac{l/w_\infty}{T} = \frac{\omega l}{w_\infty}. \tag{2.85}$$

das Verhältnis der Zeit, in welcher sich Informationen mit der Geschwindigkeit w_∞ konvektiv über die Sehnenlänge l ausbreiten, zur Periodendauer der Schwingung T.

Bei einer harmonischen Bewegung der ebenen Platte wird das allgemeine Geschwindigkeitspotential Φ als komplexes, zeitabhängiges Potential mit dem ortsabhängigen Potential $\underline{\psi}\,(x,y)$ zu

$$\Phi = \underline{\psi} e^{j(\omega t + \mu \widetilde{x})} \tag{2.86}$$

angenommen. Hierbei dient $e^{j\mu\widetilde{x}}$ mit $\mu = kM^2/\left(1-M^2\right)$ dem Zweck die räumliche Ableitung erster Ordnung aus (2.81) zu eliminieren. Durch Einsetzen von (2.86) in (2.80) ergibt sich für die Formulierung des bewegungsinduzierten instationären Drucks

$$\underline{\hat{p}} = -\frac{\overline{\rho} w_\infty}{l} e^{j\mu\widetilde{x}} \left(j \frac{k}{1-M^2} \underline{\psi} + \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial \widetilde{x}} \right). \tag{2.87}$$

Die konvektive Wellengleichung (2.81) wird schließlich mit (2.86) in die Form einer Helmholtz-Gleichung

$$\frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial \widetilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial \widetilde{y}^2} + k^{*2} \underline{\psi} = 0 \tag{2.88}$$

überführt. Die Variable

$$k^* = \frac{kM}{1-M^2} \tag{2.89}$$

ist der Eigenwert dieser Helmholtz-Gleichung und wird im Nachfolgenden als *machzahlkorrigierte reduzierte Frequenz* bezeichnet. Eine analytische Lösung der Gleichung (2.88) wurde u. a. von *Reissner* (1951) und *Küssner* (1967) unter Zuhilfenahme von Mathieu-Funktionen (*McLachlan*, 1964) hergeleitet. Der Ansatz beider Autoren basiert dabei auf der Aufteilung des komplexen Potentials in zwei getrennte Potentiale

$$\underline{\psi} = \underline{\psi}_1 + \underline{\psi}_2, \tag{2.90}$$

die beide jeweils eine Lösung für (2.88) darstellen.

Das erste Potential $\underline{\psi}_1$ entspricht dem *nicht-zirkulatorischen* Anteil. Dieser Anteil repräsentiert die Trägheitskräfte des umgebenden Fluids auf die ebene Platte, da das Fluid durch die Bewegung der Platte verdrängt wird. Bei kompressiblen Fluiden wirkt der nicht-zirkulatorische Anteil wie eine akustische Schallquelle und regt akustische Wellen an.

Das zweite Potential $\underline{\psi}_2$ entspricht dem *zirkulatorischen* Anteil. Dieser Anteil ergibt sich aus der Veränderung der Zirkulation um die ebene Platte, da sich durch die Bewegung u. a. der Anstellwinkel und damit auch der Auftrieb verändert. Diese zeitabhängigen Veränderungen in der Zirkulation breiten sich konvektiv als Wirbelwellen aus.

Bei kleinen reduzierten Frequenzen $k \ll 1$ dominiert der zirkulatorische Anteil. In diesem Bereich erfolgt die zeitliche Änderung der Randbedingen deutlich langsamer als die Ausbreitung der Informationen. Das aerodynamische Feld hat somit ausreichend Zeit sich an die veränderten Randbedingungen anzupassen. Deshalb wird hier auch von einer quasi-stationären Strömung gesprochen. Für alle Werte von k ist der nicht-zirkulatorische Anteil näherungsweise proportional zur Beschleunigung der ebenen Platte und wächst somit quadratisch mit der reduzierten Frequenz an. Der zirkulatorische Anteil nimmt hingegen mit steigender reduzierter Frequenz ab, weshalb bei großen reduzierten Frequenzen $k \gg 1$ schließlich der nicht-zirkulatorische Anteil dominiert.

Für weitere Erläuterungen und Herleitungen zur instationären Profiltheorie sei an dieser Stelle auf *Försching* (1974) verwiesen.

2.3.2. Skalierung der bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeit

Um die Proportionalitäten und damit mögliche Skalierungsfaktoren der bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeit zu bestimmen, wird zunächst eine Proportionalitätsbeziehung des bewegungsinduzierten instationären Drucks aufgestellt. Hierzu wird angenommen, dass sich das komplexe Geschwindigkeitspotential proportional zur maximalen Verformungsamplitude $\hat{\delta}_{\max}$, Kreisfrequenz der Schwingung ω sowie Sehnenlänge l verhält und somit

$$\underline{\psi} \propto \hat{\delta}_{\max} \omega l \tag{2.91}$$

gilt. Damit kann aus der Formulierung für die bewegungsinduzierte instationäre Druckamplitude (2.87) die Proportionalitätsbeziehung dieser Druckamplitude bei konstanten Machzahlen

$$|\underline{\hat{p}}| \propto \rho_\infty w_\infty \hat{\delta}_{\max} \omega \propto \rho_\infty w_\infty^2 \left(\frac{\hat{\delta}_{\max}}{l} \right) k \tag{2.92}$$

abgeleitet werden.

In die bewegungsinduzierte aerodynamische Arbeit einer dreidimensionalen Schaufel fließen nach (2.66) neben dem instationären Druck auch die Verformung der Schaufel mit $|\underline{\vec{\hat{x}}}| \propto \hat{\delta}_{\max}$ selbst sowie die Schaufeloberfläche A mit ein. Die Oberfläche ist näherungsweise proportional zur Sehnenlänge und Schaufelhöhe h, weshalb die Proportionalität der bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeit einer dreidimensionalen Schaufel mit

$$W_d \propto \rho_\infty w_\infty^2 k \hat{\delta}_{\max}^2 \frac{A}{l} \propto \rho_\infty w_\infty^2 k \hat{\delta}_{\max}^2 h. \tag{2.93}$$

formuliert werden kann. Mit diesem Proportionalitätsfaktor (2.93) wird schließlich die entdimensionierte aerodynamische Arbeit zu

$$\Theta = \frac{W_d}{\rho_\infty w_\infty^2 k \hat{\delta}_{\max}^2 h} \tag{2.94}$$

definiert. In den in dieser Arbeit vorgestellten Untersuchungen wird die bewegungsinduzierte aerodynamische Arbeit allein anhand dieser entdimensionierten Größe verglichen. Damit ist es möglich, direkt die Skalierbarkeit der bewegungsinduzierten Arbeit und somit der aerodynamischen Dämpfung zu bewerten.

Bei konstanter Geometrie, Schwingungsamplitude und reduzierter Frequenz ergibt sich aus (2.93) eine ausschließliche Proportionalität mit dem dynamischen Druck $1/2\,\rho_\infty w_\infty^2$. Folglich ermöglicht die Betrachtung der über (2.94) entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten direkt eine Bewertung der Skalierbarkeit der bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten mit dem dynamischen Druck.

2.4. Bewegungsinduzierte Wellen in Fluiden

Schwingende Schaufeln regen im sie umgebenden Fluid Wellen an, die bei der Betrachtung eines einzelnen Profils nicht weiter von Relevanz sind. Bei Schaufelkaskaden treffen diese Wellen jedoch auf die anderen Schaufeln der Kaskade und induzieren dort instationäre Kräfte. Somit verursachen diese Wellen die in Kapitel 2.2.2 beschriebene aerodynamische Kopplung der Schaufeln einer Kaskade. In Abhängigkeit von den Ausbreitungseigenschaften dieser Wellen wird in dieser Arbeit zwischen *Wirbelwellen* und *akustischen Wellen* unterschieden.

Als Wirbelwellen werden harmonische Störungen im Strömungsfeld bezeichnet, die sich konvektiv ausbreiten. Von einer schwingenden Schaufel werden diese Wellen durch die sich verändernde Zirkulation angeregt. Die Ausbreitung erfolgt allein in Strömungsrichtung und damit sowohl in axiale Richtung als auch in Umfangsrichtung, die bei Rotoren entgegen der Rotationsrichtung zeigt. Aufgrund dieser Umfangskomponente erreichen die Wirbelwellen in der Betrachtungsweise der Einflusskoeffizienten allein die Schaufeln mit negativen Indizes $\iota < 0$. Die axiale Strömungskomponente bewirkt einen konvektiven Transport der Wirbelwellen in axiale Richtung, was schließlich die Wirbelwellen aus der betrachteten Reihe heraus transportiert. Dies sorgt dafür, dass die Wirbelwellen in der Regel nur auf die direkte Nachbarschaufel mit dem Index $\iota = -1$ auftreffen und nur dort die instationären Schaufeldrücke beeinflussen. Darüber hinaus haben die Störungen der Wirbelwellen die Reihe in axialer Richtung bereits verlassen.

Bei akustischen Wellen handelt es sich um Druck- bzw. Dichteschwankungen die, von schwingenden Schaufeln aufgrund der Verdrängung des Fluids angeregt werden. Diese Wellen sind mit der Strömung überlagert und können sich somit auch entgegen der Strömungsrichtung ausbreiten. Im Gegensatz zu Wirbelwellen ist es damit möglich, dass die von einer schwingenden Schaufel angeregten akustischen Wellen alle Schaufeln einer Reihe erreichen. In ringförmigen Strömungskanälen breiten diese Wellen sich als akustische Moden aus, die den Eigenformen des Fluids im Strömungskanal entsprechen. Das Ausbreitungsverhalten akustischer Moden ist dabei deutlich komplexer als das der Wirbelwellen. Daher wird im nachfolgenden Abschnitt 2.4.1 das Ausbreitungsverhalten akustischer Moden in ringförmigen Strömungskanälen genauer erläutert, bevor in Kapitel 2.4.2 auf die Anregung akustischer Moden durch Schaufelschwingungen im Speziellen eingegangen wird.

In Kapitel 2.4.3 werden abschließend die Einflüsse von Wirbelwellen und akustischen Wellen auf die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten erläutert.

2.4.1. Ausbreitung akustischer Moden in ringförmigen Strömungskanälen

Eine akustische Mode besitzt sowohl eine azimutale, m, als auch eine radiale Modenordnung n. Die Azimutalmodenordnung beschreibt die Anzahl an Perioden der akustischen Welle, die über den Umfang auftreten. Die Radialmodenordnung steht hingegen für die Anzahl an Drucknullstellen in radialer Richtung. In Abbildung 2.9 sind exemplarisch die Druckschwankungen akustischer Moden mit unterschiedlichen Modenordnungen m und n in einem mit dem Drall w_u durchströmten ringförmigen Kanal dargestellt.

Eine mathematische Formulierung der Ausbreitung akustischer Moden kann aus der linearisierten konvektiven Wellengleichung in Zylinderkoordinaten hergeleitet werden. Mit der axialen Wellenzahl $K_{a,mn}$ und der drallbehafteten[3] Wellenzahl

$$\check{K}_m = K - \frac{m\Omega}{a}, \tag{2.95}$$

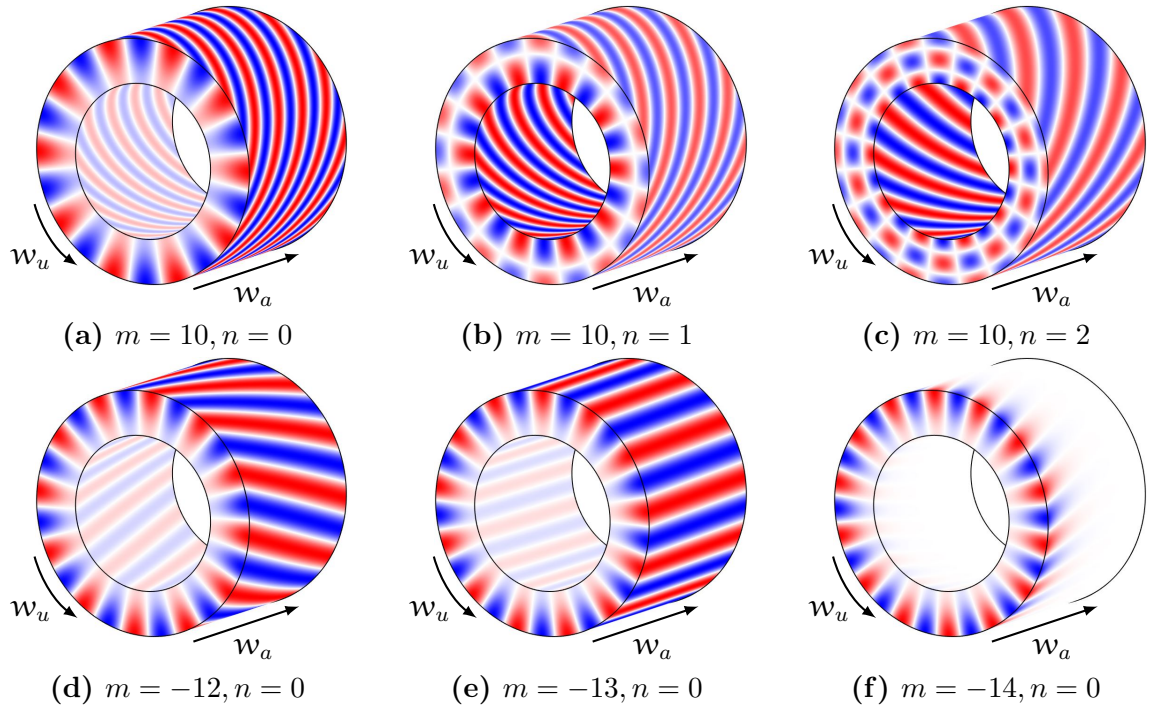
die sich aus der Freifeldwellenzahl $K = \omega/a$ mit der Schallgeschwindigkeit a und dem als Starrkörperrotation angenommenen Strömungsdrall $\Omega = w_u/r = \text{konst.}$ mit der Geschwindigkeitskomponente in Umfangsrichtung w_u beim Radius r zusammensetzt, wird zunächst die Dispersionsrelation

$$K_{a,mn}^2 + \left(\frac{\alpha_{mn}(\eta)}{r_\mathrm{g}}\right)^2 = \left(\check{K}_m - M_a K_{a,mn}\right)^2 \tag{2.96}$$

mit der axialen Machzahl M_a, dem Gehäuseradius r_g sowie dem Eigenwert der akustischen Mode $\alpha_{mn}(\eta)$ aufgestellt. Der Eigenwert bei einem ringförmigen Kanal ist allein von den Modenordnungen m und n sowie dem Nabenverhältnis $\eta = r_\mathrm{n}/r_\mathrm{g}$ abhängig und kann aus einer Kombination von Bessel- und Neumann-Funktionen berechnet werden. Auf eine genaue Ausführung dieser Berechnung wird an dieser Stelle verzichtet und stattdessen auf *Tapken* (2015) verwiesen. Aus der Dispersionsrelation (2.96) wird schließlich die axiale Wellenzahl einer drallbehafteten Strömung mit

$$K_{a,mn}^{\pm} = \frac{\check{K}_m}{1 - M_a^2}\left(-M_a \pm \underbrace{\sqrt{1 - (1 - M_a^2)\,\frac{\alpha_{mn}^2}{\left(\check{K}_m r_\mathrm{g}\right)^2}}}_{\gamma_{mn}}\right) \tag{2.97}$$

[3] Sowohl diese als auch alle weiteren Formulierungen in dieser Arbeit beziehen sich immer auf das Relativsystem der betrachteten Reihe.



(a) $m = 10, n = 0$ **(b)** $m = 10, n = 1$ **(c)** $m = 10, n = 2$

(d) $m = -12, n = 0$ **(e)** $m = -13, n = 0$ **(f)** $m = -14, n = 0$

Abbildung 2.9.: Instationärer Schalldruck zu einem Zeitpunkt t von sich stromabwärts ausbreitenden akustischen Moden mit unterschiedlichen azimutalen m und radialen Modenordnungen n sowie den stationären relativen Strömungsgeschwindigkeiten in axiale Richtung w_a und Umfangsrichtung w_u

berechnet. Dabei werden mit dem Vorzeichen vor dem Ausbreitungsfaktor γ_{mn} die axialen Wellenzahlen in (+) und entgegen (−) der Strömungsrichtung unterschieden. Der Ausbreitungsfaktor selbst beschreibt die Ausbreitungsfähigkeit der akustischen Mode in axialer Richtung. Bei einem reellen Ausbreitungsfaktor ist die akustische Mode ausbreitungsfähig und wird als *cut-on* bezeichnet. Ausbreitungsfähige akustische Moden sind in Abbildung 2.9a-d dargestellt. Ist der Ausbreitungsfaktor hingegen komplexwertig, ist die akustische Mode nicht ausbreitungsfähig und wird als *cut-off* bezeichnet. Eine nicht ausbreitungsfähige akustische Mode ist in Abbildung 2.9f dargestellt. Wenn der Ausbreitungsfaktor den Wert null aufweist, befindet sich die akustische Mode in Resonanz. Das bedeutet, die akustische Mode breitet sich nicht mehr stromab oder stromauf aus, sondern die akustische Energie wird allein in Umfangsrichtung transportiert. Ist eine akustische Mode in Resonanz, verbleibt somit die akustische Energie innerhalb des Kanals. In Abbildung 2.9e ist eine akustische Mode in Resonanz dargestellt.

Zur Ermittlung der akustischen Resonanzen in Abhängigkeit der reduzierten Frequenzen, Machzahlen und Modenordnungen wird als Radikand des Ausbreitungsfaktors

$$1 - (1 - M_a^2)\frac{\alpha_{mn}^2}{\left(\check{K}_m r_g\right)^2} = 0 \tag{2.98}$$

gesetzt. Weiterhin wird anstelle der Axial- und Umfangsmachzahlen der relative Strömungswinkel β als Winkel der relativen Strömung zur Umfangsgeschwindigkeit u und die relative Machzahl M mit

$$M_a = M \sin \beta \tag{2.99}$$

$$M_u = -M \cos \beta \tag{2.100}$$

eingesetzt. Zusammen mit der Definition der reduzierten Frequenz aus (2.85) wird für die drallbehaftete Wellenzahl

$$\check{K}_m = \frac{kM}{l} + \frac{mM \cos \beta}{r_\mathrm{g}} \tag{2.101}$$

geschrieben. Mit Einsetzen von (2.99), (2.100) und (2.101) in (2.98) wird schließlich die Gleichung für die reduzierte Frequenz, bei der eine akustische Mode mit der azimutalen Modenordnung m mit dem Eigenwert α_{mn} in Resonanz ist,

$$k = \frac{l}{r_\mathrm{g}} \left(\sqrt{\frac{1}{M^2} - \sin^2(\beta)}\, \alpha_{mn}(\eta) - m \cos(\beta) \right) \tag{2.102}$$

aufgestellt. Um zusätzlich die Abhängigkeit der akustischen Resonanzen von der Machzahl vorherzusagen, wird (2.102) zu

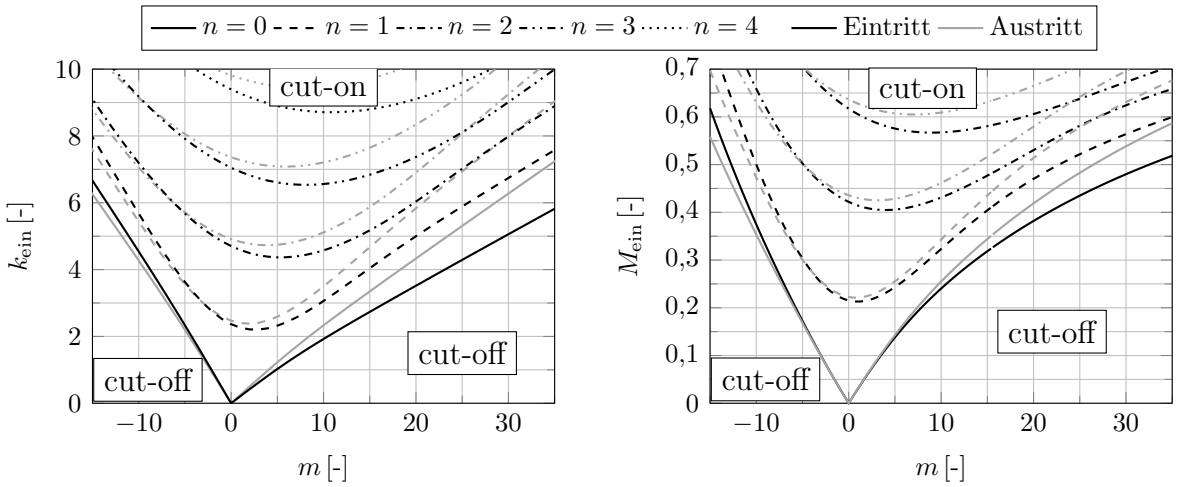
$$M = \frac{1}{\sqrt{\left(k \frac{r_\mathrm{g}}{l} + m \cos(\beta)\right)^2 \frac{1}{\alpha_{mn}^2(\eta)} + \sin^2(\beta)}}, \tag{2.103}$$

umgeformt.

Da aufgrund der Strömungsumlenkung und der Kanalkontraktion in Axialverdichtern stromab der Schaufeln ein anderer Strömungszustand als stromauf der Schaufeln herrscht, müssen die akustischen Resonanzen im Eintritt und Austritt einer Schaufelreihe separat mit unterschiedlichen Machzahlen, Strömungswinkeln und Radien berechnet werden. In Abbildung 2.10a sind die reduzierten Frequenzen, bei denen im Eintritt und Austritt akustische Resonanzen auftreten, über der azimutalen Modenordnung für die in dieser Arbeit behandelte Referenzverdichterstufe beispielhaft aufgezeigt. Die reduzierten Frequenzen im Austritt wurden auf die reduzierten Frequenzen im Eintritt mithilfe von

$$k_\mathrm{ein} = k_\mathrm{aus} \frac{w_\mathrm{aus}}{w_\mathrm{ein}} \tag{2.104}$$

umgerechnet. Es wird deutlich, dass mit zunehmender Frequenz die Anzahl an ausbreitungsfähigen akustischen Moden zunimmt. Bei kleinen reduzierten Frequenzen sind lediglich akustische Moden mit geringen azimutalen Modenordnungen und der radialen Modenordnung $n = 0$ ausbreitungsfähig. Bei hohen reduzierten Frequenzen $k_1 > 9{,}5$ sind hingegen eine Vielzahl an akustischen Moden mit radialen Modenordnungen $n \leq 4$ ausbreitungsfähig.



(a) Mit (2.102) berechnete reduzierte Frequenzen k_{ein} der akustischen Resonanzen bei der relativen Eintrittsmachzahl $M_{\text{ein}} = 0{,}52$

(b) Mit (2.103) berechnete relative Eintrittsmachzahlen M_{ein} der akustischen Resonanzen bei der reduzierten Frequenz $k_{\text{ein}} = 5{,}87$

Abbildung 2.10.: Verlauf der akustischen Resonanzen in Abhängigkeit der Azimutalmodenordnung m im Ein- und Austritt eines Axialverdichtergitters

Analog dazu sind in Abbildung 2.10b die Eintrittsmachzahlen, bei denen akustische Resonanzen auftreten, über die Azimutalmodenordnung für die reduzierte Frequenz $k_1 = 5{,}87$ dargestellt. Mit steigender Machzahl nimmt ebenfalls die Anzahl an ausbreitungsfähigen Radialmodenordnungen zu. Aufgrund des Dralls nimmt die Steigung der Äste bei positiven Azimutalmodenordnungen $m > 0$ mit steigender Machzahl ab. Bei negativen Azimutalmodenordnungen hingegen nimmt die Steigung der Äste mit der Machzahl zu. Aus diesen Gründen reagiert die Ausbreitung der akustischen Moden mit positiven Azimutalmodenordnungen deutlich sensitiver auf Änderungen in der Machzahl, als es bei akustischen Moden mit negativen Azimutalmodenordnungen der Fall ist.

2.4.2. Anregung akustischer Moden durch Schaufelschwingungen

Bei einer Schaufelschwingung mit dem vorzeichenbehafteten Knotendurchmesser ν bzw. dem IBPA σ_ν aus (2.38) werden akustische Moden mit den azimutalen Modenordnungen

$$m = \nu + sN = \left(\frac{\sigma_\nu}{2\pi} + s\right) N \qquad \text{mit } s \in \mathbb{Z} \tag{2.105}$$

und radialen Modenordnungen

$$n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.106}$$

angeregt. Neben den direkt angeregten azimutalen Modenordnungen $m = \nu = \sigma_\nu N/(2\pi)$, werden zusätzlich höhere Ordnungen durch Aliasing angeregt.

Welche der angeregten akustischen Moden die akustischen Wellen dominieren, ist abhängig von der Eigenform der Schaufelschwingung. In der zweidimensionalen Profilebene

induziert eine Schwingung mit rein translatorischer Bewegung in Umfangsrichtung eine Dipolquelle. Eine Torsionsschwingung induziert hingegen eine Quadrupolquelle. Bei einer schwingenden dreidimensionalen Schaufel überlagern sich eine unendliche Anzahl solcher infinitesimaler über die Schaufelhöhe verteilter zweidimensionaler Quellen. Daher hat im Dreidimensionalen die Ordnung der Schaufelschwingung einen signifikanten Einfluss auf die dominant angeregte radiale akustische Modenordnung. Bei Biege- und Torsionsmoden erster Ordnung wird primär die radiale Modenordnung $n = 0$ angeregt. Bei Schwingungsmoden höherer Ordnung dominieren allerdings höhere radiale Modenordnungen $n > 0$. In Abhängigkeit von der reduzierten Frequenz und Machzahl können die dominant angeregten Modenordnungnen, die (2.105) und (2.106) erfüllen, jedoch cut-off sein. In diesem Fall dominiert eine nicht dominant angeregte Mode mit einer kleineren azimutalen bzw. radialen Modenordnung, die ebenfalls (2.105) bzw. (2.106) erfüllt.

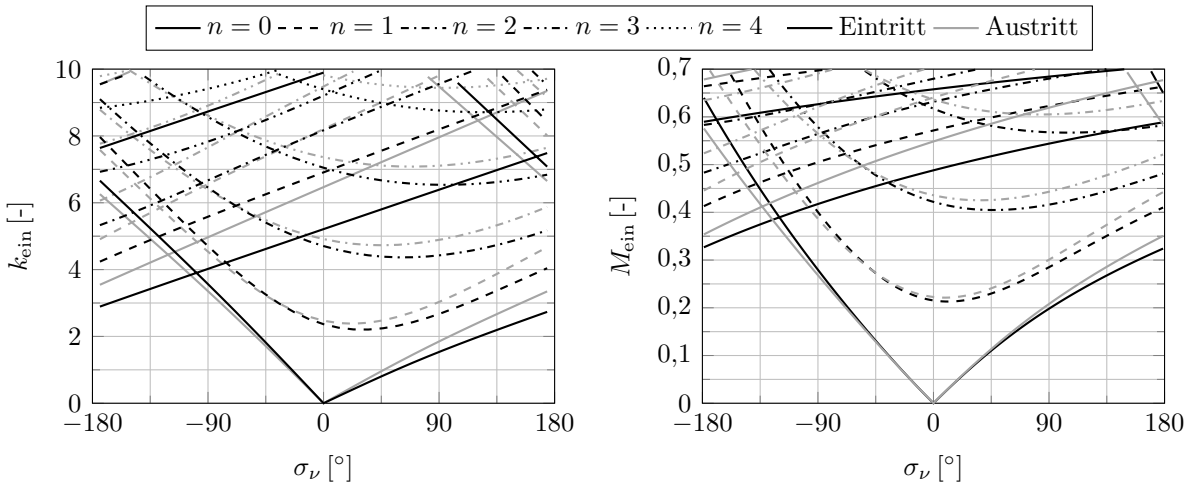
Von zentraler Bedeutung ist, ob bei einer Schwingung mit dem IBPA σ_ν überhaupt ausbreitungsfähige akustische Moden angeregt werden. Zur Ermittlung der ausbreitungsfähigen akustischen Moden müssen daher die akustischen Resonanzen in Abhängigkeit einer Schwingung mit dem IBPA σ_ν anstelle der Azimutalmodenordnung m bestimmt werden. Dazu wird der IBPA σ_ν über (2.105) in (2.102) und (2.103) eingesetzt und es ergeben sich die reduzierten Frequenzen, bei denen akustischen Resonanzen auftreten

$$k = \frac{l}{r_\mathrm{g}} \left(\sqrt{\frac{1}{M^2} - \sin^2(\beta)}\, \alpha_{mn}(\sigma_\nu, s, N, \eta) - \left(\frac{\sigma_\nu}{2\pi} + s \right) N \cos(\beta) \right) \tag{2.107}$$

sowie die Machzahlen, bei denen akustische Resonanzen auftreten

$$M = \frac{1}{\sqrt{\left(k\frac{r_\mathrm{g}}{l} + \left(\frac{\sigma_\nu}{2\pi} + s \right) N \cos(\beta) \right)^2 \frac{1}{\alpha_{mn}^2(\sigma_\nu, s, N, \eta)} + \sin^2(\beta)}} \tag{2.108}$$

mit $s \in \mathbb{Z}$. Damit wird aus Abbildung 2.10 Abbildung 2.11 und es kann ermittelt werden, ob bei einer Schwingung mit dem IBPA σ_ν akustische Moden ausbreitungsfähig, in Resonanz oder nicht ausbreitungsfähig sind.



(a) Mit (2.107) berechnete reduzierte Frequenzen k_{ein} der akustischen Resonanzen bei der relativen Eintrittsmachzahl $M_{\text{ein}} = 0{,}52$

(b) Mit (2.108) berechnete relative Eintrittsmachzahlen M_{ein} der akustischen Resonanzen bei der reduzierten Frequenz $k_{\text{ein}} = 5{,}87$

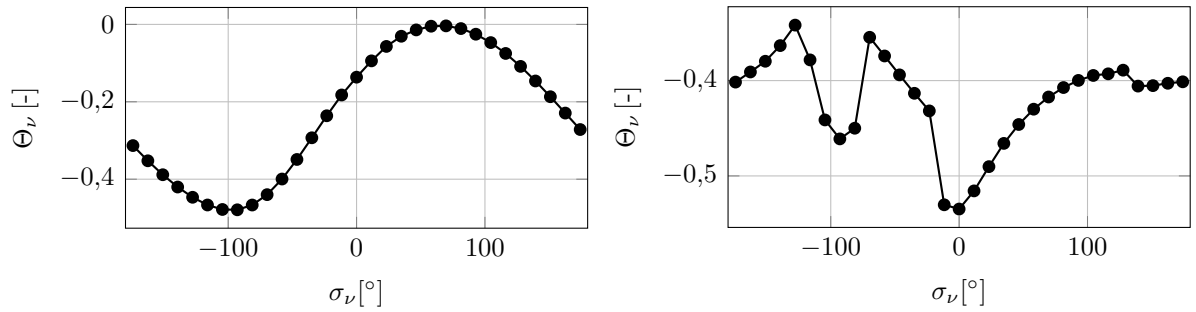
Abbildung 2.11.: Verlauf der akustischen Resonanzen in Abhängigkeit des IBPA σ_ν im Ein- und Austritt eines Verdichtergitters

2.4.3. Einfluss von Wellen auf die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten

In diesem Abschnitt wird der Einfluss von Wirbelwellen und akustischen Wellen auf die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz sowie des IBPA diskutiert.

Aufgrund der Trägheit des kompressiblen Fluids dominieren Wirbelwellen bei Schaufelschwingungen mit kleinen reduzierten Frequenzen $k \ll 1$. Diese Wellen beeinflussen nur die entgegen der Rotationsrichtung gelegene direkt benachbarte Schaufel $\iota = -1$. Dies führt dazu, dass die aerodynamische Schaufelkoppelung bei kleinen reduzierten Frequenzen allein auf den Einflusskoeffizienten der Schaufel $\iota = -1$ zurückzuführen ist. Die Einflusskoeffizienten der weiteren Schaufeln sind für die Induzierung der bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeit bei kleinen reduzierten Frequenzen somit nicht relevant. Mithilfe der inversen Fouriertransformation (2.58) aus Kapitel 2.2.2 wird ersichtlich, dass die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten in diesem Fall einen negativen sinusförmigen Verlauf mit dem IBPA aufweisen. Aufgrund des reinen sinusförmigen Verlaufes im quasi-stationären Fall werden Verläufe der bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten über den IBPA allgemein auch als *S-Kurven* bezeichnet. In Abbildung 2.12a ist eine solche S-Kurve bei kleiner reduzierter Frequenz und damit dominierenden Wirbelwellen dargestellt.

Sowohl mit steigender reduzierter Frequenz als auch mit steigender Machzahl gewinnen die akustischen Wellen an Bedeutung. Da diese sich in beide Richtungen über den gesamten Umfang ausbreiten können, werden auch Einflusskoeffizienten höherer Ordnung induziert. Damit wird der Verlauf der bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten über den IBPA zusätzlich von diesen Einflusskoeffizienten beeinflusst. Daher weicht die



(a) S-Kurve bei kleiner reduzierter Frequenz $k \ll 1$ mit dominanten Wirbelwellen

(b) S-Kurve bei großer reduzierter Frequenz mit dominanten akustischen Wellen

Abbildung 2.12.: Beispielhafte S-Kurven dominiert einmal von Wirbelwellen und einmal von akustischen Wellen

Form der S-Kurven bei größeren reduzierten Frequenzen von reinen sinusförmigen Verläufen z. T. signifikant ab. Eine Besonderheit stellt die Anregung akustischer Resonanzen bei bestimmten IBPA dar. Da die akustische Energie bei diesen akustischen Resonanzen innerhalb der Schaufelreihe verbleibt, werden hierbei die bewegungsinduzierten Arbeiten besonders stark beeinflusst. Aus diesem Grund kann es bei Schwingungen bei denen akustische Moden nahe einer Resonanz angeregt werden, zu deutlichen Abweichungen in den aerodynamischen Arbeiten im Vergleich zu den benachbarten IBPA kommen. Diese Stellen in den S-Kurven werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit auch als lokale Extrema bezeichnet. Anhand Abbildung 2.11 wird deutlich, dass mit steigender reduzierter Frequenz und Machzahl immer mehr radiale Modenordnungen ausbreitungsfähig werden. Für jede ausbreitungsfähige Radialmodenordnung liegen damit für Eintritt und Austritt je zwei IBPA vor, bei denen eine akustische Resonanz angeregt wird. Somit nimmt mit steigender Anzahl an ausbreitungsfähigen radialen Modenordnungen in der Regel auch die Anzahl der lokalen Extrema in den S-Kurven zu. In Abbildung 2.12b ist beispielhaft eine S-Kurve dargestellt, bei der radiale Modenordnungen $n \leq 2$ ausbreitungsfähig sind.

2.5. Ähnlichkeitsbetrachtungen zur Verdichtung unterschiedlicher Gase

In diesem Abschnitt werden Ähnlichkeitsbetrachtungen zum Betrieb eines subsonischen Verdichters mit unterschiedlichen Gasen durchgeführt. Der Fokus liegt auf aerodynamisch fremderregten Schwingungen. Dazu wird zuerst auf die Anpassung des Verdichters zur Herstellung der aerodynamischen Ähnlichkeit eingegangen, um im zweiten Schritt die aeroelastischen Ähnlichkeiten bei aerodynamisch fremderregten Schwingungen ableiten zu können.

2.5.1. Herstellung aerodynamischer Ähnlichkeit im Auslegungspunkt

Für einen aerodynamisch ähnlichen Betrieb herkömmlicher Luftverdichter mit unterschiedlichen Gasen muss die Maschine angepasst werden. Industrielle Axialverdichter werden auf der Grundlage eines modularen Systems kundenspezifisch gebaut. Das bedeutet, dass auf bereits ausgelegte Schaufelgeometrien mit bekannten aerodynamischen und mechanischen Eigenschaften zurückgegriffen wird. Daraus ergeben sich die folgenden Randbedingungen:

1. Anpassung der Auslegungsdrehzahl ist möglich.
2. Geometrie
   - Konstante Nabe
   - Variables Gehäuse
   - Konstante Schaufelgeometrien und -zahlen (einzig eine Variation der Schaufelhöhe durch die veränderte Gehäusegeometrie ist möglich)
   - Konstanter Einlauf

Gasspezifische Änderungen der Schallgeschwindigkeit a, die die Machzahl beeinflussen, werden über die Drehzahl n_R mit

$$n_\mathrm{R,G} = n_\mathrm{R,L}\frac{a_\mathrm{G}}{a_\mathrm{L}} = n_\mathrm{R,L}\frac{\sqrt{\kappa_\mathrm{G} R_\mathrm{s,G} T_\mathrm{G}}}{\sqrt{\kappa_\mathrm{L} R_\mathrm{s,L} T_\mathrm{L}}} \tag{2.109}$$

korrigiert. Mit den Subskripten G und L wird dabei zwischen den gasspezifischen Größen (G) und den Größen des Luftverdichters (L) als Referenz unterschieden. Weiterhin entspricht κ dem Isentropenexponenten, R_s der spezifischen Gaskonstante und T der statischen Temperatur. Üblicherweise bezieht sich die Anpassung der Drehzahl nach (2.109) auf die Eintrittsgrößen des Verdichters. Aufgrund der unterschiedlichen Kompressibilität der Gase kommt es dennoch zu Fehlanströmungen, die mit zunehmender Stufennummer stärker werden. Zur Korrektur dieser Fehlanströmungen und somit Wiederherstellung ähnlicher Strömungswinkel zum Luftverdichter wird das Gehäuse angepasst. Diese Anpassung des Gehäuses ist dabei fast ausschließlich vom Isentropenexponenten κ abhängig (*Hoffmann et al.*, 2020). Die Veränderungen der Gehäusekonturen für Gase mit kleineren und größeren Isentropenexponenten als Luft sind in Abbildung 2.13 schematisch dargestellt.

Auch wenn die Gehäuseanpassungen es ermöglichen, dass die Durchflusskennzahlen bei unterschiedlichen Gasen wieder denen des ursprünglichen Referenzverdichters angeglichen werden, treten durch den unterschiedlichen Temperaturaufbau der Gase Abweichungen in den Schallgeschwindigkeiten auf. Bei konstantem Geschwindigkeitsniveau führt dies zu Abweichungen in den Machzahlen. Besonders groß fallen die Machzahlabweichungen in den hinteren Stufen aus, da sich die Temperaturabweichungen aller vorangegangenen Stufen aufsummieren. Aus dem Verhältnis der Totalenthalpien pro Stufe der unterschiedlichen

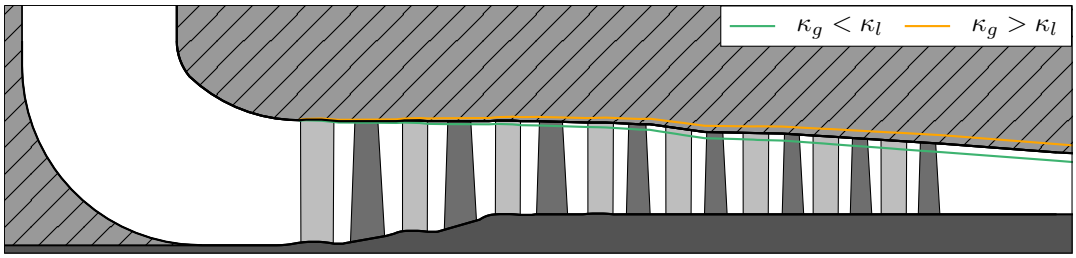


Abbildung 2.13.: Schematische Darstellung der zur Korrektur der Fehlanströmungen notwendigen Gehäuseanpassungen für Gase mit kleineren und größeren Isentropenexponenten im Vergleich zu Luft nach *Hoffmann et al.* (2020)

Gase zu Luft und (2.109) wird der unterschiedliche Totaltemperaturaufbau pro Stufe ΔT_t mit

$$\begin{aligned}\Delta T_{\mathrm{t,G}} &= \frac{R_{\mathrm{s,L}}\dfrac{\kappa_\mathrm{L}}{\kappa_\mathrm{L}-1}\dfrac{n_{\mathrm{R,G}}^2}{n_{\mathrm{R,L}}^2}}{R_{\mathrm{s,G}}\dfrac{\kappa_\mathrm{G}}{\kappa_\mathrm{G}-1}}\Delta T_{\mathrm{t,L}} = \frac{R_{\mathrm{s,L}}\dfrac{\kappa_\mathrm{L}}{\kappa_\mathrm{L}-1}}{R_{\mathrm{s,G}}\dfrac{\kappa_\mathrm{G}}{\kappa_\mathrm{G}-1}}\frac{\kappa_\mathrm{G}R_{\mathrm{s,G}}}{\kappa_\mathrm{L}R_{\mathrm{s,L}}}\frac{\left(1+\dfrac{\kappa_\mathrm{L}-1}{2}M^2\right)}{\left(1+\dfrac{\kappa_\mathrm{G}-1}{2}M^2\right)}\Delta T_{\mathrm{t,L}} \\ &\approx \frac{\kappa_\mathrm{G}-1}{\kappa_\mathrm{L}-1}\Delta T_{\mathrm{t,L}}\end{aligned} \tag{2.110}$$

abgeschätzt. Anhand (2.110) wird deutlich, dass bei eingestellter Ähnlichkeit der Machzahlen vor der Stufe, ebenfalls eine alleinige Abhängigkeit des Temperaturaufbaus vom Isentropenexponenten κ vorliegt. Daraus ergeben sich trotz angepasstem Gehäuse unterschiedliche Machzahlen. Diese Verläufe sind beispielhaft in Abbildung 2.14 dargestellt. Für ausführliche Informationen zu diesen Anpassungsmaßnahmen sowie deren Auswirkungen auf Druckverhältnis und Wirkungsgrad sei an dieser Stelle auf *Hoffmann et al.* (2020) und *Hoffmann* (2023) verwiesen.

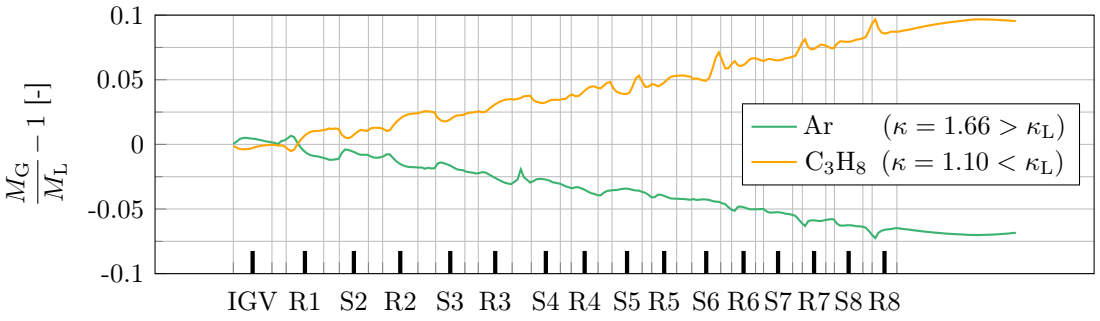


Abbildung 2.14.: Relative Abweichungen der massenstromgemittelten absoluten Machzahlen der Gase Argon (Ar) und Propan (C_3H_8) im angepassten Verdichter im Vergleich zu den Machzahlenverläufen des Referenzverdichters mit Luft nach *Hoffmann* (2023)

2.5.2. Auswirkungen auf die aeroelastische Ähnlichkeit

Neben den veränderten Stoffgrößen an sich haben auch die aerodynamisch begründeten Anpassungsmaßnahmen direkte Auswirkungen auf die aeroelastische Ähnlichkeit bei aerodynamisch fremderregten Schwingungen. Diese sind in Tabelle 2.1 für vordere und hintere Stufen eines Axialverdichters zusammengefasst und werden nachfolgend erläutert.

Da die Schaufelzahlen gleich bleiben, sind die Erregerordnungen *EO* bei jedem Gas konstant. In den vorderen Stufen ändern sich weder das Gehäuse noch die Schaufelhöhen signifikant, weshalb die Eigenfrequenzen und Eigenformen dieser Schaufeln ebenfalls konstant bleiben. Somit verändert sich für die vorderen Stufen das Campbell-Diagramm nicht und die mechanischen Drehzahlen der Resonanzkreuzungen $n_{R,\mathrm{Res}}$ sind konstant. Dies führt wiederum zu konstanten reduzierten Frequenzen k, denn durch die konstante Drehzahl und unter der Annahme konstanter Durchflusskennzahlen ϕ bzw. Strömungswinkel β ist die Strömungsgeschwindigkeit w_∞ ebenfalls konstant. Allerdings ändern sich durch die unterschiedlichen Schallgeschwindigkeiten $a = \sqrt{\kappa RT}$ bei unterschiedlichen Gasen die Machzahl M und damit die aerodynamischen Betriebspunkte an diesen Resonanzkreuzungen. Mach'sche Ähnlichkeit ist bei fremderregten Schwingungen somit nicht mehr gegeben.

In den hinteren Stufen kommt zusätzlich zum Machzahlunterschied aufgrund der unterschiedlichen Schallgeschwindigkeiten noch die Machzahlabweichungen aufgrund des unterschiedlichen Temperaturaufbaus zum Tragen. Weiterhin kann die Schaufelhöhenänderung aufgrund der Gehäuseanpassungen nicht mehr vernachlässigt werden. Die Änderung der Schaufelhöhe führt zu einer Veränderung der Eigenkreisfrequenzen $\omega = f(h)$ und Eigenformen $\vec{\Psi}$. Proportional zu der Verschiebung der Eigenfrequenzen verschieben sich nach (2.63) mit $n_{\mathrm{R,Res}} \propto \omega$ somit die Drehzahlen der Resonanzkreuzungen. Unter der Annahme

	Kenngrößen		**Vordere Stufen** (geringfügige Gehäuseänderung)	**Hintere Stufen** (deutliche Gehäuseänderung)
Geometrie/ Mechanik	Erregerordnung	EO	konst.	konst.
	Schaufelhöhe	h	$\approx$ konst.	$h = f(\kappa,\text{Stufe})$
	Sehnenlänge	l_{tip}	konst.	$\approx$ konst.
	Eigenkreisfrequenz	ω	konst.	$\omega = f(h)$
	Eigenform	$\vec{\Psi}$	konst.	$\vec{\Psi} = f(h)$
	Resonanzdrehzahl	$n_{\mathrm{R,Res}}$	konst.	$n_{\mathrm{R,Res}} \propto \omega$
Aerodyn./ Aeroelastik	Durchflusskennzahl	ϕ	konst.	konst.
	rel. Geschwindigkeit	w_∞	konst.	$w_\infty \propto n_{\mathrm{R,Res}} \propto \omega$
	reduzierte Frequenz	k	konst.	$k = \dfrac{\omega l}{w_\infty} = \text{konst.}$
	Machzahl	M	$M = f(\kappa R_\mathrm{s} T)$	$M = f(\kappa R_\mathrm{s} T)$

Tabelle 2.1.: Veränderung geometrischer, mechanischer, aerodynamischer und aeroelastischer Kenngrößen während einer Resonanzkreuzung in für unterschiedliche Gase angepassten Axialverdichtern

konstanter Durchflusskennzahlen und der Proportionalität der Umfangsgeschwindigkeit mit der Drehzahl $u \propto n_{\mathrm{R,Res}}$ verhalten sich die Strömungsgeschwindigkeiten mit

$$w_\infty \propto n_{\mathrm{R,Res}} \propto \omega \tag{2.111}$$

ebenfalls proportional zu den Eigenfrequenzen. Da industrielle Axialverdichter in der Regel so ausgelegt sind, dass die Schaufelprofile im Gehäusebereich bis auf die Verwindung konstant sind, wird die Sehnenlänge trotz veränderter Schaufelhöhe als konstant angenommen. Aus diesen Gründen ist

$$k \propto \frac{\omega l}{w_\infty} = \text{konst.} \tag{2.112}$$

und es kann auch für die hinteren Stufen von konstanten reduzierten Frequenzen ausgegangen werden.

3. Stand der Forschung

Die in Kapitel 2.5.2 identifizierten veränderten Randbedingungen aerodynamisch fremderregter Schaufelschwingungen basieren auf den in Kapitel 2.5.1 dargestellten aerodynamischen Änderungen, die bei der Verdichtung unterschiedlicher Gase auftreten. In Kapitel 3.1 wird daher zunächst Literatur vorgestellt, die sich mit den Auswirkungen verschiedener Gase auf das Betriebsverhalten industrieller Verdichter beschäftigt und die notwendigen Anpassungsmaßnahmen für mehrstufige Axialverdichter behandelt. Der direkte Einfluss unterschiedlicher Gase auf die aerodynamischen Dämpfungen war bisher noch nicht Gegenstand von Untersuchungen. Jedoch behandeln eine Vielzahl an Untersuchungen unterschiedliche aerodynamische Einflüsse auf die aerodynamischen Dämpfungen. Ein Überblick über die wichtigsten Veröffentlichungen zu dieser Thematik ist in Kapitel 3.2 dargelegt. Abschließend wird in Kapitel 3.3 die in dieser Dissertation behandelte Problemstellung in den Stand der Forschung eingeordnet und die behandelten Zielstellungen werden formuliert.

3.1. Einflüsse des Gases auf das Betriebsverhalten von Axialverdichtern

Unter der auch dieser Arbeit zugrundeliegenden Prämisse untersuchte *Hoffmann* (2023) analytisch und numerisch den Einfluss verschiedener Gase auf das aerodynamische Betriebsverhalten eines achtstufigen subsonischen industriellen Axialverdichters, der ursprünglich für Luft ausgelegt wurde. Um den Einfluss der untersuchten Gase Propan, Kohlenstoffdioxid, Methan und Argon auf das Betriebsverhalten im Auslegungspunkt zu isolieren, wurden in allen Untersuchungen dieselbe Machzahl, Reynoldszahl sowie Strömungswinkel am Eintritt der Maschine eingestellt. Wenn der für Luft ausgelegte Verdichter jedoch ohne Geometrieanpassungen mit einem anderen Gas betrieben werden soll, kommt es stromab des Eintritts aufgrund der Kompressibilitätsunterschiede der verschiedenen Gase zu kinematischen Abweichungen in der Strömung. Zur Einstellung der gleichen Kinematik im gesamten Verdichter entwickelte *Hoffmann* eine iterative Methode zur Anpassung der Ringraumquerschnitte. Er zeigte analytisch, dass die Anpassung des Querschnitts allein vom Isentropenexponenten abhängig ist. Aufgrund konstruktiver Beschränkungen ist die Anpassung des Querschnitts nur über die Gehäusekontur möglich. Dies führt dazu, dass der gasspezifische Temperaturaufbau im Verdichter nicht ausgeglichen werden kann und es zu wachsenden Machzahlabweichungen stromab des Eintritts kommt. Diese Machzahlabweichungen vom Gas G im Vergleich zur Referenz Luft L sind ebenfalls allein vom Isentropenexponenten abhängig und betragen im Auslegungspunkt

$M_G/M_L = -7\,\%$ bei Argon und $M_G/M_L = 9{,}5\,\%$ bei Propan. Teile der in *Hoffmann* (2023) vorgestellten Ergebnisse wurden ebenfalls in *Hoffmann et al.* (2020) publiziert.

3.2. Einflüsse auf bewegungsinduzierte aerodynamische Arbeiten

In diesem Abschnitt wird ein Überblick über die Literatur der instationären Profiltheorie gegeben. Darin werden die Grundlagen der Entstehung von instationären aerodynamischen Kräften schwingender Profile potentialtheoretisch betrachtet und analytische Lösungen aufgezeigt. Im Anschluss daran erfolgt der Übergang von Einzelprofilen auf Turbomaschinengitter. Abschließend werden Veröffentlichungen vorgestellt, welche die Auswirkungen unterschiedlicher Kenngrößen auf die aerodynamischen Dämpfungen in Turbomaschinen untersuchen.

3.2.1. Instationäre Profiltheorie

Vor dem Hintergrund einer zunehmenden Anzahl an Flatterereignissen an Tragflügeln wurde in den 1920er-Jahren von *Birnbaum* (1924) ein zweidimensionaler Ansatz zur Berechnung der instationären aerodynamischen Kräfte einer schwingenden ebenen Platte aufgestellt. Basierend auf einem inkompressiblen potentialtheoretischen Ansatz konnte die sich zeitlich verändernde Zirkulation der ebenen Platte berechnet werden. Ebenso entwickelte *Wagner* (1925) theoretische Überlegungen zu den instationären reibungsfreien Kräften, die ein in einem inkompressiblen Medium bewegter Körper erfährt. Er zeigte, dass eine plötzliche Bewegung des Körpers Wirbel verursacht und diese Wirbel wiederum instationäre Kräfte auf den bewegten Körper hervorrufen. Aufbauend auf den Arbeiten von *Wagner* entwickelte *Theodorsen* (1935) eine Methode, die mithilfe konformer Abbildungen die instationären aerodynamischen Kräfte einer in inkompressibler Strömung harmonisch schwingenden ebenen Platte berechnet. Theodorsens Theorie umfasst dabei sowohl Torsions- als auch Translationsschwingungen der ebenen Platte. Zusammen mit den theoretischen Arbeiten von *Küssner* (1936), *Küssner und Schwarz* (1940) und *Schwarz* (1940), die u. a. auf die Ansätze von *Birnbaum* (1924) zurückgreifen, bilden diese Veröffentlichungen die Grundlage der instationären Profiltheorie.

Für kompressible Fluide und Tragflügel endlicher Spannweite wurden diese Theorien in den darauffolgenden Dekaden u. a. von *Reissner* (1949, 1951), *Küssner* (1954, 1967) und *Wille* (1968) erweitert. *Reissner* (1951) zeigte beispielsweise, wie unter Zuhilfenahme von Mathieu-Funktionen die instationären Druckverteilungen und Kräfte einer schwingenden Tragfläche analytisch bestimmt werden. Diese Gleichungen wurden in einer aktuellen Veröffentlichung von *El-Nadi et al.* (2022) angewandt und mit den Ergebnissen reibungsfreier instationärer CFD-Simulationen verglichen. Die instationären aerodynamischen Kräfte eines schwingenden Profils wurden bei den Machzahlen $M = 0{,}35$, $M = 0{,}5$ und

$M = 0{,}6$ für reduzierte Frequenzen[4] im Bereich $0 < k \leq 15$ berechnet. Die analytischen Ergebnisse zeigen eine Abnahme des zirkulatorischen Auftriebs und eine Zunahme des nicht-zirkulatorischen Auftriebs mit steigender reduzierter Frequenz. Der Verlauf des zirkulatorischen Anteils ist machzahlunabhängig bei reduzierten Frequenzen $k \lessapprox 0{,}5$. Bei größeren reduzierten Frequenzen ist ein deutlicher Einfluss der Machzahl erkennbar, jedoch kann kein klarer Trend ausgemacht werden. Der nicht-zirkulatorische Anteil steigt zunächst nahezu machzahlunabhängig mit der reduzierten Frequenz an. Dieser Anstieg endet mit steigenden Machzahlen bei geringeren reduzierten Frequenzen und verläuft danach annähernd konstant. Somit ergibt sich für die Amplituden des nicht-zirkulatorischen Anteils für reduzierte Frequenzen $k \gtrapprox 3$ eine Staffelung mit der Machzahl. Ein Vergleich mit den instationären Kräften der CFD-Simulationen zeigte eine gute Übereinstimmung bei den größeren reduzierten Frequenzen $k > 5$. Bei den reduzierten Frequenzen $k \leq 5$ traten geringfügige quantitative Abweichungen auf. Jedoch wurden auch hier die analytischen Ergebnisse qualitativ durch die CFD-Simulationen bestätigt.

3.2.2. Einflüsse auf die aerodynamischen Dämpfungen in Turbomaschinen

Basierend auf der linearisierten instationären inkompressiblen reibungsfreien Impulsgleichung entwickelte *Whitehead* (1960) eine Methode zur Berechnung der instationären aerodynamischen Kräfte und Momente einer zweidimensionalen Kaskade schwingender ebener Platten. Diese Methode wurde in *Whitehead* (1972) für kompressible Unterschallströmungen erweitert. Mit Berücksichtigung der Kompressibilität wurde die zweidimensionale Schallausbreitung und damit das Phänomen der akustischen Resonanzen ebenfalls mit einbezogen. Für eine Kaskade schwingender Schaufeln mit vorhandener Strömungsumlenkung wurde diese linearisierte Methode in *Verdon und Caspar* (1980) für eine subsonische Strömung und *Verdon und Caspar* (1984) für eine transsonische Strömung erweitert. Die Autoren legten ihre Forschungsergebnisse gesammelt in *Verdon* (1988) und *Whitehead* (1988) dar.

Anders als in der instationären Profiltheorie einzelner Profile kann für die instationäre Druckverteilung bei schwingenden Schaufelkaskaden keine reine analytische Lösung bestimmt werden. Daher sind numerische Ansätze notwendig. Die im Folgenden vorgestellten Veröffentlichungen basieren dabei vor allem auf instationären CFD-Verfahren. Diese Verfahren bieten den Vorteil einer hohen Genauigkeit der Ergebnisse. Nachteilig ist jedoch die erschwerte physikalische Interpretation dieser Ergebnisse. Die in der Literatur durchgeführten Untersuchungen werden nachfolgend in den Kontext des Flatterns und den Kontext aerodynamisch fremderregter Schwingungen eingeteilt.

[4] Die reduzierte Frequenz wird in der Literatur sowohl auf die halbe als auch auf die ganze Sehnenlänge bezogen. Aus Gründen der Einheitlichkeit sind die in diesem Kapitel angegebenen reduzierten Frequenzen bereits auf die in dieser Arbeit verwendete Konvention umgerechnet, d. h. die reduzierte Frequenz bezieht sich auf die gesamte Sehnenlänge.

Untersuchungen im Kontext des Flatterns

Um ein physikalisches Verständnis der Flattermechanismen in Niederdruckturbinen zu erlangen, führten *Corral und Vega* (2016a) numerische Untersuchungen der bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten an einer zweidimensionalen Schaufelkaskade mit der Methode der Einflusskoeffizienten durch. Der Fokus der Untersuchungen lag auf dem Einfluss der reduzierten Frequenz auf die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten und inwiefern dieser Einfluss von der Machzahl und der Eigenform abhängig ist. Da die Untersuchungen mit der Flatterproblematik in Niederdruckturbinen motiviert sind, beschränkt sich der Bereich der betrachteten reduzierten Frequenzen auf $k \leq 0{,}6$. *Corral und Vega* untersuchten die Skalierbarkeit der S-Kurven mittels zweier verschiedener Entdimensionierungen der aerodynamischen Arbeiten. Zum einen wird mit dem dynamischen Druck allein und zum anderen mit dem Produkt des dynamischen Drucks und der reduzierten Frequenz entdimensioniert. Die Biegemode um die flache Kante entspricht im zweidimensionalen einer translatorischen Bewegung in Umfangsrichtung. Für diese Bewegung und eine Machzahl zeigten die Autoren, dass bei sehr kleinen reduzierten Frequenzen, hier $k \leq 0{,}03$, und damit quasi-stationärer Strömung die gesamte S-Kurve mit dem dynamischen Druck skaliert. Ist die Strömung nicht mehr quasi-stationär, skalieren die S-Kurven nicht mehr alleinig mit dem dynamischen Druck und es muss zusätzlich die reduzierte Frequenz in die Skalierung mit einbezogen werden. *Corral und Vega* zeigten daraufhin, dass bei einer Skalierung mit dem dynamischen Druck und der reduzierten Frequenz die S-Kurven aller betrachteten reduzierten Frequenzen bei den IBPA $\sigma = 0°$ und $\sigma = \pm 180°$ exakt skalierbar sind. Als Grund dafür nennen die Autoren, dass der Einflusskoeffizient der schwingenden Schaufel mit dem dynamischen Druck und der reduzierten Frequenz skalierbar ist. Für die übrigen Einflusskoeffizienten gilt dies jedoch nicht. Besonders zeigt sich das an der Skalierbarkeit der S-Kurven bei den kleinen reduzierten Frequenzen von $k \leq 0{,}03$, bei denen erhebliche Abweichungen in den skalierten aerodynamischen Arbeiten bei den übrigen IBPA auftreten. Bei den höheren reduzierten Frequenzen sind diese Abweichungen deutlich geringer. Daraus schlussfolgerten *Corral und Vega*, dass keine direkte globale Skalierung der S-Kurven unter einer Variation der reduzierten Frequenz möglich ist, da jeder Einflusskoeffizient ein anderes Verhalten mit der reduzierten Frequenz aufweist.

Weiterhin wurde in *Corral und Vega* (2016a) der Einfluss der Machzahl auf die Skalierbarkeit der aerodynamischen Dämpfungen mit einer Variation der Austrittsmachzahl von $0{,}185 \leq M \leq 0{,}75$ für die Biegeeigenformen um die flache und steife Kante sowie für die Torsionseigenform untersucht. Die Biegeeigenformen entsprechen im Zweidimensionalen einer translatorischen Bewegung des Schaufelprofils in Umfangsrichtung bzw. axialer Richtung und die Torsionseigenform einer Rotation des Profils um den Mittelpunkt der Profilsehne. *Corral und Vega* zeigten, dass die Machzahl die bewegungsinduzierten Arbeiten bei den verschiedenen Eigenformen unterschiedlich beeinflusst. Dieser eigenformabhängige Einfluss wird von den Autoren auf die jeweils dominant angeregten instationären Wellen zurückgeführt. Die Biegung um die flache Kante verursacht primär zirkulatorische Störungen und damit Wirbelwellen durch Veränderung der Teilung zwischen zwei Schaufeln. Deshalb ist bei dieser Eigenform nahezu kein Einfluss der Machzahl auf die aerodynamischen Arbeiten sichtbar. Außerdem weisen die Autoren

darauf hin, dass aufgrund der geringen Ausprägung der lokalen Extrema der akustischen Resonanzen in der S-Kurve akustische Wellen nur eine untergeordnete Rolle spielen. Im Gegensatz dazu sind diese Extrema in den S-Kurven sowohl bei der Biegeeigenform um die steife Kante als auch der Torsionseigenform deutlich ausgeprägt. Dies bedeutet, dass hier die akustischen Wellen einen größeren Einfluss haben und eine entsprechend größere Abhängigkeit der aerodynamischen Dämpfungen von der Machzahl auftritt. Da *Corral und Vega* jedoch nur kleine reduzierte Frequenzen von $k \leq 0{,}6$ betrachteten, verschieben sich die akustischen Resonanzen durch die Variationen der Machzahl nicht signifikant zu anderen IBPA. Damit sind die Verläufe der S-Kurven trotz unterschiedlicher Machzahlen qualitativ ähnlich zueinander. Insgesamt wurde in der Veröffentlichung der Einfluss der Machzahl jedoch als Nebenaspekt behandelt. So wurde beispielsweise auch auf eine quantitative Bewertung der Skalierbarkeit der S-Kurven unter Machzahlvariation verzichtet.

In *Corral und Vega* (2016b) leiteten die Autoren auf Basis einer Asymptotenbetrachtung der linearisierten instationären Navier-Stokes Gleichungen die Proportionalitäten des bewegungsinduzierten instationären Drucks einer schwingenden zweidimensionalen Schaufel für reduzierte Frequenzen $k \gg 0$ analog zu (2.93) her. Diese Proportionalität wurde bei der zweiten Skalierung in *Corral und Vega* (2016a), d. h. der Skalierung mit dem dynamischen Druck und der reduzierten Frequenz, verwendet. In *Vega und Corral* (2016) zeigten die Autoren schließlich mittels numerischer Simulationen, dass mithilfe dieser Proportionalitäten die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten für reduzierte Frequenzen $k \approx \mathcal{O}(1)$ entdimensioniert werden können. Somit ist eine Skalierung der S-Kurven von zweidimensionalen Verdichter- und Turbinenschaufeln in erster Größenordnung möglich. Eine Variation der Machzahl sowie Untersuchungen zur Skalierbarkeit mit reduzierten Frequenzen $k > 1$ wurden jedoch nicht durchgeführt.

In *Waite und Kielb* (2014) wurde die Flatter-Empfindlichkeit eines zweidimensionalen Niederdruckturbinenprofils numerisch untersucht. Die aerodynamischen Dämpfungen wurden für die drei reduzierten Frequenzen $k = 0{,}2$, $k = 0{,}6$ und $k = 1{,}0$ sowie für zwei verschiedene Eigenformen, Biegung und Torsion, berechnet. Zusätzlich wurde die Machzahl zwischen subsonisch, transsonisch und supersonisch variiert. Bei den betrachteten reduzierten Frequenzen handelt es sich nicht mehr um ein quasi-stationäres System. Dies führt dazu, dass neben den Wirbelwellen auch akustische Wellen einen Teil der bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten induzierten. Aus diesem Grund sind in den Verläufen der S-Kurven ebenfalls lokale Extrema in der Nähe der akustischen Resonanzen sichtbar. Die Autoren verglichen zudem die IBPA der lokalen Extrema in den S-Kurven mit einer analytischen Vorhersage der akustischen Resonanzen nach *Kielb und Kaza* (1983). Diese analytische Formulierung entspricht der in Kapitel 2.4.1 für eine dreidimensionale Schaufelkaskade hergeleiteten Formulierung mit einem Nabenverhältnis $\eta = 1$. Beim Vergleich zwischen Numerik und Analytik stellten *Waite und Kielb* eine gute Übereinstimmung fest. Diese gute Übereinstimmung zeigt schließlich, dass die analytische Vorhersage der IBPA akustischer Resonanzen für zweidimensionale Profile im betrachteten Bereich reduzierter Frequenzen anwendbar ist. Bei den beiden untersuchten Eigenformen traten bei jeweils konstanter Machzahl und reduzierter Frequenz die lokalen Extrema der akustischen Resonanzen in den S-Kurven bei denselben IBPA auf. Diese von den Autoren gewonnene Erkenntnis ist plausibel, da die akustischen Resonanzen allgemein

nur abhängig vom Ringraum, der stationären Strömung und der reduzierten Frequenz sind. Die Eigenform hat dabei lediglich einen Einfluss auf die Stärke der Anregung der jeweiligen akustischen Mode und damit die Ausprägung der lokalen Extrema der S-Kurven. Dieser Zusammenhang spiegelt sich somit auch in den Ergebnissen von *Waite und Kielb* (2014) wider. Bei der Untersuchung des Einflusses der Machzahl auf die S-Kurven wählten *Waite und Kielb* den dynamischen Druck des Austritts zur Normierung der aerodynamischen Arbeiten. Dies führte zwar zu einer Annäherung der S-Kurven der verschiedenen Machzahlen zueinander, jedoch blieben signifikante Abweichungen zwischen den S-Kurven bestehen. Damit zeigten die Autoren, dass die S-Kurven unter sehr großen Variationen der Machzahl vom sub- bis zum supersonischen Bereich nicht mit dem dynamischen Druck skalierbar sind. Weitere Untersuchungen der Abweichungen der bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten bei Variation der Machzahl, wie z. B. eine Analyse der Einflusskoeffizienten, der Betrachtung weiterer Machzahlen oder höherer reduzierter Frequenzen, wurden von *Waite und Kielb* nicht durchgeführt.

Untersuchungen im Kontext aerodynamisch fremderregter Schwingungen

Bei aerodynamisch fremderregten Schaufelschwingungen sind selten kleine, sondern vor allem größere reduzierte Frequenzen von Bedeutung. Damit gewinnen akustische und nicht-zirkulatorische Mechanismen zunehmend an Bedeutung. Wirbelwellen und zirkulatorische Mechanismen spielen nur noch eine untergeordnete Rolle.

Fruth et al. (2016) untersuchten in einer numerischen Studie die Skalierbarkeit der aerodynamischen Dämpfungen eines Radialverdichterlaufrades bei einer Variation der Reynoldszahl. Dazu wurde das Druckniveau variiert, während die Machzahl, die Strömungswinkel und die reduzierte Frequenz konstant blieben. Basierend auf den Proportionalitäten aus *Corral und Vega* (2016b) wurden die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten mit der Dichte skaliert. Es wurde eine nahezu exakte Übereinstimmung der skalierten S-Kurven bei allen untersuchten Reynoldszahlen erreicht. Nur in der Nähe der akustischen Resonanzen traten geringfügige Abweichungen auf. Die Autoren verzichteten jedoch auf eine physikalische Erklärung der Ergebnisse. Allgmeinen sind die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten jedoch hauptsächlich auf reibungsfreie Mechanismen zurückzuführen. Daher sind die mit der Dichte skalierten S-Kurven unabhängig von der Reynoldszahl und die von *Fruth et al.* gezeigten Ergebnisse sind plausibel. Die Einflüsse verschiedener Eigenformen, reduzierter Frequenzen oder Machzahlen wurden von *Fruth et al.* nicht untersucht.

In *Clarkson und Brown* (1985) wurde ein Ansatz vorgestellt, mit dem die aerodynamische Dämpfung von Raumfahrtstrukturen mithilfe der akustischen Impedanz abgeschätzt wurde. Diesen Ansatz griffen *Beirow et al.* (2016) für eine Abschätzung der aerodynamischen Dämpfungen von Turbomaschinenschaufeln bei großen reduzierten Frequenzen auf. Da dabei weder die Interaktion der Schaufeln, noch die Ausbreitung akustischer Wellen im Ringraum berücksichtigt wurden, gelang keine genaue Vorhersage der aerodynamischen Dämpfungen einer experimentell untersuchten Axialverdichterblisk. Aus diesen Gründen konnte auch keine Unterscheidung einzelner IBPA vorgenommen werden. Mit diesem Ansatz gelang es jedoch den Autoren in *Figaschewsky et al.* (2016) die instationäre Druckverteilung einer isoliert schwingenden ebenen Platte bei großen reduzierten Frequenzen

$k \geq 5$ in erster Größenordnung vorherzusagen. Die Vorhersage gelang, da die instationäre Druckverteilung in den betrachteten Fällen nahezu konstant über die Sehnenlänge war und der Ansatz der akustischen Impedanz ebenfalls nur einen konstanten Wert liefert.

Pan et al. (2018) berechneten die aerodynamischen Dämpfungen des dreidimensionalen AETR-Turbinenlaufrades (*Vogt*, 2005) für die erste Biegemode bei der reduzierten Frequenz von $k = 2{,}0$. Mithilfe eines analytischen Modells zur Vorhersage der akustischen Resonanzen im dreidimensionalen Kanal gelang es den Autoren, die lokalen Extrema in der S-Kurve den entsprechenden akustischen Resonanzen zuzuordnen. Anders als bei der zweidimensionalen Betrachtung von *Waite und Kielb* (2014), wurden von *Pan et al.* dreidimensionale akustische Moden mit entsprechenden höheren radialen Modenordnungen berücksichtigt. Die Autoren zeigten somit, dass akustische Resonanzen höherer radialer Modenordnungen $n > 0$ die aerodynamischen Dämpfungen ebenfalls beeinflussen können. Genauere Informationen zum analytischen Modell zur Vorhersage der IBPA der akustischen Resonanzen wurden von *Pan et al.* nicht gegeben. Da die Autoren dazu ebenfalls auf *Tyler und Sofrin* (1962) verweisen, liegt die Vermutung nahe, dass das verwendete Modell zur Vorhersage der akustischen Resonanzen analog zum in Kapitel 2.4.1 vorgestellten Modell ist.

Buchwald et al. (2019) untersuchten numerisch die Skalierbarkeit der aerodynamischen Dämpfungen einer Axialverdichterblisk unter einer Variation der Schaufelzahl. Dazu wurde die Methode der Einflusskoeffizienten im Frequenzbereich verwendet. Die Validität dieser Methode wurde von den Autoren durch einen Vergleich mit der TWM-Methode sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich für den untersuchten Betriebspunkt nachgewiesen. Die aerodynamische Ähnlichkeit wurde bei allen untersuchten Schaufelzahlen beibehalten, indem das Höhen-Seitenverhältnis der Schaufeln variiert wurde. Dadurch wurden zum einen die Eigenfrequenzen und zum anderen die Teilung der Schaufeln verändert. Die Autoren zeigten, dass die Amplituden der Einflusskoeffizienten der schwingenden Schaufel sowohl mit der Eigenfrequenz als auch dem Verhältnis der ursprünglichen Schaufelzahl zur angepassten Schaufelzahl linear skalieren. Die veränderte Teilung verändert zusätzlich die Phasen der Einflusskoeffizienten. Deshalb stellten die Autoren eine vereinfachte, auf einer zweidimensionalen Schaufel basierende, analytische Phasenkorrektur vor und wandten diese an. Damit konnten *Buchwald et al.* zeigen, dass für die betrachtete Eigenform die S-Kurven mehrerer Schaufelzahlen mithilfe der Einflusskoeffizienten einer einzigen Schaufelzahl zufriedenstellend vorhergesagt werden können. Jedoch beschränkten sich die Autoren allein auf einen aerodynamischen Betriebspunkt und eine Schwingungsmode. Deshalb können aus den Studien keine allgemeingültigen Aussagen abgeleitet werden.

3.3. Einordnung und Ziele der Arbeit

Die Veränderungen des aerodynamischen Betriebsverhaltens industrieller Axialverdichter, die mit einem Wechsel des Gases einhergehen wurden von *Hoffmann et al.* (2020) und *Hoffmann* (2023) behandelt. Darauf aufbauend werden in dieser Dissertation die gasbedingten Veränderungen der aerodynamischen Dämpfungen bei aerodynamisch fremderregten Schaufelschwingungen untersucht. Die untersuchte Geometrie ist eine Rotorreihe des von *Hoffmann* betrachteten Verdichters.

In Kapitel 2.5.2 wurde erläutert, dass sich die Resonanzkreuzungen bei einer Veränderung des Gases zu anderen Machzahlen verschieben, während die reduzierten Frequenzen unverändert bleiben. Somit beeinflusst nicht nur das Gas selbst, sondern zusätzlich die veränderte Machzahl die aerodynamischen Dämpfungen. Wie in Kapitel 3.2.2 vorgestellt wurde, ist der Einfluss der Machzahl auf die aerodynamischen Dämpfungen in der Vergangenheit lediglich als Nebenaspekt und vor dem Hintergrund des Flatterns bei kleinen reduzierten Frequenzen $k < 1$ untersucht worden (*Corral und Vega*, 2016a; *Waite und Kielb*, 2014). Weiterhin wurden dabei allein zweidimensionale Profile betrachtet. Effekte der dreidimensionalen Ausbreitung akustischer Wellen im Ringraum wurden somit vernachlässigt. Für fremderregte Schwingungen und damit bei hohen reduzierten Frequenzen $k > 1$ wurde bisher der Einfluss der Reynoldszahl auf die aerodynamischen Dämpfungen untersucht (*Fruth et al.*, 2016). Außerdem wurden vereinfachte Abschätzungen der instationären Drücke zweidimensionaler Einzelprofile vorgestellt, die jedoch die aerodynamische Schaufelkopplung außer Acht lassen (*Beirow et al.*, 2016; *Figaschewsky et al.*, 2016; *El-Nadi et al.*, 2022). Für eine dreidimensionale Geometrie wurden in *Pan et al.* (2018) die akustischen Resonanzen analytisch vorhergesagt und den lokalen Extrema in den S-Kurven zugeordnet. Dabei wurde jedoch auf jegliche Untersuchungen aerodynamischer Einflüsse verzichtet.

In Anbetracht der genannten Problemstellung sowie der aufgezeigten Defizite des bisherigen Forschungsstands werden für diese Arbeit die folgenden Forschungsziele aufgestellt:

1. Bestimmung des isolierten Einflusses des Gases, d. h. des Isentropenexponenten κ und der spezifischen Gaskonstanten R, auf die aerodynamischen Dämpfungen unter Berücksichtigung unterschiedlicher reduzierter Frequenzen und Eigenformen.
2. Bestimmung des isolierten Einflusses der Machzahl auf die aerodynamischen Dämpfungen unter Berücksichtigung unterschiedlicher reduzierter Frequenzen und Eigenformen.
3. Entwicklung einer Methode zur Übertragung der aerodynamischen Dämpfungen eines Gases bei einer Referenzmachzahl auf ein anderes Gas bei einer veränderten Machzahl.
4. Bestimmung der Genauigkeit der entwickelten Methode unter Berücksichtigung unterschiedlicher reduzierter Frequenzen und Eigenformen.

Um die einzelnen Einflüsse bestmöglich bewerten zu können, werden die Einflüsse des Gases und der Machzahl auf die aerodynamischen Dämpfungen entkoppelt betrachtet. Zur Erreichung des ersten Forschungsziels wird in Kapitel 5 der Einfluss unterschiedlicher

Gase mit unterschiedlichen Isentropenexponenten und spezifischen Gaskonstanten bei konstanten Machzahlen untersucht. Dadurch wird der Einfluss der Stoffgrößen isoliert betrachtet. Der Einfluss der Machzahl wird mit dem Gas Luft, d. h. konstanten Stoffgrößen, in Kapitel 6 evaluiert. Bei den Untersuchungen werden die aerodynamischen Dämpfungen in Form der entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten betrachtet. Diese Entdimensionierung ermöglicht eine direkte Bewertung der Skalierbarkeit. In Kapitel 7 wird schließlich eine Methode zur Übertragung der bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten zu anderen Gasen bei anderen Machzahlen entwickelt. Über die Entdimensionierung wird die Skalierung der aerodynamischen Arbeiten bereits in den Kapiteln 5 und 6 berücksichtigt. Für die vollständige Transformationsmethode wird eine machzahlabhängige Phasenverschiebung der Einflusskoeffizienten basierend auf der in *Buchwald et al.* (2019) vorgestellten Methode hergeleitet. Eine Verschiebung der Phasen ist nur aufgrund veränderter Machzahlen notwendig. Daher wird die Transformationsmethode in Kapitel 7 allein auf die Untersuchungen der aerodynamischen Dämpfungen unter Machzahlvariation angewandt und die Übereinstimmung der so vorhergesagten aerodynamischen Arbeiten mit den in Kapitel 6 numerisch berechneten Arbeiten ermittelt.

4. Methodisches Vorgehen

In diesem Kapitel werden nach der verwendeten Referenzgeometrie die numerischen Methoden zur Berechnung der bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten mit der Einflusskoeffizientenmethode vorgestellt. Dazu werden sowohl die strukturmechanischen als auch die strömungsmechanischen Berechnungsverfahren vorgestellt. Zudem wird auf die Auswertung der instationären Strömungssimulationen einschließlich der Berechnung der aerodynamischen Arbeiten eingegangen. Abschließend wird das verwendete Verfahren zur Einstellung der jeweils gewünschten Betriebspunkte zur Untersuchung der Einflüsse des Gases und der Machzahl auf die aerodynamischen Dämpfungen vorgestellt.

4.1. Referenzgeometrie

Diese Arbeit ist im Rahmen eines Forschungsprojekts mit der Firma *MAN Energy Solutions* entstanden. Deshalb wird ein industrieller Axialverdichter dieser Firma untersucht. Aufgrund von proprietären Geometrien und Eigenschaften wird jedoch kein Verdichter der aktuellen Baureihe (*Ziegler et al.*, 2014; *Anding et al.*, 2014) betrachtet. Die untersuchte Geometrie ist stattdessen ein subsonischer achtstufigen Axialverdichter der Vorgängerbaureihe. Diese Baureihe ist u. a. in *Eisenberg* (1994) und *Eisenberg und Voss* (2006) beschrieben. Die untersuchte Maschine wird im Niederdruckteil einer Luftzerlegungsanlage eingesetzt. Im Auslegungspunkt weist der Verdichter bei einer Drehzahl von $n_{\mathrm{R}} = 3000\,1/\mathrm{min}$ einen Volumenstrom von $\approx 540\,000\,m^3/h$ auf. Da der Verdichter als Industrieverdichter unter Fokussierung auf ein breites Kennfeld ausgelegt ist, hat dieser im Auslegungspunkt ein geringes Totaldruckverhältnis von $\Pi_{\mathrm{tt}} \approx 2{,}25$. Der meridionale Querschnitt des Verdichters ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

In dieser Arbeit wird ausschließlich der Rotor der siebten und somit hintersten vollständigen Stufe untersucht. Ein 3D-Modell dieses Rotors ist mit dem dazugehörigen Wellenabschnitt in Abbildung 4.2a abgebildet. In Tabelle 4.1 sind zudem wichtige geo-

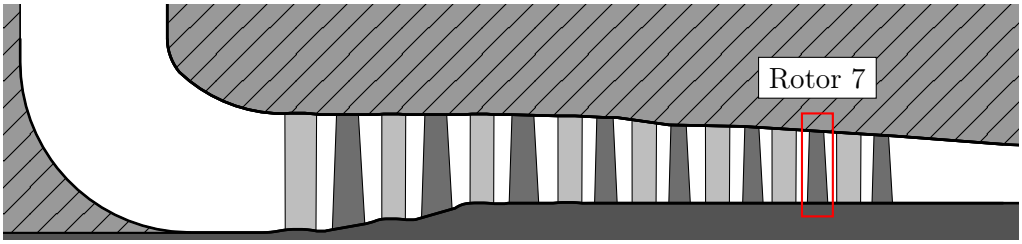
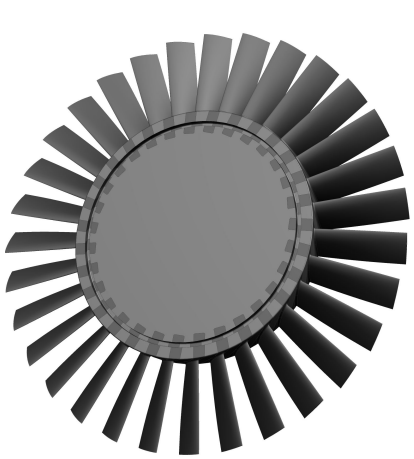
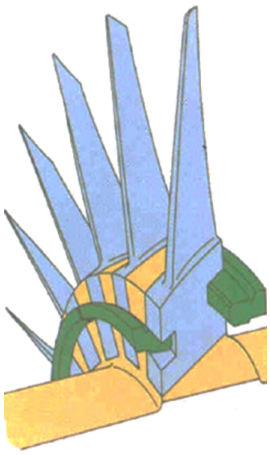


Abbildung 4.1.: Meridionaler Querschnitt des Referenzverdichters mit Markierung des untersuchten Rotors



(a) CAD-Modell des siebten Rotors



(b) Prinzipskizze der Schaufeleinspannung aus *MAN Turbomaschinen AG* (2003)

Abbildung 4.2.: Konstruktive und geometrische Detailansicht des untersuchten Rotors

metrische Daten des Rotors aufgelistet. Die Befestigung der Schaufeln in der Welle ist in der Prinzipskizze in Abbildung 4.2b dargestellt. Die Schaufeln sind in entsprechenden Aussparungen direkt in der Welle montiert und mittels zweier Fixierungsringe zur Fliehkraftaufnahme radial gesichert. Der als Referenz in den nachfolgenden Untersuchungen gewählte Betriebspunkt ist vom Auslegungspunkt des Gesamtverdichters abgeleitet. Wichtige Größen dieses Referenzbetriebspunkts sind für das Gas Luft in Tabelle 4.2 aufgelistet.

Bezeichnung	Symbol	Wert
Schaufelzahl	N	31
Sehnenlänge an der Schaufelspitze	l_{Tip}	0,1 m
Schaufeloberfläche	A	0,049 m^2
Mittlere Schaufelhöhe	h	0,243 m
Radialspalt	h_{Spalt}	0,00155 m
Nabenradius im Ein- und Austritt	r_{n}	0,425 m
Gehäuseradius im Eintritt	$r_{\mathrm{g,ein}}$	0,674 m
Gehäuseradius im Austritt	$r_{\mathrm{g,aus}}$	0,666 m

Tabelle 4.1.: Geometriedaten des verwendeten Referenzrotors

Bezeichnung	Symbol	Wert
Drehzahl	n_{R}	3000 1/min
Eintrittsgeschwindigkeit im Relativsystem	w_{ein}	200 m/s
Austrittsgeschwindigkeit im Relativsystem	w_{aus}	160 m/s
Durchflusskennzahl im Eintritt	ϕ_{ein}	0,576
Eintrittsmachzahl im Relativsystem	$M_{\mathrm{rel,ein}}$	0,52
Reynoldszahl im Eintritt im Relativsystem	$Re_{\mathrm{rel,ein},l_{\mathrm{Tip}}}$	$1{,}36 \cdot 10^6$

Tabelle 4.2.: Daten des gewählten Referenzbetriebspunkts für Luft abgeleitet aus dem Auslegungspunkt des Gesamtverdichters. Die Strömungsgrößen entsprechen dabei den flächengemittelten Werten.

4.2. Berechnung der bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten

Zur Berechnung der bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten für alle IBPA wird in dieser Arbeit die Methode der Einflusskoeffizienten verwendet. Diese Methode basiert auf der Betrachtungsweise der Einflusskoeffizienten, die bereits in Kapitel 2.2.2 vorgestellt wurde. Das Vorgehen zur Berechnung der Einflusskoeffizienten und schließlich der S-Kurven ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Für die ausgewählte Schaufelgeometrie werden zunächst die Eigenformen und -frequenzen der Schaufel mit einer vorgespannten

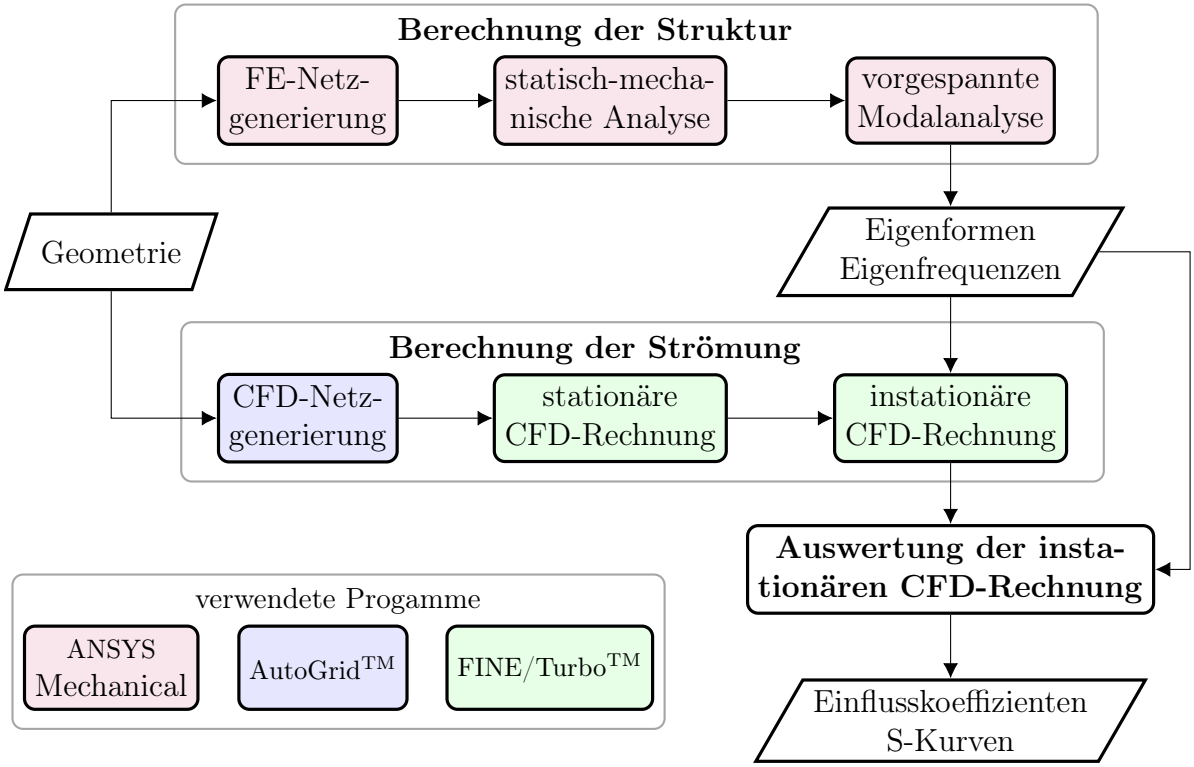


Abbildung 4.3.: Ablauf der numerischen Berechnungen zur Bestimmung der bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten als Einflusskoeffizienten und S-Kurven

numerischen Modalanalyse bestimmt. Diese Berechnung der Struktur wird in Kapitel 4.2.1 beschrieben. Für die Berechnung der Strömung mittels CFD wird die betrachtete Schaufelreihe mit *AutoGrid*^{TM} vernetzt. Da bei der Methode der Einflusskoeffizienten nur eine Schaufel der Reihe schwingt, unterscheidet sich die instationäre Strömung in den einzelnen Schaufelpassagen. Deshalb wird die Reihe über den gesamten Umfang betrachtet und es werden entsprechend alle Schaufelpassagen diskretisiert. Die stationäre und instationäre Strömung wird schließlich mit *FINE/Turbo*^{TM} berechnet. Ausgehend von der Lösung der stationären CFD-Rechnung wird in der instationären CFD-Rechnung die Fluid-Struktur-Interaktion simuliert. Dabei wird das CFD-Netz an der Schaufeloberfläche mit der Eigenform und Eigenfrequenz verformt und so die instationären Störungen induziert. Dieses Vorgehen wird auch als *Ein-Wege-Kopplung* bezeichnet, da keinerlei Rückkopplung von den instationären Fluidkräften auf die Schaufelschwingung berücksichtigt wird. Die Berechnung der Strömung einschließlich des verwendeten CFD-Netzes wird in Kapitel 4.2.2 detailliert vorgestellt. Die aerodynamischen Arbeiten als Einflusskoeffizienten und die S-Kurven werden schließlich in einer Auswertung der Druckschwankungen auf allen Schaufeln der Reihe ermittelt. Diese Auswertemethode wird in Kapitel 4.2.3 erläutert.

4.2.1. Berechnung der Struktur

Um die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten zu berechnen, werden zunächst die Eigenfrequenzen und -formen ermittelt. Für die untersuchte Rotorschaufel werden die Eigenfrequenzen und -formen mit einer numerischen Modalanalyse bestimmt. In den folgenden Abschnitten werden die dazu durchgeführten Berechnungen und deren Ergebnisse vorgestellt.

Berechnungseinstellungen und Vorgehen

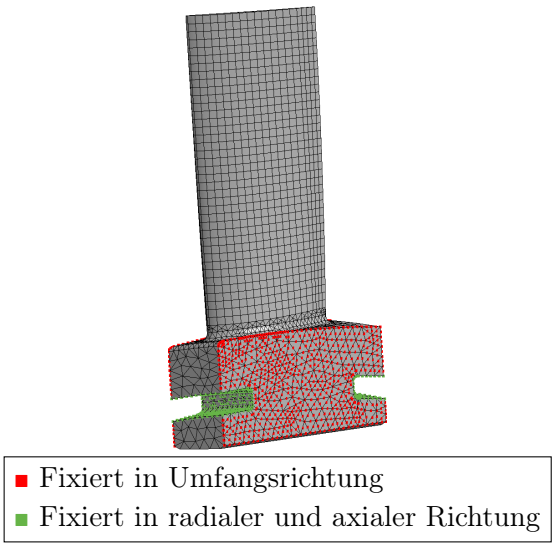


Abbildung 4.4.: FE-Netz der Rotorschaufel inklusive markierter Knoten der Einspannung

Für die numerische Modalanalyse wird das FEM-Programm *ANSYS Mechanical 2020 R2* verwendet. Die Fliehkraftversteifung, Spin Softening sowie die Temperaturverformung wird in einer vorgeschalteten linearen statisch-mechanischen Analyse berechnet. In der ungedämpften Modalanalyse wird der in der statisch-mechanischen Analyse bestimmte Spannungs- und Verformungszustand berücksichtigt. Als Material wird eine proprietäre Stahllegierung mit einem linear von der Temperatur abhängigen E-Modul verwendet. Da die Schaufeln fest in der Vollwelle verspannt sind, ist bei dieser Bauweise die Kopplung der Schaufelmoden über die Welle vernachlässigbar gering. Aus diesem Grund wird auf eine zyklisch-symmetrische Modellierung verzichtet

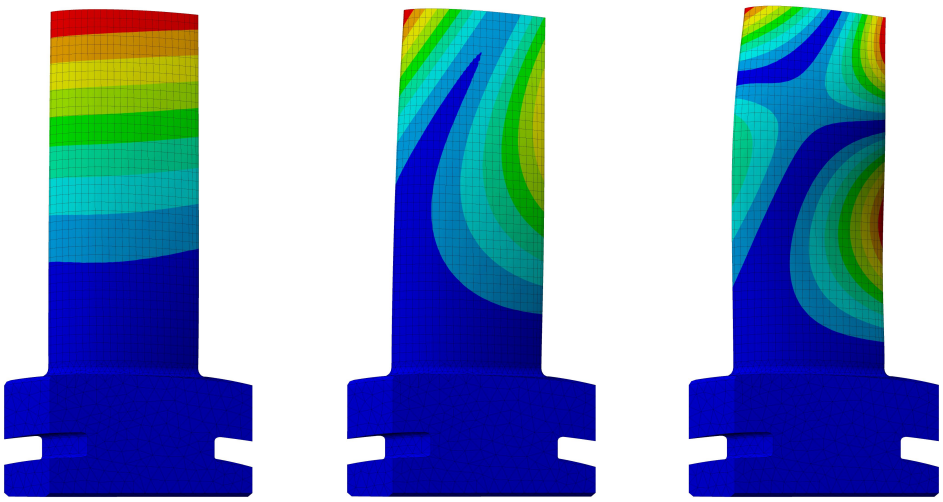
und angenommen, dass die Moden über alle Knotendurchmesser konstant in Form und Frequenz sind.

Die Einspannung der Schaufel in der Welle wird mittels Fixierung des Schaufelfußes in Umfangsrichtung an den Seitenflächen sowie in radialer und axialer Richtung an den Aussparungen für die Fixierungsringe modelliert. In Abbildung 4.4 ist die diskretisierte Schaufel mit Markierungen der aufgeprägten Randbedingungen der Einspannung dargestellt. Zur Diskretisierung der Schaufelgeometrie inklusive des Schaufelfußes werden $\approx 20\,000$ Elemente verwendet. Das Schaufelblatt selbst ist mit quadratischen Hexaeder-Elementen vernetzt, um eine möglichst hohe Netzqualität bei gleichzeitig geringer Elementanzahl zu erreichen. Die Fillets und der Schaufelfuß sind aufgrund der komplexen Geometrie mit quadratischen Tetraeder-Elementen vernetzt.

Strukturmechanische Schaufelmoden der Referenzgeometrie

Aus der numerischen Modalanalyse mit den im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Einstellungen ergeben sich die Eigenfrequenzen und -formen der untersuchten Rotorschaufel. Da in dieser Arbeit keine spezifischen Resonanzkreuzungen betrachtet werden, werden die Moden für die Untersuchungen alle bei der Auslegungsdrehzahl des Luftverdichters von 3000 1/min berechnet.

Die verwendeten Schaufelmoden sind in Abbildung 4.5 dargestellt. Als fundamentale Biege- und Torsionsmoden werden die Biegemode um die flache Kante erster Ordnung (1F) und die Torsionsmode erster Ordnung (1T) verwendet. Diese werden aufgrund der geringen Frequenzen typischerweise von geringen Erregerordnungen, wie z. B. durch Einlaufstörungen, angeregt. Mit der Torsionsmode zweiter Ordnung (2T) wird zusätzlich eine Mode betrachtet, die typischerweise von höheren Erregerordnungen angeregt wird, wie z. B. durch die Nachläufe oder Potentialfelder benachbarter Reihen.



(a) 1F, $k_{\text{ein}} = 0{,}65$ **(b)** 1T, $k_{\text{ein}} = 2{,}37$ **(c)** 2T, $k_{\text{ein}} = 5{,}87$

Abbildung 4.5.: Für die Untersuchungen ausgewählte Eigenformen und zugehörige reduzierte Frequenzen im Auslegungspunkt

4.2.2. Berechnung der Strömung

In diesem Abschnitt werden die verwendeten numerischen Methoden zur Berechnung der stationären und instationären Strömung sowie der strukturmechanischen Kopplung und deren Einstellungen näher vorgestellt. Untersuchungsübergreifend wird der Strömungslöser FINE™/Turbo 16.1 der Firma *Cadence* verwendet. Außerdem wird das Rechennetz präsentiert, welches mit AutoGrid™ 5 der Firma *Cadence* erstellt wird.

Berechnung der stationären Strömung

Als Startlösung der instationären Berechnungen dienen stationäre Simulationen bei denen die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen gelöst werden. Die Turbulenz wird mit dem Modell von *Spalart und Allmaras* (1994) mit der Erweiterung von *Ashford und Powell* (1996) approximiert. Weiterhin wird von einer vollturbulenten Strömung ausgegangen und auf die Verwendung eines Transitionsmodells verzichtet. Für die Berechnung der Grenzschicht wird der Low-Reynoldszahlansatz verwendet. Die Temperaturabhängigkeit der Viskosität wird über das Sutherland-Modell berücksichtigt (*Sutherland*, 1893).

In allen Untersuchungen werden die Gase als kalorisch perfekt modelliert. Die Änderung der Wärmekapazitäten wird vernachlässigt, da nur ein Rotor betrachtet wird und der Temperaturaufbau innerhalb des betrachteten Rechengebiets entsprechend gering ausfällt. In einer Voruntersuchung mit temperaturabhängiger Wärmekapazität wurde ermittelt, dass selbst für langkettige Kohlenwasserstoffe wie Propan die Veränderung der spezifischen Wärmekapazität geringer als 0,5 % ausfällt. Alle Wände der betrachteten Reihe werden als adiabat und viskos modelliert. Als Randbedingungen für die stationären und instationären Rechnungen werden im Eintritt der Totaldruck und die Totaltemperatur vorgegeben. Am Eintritt wird die Strömungsrichtung als axial definiert, d.h. ohne radiale Komponente und Umfangskomponente. Am Austritt wird der statische Druck als Randbedingung vorgegeben. Das verwendete Turbulenzmodell erfordert die Angabe der Turbulenzintensität am Eintritt. Bei allen durchgeführten Rechnungen wird für die Turbulenzintensität $T_\mathrm{u} = 0{,}001$ am Eintritt vorgegeben.

Berechnung der instationären Strömung

Da es sich bei den Störungen im Strömungsfeld durch eine schwingende Schaufel um harmonische Störungen handelt, wird die instationäre Strömung im Frequenzbereich berechnet. In dieser Arbeit wird die erstmalig von *He und Ning* (1998) vorgestellte nicht-lineare harmonische Methode (NLH) verwendet. Für eine detaillierte Ausführung der in FINE™/Turbo implementieren NLH-Methode sei an dieser Stelle auf *Vilmin et al.* (2006, 2013) verwiesen.

Um die bewegungsinduzierten Druckschwankungen zu berechnen, müssen die Störungen in der numerischen Strömungsberechnung induziert werden. Zu diesem Zweck wird die Oberfläche der schwingenden Schaufel mit der zu untersuchenden Eigenform und -frequenz der Schaufel harmonisch verformt. Dazu werden die mit der Modalanalyse bestimmten Eigenformen auf das CFD-Netz der Schaufeloberfläche interpoliert. Um bei einer Verformung des Netzes an der Schaufeloberfläche die Netzqualität zu erhalten,

muss ebenfalls das die Schaufel umgebende Netz verformt werden. Dazu wird das in FINE^{TM}/Turbo implementierte *Inverse Distance Weighting* (Abk. IDW) Verfahren angewendet. Ausgehend von der Verschiebung der Oberflächenknoten werden bei diesem Verfahren die verschobenen Positionen aller weiteren Netzknoten mithilfe von Gewichtungsfunktionen bestimmt. Die lokale Verformung der Schaufeloberfläche wird so auf das gesamte CFD-Netz übertragen. Damit wird gewährleistet, dass die Netzqualität auch für das verformte Netz weitestgehend erhalten bleibt. Zu ausführlichen Erläuterungen sei an dieser Stelle auf *Witteveen* (2010) und *Luke et al.* (2012) verwiesen.

Da die harmonische Schaufelbewegung die einzige in den Untersuchungen dieser Arbeit betrachtete Störung ist, wird allein die jeweils eingestellte Frequenz der Schaufelschwingung in der NLH-Methode berücksichtigt. Weiterhin wird bei allen Untersuchungen die maximale Amplitude der Verformung der Schaufel zu 1 % der Sehnenlänge an der Schaufelspitze gesetzt.

Auswahl und Diskretisierung des Rechengebietes

Das Rechengebiet, das für alle Berechnungen in dieser Arbeit verwendet wird, ist in der meridionalen Ansicht in Abbildung 4.6 dargestellt. Das Gebiet umfasst allein den Rotor der siebten Stufe und ist durch die beiden Auswerteebenen 1 und 2 begrenzt. Diese Auswerteebenen befinden sich mittig zwischen dem Rotor und seinen benachbarten Statorreihen. Der Ringraum zwischen den beiden Ebenen wird dem realen Verdichter entnommen. Zur Vermeidung numerischer Reflexionen am Ein- und Austritt wird das betrachtete Rechengebiet zusätzlich um Dämpfungskanäle mit reibungsfreien Wänden vor und hinter der Schaufel erweitert (*Müller et al.*, 2018). Diese Dämpfungskanäle sind ebenfalls in Abbildung 4.6 dargestellt.

Die Geometrie wird mit der Software *AutoGrid^{TM} 5* strukturiert vernetzt. Dabei wird die Schaufelpassage als O4H-Topologie diskretisiert. Zur Vernetzung der Fillets wird der Butterfly-Ansatz verwendet. Die Dämpfungskänale werden mit H-Blöcken diskretisiert. Aus der in Anhang A vorgestellten Netzunabhängigkeitsstudie ergibt sich das bei allen Untersuchungen verwendete Netz. In Abbildung 4.7 ist dieses Netz in drei unterschiedlichen Ansichten abgebildet. Das Netz besteht aus $\approx$ 500 000 Zellen pro Passage, was $\approx$ 15,5 Mio. Zellen beim 360°-Netz entspricht. Der Dämpfungskanal weist ein axiales Expansionsverhältnis von $ER \approx 1{,}2$ auf. Um große Höhen-Seitenverhältnisse von $AR > 3\,000$ nahe der Kanalwände der Dämpfungskanäle zu vermeiden, werden die

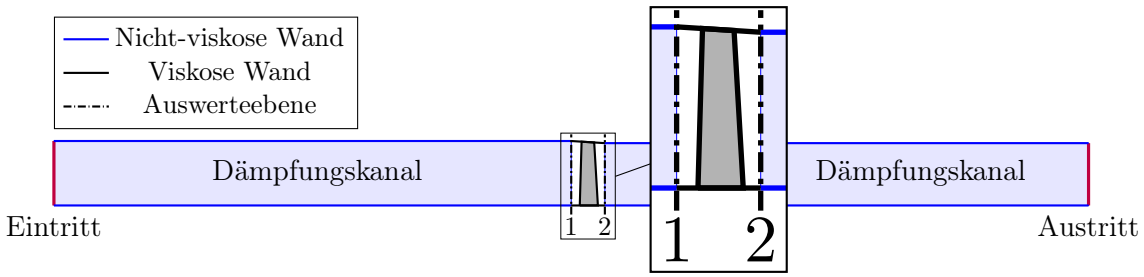
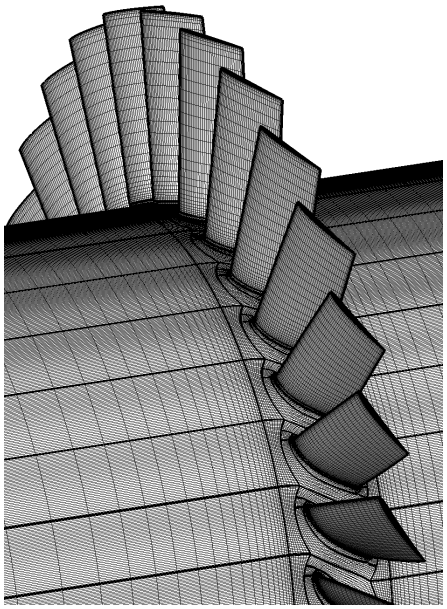
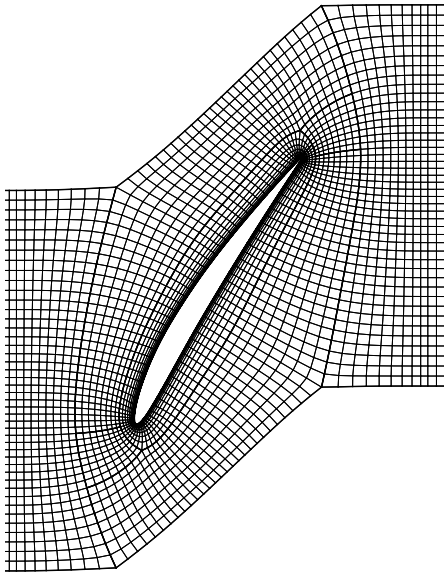


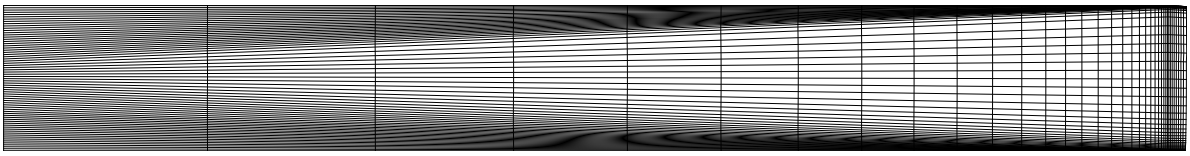
Abbildung 4.6.: Meridionale Ansicht des untersuchten Rechengebiets mit dem Rotor der siebten Stufe sowie den Auswerteebenen 1 stromauf und 2 stromab des Rotorgitters



(a) 360°-Netz der rotierenden Wände



(b) Netz in radialer Schnittebene bei 75 % Kanalhöhe



(c) Meridionalansicht des Netzes des Dämpfungskanals stromauf der Schaufel

Abbildung 4.7.: Übersicht des verwendeten Netzes von Rotor 7

Zellknoten in radialer Richtung am Ein- und Austritt äquidistant verteilt. Dies ist zulässig, da in den Dämpfungskanälen aufgrund der reibungsfreien Naben- und Gehäusewände keine Grenzschichten aufgelöst werden müssen. Die Grenzschichten im reibungsbehafteten Ringraum des Rotors werden durch eine Verdichtung der Zellen in radialer Richtung an Nabe und Gehäuse ausreichend aufgelöst. Diese radialen Verläufe der Zellen stromauf des Rotors werden in der meridionalen Ansicht in Abbildung 4.7c deutlich. Mit einem Wandabstand von $y = 5 \cdot 10^{-6}$ liegt der durchschnittliche dimensionslose Wandabstand im Referenzbetriebspunkt bei $y^+ \approx 1{,}3$. Das Maximum des dimensionslosen Wandabstands tritt im Bereich der Vorderkante der Saugseite im Geschwindigkeitsmaximum auf und beträgt $y^+ \approx 5$. Der Fokus der Untersuchungen dieser Arbeit liegt jedoch auf den bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten, die primär durch nicht-viskose Effekte induziert werden. Aus diesem Grund werden y^+-Werte größer eins zugunsten einer geringen Zellanzahl mit möglichst hoher Netzqualität in Kauf genommen. Weiterhin werden die akustischen Wellen bei der größten betrachteten reduzierten Frequenz $k_1 = 5{,}87$, d. h. kleinsten Wellenlängen, mit ≥ 25 Zellen pro Wellenlänge in Umfangsrichtung aufgelöst. Damit wird das Kriterium von mindestens 20 Zellen pro Wellenlänge eingehalten (*Schnell*, 2004).

Die Netzqualität des verwendeten Netzes wird anhand der Orthogonalität, des Höhen-Seitenverhältnisse sowie des Expansionsverhältnisses der Zellflächen beurteilt. In Tabel-

le 4.3 sind diese Parameter für das verwendete Netz aufgelistet. Die Kriterien werden für mindestens 99% aller Zellflächen erfüllt und eine hohe Netzqualität ist somit gewährleistet.

Parameter	Kriterium	Erfüllungsquote	Durchschnitt	Extremwert
Orthogonalität	> 20	100 %	86,1°	27,7°
Höhen-Seitenverhältnis	< 1000	99,6 %	56	3016
Expansionsverhältnis	$< 2{,}5$	99,7 %	1,24	4,31

Tabelle 4.3.: Geometrische Qualitätsparameter des verwendeten Netzes

4.2.3. Auswertung der instationären Strömungssimulation

In diesem Abschnitt werden Verfahren vorgestellt, die bei der Auswertung der instationären Simulationen angewandt werden. Diese Verfahren sind die Berechnung der bewegungsinduzierten Arbeiten als Einflusskoeffizienten und S-Kurven sowie des Korrelationskoeffizienten zur Quantifizierung der qualitativen Übereinstimmung zweier S-Kurven.

Berechnung der bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten

Bei den instationären Simulationen werden mithilfe des verformten Netzes die instationären Störungen induziert und die instationäre Strömung berechnet. Die Ergebnisse dieser Simulationen beinhalten somit auch die instationären Drücke auf den Oberflächen der Schaufeln. Aus diesen Druckfluktuationen werden schließlich die aerodynamischen Arbeiten ermittelt. Bei der NLH-Methode werden die instationären Größen im Frequenzbereich bestimmt. Deshalb werden die aerodynamischen Arbeiten ebenfalls im Frequenzbereich nach (2.66) berechnet. Da im CFD-Netz die Oberflächenelemente diskrete Flächen sind, werden die aerodynamischen Arbeiten anstelle der Integration durch eine Summation über alle Oberflächenelemente bestimmt. Die aerodynamischen Arbeiten werden somit über

$$W = \Re\left(-j\pi \sum_{l=1}^{N_\mathrm{A}} \underline{\vec{\hat{x}}}_l \cdot \underline{\hat{p}}_l \vec{n}_l A_l\right). \tag{4.1}$$

berechnet, wobei A_l der Flächeninhalt des einzelnen Oberflächenelements l ist.

Analog der in Kapitel 2.2.2 vorgestellten Betrachtungsweisen des aerodynamisch gekoppelten Systems lassen sich die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten über alle IBPA mithilfe zweier verschiedener Verfahren bestimmen: Dem *TWM*- und dem *Einflusskoeffizientenverfahren*. In dieser Arbeit wird das Einflusskoeffizientenverfahren angewandt, das erstmalig von *Hanamura et al.* (1980) vorgestellt wurde. Mit diesem Verfahren wird auf einem 360°-Netz eine einzige schwingende Schaufel genutzt, um die gesamte Dämpfungskurve für alle IBPA zu berechnen. Dazu werden die aerodynamischen Arbeiten in Einflusskoeffizientennotation für jede Schaufel i nach (4.1) berechnet. Das instationäre Druckfeld der jeweils betrachteten Schaufel i wird auf die Eigenform der schwingenden Schaufel $i = 0$ projiziert. Über eine inverse Fouriertransformation analog

zu (2.58) werden die bewegungsinduzierten Arbeiten in der Indizierung der umlaufenden Eigenform o mit

$$\underline{W}_o = \sum_{i=0}^{N-1} \underline{W}_i e^{-j\frac{2\pi io}{N}} \tag{4.2}$$

bestimmt. Die S-Kurven in der Indizierung der Knotendurchmesser ν werden schließlich über (2.41) berechnet.

Berechnung des instationären Druckfelds in TWM-Notation

Zur Visualisierung der Wellen die bei Schaufelschwingungen sich mit einem bestimmten IBPA im Strömungskanal ausbreiten, muss das Druckfeld in TWM-Notation vorliegen. Da die Druckfelder aus den Simulationen jedoch nur in der Notation der Einflusskoeffizienten vorliegen, muss das instationäre Druckfeld in TWM-Notation für eine Schaufelpassage l analog zu (2.58) mit

$$\underline{p}_{o,l}(x,r,\vartheta) = \sum_{i=0}^{N-1} \underline{p}_i(x,r,\vartheta) e^{-j\frac{2\pi o}{N}(i+l)} \tag{4.3}$$

berechnet werden. Für die Vergleichbarkeit der in den Einflussuntersuchungen betrachteten Druckfelder werden diese Drücke zudem mit dem flächengemittelten dynamischen Druck in der Auswerteebene 1 entdimensioniert.

Vergleich bewegungsinduzierter aerodynamischer Arbeiten

Die aerodynamischen Arbeiten werden in den Ergebniskapiteln als Einflusskoeffizienten und S-Kurven ausschließlich entdimensioniert nach (2.94) betrachtet. Somit kann in den Auswertungen die Skalierbarkeit der S-Kurven und Amplituden der Einflusskoeffizienten mit den Proportionalitätsfaktoren aus (2.93) direkt bewertet werden. Zur quantitativen Bewertung der Skalierbarkeit der S-Kurven wird für jeden IBPA σ_o einer S-Kurve die relative Abweichung zur Referenz

$$\breve{\Theta}_o\left(\Theta_o, \Theta_{o,\mathrm{ref}}\right) = \frac{\Theta_o}{\Theta_{o,\mathrm{ref}}} - 1 \tag{4.4}$$

gebildet. In den Auswertungen werden dabei vor allem die Extremwerte $\min\left\{\breve{\Theta}_o\right\}$ und $\max\left\{\breve{\Theta}_o\right\}$ sowie das arithmetische Mittel

$$\overline{\breve{\Theta}}\left(\{\Theta_o\}, \{\Theta_o\}_{\mathrm{ref}}\right) = \frac{1}{N}\sum_{o=0}^{N-1} \breve{\Theta}_o\left(\Theta_o, \Theta_{o,\mathrm{ref}}\right) \tag{4.5}$$

betrachtetet.

Um die gesamten Verläufe von zwei S-Kurven miteinander zu vergleichen, wird der *Korrelationskoeffizient* r_{K} verwendet. Dieser ist ein Maß für den linearen Zusammenhang zweier Reihen von Datenpunkten und ist somit zur Quantifizierung der Ähnlichkeit der Verläufe zweier Kurven geeignet. Der Korrelationskoeffizient wird mit den entdimen-

sionierten aerodynamischen Arbeiten Θ_o für alle IBPA σ_o sowie dem Mittelwert aller entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten $\overline{\Theta}$ mit

$$r_{\mathrm{K}}\left(\{\Theta_o\},\{\Theta_o\}_{\mathrm{ref}}\right)=\frac{\sum_{o=0}^{N-1}\left(\Theta_o-\overline{\Theta}\right)\left(\Theta_{o,\mathrm{ref}}-\overline{\Theta}_{\mathrm{ref}}\right)}{\sqrt{\sum_{o=0}^{N-1}\left(\Theta_o-\overline{\Theta}\right)^2\cdot\sum_{o=0}^{N-1}\left(\Theta_{o,\mathrm{ref}}-\overline{\Theta}_{\mathrm{ref}}\right)^2}} \tag{4.6}$$

gebildet. Ein vollständig positiver bzw. negativer linearer Zusammenhang besteht bei einem Wert $r_{\mathrm{K}}=1$ bzw. $r_{\mathrm{K}}=-1$. Keinerlei Zusammenhang liegt bei $r_{\mathrm{K}}=0$ vor. Wenn also der Korrelationskoeffizient zweier S-Kurven den Wert $r_{\mathrm{K}}=1$ aufweist, stimmen deren Verläufe qualitativ exakt miteinander überein.

4.3. Vorgehen zur Isolation der Einflüsse

Für die entkoppelte Analyse der Einflüsse des Gases und der Machzahl auf die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten werden die beiden Einflüsse isoliert. In Tabelle 4.4 ist diesbezüglich dargestellt, welche Stoffgrößen und Ähnlichkeitskennzahlen bei den beiden Einflussuntersuchungen jeweils variiert ($\neq$) bzw. konstant ($=$) gehalten werden. Die Betriebspunkte mit den gewünschten Ähnlichkeitskennzahlen werden schließlich über eine Anpassung der als variabel ($\neq$) gekennzeichneten Randbedingungen eingestellt. Für die Ähnlichkeitskenngrößen werden immer die umfangsgemittelten Werte im Mittelschnitt der in Abbildung 4.6 definierten Auswerteebene 1 verwendet. Die anzupassenden Randbedingungen im Eintritt $T_{\mathrm{t,ein}}$ und $p_{\mathrm{t,ein}}$ entsprechen massengemittelten Werten. Die Randbedingung im Austritt p_{aus} entspricht einem flächengemittelten Wert. Im Folgenden wird das Vorgehen zur Einstellung der gewünschten Ähnlichkeitskenngrößen und die dafür erforderliche Einstellung der Betriebspunkte näher erläutert.

			Einflussuntersuchung	
		Größen	**Gas**	**Machzahl**
Ermittlung durch Auswertung	**Ähnlichkeitskennzahlen**	M_1	$=$	$\neq$
		Re_1	$=$	$=$
		ϕ_1	$=$	$=$
		k_1	$=$	$=$
Vorgabe der Simulationen	**Gas**	κ, R	$\neq$	$=$
	weitere Randbedingungen	$T_{\mathrm{t,ein}}$	$=$	$\neq$
		$p_{\mathrm{t,ein}}$	$\neq$	$\neq$
		p_{aus}	$\neq$	$\neq$
		n_{R}	$\neq$	$=$
		ω	$\neq$	$=$

Tabelle 4.4.: Übersicht konstanter ($=$) und variabler ($\neq$) Ähnlichkeitskennzahlen, Stoffgrößen und Betriebspunktgrößen für die Untersuchungen der isolierten Einflüsse von Gas und Machzahl auf die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten

Im ersten Schritt wird die Machzahl M eingestellt. Das Vorgehen dazu wird direkt aus der Definition der Machzahl, dem Verhältnis von Strömungsgeschwindigkeit zu Schallgeschwindigkeit

$$M = \frac{w}{a} = \frac{w}{\sqrt{\kappa R T}} \tag{4.7}$$

abgeleitet. Die Machzahl ist somit sowohl über eine Variation der Strömungsgeschwindigkeit w, der Stoffgrößen κ, R als auch der Temperatur T veränderbar.

Für die Untersuchung des isolierten Gaseinflusses auf die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten verändert sich durch die unterschiedlichen Stoffgrößen auch die Schallgeschwindigkeit $a = \sqrt{\kappa R T}$. Aufgrund der verschiedenen Schallgeschwindigkeiten werden die Strömungsgeschwindigkeiten angepasst, um die Machzahl konstant zu halten. Dazu wird die Umfangsgeschwindigkeit $u = 2\pi r n_\mathrm{R}$ bei konstanter Eintrittstotaltemperatur über die Drehzahl n_R sowie mit Hilfe der Isentropenbeziehung zwischen statischer Temperatur und Totaltemperatur mit

$$n_\mathrm{R} = n_\mathrm{R,ref} \frac{\sqrt{\kappa R T}}{\sqrt{\kappa_\mathrm{ref} R_\mathrm{ref} T_\mathrm{ref}}} = n_\mathrm{R,ref} \frac{\sqrt{\kappa R}}{\sqrt{\kappa_\mathrm{ref} R_\mathrm{ref}}} \frac{\left(1 + \frac{\kappa_\mathrm{ref} - 1}{2} M_\mathrm{1,ref}^2\right)^{0,5}}{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_1^2\right)^{0,5}} \tag{4.8}$$

verändert und so zunächst die Umfangsmachzahl der Schaufel eingestellt.

Bei der Untersuchung des Einflusses der Machzahl auf die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten sind die Stoffgrößen konstant. Um trotz der gewünschten Variation der Machzahl eine konstante Drehzahl und damit konstante Strömungsgeschwindigkeiten zu erhalten, erfolgt eine Variation der Schallgeschwindigkeit über die Eintrittstemperatur mit

$$T_\mathrm{t,ein} = T_\mathrm{t,ein,ref} \left(\frac{M_\mathrm{1,ref}}{M_1}\right)^2 \frac{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_1^2\right)}{\left(1 + \frac{\kappa_\mathrm{ref} - 1}{2} M_\mathrm{1,ref}^2\right)} \tag{4.9}$$

bei Beibehaltung der Stoffgrößen.

Zusätzlich zum eingestellten Machzahlniveau ist eine konstante Reynoldszahl für alle Rechnungen zu gewährleisten. Die Reynoldszahl wird mit

$$Re = \frac{\rho w l}{\eta} = \frac{p w l}{R T \eta} \tag{4.10}$$

gebildet. Dabei entspricht η der dynamischen Viskosität. Um Reynoldsähnlichkeit zu erhalten, wird mithilfe von (4.10) und der Isentropenbeziehung der Totaldruck am Eintritt mittels

$$\frac{p_{\mathrm{t,ein}}}{p_{\mathrm{t,ein,ref}}} = \frac{w_{\mathrm{ref}}}{w} \frac{RT_{\mathrm{t,ein}}\eta}{R_{\mathrm{ref}}T_{\mathrm{t,ein,ref}}\eta_{\mathrm{ref}}} \frac{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_1^2\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}}{\left(1 + \frac{\kappa_{\mathrm{ref}} - 1}{2} M_{1,\mathrm{ref}}^2\right)^{\frac{1}{\kappa_{\mathrm{ref}} - 1}}} \tag{4.11}$$

bestimmt. Die Veränderung der Viskosität wird dabei mit dem Sutherland-Modell berechnet (*Sutherland*, 1893).

Die Umfangsmachzahl wurde bereits über (4.8) bzw. (4.9) eingestellt. Für eine konstante Durchflusskennzahl

$$\phi = \frac{w_a}{u} = \frac{M_a}{M_u} \tag{4.12}$$

muss zusätzlich die axiale Machzahl M_a über den statischen Druck am Austritt angepasst werden. Eine erste Abschätzung für den Austrittsdruck wird analog zu (4.11) mit

$$\frac{p_{\mathrm{aus}}}{p_{\mathrm{aus,ref}}} = \frac{w_{1,\mathrm{ref}}}{w_1} \frac{RT_1\eta}{R_{\mathrm{ref}}T_{1,\mathrm{ref}}\eta_{\mathrm{ref}}} \tag{4.13}$$

ermittelt. Eine genaue Einstellung der axialen Machzahl und damit der Durchflusskennzahl erfolgt schließlich über eine iterative Anpassung des statischen Drucks am Austritt. Nach jeder iterativen Berechnung der stationären Strömung wird die Durchflusskennzahl im Mittelschnitt in der Auswerteebene 1 ermittelt. Die Differenz zur Referenz wird für die nächste Iteration manuell in eine Änderung des Gegendrucks übertragen, da diese Änderung je nach Gas und Machzahl verschieden ist. Sobald die Durchflusskennzahl weniger als 0,1 % von der Referenz abweicht, ist die Anpassung der Durchflusskennzahl und damit der Strömungswinkel abgeschlossen.

Bei den Untersuchungen zum Einfluss des Gases auf die bewegungsinduzierten aerodynamischen Dämpfungen wurde bisher allein die aerodynamische Ähnlichkeit eingestellt. Für aeroelastische Ähnlichkeit muss zudem die reduzierte Frequenz konstant bleiben. Durch die unterschiedlichen Drehzahlen sind jedoch die Strömungsgeschwindigkeiten verschieden. Daher wird die Schwingungskreisfrequenz der Schaufel ω in Abhängigkeit der Geschwindigkeit und damit der Drehzahl mit

$$\omega = \omega_{\mathrm{ref}} \frac{n_{\mathrm{R}}}{n_{\mathrm{R,ref}}} \tag{4.14}$$

angepasst. Bei den Untersuchungen zum Einfluss der Machzahl auf die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten ist eine Anpassung der Frequenz nicht notwendig, da dabei die Strömungsgeschwindigkeiten und somit die reduzierte Frequenz konstant gehalten werden.

Insgesamt ermöglicht das beschriebene Vorgehen zur Einstellung des Betriebspunkts, dass bei den einzelnen Untersuchungen dieser Arbeit der jeweils zu untersuchende Einfluss isoliert betrachtet wird.

5. Einfluss des Gases

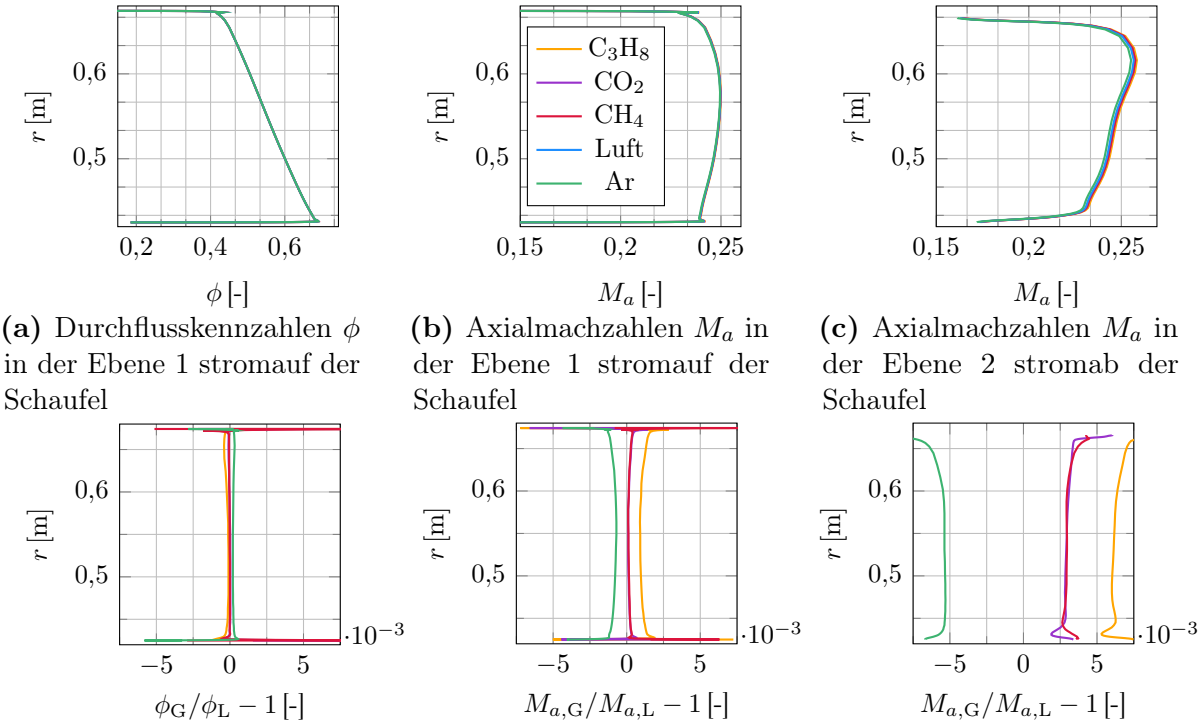
In diesem Abschnitt wird der isolierte Einfluss des Gases, d. h. des Isentropenexponenten κ und der spezifischen Gaskonstante R, auf die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten untersucht. Neben dem Referenzgas Luft (L) werden Kohlenstoffdioxid (CO_2) und Methan (CH_4) untersucht, da diese eine hohe praktische Relevanz haben. Die einzige Stoffgröße, die den Temperaturaufbau im Verdichter beeinflusst, ist nach (2.110) der Isentropenexponent. Aus diesem Grund werden zusätzlich Propan (C_3H_8) mit einem kleinen Isentropenexponenten und Argon (Ar) mit einem großen Isentropenexponenten untersucht, um einen möglichst großen Wertebereich an Isentropenexponenten in den Untersuchungen zu berücksichtigen. Weiterhin wird die Mach'sche, Reynold'sche, kinematische und aeroelastische Ähnlichkeit zum Referenzbetriebspunkt aus Tabelle 4.2 eingestellt. Diese Einstellung erfolgt für den Mittelschnitt der Auswerteebene 1 nach dem in Kapitel 4.3 dargelegten Vorgehen. Um den Gaseinfluss bei unterschiedlichen Eigenformen und reduzierten Frequenzen zu ermitteln, werden die Untersuchungen für die drei in Abbildung 4.5 dargestellten Eigenformen bei ihren jeweiligen Eigenfrequenzen durchgeführt. In Tabelle 5.1 sind für die untersuchten Gase die Stoffgrößen, die Drehzahl sowie die Verhältnisse der Eigenkreisfrequenzen aufgeführt, mit dem die reduzierten Frequenzen konstant gehalten werden.

Gas	κ [-]	R [J/kgK]	n_R [rpm]	ω/ω_L
Luft	1,4	289	3000	1
C_3H_8	1,1	189	2176	0,73
CO_2	1,26	189	2318	0,77
CH_4	1,27	518	3854	1,28
Ar	1,66	208	2775	0,93

Tabelle 5.1.: Übersicht über die Stoffwerte der Gase, die daraus resultierenden Werte für die Drehzahl n_R und das für eine konstante reduzierte Frequenz einzustellende Verhältnis der Eigenkreisfrequenzen der Schaufelschwingung

5.1. Ergebnisse der stationären Simulationen

Zuerst wird die Einstellung kinematischer und Mach'scher Ähnlichkeit der stationären Simulationen der unterschiedlichen Gase überprüft. In Abbildung 5.1b und 5.1e sind dazu die umfangsgemittelten radialen Verteilungen der axialen Machzahlen in der Auswerteebene 1 dargestellt. Die relativen Abweichungen der Axialmachzahlen sind im Bereich von 2 % bis 97 % der Schaufelhöhe kleiner als 0,15 % und damit vernachlässigbar. Auch



(a) Durchflusskennzahlen ϕ in der Ebene 1 stromauf der Schaufel

(b) Axialmachzahlen M_a in der Ebene 1 stromauf der Schaufel

(c) Axialmachzahlen M_a in der Ebene 2 stromab der Schaufel

(d) Rel. Abweichungen der Durchflusskennzahlen ϕ_G bezogen auf die Durchflusskennzahlen von Luft ϕ_L in der Ebene 1 stromauf der Schaufel

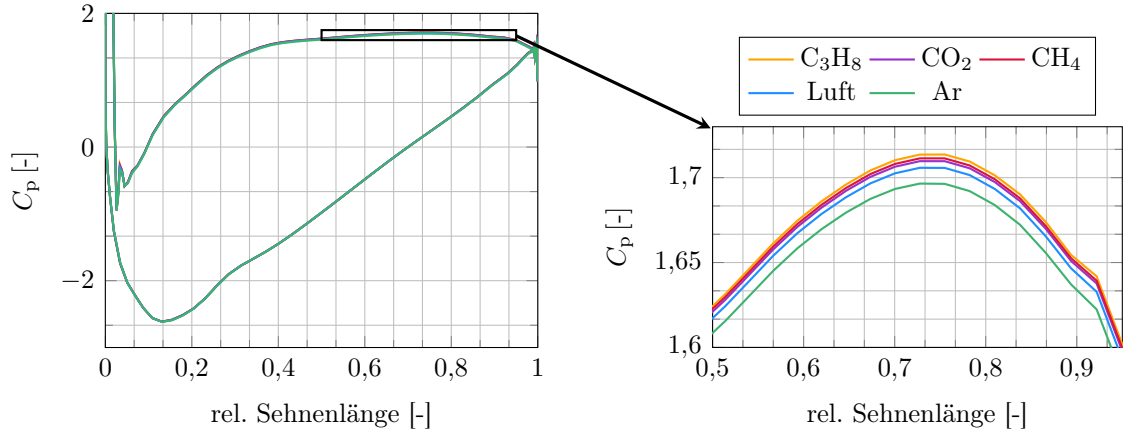
(e) Rel. Abweichungen der Axialmachzahlen $M_{a,G}$ bezogen auf die Axialmachzahlen von Luft $M_{a,L}$ in der Ebene 1 stromauf der Schaufel

(f) Rel. Abweichungen der Axialmachzahlen $M_{a,G}$ bezogen auf die Axialmachzahlen von Luft $M_{a,L}$ in der Ebene 2 stromab der Schaufel

Abbildung 5.1.: Umfangsgemittelte radiale Verteilungen verschiedener aerodynamischer Ähnlichkeitskenngrößen in der Ebene 1 stromauf und in der Ebene 2 stromab der Schaufel

die radialen Verläufe der in Abbildung 5.1a und Abbildung 5.1d dargestellten, in der Auswerteebene 1 umfangsgemittelten Durchflusskennzahlen weisen im Bereich von 2 % bis 98 % der Schaufelhöhe mit kleiner 0,04 % nur vernachlässigbare Abweichungen auf. Aus den radialen Verläufen stromauf der Schaufel kann somit geschlossen werden, dass die Schaufel bei allen Gasen aerodynamisch ähnlich angeströmt wird.

In Abbildung 5.1c und 5.1f wird jedoch ersichtlich, dass in der Auswerteebene 2 stromab der Schaufel Abweichungen in der Axialmachzahl über alle Radien von bis zu ±0,6 % auftreten. Diese Abweichungen sind auf den unterschiedlichen Temperaturaufbau der Stufe unter Variation des Gases zurückführen, wie es für eine Stufe gemäß Abschnitt 2.5.1 mit Gleichung 2.110 beschrieben wird. Da die Umfangsgeschwindigkeit über die Schaufel konstant bleibt, ändern sich unter Berücksichtigung der Euler'schen Turbinengleichung die Strömungswinkel und damit die Axialmachzahl. Da der Temperaturaufbau primär abhängig vom Isentropenexponenten ist, sind die Abweichungen in den Axialmachzahlen stomab der Schaufel nach dem Isentropenexponenten gestaffelt. Die Axialmachzahlen der Gase CO_2 und CH_4 mit ähnlichen Isentropenexponenten $\kappa_{CO_2} = 1{,}26$ bzw. $\kappa_{CH_4} = 1{,}27$,



(a) Druckbeiwert bei 75% Schaufelhöhe

(b) Vergrößerung des in Abbildung 5.2a markierten hinteren Bereichs der Druckseite

Abbildung 5.2.: Druckbeiwertverteilung C_p der verschiedenen Gase bei eingestellter Mach'scher Ähnlichkeit stromauf der Schaufel

aber deutlich unterschiedlichen spezifischen Gaskonstanten $R_{CO_2} = 189\,\mathrm{J/(kgK)}$ bzw. $R_{CH_4} = 518\,\mathrm{J/(kgK)}$, sind daher nahezu identisch.

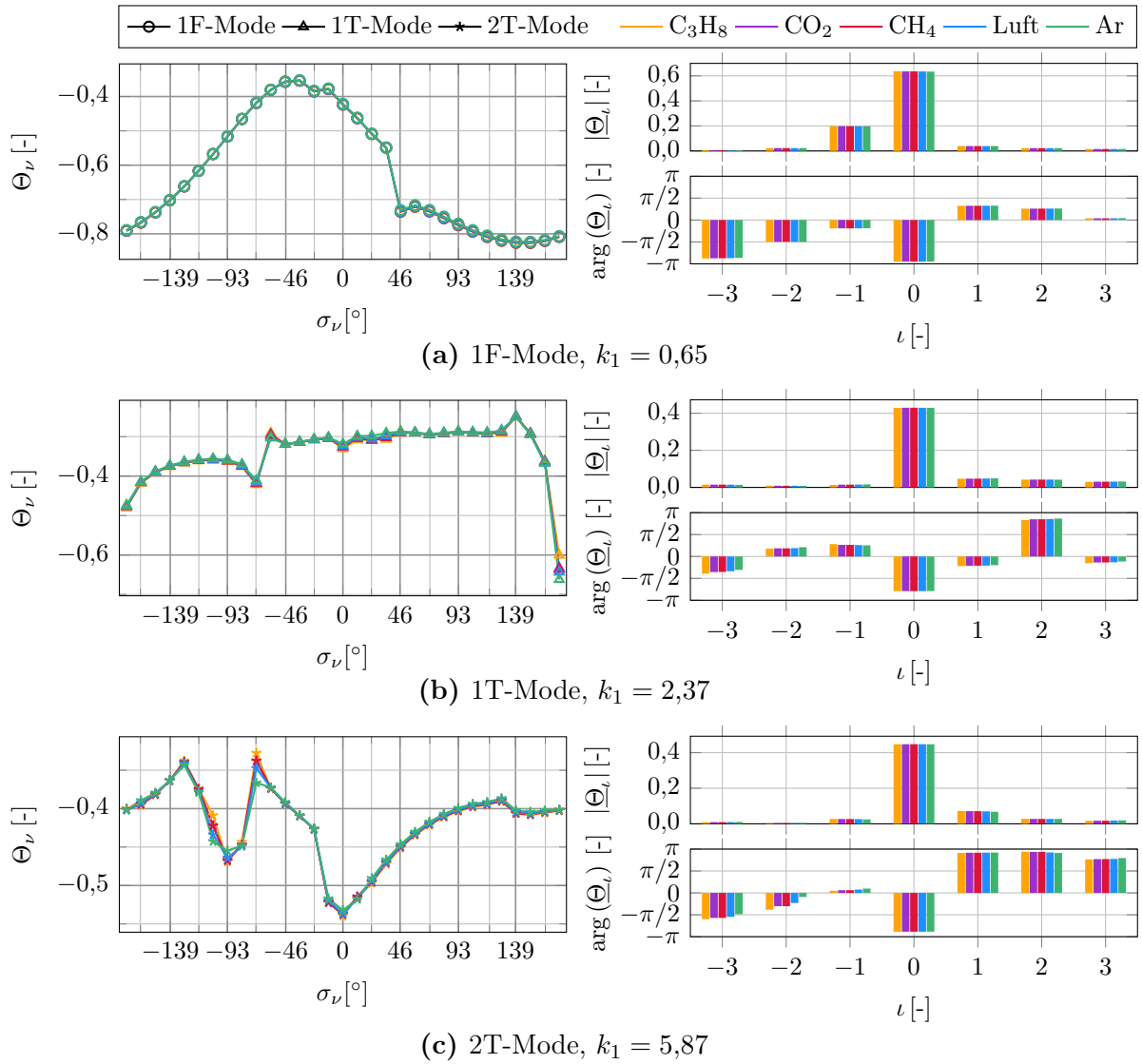
Werden zusätzlich die Verteilungen der Druckbeiwerte

$$C_p = \frac{p - p_1}{\frac{1}{2}\rho w_1^2} \tag{5.1}$$

über der Schaufel in 75 % der Schaufelhöhe in Abbildung 5.2 betrachtet, stimmen die Verläufe aller Gase in erster Größenordnung überein. Erst in der Vergrößerung in Abbildung 5.2b werden auf der hinteren Hälfte der Druckseite Abweichungen deutlich. Diese Abweichungen sind in derselben Größenordnung, wie die festgestellten Machzahlabweichungen am Austritt.

5.2. Analyse der entdimensionierten aerodynamischen Arbeit

Mit der eingestellten aerodynamischen Ähnlichkeit wird in diesem Abschnitt schließlich der Einfluss des Gases auf die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten untersucht. Die aerodynamischen Arbeiten werden dazu aus den Ergebnissen der instationären Strömungssimulationen mit den in Kapitel 4.2.3 vorgestellten Auswerteverfahren bestimmt. Für alle untersuchten Eigenformen mit den dazugehörigen Eigenfrequenzen sind für alle Gase die entdimensionierten S-Kurven über alle IBPA links in Abbildung 5.3 dargestellt. Da sowohl die Geometrie als auch die reduzierte Frequenz konstant bleibt, zeigt die Entdimensionierung nach (2.94) direkt die Skalierbarkeit mit dem dynamischen Druck. Zusätzlich sind die Einflusskoeffizienten auf den rechten Seiten in Abbildung 5.3 in entdimensionierter Amplitude und Phase über die Schaufelindizes $-3 \leq \iota \leq 3$ dargestellt.



(a) 1F-Mode, $k_1 = 0{,}65$

(b) 1T-Mode, $k_1 = 2{,}37$

(c) 2T-Mode, $k_1 = 5{,}87$

Abbildung 5.3.: Nach (2.94) entdimensionierte aerodynamische Arbeiten Θ der unterschiedlichen Gase und Schaufelmoden bei jeweils konstanter reduzierter Frequenz k_1. Dargestellt als S-Kurven Θ_ν für alle IBPA σ_ν (links) sowie als Einflusskoeffizienten Θ_ι der Schaufelindizes $-3 \leq \iota \leq 3$ in Amplitude $|\underline{\Theta}_\iota|$ und Phase $\arg(\underline{\Theta}_\iota)$ (rechts).

In den in Abbildung 5.3a dargestellten S-Kurven der 1F-Mode treten zwischen den untersuchten Gasen keine Unterschiede auf. Die Korrelationskoeffizienten aller Gase bezogen auf Luft sind $r_\mathrm{K} = 1$ und die mit (4.4) bestimmten relativen Abweichungen zwischen den S-Kurven betragen maximal 0,4 % im Betrag. Ebenso treten keine Abweichungen zwischen den verschiedenen Gasen in den Amplituden und Phasen der Einflusskoeffizienten auf. Der primäre Grund dafür ist, dass aufgrund der geringen reduzierten Frequenz von $k_1 = 0{,}65$ die Wirbelwellen die aerodynamische Schaufelkopplung dominieren (siehe auch Kapitel 2.4). Da Wirbelwellen sich konvektiv, und damit entgegen der Rotationsrichtung ausbreiten, sind die Amplituden der Einflusskoeffizienten der Schaufel $\iota = -1$ mit $|\underline{\Theta}_{\iota=-1}| \approx 0{,}3|\underline{\Theta}_{\iota=0}|$ deutlich größer als die Amplituden der Einflusskoeffizienten aller anderen nicht schwingenden Schaufeln. Aufgrund der konvektiven Ausbreitung der Wir-

belwellen haben die geringen Machzahlabweichungen der stationären Strömung stromab der Schaufel somit keine Auswirkungen auf die induzierten instationären Schaufeldrücke.

Auch die Verläufe der S-Kurven der Torsionsmoden links in den Abbildungen 5.3b und 5.3c weisen nahezu keine Unterschiede zwischen den Gasen auf. Die größten Unterschiede zu den Verläufen von Luft treten bei Propan mit den kleinsten Korrelationskoeffizienten für die 1T-Mode $r_\mathrm{K} = 0{,}995$ und die 2T-Mode $r_\mathrm{K} = 0{,}992$ auf. Sichtbare Abweichungen zwischen den Gasen in den S-Kurven treten allein für wenige IBPA in der Umgebung der lokalen Extrema der akustischen Resonanzen auf. Die maximalen relativen Abweichungen zu Luft weisen ebenfalls die S-Kurven von Propan auf. Diese mit (4.4) bestimmten maximalen Abweichungen betragen $\breve{\Theta}_{o_{|\mathrm{L}}} = -6{,}6\,\%$ für die 1T-Mode und $\breve{\Theta}_{o_{|\mathrm{L}}} - 5{,}8\,\%$ für die 2T-Mode. Insgesamt weisen die S-Kurven der Torsionsmoden im Vergleich zur 1F-Mode mehr lokale Extrema und damit mehr akustische Resonanzen auf. Zudem sind die lokalen Extrema der S-Kurven der Torsionsmoden stärker ausgeprägt und die Verläufe unterscheiden sich somit deutlich von einem idealen Sinus. Diese Verläufe der S-Kurven lassen darauf schließen, dass bei den Torsionsmoden mit ihren höheren reduzierten Frequenzen die akustischen Wellen die aerodynamische Schaufelkopplung dominieren. Diese Dominanz akustischer Wellen bestätigen ebenfalls die Einflusskoeffizienten rechts in den Abbildungen 5.3b und 5.3c. Die Amplituden der Einflusskoeffizienten der nicht-schwingenden Schaufeln sind mit $\approx 0{,}1|\underline{\Theta}_{\iota=0}|$ gering. Auch fallen die Amplituden mit steigendem Abstand zur schwingenden Schaufel $\iota = 0$ und damit steigendem Betrag des Schaufelindex ι weniger stark ab als bei der 1F-Mode. Dieses beobachtete Verhalten kann nur von akustischen Wellen verursacht werden, die sich auch entgegen der Strömung ausbreiten. Dadurch können auch die Machzahlabweichungen stromab der Schaufel die instationären Schaufeldrücke beeinflussen. Dieser Einfluss ist jedoch gering, da die Einflusskoeffizienten der unterschiedlichen Gase sowohl in Amplitude als auch Phase sehr gut übereinstimmen. Kleine Abweichungen zwischen den Gasen treten dabei primär in den Phasen der Einflusskoeffizienten der Schaufeln mit negativen Indizes auf. Die auf Luft bezogenen größten Abweichungen weist dabei Propan bei der 2T-Mode und der Schaufel $\iota = -2$ mit -0.49 Radiant auf.

An dieser Stelle kann festgehalten werden, dass der isolierte Einfluss des Gases auf die entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten in der ersten Größenordnung vernachlässigbar ist. In zweiter Größenordnung treten jedoch in den S-Kurven Abweichungen nahe den lokalen Extrema der akustischen Resonanzen auf. Zur tiefgehenden Analyse dieser Abweichungen wird daher die Ausbreitung der jeweils angeregten akustischen Moden in die Untersuchungen mit einbezogen. Mithilfe von (2.107) werden die akustischen Resonanzen im Ein- und Austritt der Rotorstufe berechnet. Als Referenzwerte werden die flächengemittelten Größen in den Auswerteebenen 1 für den Eintritt und 2 für den Austritt verwendet. Die reduzierte Frequenz im Austritt wird mithilfe von (2.104) auf die reduzierte Frequenz im Eintritt umgerechnet. In Abbildung 5.4 sind die reduzierten Frequenzen der akustischen Resonanzen der radialen Modenordnungen $0 \leq n \leq 2$ über den IBPA aufgetragen. Da die Machzahl im Eintritt unabhängig vom Gas konstant ist, treten die akustischen Resonanzen im Eintritt für alle Gase bei denselben IBPA und reduzierten Frequenzen auf. Im Austritt unterscheidet sich die Machzahl bei den unterschiedlichen Gasen. Daher sind die Verläufe der akustischen Resonanzen im Austritt für jedes Gas einzeln in Abbildung 5.4 eingezeichnet. Zusätzlich sind in Abbildung 5.4

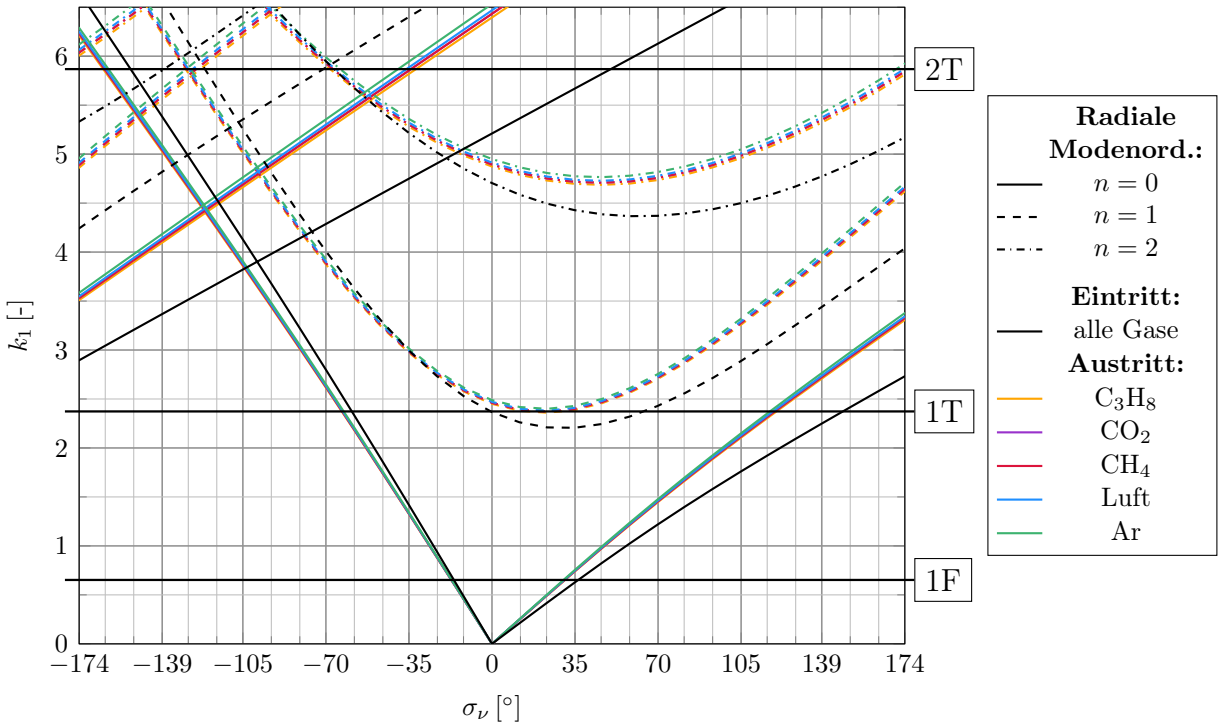


Abbildung 5.4.: Mit (2.107) berechnete reduzierte Frequenzen k der akustischen Resonanzen mit unterschiedlichen radialen Modenordnungen n. Aufgetragen über den IBPA σ_ν. Im Eintritt für alle Gase zusammen und im Austritt für jedes Gas einzeln. Die reduzierten Frequenzen im Austritt k_2 wurden mit (2.104) auf die reduzierten Frequenzen im Eintritt k_1 umgerechnet.

die untersuchten reduzierten Frequenzen als horizontale Linien markiert. Mithilfe dieser Vorhersage der akustischen Resonanzen werden in den folgenden Abschnitten die Verläufe der S-Kurven und insbesondere die Abweichungen zwischen den unterschiedlichen Gasen für jede untersuchte Schwingungsmode einzeln analysiert.

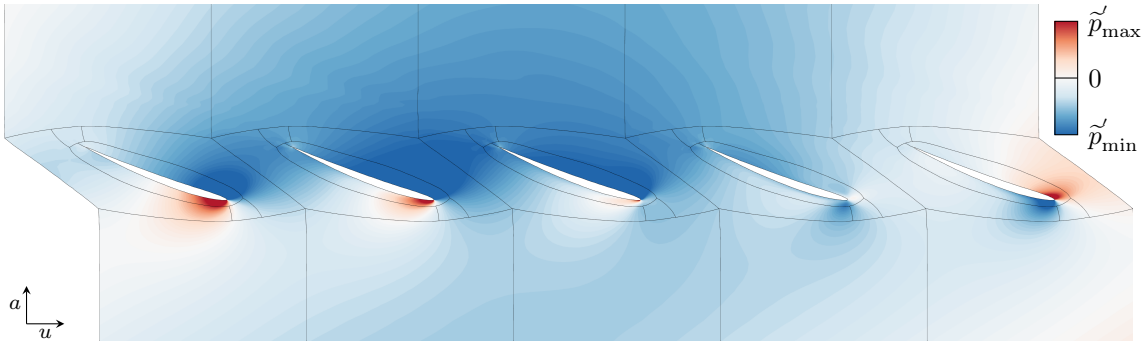
5.2.1. 1F-Mode

Im vorherigen Abschnitt wurde festgestellt, dass für die 1F-Mode keine Abweichungen in den entdimensionierten S-Kurven zwischen den Gasen auftreten. Diese sehr gute Übereinstimmung ist auf die geringe reduzierte Frequenz $k_1 = 0{,}65$ und die damit verbundene Dominanz der Wirbelwellen bei der aerodynamischen Schaufelkopplung zurückzuführen. Akustische Wellen sind hierbei jedoch nicht vollständig abwesend, sondern beeinflussen die aerodynamische Schaufelkopplung zu einem kleinen Teil. Dieser Einfluss akustischer Wellen verursacht die zwei schwach ausgeprägten lokalen Extrema der akustischen Resonanzen in den S-Kurven links in Abbildung 5.3a bei den IBPA $\sigma_\nu = -23°$ und $\sigma_\nu = 46°$.

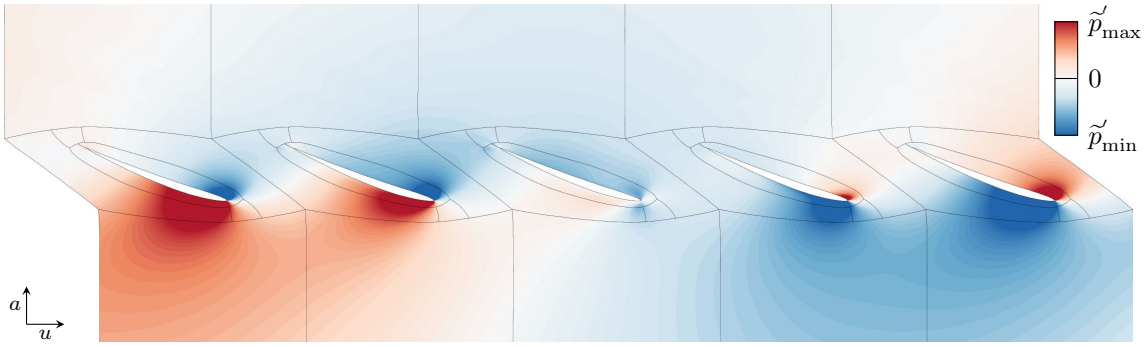
Bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ sind nach Abbildung 5.4 nur akustische Resonanzen mit radialer Modenordnung $n = 0$ ausbreitungsfähig. Weiterhin treten die akustischen Resonanzen des Ein- und Austritts bei ähnlichen IBPA auf. Für die negativen Azimutal-

modenordnungen unterscheiden sich die IBPA der akustischen Resonanzen um $\Delta\sigma \approx 1°$. Dieser Unterschied ist deutlich geringer als der von der Schaufelzahl abhängige Abstand zweier aufeinanderfolgender tatsächlich schwingender IBPA mit $|\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu| = 11{,}61°$. Daher tritt in den S-Kurven links in Abbildung 5.3a bei negativen IBPA nur ein lokales Extremum auf. Dieses Extremum ist zudem schwach ausgeprägt, da die entsprechenden akustischen Resonanzen im Ein- und Austritt nahezu mittig zwischen den beiden tatsächlich schwingenden IBPA $\sigma_\nu = -12°$ und $\sigma_\nu = -23°$ auftreten.

Bei positiven Azimutalmodenordnungen tritt in den S-Kurven ebenfalls nur ein lokales Extremum beim IBPA $\sigma_\nu = 46°$ auf, obwohl die Differenz der IBPA der akustischen Resonanzen im Ein- und Austritt mit $\Delta\sigma \approx 9°$ in derselben Größenordnung liegt, wie der Abstand zweier aufeinanderfolgender tatsächlich schwingender IBPA $|\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu| = 11{,}6°$. Weiterhin werden in Abbildung 5.4 die akustischen Resonanzen des Ein- und Austritts in der Nähe des IBPA $\sigma_\nu = 35°$ vorhergesagt. Um die Ursachen für das Auftreten des lokalen Extremums in der S-Kurve bei $\sigma_\nu = 46°$ und nicht bei $\sigma_\nu = 35°$ zu analysieren sind in Abbildung 5.5 die mit (4.3) umgerechneten Realteile des instationären Drucks in TWM-Notation in einer radialen Ebene in 85 % der Schaufelhöhe für die IBPA $\sigma_\nu = 35°$ und $\sigma_\nu = 46°$ dargestellt. Beim IBPA $\sigma_\nu = 35°$ in Abbildung 5.5a deuten die nahezu axialen Verläufe der Wellenfronten stromab der Schaufeln darauf hin, dass dieser IBPA in der Nähe des IBPA der akustischen Resonanz im Austritt liegt. Trotz dieser Nähe zur



(a) Luft, $\sigma_\nu = 35°$



(b) Luft, $\sigma_\nu = 46°$

Abbildung 5.5.: Mit (4.3) in TWM-Notation umgerechnete Realteile des entdimensionierten instationären Drucks von Luft für die 1F-Mode und ausgewählte IBPA in der radialen Schnittebene in 85 % der Schaufelhöhe

Resonanz im Austritt, weist die S-Kurve in diesem IBPA $\sigma_\nu = 35°$ jedoch kein Extremum auf. Der Grund dafür ist, dass bei der 1F-Mode mit der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ primär die konvektiv transportierten Wirbelwellen die instationären Drücke induzieren. Durch den konvektiven Transport treffen diese Wirbelwellen ebenso wie die akustischen Wellen, die sich nahe der Resonanz des Austritts befinden, auf den Druckseiten der Schaufeln auf. Dies führt dazu, dass bei diesem IBPA, genau wie bei den anderen IBPA die nicht in der Nähe einer akustischen Resonanz liegen, die größten Druckamplituden an den Druckseiten der Schaufeln auftreten. Diese großen Druckamplituden an den Druckseiten sind in Abbildung 5.5a deutlich zu erkennen. Somit unterscheiden sich die induzierten instationären Schaufeldrücke nicht signifikant zu denen bei den IBPA mit größerem Abstand zur akustischen Resonanz, wie z. B. $\sigma_\nu = 23°$, und die S-Kurven weisen bis zu $\sigma_\nu = 35°$ einen stetigen Verlauf und damit kein lokales Extremum auf. Die Wellenfronten beim IBPA $\sigma_\nu = 46°$ stromauf der Schaufeln in Abbildung 5.5b weisen einen spitzeren Winkel zur axialen Richtung auf, als es beim IBPA $\sigma_\nu = 35°$ der Fall ist. Damit wird deutlich, dass der IBPA $\sigma_\nu = 46°$ näher an der akustischen Resonanz im Eintritt liegt, wodurch die größten instationären Drücke an der Saugseite und nicht der Druckseite auftreten. Aus diesem Grund unterscheidet sich das instationäre Druckfeld der Schaufeln bei diesem IBPA $\sigma_\nu = 46°$ deutlich von den Druckfeldern der übrigen IBPA und in der S-Kurve tritt schließlich ein deutlich ausgeprägtes lokales Extremum auf.

Mit diesen Analysen kann zudem auch die gute Übereinstimmung der entdimensionierten S-Kurven der verschiedenen Gase links in Abbildung 5.3a erklärt werden. Aufgrund der niedrigen reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ dominieren beim Großteil der IBPA die konvektiv transportierten Wirbelwellen, wodurch die größten instationären Druckamplituden auf der Druckseite der Schaufeln auftreten. Akustische Wellen haben nur einen sichtbaren Einfluss auf die entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten, wenn sie sich nahezu wie eine akustische Mode in Resonanz ausbreiten. Aus den oben genannten Gründen liegen die einzigen beiden lokalen Extrema der S-Kurven der 1F-Mode in der Nähe der akustischen Resonanzen des Eintritts. Da die stationäre Strömung sich zwischen den Gasen jedoch nur im Austritt und nicht im Eintritt unterscheidet, weisen die entdimensionierten S-Kurven in den IBPA nahe dieser akustischen Resonanzen des Eintritts keine Unterschiede zwischen den Gasen auf.

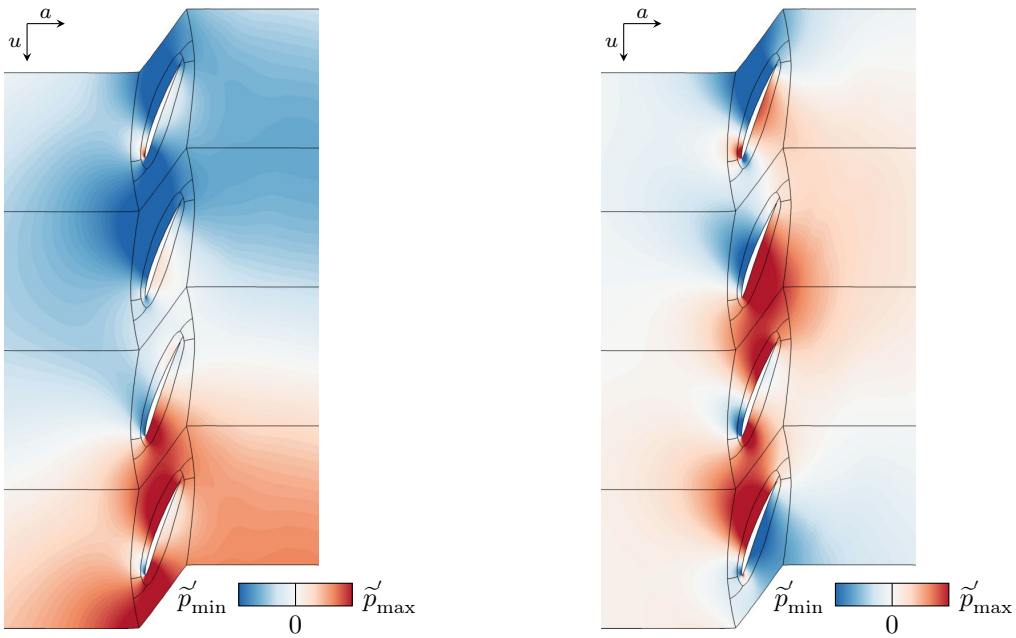
5.2.2. 1T-Mode

In den Verläufen der entdimensionierten S-Kurven der 1T-Mode in Abbildung 5.3b treten sichtbare Unterschiede zwischen den Gasen in der Nähe der lokalen Extrema der akustischen Resonanzen auf. Bei der höheren reduzierten Frequenz der 1T-Mode $k_1 = 2{,}37$ sind nach Abbildung 5.4 akustische Moden mit den radialen Modenordnungen $n \leq 1$ ausbreitungsfähig. Nachfolgend werden daher die Abweichungen in den entdimensionierten S-Kurven der unterschiedlichen Gase in Abhängigkeit der radialen Modenordnungen der auftretenden akustischen Resonanzen analysiert.

Akustische Resonanzen der radialen Modenordnung $\mathbf{n = 0}$

Mit steigender reduzierter Frequenz wird nach Abbildung 5.4 der Abstand zwischen den IBPA, bei denen akustische Resonanzen der radialen Modenordnung $n = 0$ im Ein- und Austritt auftreten, größer. Bei der reduzierten Frequenz der 1T-Mode $k_1 = 2{,}37$ können in den S-Kurven somit bis zu vier lokale Extrema der akustischen Resonanzen auftreten.

Für negative Azimutalmodenordnungen werden die akustischen Resonanzen und damit mögliche lokale Extrema zwischen den IBPA $\sigma_\nu = -58°$ und $\sigma_\nu = -70°$ vorhergesagt. In den S-Kurven der 1T-Mode in Abbildung 5.3b treten auch bei diesen IBPA lokale Extrema auf. Die größten Abweichungen in den entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten der unterschiedlichen Gase treten für Propan mit $\breve{\Theta}_{o_{|\mathrm{L}}} = -3{,}5\,\%$ beim IBPA $\sigma_\nu = -58°$ auf. Beim IBPA $\sigma_\nu = -70°$ sind die Abweichungen der entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten zwischen Propan und Luft mit $\breve{\Theta}_{o_{|\mathrm{L}}} = 1{,}3\,\%$ betragsmäßig geringer. Diese Abweichungen in den entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten werden durch akustische Wellen verursacht, die sich zum Teil in Umfangsrichtung ausbreiten. Diese Wellen übertragen die gasabhängigen Unterschiede in der stationären Strömung von einer auf die anderen Schaufeln. Die größeren Abweichungen bei $\sigma_\nu = -58°$ weisen darauf hin, dass dieser IBPA näher an akustischen Resonanzen liegt als $\sigma_\nu = -70°$. Diese Analyse wird durch die mit (4.3) umgerechneten Realteile des instationären Drucks in TWM-Notation in einer radialen Ebene in 85 % der Schaufelhöhe für den IBPA $\sigma_\nu = -58°$ in Abbildung 5.6a und $\sigma_\nu = -70°$ in Abbildung 5.6b bestätigt. Anhand der größeren Druckamplituden und der spitzeren Winkel der Wellenfronten zur axialen Richtung beim IBPA $\sigma_\nu = -58°$ im Vergleich zu $\sigma_\nu = -70°$ wird ersichtlich, dass beide Resonanzen



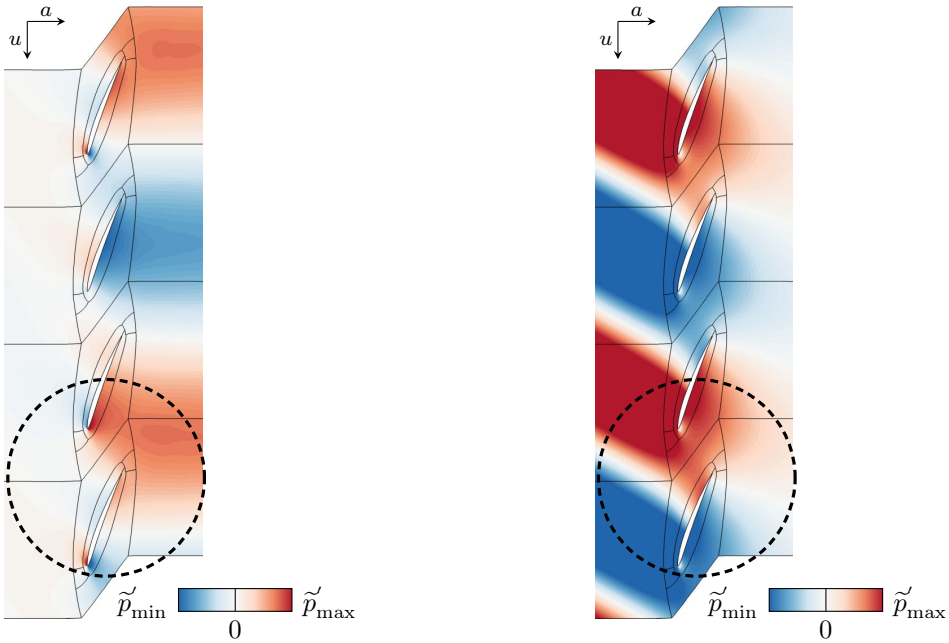
(a) Propan, $\sigma_\nu = -58°$ **(b)** Propan, $\sigma_\nu = -70°$

Abbildung 5.6.: Mit (4.3) in TWM-Notation umgerechnete Realteile des entdimensionierten instationären Drucks von Propan für die 1T-Mode und die IBPA $\sigma_\nu = -58°$ sowie $\sigma_\nu = -70°$ in der radialen Schnittebene in 85 % der Schaufelhöhe

näher an dem IBPA $\sigma_\nu = -58°$ liegen. Beim IBPA $\sigma_\nu = -70°$ sind die Amplituden wesentlich kleiner und klingen mit größer werdendem Abstand zur Schaufel stärker ab. Damit sind bei $\sigma_\nu = -70°$ die akustischen Moden nicht mehr ausbreitungsfähig. Die akustischen Resonanzen negativer Azimutalmodenordnungen der radialen Modenordnung $n = 0$ liegen zwar zwischen den beiden betrachteten IBPA, jedoch deutlich näher an dem IBPA $\sigma_\nu = -58°$. Die Vorhersage dieser akustischen Resonanzen weist somit eine Genauigkeit auf, die in der Größenordnung des Abstands zweier aufeinanderfolgender tatsächlich schwingender IBPA $|\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu| = 11{,}6°$ liegt.

Für die positiven Azimutalmodenordnungen liegen nach Abbildung 5.4 die akustischen Resonanzen im Aus- und Eintritt jeweils bei den IBPA $\sigma_\nu = 116°$ und $\sigma_\nu = 151°$. In den S-Kurven links in Abbildung 5.3b treten lokale Extrema bei den IBPA $\sigma_\nu = 139°$ und $\sigma_\nu = 174°$ auf. Deutliche Abweichungen in den entdimensionierten Arbeiten zwischen den Gasen treten in den S-Kurven jedoch bei den IBPA $\sigma_\nu = 128°$ und $\sigma_\nu = 174°$ auf. Die maximalen Abweichungen zu Luft weist dabei Propan auf. Die Abweichungen betragen beim IBPA $\sigma_\nu = 128°$ $\breve{\Theta}_{o_{|\mathrm{L}}} = 2{,}6\,\%$ und beim IBPA $\sigma_\nu = 174°$ $\breve{\Theta}_{o_{|\mathrm{L}}} = -6{,}6\,\%$. Damit liegt die Vermutung nahe, dass die tatsächlichen akustischen Resonanzen in der Nähe dieser beiden IBPA liegen, da die in Kapitel 5.1 festgestellten Unterschiede in der stationären Strömung erst in der Nähe der akustischen Resonanzen die instationären Schaufeldrücke beeinflussen. Somit werden auch für die positiven Azimutalmodenordnungen die IBPA der akustischen Resonanzen der radialen Modenordnung $n = 0$ zu gering vorhergesagt. Die größten Unterschiede in den entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten der unterschiedlichen Gase treten beim IBPA $\sigma_\nu = 174°$ auf und liegen damit in der Nähe der akustischen Resonanz des Eintritts. Dies ist nicht direkt plausibel, da stromauf der Schaufel die stationäre Strömung bei allen Gasen sowohl kinematisch ähnlich als auch machähnlich ist.

Zur Identifikation der Gründe für dieses Verhalten werden die mit (4.3) in TWM-Notation umgerechneten Realteile des instationären Drucks von Propan in 85 % der Schaufelhöhe für die IBPA $\sigma_\nu = 128°$ in Abbildung 5.7a und $\sigma_\nu = 174°$ in Abbildung 5.7b analysiert. Anhand Abbildung 5.7a wird deutlich, dass beim IBPA $\sigma_\nu = 128°$ akustische Wellen nahe der akustischen Resonanz im Austritt angeregt werden, da sich dort die Wellen nahezu in Umfangsrichtung ausbreiten. Durch diese über den Umfang rotierenden Wellen werden schließlich die Abweichungen in der stationären Strömung auf die instationären Schaufeldrücke übertragen und es werden die Abweichungen in den entdimensionierten Arbeiten beim IBPA $\sigma_\nu = 128°$ verursacht. Die größten Amplituden treten dabei auf den Druckseiten der Schaufeln auf, jedoch treffen bei diesem IBPA diese großen Amplituden nur zu einem kleinen Teil auf der benachbarten Schaufel auf, was im markierten Bereich in Abbildung 5.7a deutlich wird. Somit betragen die relativen Abweichungen der entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten bei diesem IBPA im Betrag nur 40 % der relativen Abweichungen des IBPA $\sigma_\nu = 174°$. Beim IBPA $\sigma_\nu = 174°$ deuten die großen Druckamplituden stromauf der Schaufel in Abbildung 5.7b darauf hin, dass sich dieser IBPA in der Nähe der akustischen Resonanz im Eintritt befindet. Im Gegensatz zum IBPA $\sigma_\nu = 128°$ treffen bei diesem die großen Druckamplituden von der Druckseite zu einem größeren Teil auf die benachbarten Schaufeln auf, was im markierten Bereich in Abbildung 5.7b deutlich wird. Dadurch werden schließlich die Unterschiede der stationären Profildrücke der Druckseite (vgl. Kapitel 5.1) auf die Saugseite der jeweils benachbar-



(a) Propan, $\sigma_\nu = 128°$ **(b)** Propan, $\sigma_\nu = 174°$

Abbildung 5.7.: Mit (4.3) in TWM-Notation umgerechnete Realteile des entdimensionierten instationären Drucks in der radialen Schnittebene in 85 % der Schaufelhöhe für die 1T-Mode und ausgewählte positive IBPA nahe der akustischen Resonanzen mit der radialen Modenordnung $n = 0$ im Aus- und Eintritt

ten Schaufel übertragen. Daraus resultieren schließlich die großen Abweichungen der entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten der unterschiedlichen Gase beim IBPA $\sigma_\nu = 174°$.

Akustische Resonanzen der radialen Modenordnung $\mathbf{n = 1}$

Bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ der 1T-Mode sind im Vergleich zur 1F-Mode akustische Moden mit der radialen Modenordnung $n = 1$ ausbreitungsfähig. Für eine genauere Analyse der bei diesen akustischen Resonanzen auftretenden Abweichungen zwischen den verschiedenen Gasen werden in Abbildung 5.8 die akustischen Resonanzen und S-Kurven im relevanten IBPA-Bereich $-20° < \sigma_\nu < 60°$ vergrößert gegenübergestellt.

Das erste lokale Extremum in der S-Kurve, was durch die akustische Resonanz mit der radialen Modenordnung $n = 1$ im Eintritt verursacht wird, tritt beim IBPA $\sigma_\nu = 0°$ auf. Analog dazu wird diese Resonanz oben in Abbildung 5.8 für eben diesen IBPA vorhergesagt. Anhand der Realteile der instationären Drücke von Propan in 85 % der Schaufelhöhe in Abbildung 5.9 wird deutlich, dass aufgrund der Nähe zur akustischen Resonanz im Eintritt sich die größten instationären Druckamplituden zwischen den Schaufeln befinden. Somit beeinflussen die Unterschiede in der Profildruckverteilung der einzelnen Gase die induzierten aerodynamischen Arbeiten. Dies führt schließlich zu den deutlichen Unterschieden beim IBPA $\sigma_\nu = 0°$ in den entdimensionierten S-Kurven unten in Abbildung 5.8.

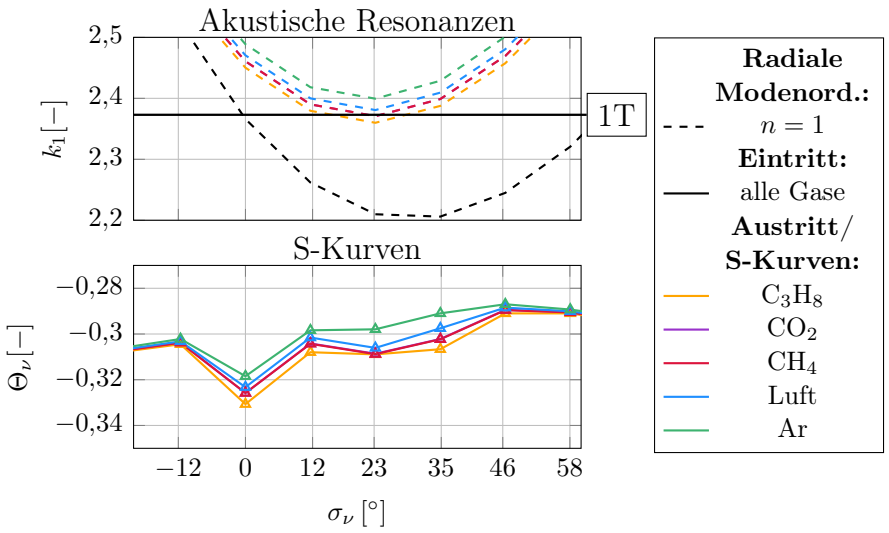


Abbildung 5.8.: Aus Abbildung 5.4 vergrößerter Ausschnitt der reduzierten Frequenzen sowie der S-Kurven im Bereich der akustischen Resonanzen der radialen Modenordnungen $n = 1$ der 1T-Mode

Anders als akustische Wellen mit radialer Modenordnung $n = 1$ im Eintritt, werden akustische Wellen mit radialer Modenordnung $n = 1$ im Austritt aufgrund der kleineren Machzahl bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ gerade erst ausbreitungsfähig. Daraus folgt, dass mit den IBPA $\sigma_\nu = 12°$, $\sigma_\nu = 23°$ und $\sigma_\nu = 35°$ gleich drei IBPA nahe der akustischen Resonanz im Austritt liegen. Dadurch treten bei allen drei IBPA Unterschiede in den entdimensionierten S-Kurven der untersuchten Gase auf. Diese Unterschiede sind in Abbildung 5.8 für die IBPA im Bereich von $12° \leq \sigma_\nu \leq 35°$ deutlich erkennbar. Bei den IBPA $\sigma_\nu = 12°$ und $\sigma_\nu = 35°$ sind die akustischen Wellen für alle Gase gerade noch nicht ausbreitungsfähig und die Abweichungen in den entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten sind proportional mit dem Isentropenexponenten gestaffelt. Die größten

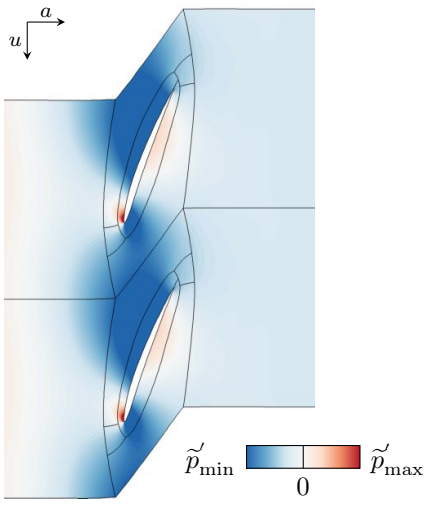
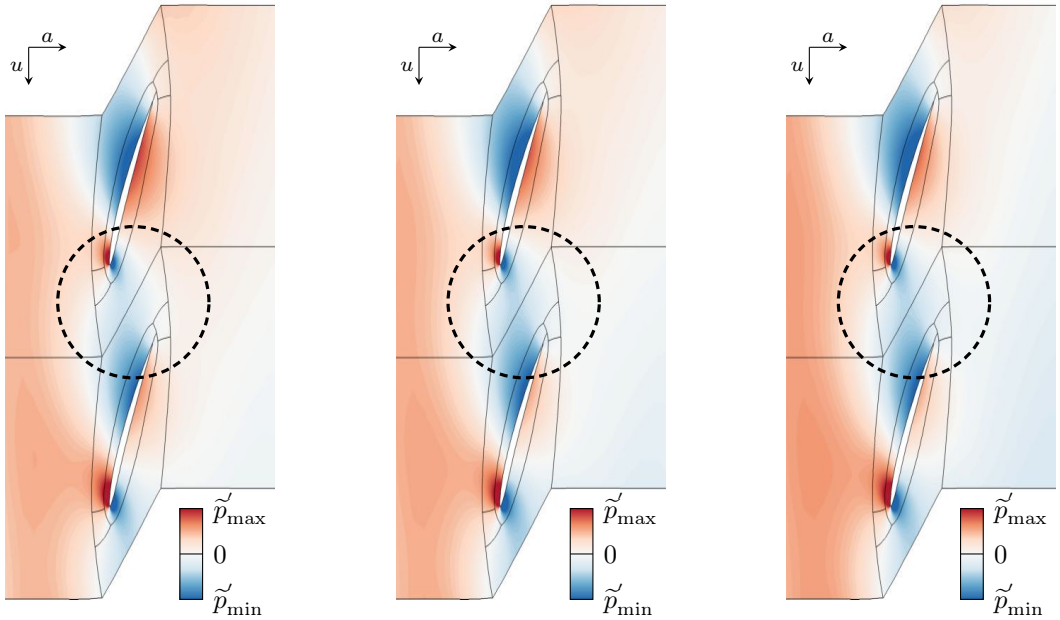


Abbildung 5.9.: Mit (4.3) in TWM-Notation umgerechnete Realteile des instationären Drucks für Propan in der radialen Schnittebene in 85 % der Schaufelhöhe für den IBPA $\sigma_\nu = 0°$ der 1T-Mode nahe der akustischen Resonanz im Eintritt mit der radialen Modenordnung $n = 1$



(a) Argon **(b)** Luft **(c)** Propan

Abbildung 5.10.: Mit (4.3) in TWM-Notation umgerechnete Realteile des instationären Drucks für Argon, Luft und Propan in der radialen Schnittebene in 85 % der Schaufelhöhe für den IBPA $\sigma_\nu = 23°$ der 1T-Mode

Abweichungen zu Luft weist analog zu den vorangegangenen Analysen das Gas Propan mit $\breve{\Theta}_{o_{|\mathrm{L}}} = 2{,}1\%$ bei $\sigma_\nu = 12°$ und $\breve{\Theta}_{o_{|\mathrm{L}}} = 3{,}1\,\%$ bei $\sigma_\nu = 35°$ auf. Die Abweichungen in den entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten beim IBPA $\sigma_\nu = 23°$ fallen jedoch für die Gase mit kleinerem Isentropenexponenten als Luft mit $\breve{\Theta}_{o_{|\mathrm{L}}} \leq 0{,}9\,\%$ nur gering aus. Einzig das Gas Argon weist mit einer Abweichung von $\breve{\Theta}_{o_{|\mathrm{L}}} = -2{,}7\%$ deutliche Unterschiede zu Luft auf. Der Grund für dieses Verhalten ist, dass bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ akustische Wellen mit der radialen Modenordnung $n = 1$ im Austritt für alle betrachteten Gase außer Argon ausbreitungsfähig und nahe einer akustischen Resonanz sind. Dementsprechend fallen bei Argon die instationären Druckamplituden zwischen den Schaufeln geringer aus und die S-Kurven weisen unten in Abbildung 5.8 beim IBPA $\sigma_\nu = 23°$ für Argon ein geringer ausgeprägtes lokales Extremum auf, als es für die anderen Gase der Fall ist. Die geringeren instationären Druckamplituden des Gases Argon sind anhand der dargestellten Realteile der instationären Drücke in Abbildung 5.10a im Vergleich zu den Gasen Luft in Abbildung 5.10b und Propan in Abbildung 5.10c im Bereich zwischen den Schaufeln ersichtlich.

5.2.3. 2T-Mode

In den S-Kurven der 2T-Mode befinden sich bis auf eine Ausnahme beim IBPA $\sigma_\nu = 139°$ alle lokalen Extrema bei negativen IBPA. Ebenfalls treten die größten Abweichungen in den entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten zwischen den Gasen in der Umgebung der IBPA der lokalen Extrema auf. In Abbildung 5.4 ist dargestellt, dass bei der reduzierten Frequenz der 2T-Mode $k_1 = 5{,}87$ akustische Wellen mit radialen Modenordnungen

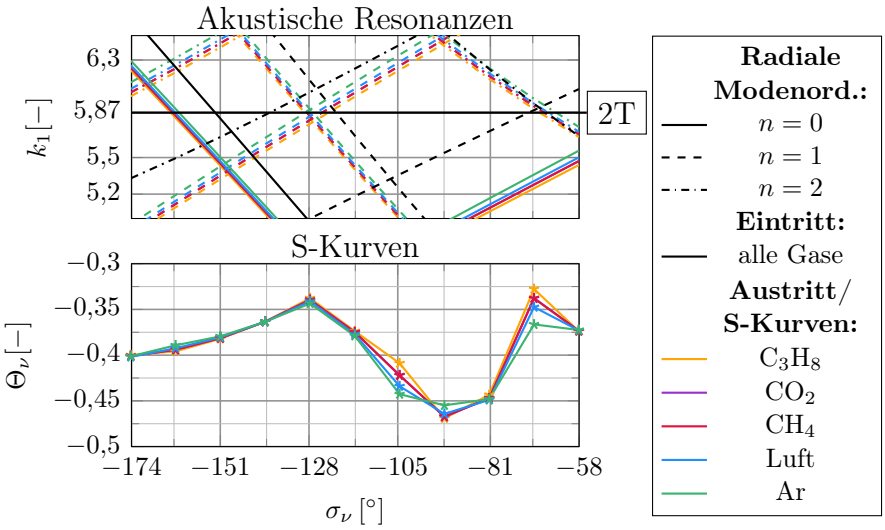


Abbildung 5.11.: Aus Abbildung 5.4 vergrößerter Ausschnitt der reduzierten Frequenzen k_1 sowie der S-Kurven Θ_ν im Bereich der akustischen Resonanzen negativer IBPA der 2T-Mode

$n \leq 2$ ausbreitungsfähig sind. Von den damit einhergehenden zwölf akustischen Resonanzen werden zehn für negative IBPA vorhergesagt. Aufgrund dieser großen Anzahl an akustischen Resonanzen bei nur wenigen IBPA treten einige Resonanzen bei denselben IBPA auf. Gleichzeitig liegen die am stärksten ausgeprägten lokalen Extrema sowie die größten Abweichungen zwischen den Gasen bei diesen IBPA. In den nachfolgenden Analysen werden die Erläuterungen daher auf den Bereich der negativen IBPA $-174 \leq \sigma_\nu \leq -58$ beschränkt. In Abbildung 5.11 sind für diesen IBPA-Bereich die akustischen Resonanzfrequenzen aus Abbildung 5.4 und S-Kurven der 2T-Mode aus Abbildung 5.3c vergrößert dargestellt. Analog zu den vorangegangenen Untersuchungen der 1T-Mode werden im Folgenden die Abweichungen in den entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten in Abhängigkeit der radialen Modenordnungen n der sich jeweils in Resonanz befindlichen akustischen Moden analysiert.

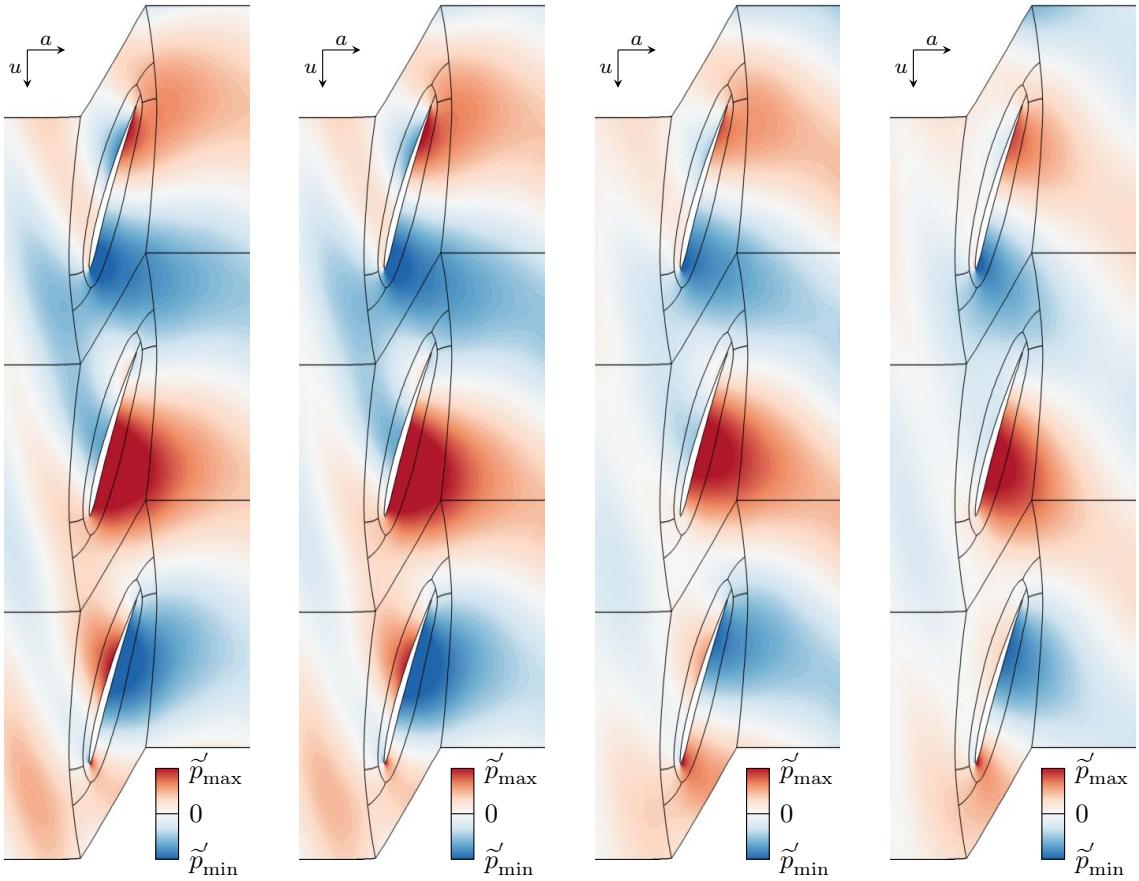
Akustische Resonanzen der radialen Modenordnung n = 0

Die akustischen Resonanzen der radialen Modenordnung $n = 0$ im Ein- und Austritt werden oben in Abbildung 5.11 für die IBPA $\sigma_\nu = -151°$ und $\sigma_\nu = -163°$ vorhergesagt. In den S-Kurven in Abbildung 5.11 treten jedoch bei diesen IBPA keine lokalen Extrema auf. Der Grund dafür ist, dass anders als die bisher betrachteten Eigenformen die 2T-Eigenform nach Abbildung 4.5 eine Eigenform höherer Ordnung ist und damit mehrere radial verteilte Schwingungsknoten besitzt. Durch diese radial verteilten Schwingungsknoten regt die 2T-Eigenform primär akustische Wellen radialer Modenordnungen $n > 0$ an. Wellen mit der radialen Modenordnung $n = 0$ werden nur zu einem geringen Teil angeregt. Die akustischen Resonanzen der radialen Modenordnung $n = 0$ haben somit nur einen geringen Einfluss auf den Verlauf der S-Kurven, weshalb unten in Abbildung 5.11 keine lokalen Extrema nahe den IBPA dieser Resonanzen auftreten. Beim IBPA $\sigma_\nu = -163°$, der nahe der akustischen Resonanz des Austritts liegt, treten relative Abweichungen in den entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten von bis zu $\breve{\Theta}_{o_{|L}} = 0{,}9\%$ für Propan

im Vergleich zu Luft auf. Diese, wenn auch nur geringen, Abweichungen deuten darauf hin, dass akustische Wellen mit der radialen Modenordnung $n = 0$ dennoch zu einem geringen Teil angeregt werden. Der Einfluss dieser Wellen auf die S-Kurven kann somit nicht vollständig vernachlässigt werden.

Akustische Resonanzen der radialen Modenordnungen $\mathbf{n = 1}$ und $\mathbf{n = 2}$

Die akustischen Resonanzen der radialen Modenordnungen $n = 1$ und $n = 2$ werden nach Abbildung 5.11 für den IBPA Bereich zwischen $\sigma_\nu = -139°$ und $\sigma_\nu = -70°$ vorhergesagt. Gleichzeitig treten in diesem Bereich die am stärksten ausgeprägten lokalen Extrema in den S-Kurven auf. Die Resonanzen der radialen Modenordnungen $n = 1$ des Austritts werden dabei für den IBPA $\sigma_\nu = -128°$ vorhergesagt. Jedoch treten weder bei diesem, noch beim benachbarten IBPA $\sigma_\nu = -116°$ deutliche Unterschiede zwischen den untersuchten Gasen auf. Die größten Abweichungen treten hingegen beim IBPA $\sigma_\nu = -105°$ auf, für den keine akustischen Resonanzen direkt vorhergesagt werden. Für die Ursachenfindung dieses zunächst unplausibel erscheinenden Verhaltens sind in Abbildung 5.12 die Realteile



(a) Propan $\sigma_\nu = -116°$ **(b)** Argon $\sigma_\nu = -116°$ **(c)** Propan $\sigma_\nu = -105°$ **(d)** Argon $\sigma_\nu = -105°$

Abbildung 5.12.: Mit (4.3) in TWM-Notation umgerechnete Realteile des entdimensionierten instationären Drucks in der radialen Ebene in 92 % der Schaufelhöhe für die 2T-Mode und ausgewählte negative IBPA nahe akustischer Resonanzen

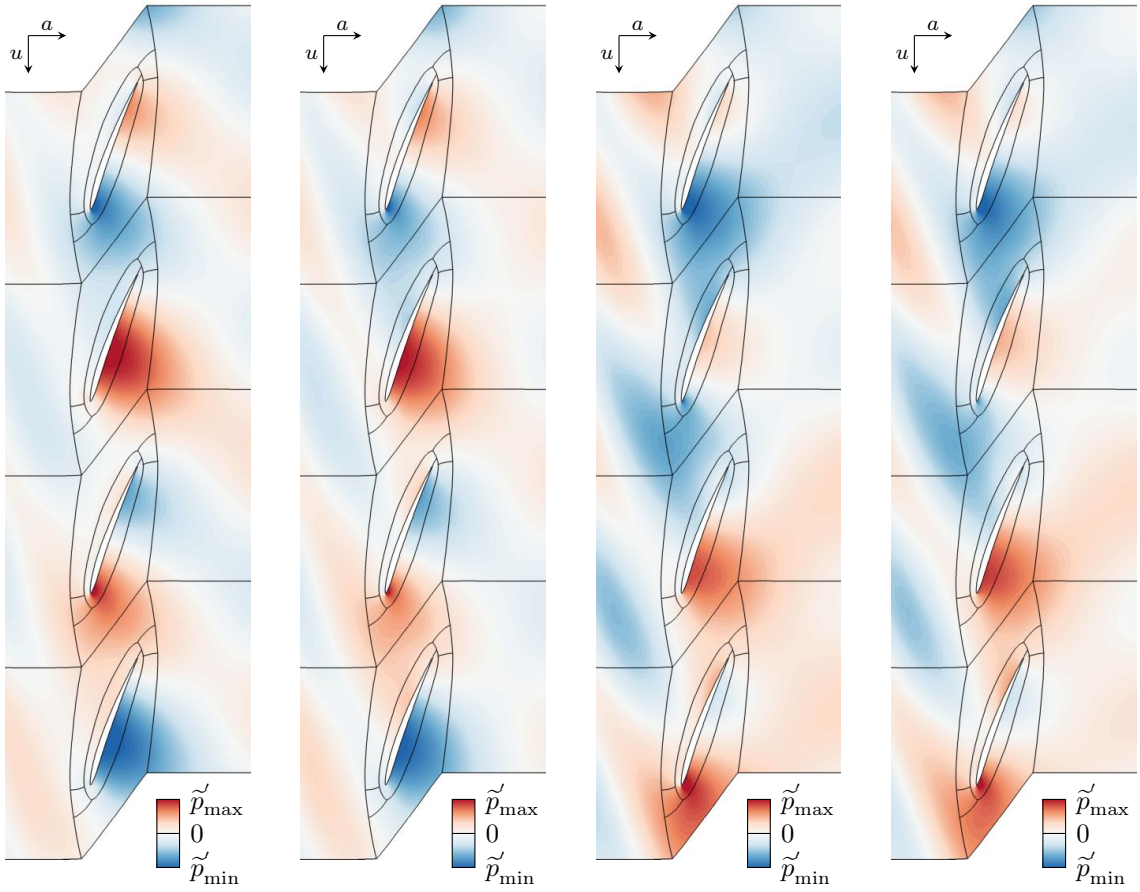
des instationären Drucks in der radialen Ebene in 92 % der Schaufelhöhe für die IBPA $\sigma_\nu = -116°$ und $\sigma_\nu = -105°$ jeweils für die Gase Propan und Argon dargestellt.

Durch die nahezu parallel zur Rotationsachse verlaufenden Wellenfronten wird deutlich, dass stromab der Schaufeln die akustischen Wellen nahe der Resonanz im Austritt liegen. Jedoch treten beim IBPA $\sigma_\nu = -116°$ keine sichtbaren Unterschiede an der Druckseite der Schaufeln zwischen Propan in Abbildung 5.12a und Argon in Abbildung 5.12b auf. Unterschiede zwischen den Gasen werden erst weiter stromab der Schaufeln sichtbar. Der Abstand zur Schaufel ist jedoch zu groß, alss dass diese gasbedingten Unterschiede einen Einfluss auf die bewegungsinduzierten instationären Schaufelkräfte haben. Folglich hat das Gas bei diesem IBPA einen vernachlässigbaren Einfluss auf die entdimensionierte aerodynamische Arbeit. Anders verhält es sich beim IBPA $\sigma_\nu = -105°$ für Propan in Abbildung 5.12c und Argon in Abbildung 5.12d. Durch den größeren Abstand zum IBPA der akustischen Resonanz der radialen Modenordnung $n = 1$ am Austritt verlaufen beim IBPA $\sigma_\nu = -105°$ die Wellenfronten in einem größeren Winkel zur Rotationsachse. Jedoch tritt ein sichtbarer Unterschied dieses Winkels an der Druckseite zwischen den Gasen Propan und Argon auf, was zu unterschiedlichen bewegungsinduzierten instationären Schaufeldrücken führt. Dies resultiert schließlich in den deutlichen Abweichungen der entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten in den S-Kurven beim IBPA $\sigma_\nu = -105°$ in Abbildung 5.11.

Sichtbare Abweichungen treten ebenfalls in den entdimensionierten Arbeiten beim IBPA $\sigma_\nu = -93°$ auf, obwohl in dessen Nähe nach Abbildung 5.11 keine akustischen Resonanzen auftreten. Im Gegensatz zum IBPA $\sigma_\nu = -105°$ weisen die Wellenfronten von Propan in Abbildung 5.13a und Argon in Abbildung 5.13b ähnliche Winkel auf. Allerdings verlaufen die Wellenfronten an der Hinterkante nahezu parallel zur Rotationsachse. Dies deutet darauf hin, dass die akustischen Wellen an dieser Stelle ein resonanzähnliches Verhalten aufweisen. Die geringen Unterschiede in der Abströmung der Schaufel werden über den Umfang zu den benachbarten Schaufeln transportiert. Daraus werden schließlich die gasbedingten Unterschiede in den entdimensionierten Arbeiten der S-Kurven beim IBPA $\sigma_\nu = -93°$ hervorgerufen.

Der letzte genauer zu betrachtende IBPA mit deutlichen Abweichungen zwischen den Gasen ist $\sigma_\nu = -70°$. Nach Abbildung 5.11 liegt dieser nahe der akustischen Resonanz der radialen Modenordnung $n = 1$ am Eintritt und gleichzeitig der akustischen Resonanz der radialen Modenordnung $n = 2$ des Austritts. Hierbei überlagern sich mehrere akustische Moden mit unterschiedlichen Modenordnungen. Daher sind diese Resonanzen nicht direkt anhand der Realteile des instationären Drucks für Propan in Abbildung 5.13c und Argon in Abbildung 5.13d ersichtlich. Dennoch zeigt der Vergleich zwischen den Gasen Propan und Argon, dass die unterschiedlichen Abströmmachzahlen zu Veränderungen in den akustischen Wellen führen. Analog zum IBPA $\sigma_\nu = -93°$ weisen die akustischen Wellen in direkter Umgebung der Schaufel ein resonanzartiges Verhalten auf. Dies führt ebenfalls dazu, dass die gasbedingten Abweichungen nahezu in Umfangsrichtung zu den anderen Schaufeln übertragen werden. Folglich werden die beobachteten Unterschiede in den entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten zwischen den Gasen hervorgerufen.

Zusammenfassend kann an dieser Stelle festgehalten werden, dass der isolierte Einfluss des Gases auf die entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten in erster Größenordnung



(a) Propan $\sigma_\nu = -93°$ **(b)** Argon $\sigma_\nu = -93°$ **(c)** Propan $\sigma_\nu = -70°$ **(d)** Argon $\sigma_\nu = -70°$

Abbildung 5.13.: Mit (4.3) in TWM-Notation umgerechnete Realteile des entdimensionierten instationären Drucks in der radialen Ebene in 92 % der Schaufelhöhe für die 2T-Mode und ausgewählte negative IBPA nahe akustischer Resonanzen

vernachlässigbar ist. In zweiter Größenordnung kommt es bei den untersuchten Torsionsmoden aufgrund deren höheren reduzierten Frequenzen zu gasabhängigen Abweichungen in den S-Kurven. Alle diese Abweichungen sind auf geringe Machzahlabweichungen in der stationären Abströmung der Schaufel und damit einhergehender Profildruckabweichungen nahe der Hinterkante der Schaufel zurückzuführen. Bei den Torsionsmoden ist die reduzierte Frequenz groß genug, damit akustische Wellen die dominante Rolle in der Entstehung der aerodynamischen Arbeiten der Schaufeln spielen. Zu sichtbaren Abweichungen in diesen S-Kurven zwischen den untersuchten Gasen kommt es allerdings ausschließlich bei IBPA in der Nähe akustischer Resonanzen. Dort werden die geringfügigen Unterschiede in der Abströmmachzahl und der Profildruckverteilung durch die sich im Kanal ausbreitenden akustischen Wellen verstärkt. Alle übrigen, und damit der Großteil der IBPA, weisen nur vernachlässigbare Unterschiede zwischen den Gasen auf. Deshalb kann an dieser Stelle der isolierte Einfluss des Gases auf die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten als direkt nach (2.94) skalierbar mit dem dynamischen Druck angenommen werden.

6. Einfluss der Machzahl

In diesem Kapitel wird der Einfluss der Machzahl auf die bewegungsinduzierte aerodynamische Arbeit untersucht. Als Gas wird ausschließlich Luft betrachtet und die Machzahl wird über den gesamten Betriebsbereich des Verdichters variiert. Somit werden alle potenziellen Veränderungen der Machzahlen bei aerodynamisch fremderregten Schwingungen berücksichtigt, die bei der Verdichtung eines von Luft verschiedenen Gases auftreten können. Insgesamt werden sechs unterschiedliche Machzahlen betrachtet, die äquidistant den Betriebsbereich von 60 % bis 110 % der Referenzmachzahl M_{ref} abdecken. Als Referenzmachzahl wird in diesem Fall die flächengemittelte Eintrittsmachzahl im Relativsystem $M_{\mathrm{ein,ref}} = 0{,}52$ des Referenzbetriebspunkts aus Tabelle 4.2 bezeichnet. Die in Tabelle 6.1 aufgelisteten sechs Machzahlen werden über die Anpassung der Eintrittstemperatur nach (4.9) eingestellt. Die Reynoldszahlen und Strömungswinkel werden nach der in Kapitel 4.3 beschriebenen Vorgehensweise konstant gehalten.

Bezeichnung	M_{ein}
$0{,}6\,M_{\mathrm{ref}}$	0,31
$0{,}7\,M_{\mathrm{ref}}$	0,36
$0{,}8\,M_{\mathrm{ref}}$	0,42
$0{,}9\,M_{\mathrm{ref}}$	0,47
M_{ref}	0,52
$1{,}1\,M_{\mathrm{ref}}$	0,57

Tabelle 6.1.: Übersicht der untersuchten Machzahlen

Neben dem Einfluss der reduzierten Frequenz wird der Einfluss der Eigenform auf die Machzahlabhängigkeit der aerodynamischen Dämpfungen untersucht. Dazu werden die drei in Kapitel 4.2.1 vorgestellten Eigenformen nicht nur bei ihren reduzierten Frequenzen, sondern ebenso bei den reduzierten Frequenzen der jeweils anderen Eigenformen betrachtet. Diese künstlichen Kombinationen aus Frequenz und nicht dazugehöriger Eigenform treten in der Realität nicht auf. Jedoch wird durch dieses Vorgehen die getrennte Ermittlung des Einflusses der Eigenform und der reduzierten Frequenz auf die entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten unter Machzahlvariation ermöglicht. Insgesamt werden für die sechs betrachteten Machzahlen die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten mit den in Tabelle 6.2 aufgelisteten drei realen (R) und sechs künstlichen (K) Kombinationen aus Eigenform und reduzierter Frequenz für alle IBPA berechnet.

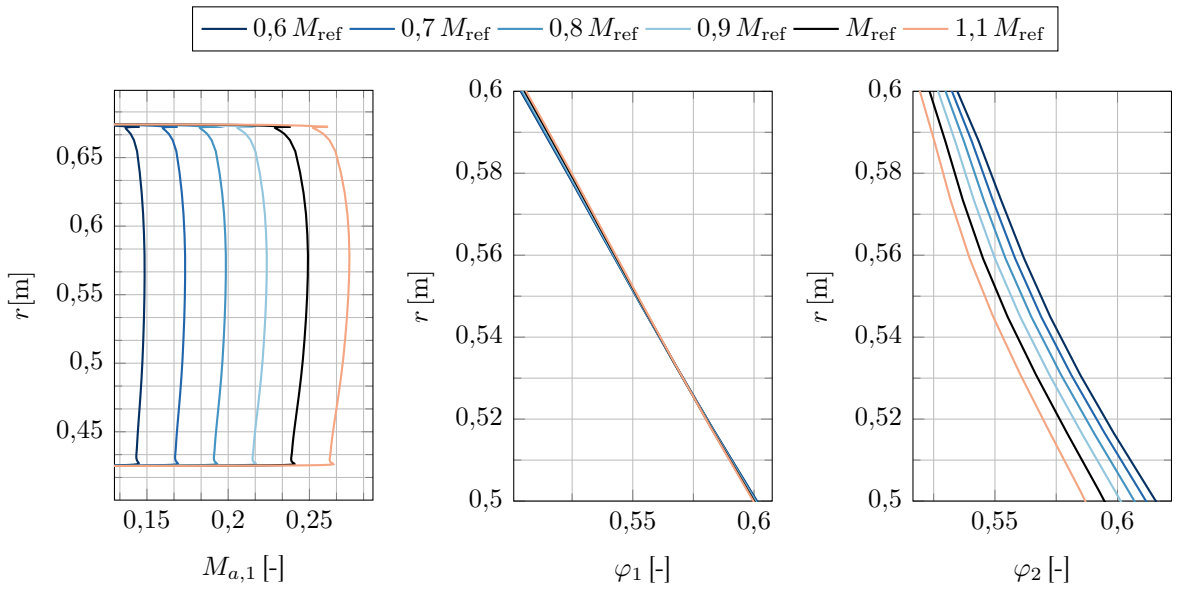
	$k_1 = 0{,}65$	$k_1 = 2{,}37$	$k_1 = 5{,}87$
1F-Eigenform	R	K	K
1T-Eigenform	K	R	K
2T-Eigenform	K	K	R

Tabelle 6.2.: Übersicht der für alle Machzahlen simulierten realen (R) und künstlichen (K) Kombinationen aus Eigenform und reduzierter Frequenz

Analog zu Kapitel 5 werden im nachfolgenden Abschnitt 6.1 zunächst die Ergebnisse der stationären Simulationen vorgestellt. Im Anschluss wird in Kapitel 6.2 der Einfluss der Machzahl auf die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten analysiert.

6.1. Ergebnisse der stationären Simulationen

Zur Überprüfung der eingestellten Betriebspunkte für die unterschiedlichen Machzahlen sind in Abbildung 6.1 die radialen Verteilungen der Axialmachzahl stromauf, sowie der Durchflusskennzahl stromauf und stromab der Schaufelreihe dargestellt. Anhand Abbildung 6.1a ist die äquidistante Staffelung der eingestellten Axialmachzahlen ersichtlich. Zudem zeigen die gut übereinstimmenden radialen Verteilungen der Durchflusskennzahlen stromauf der Schaufel in Abbildung 6.1b, dass ungeachtet der Machzahlvariation eine kinematisch ähnliche Anströmung der Schaufeln vorliegt. Der Einfluss der Machzahl ist somit bestmöglich isoliert. Jedoch führen die unterschiedlichen Machzahlen trotz kinematischer Ähnlichkeit zu Abweichungen in der Schaufelumströmung. Diese Abweichungen werden anhand der in Abbildung 6.2 dargestellten Verteilungen der Druckbeiwerte in 75 % und 95 % der Schaufelhöhe deutlich. Aus dieser unterschiedlichen Schaufelumströmung resultiert schließlich eine unterschiedliche Abströmung der Schaufelreihe, wie die Darstellung der Durchflusskennzahl stromab der Schaufelreihe in Abbildung 6.1c zeigt. Die Durchflusskennzahlen weisen dabei bis zu 4 % große Abweichungen zur Durchflusskennzahl der Referenzmachzahl auf. Insgesamt ist somit der isolierte Einfluss der Machzahl auf die stationäre Umströmung der Schaufel deutlich größer, als der isolierte Einfluss des Gases in Kapitel 5.1.

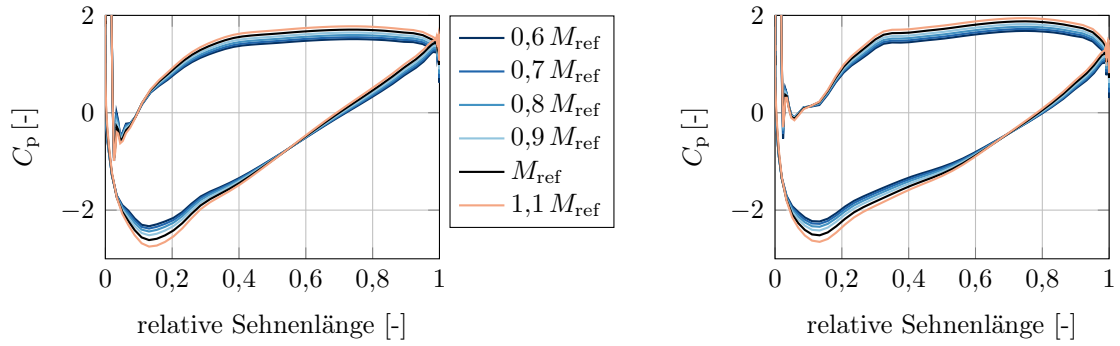


(a) Axialmachzahlen M_a in der Ebene 1 stromauf der Schaufel

(b) Durchflusskennzahlen φ in der Ebene 1 stromauf der Schaufel

(c) Durchflusskennzahlen φ in der Ebene 2 stromab der Schaufel

Abbildung 6.1.: Radiale Verteilungen von Axialmachzahlen und Durchflusskennzahlen stromauf sowie stromab der Schaufelreihe



(a) 75 % Schaufelhöhe **(b)** 95 % Schaufelhöhe

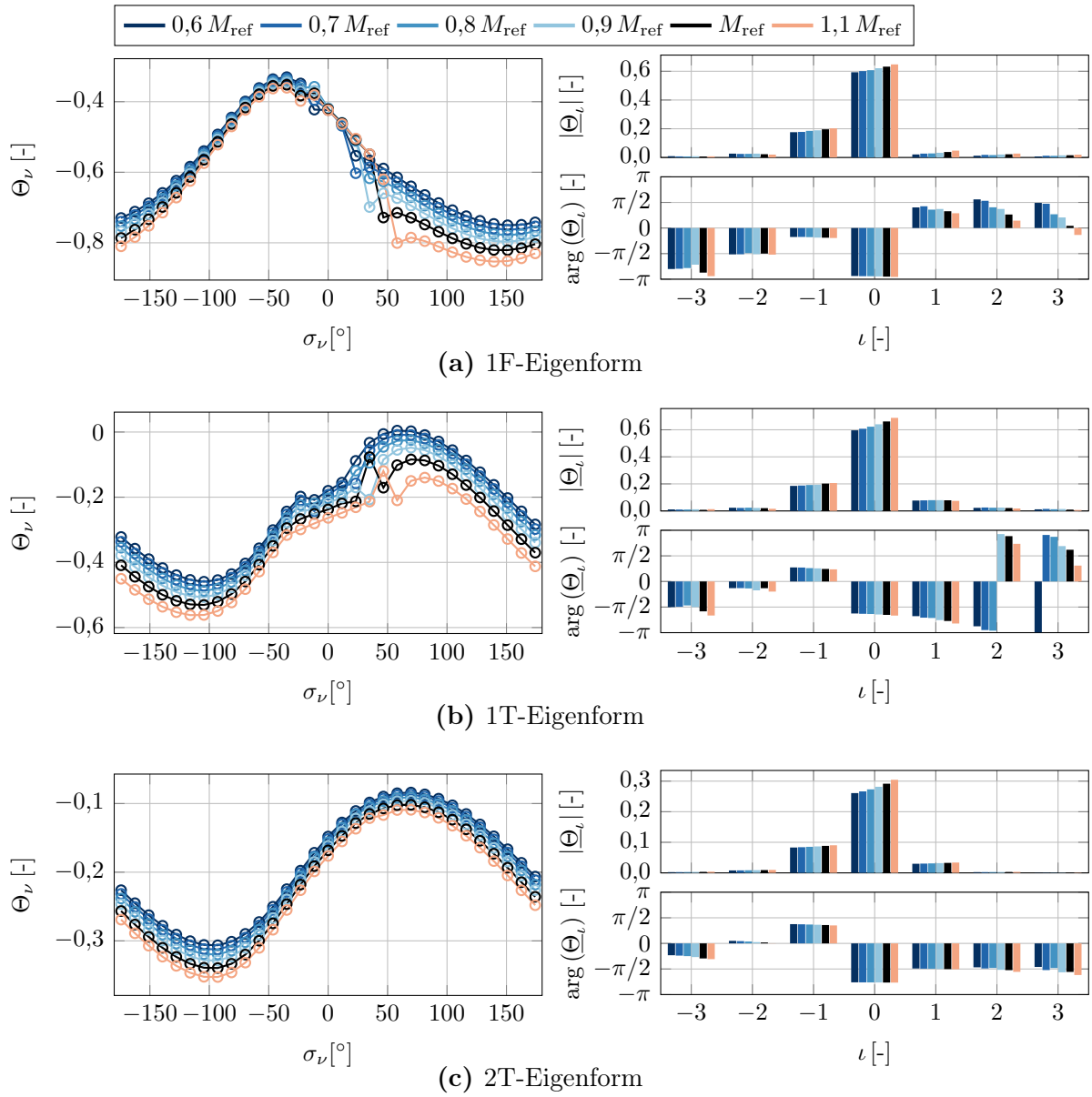
Abbildung 6.2.: Verteilung des Druckbeiwerts C_p entlang der Schaufeloberfläche in verschiedenen Schaufelhöhen

6.2. Analyse der entdimensionierten aerodynamischen Arbeit

Vor dem Hintergrund der eingestellten stationären Betriebspunkte wird in diesem Abschnitt der Einfluss der Machzahl auf die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten analysiert. Im Rahmen der Analyse werden die entdimensionierten S-Kurven im Zusammenhang mit den Einflusskoeffizienten betrachtet. Dabei werden die Untersuchungen der drei Eigenformen für jede betrachtete reduzierte Frequenz in einem separaten Abschnitt dargelegt.

6.2.1. Reduzierte Frequenz $k_1 = 0{,}65$

In Abbildung 6.3 sind links die entdimensionierten S-Kurven sowie rechts die entdimensionierten Amplituden und Phasen der Einflusskoeffizienten bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ für alle drei untersuchten Eigenformen dargestellt. Analog zu den stationären Ergebnissen treten deutlich größere Unterschiede zwischen den entdimensionierten S-Kurven sowie den entdimensionierten Amplituden und Phasen der unterschiedlichen Machzahlen auf, als bei der Untersuchung des Gaseinflusses in Kapitel 5.2. Die entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten der S-Kurven aller drei Eigenformen weisen mit steigender Machzahl eine Verschiebung zu kleineren entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten auf. In Abbildung 6.4a sind die mit (4.5) bestimmten mittleren relativen Abweichungen der entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten der S-Kurven bezogen auf die Werte der Referenzmachzahl dargestellt. Die mittleren relativen Abweichungen liegen im Bereich von $-6\,\%$ bis $2{,}5\,\%$ bei der 1F-Eigenform, $-36\,\%$ bis $23\,\%$ bei der 1T-Eigenform und $-13\,\%$ bis $5\,\%$ bei der 2T-Eigenform. Wie bereits in Kapitel 2.2.2 und in der Literatur u. a. von *Vogt* (2005) erläutert wird, wird die vertikale Lage der S-Kurve durch die Amplitude des Einflusskoeffizienten der schwingenden Schaufel $\iota = 0$ bestimmt. Nimmt diese entdimensionierte Amplitude zu, wird die gesamte S-Kurve zu betragsmäßig größeren entdimensionierten Arbeiten verschoben. Daher sind diese machzahlabhängigen Verschiebungen der entdimensionierten S-Kurven auf den Anstieg der entdimensionierten



(a) 1F-Eigenform

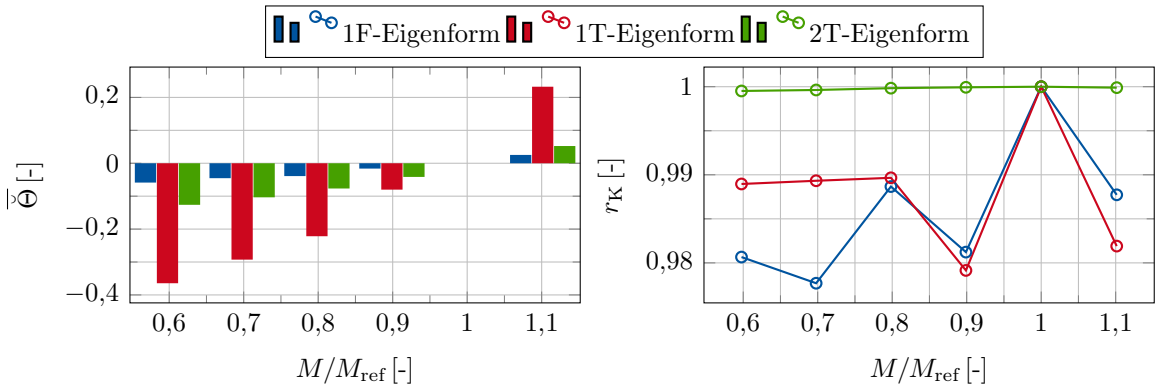
(b) 1T-Eigenform

(c) 2T-Eigenform

Abbildung 6.3.: Nach (2.94) entdimensionierte aerodynamische Arbeiten Θ der untersuchten Machzahlen und Eigenformen bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$. Dargestellt als S-Kurven Θ_ν für alle IBPA σ_ν (links) sowie als Einflusskoeffizienten Θ_ι der Schaufelindizes $-3 \leq \iota \leq 3$ in Amplitude $|\underline{\Theta}_\iota|$ und Phase $\arg(\underline{\Theta}_\iota)$ (rechts).

Amplituden der Einflusskoeffizienten der schwingenden Schaufel $\iota = 0$ mit der Machzahl zurückzuführen.

Der Einfluss der Machzahl auf den qualitativen Verlauf der S-Kurven ist in Abbildung 6.3 bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ für alle untersuchten Eigenformen hingegen gering. Die qualitative Ähnlichkeit der Verläufe bestätigen die mit (4.6) bestimmten und auf die S-Kurven der Referenzmachzahl bezogenen Korrelationskoeffizienten in Abbildung 6.4b. Für die 1F- und 1T-Eigenform sind diese Korrelationskoeffizienten größer als 0,98 und für die 2T-Eigenform größer als 0,99. Damit sind die qualitativen Verläufe der S-Kurven nahezu unabhängig von der Machzahl. Die Wirbelwellen sind bei der reduzierten Frequenz



(a) Relative Abweichungen **(b)** Korrelationskoeffizienten

Abbildung 6.4.: Mit (4.5) bestimmte mittlere relative Abweichungen $\overline{\breve{\Theta}}$ und mit (4.6) bestimmte Korrelationskoeffizienten r_{K} der S-Kurven der untersuchten Machzahlen bezogen auf die S-Kurven der Referenzmachzahl für die reduzierte Frequenz $k_1 = 0{,}65$

$k_1 = 0{,}65$ für die aerodynamische Schaufelkopplung dominierend. Diese Dominanz wird analog zu Kapitel 5.2 durch die großen Amplituden der Einflusskoeffizienten der Schaufel $\iota = -1$ deutlich. Die Machzahl hat auf die Wirbelwellen nur einen geringen Einfluss. Die Phasengeschwindigkeit einer konvektiv transportierten Wirbelwelle entspricht der Strömungsgeschwindigkeit, welche wiederum bei allen Machzahlen durch die Variation der Temperatur konstant gehalten wurde. Aus diesem Grund hat die Machzahl nur einen geringen Einfluss auf die entdimensionierten Einflusskoeffizienten der Schaufel $\iota = -1$. Für alle drei Eigenformen weisen die Einflusskoeffizienten der Schaufel $\iota = -1$ in entdimensionierter Amplitude und Phase nur geringe Abweichungen zwischen den einzelnen Machzahlen auf. Die Amplituden der Einflusskoeffizienten der übrigen nicht schwingenden Schaufeln, die primär von den akustischen Wellen beeinflusst werden, sind deutlich geringer als die der Schaufel $\iota = -1$. Deshalb kann der geringe Einfluss der Machzahl auf die qualitativen Verläufe der S-Kurven auf die Dominanz der Wirbelwellen zurückgeführt werden.

Die vorhandenen geringen Abweichungen zwischen den entdimensionierten S-Kurven sind auf den geringen Anteil akustischer Wellen an der aerodynamischen Schaufelkopplung zurückzuführen. Dies wird anhand der ausgeprägten lokalen Extrema nahe der IBPA der akustischen Resonanzen in den S-Kurven in Abbildung 6.3a und Abbildung 6.3b deutlich. Vor allem bei den beiden Eigenformen erster Ordnung 1F und 1T beeinflusst dieser akustische Anteil die aerodynamische Schaufelkopplung. Der Machzahleinfluss auf die akustischen Resonanzen wird in Abbildung 6.5 deutlich. In dieser Abbildung ist der nach (2.103) bestimmte Zusammenhang zwischen dem IBPA und der Machzahl für die akustischen Resonanzen bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ dargestellt. Danach führt eine Zunahme der Machzahl zu einer Verschiebung der akustischen Resonanzen zu betragsmäßig größeren IBPA. Für diese geringe reduzierte Frequenz ändern sich die IBPA der akustischen Resonanzen nur wenig mit der Machzahl. Damit beschränkt sich die Verschiebung der akustischen Resonanzen und der lokalen Extrema in den S-Kurven der Abbildungen 6.3a und 6.3b auf einen Bereich kleiner als 40°. Zusammen mit der Dominanz der Wirbelwellen führt diese geringe Verschiebung der lokalen Extrema zu der

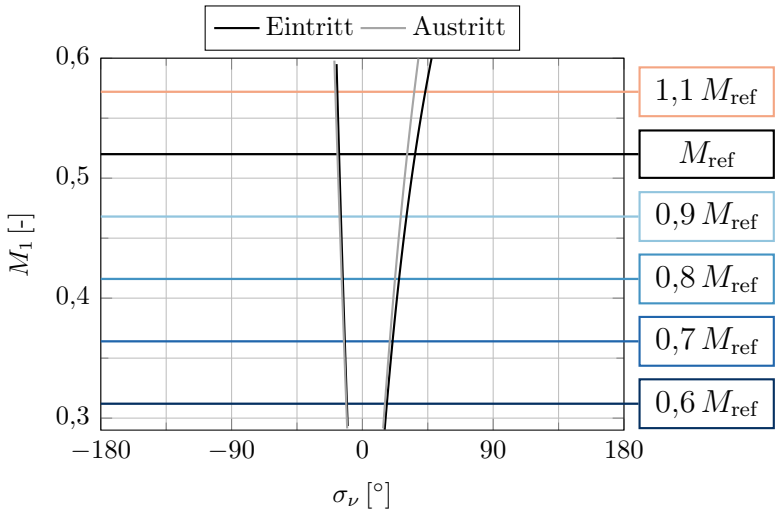
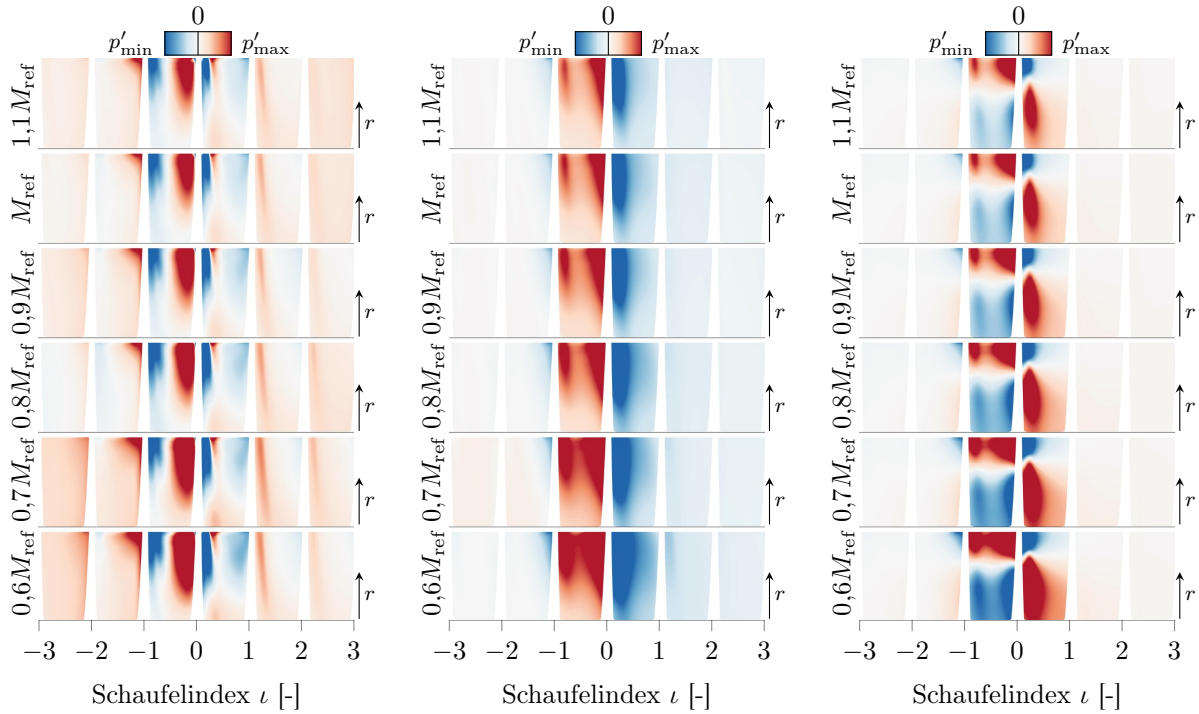


Abbildung 6.5.: Mit (2.103) berechnete Machzahlen der akustischen Resonanzen mit der radialen Modenordnung $n = 0$ im Ein- und Austritt für die reduzierte Frequenz $k_1 = 0{,}65$, aufgetragen über den IBPA. Die untersuchten Machzahlen sind mit horizontalen Linien markiert.

insgesamt guten qualitativen und quantitativen Übereinstimmung der S-Kurven bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$.

Anders als bei der 1F- und 1T-Eigenform treten bei der 2T-Eigenform keine lokalen Extrema in den S-Kurven in Folge akustischer Resonanzen auf. Auch weisen die Einflusskoeffizienten der Schaufeln, die nicht direkte Nachbarn der schwingenden Schaufel sind, Amplituden von nahezu null auf. Diese Beobachtungen deuten darauf hin, dass bei der 2T-Eigenform der Anteil der akustischen Wellen an der aerodynamischen Schaufelkopplung nochmal deutlich geringer ist als bei den Eigenformen erster Ordnung. Eine mögliche Begründung dafür ist, dass die 2T-Eigenform primär akustische Wellen mit radialen Modenordnungen $n > 0$ anregt. Bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ treten jedoch nur akustische Resonanzen mit der radialen Modenordnung $n = 0$ auf. Dementsprechend tritt für die von der 2T-Eigenform angeregten akustischen Wellen höherer radialer Modenordnungen $n > 0$ keine akustische Resonanz auf. Die von der schwingenden Schaufel $\iota = 0$ angeregten Wellen werden zusätzlich in Abbildung 6.6 gezeigt. In dieser Abbildung sind bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ für alle untersuchten Machzahlen und Eigenformen die Realteile des instationären statischen Drucks in Einflusskoeffizientennotation dargestellt. Die gezeigten Ausschnitte liegen in der Axialebene bei mittlerer Sehnenlänge und erstrecken sich in Umfangsrichtung über die Schaufeln $\iota = -3$ bis $\iota = 3$. Die schwingende Schaufel $\iota = 0$ befindet sich in der Mitte des ausgewählten Ausschnitts und die größten Druckamplituden treten in direkter Umgebung dieser Schaufel auf. In den Abbildungen 6.6a und 6.6b wird deutlich, dass die 1F- und 1T-Eigenform primär Wellen mit radialer Modenordnung $n = 0$ anregen. Hingegen wird anhand der Abbildung 6.6c ersichtlich, dass die 2T-Eigenform Wellen mit radialer Modenordnung $n = 1$ dominant anregt. Diese Wellen klingen jedoch deutlich schneller ab, sodass ab den Schaufeln $|\iota| > \pm 1$ Wellen mit der radialen Modenordnung $n = 1$ gar nicht oder nur noch schwach zu erkennen sind.



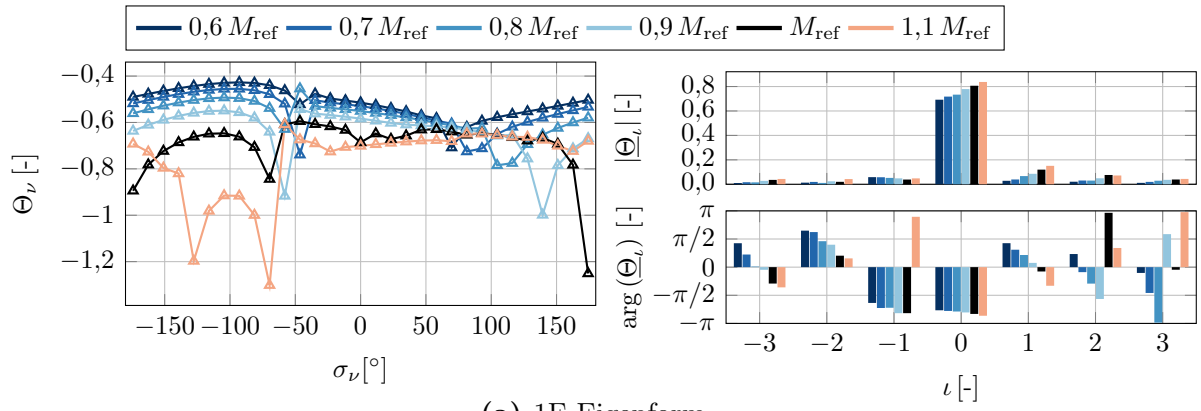
(a) 1F-Eigenform **(b)** 1T-Eigenform **(c)** 2T-Eigenform

Abbildung 6.6.: Realteil des harmonischen Drucks in Einflusskoeffizientennotation in der axialen Ebene bei mittlerer Sehnenlänge über die Schaufeln mit den Indizes $-3 \leq \iota \leq 3$ für die Machzahlen $0{,}6M_{\text{ref}}$ (unten) bis $1{,}1M_{\text{ref}}$ (oben) und die Eigenformen 1F, 1T und 2T bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$

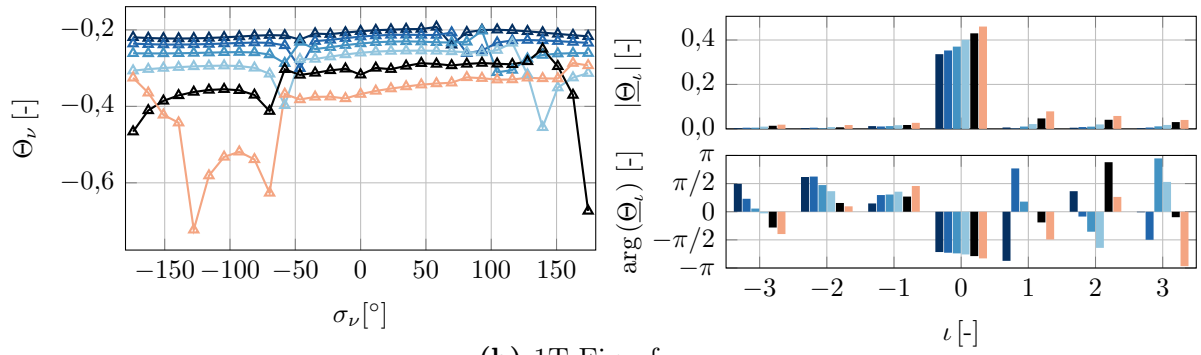
Insgesamt ist der Einfluss der Machzahl auf die entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ größer als der Einfluss des Gases. Bei der geringen reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ dominieren die Wirbelwellen die aerodynamische Schaufelkopplung. Die Abweichungen sind daher primär auf den Anstieg der entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten der schwingenden Schaufel $\iota = 0$ mit der Machzahl zurückzuführen. Die Ursache für diesen Anstieg der entdimensionierten Amplituden kann an dieser Stelle jedoch nicht geklärt werden. Auf die Einflusskoeffizienten der nicht schwingenden Schaufeln und damit den qualitativen Verlauf der S-Kurven hat die Machzahl nur einen geringen Einfluss.

6.2.2. Reduzierte Frequenz $\mathbf{k_1 = 2{,}37}$

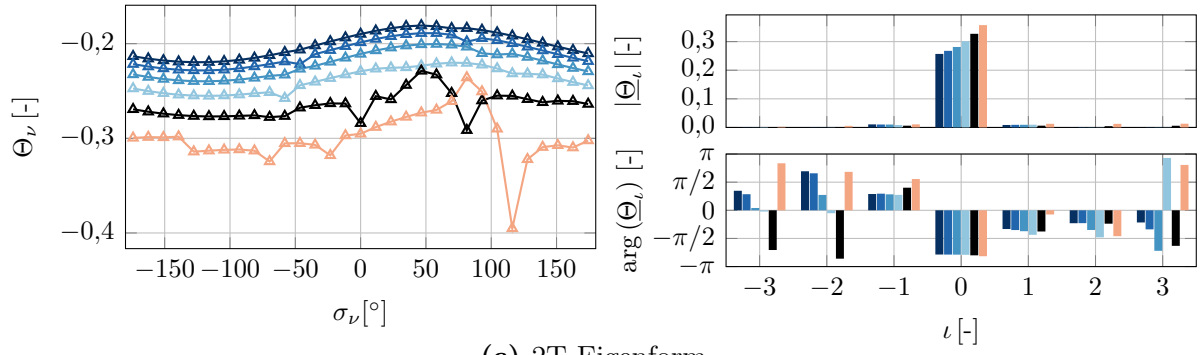
Analog zur Abbildung 6.3 sind in Abbildung 6.7 links die entdimensionierten S-Kurven und rechts die entdimensionierten Amplituden und Phasen der Einflusskoeffizienten für alle drei untersuchten Eigenformen bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ dargestellt. Insgesamt ist der Einfluss der Machzahl auf die entdimensionierten S-Kurven und Einflusskoeffizienten aller Eigenformen für diese reduzierte Frequenz größer, als bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$. Im Vergleich zur reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ weisen die entdimensionierten S-Kurven bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ eine größere Verschiebung zu kleineren entdimensionierten Arbeiten mit steigender Machzahl auf. Diese



(a) 1F-Eigenform



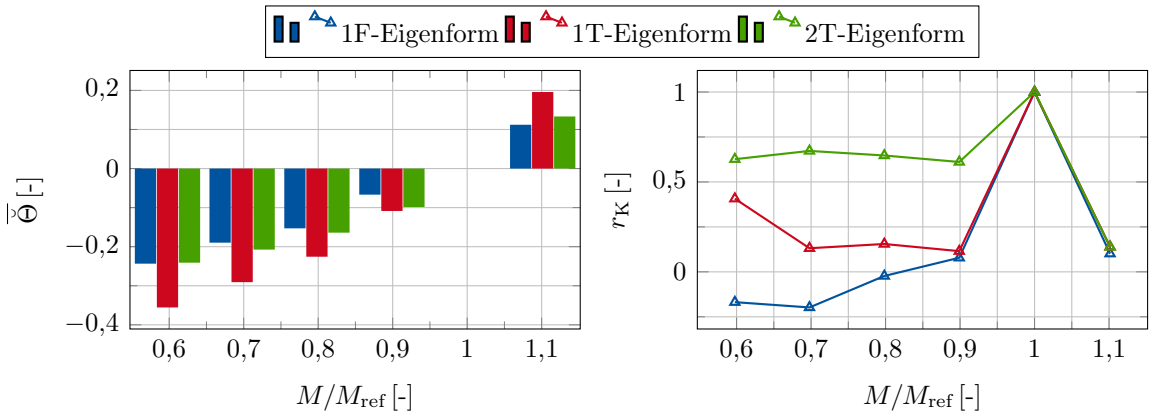
(b) 1T-Eigenform



(c) 2T-Eigenform

Abbildung 6.7.: Nach (2.94) entdimensionierte aerodynamische Arbeiten Θ der untersuchten Machzahlen und Eigenformen bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$. Dargestellt als S-Kurven Θ_ν für alle IBPA σ_ν (links) sowie als Einflusskoeffizienten Θ_ι der Schaufelindizes $-3 \leq \iota \leq 3$ in Amplitude $|\underline{\Theta}_\iota|$ und Phase $\arg(\underline{\Theta}_\iota)$ (rechts).

größere Verschiebung kann wiederum auf den größeren Anstieg der entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten der schwingenden Schaufel $\iota = 0$ mit der Machzahl zurückgeführt werden. Somit sind auch die nach (4.5) bestimmten und in Abbildung 6.8a dargestellten mittleren relativen Abweichungen der entdimensionierten S-Kurven größer als bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$. Diese mittleren relativen Abweichungen liegen im Bereich von $-24\,\%$ bis $11\,\%$ bei der 1F-Eigenform, $-35\,\%$ bis $20\,\%$ bei der 1T-Eigenform und $-24\,\%$ bis $13\,\%$ bei der 2T-Eigenform.



(a) Relative Abweichungen **(b)** Korrelationskoeffizienten

Abbildung 6.8.: Mit (4.5) bestimmte mittlere relative Abweichungen $\overline{\breve{\Theta}}$ und mit (4.6) bestimmte Korrelationskoeffizienten r_{K} der S-Kurven der untersuchten Machzahlen bezogen auf die S-Kurven der Referenzmachzahl für die reduzierte Frequenz $k_1 = 2{,}37$

Gleichzeitig ist der Einfluss der Machzahl auf diese Phasen der Einflusskoeffizienten ebenfalls deutlich größer als bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$. Anders als bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ beeinflusst somit die Machzahl bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ auch die qualitativen Verläufe der S-Kurven. Es liegt keine Ähnlichkeit mehr zwischen den Verläufen der S-Kurven der unterschiedlichen Machzahlen vor. In Abbildung 6.8b sind die mit (4.6) bestimmten Korrelationskoeffizienten bezogen auf die Referenzmachzahl dargestellt. Diese Korrelationskoeffizienten sind mit minimalen Werten von $r_{\mathrm{K}} = -0{,}2$ für die 1F-Eigenform, $r_{\mathrm{K}} = 0{,}1$ für die 1T-Eigenform und $r_{\mathrm{K}} = 0{,}14$ für die 2T-Eigenform bei der Machzahl $1{,}1M_{\mathrm{ref}}$ deutlich geringer im Vergleich zur reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$. Bei diesen geringen Korrelationskoeffizienten liegt keine Ähnlichkeit mehr zwischen den Verläufen der S-Kurven der unterschiedlichen Machzahlen vor. Lediglich die S-Kurven der 2T-Eigenformen bei den Machzahlen unterhalb der Referenzmachzahl weisen mit Korrelationskoeffizienten größer als 0,6 noch eine Ähnlichkeit zu den S-Kurven der Referenzmachzahl auf.

Die Amplituden der Einflusskoeffizienten der nicht schwingenden Schaufel $\iota = -1$ sind bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ in derselben Größenordnung wie die Amplituden der Einflusskoeffizienten der übrigen nicht schwingenden Schaufeln. Das deutet darauf hin, dass der Anteil der Wirbelwellen an der aerodynamischen Schaufelkopplung mit steigender Frequenz abgenommen hat und jetzt die akustischen Wellen dominieren. Zusätzlich weisen die S-Kurven ausgeprägtere lokale Extrema der akustischen Resonanzen auf als bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$. Diese lokalen Extrema verschieben sich mit steigender Machzahl zu betragsmäßig größeren IBPA. Diese größere Verschiebung zeigt auch der nach (2.108) berechnete Zusammenhang zwischen der Machzahl und dem IBPA der akustischen Resonanzen bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ in Abbildung 6.9. Im Vergleich zu den Verläufen bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ erstrecken sich bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ die akustischen Resonanzen der radialen Modenordnung $n = 0$ über einen bis zu 130° breiten Bereich. Dies führt dazu, dass sich die lokalen Extrema in den S-Kurven ebenfalls innerhalb eines Bereichs von bis zu 130° verschieben

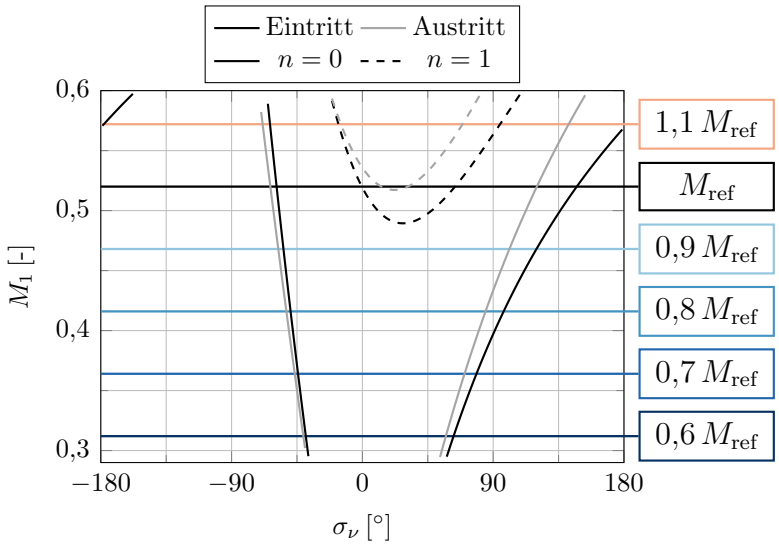
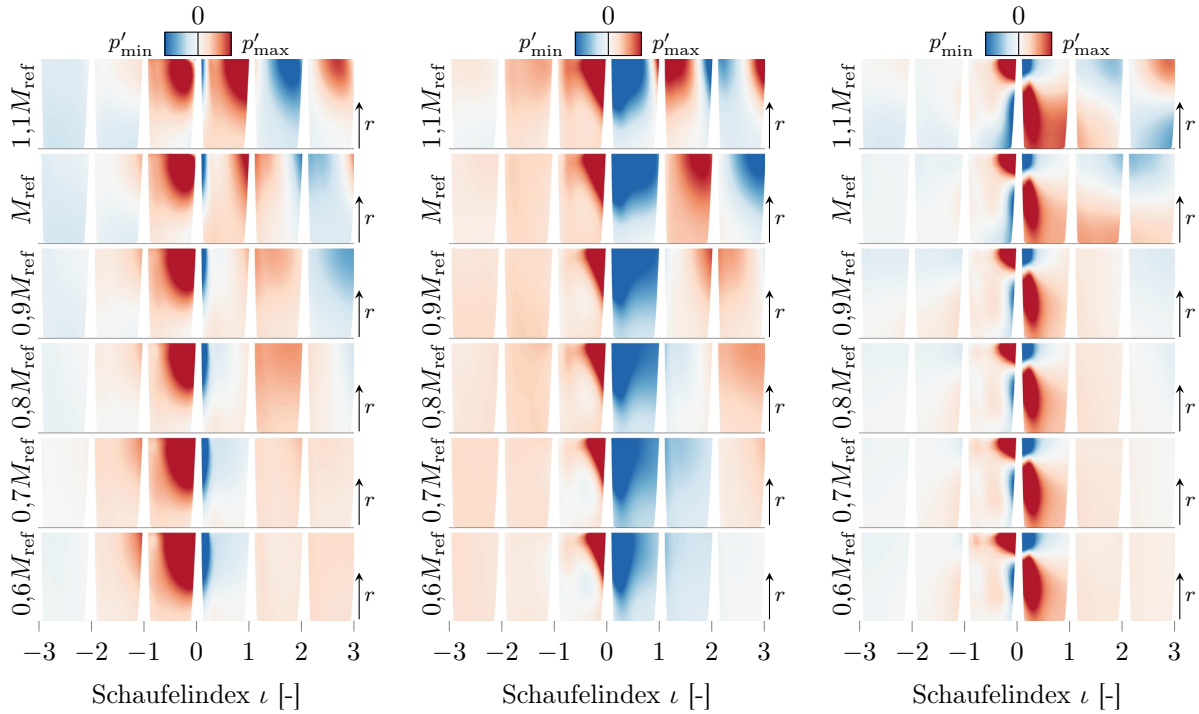


Abbildung 6.9.: Mit (2.103) berechnete Machzahlen der akustischen Resonanzen im Ein- und Austritt für die reduzierte Frequenz $k_1 = 2{,}37$, aufgetragen über den IBPA. Die untersuchten Machzahlen sind mit horizontalen Linien markiert.

und die Unterschiede in den Verläufen der S-Kurven entsprechend groß werden. Zusätzlich sind ab der Referenzmachzahl akustische Wellen mit der radialen Modenordnung $n = 1$ ausbreitungsfähig. Somit treten akustische Resonanzen der radialen Modenordnung $n = 1$ ab der Referenzmachzahl und folglich zusätzliche lokale Extrema in den S-Kurven auf. Bei den Eigenformen erster Ordnung 1F und 1T sind diese lokalen Extrema jedoch nur wenig ausgeprägt, da von diesen Eigenformen primär akustische Wellen der radialen Modenordnung $n = 0$ angeregt werden. Diese primäre Anregung akustischer Wellen mit der radialen Modenordnung $n = 0$ zeigen die in den Abbildungen 6.10a und 6.10b dargestellten Realteile des instationären statischen Drucks in Einflusskoeffizientennotation für die 1F- und 1T-Eigenform. Die hier dominant angeregten akustischen Wellen mit der radialen Modenordnung $n = 0$ weisen nach Abbildung 6.9 bei allen betrachteten Machzahlen akustische Resonanzen auf. Dementsprechend sind die dazugehörigen lokalen Extrema in den S-Kurven der Eigenformen erster Ordnung ebenfalls bei allen Machzahlen ausgeprägt. Die Machzahlvariation verursacht eine deutliche Verschiebung dieser lokalen Extrema, was schließlich die geringen Korrelationskoeffizienten zur Folge hat. Die 2T-Eigenform regt nach Abbildung 6.10c bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ hingegen primär akustische Wellen mit radialer Modenordnung $n = 1$ an. Daher sind in den S-Kurven der 2T-Eigenform die lokalen Extrema der akustischen Resonanzen der radialen Modenordnung $n = 1$ bei Machzahlen größer oder gleich der Referenzmachzahl deutlicher ausgeprägt als bei den beiden Eigenformen erster Ordnung. Zusätzlich sind bei der 2T-Eigenform für die kleineren Machzahlen die lokalen Extrema der akustischen Resonanzen der radialen Modenordnung $n = 0$ geringer ausgeprägt als bei den anderen beiden Eigenformen erster Ordnung. Dies ist dadurch zu begründen, dass akustische Wellen mit der radialen Modenordnung $n = 0$ von der 2T-Eigenform nicht primär angeregt werden. Aus diesen Gründen ist der Einfluss der Machzahl auf die qualitativen Verläufe der S-Kurven der 2T-Eigenform für Machzahlen unterhalb der Referenzmachzahl in Abbildung 6.7c geringer.



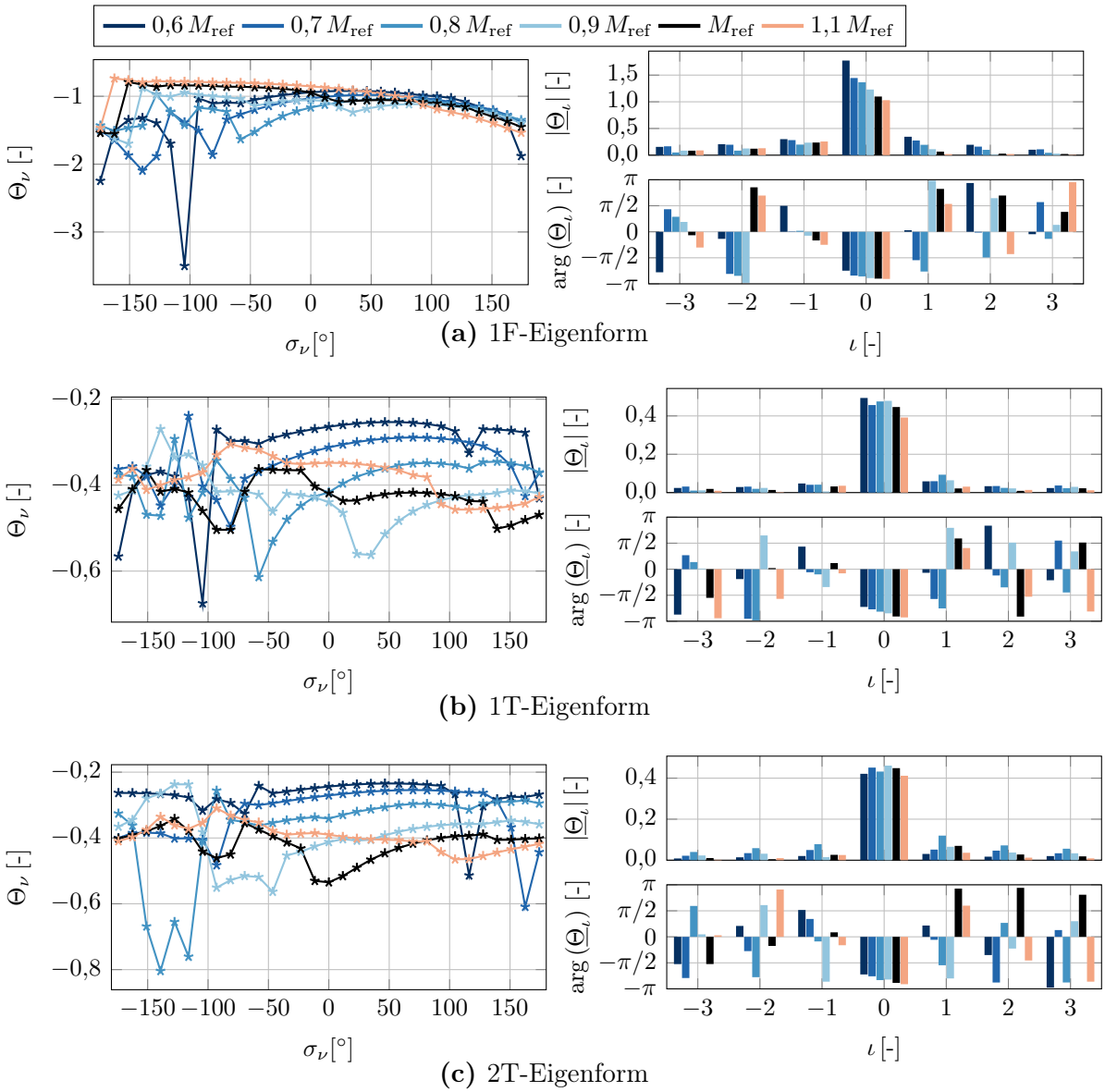
(a) 1F-Eigenform **(b)** 1T-Eigenform **(c)** 2T-Eigenform

Abbildung 6.10.: Realteil des harmonischen Drucks in Einflusskoeffizientennotation in der axialen Ebene bei mittlerer Sehnenlänge über die Schaufeln mit den Indizes $-3 \leq \iota \leq 3$ für die Machzahlen $0{,}6M_{\text{ref}}$ (unten) bis $1{,}1M_{\text{ref}}$ (oben) und den Eigenformen 1F, 1T und 2T bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$

Insgesamt ist der Einfluss der Machzahl auf die entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ für alle Eigenformen deutlich größer als bei der kleineren reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$. Neben einem vergrößerten Anstieg der Amplituden der Einflusskoeffizienten der schwingenden Schaufel kommt es zu einer zunehmenden Dominanz der akustischen Wellen bei der aerodynamischen Schaufelkopplung. Die dominanten akustischen Wellen beeinflussen die Einflusskoeffizienten der nicht-schwingenden Schaufeln und damit den qualitativen Verlauf der S-Kurven. In den Verläufen der S-Kurven werden durch die Variation der Machzahl so vor allem die lokalen Extrema der akustischen Resonanzen verschoben. Diese zu anderen IBPA verschobenen lokalen Extrema führen schließlich zu nahezu keiner Ähnlichkeit in den Verläufen der S-Kurven der einzelnen Machzahlen.

6.2.3. Reduzierte Frequenz $k_1 = 5{,}87$

Für die größte untersuchte reduzierte Frequenz $k_1 = 5{,}87$ sind in Abbildung 6.11 links die entdimensionierten S-Kurven und rechts die entdimensionierten Einflusskoeffizienten für alle drei Eigenformen dargestellt. Analog zur reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ ist hierbei der Einfluss der Machzahl auf die entdimensionierten S-Kurven und auf die entdimensionierten Amplituden und Phasen der Einflusskoeffizienten signifikant. Bei



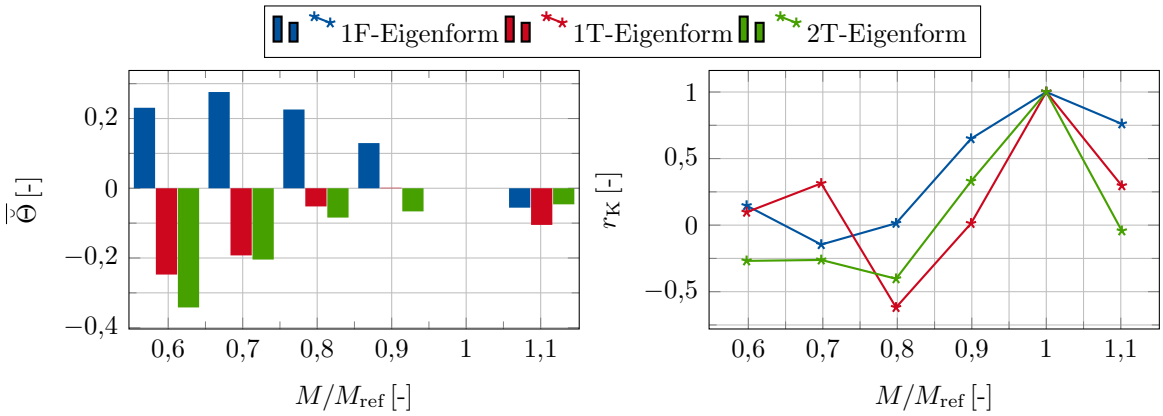
(a) 1F-Eigenform

(b) 1T-Eigenform

(c) 2T-Eigenform

Abbildung 6.11.: Nach (2.94) entdimensionierte aerodynamische Arbeiten Θ der untersuchten Machzahlen und Eigenformen bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 5{,}87$. Dargestellt als S-Kurven Θ_ν für alle IBPA σ_ν (links) sowie als Einflusskoeffizienten Θ_ι der Schaufelindizes $-3 \leq \iota \leq 3$ in Amplitude $|\underline{\Theta}_\iota|$ und Phase $\arg(\underline{\Theta}_\iota)$ (rechts).

dieser hohen reduzierten Frequenz $k_1 = 5{,}87$ sind die in Abbildung 6.12a dargestellten mittleren relativen Abweichungen der entdimensionierten S-Kurven bezogen auf die Werte der Referenzmachzahl in der gleichen Größenordnung wie bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$. Die mittleren relativen Abweichungen liegen im Bereich von $-6\,\%$ bis $28\,\%$ bei der 1F-Eigenform, $-25\,\%$ bis $0{,}1\,\%$ bei der 1T-Eigenform und $-34\,\%$ bis $-5\,\%$ bei der 2T-Eigenform. Bei der 1F-Eigenform sind die Vorzeichen der mittleren relativen Abweichungen gegenüber den niedrigeren reduzierten Frequenzen umgekehrt, sodass mit zunehmender Machzahl die entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten im Mittel zunehmen. Dahingegen sind bei den beiden Torsionseigenformen die Vorzeichen der mittleren relativen Abweichungen sowohl für die Machzahlen kleiner der Referenzmachzahl als



(a) Relative Abweichungen **(b)** Korrelationskoeffizienten

Abbildung 6.12.: Mit (4.5) bestimmte mittlere relative Abweichungen $\overline{\breve{\Theta}}$ und mit (4.6) bestimmte Korrelationskoeffizienten r_{K} der S-Kurven der untersuchten Machzahlen bezogen auf die S-Kurven der Referenzmachzahl für die reduzierte Frequenz $k_1 = 5{,}87$

auch größer der Referenzmachzahl negativ. Das bedeutet, dass bei der Referenzmachzahl die entdimensionierten Arbeiten im Mittel die geringsten Werte aufweisen. Das Verhalten dieser mittleren relativen Abweichungen kann auf die machzahlabhängigen Verläufe der entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten der schwingenden Schaufel $\iota = 0$ zurückgeführt werden. Im Gegensatz zu den kleineren reduzierten Frequenzen weisen rechts in Abbildung 6.11a für die 1F-Eigenform die entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten der schwingenden Schaufel $\iota = 0$ einen monotonen Abfall mit steigender Machzahl auf. Bei den beiden Torsionseigenformen weisen die entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten der schwingenden Schaufel $\iota = 0$ rechts in den Abbildungen 6.11b und 6.11c kein monotones Verhalten mit der Machzahl auf. Die entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten der nicht-schwingenden Schaufeln $\iota \neq 0$ zeigen für die Torsionseigenformen ebenfalls kein monotones Verhalten mit der Machzahl. Dieses nicht monotone Verhalten der Einflusskoeffizienten der Torsionseigenformen spiegelt sich somit im ebenfalls nicht monotonen Verhalten der mittleren relativen Abweichungen mit der Machzahl wider.

Auch die qualitativen Verläufe der S-Kurven unterscheiden sich zum Teil deutlich von den Verläufen bei der Referenzmachzahl. Deutlich wird die Abweichung durch die in Abbildung 6.12b dargestellten Korrelationskoeffizienten mit minimalen Werten von $r_{\mathrm{K}} = -0{,}15$ für die 1F-Eigenform, $r_{\mathrm{K}} = -0{,}62$ für die 1T-Eigenform und $r_{\mathrm{K}} = -0{,}4$ für die 2T-Eigenform. Somit hat sich im Vergleich zur reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ die qualitative Ähnlichkeit der S-Kurven der unterschiedlichen Machzahlen noch einmal verringert. Der Grund dafür ist vor allem die Zunahme der Anzahl lokaler Extrema der akustischen Resonanzen in den S-Kurven. In Abbildung 6.13 ist diesbezüglich der Zusammenhang zwischen Machzahl und IBPA der akustischen Resonanzen für die reduzierte Frequenz $k_1 = 5{,}87$ dargestellt. Bei dieser hohen reduzierten Frequenz sind im betrachteten Machzahlbereich bis zu vier radiale Modenordnungen ausbreitungsfähig. Damit gehen bis zu 13 akustische Resonanzen einher, die potenziell lokale Extrema in den S-Kurven hervorrufen können. Der Großteil dieser Resonanzen liegt dabei bei

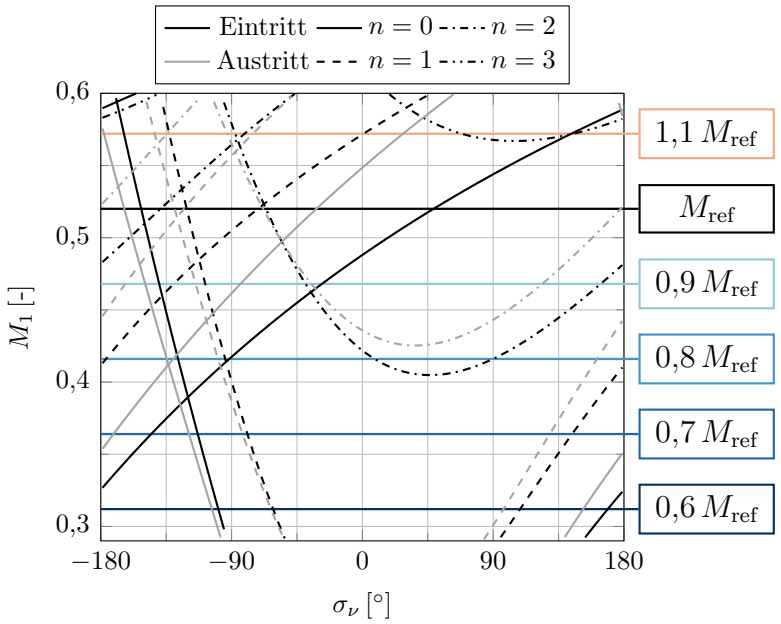
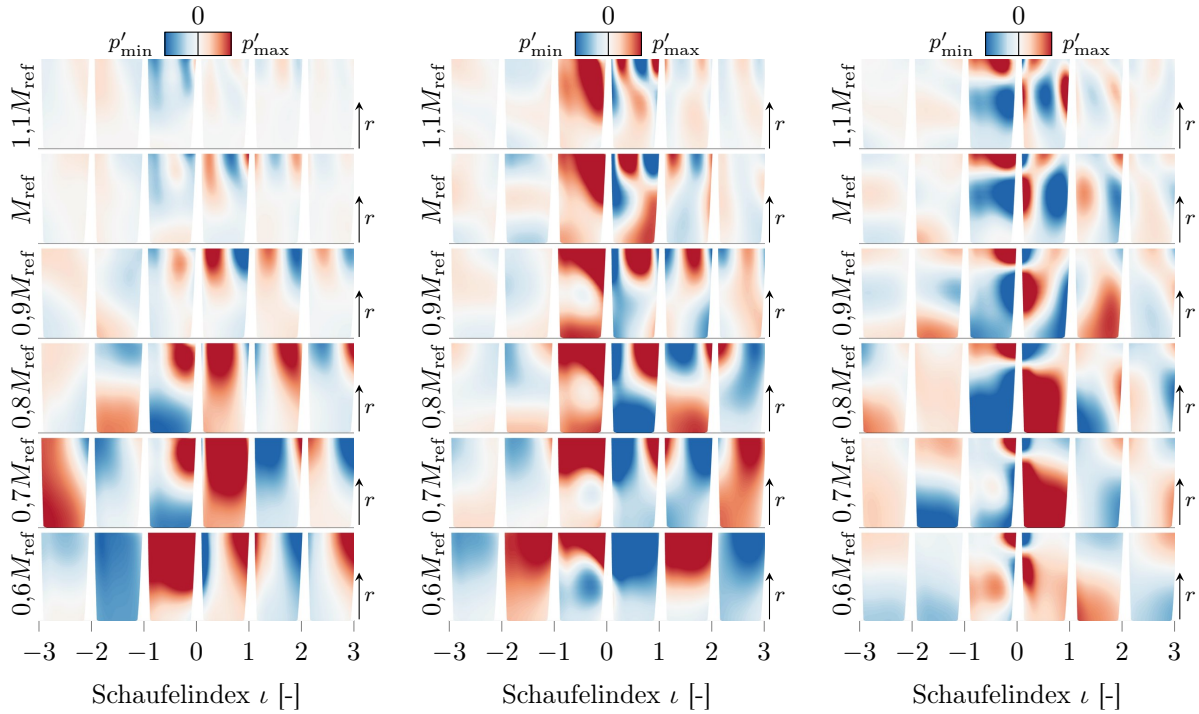


Abbildung 6.13.: Mit (2.103) berechnete Machzahlen der akustischen Resonanzen im Ein- und Austritt für die reduzierte Frequenz $k_1 = 5{,}87$, aufgetragen über den IBPA. Die untersuchten Machzahlen sind mit horizontalen Linien markiert.

negativen IBPA. In diesem Bereich treten somit auch die meisten lokalen Extrema in den S-Kurven auf, was in Abbildung 6.11 bei allen Eigenformen deutlich zu erkennen ist. Bei der 1F-Eigenform treten jedoch weniger lokale Extrema in den S-Kurven auf als bei den beiden Torsionseigenformen. Die lokalen Extrema, die in den S-Kurven der 1F-Eigenform auftreten, liegen nach Abbildung 6.13 in der Nähe der akustischen Resonanzen der radialen Modenordnungen $n \leq 1$. Ein möglicher Grund für diese unterschiedlichen Verläufe der S-Kurven ist, dass die 1F-Eigenform im Gegensatz zu den beiden Torsionseigenformen bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 5{,}87$ primär akustische Moden mit den radialen Modenordnungen $n \leq 1$ anregt. Dies wird auch anhand der Realteile des instationären statischen Drucks in Einflusskoeffizientennotation in Abbildung 6.14 deutlich. Im Gegensatz zu den instationären Drücken der Torsionseigenformen in den Abbildungen 6.14b und 6.14c sind bei den Drücken der 1F-Eigenform in Abbildung 6.14a maximal radiale Modenordnungen $n = 1$ sichtbar. Wenn von der 1F-Eigenform somit nur akustische Moden mit radialen Modenordnungen $n \leq 1$ angeregt werden, so ist bis zur Referenzmachzahl der Bereich positiver IBPA frei von akustischen Resonanzen. Daher weisen die S-Kurven der 1F-Eigenform in Abbildung 6.11a im Bereich positiver IBPA keine deutlich ausgeprägten lokalen Extrema auf. Anders als bei den beiden geringeren reduzierten Frequenzen regt bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 5{,}87$ nach den Abbildungen 6.14b und 6.14c nicht nur die 2T-Eigenform, sondern auch die 1T-Eigenform primär akustische Wellen mit höheren radialen Modenordnungen $n > 0$ an. Aus diesem Grund befinden sich in den S-Kurven in Abbildung 6.11b und Abbildung 6.11c lokale Extrema im gesamten IBPA Bereich. Weiterhin werden nach Abbildung 6.13 akustische Wellen mit der radialen Modenordnung $n = 2$ für Machzahlen größer gleich $0{,}8 M_{\text{ref}}$ ausbreitungsfähig. Dies führt dazu, dass bei den Torsionseigenformen im Gegensatz zu der 1F-Eigenform ab dieser Machzahl zusätzliche lokale Extrema in den S-Kurven auftreten. Aus diesen Gründen



(a) 1F-Eigenform **(b)** 1T-Eigenform **(c)** 2T-Eigenform

Abbildung 6.14.: Realteil des harmonischen Drucks in Einflusskoeffizientennotation in der axialen Ebene bei mittlerer Sehnenlänge, über die Schaufeln mit den Indizes $-3 \leq \iota \leq 3$ für die Machzahlen $0{,}6M_{\text{ref}}$ (unten) bis $1{,}1M_{\text{ref}}$ (oben) und den Eigenformen 1F, 1T und 2T bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 5{,}87$

unterscheiden sich die Verläufe der S-Kurven der Torsionseigenformen unter Machzahlvariation deutlicher voneinander als bei der 1F-Eigenform. Damit weisen die S-Kurven der Torsionseigenformen bei nahezu allen Machzahlen kleinere Korrelationskoeffizienten auf als die S-Kurven der 1F-Eigenform.

Insgesamt ist der Einfluss der Machzahl auf die entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 5{,}87$ am größten. Hier weisen die S-Kurven aller Eigenformen keine Ähnlichkeit mehr zwischen den untersuchten Machzahlen auf. Diese fehlende Ähnlichkeit ist vor allem auf den Einfluss der Machzahl auf die lokalen Extrema der akustischen Resonanzen in den S-Kurven zurückzuführen. Im betrachteten Machzahlbereich sind akustische Wellen mit mehreren radialen Modenordnungen ausbreitungsfähig, deren Resonanzen sich unter Machzahlvariation über einen deutlich größeren IBPA Bereich erstrecken als bei den beiden geringeren reduzierten Frequenzen. Dadurch verschieben sich die lokalen Extrema ebenfalls über einen größeren IBPA Bereich und die qualitative Ähnlichkeit der S-Kurven ist noch geringer als bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$.

Zusammenfassend zeigen die Untersuchungen in diesem Kapitel, dass der Einfluss der Machzahl auf die aerodynamischen Dämpfungen wesentlich größer ist als der alleinige Einfluss des Gases. Deshalb ist für die Übertragung der aerodynamischen Dämpfungen von Luft auf ein anderes Gas die Berücksichtigung des Einflusses der Machzahl unabdingbar.

Je größer die reduzierte Frequenz ist, desto weniger Anteil haben die nahezu machzahlunabhängigen Wirbelwellen an der aerodynamischen Schaufelkopplung und umso größer wird der Anteil akustischer Wellen. Weiterhin steigt mit zunehmender reduzierter Frequenz die Anzahl ausbreitungsfähiger radialer Modenordnungen akustischer Wellen. Je nach Eigenform und Frequenz werden akustische Wellen mit unterschiedlichen radialen Modenordnungen angeregt. Somit ist der Einfluss der Machzahl auf die aerodynamischen Dämpfungen sowohl abhängig von der Eigenform als auch der Ausbreitungsfähigkeit der von dieser Eigenform angeregten radialen Modenordnungen.

7. Transformation aerodynamischer Dämpfungen bei Machzahlvariationen

Die vorangegangenen Einflussuntersuchungen zeigen, dass der isolierte Einfluss des Gases auf die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten direkt proportional zum dynamischen Druck ist. Unter Einhaltung Mach'scher Ähnlichkeit können damit die S-Kurven über eine alleinige Skalierung nahezu exakt von einem Gas zu einem anderen Gas übertragen werden. Der Einfluss der Machzahl auf die aerodynamischen Arbeiten ist hingegen ungleich größer. Deshalb reicht eine einfache Skalierung nicht mehr aus, um die S-Kurven von einer Machzahl zu einer anderen Machzahl zu übertragen. Für die Übertragung der aerodynamischen Arbeiten zwischen unterschiedlichen Machzahlen ist daher eine Transformationsmethode erforderlich, die über eine alleinige Skalierung hinausgeht. Eine solche Methode wird in diesem Kapitel entwickelt und angewandt, um damit die S-Kurven der Referenzmachzahl auf die in Kapitel 6 untersuchten Machzahlen zu transformieren. Ein Vergleich mit den bei den jeweiligen Machzahlen numerisch berechneten Einflusskoeffizienten und S-Kurven aus Kapitel 6.2 dient schließlich der Bestimmung der Genauigkeit der Methode.

7.1. Transformationsmethode aerodynamischer Dämpfungen

In diesem Abschnitt wird eine Methode vorgestellt, die die Transformation der S-Kurve einer Machzahl in die S-Kurve einer anderen Machzahl ermöglicht. Der zentrale Bestandteil dieser Transformationsmethode ist neben der Skalierung nach (2.94) eine Korrektur der Phasen der Einflusskoeffizienten mittels einer machzahlabhängigen Phasenverschiebung. Die Voraussetzungen dafür sind konstante Strömungswinkel sowie konstante reduzierte Frequenzen. Für den in dieser Arbeit betrachteten Anwendungsfall aerodynamisch fremderregter Schwingungen sind diese Voraussetzungen für unterschiedliche Gase nach Kapitel 2.5.2 gegeben. Als Eingangsgrößen dienen die mit (2.94) entdimensionierten S-Kurven der Referenzmachzahl M_{ref}. Das Ergebnis ist die zur anderen Machzahl transformierte entdimensionierte S-Kurve, die schließlich in logarithmische Dekremente für die Abschätzung auftretender Schwingspannungen übertragen werden kann. Eine solche Abschätzung ist allerdings kein Bestandteil dieser Arbeit und wird daher nicht genauer betrachtet.

Die Transformationsmethode umfasst die Schritte

1. Fouriertransformation der entdimensionierten S-Kurven der Referenzmachzahl,
2. Phasenkorrektur der entdimensionierten Einflusskoeffizienten der Referenzmachzahl,
3. inverse Fouriertransformation der phasenkorrigierten entdimensionierten Einflusskoeffizienten sowie
4. Berechnung des logarithmischen Dekrements.

Die Skalierung erfolgt über die Entdimensionierung der aerodynamischen Arbeiten. Im Folgenden werden diese einzelnen Schritte näher erläutert.

Schritt 1: Fouriertransformation der entdimensionierten S-Kurven

Für die machzahlabhängige Phasenkorrektur werden die entdimensionierten Einflusskoeffizienten in der in (2.60) definierten Indizierung ι benötigt. Wenn die entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten der Referenzmachzahl als S-Kurven in der Knotendurchmesserindizierung $\nu \in \{-KD_{\max}, \ldots, KD_{\max}\}$ vorliegen, müssen diese zuerst mit (2.42) in die Indizierung der umlaufenden Eigenform o transformiert werden. In dieser Indizierung können die Einflusskoeffizienten über eine Fouriertransformation analog zu (2.59) mit

$$\underline{\Theta}_i = \frac{1}{N} \sum_{o=0}^{N-1} \underline{\Theta}_o e^{j\frac{2\pi io}{N}} \tag{7.1}$$

bestimmt werden. Über (2.61) werden daraus schließlich die Einflusskoeffizienten in der Indizierung ι bestimmt.

Schritt 2: Phasenverschiebung der Einflusskoeffizienten

Die schwingende Schaufel regt akustische Wellen an. In der Betrachtungsweise der Einflusskoeffizienten haben die Wellen die Wellenlänge λ. Die Wellenlänge ist wiederum abhängig von der Schallgeschwindigkeit a und der Strömungsgeschwindigkeit im Relativsystem w. Beim Auftreffen auf die benachbarten Schaufeln weisen die Wellen eine von der Wellenlänge λ und Teilung τ abhängige Phase φ_ι auf. Dadurch beeinflussen die akustischen Wellen die Phasen der Einflusskoeffizienten. Bei einer Machzahlvariation ändert sich die Schallgeschwindigkeit und damit die Wellenlänge der akustischen Wellen. Da die Teilung konstant ist, ändert sich die Phase der Einflusskoeffizienten. Bei der Transformation der Einflusskoeffizienten auf eine andere Machzahl müssen deshalb die Phasen in Abhängigkeit der veränderten Schallgeschwindigkeit verschoben werden. Dafür ist eine Vorhersage der Phasendifferenzen zur Referenzmachzahl notwendig.

Zur Herleitung einer Methode zur Bestimmung der Phasendifferenzen wird eine zweidimensionale Kaskade angenommen, bei der die Schallwellen sich nur in Umfangsrichtung ausbreiten. Mit der Schallgeschwindigkeit a und der Relativgeschwindigkeit in Umfangsrichtung w_u entsprechen die Phasengeschwindigkeiten in (+) und entgegen (−) Rotationsrichtung des Rotors

$$v^{\pm} = a \mp w_u. \tag{7.2}$$

Daraus ergeben sich mit der konstanten Kreisfrequenz der Schwingung ω die Wellenlängen

$$\lambda^{\pm} = \frac{2\pi v^{\pm}}{\omega}. \tag{7.3}$$

In Abbildung 7.1 ist schematisch dargestellt, wie sich die Wellenlängen mit der Schallgeschwindigkeit ändern. Die unterschiedlichen Phasen auf den Schaufeln $\iota = -1$ und $\iota = 1$ sind dabei eindeutig erkennbar.

Die Teilung

$$\tau = \frac{2\pi r}{N} \tag{7.4}$$

ist abhängig vom Radius r der gewählten Schnittebene des zweidimensionalen Kaskadenmodells sowie der Schaufelzahl N. Die Phasendifferenz $\Delta\varphi_\iota$ am Ort der Schaufel ι bestimmt sich allgemein aus der Veränderung des Verhältnisses von Teilung zu Wellenlänge

$$\Delta\varphi_\iota = -|\iota| \left(2\pi \frac{\tau}{\lambda} - 2\pi \frac{\tau_{\text{ref}}}{\lambda_{\text{ref}}} \right). \tag{7.5}$$

Wie in Kapitel 2.5.2 dargelegt, wird in dieser Arbeit von konstanten Strömungswinkeln im Relativsystem β, reduzierten Frequenzen k, Schaufelzahlen N und Sehnenlängen l ausgegangen. Zusammen mit (7.2), (7.3), der Definition der reduzierten Frequenz (2.85) sowie der Formulierung der Umfangsgeschwindigkeit als Umfangsmachzahl in Abhängigkeit des relativen Strömungswinkels β (2.100) wird somit (7.5) zu

$$\Delta\varphi_\iota = -\frac{2\pi|\iota|kr}{N\,l} \left(\frac{1}{M^{-1} + \operatorname{sgn}(\iota)\cos\beta} - \frac{1}{M_{\text{ref}}^{-1} + \operatorname{sgn}(\iota)\cos\beta} \right). \tag{7.6}$$

Der für die zweidimensionale Schnittebene gewählte Radius hat dabei einen linearen Einfluss auf die Phasendifferenz. Im Rahmen dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass der Radius an der Schaufelspitze den größten Einfluss auf die Einflusskoeffizienten hat. Denn an der Schaufelspitze ist die Amplitude der Schaufelschwingung bei allen

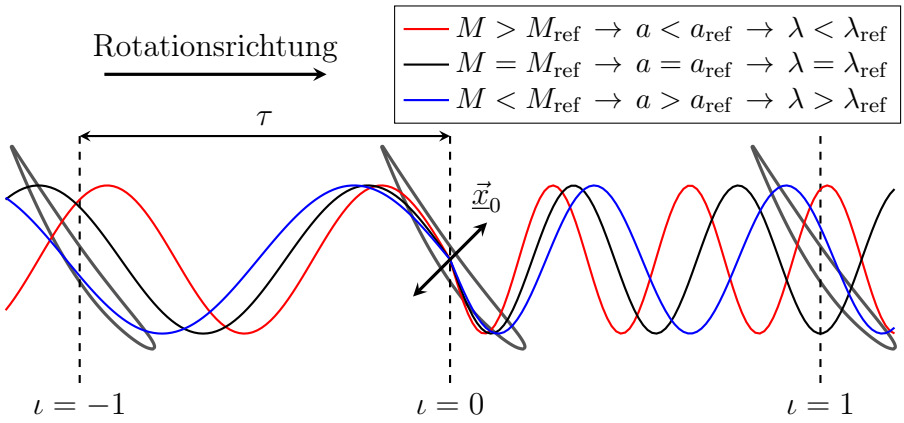


Abbildung 7.1.: Illustration der vereinfachten zweidimensionalen Ausbreitung von Schallwellen, die von der mittleren schwingenden Schaufel $\iota = 0$ ausgehen. Bei unterschiedlichen Machzahlen und konstanter reduzierter Frequenz.

betrachteten Eigenformen am größten, weshalb dort die größten Druckschwankungen induziert werden. Zusätzlich ist die Vorhersage der Phasendifferenz abhängig vom gewählten Strömungszustand. Stromauf und stromab der Schaufel unterscheiden sich sowohl die Machzahl und der Drall als auch die reduzierte Frequenz. Deshalb wird in den nachfolgenden Abschnitten die Phasenverschiebung sowohl mit den Strömungszuständen am Eintritt als auch am Austritt bestimmt. Die entdimensionierten Einflusskoeffizienten der Referenzmachzahl M_{ref} werden schließlich mit (7.6) über

$$\underline{\Theta}_{\iota} = \underline{\Theta}_{\iota,\mathrm{ref}} e^{j\Delta\varphi_{\iota}} \tag{7.7}$$

phasenverschoben und somit auf eine andere Machzahl übertragen.

Schritt 3: Inverse Fouriertransformation der Einflusskoeffizienten

Im dritten Schritt werden die phasenverschobenen Einflusskoeffizienten wieder zurück in die TWM-Notation umgerechnet. Dazu sind zunächst die Einflusskoeffizienten mit der Schaufelindizierung $i \in \{0, \ldots, N-1\}$ zu bestimmen. Über (2.62) werden die Einflusskoeffizienten von der Schaufelindizierung ι in die Schaufelindizierung i übertragen. Analog zu (4.2) werden die entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten von der Einflusskoeffizientennotation in die TWM-Notation überführt. Dafür werden zunächst die entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten in der Indizierung einer umlaufenden Eigenform o zu

$$\underline{\Theta}_{o} = \sum_{i=0}^{N-1} \underline{\Theta}_{i} e^{-j\frac{2\pi i o}{N}} \tag{7.8}$$

bestimmt. Anschließend werden die entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten von der Indizierung der umlaufenden Eigenform $\underline{\Theta}_{o}$ mit (2.41) in die Knotendurchmesserindizierung $\underline{\Theta}_{\nu}$ übertragen. Damit liegen schließlich die von der Referenzmachzahl auf eine andere Machzahl transformierten entdimensionierten S-Kurven vor.

Schritt 4: Berechnung des logarithmischen Dekrements

In strukturdynamischen Verfahren zur Bestimmung der Schwingspannungen wird die aerodynamische Dämpfung üblicherweise als logarithmisches Dekrement benötigt. Da im Rahmen dieser Dissertation jedoch keine konkreten Schwingungsamplituden bestimmt werden, werden in den nachfolgenden Kapiteln allein die Schritte eins bis drei angewendet. Dennoch wird aus Gründen der Vollständigkeit nachfolgend die Umrechnung der entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten in das logarithmische Dekrement als vierter Schritt dargelegt.

Wenn die S-Kurven bzw. die Einflusskoeffizienten des Referenzverdichters bereits in entdimensionierter Form nach (2.94) vorliegen, ist hier bereits die Skalierung mit den Proportionalitätsfaktoren aus (2.93) erfolgt. Das logarithmische Dekrement eines Knotendurchmessers ν wird nach (2.67) schließlich mit

$$\Lambda_{\nu} = -\Re\left(\underline{\Theta}_{\nu}\right) \frac{\rho_{\infty} w_{\infty} l h \hat{b}^2}{\omega} = -\Re\left(\underline{\Theta}_{\nu}\right) \frac{\rho_{\infty} l^2 h \hat{b}^2}{k} \tag{7.9}$$

bestimmt.

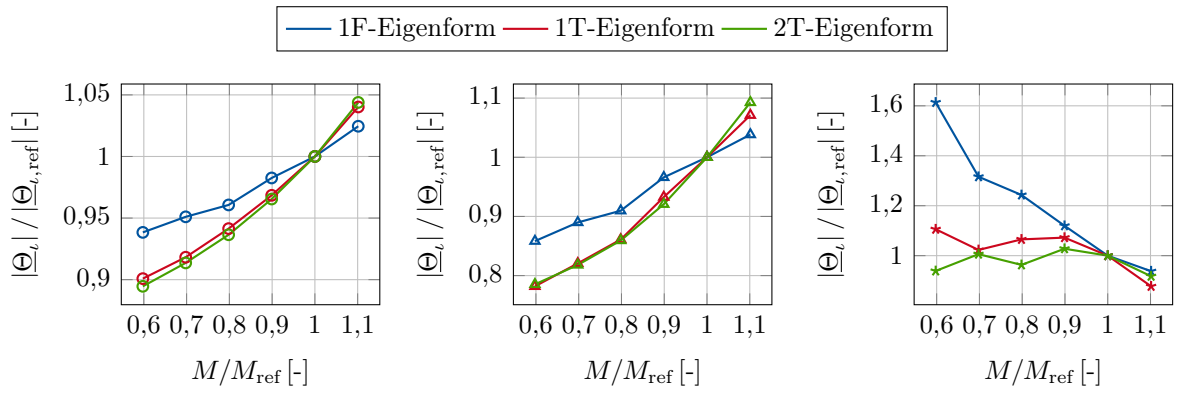
7.2. Transformierte entdimensionierte Einflusskoeffizienten

Aus Kapitel 6 liegen bereits die entdimensionierten Einflusskoeffizienten des Gases Luft bei der Referenzmachzahl M_{ref} vor. Deshalb wird in diesem Kapitel direkt Schritt zwei der in Kapitel 7.1 vorgestellten Transformationsmethode auf diese Einflusskoeffizienten angewandt. Dabei werden die Einflusskoeffizienten zu den fünf in Kapitel 6 betrachteten und in Tabelle 6.1 dargestellten Machzahlen transformiert. Außerdem werden die transformierten Einflusskoeffizienten mit den bei diesen Machzahlen numerisch berechneten Einflusskoeffizienten aus Kapitel 6.2 verglichen. Die Analyse wird dabei getrennt für Amplitude und Phase der Einflusskoeffizienten durchgeführt. In Kapitel 7.2.1 werden zunächst die Amplituden der schwingenden Schaufel sowie in Kapitel 7.2.2 der nicht schwingenden Schaufeln betrachtet. Bei den Analysen der Amplituden wird allein die Skalierbarkeit durch die Entdimensionierung nach (2.94) bewertet, da die Phasenverschiebung keinen Einfluss auf die Amplituden hat. Der Einfluss der Machzahl auf die Phasen der Einflusskoeffizienten wird in Kapitel 7.2.3 untersucht. Hierbei wird die Eignung der Methode zur Übertragung der Phasen von einer Machzahl auf eine andere überprüft.

7.2.1. Amplituden der schwingenden Schaufel $\iota = 0$

In Abbildung 7.2 sind die entdimensionierten Amplituden der schwingenden Schaufel $\iota = 0$ über der Machzahl für alle untersuchten Eigenformen und reduzierten Frequenzen aufgetragen. Die Amplituden sind dabei auf die Amplitude der Referenzmachzahl normiert. Somit wird eine Quantifizierung des Skalierungsfehlers bzw. eine Bewertung der Skalierbarkeit unter Machzahlvariation ermöglicht.

Wie bereits in Kapitel 6.2 festgestellt, ergeben sich für unterschiedliche reduzierte Frequenzen auch unterschiedliche Beziehungen zwischen den Amplituden der Einflusskoeffizienten



(a) $k_1 = 0{,}65$ **(b)** $k_1 = 2{,}37$ **(c)** $k_1 = 5{,}87$

Abbildung 7.2.: Auf die Referenzmachzahl bezogene relative Amplitude der entdimensionierten Einflusskoeffizienten der schwingenden Schaufel $\iota = 0$ in Abhängigkeit der Machzahl für alle untersuchten Eigenformen und reduzierten Frequenzen.

und der Machzahl. Für die beiden niedrigeren reduzierten Frequenzen $k_1 = 0{,}65$ und $k_1 = 2{,}37$ ist der Verlauf aller drei Eigenformen ähnlich einem quadratischen Anstieg mit zunehmender Machzahl. Die Anstiege und damit die Skalierungsfehler der Amplituden aller Eigenformen sind für die reduzierte Frequenz $k_1 = 2{,}37$ mehr als doppelt so groß wie für die reduzierte Frequenz $k_1 = 0{,}65$. Die Verläufe der beiden Torsionseigenformen sind für beide reduzierte Frequenzen $k_1 = 0{,}65$ und $k_1 = 2{,}37$ nahezu identisch. Im Vergleich dazu hängen die Amplituden der Einflusskoeffizienten der 1F-Eigenform weniger von der Machzahl ab. Für die beiden kleineren reduzierten Frequenzen $k_1 = 0{,}65$ und $k_1 = 2{,}37$ sind die Fehler in der Skalierung der Amplituden bei den Torsionseigenformen $\approx 1{,}5$ mal so groß wie bei der 1F-Eigenform. Für die reduzierte Frequenz $k_1 = 5{,}87$ tritt mit zunehmender Machzahl hingegen kein Anstieg der Amplituden der Einflusskoeffizienten der schwingenden Schaufel $\iota = 0$ auf. Die Amplituden der Einflusskoeffizienten der 1F-Eigenform sinken näherungsweise linear mit steigender Machzahl. Dagegen weisen die Amplituden der Einflusskoeffizienten der beiden Torsionseigenformen jeweils einen unterschiedlichen Verlauf mit zunehmender Machzahl auf, der nicht monoton fällt.

Aus der Darstellungsweise der normierten Amplituden über der Machzahl lässt sich kein frequenzübergreifender Zusammenhang feststellen. In Abbildung 7.3 sind daher zusätzlich die normierten Amplituden der entdimensionierten Einflusskoeffizienten über der machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz k_1^* aus (2.89) dargestellt. Diese machzahlkorrigierte reduzierte Frequenz k_1^* entspricht dem Eigenwert der Helmholtz-Differentialgleichung (2.88), welche wiederum eine analytische Beschreibung des durch Schaufelschwingungen entstehenden instationären Drucks darstellt (vgl. Kapitel 2.3.1). Über k_1^* weisen die Verläufe der normierten Amplituden aller Eigenformen für die beiden kleinsten reduzierten Frequenzen $k_1 = 0{,}65$ und $k_1 = 2{,}37$ keinen quadratischen, sondern näherungsweise linearen Anstieg mit der machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz auf. Die Steigung

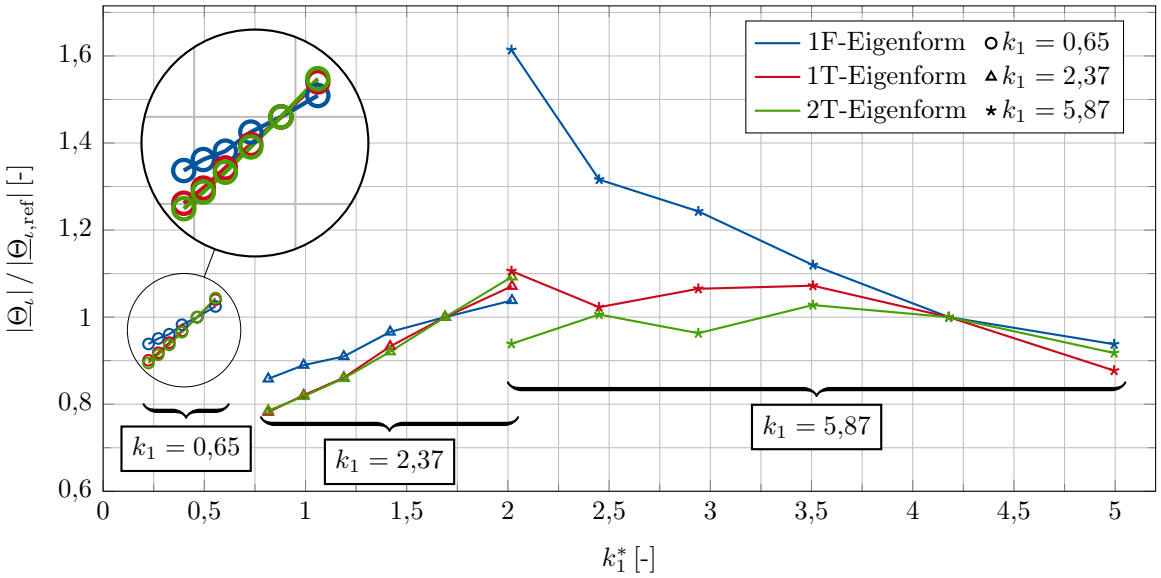


Abbildung 7.3.: Auf die Referenzmachzahl bezogene relative Amplitude der Einflusskoeffizienten der schwingenden Schaufel $\iota = 0$ aller untersuchten Eigenformen bei allen untersuchten reduzierten Frequenzen in Abhängigkeit der machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz k_1^* aus (2.89).

der Verläufe ist für die 1F-Eigenform flacher als für die beiden Torsionseigenformen. Dieser Unterschied in der Steigung zwischen den Eigenformen ist zudem deutlich größer als die Unterschiede in den Steigungen zwischen den reduzierten Frequenzen $k_1 = 0{,}65$ und $k_1 = 2{,}37$ für die jeweiligen Eigenformen. Damit ist der Einfluss der Eigenform auf diese Steigung größer als der Einfluss der reduzierten Frequenz. Dennoch ist für alle drei Eigenformen die Variation und damit die Machzahlabhängigkeit der Amplituden bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ deutlich größer als bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der Einfluss der Machzahl auf die machzahlkorrigierte reduzierte Frequenz k_1^* mit steigender reduzierter Frequenz zunimmt. So wird bei gleicher Machzahlvariation der Bereich von k_1^* mit steigender reduzierter Frequenz größer und die machzahlbedingten Unterschiede in den Amplituden nehmen ebenfalls zu. Analog zu Abbildung 7.2 weisen die normierten Amplituden der Einflusskoeffizienten für die größte reduzierte Frequenz $k_1 = 5{,}87$ in Abbildung 7.3 einen nicht linearen Verlauf über k_1^* auf. Die Amplituden der 1F-Eigenform fallen reziprok mit steigendem k_1^*, wohingegen sich bei den beiden Torsionseigenformen kein eindeutiger Trend erkennen lässt.

Insgesamt deutet die Darstellung der normierten entdimensionierten Amplituden der schwingenden Schaufel $\iota = 0$ in Abbildung 7.3 darauf hin, dass sich diese Amplituden unter einer Variation der Machzahl frequenzübergreifend als Funktion der machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz k_1^* verhalten.[5] Somit kann die Skalierbarkeit der Einflusskoeffizienten der schwingenden Schaufel $\iota = 0$ ebenfalls näherungsweise als Funktion der machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz k_1^* angenommen werden. Zudem zeigen die Unterschiede in den Verläufen der normierten entdimensionierten Amplituden zwischen der 1F-Eigenform und den beiden Torsionseigenformen, dass die Skalierbarkeit dieser Amplituden unter einer Variation der Machzahl von der Eigenform abhängt. Die Verläufe der Amplituden der Torsionseigenformen sind bei den beiden kleineren reduzierten Frequenzen nahezu identisch. Auch bei der größten betrachteten reduzierten Frequenz ähneln sich die Verläufe der Amplituden der Torsionseigenformen und unterscheiden sich zudem deutlich von den Verläufen der 1F-Eigenform. Dies legt die Vermutung nahe, dass der Verlauf der Amplituden der Einflusskoeffizienten der schwingenden Schaufel $\iota = 0$ über k_1^* in erster Linie von der Art der Profilschwingung, z. B. Torsions- oder Biegeschwingung, abhängt. Die Ordnung der Eigenform beeinflusst den Verlauf der Amplituden erst in zweiter Größenordnung.

7.2.2. Amplituden der nicht schwingenden Schaufeln $\iota \neq 0$

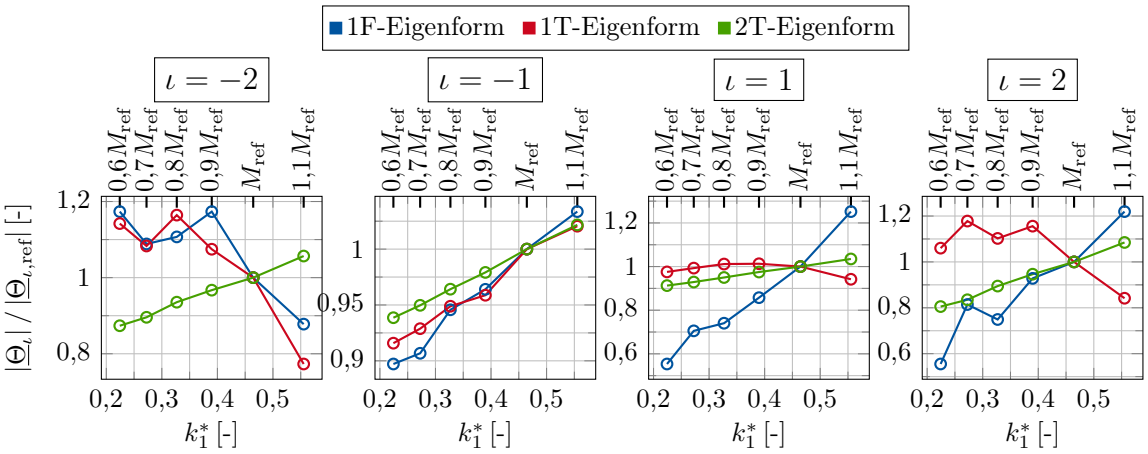
In diesem Abschnitt wird die Skalierbarkeit der Amplituden der Einflusskoeffizienten der nicht schwingenden Schaufeln $\iota \neq 0$ unter Machzahlvariation untersucht. Analog zu Abbildung 7.3 sind in Abbildung 7.4 die entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten der nicht schwingenden Schaufeln über die machzahlkorrigierte reduzierte Frequenz k_1^* aufgetragen. Die Amplituden sind ebenfalls mit den jeweiligen entdimensionierten

[5] Die Abhängigkeit der entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten von k_1^* wird zusätzlich mit einer Parameterstudie bestätigt, die in Anhang B diskutiert wird. Bei dieser Parameterstudie werden die Machzahlvariationen für insgesamt zwölf reduzierte Frequenzen im Bereich $0{,}1 \leq k_1 \leq 7$ durchgeführt.

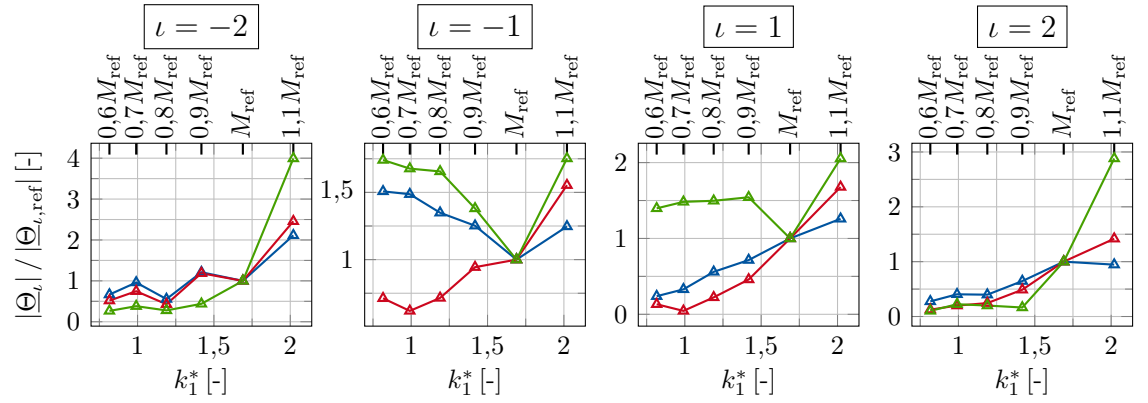
Amplituden der Referenzmachzahl M_{ref} normiert. Die nachfolgenden Untersuchungen beschränken sich auf die vier nicht schwingenden Schaufeln $\iota = \{-2, -1, 1, 2\}$, die in unmittelbarer Umgebung der schwingenden Schaufel $\iota = 0$ liegen. In Abbildung 7.4 sind die Verläufe der normierten Amplituden aller drei untersuchten Eigenformen für alle drei untersuchten reduzierten Frequenzen dargestellt.

Wie bereits in Kapitel 6.2.1 festgestellt, sind für die reduzierte Frequenz $k_1 = 0{,}65$ aufgrund der dominierenden Wirbelwellen die Amplituden der Schaufel -1 die mit Abstand größten aller nicht schwingenden Schaufeln. Für die kleinste betrachtete reduzierte Frequenz $k_1 = 0{,}65$ sind bei allen Schaufeln in Abbildung 7.4a die normierten Amplituden und damit der Skalierungsfehler in derselben Größenordnung wie bei der schwingenden Schaufel in Abbildung 7.3. Die normierten Amplituden aller drei Eigenformen steigen nur für die Schaufel $\iota = -1$ näherungsweise linear mit der machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz k_1^* an. Die größte Steigung aller Eigenformen weist dabei die 1F-Eigenform auf. Außerdem unterscheiden sich die normierten Amplituden der Torsionseigenformen bei Machzahlen kleiner der Referenzmachzahl voneinander. Im Gegensatz zur schwingenden Schaufel beeinflusst die Eigenform dabei die Skalierbarkeit der Einflusskoeffizienten der nicht schwingenden Schaufeln $\iota \neq 0$ für die reduzierte Frequenz $k_1 = 0{,}65$. Zudem ist der Einfluss der Ordnung der Eigenform an den Verläufen der anderen nicht schwingenden Schaufeln in Abbildung 7.4a erkennbar. Bei allen betrachteten nicht schwingenden Schaufeln fällt die Machzahlabhängigkeit der Amplituden bei der 2T-Eigenform am geringsten aus. Der Grund dafür ist, dass die 2T-Eigenform im Gegensatz zu den Eigenformen erster Ordnung 1F und 1T bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ dominant akustische Wellen mit höheren radialen Modenordnungen $n > 0$ anregt. Akustische Wellen mit höherer radialer Modenordnung $n > 0$ sind jedoch bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ nach Abbildung 6.5 in TWM-Notation noch nicht ausbreitungsfähig. In Einflusskoeffizientennotation breiten sich diese Wellen im Vergleich zu den von der 1F- und 1T-Eigenform angeregten Wellen nur stark gedämpft über den Umfang aus (vgl. Abbildung 6.14a). Damit erreichen die von der 2T-Eigenform dominant angeregten akustischen Wellen die nicht schwingenden Schaufeln nur noch sehr abgeschwächt bis gar nicht mehr. Daher fallen die Amplituden der Einflusskoeffizienten der nicht schwingenden Schaufeln für die 1F- und 1T-Eigenform größer aus als bei der 2T-Eigenform. Der Einfluss der Machzahl auf die Amplituden der Eigenformen erster Ordnung ist somit ebenfalls größer, was in einem größeren Skalierungsfehler bei diesen beiden Eigenformen resultiert.

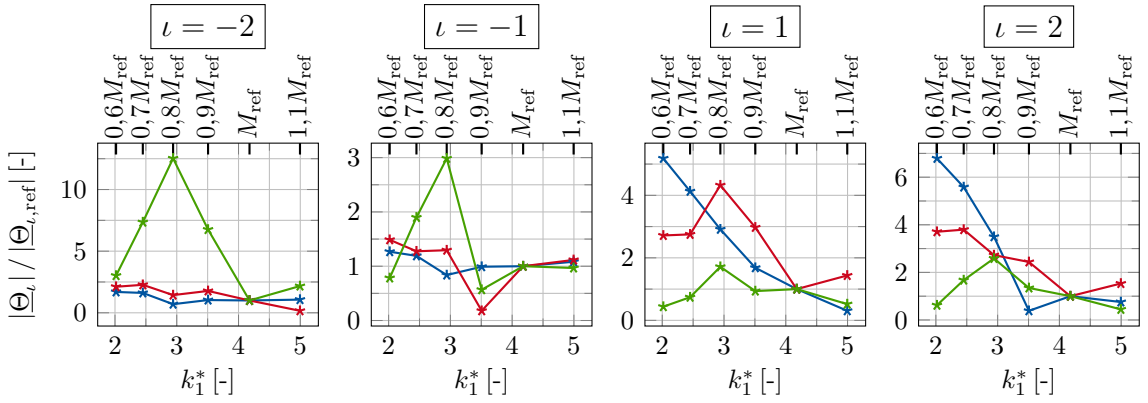
Aus den Verläufen für die beiden größeren reduzierten Frequenzen $k_1 = 2{,}37$ und $k_1 = 5{,}87$ in den Abbildungen 7.4b und 7.4c wird deutlich, dass je größer die reduzierte Frequenz ist, desto stärker ist auch der Einfluss der Machzahl auf die Amplituden der Einflusskoeffizienten der nicht schwingenden Schaufeln $\iota \neq 0$. Denn mit zunehmender reduzierter Frequenz nimmt der Anteil der akustischen Wellen an der aerodynamischen Schaufelkopplung zu und der Anteil der Wirbelwellen ab. Weiterhin werden höhere radiale Modenordnungen akustischer Wellen ausbreitungsfähig. Daher unterscheiden sich die Verläufe der normierten Amplituden über die machzahlkorrigierte reduzierte Frequenz z. T. deutlich zwischen den unterschiedlichen Eigenformen. Für die reduzierte Frequenz $k_1 = 2{,}37$ und die Schaufel $\iota = 1$ weicht insbesondere der Verlauf der 2T-Eigenform von den Verläufen der anderen Eigenformen ab. Von der 2T-Eigenform werden nach Kapitel 6.2 akustische Wellen mit der radialen Modenordnung $n = 1$ primär angeregt.



(a) $k_1 = 0{,}65$



(b) $k_1 = 2{,}37$



(c) $k_1 = 5{,}87$

Abbildung 7.4.: Entdimensionierte Amplituden der Einflusskoeffizienten der nicht schwingenden Schaufeln $\iota = \{-2, -1, 1, 2\}$ normiert mit den Amplituden bei der Referenzmachzahl in Abhängigkeit der machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz k_1^* nach (2.89).

Diese radiale Modenordnung ist für die reduzierte Frequenz $k_1 = 2{,}37$ nach Abbildung 6.9 bis zur Referenzmachzahl nicht ausbreitungsfähig. Daher weisen die akustischen Wellen der 2T-Eigenform hier geringe Druckamplituden auf und die Amplituden der Einflusskoeffizienten sind besser skalierbar als bei den anderen beiden Eigenformen. Ab der

Referenzmachzahl werden diese akustischen Wellen ausbreitungsfähig. Aufgrund der unterschiedlichen Ausbreitungsfähigkeit ergibt sich der unstetige Verlauf der normierten Amplituden der Einflusskoeffizienten der Schaufel $\iota = 1$ für die 2T-Eigenform bei $k_1^* = 1{,}7$ in Abbildung 7.4b. Für alle untersuchten Eigenformen treten bei den nicht schwingenden Schaufeln $\iota = \pm 2$ bis zur Referenzmachzahl ähnliche Verläufe der normierten Amplituden der Einflusskoeffizienten mit der Machzahl auf. Für die höchsten untersuchten Machzahlen sind die Abweichungen zwischen den Verläufen der Eigenformen am größten. Diese Abweichungen sind ebenfalls auf die bei hohen Machzahlen ausbreitungsfähige radiale Modenordnung $n = 1$ zurückzuführen. Dagegen weicht bei der Schaufel $\iota = -1$ der Verlauf der normierten Amplituden der 1T-Eigenform deutlich von den anderen beiden Verläufen ab. Für geringere reduzierte Frequenzen wird nur diese Schaufel als einzige dominant von Wirbelwellen beeinflusst. Dies deutet darauf hin, dass bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ der Einfluss der Wirbelwellen bei der 1T-Eigenform größer ist, als bei den beiden anderen Eigenformen.

Für die größte betrachtete reduzierte Frequenz $k_1 = 5{,}87$ sind akustische Wellen höherer radialer Modenordnungen $n \geq 1$ ausbreitungsfähig. Neben der radialen Modenordnung $n = 1$ sind nach Abbildung 6.13 akustische Wellen mit der radialen Modenordung $n = 2$ ab der Machzahl $0{,}8\, M_{\mathrm{ref}}$ ausbreitungsfähig. Weiterhin ist für diese große reduzierte Frequenz der Einfluss der Wirbelwellen auf die Amplituden gering. Die Einflusskoeffizienten werden allein durch die von der schwingenden Schaufel angeregten akustischen Wellen bestimmt. Daraus ergibt sich der deutliche Unterschied zwischen den Verläufen der normierten Amplituden der verschiedenen Eigenformen in Abbildung 7.4c. Die Verläufe der Schaufeln mit negativen Indizes $\iota < 0$ weisen bei der 2T-Eigenform signifikante Abweichungen zu den Verläufen der Eigenformen erster Ordnung auf. Auch hierfür ist der Grund, dass die unterschiedlichen Eigenformen akustische Wellen mit verschiedenen radialen Modenordnungen dominant anregen. Nach Abbildung 6.14c ist für die reduzierte Frequenz $k_1 = 5{,}87$ die von der 2T-Eigenform dominant angeregte radiale Modenordnung $n = 2$. Akustische Wellen mit dieser radialen Modenordnung werden nach Abbildung 6.13 zwischen den Machzahlen $0{,}8\, M_{\mathrm{ref}}$ und $0{,}9\, M_{\mathrm{ref}}$ ausbreitungsfähig. Daher verändert sich der Verlauf der normierten Amplituden der 2T-Eigenform in diesem Machzahlbereich signifikant. Die beiden Eigenformen erster Ordnung regen akustische Wellen mit kleineren radialen Modenordnungen dominant an. Akustische Moden mit diesen kleineren radialen Modenordnungen $n < 2$ sind über den gesamten betrachteten Machzahlbereich ausbreitungsfähig. Deshalb weisen die normierten Amplituden der 1F- und 1T-Eigenform einen deutlich flacheren, d.h. machzahlunabhängigeren Verlauf auf. Jedoch sind die Einflusskoeffizienten der 1T-Eigenform nicht vollkommen unabhängig von der Ausbreitungsfähigkeit akustischer Wellen mit der radialen Modenordnung $n = 2$. Dies zeigt die Unstetigkeit in den Verläufen der normierten Amplituden der Schaufel $\iota = 1$ der 1T-Eigenform bei $0{,}8 M_{\mathrm{ref}}$ in Abbildung 7.4c. Allein die normierten Amplituden der 1F-Eigenform sind aufgrund des stetigen Verlaufs unabhängig von der Ausbreitungsfähigkeit akustischer Wellen mit radialer Modenordnung $n = 2$. Dies bekräftigt Abbildung 6.14a in der keinerlei Anzeichen akustischer Wellen mit radialen Modenordnungen $n \geq 2$ zu erkennen sind.

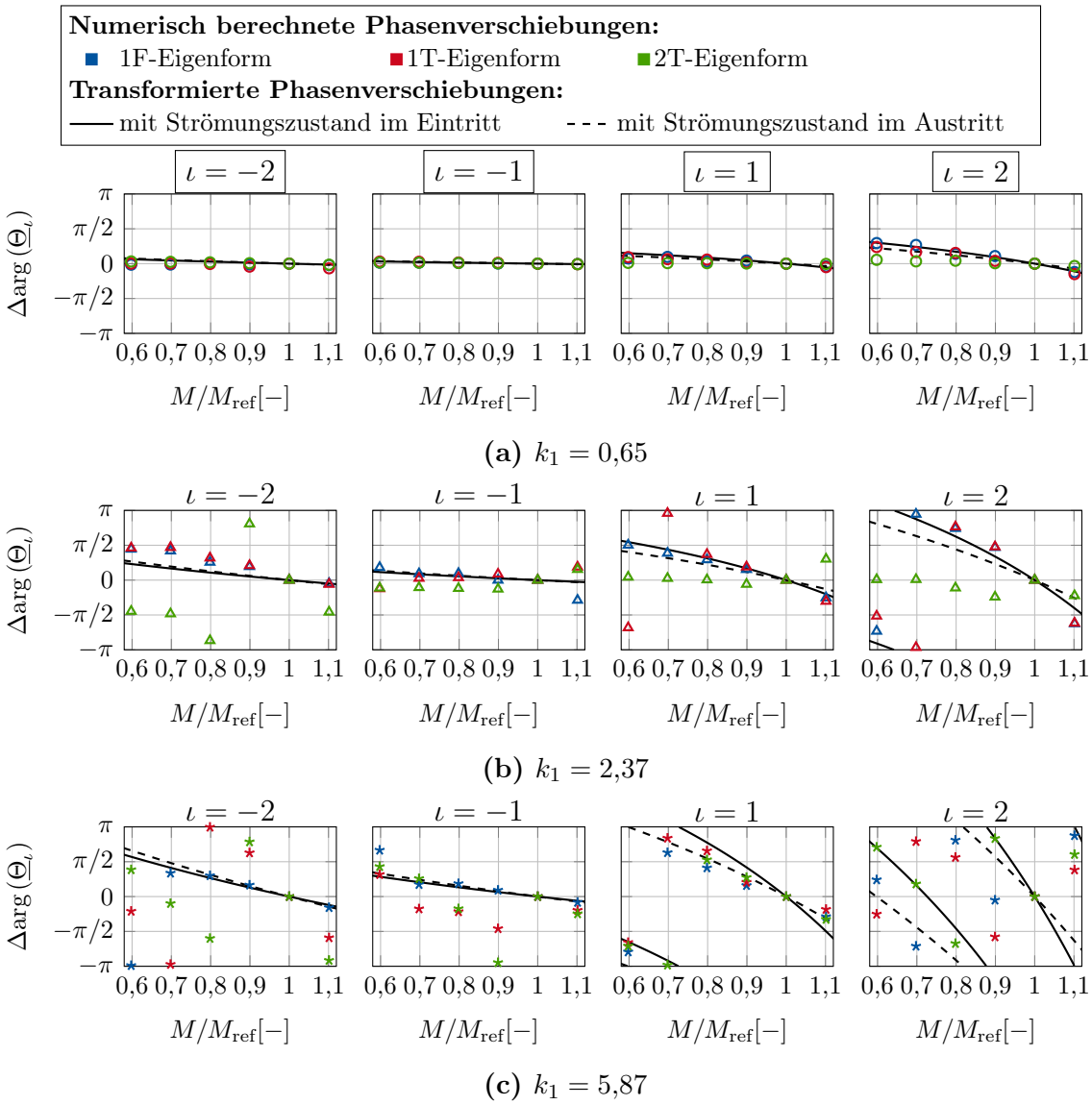
Insgesamt ist auch bei den nicht schwingenden Schaufeln keine exakte Skalierung der Amplituden der Einflusskoeffizienten möglich. Dabei steigt der Fehler sowohl mit der

reduzierten Frequenz als auch mit dem Abstand der variierten Machzahl zur Referenzmachzahl. Anders als bei den Amplituden der Einflusskoeffizienten der schwingenden Schaufeln in Kapitel 7.2.1 ist jedoch keine klare Abhängigkeit von der machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz erkennbar. Vielmehr spielt die dominante radiale Modenordnung der angeregten akustischen Wellen sowie deren Ausbreitungsfähigkeit eine entscheidende Rolle. Daher sind die Amplituden unter Variation der Machzahl nicht allgemeingültig skalierbar und der auftretende Fehler kann ebenfalls nicht allgemeingültig bestimmt werden.

7.2.3. Phasen

In diesem Abschnitt werden die Phasen der Einflusskoeffizienten analysiert, die mit (7.6) von der Referenzmachzahl zu den untersuchten Machzahlen transformiert werden. In Abbildung 7.5 sind die mit der Transformationmethode vorhergesagten Phasenverschiebungen über die Machzahl aufgetragen. Die Phasenverschiebungen werden für die nicht schwingenden Schaufeln $\iota = \{-2, -1, 1, 2\}$ betrachtet. Die Phasen der schwingenden Schaufeln werden nicht betrachtet, da die vorgestellte Transformationsmethode diese nicht verändert. Sowohl der Strömungszustand am Eintritt (durchgezogene Linie) als auch der Strömungszustand am Austritt (gestrichelte Linie) werden zur Transformation der Phasen verwendet. Zusätzlich sind die numerisch ermittelten Phasen aus Kapitel 6 als Differenz zur Phase bei der Referenzmachzahl in Abbildung 7.5 dargestellt. Diese numerisch berechneten Phasenverschiebungen werden zur Validierung der Transformationsmethode herangezogen.

Für die kleinste reduzierte Frequenz $k_1 = 0{,}65$ entsprechen die Wellenlängen dem sechs- bis dreißigfachen der Schaufelteilung an der Schaufelspitze. Daher fällt die Phasenverschiebung bei der Variation der Machzahl in Abbildung 7.5a gering aus. Weiterhin dominieren für diese kleine reduzierte Frequenz die Wirbelwellen, die unter Variation der Machzahl eine konstante Wellenlänge aufweisen. Zudem beeinflussen die Wirbelwellen nur die Einflusskoeffizienten der Schaufeln $\iota < 0$, die entgegen der Rotationsrichtung der schwingenden Schaufel liegen. Die numerisch berechneten Phasen der Einflusskoeffizienten dieser Schaufeln $\iota < 0$ sind bei Variation der Machzahl nahezu konstant. Dagegen beruht die Transformationsmethode auf der Annahme akustischer Wellen. Die mittels der Transformation vorhergesagten Phasen weisen daher eine Abhängigkeit von der Machzahl auf. Entgegen der Rotationsrichtung wirkt die Strömungsgeschwindigkeit in Richtung der Schallausbreitung, weshalb die Phasengeschwindigkeit der Summe aus Schallgeschwindigkeit und Strömungsgeschwindigkeit in Umfangsrichtung entspricht. Damit betragen die Wellenlängen der akustischen Wellen das zwanzig- bis dreißigfache der Schaufelteilung an der Schaufelspitze. Daher ist diese Phasenverschiebung bei der Transformation auf eine andere Machzahl gering. Die maximale Abweichung zwischen der transformierten und numerisch berechneten Phasenverschiebung ist mit 0,1 Radiant bei den Schaufeln mit negativen Indizes $\iota < 0$ vernachlässigbar klein. Dagegen weisen bei den Schaufeln mit positiven Indizes $\iota > 0$ sowohl die transformierten als auch die numerisch berechneten Phasenverschiebungen eine Abhängigkeit von der Machzahl auf. In Rotationsrichtung breiten sich nur akustische Wellen aus. Die Phasengeschwindigkeit in Rotationsrichtung



(a) $k_1 = 0{,}65$

(b) $k_1 = 2{,}37$

(c) $k_1 = 5{,}87$

Abbildung 7.5.: Numerisch berechnete Phasenverschiebung der Einflusskoeffizienten der Schaufeln $\iota = \{-2, -1, 1, 2\}$ relativ zur Referenzmachzahl sowie Vorhersage dieser Phasenverschiebung mit der Transformationsmethode unter Berücksichtigung des Strömungszustands im Ein- und Austritt für alle untersuchten Kombinationen von Eigenform und reduzierter Frequenz

ergibt sich aus der Differenz von Schallgeschwindigkeit und Strömungsgeschwindigkeit in Umfangsrichtung. Daher sind die Phasengeschwindigkeiten und damit die Wellenlängen dieser Wellen kleiner als die der Wellen die sich entgegen der Rotationsrichtung ausbreiten. Dies führt zu einer größeren Abhängigkeit der Phasen von der Machzahl bei den Schaufeln mit positiven Indizes im Vergleich zu den Schaufeln mit negativen Indizes. Für die 1F- und die 1T-Eigenform weicht die vorhergesagte Phasenverschiebung der Schaufeln $\iota = 1$ und $\iota = 2$ maximal um 0,2 Radiant von der numerisch berechneten Phasenverschiebung ab. Dagegen ist für die 2T-Eigenform die transformierte Phasenverschiebung um bis zu 0,7 Radiant größer als die numerisch berechnete Phasenverschiebung. Die Ursache dafür ist nicht eindeutig identifizierbar. Eine Vermutung ist, dass das Ausbreitungs-

verhalten der von der 2T-Eigenform dominant angeregten akustischen Wellen mit der radialen Modenordnung $n = 1$ (vgl. Abbildung 6.6c) sich vom Ausbreitungsverhalten der von den Eigenformen erster Ordnung dominant angeregten Wellen mit der radialen Modenordnung $n = 0$ unterscheidet. Dieses unterschiedliche Ausbreitungsverhalten führt möglicherweise zu den bei der 2T-Eigenform auftretenden Abweichungen zwischen der transformierten und der numerisch berechneten Phasenverschiebung.

Bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ dominieren die akustischen Wellen, deren Wellenlängen aufgrund der erhöhten Frequenz kürzer sind als die Wellenlängen bei $k_1 = 0{,}65$. Die Wellenlängen betragen nur noch das Eineinhalb- bis Achtfache der Schaufelteilung an der Schaufelspitze. Damit nimmt auch die Abhängigkeit der Phasenverschiebung der Einflusskoeffizienten von der Machzahl in Abbildung 7.5b zu. Die Übereinstimmung der transformierten Phasenverschiebung mit der numerisch berechneten Phasenverschiebung ist bei der 1F-Eigenform vor allem für Schaufeln mit positiven Indizes groß. Die mit maximal 0,8 Radiant größten Abweichungen treten für die 1F-Eigenform bei den Schaufeln mit negativen Indizes auf. Für die 1T-Eigenform ist die Übereinstimmung der transformierten Phasenverschiebungen mit den numerisch berechneten Phasenverschiebungen in der Nähe der Referenzmachzahl $0{,}8M_{\mathrm{ref}} \leq M \leq 1{,}1M_{\mathrm{ref}}$ ebenfalls groß. Jedoch treten für die Schaufel $\iota = 1$ bei den beiden kleinsten untersuchten Machzahlen $0{,}6M_{\mathrm{ref}}$ und $0{,}7M_{\mathrm{ref}}$ mit bis zu 2,4 Radiant deutliche Unterschiede zwischen transformierter und numerisch berechneter Phasenverschiebung auf. Diese Abweichungen sind auf einen Sprung in der Phasenverschiebung zwischen der Machzahl $0{,}8M_{\mathrm{ref}}$ und der Machzahl $0{,}7M_{\mathrm{ref}}$ zurückzuführen. Dieser Sprung wird von der Transformationsmethode nicht ausreichend abgebildet und die Ursache für den Sprung ist ebenfalls unklar. Denn sowohl anhand der Realteile des harmonischen Drucks in Abbildung 6.10b als auch anhand der Verläufe der akustischen Resonanzen in Abbildung 6.9 sind bei dieser Machzahl keine Hinweise auf einen Phasensprung zu erkennen. Bei der 2T-Eigenform treten die mit bis zu π Radiant größten Unterschiede zwischen transformierten und numerisch berechneten Phasenverschiebungen auf. Die Ursache dafür ist ein Sprung in der numerisch berechneten Phasenverschiebung zwischen $0{,}9M_{\mathrm{ref}}$ und der Referenzmachzahl M_{ref}. Nach Abbildung 6.9 werden bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ akustische Moden mit radialer Modenordnung $n = 2$ in diesem Machzahlbereich $0{,}9M_{\mathrm{ref}} < M < M_{\mathrm{ref}}$ ausbreitungsfähig. Wenn diese Moden ausbreitungsfähig werden, ändert sich das Ausbreitungsverhalten der angeregten akustischen Wellen. Dadurch treten die hier beobachteten Sprünge in den Phasenverschiebungen der 2T-Eigenform auf. Bei den Eigenformen erster Ordnung 1F und 1T sind diese Sprünge nicht ersichtlich, da bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ nach Abbildung 6.10 allein die 2T-Eigenform Wellen mit höheren radialen Modenordnungen $n > 0$ dominant anregt.

Bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 5{,}87$ entspricht die Wellenlänge der akustischen Wellen dem 0,5- bis Dreifachen der Teilung an der Schaufelspitze. Damit liegt die Wellenlänge in derselben Größenordnung wie die Teilung. Deshalb weisen die Phasenverschiebungen in Abbildung 7.5c eine große Abhängigkeit von der Machzahl auf. Für die 1F-Eigenform werden die Phasenverschiebungen mit der Transformationsmethode bei den Schaufeln mit negativen Indizes $\iota < 0$ und Machzahlen $\geq 0{,}7M_{\mathrm{ref}}$ sehr gut vorhergesagt. Die Abweichungen betragen dabei maximal 0,2 Radiant. Allein die transformierte Phasenverschiebung bei der Machzahl $0{,}6M_{\mathrm{ref}}$ ist mit Abweichungen von bis zu 1,4 Radiant

kleiner als die numerisch berechnete Phasenverschiebung. Bei der Schaufel $\iota = 1$ ist für Machzahlen $\geq 0{,}7M_{\text{ref}}$ bei der 1F-Eigenform die Übereinstimmung der vorhergesagten Phasenverschiebung mit der Annahme des Strömungszustands am Austritt mit maximalen Abweichungen von 0,3 Radiant deutlich besser als mit der Annahme des Strömungszustands am Eintritt mit Abweichungen von bis zu 1,4 Radiant. Nur bei der kleinsten betrachteten Machzahl $0{,}6M_{\text{ref}}$ liegt die numerisch berechnete Phasenverschiebung etwa in der Mitte der beiden vorhergesagten Phasenverschiebungen und weist jeweils eine betragsmäßige Abweichung von 0,5 Radiant auf. Dies zeigt, dass bei größeren reduzierten Frequenzen der angenommene Strömungsdrall die Vorhersage der Phasen stärker beeinflussen kann als bei den niedrigeren betrachteten reduzierten Frequenzen. Bei der Schaufel mit dem Index $\iota = 2$ tritt zudem ein Sprung in den Verläufen der numerisch berechneten Phasenverschiebungen zwischen $0{,}9M_{\text{ref}}$ und der Referenzmachzahl auf. Aus diesem Grund treten bei den kleineren Machzahlen $< M_{\text{ref}}$ zwischen den transformierten Phasenverschiebungen und den numerisch berechneten Phasenverschiebungen Abweichungen von bis zu 2,7 Radiant auf. Nach Abbildung 6.13 treten jedoch in der Nähe der Referenzmachzahl keine akustischen Resonanzen auf. Zudem weisen die Realteile der harmonischen Drücke in Abbildung 6.6a keinerlei Hinweise auf einen Phasensprung auf. Daher ist die Ursache für diesen Sprung in der Phasenverschiebung nicht eindeutig identifizierbar. Für die 1T-Eigenform ähneln die Verläufe der numerisch berechneten Phasenverschiebungen der Schaufeln mit positiven Indizes $\iota > 0$ denen der 1F-Eigenform. Bei allen anderen Schaufeln treten z. T. signifikante Abweichungen von bis zu drei Radiant auf. Dabei ist bei den Schaufeln $\iota = -1$ und $\iota = 2$ ebenfalls ein Phasensprung in der Nähe der Machzahl $0{,}9\,M_{\text{ref}}$ zu erkennen. Die Ursache dieser Sprünge ist analog zur 1F-Eigenform nicht eindeutig identifizierbar. Es ist jedoch zu vermuten, dass dies mit den bei unterschiedlichen Machzahlen unterschiedlich dominant angeregten radialen Modenordnungen zusammenhängt. Im Gegensatz zur 1F-Eigenform ist für die 1T-Eigenform in Abbildung 6.14b bei den Machzahlen $\geq 0{,}9M_{\text{ref}}$ auch die radiale Modenordnungen $n = 2$ erkennbar. Für die 2T-Eigenform und die Schaufeln mit positiven Indizes $\iota > 0$ stimmen die transformierten Phasenverschiebungen sehr gut mit den numerisch berechneten Phasenverschiebungen überein. Lediglich bei der Schaufel $\iota = 2$ und der größten Machzahl $1{,}1M_{\text{ref}}$ tritt ein Unterschied von 0,7 Radiant auf. Bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 5{,}87$ ist die radiale Modenordnung $n = 3$ nur bei der Machzahl $1{,}1M_{\text{ref}}$ ausbreitungsfähig. Außerdem regt die 2T-Eigenform im Vergleich zu den Eigenformen erster Ordnung höhere radiale Modenordnungen an. Es ist daher zu vermuten, dass diese Gründe die unterschiedlichen Verläufe der numerisch berechneten Phasenverschiebungen der 2T-Eigenform im Vergleich zu den Verläufen der Eigenformen erster Ordnung verursachen. Bei den Schaufeln mit negativen Indizes treten für die 2T-Eigenform jedoch signifikante Abweichungen zwischen den transformierten und numerisch berechneten Phasenverschiebungen von bis zu π Radiant auf. Die Verläufe der numerisch berechneten Phasenverschiebungen weisen damit eine deutlich stärkere Variation mit der Machzahl auf, als durch die Transformationsmethode vorhergesagt wird. Die Ursache dafür kann jedoch nicht identifiziert werden.

Insgesamt zeigen diese Untersuchungen, dass mithilfe der Transformationsmethode die Phasen von der Referenzmachzahl zu anderen Machzahlen übertragbar sind. Insbesondere für die Eigenformen erster Ordnung 1F und 1T und für die kleineren reduzierten

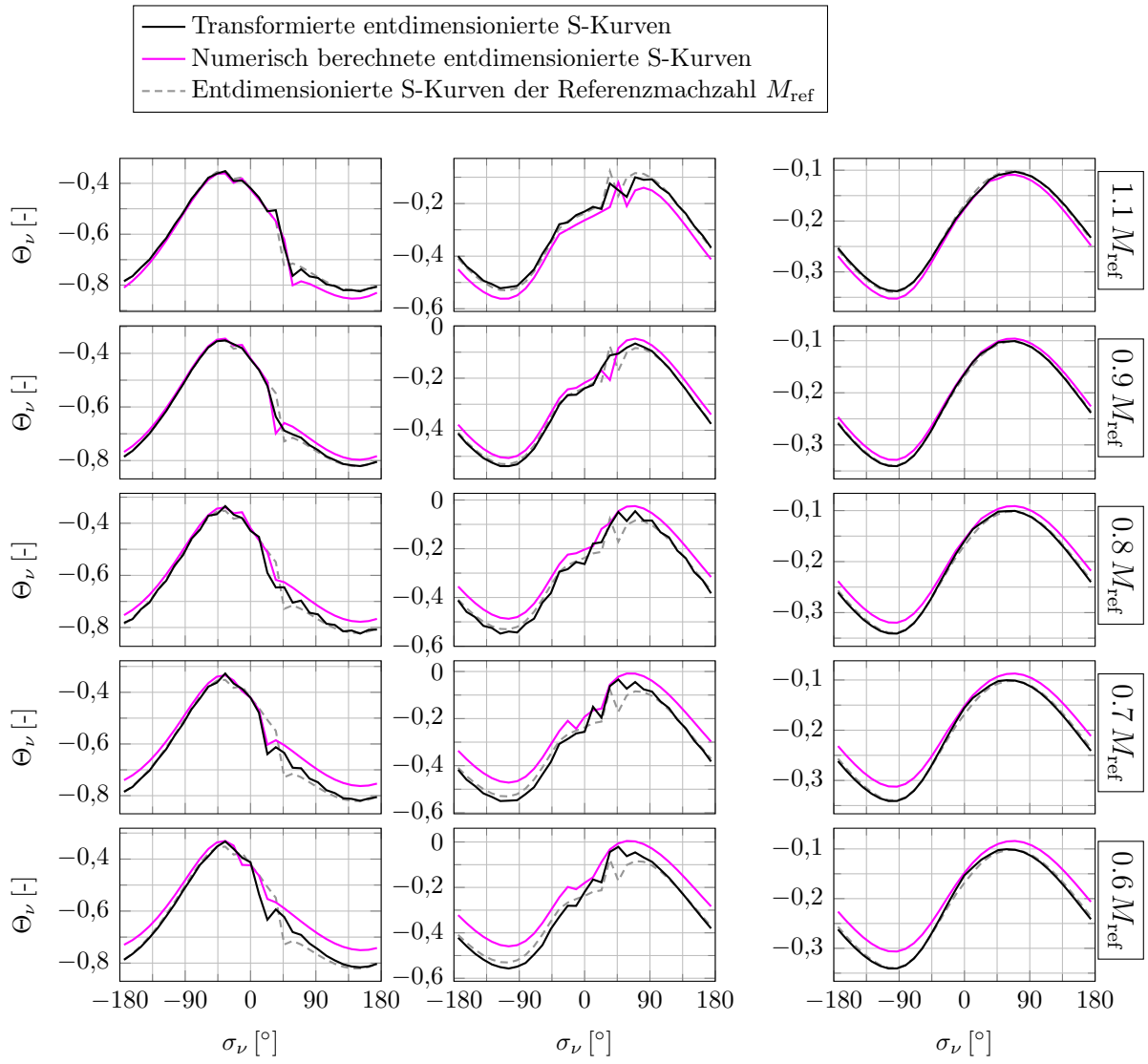
Frequenzen $k_1 = 0{,}65$ und $k_1 = 2{,}37$ sind die Phasen in der Nähe der Referenzmachzahl sehr gut transformierbar. Die Vorhersage der Phasen mit der Transformationsmethode ist bei der 2T-Eigenform und für alle Eigenformen bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 5{,}87$ jedoch ungenau und in manchen Fällen sogar vollständig gegenphasig. Denn die Übereinstimmung der transformierten mit der numerisch berechneten Phase nimmt sowohl mit zunehmender reduzierter Frequenz als auch mit zunehmender radialer Modenordnung der dominant angeregten akustischen Wellen ab. Der Grund dafür ist, dass die Transformationsmethode auf der Annahme zweidimensionaler akustischer Wellen basiert. Das Ausbreitungsverhalten realer dreidimensionaler Wellen unterscheidet sich jedoch vom Ausbreitungsverhalten zweidimensionaler Wellen. Die Unterschiede werden größer, je höher die radiale Modenordnung der akustischen Wellen ist. Insbesondere beim Auftreten akustischer Resonanzen im Bereich der Machzahlen, zwischen denen transformiert wird, können Sprünge in den Phasenverschiebungen auftreten. Diese Phasensprünge können durch die Transformationsmethode nicht vorhergesagt werden.

7.3. Transformierte S-Kurven

In diesem Kapitel wird der dritte Schritt der Transformationsmethode aus Kapitel 7.1 angewandt. Die transformierten Einflusskoeffizienten aus dem vorangegangenen Abschnitt 7.2 werden dazu mittels inverser Fouriertransformation in S-Kurven übertragen und so die von der Referenzmachzahl M_{ref} zu den untersuchten Machzahlen $0{,}6M_{\mathrm{ref}}$ bis $1{,}1M_{\mathrm{ref}}$ transformierten S-Kurven berechnet. Bei den transformierten S-Kurven werden nur die korrigierten Phasen unter Berücksichtigung der Strömung im Eintritt verwendet. Denn die Phasenverschiebungen in Kapitel 7.2.3 weist insbesondere bei den reduzierten Frequenzen $k_1 \leq 2{,}37$ nur geringe Unterschiede zwischen der Verwendung des Strömungszustands im Ein- und Austritt auf. Zusätzlich werden diese transformierten S-Kurven mit den numerisch berechneten S-Kurven aus Kapitel 6 verglichen. Die transformierten S-Kurven für die drei untersuchten reduzierten Frequenzen werden in den nachfolgenden Abschnitten getrennt analysiert. Wie auch in den vorangegangenen Untersuchungen werden dabei jeweils die Eigenformen 1F, 1T und 2T berücksichtigt.

7.3.1. Reduzierte Frequenz $\mathbf{k_1 = 0{,}65}$

In Abbildung 7.6 sind die transformierten entdimensionierten S-Kurven für jede untersuchte Machzahl $M \neq M_{\mathrm{ref}}$ sowie Eigenform bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ aufgetragen. Die numerisch berechneten entdimensionierten S-Kurven aus Kapitel 6 sind in magenta dargestellt. Des Weiteren ist die entdimensionierte S-Kurve der Referenzmachzahl in grau gestrichelt gezeigt. Die mit (4.4) bestimmten relativen Abweichungen der transformierten entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten und der entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten der Referenzmachzahl zu den numerisch berechneten aerodynamischen Arbeiten werden ebenfalls untersucht. Dies ermöglicht den Vergleich der Transformationsmethode mit einer alleinigen Skalierung der S-Kurven. Dazu sind in Abbildung 7.7 die mit (4.5) bestimmten Mittelwerte der relativen Abweichungen der

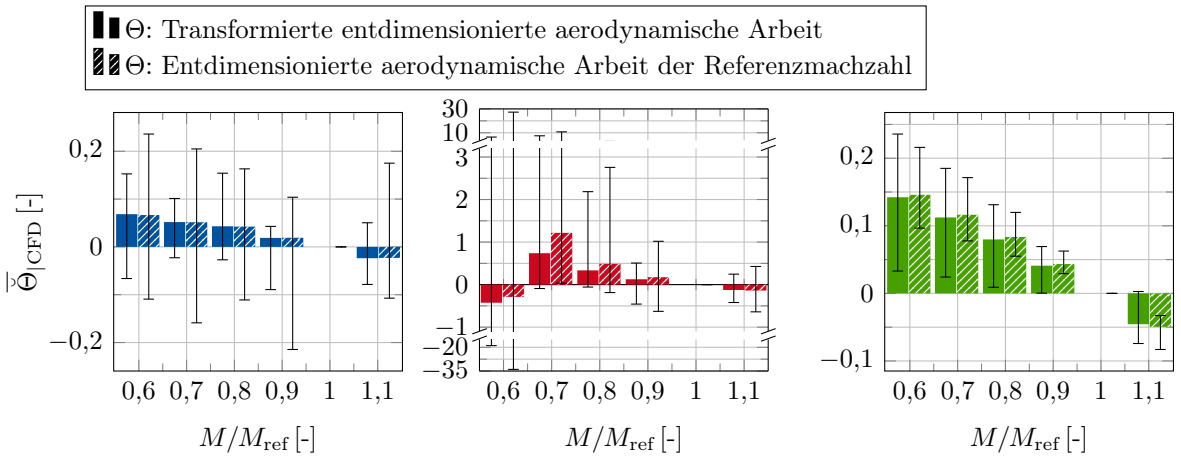


(a) 1F-Eigenform **(b)** 1T-Eigenform **(c)** 2T-Eigenform

Abbildung 7.6.: Von der Referenzmachzahl transformierte entdimensionierte S-Kurven, bei den jeweiligen Machzahlen numerisch berechnete entdimensionierte S-Kurven sowie die entdimensionierten S-Kurven der Referenzmachzahl der 1F-, 1T- und 2T-Eigenformen bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$

entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten in Bezug auf die numerisch berechneten Werte dargestellt. Die minimalen und maximalen relativen Abweichungen werden zudem durch Fehlerbalken abgebildet. Die Übereinstimmung der Verläufe der transformierten S-Kurven mit den numerisch berechneten S-Kurven wird anhand der Korrelationskoeffizienten in Abbildung 7.8 untersucht. Für den Vergleich der Transformationsmethode mit der alleinigen Skalierung sind zusätzlich die Korrelationskoeffizienten zwischen den S-Kurven der Referenzmachzahl und den numerischen berechneten S-Kurven der übrigen Machzahlen aufgetragen.

Die transformierten entdimensionierten S-Kurven der 1F-Eigenform in Abbildung 7.6a stimmen sehr gut mit den numerisch berechneten entdimensionierten S-Kurven überein.



(a) 1F-Eigenform **(b)** 1T-Eigenform **(c)** 2T-Eigenform

Abbildung 7.7.: Nach (4.5) bestimmte mittlere relative Abweichungen in Bezug auf die direkt bei der jeweiligen Machzahl berechneten entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten Θ_{CFD}. Sowohl für die von der Referenzmachzahl mit der Methode aus Kapitel 7.1 übertragenen entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten als auch die entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten der Referenzmachzahl bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$. Die minimalen und maximalen relativen Abweichungen sind als Fehlerbalken dargestellt.

Lediglich im Bereich betragsmäßig größerer IBPA $|\sigma_\nu| > 50°$ weisen die transformierten entdimensionierten S-Kurven relative Abweichungen von maximal $\approx 15\%$ auf. Diese Abweichungen der entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten steigen mit zunehmendem Unterschied zur Referenzmachzahl an. Die Mittelwerte der relativen Abweichungen liegen nach Abbildung 7.7 in einem Bereich von $-2{,}4\,\%$ bei $1{,}1\,M_{\mathrm{ref}}$ und $6{,}8\,\%$ bei $0{,}6M_{\mathrm{ref}}$. Damit sind die Mittelwerte der relativen Abweichungen der transformierten entdimensionierten S-Kurven in etwa so groß wie die der entdimensionierten S-Kurven der Referenzmachzahl. Die minimalen und maximalen relativen Abweichungen der transformierten entdimensionierten S-Kurven sind jedoch betragsmäßig geringer als die der entdimensionierten S-Kurve der Referenzmachzahl. Somit verbessert die Phasenverschiebung der Transformationsmethode allein die Extremwerte der relativen Abweichungen im Vergleich zur alleinigen Skalierung. Die hauptsächliche Ursache für die Abweichungen zwischen den transformierten und numerisch berechneten entdimensionierten S-Kurven sind die Fehler, die bei der Skalierung der Einflusskoeffizienten auftreten (vgl. Kapitel 7.2). Bei der 1F-Eigenform führt die genaue Transformation der Phasen zu einer nahezu exakten Vorhersage der mit der Machzahl verschobenen IBPA der lokalen Extrema der akustischen Resonanzen. Die Korrelationskoeffizienten der 1F-Eigenform in Abbildung 7.8 sind daher mit $\geq 99{,}5\,\%$ sehr groß. Vor allem im Vergleich mit den Korrelationskoeffizienten der S-Kurven der Referenzmachzahl wird deutlich, dass die Transformationsmethode die qualitativen Verläufe der S-Kurven besser überträgt als eine alleinige Skalierung.

Die transformierten entdimensionierten S-Kurven der 1T-Eigenform weisen in Abbildung 7.6b eine nahezu konstante vertikale Verschiebung zu den numerisch berechneten entdimensionierten S-Kurven über alle IBPA auf. Die relativen Abweichungen der 1T-Eigenform sind daher größer als bei der 1F-Eigenform. Der Grund dafür ist, dass die

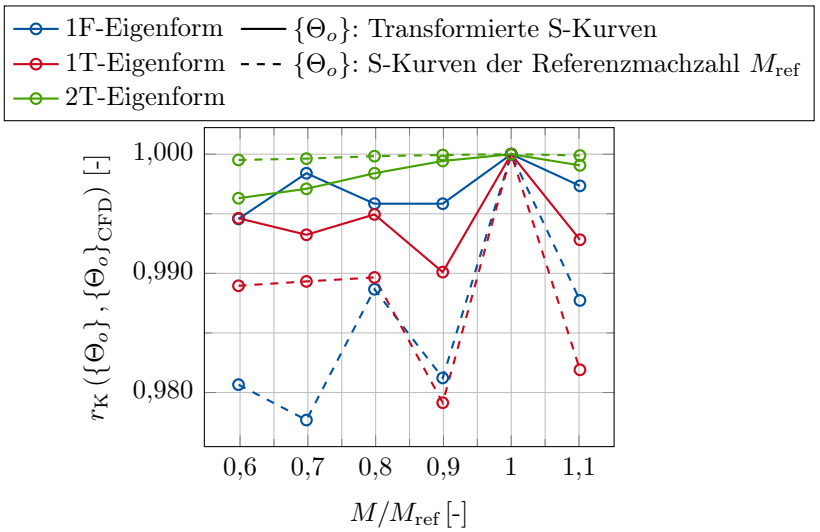


Abbildung 7.8.: Nach (4.6) bestimmte Korrelationskoeffizienten in Bezug auf die bei der jeweiligen Machzahl numerisch berechneten S-Kurven $\{\Theta_o\}_{\mathrm{CFD}}$. Für die von der Referenzmachzahl mit der Methode aus Kapitel 7.1 übertragenen S-Kurven und der S-Kurven der Referenzmachzahl bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$.

entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten der schwingenden Schaufel $\iota = 0$ nach Abbildung 7.2 bei der 1T-Eigenform mit der Machzahl stärker ansteigen als bei der 1F-Eigenform. Die Mittelwerte der relativen Abweichungen sind in Abbildung 7.7 mit bis zu 81 % deutlich größer. Des Weiteren treten bei einzelnen IBPA relative Abweichungen von bis zu 1800 % auf. Bei der 1T-Eigenform ist die aerodynamische Arbeit für den IBPA $\approx 75°$ annähernd null. Die geringen absoluten Abweichungen führen daher zu diesen signifikanten relativen Abweichungen. Die lokalen Extrema der akustischen Resonanzen der transformierten entdimensionierten S-Kurven weichen für die 1T-Eigenform in Abbildung 7.6b ebenfalls etwas mehr von den numerisch berechneten S-Kurven ab als für die 1F-Eigenform. Ursächlich dafür ist, dass die mit der Transformationsmethode vorhergesagte Phasenverschiebung der Einflusskoeffizienten nach Abbildung 7.5a für die Torsionseigenformen ungenauer ist als für die 1F-Eigenform. Die Korrelationskoeffizienten der transformierten S-Kurven der 1T-Eigenform sind in Abbildung 7.8 mit $r_{\mathrm{K}} \geq 99\,\%$ etwas geringer als die der 1F-Eigenform. Durch die Phasenverschiebung verbessert sich dennoch die Transformation der S-Kurven im Vergleich zur alleinigen Skalierung, sodass die Korrelationskoeffizienten von $r_{\mathrm{K}} \geq 97{,}8\,\%$ auf $r_{\mathrm{K}} \geq 99\,\%$ steigen.

Bei der 2T-Eigenform weisen die S-Kurven in Abbildung 7.6c keine lokalen Extrema der akustischen Resonanzen auf, bei denen es zu größeren Abweichungen zwischen den übertragenen und numerisch berechneten S-Kurven kommen kann. Die relativen Abweichungen sind bei der 2T-Eigenform in Abbildung 7.7c zwar größer als bei der 1F-Eigenform, aber mit maximal 14 % im Mittelwert und 23 % als Extremwert deutlich geringer als bei der 1T-Eigenform. Die Korrelationskoeffizienten der 2T-Eigenform sind jedoch in Abbildung 7.8 sowohl für die transformierten S-Kurven als auch für die S-Kurve der Referenzmachzahl mit $r_{\mathrm{K}} \geq 99{,}6\%$ für die drei Eigenformen am größten. Hierbei ist auffällig, dass die transformierten S-Kurven mit $r_{\mathrm{K}} \geq 99{,}6\%$ eine geringere Übereinstimmung mit den numerisch berechneten S-Kurven aufweisen als die S-Kurven der

Referenzmachzahl mit $r_K \geq 99{,}9\,\%$. Die Phasenverschiebung der Transformationsmethode beruht auf der Annahme akustischer Wellen. Bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ ist jedoch die Schaufelkopplung durch akustische Wellen gegenüber der Kopplung durch Wirbelwellen vernachlässigbar. Daraus resultiert eine zu große Phasenverschiebung für die Einflusskoeffizienten der Schaufeln $\iota \leq 1$. Die akustischen Wellen und damit die Einflusskoeffizienten der Schaufeln $|\iota| > 1$ spielen bei der 2T-Eigenform nahezu keine Rolle. Daher führt die Phasenverschiebung dieser Einflusskoeffizienten somit nur bei den Eigenformen erster Ordnung zu einer Verbesserung der Korrelationskoeffizienten.

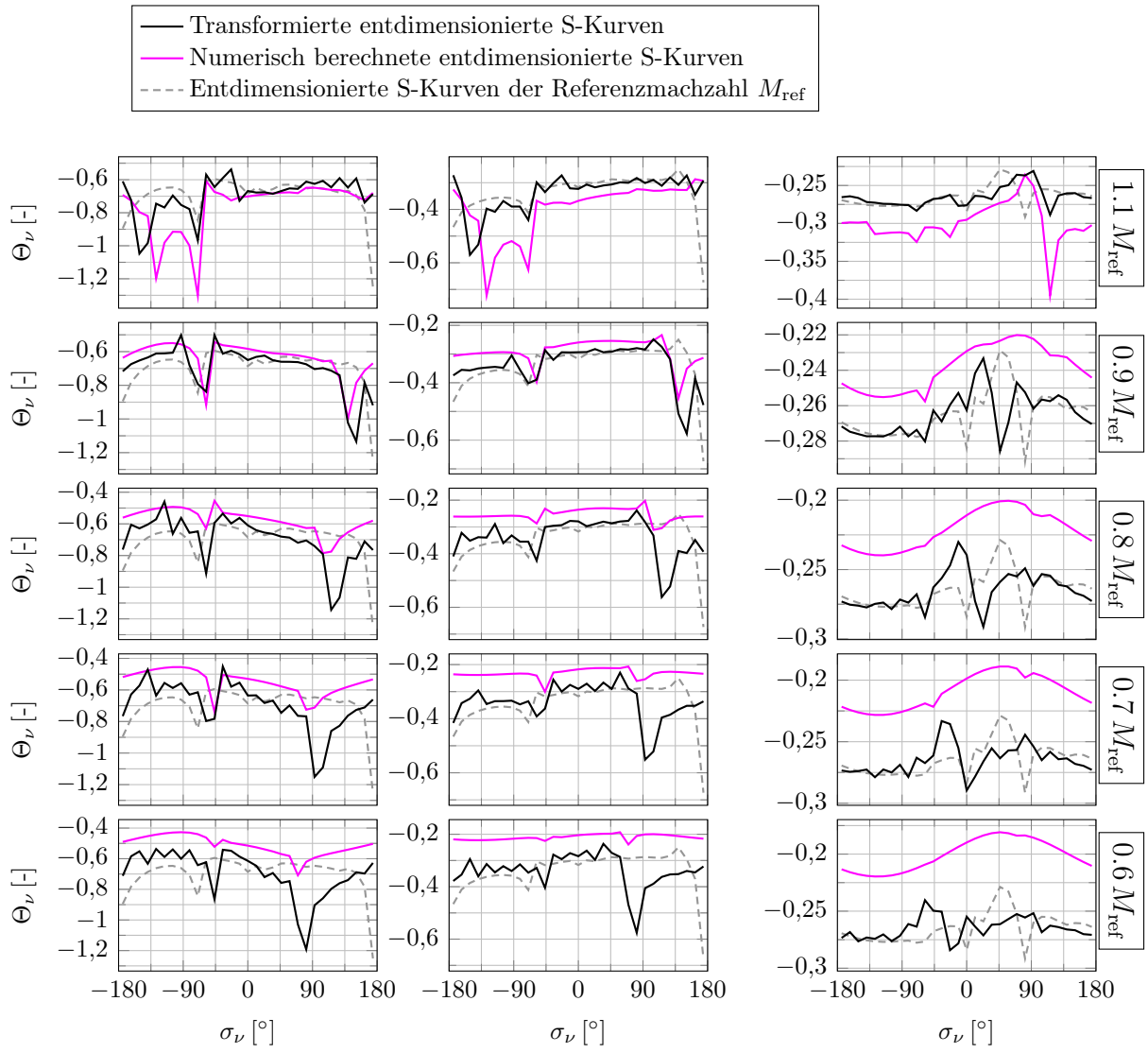
Insgesamt stimmen bei der kleinsten untersuchten reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ die transformierten und die numerisch berechneten entdimensionierten S-Kurven für alle drei Eigenformen sehr gut überein. Die sehr gute Übereinstimmung ergibt sich aufgrund der dominant angeregten Wirbelwellen bei dieser reduzierten Frequenz. Wenn akustische Wellen nicht vollständig vernachlässigbar sind und damit lokale Extrema in den S-Kurven auftreten, verbessert die Phasenverschiebung der Transformationsmethode die Übertragung der S-Kurven zu anderen Machzahlen im Vergleich zu einer alleinigen Skalierung.

7.3.2. Reduzierte Frequenz $\mathbf{k_1 = 2{,}37}$

Analog zum vorangegangenen Abschnitt sind für die reduzierte Frequenz $k_1 = 2{,}37$ die drei S-Kurven in Abbildung 7.9, die relativen Abweichungen in Abbildung 7.10 sowie die Korrelationskoeffizienten in Abbildung 7.11 dargestellt.

Die transformierten entdimensionierten S-Kurven der 1F-Eigenform weisen in Abbildung 7.9a bei den Machzahlen nahe der Referenzmachzahl $0{,}9 \leq M/M_{\mathrm{ref}} \leq 1{,}1$ gute Übereinstimmungen mit den numerisch berechneten S-Kurven auf. Nach Abbildung 7.10a betragen bei diesen Machzahlen die mittleren relativen Abweichungen weniger als $\pm 10\,\%$ und die minimalen bzw. maximalen relativen Abweichungen weniger als $\pm 45\,\%$. Dagegen betragen die relativen Abweichungen bei den kleineren Machzahlen im Mittel bis zu $35\,\%$ und betragsmäßig maximal $92\,\%$. Im Vergleich zur alleinigen Skalierung der S-Kurven sind insbesondere die Extremwerte der relativen Abweichungen der transformierten S-Kurven deutlich kleiner. Die Hauptursache für die Abweichungen sind die Fehler, die bei der Skalierung der Amplituden der Einflusskoeffizienten auftreten. Wie in Abbildung 7.5b gezeigt, stimmt dagegen die Phasenverschiebung der Transformationsmethode bei der 1F-Eigenform und der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ genau mit der numerisch berechneten überein. Dadurch sind auch die IBPA der lokalen Extrema der akustischen Resonanzen bei transformierter und numerisch berechneter S-Kurve identisch. Die Phasenverschiebung der Transformationsmethode führt somit zu einer deutlichen Verbesserung der Korrelationskoeffizienten mit $r_K > 0{,}75$ im Vergleich zur alleinigen Skalierung der S-Kurven mit $r_K > -0{,}25$.

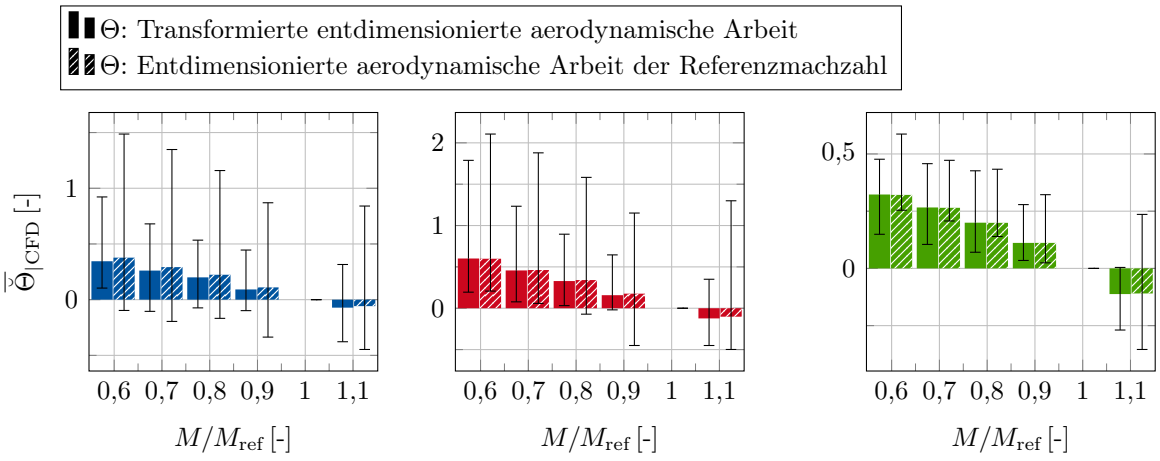
Die transformierten entdimensionierten S-Kurven der 1T-Eigenform weisen in Abbildung 7.9b mit mittleren relativen Abweichungen von bis zu $60\,\%$ und maximalen relativen Abweichungen von bis zu $200\,\%$ größere Abweichungen auf als bei der 1F-Eigenform. Der Grund dafür ist die geringere Skalierbarkeit der Amplituden der schwingenden Schaufel



(a) 1F-Eigenform **(b)** 1T-Eigenform **(c)** 2T-Eigenform

Abbildung 7.9.: Von der Referenzmachzahl zu anderen Machzahlen transformierte entdimensionierte S-Kurven, bei den anderen Machzahlen numerisch berechnete entdimensionierte S-Kurven sowie die entdimensionierten S-Kurven der Referenzmachzahl der 1F-, 1T- und 2T-Eigenformen bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$

$\iota = 0$ bei der 1T-Eigenform. Diese geringere Skalierbarkeit resultiert schließlich in einer größeren relativen vertikalen Verschiebung der entdimensionierten S-Kurven im Vergleich zur 1F-Eigenform. Bei der 1T-Eigenform ist dagegen die Skalierbarkeit der Einflusskoeffizienten der nicht schwingenden Schaufeln $\iota \neq 0$ nach Kapitel 7.2.2 besser als bei der 1F-Eigenform. Aus diesem Grund fallen die Korrelationskoeffizienten der skalierten S-Kurven bei der 1T-Eigenform mit $r_{\mathrm{K}} > 0{,}15$ größer aus, als bei der 1F-Eigenform. Die transformierten Phasen stimmen bei der 1T-Eigenform für die Machzahlen nahe der Referenzmachzahl $0{,}8 \leq M/M_{\mathrm{ref}} \leq 1{,}1$ gut mit den numerisch berechneten Phasen überein. Damit stimmen die IBPA der lokalen Extrema der akustischen Resonanzen transformierter und numerisch berechneter S-Kurven ebenfalls gut überein. Durch diese



(a) 1F-Eigenform **(b)** 1T-Eigenform **(c)** 2T-Eigenform

Abbildung 7.10.: Nach (4.5) bestimmte mittlere relative Abweichungen in Bezug auf die direkt bei der jeweiligen Machzahl berechneten entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten Θ_{CFD}. Sowohl für die von der Referenzmachzahl mit der Methode aus Kapitel 7.1 übertragenen entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten als auch die entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten der Referenzmachzahl bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$. Die minimalen und maximalen relativen Abweichungen sind als Fehlerbalken dargestellt.

gute Übertragung der IBPA der lokalen Extrema in den S-Kurven sind die Korrelationskoeffizienten nahe der Referenzmachzahl $0{,}8 \leq M/M_{\mathrm{ref}} \leq 1{,}1$ mit $r_{\mathrm{K}} > 0{,}75$ ähnlich hoch wie bei der 1F-Eigenform. Bei den beiden geringsten Machzahlen ist die Übertragung der Phasen jedoch weniger genau, was in kleinen Korrelationskoeffizienten $r_{\mathrm{K}} > 0{,}6$ resultiert.

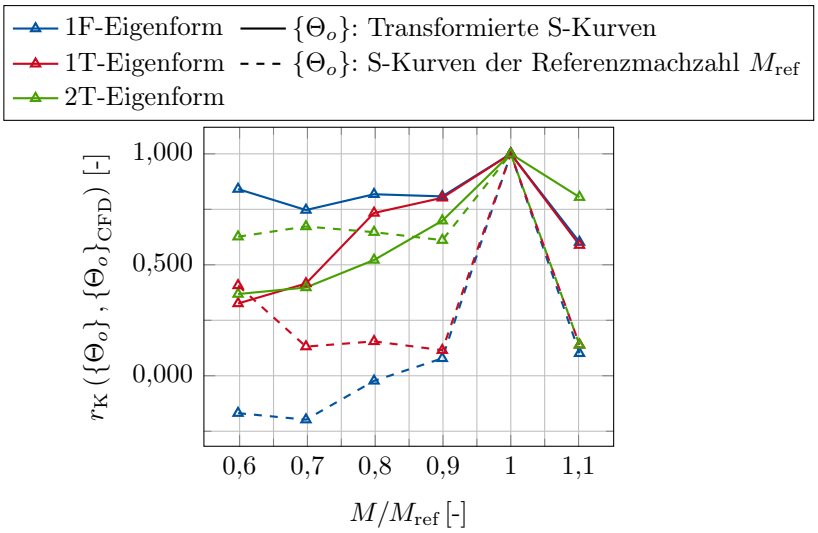


Abbildung 7.11.: Nach (4.6) bestimmte Korrelationskoeffizienten in Bezug auf die bei der jeweiligen Machzahl numerisch berechneten S-Kurven $\{\Theta_o\}_{\mathrm{CFD}}$. Für die von der Referenzmachzahl mit der Methode aus Kapitel 7.1 übertragenen S-Kurven und der S-Kurven der Referenzmachzahl bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$.

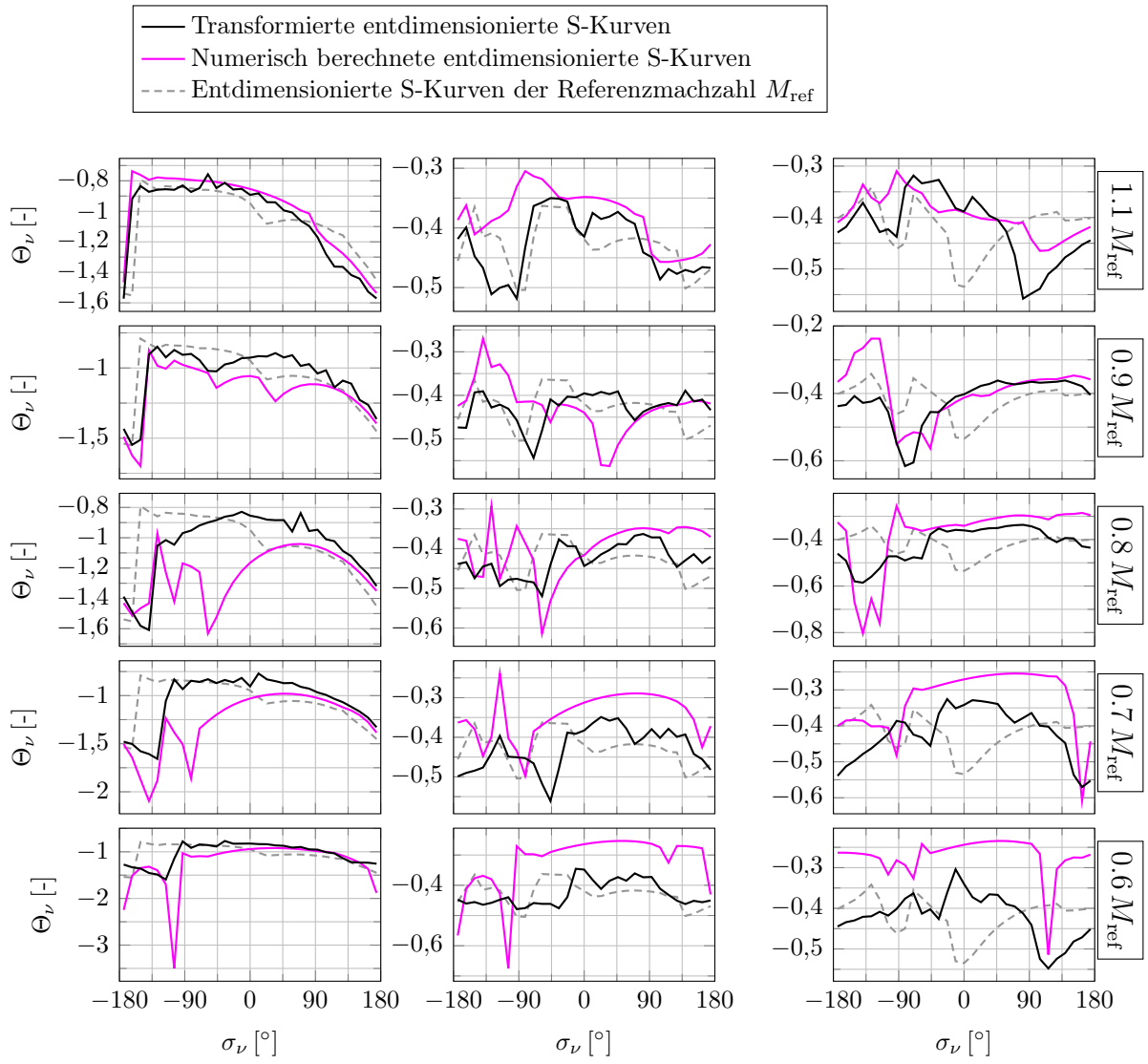
Die transformierten entdimensionierten S-Kurven der 2T-Eigenform weisen in Abbildung 7.9c eine deutliche vertikale Verschiebung zu den numerisch berechneten S-Kurven auf. Allerdings sind die relativen Abweichungen nach Abbildung 7.10c mit maximal 32 % im Mittel und 48 % im Extremwert die geringsten der betrachteten Eigenformen bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$. Der Grund dafür ist der flache Verlauf der entdimensionierten S-Kurven. Die Abstände zwischen minimaler und maximaler entdimensionierter Arbeit sind dadurch gering, was zu den geringen relativen Abweichungen führt. In den S-Kurven der 2T-Eigenform treten für die Machzahlen kleiner der Referenzmachzahl zudem nur schwach ausgeprägte lokale Extrema akustischer Resonanzen auf. Bei der Referenzmachzahl sind die lokalen Extrema hingegen deutlich ausgeprägt. Die Transformationsmethode überträgt diese deutlich ausgeprägten lokalen Extrema auf die anderen Machzahlen. Zusätzlich führt die nach Abbildung 7.5c fehlerhafte Phasenverschiebung zu einer Verschiebung der IBPA dieser akustischen Resonanzen. Im Vergleich zur direkten Skalierung führt die Transformationsmethode bei der 2T-Eigenform somit zu geringeren Korrelationskoeffizienten in Abbildung 7.11. Da jedoch die entdimensionierten S-Kurven flach verlaufen, bleiben die relativen Abweichungen in derselben Größenordnung zwischen den transformierten S-Kurven und den S-Kurven der alleinigen Skalierung.

Insgesamt ermöglicht die Transformationsmethode bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ eine deutlich verbesserte Übertragung der entdimensionierten S-Kurven zu anderen Machzahlen im Vergleich zu einer alleinigen Skalierung. Die Methode ermöglicht bei dieser reduzierten Frequenz somit eine gute Abschätzung der durch die Machzahlvariation veränderten aerodynamischen Arbeiten. Die IBPA der akustischen Resonanzen werden bei allen Machzahlen und den Eigenformen erster Ordnung, 1F und 1T, genau übertragen. In der Umgebung der Referenzmachzahl stimmt zudem die Ausprägung der lokalen Extrema gut mit den Werten der numerisch berechneten S-Kurven überein. Somit werden die Verläufe der S-Kurven von der Transformationsmethode gut übertragen. Im Gegensatz zur reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ weisen die transformierten entdimensionierten S-Kurven aller drei Eigenformen jedoch deutliche relative Abweichungen zu den numerisch berechneten S-Kurven auf. Die Ursachen dafür sind vor allem die Fehler, die bei der Skalierung der Amplituden der Einflusskoeffizienten auftreten.

7.3.3. Reduzierte Frequenz $\mathbf{k_1 = 5{,}87}$

Analog zu den vorangegangenen Abschnitten sind für die reduzierte Frequenz $k_1 = 5{,}87$ die drei entdimensionierten S-Kurven in Abbildung 7.12, die relativen Abweichungen in Abbildung 7.13 sowie die Korrelationskoeffizienten in Abbildung 7.14 dargestellt.

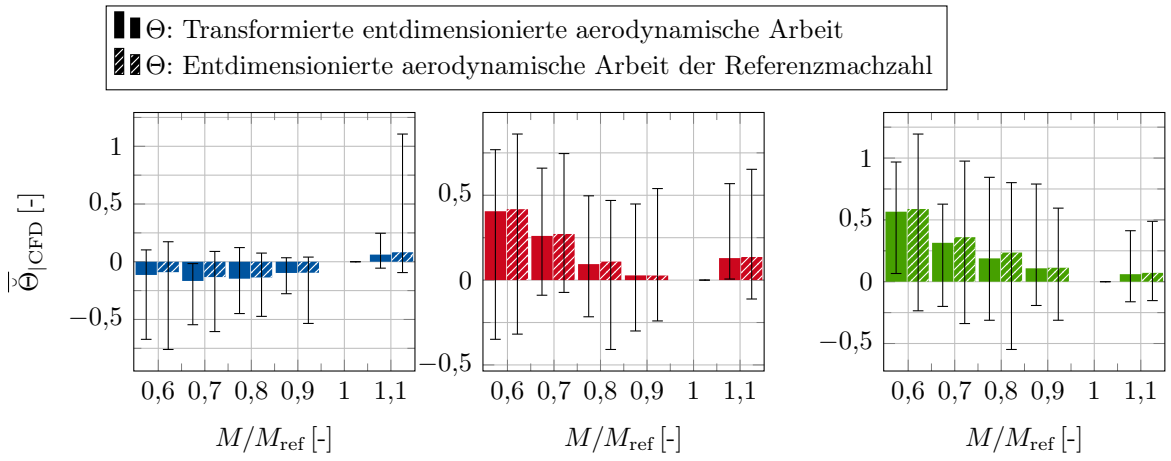
Die transformierten entdimensionierten S-Kurven der 1F-Eigenform weisen in Abbildung 7.12a bessere Übereinstimmungen mit den numerisch berechneten S-Kurven auf als bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$. Die relativen Abweichungen betragen zwischen -17 % und 6 % im Mittel sowie -67 % und 25 % im Extremwert. Im Gegensatz zu den kleineren reduzierten Frequenzen werden die entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten bei $k_1 = 5{,}87$ im Betrag unterschätzt. Das bedeutet, die relativen Abweichungen sind im Mittel negativ bei Machzahlen die kleiner als die Referenzmachzahl sind und positiv bei der größten Machzahl $1{,}1M_{\mathrm{ref}}$. Der Grund dafür ist das reziproke Verhal-



(a) 1F-Eigenform **(b)** 1T-Eigenform **(c)** 2T-Eigenform

Abbildung 7.12.: Von der Referenzmachzahl zu anderen Machzahlen transformierte entdimensionierte S-Kurven, bei den anderen Machzahlen numerisch berechnete entdimensionierte S-Kurven sowie die entdimensionierten S-Kurven der Referenzmachzahl der 1F-, 1T- und 2T-Eigenformen bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 5{,}87$

ten der Amplituden der Einflusskoeffizienten ab einer machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz $k_1^* \gtrapprox 2$ (vgl. Kapitel 7.2 und Anhang B). Weiterhin ist auffällig, dass die mittleren relativen Abweichungen bei alleiniger Skalierung zum Teil geringer sind als bei der Transformationsmethode. Die Phasenverschiebung der Transformationsmethode reduziert jedoch die maximalen relativen Abweichungen. Der Grund ist die verbesserte Übertragung der lokalen Extrema der akustischen Resonanzen. Dadurch fallen auch in Abbildung 7.14 die Korrelationskoeffizienten bei der Transformationsmethode mit $r_{\mathrm{K}} > 50\,\%$ größer aus als bei der alleinigen Skalierung mit $r_{\mathrm{K}} > -20\,\%$. Insgesamt sind die Korrelationskoeffizienten der transformierten S-Kurven bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 5{,}87$ jedoch geringer als bei den kleineren reduzierten Frequenzen. Als Begründung



(a) 1F-Eigenform **(b)** 1T-Eigenform **(c)** 2T-Eigenform

Abbildung 7.13.: Nach (4.5) bestimmte mittlere relative Abweichungen in Bezug auf die direkt bei der jeweiligen Machzahl berechneten entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten Θ_{CFD}. Sowohl für die von der Referenzmachzahl mit der Methode aus Kapitel 7.1 übertragenen entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten als auch die entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten der Referenzmachzahl bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 5{,}87$. Die minimalen und maximalen relativen Abweichungen sind als Fehlerbalken dargestellt.

sind vor allem die Fehler bei der Skalierung der Amplituden der Einflusskoeffizienten anzusehen. Das reziproke Verhalten der numerisch berechneten Amplituden der Einflusskoeffizienten mit der machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz lässt mit sinkender Machzahl betragsmäßig größere aerodynamische Arbeiten in der S-Kurve erwarten (vgl. Abbildungen 7.3 und 7.4). Dieses reziproke Verhalten wird bei der Skalierung der Ampli-

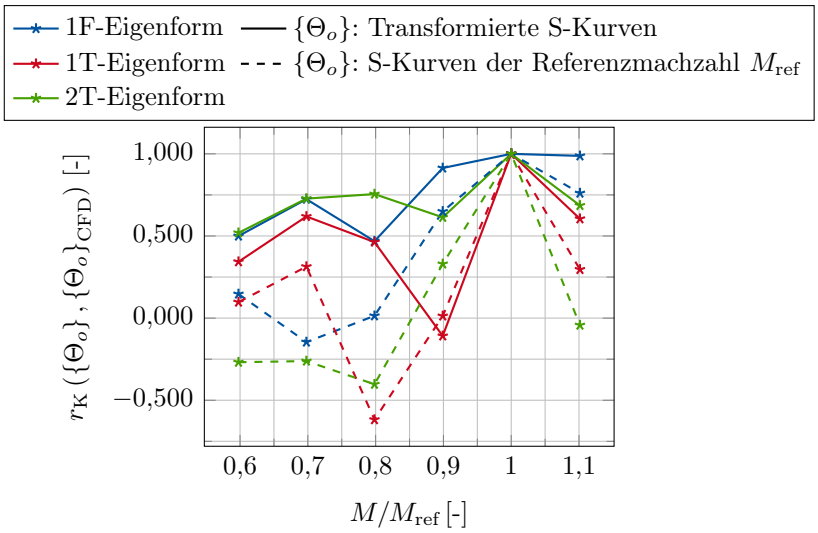


Abbildung 7.14.: Nach (4.6) bestimmte Korrelationskoeffizienten in Bezug auf die bei der jeweiligen Machzahl numerisch berechneten S-Kurven $\{\Theta_o\}_{\mathrm{CFD}}$. Für die von der Referenzmachzahl mit der Methode aus Kapitel 7.1 übertragenen S-Kurven und der S-Kurven der Referenzmachzahl bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 5{,}87$.

tuden von der Referenzmachzahl jedoch nicht berücksichtigt. Die skalierten Amplituden sind somit zu klein im Vergleich zu den numerisch berechneten Amplituden. Daraus resultieren schließlich zu gering ausgeprägte lokale Extrema der akustischen Resonanzen. Die Abweichungen sind beispielswiese bei der Machzahl $0{,}6M_{\mathrm{ref}}$ und dem IBPA $\sigma_\nu = -104°$ deutlich sichtbar.

Die transformierten entdimensionierten S-Kurven der 1T-Eigenform stimmen bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 5{,}87$ weniger gut mit den numerisch berechneten S-Kurven überein als die S-Kurven der 1F-Eigenform. Im Vergleich zur reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ sind die relativen Abweichungen mit weniger als 50 % im Mittel sowie maximal 80 % in den Extremwerten jedoch geringer. Die Phasenverschiebung der Transformationsmethode führt dabei zu einer Verringerung der relativen Abweichungen im Vergleich zur alleinigen Skalierung. Die Korrelationskoeffizienten sind bei den meisten Machzahlen größer als 30 %. Die Ausnahme ist die Machzahl $0{,}9M_{\mathrm{ref}}$, bei der die Korrelationskoeffizienten der transformierten S-Kurven mit −10 % deutlich kleiner sind. Der Grund ist die ungenaue Berechnung der Phasenverschiebung bei dieser Machzahl, wie es in Kapitel 7.2.3 diskutiert wird. Gleichzeitig ist der Fehler der Skalierung der Amplituden der Einflusskoffizienten nach den Kapiteln 7.2.1 und 7.2.2 groß. Daher treten die lokalen Extrema der akustischen Resonanzen der transformierten S-Kurven in Abbildung 7.12b an den falschen IBPA auf und weisen eine zu geringe Ausprägung auf. Die relativen Abweichungen bei der Machzahl $0{,}9M_{\mathrm{ref}}$ sind mit maximal 7 % im Mittel jedoch gering. Somit führt trotz unzureichender Übertragung des qualitativen Verlaufs der S-Kurven, sowohl die Transformationsmethode als auch die reine Skalierung nur zu geringen Fehlern in der Übertragung der entdimensionierten S-Kurven.

Die transformierten S-Kurven der 2T-Eigenform weisen in Abbildung 7.12c im Vergleich zur 1T-Eigenform geringfügig größere relative Abweichungen auf. Einzig bei der größten Machzahl $1{,}1\,M_{\mathrm{ref}}$ sind die relativen Abweichungen in Abbildung 7.13c mit maximal 6 % im Mittel und 41 % im Extremwert geringer. Zudem führt die Phasenverschiebung der Transformationsmethode bei allen Machzahlen zu einer Verringerung der relativen Abweichungen und damit einer Verbesserung der Übertragung der S-Kurven im Vergleich zu einer alleinigen Skalierung. Bei den Machzahlen $\leq 0{,}8M_{\mathrm{ref}}$ stimmen die transformierten S-Kurven für die 2T-Eigenform am besten von allen drei untersuchten Eigenformen mit den numerisch berechneten S-Kurven überein. Zudem sind die Korrelationskoeffizienten bei allen Machzahlen größer als $r_{\mathrm{K}} \geq 50\,\%$. Der Grund dafür ist die genaue Phasenverschiebung der Einflusskoeffizienten bei der 2T-Eigenform nach Abbildung 7.5c. Dadurch stimmen die IBPA der lokalen Extrema der akustischen Resonanzen der transformierten und numerisch berechneten S-Kurven gut überein. Allerdings resultiert die ungenaue Skalierung der Amplituden der Einflusskoeffizienten in einer deutlich geringeren Ausprägung dieser lokalen Extrema. Analog zu den anderen beiden Eigenformen ist die ungenaue Skalierung der Amplituden die Hauptursache für die Unterschiede zwischen den transformierten und den numerisch berechneten S-Kurven bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 5{,}87$.

Insgesamt ermöglicht die Transformationsmethode bei der größten betrachteten reduzierten Frequenz $k_1 = 5{,}87$ eine deutliche Verbesserung der Übertragung der entdimensionierten S-Kurven zu anderen Machzahlen im Vergleich zur alleinigen Skalierung.

Auch hierbei ermöglicht die Methode somit eine Abschätzung der machzahlabhängigen Änderungen in den aerodynamischen Arbeiten. Die Korrelationskoeffizienten nehmen mit der Transformationsmethode deutlich zu. Vor allem bei der 1F- und 2T-Eigenform ermöglicht die genaue Phasenverschiebung eine genaue Verschiebung der lokalen Extrema der akustischen Resonanzen zu anderen IBPA. Zudem fallen die relativen Abweichungen der transformierten mit den numerisch berechneten S-Kurven sowohl im Mittel als auch in den Extremwerten geringer aus als bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$. Dies ist auf die bessere Skalierbarkeit der Amplituden der Einflusskoeffizienten bei dieser reduzierten Frequenz zurückzuführen.

8. Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden die Einflüsse unterschiedlicher Gase auf die aerodynamischen Dämpfungen bei aerodynamisch fremderregten Schaufelschwingungen eines für Luft ausgelegten, industriellen Axialverdichters untersucht. Zu Beginn wurde gezeigt, dass sich in Resonanzsituationen bei einem Austausch des Gases vor allem die Machzahlen signifikant verändern, wohingegen die reduzierten Frequenzen unverändert bleiben. Die ersten beiden Ziele waren daher, sowohl den Einfluss des Gases als auch der Machzahl auf die aerodynamischen Dämpfungen zu bestimmen. Diese Ziele wurden mittels zweier voneinander entkoppelter Einflussuntersuchungen für eine Rotorreihe eines für Luft ausgelegten Axialverdichters verfolgt. Dabei wurden die drei Eigenformen 1F, 1T und 2T sowie die dazugehörigen reduzierten Frequenzen in Betracht gezogen. Der isolierte Einfluss des Gases wurde anhand der vom Referenzgas Luft abweichenden Gase Kohlenstoffdioxid, Methan, Argon und Propan bestimmt. Der Einfluss der Machzahl wurde unter Verwendung des Gases Luft durch Variation der Machzahl über den gesamten Betriebsbereich des Referenzverdichters ermittelt. Anstelle der aerodynamischen Dämpfungen wurden bei allen Untersuchungen die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten in entdimensionierter Form betrachtet. Diese Betrachtungsweise ermöglichte die direkte Bewertung der Skalierbarkeit. Das dritte Ziel war die Entwicklung einer Methode, um diese aerodynamischen Arbeiten von einem Gas bei einer Machzahl auf ein anderes Gas bei einer anderen Machzahl zu übertragen. Die in dieser Arbeit entwickelte Transformationsmethode beschränkt sich dabei auf die Transformation zu anderen Machzahlen, da gezeigt wurde, dass der Einfluss des Gases nahezu exakt skalierbar ist. Die Methode umfasst neben einer Skalierung auch eine machzahlabhängige Transformation der Phasen der Einflusskoeffizienten. Diesbezüglich war das vierte Ziel die Bestimmung der Genauigkeit der entwickelten Methode. Dazu wurden abschließend die aerodynamischen Dämpfungen unterschiedlicher reduzierter Frequenzen und Eigenformen mit der Transformationsmethode von einer Machzahl auf andere Machzahlen übertragen und mit numerisch ermittelten aerodynamischen Arbeiten verglichen.

Der isolierte Einfluss des Gases auf die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten wurde unter aerodynamisch ähnlicher Anströmung untersucht. Dazu wurden sowohl die Machzahl, die Reynoldszahl als auch die Strömungswinkel bei allen Gasen stromauf der Schaufel konstant gehalten. Durch die Untersuchungen des isolierten Einflusses des Gases auf die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten wurde eine nahezu exakte Skalierbarkeit mit dem dynamischen Druck gezeigt. Kleine Abweichungen zwischen den Gasen in der Nähe der IBPA akustischer Resonanzen resultieren dabei aus minimalen Abweichungen in der Machzahl der Abströmung der Schaufelreihe. Diese Abweichungen konnten auf den unterschiedlichen Temperaturaufbau über die Schaufel je nach Gas zurückgeführt werden. Da das instationäre Druckfeld in der Nähe dieser akustischen

Resonanzen sensitiv auf kleinste Veränderungen in der stationären Strömung reagiert, führen die geringen Abweichungen der Abströmmachzahlen zu sichtbaren Abweichungen in den skalierten S-Kurven bei einzelnen IBPA nahe der akustischen Resonanzen. Dabei wurde gezeigt, dass mit steigender reduzierter Frequenz der Einfluss der akustischen Wellen auf die aerodynamische Schaufelkopplung zunimmt. Deshalb treten bei höheren reduzierten Frequenzen auch größere Abweichungen zwischen den entdimensionierten S-Kurven auf. Insgesamt sind die größten Abweichungen jedoch mit unter 7 % vernachlässigbar gering. Damit kann der isolierte Einfluss des Gases auf die aerodynamischen Dämpfungen bei der Verdichtung unterschiedlicher Gase durch eine einfache Skalierung berücksichtigt werden.

In den Untersuchungen zum Einfluss der Machzahl auf die aerodynamischen Dämpfungen wurden bei den drei untersuchten reduzierten Frequenzen $k_1 = 0{,}65$, $k_1 = 2{,}37$ und $k_1 = 5{,}87$ jeweils die drei Eigenformen 1F, 1T und 2T berücksichtigt. Dabei wurde gezeigt, dass der Einfluss der Machzahl im Gegensatz zum Einfluss des Gases nicht mehr exakt skalierbar ist. Die Abweichungen, die zwischen den entdimensionierten S-Kurven auftreten, nehmen mit der reduzierten Frequenz zu. Bei der kleinsten reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ sind die relativen Abweichungen im Mittel bei den Eigenformen 1F und 2T mit Werten unter 12 % moderat. Bei der 1T-Eigenform sowie bei allen Eigenformen bei höheren reduzierten Frequenzen steigen die mittleren relativen Abweichungen jedoch auf Werte von bis zu 33 % an. Die Hauptursache für diese Abweichungen sind auf die Abweichungen in den entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten zurückzuführen. Mit steigender reduzierter Frequenz unterscheiden sich auch zunehmend die qualitativen Verläufe der S-Kurven der verschiedenen Machzahlen. Bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ weisen die transformierten S-Kurven mit Korrelationskoeffizienten von über $r_\mathrm{K} = 0{,}975$ eine große Ähnlichkeit zu den numerisch berechneten auf. Bei den höheren reduzierten Frequenzen ist eine Ähnlichkeit mit zum Teil negativen Korrelationskoeffizienten von $r_\mathrm{K} < 0$ nicht mehr überall gegeben. Die Ursache hierfür ist der zunehmende Einfluss der akustischen Wellen mit steigender reduzierter Frequenz. Durch Variation der Machzahl verschieben sich die IBPA der akustischen Resonanzen. Weiterhin können akustische Wellen mit höheren radialen Modenordnungen mit zunehmender Machzahl ausbreitungsfähig werden. Dies kann zu zusätzlichen lokalen Extrema in den S-Kurven führen. Die Kenntnis der Ausbreitungsfähigkeit akustischer Moden ist daher hilfreich, die Größenordnung der Auswirkungen einer Machzahlvariation auf die aerodynamischen Dämpfungen einzuschätzen.

Um dennoch die aerodynamischen Dämpfungen von einer Machzahl zu einer anderen zu übertragen, wurde eine Transformationsmethode auf Basis einer zweidimensionalen Schaufelkaskade entwickelt. Diese Methode bezieht zusätzlich den Einfluss der Machzahl auf die Phasen der Einflusskoeffizienten mit ein und berücksichtigt damit die machzahlabhängige Verschiebung der IBPA der akustischen Resonanzen. Mittels Skalierung der Amplituden und einer machzahlabhängigen Phasenverschiebung werden die Einflusskoeffizienten von einer Referenzmachzahl auf eine beliebige Machzahl transformiert, ohne zusätzliche numerische Simulationen durchzuführen. Aufgrund des so vernachlässigbaren Rechenaufwands ist die Methode für den Einsatz in üblichen industriellen Auslegungsverfahren modularer Verdichtersysteme geeignet.

Die abschließende Untersuchung dieser Arbeit umfasste die Anwendung dieser Transformationsmethode auf die Einflusskoeffizienten der Referenzmachzahl. Diese Einflusskoeffizienten wurden für die zuvor betrachteten reduzierten Frequenzen und Eigenformen auf die zuvor untersuchten Machzahlen transformiert. Die mit der Transformationsmethode bestimmten Einflusskoeffizienten wurden mit den zuvor numerisch ermittelten Einflusskoeffizienten verglichen. Dabei wurde gezeigt, dass der Fehler in der Skalierung der Amplituden der Einflusskoeffizienten von der machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz k^* abhängt. Für die schwingende Schaufel $\iota = 0$ steigt die entdimensionierte Amplitude der Einflusskoeffizienten bei allen Eigenformen linear mit k^*, bis zu einem Grenzwert von $k^* \approx 2$, an. Für größere machzahlkorrigierte reduzierte Frequenzen sind die Verläufe der Amplituden der Biegeeigenform reziprok zu k^*. Die Verläufe der Torsionseigenformen weisen hierbei keinen klaren Trend mit k^* auf. Bei den Amplituden der Einflusskoeffizienten der nicht schwingenden Schaufeln unterscheidet sich der Verlauf der entdimensionierten Amplituden je nach Einflusskoeffizient und Eigenform. Jedoch ist auch hier eine Abhängigkeit von der machzahlkorrigierten Frequenz festzustellen. Die machzahlabhängige Phasenverschiebung der Einflusskoeffizienten wird durch die Transformationsmethode für die kleinste reduzierte Frequenz $k_1 = 0{,}65$ sehr gut vorhergesagt. Mit Zunahme der reduzierten Frequenz und der gleichzeitigen Zunahme der ausbreitungsfähigen akustischen Moden mit höheren radialen Modenordnungen wird die Verschiebung der Phasen zunehmend ungenauer. Dies wurde insbesondere beobachtet, wenn sich die Ausbreitungsfähigkeit der akustischen Moden zwischen der untersuchten und der Referenzmachzahl unterschied. Da der Transformationsmethode nur ein zweidimensionales Modell der Schallausbreitung zugrunde liegt, wird die komplexere Ausbreitung dreidimensionaler Wellen nicht berücksichtigt.

Abschließend wurden die mit der Transformationsmethode berechneten entdimensionierten S-Kurven mit den numerisch berechneten S-Kurven verglichen. Bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ sind die Abweichungen der entdimensionierten S-Kurven unter Machzahlvariation allgemein gering. Dennoch wurde durch die zusätzliche Phasenverschiebung der Transformationsmethode die Vorhersage der S-Kurven gegenüber einer alleinigen Skalierung verbessert. Vor allem die Vorhersage der qualitativen Verläufe der 1F- und 1T-Eigenformen wurde von Korrelationskoeffizienten $r_\mathrm{K} > 0{,}975$ auf $r_\mathrm{K} > 0{,}99$ verbessert. Bei den größeren reduzierten Frequenzen $k_1 = 2{,}37$ und $k_1 = 5{,}87$ ermöglicht die Transformationsmethode eine signifikante Verbesserung der Vorhersage der qualitativen Verläufe der S-Kurven. So können beispielsweise manche Korrelationskoeffizienten der 1T-Eigenform bei $k_1 = 2{,}37$ von $r_\mathrm{K} > 0{,}1$ auf $r_\mathrm{K} > 0{,}75$ verbessert werden. Auch die relativen Abweichungen unter Machzahlvariation können beim Großteil der untersuchten Eigenformen sowohl im Mittel als auch in den Extremwerten verringert werden. Allerdings bleiben die relativen Abweichungen mit mittleren Werten von bis zu 60 % sowie 180 % im Extremwert bei der 1T-Eigenform z. T. noch signifikant. Allgemein können diese hohen Abweichungen auf die mangelnde Skalierbarkeit der Amplituden der Einflusskoeffizienten zurückgeführt werden. Insgesamt verbessert die Transformationsmethode jedoch die Vorhersage der entdimensionierten S-Kurven und damit der aerodynamischen Dämpfungen im Vergleich zu einer alleinigen Skalierung.

Zusammenfassend werden die aerodynamischen Dämpfungen aerodynamisch fremderregter Schaufelschwingungen bei der Verdichtung unterschiedlicher Gase maßgeblich durch

die Veränderungen in der Machzahl beeinflusst. Der Einfluss des Gases selbst ist dabei durch eine einfache Skalierung der für Luft bekannten Dämpfungen genau vorhersagbar. Dies trifft für den Einfluss der Machzahl nicht zu. Für die Erweiterung bestehender modularer Verdichtersysteme auf unterschiedliche Gase bedeutet dies, dass genauere Methoden notwendig sind, um die aerodynamischen Dämpfungen auf von Luft abweichende Gase zu übertragen. Die vorgestellte Transformationsmethode berücksichtigt dabei die festgestellte Machzahlabhängigkeit der Phasen der Einflusskoeffizienten und ermöglicht somit eine korrekte Vorhersage der zu anderen IBPA verschobenen lokalen Extrema akustischer Resonanzen. Auch wenn die Methode gerade bei Machzahlvariationen größer $\pm 10\,\%$ nicht über alle reduzierten Frequenzen und Eigenformen zuverlässig genaue Ergebnisse liefert, ermöglicht die Methode eine schnelle Abschätzung der aerodynamischen Dämpfungen. Damit ist schließlich eine verbesserte Einschätzung der beim Betrieb mit unterschiedlichen Gasen zu erwartenden Schwingspannungen möglich, ohne aufwendige numerische Verfahren einsetzen zu müssen.

Die Untersuchungen zeigen zudem mögliche Ansatzpunkte auf, die Genauigkeit der Transformationsmethode zu verbessern. Ein Ansatz ist es, die festgestellten Abhängigkeiten der Amplituden der Einflusskoeffizienten von der machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz bei einer Transformation der Amplituden der Einflusskoeffizienten zu berücksichtigen. Dazu sind jedoch weitere Analysen und Studien notwendig, um insbesondere den Einfluss unterschiedlicher Eigenformen und Schaufelgeometrien mit einzubeziehen. Weiterhin ist eine Berücksichtigung der Dreidimensionalität der von der Schaufelschwingung angeregten akustischen Wellen in der Phasenverschiebung sinnvoll. Dadurch kann die Transformation der S-Kurven insbesondere bei großen reduzierten Frequenzen verbessert werden. Ein Ansatz sollte sowohl das Ausbreitungsverhalten dreidimensionaler akustischer Wellen unterschiedlicher radialer Modenordnungen in Abhängigkeit von reduzierter Frequenz und Machzahl als auch die von den jeweiligen Eigenformen dominierend angeregten akustischen Modenordnungen berücksichtigen. Schlussendlich müssen zur finalen Abschätzung der Schwingspannungen aerodynamisch fremderregter Schwingungen auch die Einflüsse des Gases und der damit einhergehenden Machzahlvariationen auf die aerodynamischen Anregungen untersucht werden. Die Anregungen setzen sich primär aus den Nachläufen und Potentialfeldern benachbarter Schaufelreihen zusammen. Zur Übertragung aerodynamischer Anregungen auf ein anderes Gas ist demnach eine Transformationsmethode abzuleiten, die sowohl die Nachläufe als auch die Potentialfelder auf andere Gase sowie die mit diesen Gasen einhergehenden unterschiedlichen Machzahlen abbildet.

Literaturverzeichnis

Anding, D., **Ressing, H.**, **Hörmeyer, K.**, **Pisch, R.**, **Ziegler, K.** (2014), "Development of a Novel Axial Compressor Generation for Industrial Applications: Part 2 — Blade Mechanics", in: *Volume 7B: Structures and Dynamics*, American Society of Mechanical Engineers, S. 1–10.

Ashford, G., **Powell, K.** (1996), "An unstructured grid generation and adaptative solution technique for high-Reynolds number compressible flow", in: *VKI (Von Karman Institute) Lecture Series*, S. 1996–06.

Beirow, B., **Köhhorn, A.**, **Maywald, T.**, **Heinrich, C. R.**, **Giersch, T.** (2016), "Simplified determination of aerodynamic damping for bladed rotors. part 1: Experimental validation at rest", in: *Proceedings of the ASME Turbo Expo*.

Birnbaum, W. (1924), "Das ebene Problem des schlagenden Flügels", *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, *4* (4), S. 277–292.

Buchwald, P., **Farahmand, A.**, **Vogt, D. M.** (2019), "On the Influence of Blade Aspect Ratio on Aerodynamic Damping", *Journal of Turbomachinery*, *141* (10).

Clarkson, B. L., **Brown, K. T.** (1985), "Acoustic radiation damping", *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*.

Corral, R., **Vega, A.** (2016a), "Physics of vibrating turbine airfoils at low reduced frequency", *Journal of Propulsion and Power*, *32* (2), S. 325–336.

Corral, R., **Vega, A.** (2016b), "The low reduced frequency limit of vibrating airfoils-Part I: Theoretical analysis", *Journal of Turbomachinery*, *138* (2).

Crawley, E. F. (1988), "Aeroelastic Formulation for Tuned and Mistuned Rotors", in: M. F. Platzer, F. O. Carta (Hrsg.), *AGARD Manual on Aeroelasticity in Axial Flow Turbomachines (Vol2) - Structural Dynamics and Aeroelasticity*, S. 19–1 – 19–24.

Eisenberg, B., **Voss, H.** (2006), "Realization of large scale ASU turbo compressor machine trains in mega process plants", *Institution of Mechanical Engineers, Fluid Machinery Group - Ninth European Fluid Machinery Congress: Applying the Latest Technology to New and Existing Process Equipment*, *2006*, S. 353–366.

Eisenberg, B. (1994), "Development of a New Front Stage for an Industrial Axial Flow Compressor", *Journal of Turbomachinery*, *116* (4), S. 597–604.

El-Nadi, A. I., **Khalifa, N. M.**, **Taha, H. E.** (2022), "Compressible Unsteady Aerodynamic Loads on Oscillating Airfoils in a Subsonic Flow", in: *AIAA SCITECH 2022 Forum*, Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics.

Ewins, D. J. (1973), "Vibration Characteristics of Bladed Disc Assemblies", *Journal of Mechanical Engineering Science*, *15* (3), S. 165–186.

Figaschewsky, F., **Kühhorn, A.**, **Beirow, B.**, **Giersch, T.**, **Nipkau, J.**, **Meinl, F.** (2016), "Simplified estimation of aerodynamic damping for bladed rotors. part 2: Experimental validation during operation", in: *Proceedings of the ASME Turbo Expo*.

Förstching, H. W. (1974), Grundlagen der Aeroelastik, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Freymann, R. (2011), Strukturdynamik, Bd. 4, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Fruth, F., **Jeschke, P.**, **Franz, H.** (2016), "On the scaling of aeroelastic parameters for high pressure applications in centrifugal compressors", in: *Proceedings of the ASME Turbo Expo*.

Hanamura, Y., **Tanaka, H.**, **Yamaguchi, K.** (1980), "A Simplified Method to Measure Unsteady Forces Acting on the Vibrating Blades in Cascade", *Bulletin of JSME*, *23* (180), S. 880–887.

Haszeldine, R. S. (2009), "Carbon Capture and Storage: How Green Can Black Be?", *Science*, *325* (5948), S. 1647–1652.

He, L., **Ning, W.** (1998), "Efficient approach for analysis of unsteady viscous flows in turbomachines", *AIAA Journal*, *36* (11), S. 2005–2012.

Hoffmann, H. (2023), "Einfluss unterschiedlicher Gase auf das Betriebsverhalten mehrstufiger Axialverdichter", Dissertation, RWTH Aachen.

Hoffmann, H., **Stuhldreier, L.**, **van Rennings, R.**, **Jeschke, P.** (2020), "Influence of Different Gases on the Design Point of an Industrial Axial Compressor and Deduced Aerodynamical Rematching Methodology", *Journal of the Global Power and Propulsion Society*.

Irretier, H. (1981), "Zum Einfluss des Schwingungsverhaltens eines scheibenförmigen Tragkörpers auf die Eigenfrequenzen der Schaufeln thermischer Turbomaschinen", *Ingenieur-Archiv*, *50* (2), S. 85–102.

Kielb, R. E., **Kaza, K. R. V.** (1983), "Aeroelastic Characteristics of a Cascade of Mistuned Blades in Subsonic and Supersonic Flows", *Journal of Vibration and Acoustics*, *105* (4), S. 425–433.

Klauke, T. (2007), "Schaufelschwingungen realer integraler Verdichterräder im Hinblick auf Verstimmung und Lokalisierung", Dissertation, BTU Cottbus.

Küssner, H. G. (1936), "Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln", *Luftfahrtforschung*, *13*.

Küssner, H. G. (1954), "A General Method for Solving Problems of the Unsteady Lifting Surface Theory in the Subsonic Range", *Journal of the Aeronautical Sciences*, *21* (1), S. 17–26.

Küssner, H. G. (1967), "Theorie des schwingenden Streckenprofils bei kompressibler Unterschallströmung Teil 1: Herleitung der analytischen Lösung für den Störddruck", DLR Forschungsbericht.

Küssner, H. G., **Schwarz, L.** (1940), "Der schwingende Flügel mit aerodynamisch ausgeglichenem Ruder", *Luftfahrtforschung*, *17*.

Luke, E., **Collins, E.**, **Blades, E.** (2012), "A fast mesh deformation method using explicit interpolation", *Journal of Computational Physics*.

MAN Turbomaschinen AG (2003), "Axial-Flow-Compressors", Produktbroschüre.

May, M. (2011), "Linearized flutter investigations of mistuned turbomachinery blading", Dissertation, Technische Universität Berlin, DLR.

McLachlan, N. W. (1964), Theory and Application of Mathieu Functions, Dover Publications.

Müller, T. R., **Vogt, D. M.**, **Fischer, M.**, **Phillipsen, B. A.** (2018), "On the Far-Field Boundary Condition Treatment in the Framework of Aeromechanical Computations using Ansys CFX", in: *Proceedings of the 15th International Symposium on Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics & Aeroelasticity of Turbomachines*.

Nipkau, J. (2011), "Analysis of Mistuned Blisk Vibrations Using a Surrogate Lumped Mass Model with Aerodynamic Influences", Dissertation, BTU Cottbus.

Olson, B. J., **Shaw, S. W.**, **Shi, C.**, **Pierre, C.**, **Parker, R. G.** (2014), "Circulant Matrices and Their Application to Vibration Analysis", *Applied Mechanics Reviews*, *66* (4), S. 0–41.

Pan, M., **Mårtensson, H.**, **Petrie-Repar, P.**, **Sun, T.**, **Gezork, T.** (2018), "Determination of aerodynamic damping at high reduced frequencies", in: *Proceedings of the ASME Turbo Expo*.

Reissner, E. (1949), "On the theory of oscillating airfoils of finite span in subsonic compressible flow", NACA, Nr. 1953.

Reissner, E. (1951), "On the application of Mathieu functions in the theory of subsonic compressible flow past oscillating airfoils", NACA, Nr. 2363.

Schiebahn, S., **Grube, T.**, **Robinius, M.**, **Tietze, V.**, **Kumar, B.**, **Stolten, D.** (2015), "Power to gas: Technological overview, systems analysis and economic assessment for a case study in Germany", *International Journal of Hydrogen Energy*, *40* (12), S. 4285–4294.

Schnell, R. (2004), "Numerische Simulation des akustischen Nahfeldes einer Triebwerksgebläsestufe", Dissertation, Technische Universität Berlin.

Schwarz, L. (1940), "Berechnung der Druckverteilung einer harmonisch sich verformenden Tragfläche in ebener Strömung", *Luftfahrtforschung*, *17*.

Spalart, P. R., **Allmaras, S. R.** (1994), "One-equation turbulence model for aerodynamic flows", *Recherche aerospatiale*.

Strehlau, U. (2011), "Schaufelschwingungen realer integraler Verdichterlaufräder bei zusätzlicher Berücksichtigung höherer Moden", Dissertation, BTU Cottbus.

Sutherland, W. (1893), "The viscosity of gases and molecular force", *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, *36* (223), S. 507–531.

Tapken, U. (2015), "Analyse und Synthese akustischer Interaktionsmoden von Turbomaschinen", Dissertation, Technische Universität Berlin.

Theodorsen, T. (1935), "General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter", *Naca Report no 496*, *23* (4), S. 413–433.

Traupel, W. (1982), Thermische Turbomaschinen, Berlin, Heidelberg: Springer.

Tyler, J. M., **Sofrin, T. G.** (1962), "Axial flow compressor noise studies", in: *SAE Technical Papers*.

Vega, A., **Corral, R.** (2016), "The low reduced frequency limit of vibrating airfoils-Part II: Numerical experiments", *Journal of Turbomachinery*, *138* (2), S. 1–9.

Verdon, J. M. (1988), "Linearized Unsteady Aerodynamic Theory", in: Platzer, M. F., Carta, F. O. (Hrsg.), *AGARD Manual on Aeroelasticity in Axial-Flow Turbomachines - Volume 2*, S. 2.1 – 2.31.

Verdon, J. M., **Caspar, J. R.** (1980), "Subsonic flow past an oscillating cascade with finite mean flow deflection", *AIAA Journal*, *18* (5), S. 540–548.

Verdon, J. M., **Caspar, J. R.** (1984), "A linearized unsteady aerodynamic analysis for transonic cascades", *Journal of Fluid Mechanics*.

Vilmin, S., **Lorrain, E.**, **Debrabandere, F.**, **Tartinville, B.**, **Capron, A.**, **Hirsch, C.** (2013), "The nonlinear harmonic method applied to the combined effects of multi-row unsteady flows", *Proceedings of the ASME Turbo Expo*, *6 C*, S. 1–10.

Vilmin, S., **Lorrain, E.**, **Hirsch, C. H.**, **Swoboda, M.** (2006), "Unsteady flow modeling across the rotor/stator interface using the nonlinear harmonic method", *Proceedings of the ASME Turbo Expo*, *6 PART B*, S. 1227–1237.

Vogt, D. M. (2005), "Experimental Investigation of Three-Dimensional Mechanisms in Low-Pressure Turbine Flutter", Dissertation, KTH Stockholm.

Wagner, H. (1925), "Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln", *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, *5* (1), S. 17–35.

Waite, J. J., **Kielb, R. E.** (2014), "Physical Understanding and Sensitivities of LPT Flutter", in: *Volume 7B: Structures and Dynamics*, American Society of Mechanical Engineers, S. 1–12.

Whitehead, D. S. (1960), "Force and Moment Coefficients for Vibrating Aerofoils in Cascade Force and Moment Coefficients for Vibrating Aerofoils in Cascade", *Aeronautical Research Council Reports and Memoranda*, (3254).

Whitehead, D. S. (1972), "Vibration and Sound Generation in a Cascade of Flat Plates in Subsonic Flow", *Aeronautical Research Council Reports and Memoranda*, (3685).

Whitehead, D. S. (1988), "Classical Two-Dimensional Methods", in: Platzer, M. F., Carta, F. O. (Hrsg.), *AGARD Manual on Aeroelasticity in Axial-Flow Turbomachines - Volume 2*, S. 3.1 – 3.30.

Wille, F. (1968), "Theorie des schwingenden Streckenprofils bei kompressibler Unterschallströmung Teil 2: Berechnung der Küssnerschen Wirbelschleppenfunktion (T-Funktion)", DLR Forschungsbericht.

Witteveen, J. A. (2010), "Explicit and robust Inverse Distance Weighting mesh deformation for CFD", in: *48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*.

Ziegler, K., **Eisenberg, B.**, **Hörmeyer, K.**, **Emmrich, R.**, **Ressing, H.** (2014), "Development of a Novel Axial Compressor Generation for Industrial Applications: Part 1 — Compressor Design and Performance", in: *Volume 2A: Turbomachinery*, Bd. 2A, American Society of Mechanical Engineers, S. 1–11.

A. Netzunabhängigkeitsstudie

Mit einer Netzunabhängigkeitsuntersuchung wurde das in dieser Arbeit verwendete Netz ausgewählt. Dieses ergab sich aus einem Kompromiss zwischen Netzunabhängigkeit der bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten und dem notwendigen Rechenaufwand. Dazu wurden neun unterschiedliche 360°-Netze mit Zellanzahlen von $\approx$ 310.000 bis $\approx$ 58,3 Mio untersucht. Die Rechnungen wurden in dem in dieser Arbeit verwendeten Referenzbetriebspunkt für Luft durchgeführt.

Die Ergebnisse der stationären Rechnungen sind in Form der Verläufe des Totaldruckverhältnisses, des Massenstroms und des isentropen Wirkungsgrads im Verhältnis zu den Ergebnissen auf dem feinsten Netz in Abbildung A.1 dargestellt. Das Totaldruckverhältnis weist dabei die geringste Netzabhängigkeit auf und erreicht für alle verwendeten Netze Abweichungen kleiner 0,1 %. Der Massenstrom und isentrope Wirkungsgrad stimmen allerdings erst ab dem Netz mit der Zellanzahl 15,5 Mio. mit Abweichungen kleiner 1 % in einem akzeptablen Maß mit den Ergebnissen des feinsten Netzes überein.

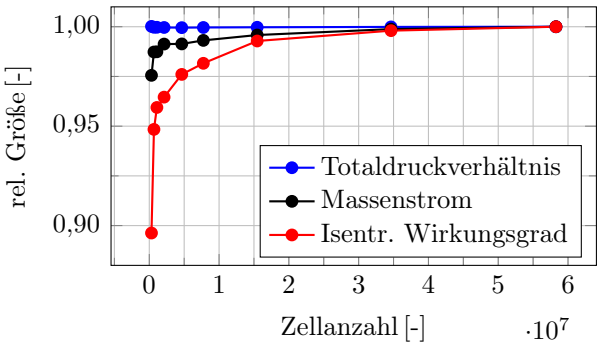
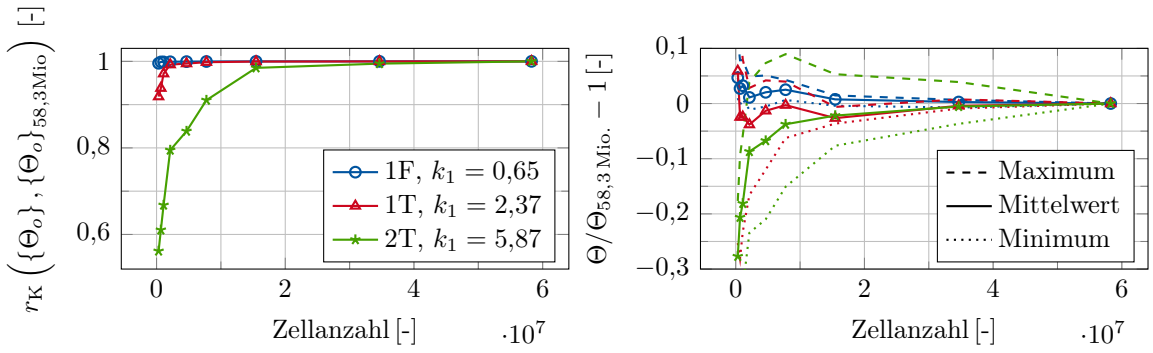


Abbildung A.1.: Verlauf stationärer Größen der Netzstudie über die Zellanzahl des 360°-Netzes in Bezug auf die Ergebnisse des feinsten Netzes

Mit der Einflusskoeffizienten Methode wurden zusätzlich die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten über alle IBPA für die Eigenformen 1F, 1T und 2T bei ihren jeweiligen reduzierten Frequenzen im Referenzbetriebspunkt mit allen Netzen berechnet. In Abbildung A.2a sind die mit (4.6) bestimmten Korrelationskoeffizienten der S-Kurven aller untersuchten Netze für die drei untersuchten Moden über der Zellanzahl aufgetragen. Als Referenz dienen auch hier die Verläufe der aerodynamischen Arbeiten des feinsten Netzes. Da der Korrelationskoeffizient nur den Verlauf und keine Skalierungsfehler in den S-Kurven berücksichtigt, sind in Abbildung A.2b zusätzlich die Mittelwerte der relativen Abweichungen der entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten in Bezug auf die Größen des feinsten Netzes dargestellt. Zusätzlich sind die maximalen und minimalen relativen Abweichungen als gestrichelte bzw. gepunktete Linien aufgeführt.

Für die 1F-Mode ist nahezu keine Abhängigkeit sowohl im Verlauf der S-Kurven als auch in den relativen Abweichungen der entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten von der Zellanzahl vorhanden. Dies liegt vor allem an der geringen reduzierten Frequenz und damit großen Wellenlänge der durch die Schaufelschwingungen hervorgerufenen akustischen Wellen. Um diese akustischen Wellen ausreichend aufzulösen, ist eine Zellanzahl in



(a) Korrelationkoeffizient der S-Kurven in Bezug auf die S-Kurven des feinsten Netzes

(b) Relative Abweichungen der entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten in Bezug zum feinsten Netz

Abbildung A.2.: Netzeinfluss auf die bewegungsinduzierten aerodynamischen Arbeiten

Umfangsrichtung von mindestens 20 pro Wellenlänge erforderlich (*Schnell*, 2004). Daher ist bei der größten hier untersuchten reduzierten Frequenz der 2T-Mode $k_1 = 5{,}87$ eine deutliche Netzabhängigkeit sichtbar. Erst das Netz mit 15,5 Mio. Zellen kann mit 25 Zellen pro Wellenlänge die akustischen Wellen ausreichend auflösen. Deshalb ist dies auch das gröbste Netz, was einen Korrelationskoeffizienten $r_K > 98\,\%$ aufweist. In Abbildung A.2b wird bei den Verläufen der 2T-Mode ersichtlich, dass die relativen Abweichungen zum feinsten Netz im Extremwert bis zu $\pm 8\,\%$ betragen. Im Mittel sind die Abweichungen mit $2\,\%$ jedoch deutlich geringer.

In Abbildung A.3 werden die S-Kurven der 2T-Mode der vier feinsten Netze direkt miteinander verglichen. Es sind sowohl die entdimensionierten aerodynamischen Arbeiten als auch die relativen Abweichungen im Vergleich zum feinsten Netz über alle IBPA dargestellt. In der Abbildung wird deutlich, dass die größten Abweichungen in der Nähe der akustischen Resonanzen auftreten. Die übrigen Abweichungen liegen beim Netz mit 15,5 Mio. Zellen unter $2\,\%$ im Betrag. Im Hinblick auf den drei- bzw. siebenfachen höheren Rechenaufwand der mit den Netzen mit 34,6 Mio. bzw. 58,3 Mio. Zellen einhergeht, wurde als Rechennetz für alle in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen das mit 15,5 Mio. Zellen ausgewählt.

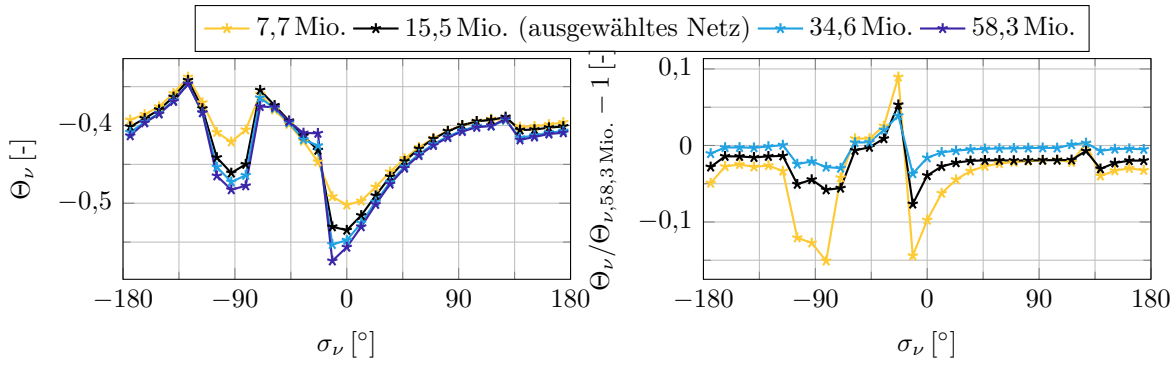


Abbildung A.3.: Entdimensionierte aerodynamische Arbeiten in TWM-Notation der verschiedenen Netze für die 2T Mode bei $k_1 = 5{,}87$

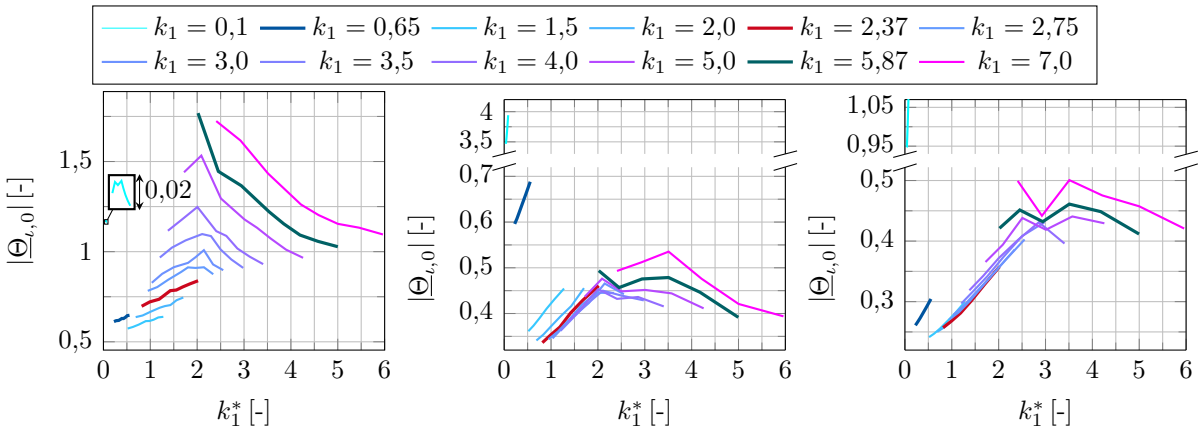
B. Abhängigkeit der Amplituden der Einflusskoeffizienten von k^*

Die Ergebnisse in den beiden Abschnitten 7.2.1 und 7.2.2 zeigen, dass die entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten Trends bzw. Abhängigkeiten mit der machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz k_1^* aufweisen. Zusätzlich hat die Eigenform einen sichtbaren Einfluss auf die Verläufe dieser Amplituden. Um ein möglichst umfassendes Verständnis dieser Abhängigkeiten zu gewinnen, wird in diesem Abschnitt eine Parameterstudie durchgeführt. Bei dieser Parameterstudie werden die Amplituden der Einflusskoeffizienten der drei untersuchten Eigenformen bei neun weiteren reduzierten Frequenzen im Bereich $0{,}1 \leq k_1 \leq 7{,}0$ betrachtet.

Schwingende Schaufel $\iota = 0$

In Abbildung B.1 sind die Verläufe der entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten der schwingenden Schaufel unter Machzahlvariation von $0{,}6M_{\text{ref}}$ bis $1{,}1M_{\text{ref}}$ über die machzahlkorrigierte reduzierte Frequenz k_1^* für alle drei untersuchten Eigenformen aufgetragen. Auf eine Normierung mit den Amplituden bei der Referenzmachzahl wurde an dieser Stelle verzichtet. Dies ermöglicht die Bewertung der sich verändernden Größenordnung der entdimensionierten Amplituden.

Bei den Ergebnissen der 1F-Eigenform in Abbildung B.1a ist eine deutliche Staffelung der Verläufe der Amplituden der entdimensionierten Einflusskoeffizienten mit der reduzierten Frequenz festzustellen. Bei der kleinsten betrachteten reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}1$ (siehe vergrößerter Bereich in Abbildung B.1a) sind die entdimensionierten Amplituden nahezu unabhängig von der Machzahl. Zudem weisen diese entdimensionierten Amplituden im Vergleich zu den Amplituden der nächst größeren reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ um den Faktor zwei größere Werte auf. Bei der nächst größeren reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}65$ und bis zur machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz $k_1^* \approx 2$, weisen die entdimensionierten Amplituden einen linearen Anstieg mit der machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz k_1^* auf. Die geringsten Amplituden der entdimensionierten Einflusskoeffizienten treten bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 1{,}5$ auf. Danach steigt sowohl die Größenordnung der Amplituden als auch die Steigung der Verläufe mit k_1^* mit zunehmender reduzierter Frequenz an. Ab der machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz $k_1^* \approx 2$ fallen die Amplituden bei allen reduzierten Frequenzen ungefähr reziprok mit $\approx 1/k_1^*$ ab. Eine mögliche Erklärung für dieses Verhalten ist auf die beiden Anteile des komplexen Potentials (2.90) aus der instationären Profiltheorie nach Kapitel 2.3.1 zurückzuführen. Bei der kleinsten untersuchten reduzierten Frequenz sind die durch die Schwingung induzierten Druckschwankungen nahezu quasi-stationär und die zirkulatorischen Anteile



(a) 1F-Eigenform **(b)** 1T-Eigenform **(c)** 2T-Eigenform

Abbildung B.1.: Amplituden der entdimensionierten Einflusskoeffizienten der schwingenden Schaufel $\iota = 0$ der Eigenformen 1F, 1T und 2T unter Machzahlvariation von $0{,}6M_{\text{ref}}$ bis $1{,}1M_{\text{ref}}$ für die in der Parameterstudie untersuchten reduzierten Frequenzen $0{,}1 \leq k_1 \leq 7$. Aufgetragen über die machzahlkorrigierte reduzierte Frequenz k_1^* nach (2.89).

dominieren weitgehend. Solange die zirkulatorischen Anteile dominieren, sinkt die Größenordnung der Amplituden mit steigender reduzierter Frequenz. Ab der reduzierten Frequenz $k_1 = 1{,}5$ dominieren die nicht-zirkulatorischen Anteile die aerodynamische Schaufelkopplung und die Amplituden steigen mit zunehmender reduzierter Frequenz an. Somit lassen die gemachten Beobachtungen darauf schließen, dass das Verhalten der entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten unter Machzahlvariation bei der 1F-Eigenform von der machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz k_1^* abhängig ist. Die reduzierte Frequenz selbst bestimmt dabei die Größenordnung der entdimensionierten Amplituden, was schließlich zu der Staffelung der einzelnen Verläufe nach der reduzierten Frequenz in Abbildung B.1a führt.

Im Gegensatz zur 1F-Eigenform weist bei der 1T-Eigenform der Verlauf der entdimensionierten Amplituden bei der kleinsten reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}1$ in Abbildung B.1b einen steilen linearen Anstieg mit k_1^* und damit eine große Machzahlabhängigkeit auf. Zudem fallen die entdimensionierten Amplituden bei dieser reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}1$ um das drei- bis vierfache höher aus als bei der 1F-Eigenform. Mit zunehmender reduzierter Frequenz nimmt sowohl die Steigung als auch die Amplitude bis zu den Verläufen der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ ab. Diese Amplitudenabnahme endet somit erst bei einer größeren reduzierten Frequenz im Vergleich zur 1F-Eigenform. Daraus kann geschlossen werden, dass der zirkulatorische Anteil bei der 1T-Eigenform länger dominant ist. Außerdem sind im Gegensatz zur 1F-Eigenform bei der 1T-Eigenform die Amplituden im Bereich $0{,}75 < k_1^* < 2{,}1$ nahezu unabhängig von der reduzierten Frequenz und es tritt somit keine Staffelung mit der reduzierten Frequenz auf. Damit ist in diesem Bereich das Verhalten und die Größenordnung der entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten allein abhängig von der machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz k_1^*. Analog zur 1F-Eigenform endet der lineare Anstieg bei der machzahlkorrigierten

reduzierten Frequenz $k_1^* \approx 2$. Allerdings ist ab dort kein reziproker Abfall der Amplitude ersichtlich, sondern ein nicht-linearer, fluktuierender Verlauf.

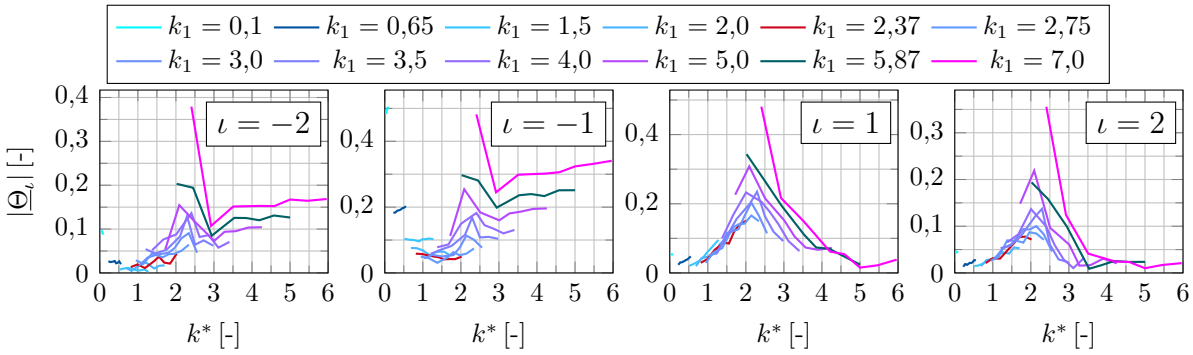
Ähnlich zu den Verläufen der 1T-Eigenform verhalten sich auch die Verläufe der entdimensionierten Amplituden der 2T-Eigenform in Abbildung B.1c. Jedoch betragen die entdimensionierten Amplituden bei der kleinsten reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}1$ nur ungefähr ein Viertel der entdimensionierten Amplituden der 1T-Eigenform. Damit sind bei dieser reduzierten Frequenz die entdimensionierten Amplituden bei der 2T-Eigenform in derselben Größenordnung wie die Amplituden der 1F-Eigenform. Analog zu den Verläufen der 1F-Eigenform sinken die Größenordnungen der entdimensionierten Amplituden der 2T-Eigenform bis zu der reduzierten Frequenz $k_1 = 1{,}5$ ab. Da bei der 1T-Eigenform die minimalen entdimensionierten Amplituden erst bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ auftreten, liegt die Vermutung nahe, dass bei der 2T-Eigenform die zirkulatorischen Anteile der aeordynamischen Schaufelkopplung geringer ausfallen als bei der 1T-Eigenform. Analog zur 1T-Eigenform steigen ab der reduzierten Frequenz $k_1 = 1{,}5$ die entdimensionierten Amplituden in nahezu alleiniger Abhängigkeit von der machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz k_1^*. Damit tritt auch bei den Verläufen der 2T-Eigenform keine Staffelung nach der reduzierten Frequenz auf. Im Gegensatz zu den Verläufen der 1F und 1T-Eigenformen endet der lineare Anstieg der entdimensionierten Amplituden erst bei einer machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz im Bereich von $2{,}5 < k_1^* < 3$. Bei größeren machzahlkorrigierten reduzierten Frequenzen verlaufen die entdimensionierten Amplituden fluktuierend, ähnlich wie bei der 1T-Eigenform.

Nicht schwingende Schaufeln $\iota \neq 0$

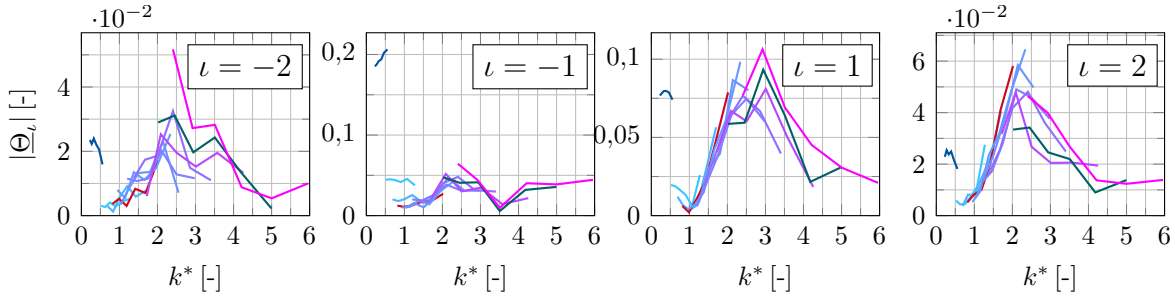
Die entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten der nicht schwingenden Schaufeln mit den Indizes $\iota = \{-2, -1, 1, 2\}$ sind in Abbildung B.2 für die jeweiligen Eigenformen über die machzahlkorrigierte reduzierte Frequenz k_1^* aufgetragen. Für die 1F-Eigenform sind die Verläufe der Amplituden für alle untersuchten reduzierten Frequenzen $0{,}1 \leq k_1 \leq 7{,}0$ dargestellt. Für eine bessere Übersichtlichkeit wird in den Abbildungen der Torsionseigenformen B.2b und B.2c auf die Darstellung der entdimensionierten Amplituden der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}1$ verzichtet. Denn bei den Torsionseigenformen fallen die entdimensionierten Amplituden bei der reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}1$ um den Faktor zwei bis zehn größer aus als die maximalen Amplituden der übrigen reduzierten Frequenzen.

Die Amplituden der nicht schwingenden Schaufeln der 1F-Eigenform in Abbildung B.2a nehmen analog zu den Amplituden der Einflusskoeffizienten der schwingenden Schaufel $\iota = 0$ zunächst mit steigender reduzierter Frequenz ab. Aufgrund der dominant angeregten Wirbelwellen sind die Amplituden der Schaufel $\iota = -1$ bei den geringen reduzierten Frequenzen $k_1 \leq 1.5$ deutlich größer als die Amplituden der anderen Schaufeln. Denn Wirbelwellen breiten sich konvektiv aus und induzieren damit nur auf den Schaufeln, die entgegen der Rotationsrichtung von der schwingenden Schaufel liegen, instationäre Drücke. Mit zunehmender reduzierter Frequenz verringert sich der Anteil der Wirbelwellen an der aerodynamischen Schaufelkopplung. Da die Wirbelwellen nahezu ausschließlich die Einflusskoeffizienten der Schaufel $\iota = -1$ beeinflussen, nehmen die entdimensionierten Amplituden dieser Schaufel im Vergleich zu den anderen Schaufeln

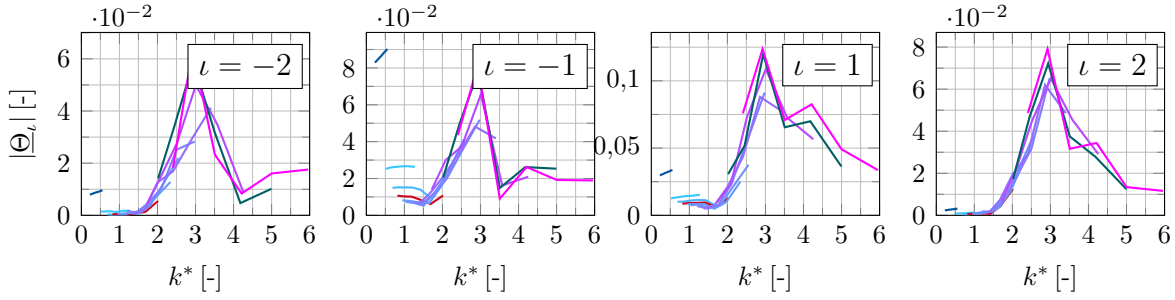
mit zunehmender reduzierter Frequenz bis $k_1 = 2{,}37$ besonders stark ab. Mit steigender reduzierter Frequenz nimmt der Anteil der akustischen Wellen an der aerodynamischen Schaufelkopplung zu. Da sich diese akustischen Wellen in alle Raumrichtungen ausbreiten, sind die entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten ab der reduzierten Frequenz $k_1 = 2{,}37$ bei allen in Abbildung B.2a betrachteten nicht schwingenden Schaufeln in derselben Größenordnung. Zudem weisen die Amplituden einen deutlichen Anstieg mit der machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz k_1^* bis zu einem Grenzwert von $k_1^* \approx 2{,}5$ auf. Im Gegensatz zu den Verläufen der schwingenden Schaufel $\iota = 0$ in Abbildung B.1a tritt bei den Schaufeln entgegen Rotationsrichtung $\iota < 0$ nur eine geringe bzw. bei den Schaufeln in Rotationsrichtung nahezu keine Staffelung mit der reduzierten Frequenz auf. In diesem Bereich sind die Amplituden der Einflusskoeffizienten nahezu allein ab-



(a) 1F



(b) 1T



(c) 2T

Abbildung B.2.: Amplitude der entdimensionierten Einflusskoeffizienten der nicht schwingenden Schaufeln $\iota = \{-2, -1, 1, 2\}$ der Eigenformen 1F, 1T und 2T für die in der Parameterstudie untersuchten reduzierten Frequenzen $0{,}1 \leq k_1 \leq 7$. Aufgetragen über die machzahlkorrigierte reduzierte Frequenz k^* nach (2.89).

hängig von der machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz. Analog zu den Verläufen der Amplituden der schwingenden Schaufel in Abbildung B.1a nehmen die Amplituden ab dem Bereich der machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz $2 \lessapprox k_1^* \lessapprox 3$ deutlich ab. Bei den Schaufeln mit negativen Indizes verlaufen die Amplituden nach dem deutlichen Abfall nahezu konstant mit k_1^*, jedoch gestaffelt nach der reduzierten Frequenz. Bei den Schaufeln mit positiven Indizes ist der Abfall reziprok mit k_1^*. Hierbei streben die Amplituden gegen einen deutlich geringeren Wert als die Amplituden der entgegen der Rotationsrichtung gelegenen Schaufeln.

Die Verläufe der entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten der nicht schwingenden Schaufeln sind für die 1T-Eigenform in Abbildung B.2b dargestellt. Insgesamt weisen diese Verläufe in der ersten Größenordnung eine deutliche Ähnlichkeit zu den Verläufen der 1F-Eigenform auf. Jedoch fallen die entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten bei der kleinsten betrachteten reduzierten Frequenz $k_1 = 0{,}1$ bis zu sechsmal größer aus als die größten entdimensionierten Amplituden bei den anderen reduzierten Frequenzen. Damit hat die reduzierte Frequenz im Bereich geringer machzahlkorrigierter reduzierter Frequenzen $k_1^* \lessapprox 1{,}5$ und damit dominanter Wirbelwellen einen deutlich größeren Einfluss auf die entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten als es bei der 1F-Eigenform der Fall ist. Bei der 1T-Eigenform ist zudem das Minimum der entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten stärker ausgeprägt und die Steigung der Amplituden ab $k_1^* \approx 1$ ist deutlich größer. Zudem ist die Staffelung der Amplituden nach der reduzierten Frequenz geringer. Diese Beobachtungen deuten darauf hin, dass die Verläufe der entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten bei der 1T-Eigenform im Bereich der dominanten akustischen Wellen deutlich stärker von der machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz abhängen als von der reduzierten Frequenz allein.

Dieser Vergleich der Verläufe der 1F- und 1T-Eigenform zeigt den Einfluss der Art der Eigenform auf die Amplituden der Einflusskoeffizienten. Die Verläufe der entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten der nicht schwingenden Schaufeln bei der 2T-Eigenform in Abbildung B.2c lassen zusätzlich einen Einfluss der Ordnung der Eigenform auf die Verläufe erkennen. Im Bereich dominanter Wirbelwellen und damit geringer reduzierter Frequenzen, weisen die Verläufe der Amplituden der Schaufel $\iota = -1$ deutlich geringere entdimensionierte Amplituden auf, als es bei der 1T-Eigenform der Fall ist. Bei beiden Torsionseigenformen schwingt nahezu jeder Profilschnitt in einer zweidimensionalen Torsion. Jedoch teilt bei der 2T-Eigenform ein Schwingungsknoten bei ca. 60% Schaufelhöhe die jeweils tordierende Profilschnitte in zwei Hälften auf, die zueinander um 180° phasenversetzt schwingen. Die durch die Schwingung der Schaufel $\iota = 0$ angeregten Wirbelwellen induzieren damit auf der Schaufel $\iota = -1$ ebenfalls eine über die Schaufelhöhe um 180° phasenversetzte instationäre Auftriebsverteilung. Wenn der instationäre Auftrieb im oberen Bereich der Schaufel ansteigt, verringert er sich gleichzeitig im unteren Bereich der Schaufeln. Da die Einflusskoeffizienten aus den aerodynamischen Arbeiten integrativ über alle Profilschnitte ermittelt werden, gleichen sich die gegensätzlichen Auftriebsänderungen zum Teil aus. Als Konsequenz fallen somit die Amplituden bei den reduzierten Frequenzen mit dominierenden Wirbelwellen geringer aus als bei der 1T-Eigenform. Weiterhin ist der Verlauf der Amplituden der 2T-Eigenform im Bereich von $k_1^* \approx 0{,}5$ bis $k_1^* \approx 1{,}75$ weniger abhängig von der machzahlkorrigierten

reduzierten Frequenz k_1^* als es bei der 1T-Eigenform der Fall ist. Die 2T-Eigenform regt akustische Wellen mit einer radialen Modenordnung $n > 0$ primär an. Diese Wellen sind allerdings bei den reduzierten Frequenzen in diesem Bereich noch nicht ausbreitungsfähig. Daher fallen die Amplituden der akustischen Wellen exponentiell mit zunehmendem Abstand zur schwingenden Schaufel ab. Dadurch induzieren allein die Wirbelwellen die Einflusskoeffizienten und der Machzahleinfluss ist hier gering. Bei den Eigenformen 1F und 1T wird hingegen die radiale Modenordnung $n = 0$ angeregt, welche immer ausbreitungsfähig ist. Somit ist bei diesen Eigenformen auch bei den von Wirbelwellen dominierten reduzierten Frequenzen noch ein Anteil akustischer Wellen enthalten, welcher sich in einer Machzahlabhängigkeit der Einflusskoeffizienten bemerkbar macht. Analog zu den beiden anderen Eigenformen tritt auch bei der 2T-Eigenform ein steiler Anstieg der Amplituden auf. Dieser Anstieg endet allerdings bei einer größeren machzahlkorrigierten reduzierten Frequenz $k_1^* \approx 3$. Somit lässt sich an dieser Stelle festhalten, dass auch die machzahlkorrigierte Frequenz, bei der die größten Amplituden auftreten, bei unterschiedlichen Eigenformen unterschiedlich ist. Der darauf folgende Abfall der Amplituden verhält sich allerdings wieder ähnlich zu den Verläufen der 1T-Eigenform in Abbildung B.2c.

Zusammenfassend zeigt diese Parameterstudie, dass die entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten vor allem durch die machzahlkorrigierte reduzierte Frequenz k_1^*, dem Eigenwert der Helmholtz-Gleichung (2.88), charakterisiert wird. Bei geringen machzahlkorrigierten reduzierten Frequenzen, bei denen Wirbelwellen die aerodynamische Schaufelkopplung dominieren, beeinflusst jedoch auch die reduzierte Frequenz selbst die entdimensionierten Amplituden der Einflusskoeffizienten signifikant. Bei größeren machzahlkorrigierten reduzierten Frequenzen, bei denen akustische Wellen die aerodynamische Schaufelkopplung dominieren, hat die reduzierte Frequenz nur bei der 1F-Eigenform einen deutlichen Einfluss auf die entdimensionierten Amplituden.