Eine inverse Methode zur Analyse des Wärmeübergangs einer konvektiv gekühlten Gasturbinenschaufel

An Inverse Method for the Analysis of the Heat Transfer of a Convectively Cooled Gas Turbine Blade

Von der Fakultät für Maschinenwesen der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
zur Erlangung des akademischen Grades einer
Doktorin der Ingenieurwissenschaften genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Viola Alexandra Dehe

Berichter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Peter Jeschke
Univ.-Prof. Dr. sc. Sebastian Trimpe

Tag der mündlichen Prüfung: 28.11.2025

Diese Dissertation ist auf den Internetseiten der Universitätsbibliothek online verfügbar.

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit stellt eine inverse Methode zur Analyse des Wärmeübergangs einer konvektiv gekühlten Gasturbinenschaufel vor. Experimentell ermittelte Materialtemperaturen werden verwendet, um die vorherrschenden Wärmestromrandbedingungen zu bestimmen. Dazu wird das direkte Problem, die Bestimmung einer Temperaturverteilung bei Kenntnis des anliegenden Wärmestroms, mittels iterativer Methoden invertiert. Dieses wird als Optimierungsproblem der Differenz aus experimentell ermittelten sowie aus einer angenommenen Wärmestromverteilung berechneten Materialtemperaturen formuliert. Die Berechnung der Materialtemperaturen wird mittels Finite-Elemente-Methode durchgeführt. Das entstehende Optimierungsproblem wird mit unterschiedlichen Algorithmen gelöst. Verwendet werden ein gradientenfreies Richtungssuchverfahren (modifzierter Powell-Algorithmus), *Simulated Annealing* sowie *Bayesian Optimization.*

Durch Anwendung einer Regularisierung wird *Overfitting* der Lösung verhindert. Dazu wird das Optimierungsproblem um einen Strafterm erweitert, der auf physikalisch begründeten Annahmen über die Struktur des Wärmestromverlaufs entlang der Schaufelaußenseite beruht. Neben dem Einfluss des Strafterms wird auch dessen Gewichtung im Problem durch den Regularisierungsparameter betrachtet. Eine Variation des Parameters wird durchgeführt und geeignete Werte werden anhand von *Morozov's Discrepancy Principle* sowie grafisch veranschaulicht aus dem *L-Curve* Diagramm ausgewählt.

Die Methode wird auf unterschiedliche Datensätze zur Validierung angewendet. Messdaten bei realitätsnahen Temperaturen wurden am Heißgaskanal des Instituts für Strahlantriebe und Turbomaschinen der RWTH Aachen erfasst. Zur Einordnung der ermittelten Wärmeströme stehen Ergebnisse von konjugierten Wärmeübergangsrechnungen zur Verfügung. Zusätzlich werden Messdaten aus der Veröffentlichung von Turner (1971) verwendet. Diese Daten weisen unterschiedliche Turbulenzgrade der Anströmung auf, was sich auf den qualitativen Verlauf des Wärmestroms auswirkt.

Im Rahmen der Arbeit werden außerdem Einflüsse auf das Optimierungsergebnis betrachtet, die durch Eigenheiten des Problems und vereinfachende Annahmen entstehen.

Abstract

The present work introduces an inverse method for the analysis of the heat transfer in a convectively cooled turbine blade. Experimentally determined material temperatures are used to calculate the outer heat flow boundary condition. Therefore an iterative inversion of the direct problem, the determination of a temperature distribution from a known heat flow boundary condition, is used. The problem is expressed as an optimization of the difference between experimentally detemined temperatures and temperatures calculated based on an assumed heat flow distribution. The calculation of material temperatures is done with the finite elements method. The resulting optimization problem is then solved using different algorithms. The algorithms used are a direction set method (the modified Powell algorithm), simulated annealing and bayesian optimization.

A regularization method is applied to prevent overfitting of the solution. A penalty term is added to the optimization problem. This term is based on physically justified assumptions about the structure of the heat flux distribution along the outer blade surface. Apart from the influence of the penalty term, its weighting due to the regularization parameter is discussed. A variation of the regularization parameter is performed. Suitable values are chosen based on Morozov's discrepancy principle and, graphically illustrated, from the L-curve diagram.

The method is applied to different data sets for validation. Measurements at engine-similar temperatures were performed with the Hot Gas Cascade at the Institute for Jet Propulsion and Turbomachinery of RWTH Aachen University. The determined heat flux distributions can be assessed with results from conjugate heat transfer calculations. In addition, experimental data from the publication by Turner (1971) is used. The data contains a variation of turbulence intensity, which changes the qualitative heat flux distribution.

In the scope of the present work, influences on the optimization result are discussed. These include influences due to the characteristics of the problem as well as simplifying assumptions.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

1.1 Motivation 1

1.2 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit 2

2 Theoretische Grundlagen **5**

2.1 Formen der Wärmeübertragung 5

2.1.1 Wärmeleitung 6

2.1.2 Strahlung 7

2.1.3 Konvektiver Wärmeübergang 9

2.2 Strömungs- und Temperaturgrenzschichten 12

2.3 Wärmeübergang an Turbinenschaufeln 20

2.3.1 Einfluss der Turbulatoren auf den inneren Wärmeübergang 20

2.3.2 Äußerer Wärmeübergang an Turbinenschaufeln 24

2.3.3 Abgrenzung zur realen Maschine 26

2.4 Lösungsverfahren inverser Probleme 27

2.4.1 Bayes' Theorem 28

2.4.2 Regularisierung 30

2.4.3 Optimierungsverfahren 34

2.4.3.1 Modifizierter Powell-Algorithmus 35

2.4.3.2 Simulated Annealing 36

2.4.3.3 Bayesian Optimization 37

3 Stand der Forschung **41**

3.1 Experimentelle Bestimmung des Wärmeübergangs 41

3.1.1 Hochtemperatur-Kaskadenprüfstände 42

3.1.2 Messdaten mit Turbulenzgradvariation 44

3.2 Inverse Wärmeübergangsprobleme 46

3.2.1 Deterministische Ansätze 46

3.2.2 Bayesian Framework 48
3.3 Vorgängerarbeiten und Einordnung der vorliegenden Arbeit 49

4 Methoden **51**
4.1 Aufbau der Methode 52
4.2 Methoden zur Optimierung und Regularisierung 54
4.2.1 Entwicklung der Regularisierungsfunktion 55
4.2.2 Verwendete Optimierungsalgorithmen 58
4.3 Der Heißgas-Gitterprüfstand 59
4.3.1 Prüfstandsbeschreibung 59
4.3.2 Schaufelgeometrie 61
4.3.3 Instrumentierung und Messdatenerfassung 62
4.3.4 Fehlerbetrachtung 64
4.3.4.1 Kalibrierung 65
4.3.4.2 Fertigungsbedingte Einflüsse 65
4.3.5 Betriebspunkte 67
4.4 Berechnung der Materialtemperaturen mittels FEM 68
4.5 CHT-Rechnungen 72

5 Ergebnisse **77**
5.1 Annahme zweidimensionaler Wärmeleitung 77
5.2 Auswahl der FEM-Randbedingungen 81
5.3 Sensitivitätsanalyse 85
5.4 Einfluss der Regularisierung 89
5.5 Vergleich der Optimierungs-Algorithmen 97
5.6 Weitere Betriebspunkte 101
5.7 Turbulenzgradvariation 103
5.8 Einfluss des Strafterms 108

6 Zusammenfassung **113**

Symbolverzeichnis **117**

Literatur **127**

1 Einleitung

1.1 Motivation

Turbomaschinen spielen eine zentrale Rolle in der Energieerzeugung, die auch vor dem Hintergrund erneuerbarer Energien nicht zu vernachlässigen ist. Sie werden auch in Zukunft benötigt, um Zuverlässigkeit und Flexibilität der Energieversorgung sicherzustellen (AG Turbo 2024). Aufgrund schwankender Verfügbarkeit von erneuerbaren Energien wie Wind- und Solarenergie sind flexible und effiziente Technologien erforderlich, um Lastspitzen auszugleichen und eine konstante Stromversorgung zu gewährleisten. Turbomaschinen, beispielsweise in Form von Gasturbinen, können schnell und bedarfsabhängig Energie bereitstellen, was für die Stabilisierung des Netzes unerlässlich ist (Gülen und Curtis 2024).

Ein wichtiger Faktor zur Erhöhung des thermischen Wirkungsgrades sowie der verfügbaren Leistung ist dabei eine möglichst hohe Turbineneintrittstemperatur (Cumpsty und Heyes 2015; Allied Power Group 2024). Mit Temperaturen von über 2000 °C werden die Belastungsgrenzen der verwendeten Materialien weit überstiegen. Selbst unter Verwendung von Hochtemperaturbeschichtungen und ausgefeilten Kühlsystemen ist die Temperatur der treibende Faktor für Ermüdungserscheinungen des Materials (Rezazadeh Reyhani et al. 2013). Um unerwarteten Ausfällen oder Beschädigungen vorzubeugen, müssen rechtzeitig Wartungen durchgeführt werden. Dabei muss zwischen Betriebssicherheit und Ausfallzeiten abgewogen werden. Je genauer die tatsächlichen Belastungen bekannt sind, desto besser kann diese Abschätzung durchgeführt werden. Insbesondere in den thermisch hochbelasteten Bereichen einer Hochdruckturbine ist es kaum möglich, diese direkt zu bestimmen. Die hohen Temperaturen verhindern den Einsatz empfindlicher Messtechnik. Aufgrund der an dieser Stelle besonders geringen Abmessungen ist auch der Einsatz invasiver und robusterer Messtechnik nicht möglich, ohne die Strömung zu beeinflussen und damit negativ auf den Wirkungsgrad einzuwirken. Die Berechnung des Strömungs- und Temperaturfeldes ist selbst mit aktuell verfügbaren Rechenleistun-

gen mit vollständigen Modellen noch nicht in Echtzeit möglich und darüber hinaus mit hohen Unsicherheiten behaftet. Durch den Einsatz von Ersatzmodellen können Rechenzeiten verkürzt werden, was jedoch meist mit weiteren Unsicherheiten verknüpft ist.

1.2 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit

In der vorliegenden Arbeit wird eine Methode vorgestellt, die der Analyse der anliegenden thermischen Belastungen dient. Dabei werden experimentell ermittelte Materialtemperaturen konvektiv gekühlter Turbinenschaufeln verwendet, um die anliegenden Wärmeströme auf der Heißgasseite zu bestimmen. Die Materialtemperaturen einer prismatischen, konvektiv gekühlten Turbinenschaufel wurden unter realitätsnahen thermischen Bedingungen am Heißgaskanal des Instituts für Strahlantriebe und Turbomaschinen der RWTH Aachen ermittelt und dienen als Zieldaten für die Optimierung. Als Referenz für die ermittelte Wärmestromrandbedingung stehen Ergebnisse von konjugierten Wärmeübergangsrechnungen zur Verfügung. Da die Betriebspunkte des Heißgaskanals sich lediglich im Temperaturniveau unterscheiden und somit qualitativ ähnliche Temperatur- und Wärmestromverläufe zeigen, wird zusätzlich eine Veröffentlichung von Turner (1971) herangezogen. Die dort vorgestellten Daten beinhalten eine Turbulenzgradvariation und somit auch qualitativ verschiedene Verläufe des Wärmestroms.

Die Bestimmung des Wärmestroms anhand von Materialtemperaturen stellt ein inverses Problem dar. Die vorgestellte Methode beinhaltet die iterative Invertierung des dazugehörigen direkten Problems. Dieses wird als vereinfachtes, zweidimensionales Modell mittels der Finite-Elemente-Methode gelöst, wobei eine Variation der Randbedingungen durchgeführt wird. Die Bestimmung der äußeren Wärmestromrandbedingung wird dadurch zu einem Optimierungsproblem, welches die Differenz aus experimentell ermittelten Materialtemperaturen und den mittels der Finite-Elemente-Methode berechneten Temperaturen minimiert. Zur Vermeidung von *Overfitting* wird eine Regularisierung mittels eines Strafterm eingeführt. Dieser wird im Rahmen der Arbeit aufgrund physikalischer Eigenschaften des Problems entwickelt. Zur Lösung des Optimierungsproblems werden drei Algorithmen angewendet, welche unterschiedliche Strategien verfolgen. Es wird ein deterministischer Algorithmus (Powell) verwendet, eine statistische Methode (Simulated Annealing), sowie ein Algorithmus der zur Optimierung ein Ersatzmodell verwendet (Bayesian Optimization). Diese werden im Bezug auf Ergebnis und Rechenaufwand verglichen sowie Einschränkungen und Möglichkeiten der vorgestellten Methode

diskutiert.

Die vorgestellte Methode ermöglicht zusätzliche Analysen des Wärmeübergangs auf Grundlage experimenteller Daten, die aufgrund fehlender Messdaten in thermisch hochbelasteten Systemen ansonsten nicht möglich sind. Im Gegensatz zu Conjugate-Heat-Transfer-Rechnungen wird keine Strömungssimulation durchgeführt, sodass deutlich geringere Rechenkapazitäten notwendig sind. Das notwendige numerische Setup ist auf die Schaufelgeometrie als Festkörper beschränkt. Die Wärmestromrandbedingung wird direkt aus vorhandenen Temperaturinformationen ermittelt. Bei dieser Vorgehensweise wird der gesamte Wandwärmestrom berechnet und nicht zwischen unterschiedlichen Wärmeübergangsmechanismen unterschieden. Dadurch müssen vereinfachende Annahmen, die bei der Strömungsberechnung verwendet werden, wie beispielsweise aufgrund von Turbulenzmodellierung oder Vernachlässigung von Strahlungseffekten, an dieser Stelle nicht berücksichtigt werden. Durch die Instabilität des inversen Problems müssen jedoch an anderer Stelle Annahmen getroffen werden, die beispielsweise in Form der Regularisierung Einfluss auf das Ergebnis nehmen. Die vorgestellte Methode ist daher zunächst als Ergänzung gängiger Vorgehensweisen zu sehen. Durch die neue Herangehensweise können gerade in Kombination mit Conjugate-Heat-Transfer-Rechnungen zusätzliche Einblicke über die tatsächliche Wärmelast von thermisch hochbelasteten Turbinenschaufeln gewonnen werden. Die vorgestellte Methode bietet das Potential, als Grundlage für eine weitere Entwicklung zu eigenständigen Lösungsverfahren zu dienen.

2 Theoretische Grundlagen

In der vorliegenden Arbeit wird eine Methode zur Analyse des Wärmeübergangs einer konvektiv gekühlten Turbinenschaufel entwickelt. In den ersten Unterkapiteln werden die physikalischen Zusammenhänge beschrieben, die zum Verständnis der am Wärmeübergang beteiligten Mechanismen notwendig sind. Zunächst werden die verschiedenen Formen des Wärmeübergangs erläutert. Da für den Wärmeübergang auch der Strömungszustand relevant ist, wird im Folgenden kurz auf Strömungsgrenzschichten sowie Temperaturgrenzschichten eingegangen. Im Anschluss werden charakteristische Phänomene bei der Umströmung von Turbinenschaufeln sowie der Durchströmung von Kühlkanälen behandelt.

Im Rahmen der vorgestellten Methode werden aus experimentell bestimmten Materialtemperaturen vorherrschende Wärmestromrandbedingungen berechnet. Bei diesem Vorgehen handelt es sich um ein sogenanntes inverses Problem. Die Eigenheiten solcher Probleme sowie Lösungsansätze werden im letzten Unterkapitel erläutert.

2.1 Formen der Wärmeübertragung

Bei der Kühlung einer Turbinenschaufel treten verschiedene Formen der Wärmeübertragung auf. Bei direktem Kontakt zwischen Körpern oder zwischen Festkörper und (ruhendem) Fluid mit voneinander verschiedener Temperatur wird Wärme durch Leitung übertragen. Dabei wird Wärme durch die mikroskopische Bewegung der Moleküle transportiert. Die Übertragung von Wärme aufgrund makroskopischer Bewegung zwischen Fluid und Festkörper wird als Konvektion bezeichnet. Hierbei wird Wärme mit dem Fluid selbst transportiert. Des Weiteren kann Wärme durch Strahlung übertragen werden. Dazu ist kein Kontakt zwischen den beteiligten Elementen notwendig, nicht einmal eine umgebende Atmosphäre, da die Energie durch elektromagnetische Wellen übertragen wird. Häufig sind alle drei Arten des Wärmeübergangs beteiligt, sodass sich

der gesamte übertragene Wärmestrom $\dot{Q}_{gesamt}$ aus den Anteilen

$$\dot{Q}_{gesamt} = \dot{Q}_{Konvektion} + \dot{Q}_{Strahlung} + \dot{Q}_{Leitung} \tag{2.1}$$

zusammensetzt. Im Folgenden werden die einzelnen Arten der Wärmeübertragung erläutert. Bei der Konvektion wird nur auf die erzwungene Konvektion eingegangen, da diese den Wärmeübergang im vorliegenden Fall dominiert. Für detailliertere Darstellungen sowie anschauliche Beispiele sei auf Lienhard und Lienhard (2018) und Baehr und Stephan (2019) verwiesen.

2.1.1 Wärmeleitung

Die Grundlagen der Wärmeleitung werden zunächst am Beispiel der Wärmeübertragung innerhalb eines Festkörpers dargestellt. Hier treten keine weiteren Mechanismen des Wärmeübergangs auf.

Der übertragene Wärmestrom, ausgedrückt in Form einer Wärmestromdichte $\dot{q}$, ist abhängig vom Temperaturgradienten und kann durch das Fourier'sche Gesetz

$$\dot{q}_{Leitung} = -\lambda \nabla T \tag{2.2}$$

beschrieben werden. Der Proportionalitätsfaktor λ ist darin die Wärmeleitfähigkeit. Sie ist ein Maß für die Übertragungsgeschwindigkeit und ein Materialparameter. In homogenen, isotropen Materialien ist die Wärmeleitfähigkeit lediglich von der Temperatur T abhängig, sodass $\lambda = f(T)$. Nur bei kleinen Temperaturunterschieden kann auch diese Abhängigkeit vernachlässigt werden.

Um das Temperaturfeld $T = T(x, t)$ eines Körpers in Abhängigkeit der Position x zum Zeitpunkt t zu berechnen, wird zunächst eine Energiebilanz herangezogen. Diese folgt aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik und besagt, dass sich die Gesamtenergie eines geschlossenen Systems nur durch Transport über die Systemgrenzen ändern kann. Die Energieerhaltungsgleichung für ein geschlossenes System lautet

$$\frac{dU}{dt} = \dot{Q}(t) + P(t). \tag{2.3}$$

Darin ist $\frac{dU}{dt}$ die zeitliche Änderungsrate der inneren Energie, $\dot{Q}$ ist der Wärmeeintrag über die Systemgrenzen und P die Leistung, welche über die Systemgrenzen übertragen wird.

Die Änderung der inneren Energie in einem Volumen V kann in Abhängigkeit der Temperaturänderung als

$$\frac{dU}{dt} = \int_V \left(\rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right) dV \tag{2.4}$$

ausgedrückt werden. Hierin wird die Dichte mit ρ und die spezifische Wärmekapazität mit c bezeichnet. Diese Formulierung gilt für inkompressible Medien. Bei kompressiblen Medien muss zusätzlich zur veränderlichen Dichte auch zwischen spezifischer Wärmekapazität bei konstantem Volumen c_v und konstantem Druck c_p unterschieden werden.
Die gesamte dem Körper zugeführte Wärme

$$\dot{Q} = -\int_A (-\lambda \nabla T) \cdot (\vec{n} dA) + \int_V \dot{q} dV \tag{2.5}$$

setzt sich zusammen aus der dem Körper über die Oberfläche A zu- oder abgeführten Wärme (erster Term) und der im Inneren des Körpers generierten Wärme (zweiter Term). Letztere entsteht beispielsweise durch chemische oder nukleare Reaktionen. Mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes kann das Oberflächenintegral ebenfalls in ein Volumenintegral überführt werden. (2.4) und (2.5) können nun in (2.3) eingesetzt werden. Unter der Annahme, dass dem System keine Leistung zu- oder abgeführt wird ($P = 0$), erhält man

$$\int_V \left(\nabla \cdot \lambda \nabla T - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \dot{q} \right) dV = 0. \tag{2.6}$$

In allgemeiner Form ergibt sich so die dreidimensionale Wärmeleitungsgleichung zu

$$\nabla \cdot \lambda \nabla T + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}. \tag{2.7}$$

Diese gilt für reine Wärmeleitung. Im Medium darf also keine Konvektion stattfinden.
Mit Hilfe von (2.7) kann bei bekannten Wärmeströmen und Materialparametern die Temperaturverteilung $T(x, t)$ bestimmt werden.

2.1.2 Strahlung

Eine weitere Form der Wärmeübertragung ist die Strahlung. Dabei wird die innere Energie eines Körpers umgewandelt und in Form von Strahlung abtransportiert. Andersherum wird auf einen Körper treffende und absorbierte Strahlung wieder in innere Energie umgewandelt. Der Energietransport durch Strahlung kann auf zwei Arten beschrieben werden. Zum einen besitzt Strahlung einen Teilchencharakter, wie er in der Quantentheorie beschrieben wird. Zum anderen kann Strahlung auch als elektromagnetische Wellen

beschrieben werden. In der vorliegenden Arbeit wird lediglich auf Zweiteres eingegangen. Die von einem Körper ausgesandte Strahlung kann in einem breiten Wellenlängenbereich liegen. Eine Übersicht ist in Abb. 2.1 dargestellt. Die für Wärmeübertragung relevante

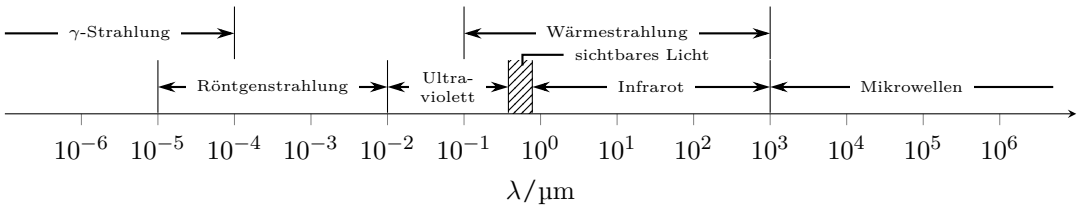


Abb. 2.1: Spektrum elektromagnetischer Wellen und Einteilung verschiedener Strahlungsarten

thermische Strahlung deckt dabei nur einen Teilbereich des Spektrums ab, welcher sich über Wellenlängen von etwa 0.1 µm bis 1000 µm erstreckt.

Im Gegensatz zu Wärmeleitung und Konvektion, die in den folgenden Abschnitten noch beschrieben werden, ist der durch Strahlung abgegebene Wärmestrom nicht von Temperaturunterschieden, sondern lediglich von der Temperatur des Körpers selbst abhängig. Er wird durch die Stefan-Boltzmann Gleichung bestimmt, welche im einfachsten Fall

$$\dot{q}_{Strahlung} = \sigma T^4 \tag{2.8}$$

lautet. Darin wird die gleichnamige Konstante

$$\sigma = (5.670400 \pm 0.00004) 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2K^4} \tag{2.9}$$

verwendet.

(2.8) gilt jedoch in dieser Form lediglich für sogenannte schwarze Körper und beschreibt den temperaturabhängigen maximal erreichbaren Wert der Wärmestromdichte, welche in Form von Strahlung abgegeben werden kann. Abhängig von Eigenschaften des Materials und der Oberflächenbeschaffenheit liegt die abgestrahlte Wärme eines Körpers jedoch häufig unter diesem Maximalwert. Dieser Sachverhalt wird durch Einführung des Emissionsgrades $\epsilon(T) \leq 1$ berücksichtigt. (2.8) erweitert sich damit zu

$$\dot{q} = \epsilon(T)\sigma T^4. \tag{2.10}$$

Der Emissionsgrad ϵ ist von weiteren Einflüssen abhängig, wie beispielsweise den Wellenlängen der Strahlung oder der relativen Positionierung von Körpern zueinander. Diese

werden an dieser Stelle jedoch vernachlässigt. Auch die Absorption der auf einen Körper treffenden Strahlung ist nur bei einem schwarzen Körper „perfekt“. Normalerweise wird nur ein Teil der auftreffenden Strahlung absorbiert. Der Rest wird entweder reflektiert oder transmittiert. Der Zusammenhang von Absorptionsgrad a, Reflektionsgrad r und Transmissionsgrad τ lautet

$$a + r + \tau = 1. \tag{2.11}$$

Im Gegensatz zum Emissionsgrad ist der Absorptionsgrad a nicht nur vom absorbierenden Körper abhängig. Er wird noch von weiteren Faktoren der auftreffenden Strahlung beeinflusst.Der Transmissionsgrad ist für Festkörper meist 0, da diese für Strahlung in der Regel undurchlässig sind.

Da jeder Körper eine thermodynamisch positive Temperatur besitzt, strahlt auch jeder Körper. Es ist also folgerichtig, von einem Strahlungsaustausch zu sprechen. Relevant ist jedoch der Netto-Wärmestrom von dem Körper mit höherer Temperatur zu dem mit niedrigerer.

Diesen Vorgang genau zu berechnen ist in der Regel kompliziert, da auch die Umgebung, z.B. weitere benachbarte Körper, beachtet werden müssen, da diese ebenfalls am Strahlungsaustausch beteiligt sind. Unter bestimmten Umständen muss auch das umgebende Medium berücksichtigt werden. Im Gegensatz zu Festkörpern absorbieren und emittieren Gase Strahlung nur in kleinen Wellenlängenbereichen, sodass Emissions- und Absorptionsgrade eine starke Abhängigkeit von der Wellenlänge aufweisen. Die Hauptkomponenten von Luft, O_2 und N_2, absorbieren Wärmestrahlung nicht. Dreiatomige Gase, wie sie beispielsweise bei Verbrennungsprozessen auftreten, zeigen jedoch ein anderes Verhalten. Die Gase CO_2 und H_2O strahlen und absorbieren im thermisch relevanten Wellenlängenbereich. Bei der Berechnung von Wärmeübergangsproblemen in entsprechenden Umgebungen müssen daher auch die Gase mit in die Rechnung einbezogen werden. Da dies äußerst kompliziert werden kann, werden häufig Vereinfachungen und Ersatzmodelle verwendet. Für eine Einführung sei auf Vortmeyer und Kabelac (2013) verwiesen.

2.1.3 Konvektiver Wärmeübergang

Als Konvektion wird der Wärmetransport bezeichnet, der durch makroskopische Bewegung eines Fluids verursacht wird. Unterschieden wird dabei zwischen der natürlichen und der erzwungenen Konvektion. Bei der natürlichen Konvektion sind die Bewegungen

des Fluids aufgrund von Dichteunterschieden in einem Gravitationsfeld getrieben. Diese Form des konvektiven Wärmeübergangs wird im Folgenden nicht weiter betrachtet, da diese in der vorliegenden Arbeit vernachlässigbar ist. Erzwungene Konvektion bezeichnet Wärmeübergangseffekte aufgrund von erzwungenen Strömungsprozessen.

Für den konvektiven Wärmeübergang ist der Unterschied zwischen Wandtemperatur T_W und Fluidtemperatur T_F relevant. Um den Zusammenhang zwischen übertragener Wärmestromdichte an der Wand $\dot{q}_W$ und dieser Temperaturdifferenz zu beschreiben, wird der Wärmeübergangskoeffizient α eingeführt. Er ist definiert als

$$\alpha \equiv \frac{\dot{q}_W}{T_W - T_F}. \tag{2.12}$$

Der Wärmeübergangskoeffizient ist abhängig vom vorliegenden Strömungsfeld und dient somit der Charakterisierung des Wärmeübergangs.

Die Referenztemperatur T_F in Außenströmungen liegt in einem Bereich der Strömung vor, welcher unabhängig von Wandeinflüssen ist. T_F wird in diesem Fall als Fernfeld- oder Freistromtemperatur bezeichnet. Bei Innenströmungen, wie sie beispielsweise in Kühlkanälen von Turbinenschaufeln vorliegen, kann diese Definition nicht angewendet werden. Da sich das Temperaturprofil über den gesamten Querschnitt kontinuierlich ändert, kann hier keine Fernfeldtemperatur definiert werden. Für Innenströmungen wird in der Regel eine enthalpiestromgemittelte Temperatur verwendet, welche auch den Energietransport im Kanal charakterisiert.

Diese auch als Bulktemperatur bezeichnete Temperatur ist als

$$T_{bulk} = \frac{\int_A \rho u c_p T dA}{\int_A \rho u c_p dA} \tag{2.13}$$

mit der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck c_p definiert. Unmittelbar an der Wand gilt die Haftbedingung. Da die Strömungsgeschwindigkeit hier gegen null geht, findet an dieser Stelle reine Wärmeleitung statt. Die Wärmestromdichte kann daher durch das Fourier'sche Gesetz (2.2) bestimmt werden. Aus der Bilanz von Wärmeleitung und konvektivem Wärmeübergang

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \alpha(T_W - T_F) \tag{2.14}$$

kann durch Umstellen die Gleichung

$$\frac{\partial\left(\frac{T_W - T}{T_W - T_F}\right)}{\partial\left(y/l_0\right)} = \frac{\alpha l_0}{\lambda} \tag{2.15}$$

mit einer für die Strömung charakteristischen Länge l_0 gefunden werden. Diese kann beispielsweise der hydraulische Durchmesser eines Kanals sein. Dieses Verhältnis aus den Kenngrößen für den konvektiven Wärmeübergang (α) und Wärmeleitung (λ) ist die Definitionsgleichung für die Nusseltzahl

$$\mathrm{Nu} \equiv \frac{\alpha l_0}{\lambda}. \tag{2.16}$$

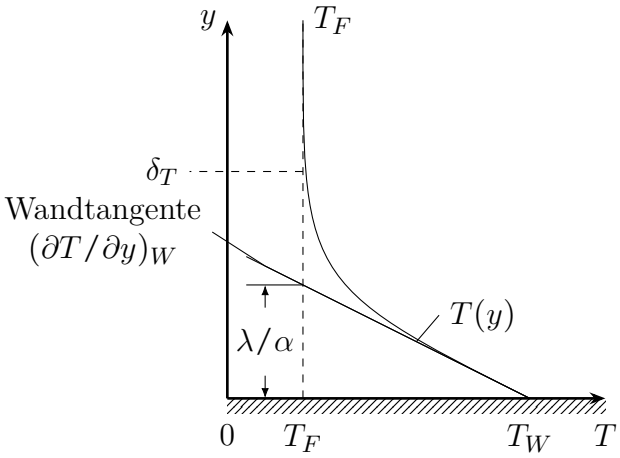


Abb. 2.2: Grafische Darstellung des Wärmeübergangskoeffizienten α in der Temperaturgrenzschicht nach Baehr und Stephan (2019)

In Abb. 2.2 ist der Verlauf der Fluidtemperatur T von der Wand bis zum Fernfeld über der Wandnormalenrichtung y aufgetragen. Durch Einzeichnen der Wandtangente der Temperatur $(\partial T/\partial y)_W$ kann die Größe λ/α grafisch dargestellt werden. Diese ergibt sich aus der aus (2.14) ermittelten Tangentensteigung und dem Abschnitt $T_W - T_F$ der Temperaturachse. Zusätzlich eingezeichnet ist die Dicke der Temperaturgrenzschicht δ_T, auf welche im folgenden Abschnitt genauer eingegangen wird. Hieraus ist ersichtlich, dass die Größe λ/α in der Größenordnung der Temperaturgrenzschicht liegt, jedoch etwas kleiner ist. Die Nusseltzahl ist damit umgekehrt proportional zur Dicke der Temperaturgrenzschicht und ist somit direkt verknüpft mit dem vorliegenden Strömungszustand. Sowohl der Wärmeübergangskoeffizient als auch die Nusseltzahl als dimensionslose Variante dienen der Vergleichbarkeit ähnlicher Strömungen. Beides sind lokale, im instationären Fall auch zeitlich veränderliche Größen, die abhängig von der Strömungssituation sowie den Eigenschaften des Fluids sind.

2.2 Strömungs- und Temperaturgrenzschichten

Bei der Umströmung eines Körpers bildet sich in Wandnähe eine Grenzschicht aus. Während in der restlichen, ungestörten Strömung Reibungskräfte nahezu vernachlässigt werden können, spielen sie in dieser Schicht eine wichtige Rolle. Die relevanten Wärmeübergangsprozesse, aber auch die Entstehung von Strömungswiderständen und Druckverlusten können in dieser Schicht stattfinden. Im Folgenden sollen die grundlegenden Eigenschaften und die in der Grenzschicht stattfindenden Prozesse erläutert werden. Soweit nicht anders bezeichnet, wird von einer laminaren, inkompressiblen Grenzschicht an einer halbunendlichen, dünnen Platte ohne Druckgradienten ausgegangen.

Basis für die Berechnung von Grenzschichten sind die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie. Für die laminare, inkompressible Grenzschichtströmung lauten diese

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.17}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2.18}$$

mit den Geschwindigkeitskomponenten u in Hauptströmungsrichtung x und v in Querströmungsrichtung y sowie der kinematischen Viskosität ν. Diese sind unter der Annahme vereinfacht, dass Gradienten in Strömungsrichtung deutlich kleiner sind als in wandnormaler Richtung. Da bei inkompressibler Strömung der Energietransport von den Gleichungen für Massen- und Impulserhaltung entkoppelt ist, ist die Strömung mit diesen beiden Gleichungen vollständig bestimmt.

Für die Dicke der Grenzschicht kann kein exakter Ausdruck angegeben werden, da die Geschwindigkeit asymptotisch vom Wert an der Wand zu dem der Außenströmung übergeht. Dennoch existieren verschiedene Definitionen für die Grenzschichtdicke, da diese in der praktischen Anwendung relevant ist. Häufig wird die Höhe angegeben, in welcher die Geschwindigkeit $u = 0.99u_\infty$ erreicht.

In Abb. 2.3 ist beispielhaft ein Grenzschichtprofil auf einer ebenen Platte gezeigt. Darin ist die ungestörte Anströmung stromauf sowie die Ausbildung der Grenzschicht entlang der Platte schematisch dargestellt. Die Grenzschicht wächst mit der Lauflänge monoton an. Die Dicke δ der laminaren Strömungsgrenzschicht kann mit Hilfe des Gleichgewichts aus Trägheits- und Reibungskräften zu

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\eta x}{\rho u_\infty}} \tag{2.19}$$

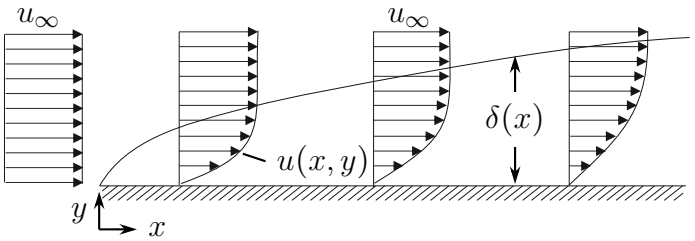


Abb. 2.3: Geschwindigkeitsprofile der Grenzschicht einer längsangeströmten ebenen Platte nach Schlichting und Gersten (1997)

abgeschätzt werden. Darin ist η die dynamische Viskosität. Aus (2.19) ist ersichtlich, dass die Grenzschicht proportional zu $\sqrt{x}$ anwächst. Die exakte Lösung kann aus der Blasius-Lösung abgeleitet werden, welche eine analytische Lösung der Grenzschichtgleichungen für die laminare, inkompressible ebene Platte darstellt.

Eine wesentliche Kenngröße für die Grenzschicht ist die Reynoldszahl. Diese stellt das Verhältnis aus Trägheits- zu Reibungskräften dar und ist definiert als

$$\mathrm{Re} \equiv \frac{\rho u_\infty l_0}{\eta} \tag{2.20}$$

mit einer für die Strömung charakteristischen Länge l_0. Die Reynoldszahl ist eine wichtige Kenngröße für die Vergleichbarkeit von Strömungen. Bei geometrisch ähnlichen Körpern und gleicher Anströmung liegen bei gleicher Reynoldszahl geometrisch ähnliche Stromlinien vor. Die Strömungen werden als mechanisch ähnlich bezeichnet.

Ablösung der Grenzschicht

Bei Strömungen mit einem Druckgradienten in Strömungsrichtung kann die Strömung ablösen. Ein solcher Druckgradient kann bei der Umströmung eines gekrümmten Körpers entstehen, wie beispielsweise eines Tragflügels oder einer Turbinenschaufel. Unter Berücksichtigung des Druckgradienten in Strömungsrichtung lautet die Impulsgleichung (2.18)

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2.21}$$

mit dem statischen Druck p am Grenzschichtrand. Der viskose Term auf der rechten Seite wird auch in Abhängigkeit der Schubspannung formuliert. Es ergibt sich

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}. \tag{2.22}$$

Dies zeigt, dass sowohl der Druckgradient in Strömungsrichtung dp/dx als auch der Gradient der Schubspannung in wandnormaler Richtung $\partial\tau/\partial y$ Einfluss auf die Geschwindigkeitsänderung der Strömung nehmen. Ablösung der Strömung bedeutet, dass der Geschwindigkeitsgradient an der Wand $\partial u/\partial y$ negativ wird und lokal Fluid entgegen der Strömungsrichtung strömt. Dafür sind zwei Effekte notwendig. Zum einen muss das sogenannte Wendepunktkriterium erfüllt sein. Dieses besagt, dass bei einer abgelösten Strömung ein Wendepunkt im Geschwindigkeitsprofil der Grenzschicht vorliegt. Die Krümmung des Geschwindigkeitsprofils $\partial^2 u/\partial y^2$ durchläuft also einen Vorzeichenwechsel innerhalb der Grenzschicht und nimmt an der Wand einen positiven Wert an. Aus der Impulsgleichung an der Wand

$$\frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2.23}$$

folgt, dass eine positive Krümmung nur bei einem positiven Druckgradienten vorliegt. Die Strömung ist also nur bei einem positiven Druckgradienten ablösegefährdet, während sich ein negativer Druckgradient stabilisierend auf die Grenzschicht auswirkt.

Bei einem positiven Druckgradienten steigt der Gegendruck mit der Lauflänge an. Das Fluid in Wandnähe besitzt eine niedrige kinetische Energie und kann ab einem gewissen Punkt die Strömung nicht mehr aufrechterhalten. Die Strömung wird bis auf null am Ablösepunkt abgebremst und strömt bei einem weiteren Anstieg des Druckgradienten zurück.

Ein positiver Druckgradient allein ist jedoch nicht ausreichend für die Ablösung der Strömung. Zusätzlich nimmt die Schubspannung an der Wand τ_W mit der Lauflänge ab und wird im Bereich abgelöster Strömung negativ.

Einfluss der Turbulenz

Abhängig vom Charakter der Grenzschichtströmung wird zwischen laminaren und turbulenten Grenzschichten unterschieden. In realen Anwendungen liegen häufig turbulente Strömungen vor. Im laminaren Fall verlaufen die Stromlinien parallel, wobei sich die Schichten verschiedener Geschwindigkeiten kaum vermischen. Strömungen mit kleinen Reynoldszahlen sind häufig laminar. Bei Überschreiten einer kritischen Reynoldszahl wird die Grenzschicht jedoch instabil und daraufhin turbulent. Da die Reynoldszahl mit der Lauflänge ansteigt, kann der laminar-turbulente Umschlag bei einer kritischen Lauflänge ohne äußere Einflüsse stattfinden. Die kritische Lauflänge ist auf einer ebenen Platte in inkompressibler Strömung an der Stelle x, krit erreicht, bei der die lokale

Reynoldszahl Re_x den Wert

$$\mathrm{Re}_{x,\mathrm{krit}} = \left(\frac{\rho u_\infty x}{\eta}\right)_{\mathrm{krit}} \approx 5 \cdot 10^5 \tag{2.24}$$

erreicht. Hindernisse in der Strömung, wie eine erhöhte Oberflächenrauigkeit oder einzelne erhabene Elemente, wie z.B. bewusst aufgeprägte Stolperdrähte, können den Umschlag erzwingen. Positive Druckgradienten sowie hohe Turbulenzgrade der Außenströmung begünstigen ebenfalls den laminar-turbulenten Umschlag. Der Turbulenzgrad wird als das Verhältnis der gemittelten (absoluten) Schwankungsbewegungen zur mittleren Geschwindigkeit ausgedrückt

$$\mathrm{Tu} = \frac{1}{u_\infty}\sqrt{\frac{1}{3}\left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}\right)}. \tag{2.25}$$

Darin sind u, v und w jeweils die Geschwindigkeitskomponenten in Hauptströmungsrichtung sowie lateral und normal zur Oberfläche. Der horizontale Balken $\overline{u}$ gibt an, dass es sich um eine Reynolds gemittelte Größe handelt, der hierauf bezogene Schwankungsterm wird jeweils mit einem Strich u' bezeichnet.

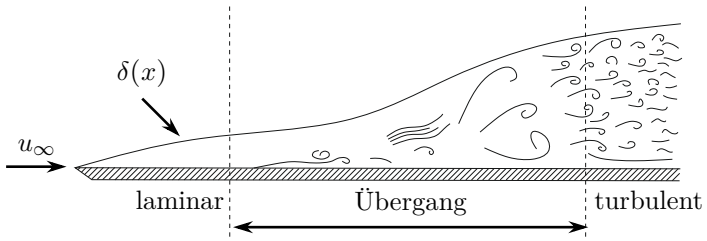


Abb. 2.4: Laminar-turbulenter Umschlag der Grenzschicht nach Schlichting und Gersten (1997)

Der Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung ist beispielhaft in Abb. 2.4 anhand einer ebenen Platte dargestellt. Der Umschlag findet nicht plötzlich statt, sondern es bilden sich zunächst in einem Übergangsbereich erste Störungen aus, die sich bis zur vollausgebildeten turbulenten Strömung weiterentwickeln. Dieser Vorgang ist Gegenstand zahlreicher Untersuchungen, soll aber an dieser Stelle nicht weiter behandelt werden. Für den interessierten Leser sei auf Schlichting und Gersten (1997) und White (1991) verwiesen.

Die turbulente Grenzschicht zeichnet sich durch starke Schwankungsbewegungen aus, die aufgrund ihres zufälligen Charakters nur statistisch beschrieben werden können.

Wie in Abb. 2.4 dargestellt, zeichnet sich die turbulente Grenzschicht durch eine größere Grenzschichtdicke aus. Charakteristisch ist außerdem die Mischungsbewegung der Grenzschicht mit der Außenströmung, sowie der Austausch zwischen den verschiedenen Schichten der Grenzschicht. Die Schubspannung ist im Vergleich zur laminaren Strömung aufgrund der Schwankungsbewegungen erhöht. Die Strömung löst erst bei höheren Druckgradienten und Reynoldszahlen ab, weshalb eine turbulente Grenzschicht trotz der erhöhten Reibung durchaus wünschenswert sein kann.

Auch der Wärmeübergang innerhalb der turbulenten Grenzschicht ist gegenüber der laminaren erhöht. Die turbulente Vermischung in den wandferneren Schichten der Grenzschicht sorgt für einen erhöhten Fluidaustausch zwischen Außenströmung und Grenzschicht, so dass der thermische Eintrag in die Grenzschicht und damit auch zwischen Fluid und Wand erhöht ist. Dies lässt sich aus den Erhaltungsgleichungen für stationäre, kompressible, turbulente Strömungen ableiten. In der Energiegleichung für diesen Fall sind Temperatur- und Geschwindigkeitsterme gekoppelt, sodass diese Größen nicht mehr getrennt voneinander betrachtet werden können. Um die Berechnung zu vereinfachen, wird eine Modellierung dieser Terme verwendet, die sich an das Fouriersche Gesetz (2.2) anlehnt. Dieses wird um einen turbulenten Anteil der Wärmeleitfähigkeit λ_t zu

$$\dot{q} = -\left(\lambda + \lambda_t\right) \frac{\partial \overline{T}}{\partial y} \tag{2.26}$$

erweitert. Die turbulente Wärmeleitfähigkeit ist keine physikalische Größe, sondern stellt eine Modellierung des turbulenten Einflusses in Anlehnung an tatsächliche physikalische Gegebenheiten dar.

Einfluss der Kompressibilität

Von einer kompressiblen Strömung spricht man, wenn die Dichte und Viskosität des strömenden Fluids nicht mehr unabhängig von der vorliegenden Temperatur sind. Die Erhaltungsgleichungen für die laminare, stationäre, zweidimensionale Grenzschicht unter Berücksichtigung von Kompressibilität lauten

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \tag{2.27}$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \tag{2.28}$$

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \dot{Q}_y}{\partial y} - u \frac{dp}{dx} - \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.29}$$

mit der spezifischen Enthalpie h und dem Wärmestrom $\dot{Q}_y$ in wandnormaler Richtung. In der Regel treten Kompressibilitätseffekte in Abhängigkeit von der Machzahl auf. In der vorliegenden Arbeit sind jedoch Temperaturgradienten hauptverantwortlich für nicht vernachlässigbare Dichteunterschiede in der Strömung. Daher müssen hier die entsprechenden Terme berücksichtigt werden.

Temperaturgrenzschichten

Analog zur Strömungsgrenzschicht bildet sich bei einer Temperaturdifferenz zwischen Wandtemperatur T_W und Fernfeldtemperatur T_F eine Temperaturgrenzschicht aus. Diese bezeichnet den Bereich, in welchem die Temperatur innerhalb der Strömung von der Wandtemperatur kontinuierlich bis zur Fernfeldtemperatur ansteigt bzw. sinkt.

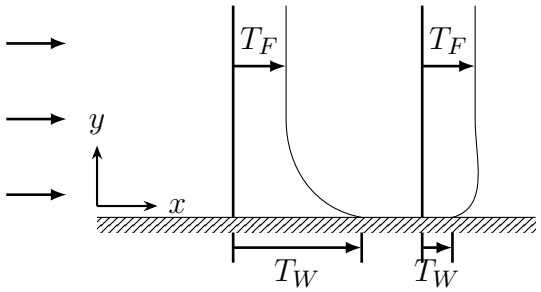


Abb. 2.5: Temperaturprofile für unterschiedliche T_W/T_F

Beispielhafte Temperaturprofile sind in Abb. 2.5 dargestellt. Abhängig davon, ob der Körper wärmer oder kälter ist als das umströmende Fluid, bildet sich eines der in Abb. 2.5 dargestellten Temperaturprofile aus. Auch hier findet der Temperaturanstieg bzw. -abfall asymptotisch statt, sodass die Dicke der Temperaturgrenzschicht ebenfalls nur näherungsweise angegeben werden kann. Die Dicke wird so definiert, dass die Grenzschichttemperatur nur noch um 1 % von der Fernfeldtemperatur abweicht.

Die Temperaturgrenzschicht wächst wie die Strömungsgrenzschicht mit der Lauflänge an. Analog zur Strömungsgrenzschicht wird auch hier zunächst von einer laminaren, inkompressiblen Grenzschicht an einer halbunendlichen, dünnen Platte ohne Druckgradient ausgegangen. Für diesen vereinfachten Fall lautet der Zusammenhang der Grenzschichtdicke δ_T zur Lauflänge x

$$\delta_T(x) = \sqrt{\frac{8ax}{c_\infty}}. \tag{2.30}$$

Für die Temperaturgrenzschicht ist die charakterisierende Kenngröße die Prandtlzahl.

Diese ist definiert als

$$\mathrm{Pr} \equiv \frac{\eta c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a}. \tag{2.31}$$

Die Prandtlzahl ist eine reine Stoffgröße. Sie stellt das Verhältnis zwischen kinematischer Viskosität ν und Temperaturleitfähigkeit a dar und beschreibt somit das Verhältnis von Impuls- zu Wärmetransport im Fluid. Die Prandtlzahl stellt eine Verknüpfung zwischen Strömungs- und Temperaturgrenzschicht dar.

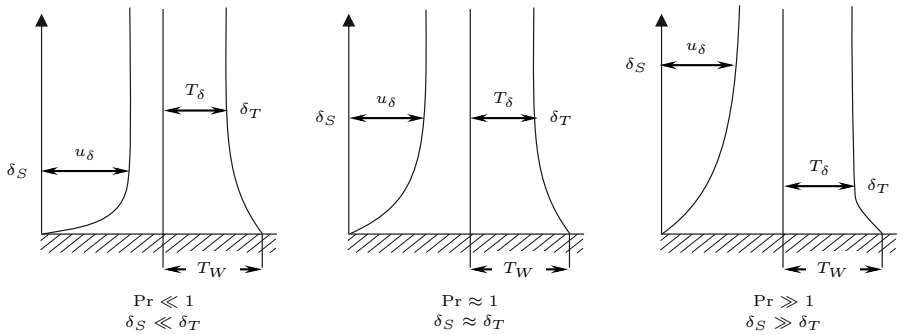


Abb. 2.6: Einfluss der Prandtlzahl auf die Dicke der Temperaturgrenzschicht nach Schröder (2006)

In Abb. 2.6 ist der Zusammenhang zwischen der Prandtlzahl und dem Verhältnis von Strömungs- und Temperaturgrenzschichtdicke abgebildet. Dabei ist die Strömungsgrenzschicht jeweils links abgebildet, die Temperaturgrenzschicht bei gekühlter Wand ($T_F < T_W$) jeweils rechts. Bei hoher Viskosität entstehen dickere Strömungsgrenzschichten, es wird $\mathrm{Pr} > 1$. Bei hoher Temperaturleitfähigkeit dagegen entstehen größere Temperaturgrenzschichten. Hier ist $\mathrm{Pr} < 1$. Das Dickenverhältnis der Strömungs- und Temperaturgrenzschichten kann für laminare Grenzschichten unter den zuvor genannten Bedingungen mit

$$\frac{\delta_T}{\delta_S} = \mathrm{Pr}^{-1/3} \tag{2.32}$$

angenähert werden. Die Gleichung gilt für Prandtlzahlen im Bereich $0.6 \leq \mathrm{Pr} \leq 50$.

Für $\mathrm{Pr} = 1$ können unter der Annahme einer konstanten Wandtemperatur exakte Lösungen für den Zusammenhang von Wärme- zu Impulstransport gefunden werden. Typische Prandtlzahlen für Luft liegen bei etwa 0.7, sodass die Annahme $\mathcal{O}(\mathrm{Pr}) \sim 1$ und damit von Strömungs- und Temperaturgrenzschichten gleicher Größenordnung häufig gerechtfertigt ist.

Für Plattenströmungen gilt der als Reynoldsanalogie bezeichnete Zusammenhang

$$\mathrm{Nu} = \frac{c_f}{2}\mathrm{Re} \tag{2.33}$$

mit dem Reibungsbeiwert c_f. Dieser gilt unter der Voraussetzung einer druckgradientfreien Strömung. Mit Hilfe der Blasius-Lösung kann für die lokale Nusseltzahl Nu_x in laminarer, inkompressibler Strömung der Zusammenhang

$$\mathrm{Nu}_x = 0.332\mathrm{Re}_x^{1/2} \tag{2.34}$$

oder ausformuliert für den Wärmeübergangskoeffizienten

$$\alpha = 0.332\lambda\sqrt{\frac{\rho u}{\eta x}} \tag{2.35}$$

gefunden werden. Der Wärmeübergangskoeffizient α nimmt dabei mit der Lauflänge proportional zu $1/\sqrt{x}$ ab.

Für den Bereich $0.6 < \mathrm{Pr} < 10$ erweitert sich dieser Zusammenhang zu

$$\mathrm{Nu}_x = 0.332\mathrm{Re}_x^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}. \tag{2.36}$$

Der turbulente Einfluss auf den Wärmeübergang wird häufig in Form der turbulenten Prandtlzahl Pr_t dargestellt. Diese leitet sich aus der turbulenten Wärmeleitfähigkeit (2.26) zu

$$\mathrm{Pr}_t = \frac{\eta_t c_p}{\lambda_t} \tag{2.37}$$

ab. Hierin ist η_t die turbulente Viskosität oder auch Scheinviskosität. Diese abgeleiteten, turbulenten Größen λ_t, Pr_t und η_t sind dabei abhängig vom lokalen Strömungsfeld. Dies steht im Gegensatz zu den Stoffgrößen λ, Pr und η an die diese angelehnt sind.

Die Strömungs- und Temperaturgrenzschichten sind miteinander gekoppelt und können nur unter bestimmten vereinfachenden Annahmen unabhängig voneinander betrachtet werden. Wenn Stoffwerte wie Dichte und Viskosität nicht als temperaturunabhängig betrachtet werden können, beispielsweise durch Kompressibilitätseffekte oder hohe Temperaturgradienten, sind die Erhaltungsgleichungen für Masse (2.27) und Impuls (2.28) nicht mehr unabhängig von der Energiegleichung (2.29). Die Strömungssgrenzschicht hat also hohe Bedeutung für die Berechnung des Wärmeübergangs. Die genaue Kenntnis der Strömung ist eine Grundvoraussetzung zur Berechnung des Wärmeübergangs. Sofern komplexere Strömungsphänomene oder große Rechengebiete berücksichtigt werden müssen, sind jedoch Vereinfachungen in Form von Modellierungen notwendig.

2.3 Wärmeübergang an Turbinenschaufeln

Der Wärmeübergang an einer gekühlten Turbinenschaufel ist besonders komplex. Bei der Betrachtung müssen aerodynamische Effekte berücksichtigt werden, die sich aufgrund der Geometrie ausbilden. Eine effektive Kühlung ist notwendig, da trotz hoher Temperaturen in der Außenströmung eine ausreichend geringe Materialtemperatur erreicht werden soll, um die Lebensdauer der Schaufeln zu maximieren. Die in dieser Arbeit betrachteten Schaufeln verfügen über eine rein interne Kühlung. Diese ist so gestaltet, dass ein hoher Wärmeübergang vom Schaufelmaterial in das Kühlfluid bei möglichst geringem Kühlluftmassenstrom erreicht wird. Im Folgenden wird zunächst auf die Innenströmung eingegangen, wobei typische Möglichkeiten zur Erhöhung des Wärmeübergangs gezeigt werden. Anschließend werden einige Strömungsphänomene der Außenströmung betrachtet, welche ebenfalls den Wärmeübergang und damit die Temperaturverteilung auf der Schaufel beeinflussen.

2.3.1 Einfluss der Turbulatoren auf den inneren Wärmeübergang

Um die Materialtemperaturen einer Turbinenschaufel zu verringern und so die Lebensdauer zu erhöhen, ist innerhalb der Kühlkanäle einer Turbinenschaufel ein hoher Wärmeübergang von der heißen Schaufel in die Kühlluft erwünscht. Bei konvektiver Kühlung werden dazu gezielt Störelemente in den Kanälen angebracht, welche den Wärmestrom durch gezielte Erhöhung des Turbulenzniveaus steigern. Diese Turbulatoren werden üblicherweise in Form von Rippen oder *Pin Fin*-Arrays gestaltet, welche eine Erhöhung des Wärmeübergangs begünstigen. Zum einen wird hierbei eine Vergrößerung der Oberfläche erzeugt, welche am Wärmeübergang beteiligt ist. Zum anderen wirken die Turbulatoren als Störungen in der Strömung, welche die laminare Grenzschicht aufbrechen. Dadurch wird einerseits ein weiteres Anwachsen der Grenzschicht und somit die Abnahme des Wärmeübergangskoeffizienten verhindert. Die wieder angelegte Grenzschicht verfügt über einen höheren Wärmeübergangskoeffizienten als es bei ungestörter Strömung der Fall wäre. Darüber hinaus können je nach Anordnung komplexe Wirbelsysteme entstehen, die eine größere Durchmischung des Fluids verursachen. Dadurch wird auch der Wärmeübergang durch einen erhöhten Fluid- und damit Wärmetransport vergrößert.

Insbesondere in den vorderen Kanälen werden häufig Rippen verwendet, welche in verschiedenen Anordnungen an gegenüberliegenden Wänden angebracht werden. Abb. 2.7 zeigt eine schematische Darstellung der sich einstellenden Strömung an Rippen, die mit

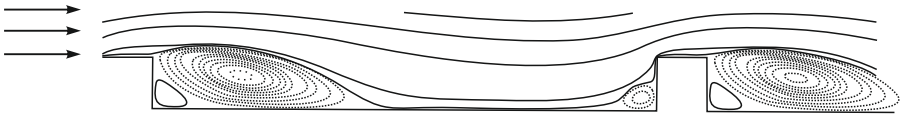


Abb. 2.7: Sekundärströmungen an 90° zur Hauptströmungsrichtung ausgerichteten Rippen mit Rippenabstand P/e ≈ 10 nach Leonardi et al. (2003)

90° zur Hauptströmungsrichtung ausgerichtet sind. Sowohl stromauf als auch stromab der Rippen bilden sich Ablösegebiete, da die Strömung der Geometrie nicht folgen kann. Innerhalb dieser Gebiete ist der Wärmeübergang lokal vermindert, da hier kaum eine Vermischung mit höheren Fluidschichten stattfindet. Bei einem ausreichend großen Abstand zwischen den Rippen kann die Strömung in den Zwischenräumen wieder anlegen, sodass mit der neu entstehenden dünnen Grenzschicht ein erhöhter Wärmeübergang erzeugt wird.

Sind die Rippen nicht mit 90° zur Hauptströmungsrichtung angeordnet, sondern in einem schrägen Winkel, bilden sich zusätzliche Sekundärströmungen im Kanal aus. Einige

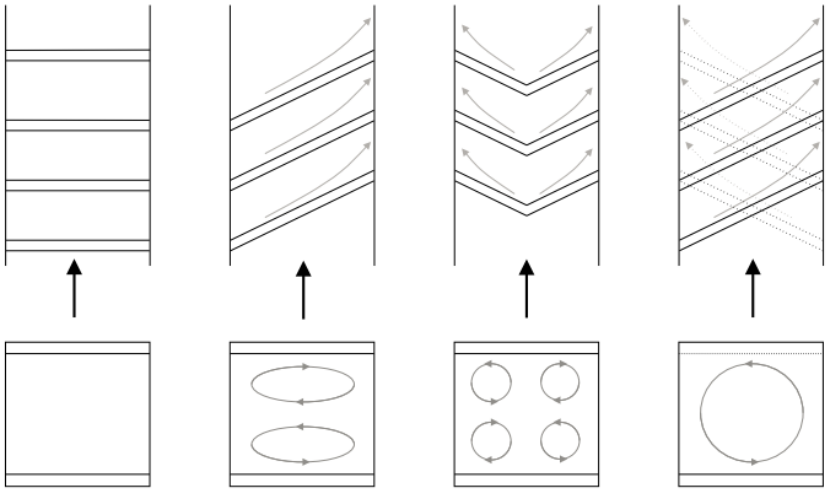


Abb. 2.8: Sekundärströmungen in berippten Rechteckkanälen in Abhängigkeit der Rippenanordnung (Wieler 2019). Von links nach rechts: 90° zur Hauptströmung ausgerichtete Rippen; 60° angestellte, parallele Rippen; V-förmige Rippen; 60° angestellte, gekreuzte Rippen.

Beispiele für verschiedene Anordnungen und die sich jeweils ausbildenden Sekundärströ-

mungen sind schematisch in Abb. 2.8 dargestellt. Abhängig von der Anordnung der Rippen ergeben sich unterschiedliche Wirbelanordnungen der entstehenden Sekundärströmungen. Bei quer zur Hauptströmungsrichtung angeordneten Rippen bildet sich keine zusätzliche Sekundärströmung aus, sondern lediglich die in Abb. 2.7 dargestellten Rezirkulationsgebiete. Sobald die Rippen angestellt werden, entstehen Wirbelsysteme entlang der Hauptströmungsachse, welche für eine zusätzliche Durchmischung des Fluids sorgen sowie die Rezirkulationsgebiete verschieben oder verzerren. Damit kann der Wärmeübergang von der Wand ins Fluid durch die zusätzliche Durchmischung erhöht werden. Bei gekreuzten Rippen, wie sie bei der in dieser Arbeit verwendeten Schaufelkonfiguration vorliegen, bildet sich eine einzelne um die Hauptströmungsachse rotierende Sekundärströmung im Kanal. Der Fluidaustausch zwischen der Kanalmitte und Fluidschichten in Wandnähe ist hierbei jedoch geringer als bei anderen Rippenanordnungen, die die Ausbildung mehrerer Wirbelsysteme begünstigen wie parallele, schräg angestellte oder V-förmige Rippen. Abb. 2.9 zeigt lokale Messungen des Wärmeübergangs in einem ein-

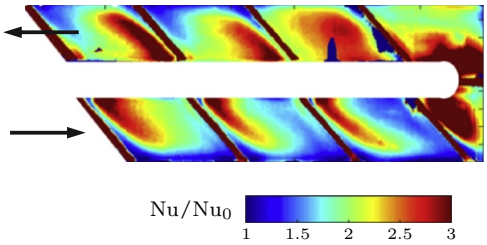


Abb. 2.9: Experimentell bestimmte lokale Verteilung der Nusseltzahl $\mathrm{Nu}/\mathrm{Nu}_0$ in einem einseitig berippten Zweipass-Kanal mit 45° angestellten Rippen (Singh et al. 2016). Nusseltzahlen wurden mittels der transienten Flüssigkristallmethode bestimmt, $\mathrm{Re} = 35500$

seitig berippten Zweipass-Kanal. Die Rippen sind um 60° zur Hauptströmungsrichtung angestellt. Diese detaillierten Messungen des Wärmeübergangs wurden von Singh et al. (2016) mittels der transienten Flüssigkristallmethode bestimmt. Gezeigt ist die Verteilung der Nusseltzahl $\mathrm{Nu}/\mathrm{Nu}_0$. Die Nusseltzahlen sind dabei auf Nu_0 bezogen, welche die Nusseltzahl für eine ausgebildete Strömung in einem glatten, runden Kanal nach der Dittus-Boelter-Korrelation

$$\mathrm{Nu}_0 = 0.023\mathrm{Re}^{0.8}\mathrm{Pr}^{0.4} \tag{2.38}$$

darstellt. Unmittelbar stromab der Rippen liegt zunächst eine niedrige Nusseltzahl vor,

die kurz darauf stark ansteigt. Dies ist auf die Ablösung stromab der Rippe (niedrige Nusseltzahl) und das darauf folgende Rezirkulationsgebiet sowie das anschließende Wiederanlegen der Grenzschicht (erhöhter Wärmeübergang) zurückzuführen. Unmittelbar stromauf der nächsten Rippe ist aufgrund des zweiten Ablösegebiets wieder ein Bereich niedriger Nusseltzahl zu sehen. Diese Effekte werden aufgrund der angestellten Rippen von der in Abb. 2.8 dargestellten Sekundärströmung überlagert, welche eine zusätzliche erhöhte Durchmischung der wandnahen Strömung mit der Außenströmung verursacht. Aufgrund der Überlagerung der Sekundärströmung ist eine Verschiebung entlang der Rippen zu beobachten. Auch die 180°-Umlenkung beeinflusst die Verteilung des Wärmeübergangs.

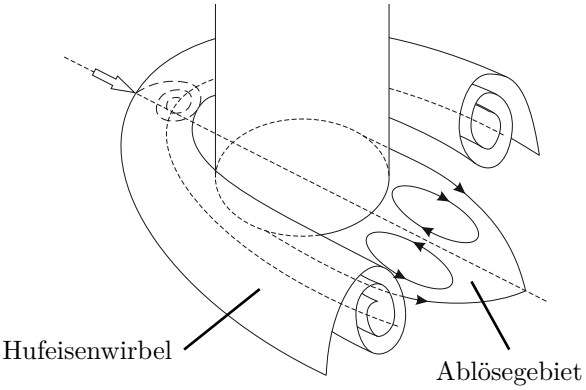


Abb. 2.10: Umströmung von Zylindern (Findeisen 2019)

Besonders in schmalen Kanälen, wie sie im Bereich der Hinterkante auftreten, werden häufig *Pin Fins* als Turbulatoren eingesetzt. Die meist runden Elemente werden in der Regel in mehreren Reihen hintereinander angeordnet. Ebenso wie Rippen stören sie die laminare Grenzschicht und stellen außerdem eine Erhöhung der am Wärmeübergang beteiligten Flächen dar. Vereinfacht kann das Verhalten der Strömung um einen *Pin Fin* als Zylinderumströmung betrachtet werden. In Abb. 2.10 ist dies schematisch dargestellt. Unmittelbar stromauf des Zylinders kann die Strömung der Kontur durch die abrupte Verzögerung nicht folgen. Die Grenzschicht rollt sich auf und bildet einen Hufeisenwirbel, der zu beiden Seiten des Zylinders abströmt. Direkt stromab des Zylinders findet sich abhängig von der vorherrschenden Reynoldszahl ein Ablösegebiet, da die Strömung auch hier der Kontur nicht folgen kann.

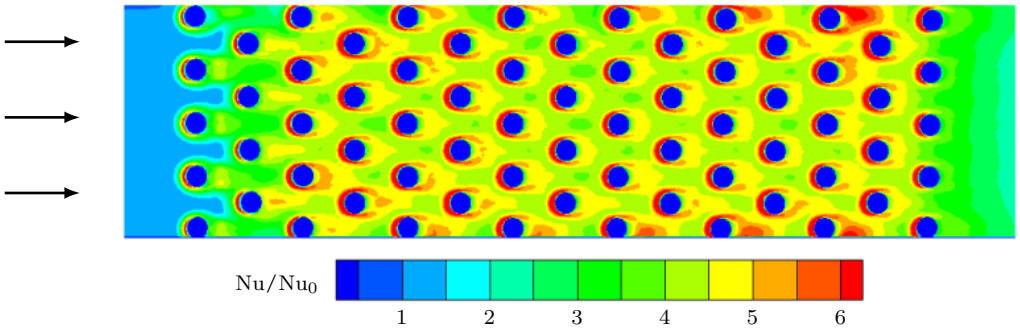


Abb. 2.11: Experimentell ermittelte Nusseltzahlverteilung an einem *Pin Fin* Array mit versetzten Reihen (Axtmann et al. 2015)

Da die *Pin Fins* eine mechanische Verbindung zwischen Druck- und Saugseite der Schaufel herstellen, entsteht zusätzlich eine thermische Verbindung, sodass ein Temperaturausgleich stattfindet. Der Einfluss eines *Pin Fin* Arrays auf die lokale Verteilung des Wärmeübergangs ist in Abb. 2.11 zu sehen. Diese Messungen der lokalen Nusseltzahl-Erhöhung $\mathrm{Nu}/\mathrm{Nu}_0$ wurden von Axtmann et al. (2015) mittels thermochromen Flüssigkristallen ermittelt. In den Bereichen in unmittelbarer Nähe der *Pin Fins* ist der Wärmeübergang erhöht. Durch den Hufeisenwirbel wird lokal die Vermischung des Fluids von wandnahen Schichten zur Kanalmitte vergrößert, was den Wärmetransport begünstigt.

2.3.2 Äußerer Wärmeübergang an Turbinenschaufeln

Der äußere Wärmeübergang einer konvektiv gekühlten Turbinenschaufel wird vor allem durch das umgebende Strömungsfeld beeinflusst. Im folgenden Abschnitt werden die sich ausbildenden Sekundärströmungen im Schaufelgitter beschrieben. Da in der vorliegenden Arbeit eine Schaufel ohne Verwindung oder Änderung des Profils über der Schaufelhöhe verwendet wird, existiert keine Unterscheidung zwischen naben- oder gehäuseseitigen Wirbeln. Ebenso existiert kein Spalt zwischen Schaufel und Seitenwand. Es werden im Folgenden nur die für den Wärmeübergang an der verwendeten Schaufelgeometrie relevanten Strömungsphänomene beschrieben.

Abb. 2.12 zeigt schematisch eine Schaufelpassage und die dort entstehenden Wirbelsysteme. Der sich in Strömungsrichtung zuerst ausbildende Effekt ist der Hufeisenwirbel. Dieser entsteht aus der verzögerten Seitenwandgrenzschicht, wenn diese auf die Vorderkante der Schaufel trifft. Durch die Verzögerung der Strömung an dieser Stelle entsteht in Kombination mit dem Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht eine zur Seitenwand

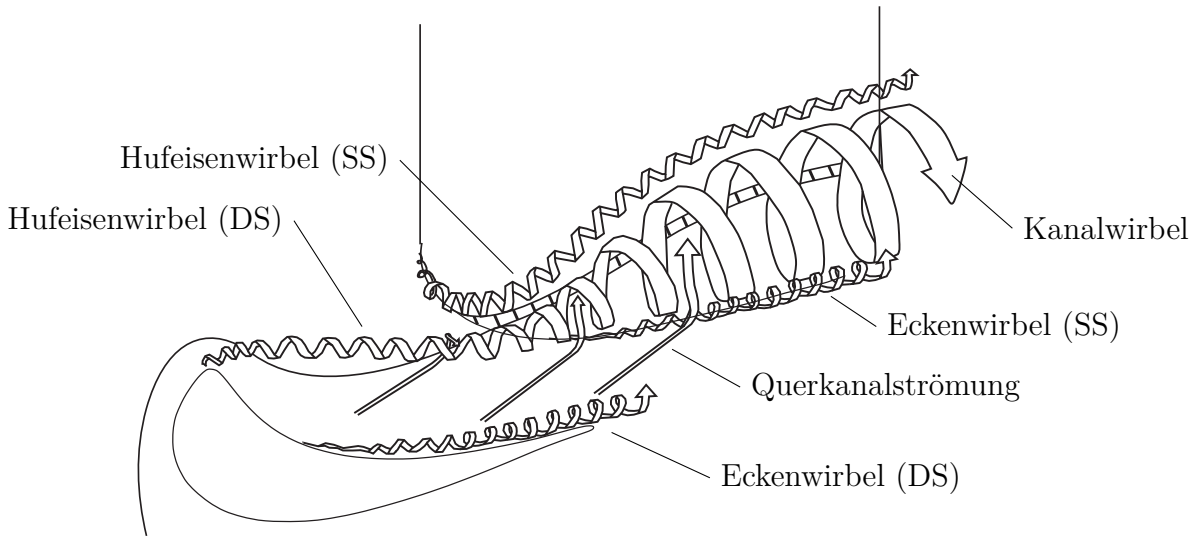


Abb. 2.12: Sekundärströmungen in einer Schaufelpassage (Wörz 2018)

gerichtete Strömung, welche entlang dieser zurückströmt und sich zum Hufeisenwirbel aufrollt. Der so entstehende Wirbel fließt zu beiden Seiten der Schaufel in die Passage ab. Aufgrund der Querkanalströmung, die durch den Druckgradienten zwischen Druck- und Saugseite der benachbarten Schaufeln entsteht, schwimmt der druckseitige Arm des Hufeisenwirbels in Richtung Saugseite der benachbarten Schaufel ab. Diese Querkanalströmung trägt auch zur Entstehung des Kanalwirbels bei. Aufgrund der geringeren Trägheit in der Grenzschicht wirkt sich hier der Querdruckgradient stärker aus als in der Kernströmung. Es entsteht eine Querkanalströmung, die auf der Saugseite auf die Schaufelwand trifft, wo sie in Richtung Schaufelmitte abgelenkt wird. In einer höheren Schicht findet eine Rückströmung in Richtung Passage statt, wodurch sich der Kanalwirbel aufrollt. Dieser kann mit dem druckseitigen Arm des Hufeisenwirbels der Nachbarschaufel verschmelzen. Bei einem sehr kleinen Radius zwischen Schaufel und Seitenwand bildet sich zusätzlich ein Eckenwirbel aus. Im vorderen Teil der Passage entsteht dieser ebenfalls aus der Querkanalströmung, von der sich ein geringer Anteil in Richtung Seitenwand aufrollt. Im hinteren Teil der Passage wird das Fluid in der Ecke durch den Kanalwirbel in eine zu diesem gegenläufige Rotation versetzt.

An der Hinterkante treffen die Druck- und saugseitigen Wirbel aufeinander, welche radial entgegengesetzte Richtungen aufweisen. Hierdurch entsteht der Hinterkantenwirbel, welcher jedoch für die vorliegende Arbeit keine Relevanz hat und daher nicht weiter betrachtet wird. In realen Turbinengittern entstehen zusätzlich Spaltwirbel, wenn ein Radialspalt an der Blattspitze vorhanden ist.

Die beschriebenen Phänomene tragen zu einer erhöhten Durchmischung des heißen Fluids in der Kanalmitte mit dem kälteren Fluid nahe der Schaufelwand bei. Stärke und Verteilung des Wärmeübergangs ist daher entscheidend von den auftretenden Sekundärströmungen geprägt.

2.3.3 Abgrenzung zur realen Maschine

Da es sich bei dem in dieser Arbeit betrachteten Prüfstand um eine lineare Kaskade handelt, ist die Strömungssituation im Vergleich zur realen Maschine vereinfacht. Es wurden daher in der vorliegenden Arbeit einige Effekte vernachlässigt, die bei der Übertragung auf die reale Gasturbine berücksichtigt werden müssen.

Die Geometrie der Schaufeln wurde aus einem einzelnen Profil prismatisch aufgezogen, um ein möglichst zweidimensionales Strömungsfeld zu erhalten. In der realen Maschine ist die Geometrie der Schaufeln dreidimensional gestaltet, sie ist verwunden und verfügt in der Regel nicht über ein einheitliches Profil über der Schaufelhöhe. Dadurch sind auch die Schaufelpassagen nicht konstant über die Schaufelhöhe. Zusätzlich zur veränderlichen Schaufelgeomterie führt der ringförmige Strömungspfad zu einer Aufweitung der Passagen vom Schaufelfuß hin zur Schaufelspitze. In der realen Maschine übliche, zusätzliche Mechanismen zur Reduktion des äußeren Wärmeübergangs wie Blattspitzen- oder Hinterkantenausblasung sind am Heißgaskanal nicht vorhanden und wurden daher in der vorliegenden Arbeit nicht berücksichtigt. Bei Laufschaufeln ohne Deckband tritt ein Spaltwirbel auf, der gegebenenfalls für den Wärmeübergang berücksichtigt werden muss. Die Interaktion zwischen den Stufen beeinflusst die Strömung in einem Maß, das in der Kaskade nicht abgebildet werden kann. Nachlaufdellen verändern die Anströmung und es treten instationäre Effekte auf, welche ebenfalls in der Linearkaskade nicht untersucht wurden. Das Temperaturprofil der Brennkammer ist nicht homogen. Diese Besonderheit liegt zwar auch am Heißgaskanal vor, kann jedoch nicht exakt den Bedingungen in der Realität nachgebildet werden. Auch zeitlich veränderliche Profile beeinflussen den Wärmeübergang. Die Umlenkung der Kühlluft innerhalb der Schaufel führt zu einer nicht voll ausgebildeten Strömung innerhalb der Kühlkanäle und einer vom ausgebildeten Fall abweichenden Strömungssituation. Rotationseffekte beeinflussen nicht nur die Außenströmung. Auch die Strömung in den Kühlkanälen wird durch Corioliskräfte beeinflusst und aufgrund der Rotationsbewegung einseitig verschoben.

2.4 Lösungsverfahren inverser Probleme

Bei direkten Problemen wird, ausgehend von einer Ursache - z.B. ein bekannter, auf einen Körper aufgeprägter Wärmestrom - dessen Wirkung ermittelt. In diesem Fall also die resultierende Materialtemperatur des Körpers. Als inverses Problem wird dagegen ein Sachverhalt bezeichnet, bei welchem von einem beobachteten Effekt auf eine unbekannte Ursache geschlossen werden soll. Im vorigen Beispiel ist dies der aufgeprägte Wärmestrom, aus dem eine bestimmte (bekannte) Temperaturverteilung des Körpers resultiert. Häufig ist das zugehörige direkte Problem einfach lösbar, eindeutig und robust gegenüber kleinen Änderungen der Randbedingungen. Dies wird als gut gestelltes Problem bezeichnet und wird nach Hadamard (1902) durch die folgenden drei Kriterien definiert, die gleichzeitig erfüllt sein müssen.

- Lösbarkeit: Mindestens eine Lösung existiert.
- Eindeutigkeit: Maximal eine Lösung existiert.
- Stabilität: Die Lösung ist kontinuierlich von Parametern oder zugrunde liegenden Daten abhängig und reagiert entsprechend träge auf kleine Änderungen.

Inverse Probleme sind in der Regel schlecht gestellt, was bedeutet, dass mindestens eins der oben genannten Kriterien verletzt wird. Je robuster das direkte Problem ist, desto weniger gilt dies für das zugehörige inverse Problem. Bezogen auf das Beispiel der Temperaturverteilung bedeutet dies, dass eine kleine Änderung des Wärmestroms aufgrund der Wärmeleitung im Körper „verschmiert“ wird und somit zu noch kleineren Änderungen der resultierenden Temperatur führt. Beim inversen Problem kann jedoch eine kleine Änderung der Temperatur zu größeren Änderungen im daraus bestimmten Wärmestrom führen. Eine analytische Lösung ist häufig nicht möglich. Dies gilt besonders bei steigender Komplexität des Problems, beispielsweise aufgrund von Geometrie oder Randbedingungen.

Zur Veranschaulichung wird zunächst beispielhaft das Gleichungssystem

$$b = f(x) \tag{2.39}$$

betrachtet, in Matrixschreibweise

$$b = Ax. \tag{2.40}$$

Das direkte Problem kann in der Regel einfach gelöst werden, sofern f bzw. A bekannt sind. Ist die Matrix A quadratisch und invertierbar, ist das zugehörige inverse Problem

$$x = A^{-1}b \tag{2.41}$$

ebenfalls eindeutig lösbar. In einigen Fällen ist die Invertierung durch die Pseudoinverse der Matrix A möglich (Kaipio und Somersalo 2006). Übliche Methoden zur Lösung dieser Art inverser Probleme sind bei Mueller und Siltanen (2012) beschrieben. Für den allgemeinen Fall is die Bestimmung einer Näherungslösung häufig die beste oder die einzige Wahl. Anstatt einer eindeutigen Lösung wird eine möglichst gute Lösung mithilfe des Optimierungsproblems

$$x^* = \arg\min_{x \in X} \{R(x)\} \tag{2.42}$$

mit dem Residuum $R(x)$ gesucht. Im Folgenden wird hierfür

$$R(x) = \|b - f(x)\|^2 \tag{2.43}$$

verwendet. Aufgrund der Komplexität des in der vorliegenden Arbeit betrachteten Problems werden nur iterative Lösungsverfahren betrachtet. Im Folgenden werden übliche Strategien für eine iterative Lösung des Optimierungsproblems (2.42) vorgestellt. Dazu wird auf die Notwendigkeit und Umsetzung einer Regularisierung eingegangen. Anschließend werden verschiedene Optimierungsstrategien vorgestellt, die für iterative Lösungswege eingesetzt werden können. Da für einen Teil der vorgestellten Methoden und in gewisser Weise auch für das Verständnis der Regularisierung der Bayes'sche Ansatz relevant ist, wird im folgenden Abschnitt zunächst der Satz von Bayes vorgestellt.

2.4.1 Bayes' Theorem

Thomas Bayes stellte 1764 ein Theorem auf, welches die bedingte Wahrscheinlichkeit zweier gleichzeitig auftretender Ereignisse quantifiziert (Bayes 1764). In allgemeiner Formulierung lautet dieses

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \tag{2.44}$$

mit den Wahrscheinlichkeiten P für die beiden Ereignisse A und B. Darin ist

- $P(A/B)$ der *Posterior*, die gesuchte Wahrscheinlichkeit von Ereignis A, unter der Bedingung dass das Ereignis B eingetreten ist.
- $P(B/A)$ die *Likelihood*, welche die Wahrscheinlichkeit von B quantifiziert, wenn zuvor A eingetreten ist.
- $P(A)$ der *Prior*, welcher Informationen über A beinhaltet, bevor B eingetreten ist, beispielsweise eine allgemeine Wahrscheinlichkeit.

- $P(B)$ die *Evidence*, welche eine allgemeine Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B beinhaltet.

Dieser Zusammenhang kann angewendet werden, um die Wahrscheinlichkeit voneinander abhängiger Ereignisse abzuschätzen. So kann beispielsweise die Wahrscheinlichkeit eines Regenschauers abgeschätzt werden, wenn es morgens bewölkt ist ($P(\text{Regen}|\text{Wolken})$); sofern bekannt ist wie oft es (im betreffenden Monat) insgesamt regnet ($P(\text{Regen})$) und wie oft es an einem morgens bewölkten Tag üblicherweise regnet ($P(\text{Wolken}|\text{Regen})$).

Für den wissenschaftlichen Kontext ist die Bewertung der in einem Modell verwendeten Parameter relevant. Mittels Bayes' Theorem können die Parameter eines Modells bewertet werden, welches gemessene Daten abbilden soll. Die Wahrscheinlichkeit, dass die gewählten Parameter unter Beachtung der Messdaten korrekt sind, lautet dann

$$P(\text{Parameter}|\text{Daten}) = \frac{P(\text{Daten}|\text{Parameter})P(\text{Parameter})}{P(\text{Daten})} \tag{2.45}$$

Der Term $P(\text{Parameter})$ ist der *Prior*, welcher Vorabinformationen über die Parameter enthält. Dies kann beispielsweise ein Gültigkeitsbereich sein oder bestimmte Werte, die aufgrund bekannter Zusammenhänge wahrscheinlicher sind als andere.

Mit $P(\text{Daten}|\text{Parameter})$ wird die Wahrscheinlichkeit ausgedrückt, dass die gemessenen Daten mit einem Modell mit den gewählten Parametern übereinstimmen. Diese kann aus dem Grad der Übereinstimmung von gemessenen und berechneten Werten bestimmt werden, z.B. aus der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion unter der Annahme einer Gaussschen Verteilung.

Schwieriger ist dagegen die *Evidence* zu bestimmen, die Wahrscheinlichkeit der vorliegenden Daten $P(\text{Daten})$. In der Praxis wird jedoch häufig nicht direkt das Minimum aus (2.45) bestimmt. Stattdessen wird dieses angenähert, indem Wahrscheinlichkeiten verschiedener Parameter verglichen werden. Dadurch kann der Nenner $P(\text{Daten})$ häufig aus dem Problem eliminiert werden, sodass dessen Berechnung nicht notwendig ist.

Aus Bayes' Theorem hat sich ein ganzer Zweig der Statistik entwickelt, der eine andere Betrachtungsweise als den „klassischen" frequentistischen Ansatz zulässt. Insbesondere das Einbringen von Vorwissen bietet einen großen Vorteil bei der Betrachtung realer Probleme.

2.4.2 Regularisierung

Die Instabilität inverser Probleme wird häufig durch fehlerbehaftete Eingangsgrößen verstärkt. Ist z.B. ein Messsignal mit Rauschen behaftet, kann diese kleine Abweichung der Eingangsgröße bereits zu größeren Störungen des Ergebnisses führen. Bei einer Optimie-

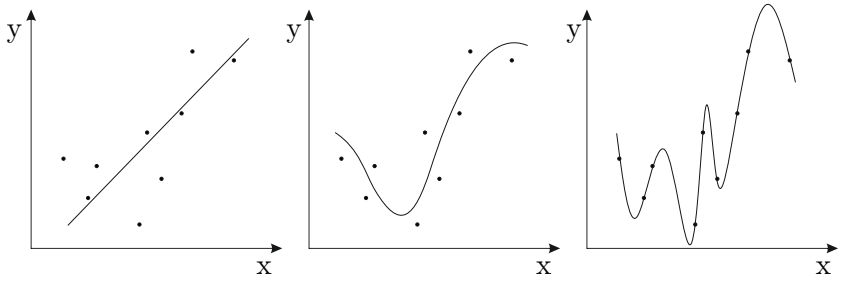


Abb. 2.13: Schematische Darstellung verschiedener Regressionskurven für einen Datensatz. Grad des Fittings steigt von links nach rechts.

rung im Rahmen einer iterativen Lösungsstrategie kann es daher leicht zu *Overfitting* kommen. In Abb. 2.13 sind schematisch verschiedene mögliche Lösungen für denselben Datensatz gezeigt. Dazu sind jeweils dieselben Datenpunkte als Eingangsgrößen x über Ausgangsgrößen y dargestellt. Zusätzlich ist jeweils eine mögliche Funktion $f(x)$, die den Zusammenhang beschreibt, eingezeichnet. Von links nach rechts steigt dabei die Übereinstimmung mit den Datenpunkten. Sofern die Daten durch Messrauschen beeinflusst sind, wie es auch in der vorliegenden Arbeit der Fall ist, stellt die genaue Übereinstimmung zwischen einer gefitteten Funktion $f(x)$ und den Datenpunkten ein *Overfitting* dar. Dies ist in Abb. 2.13 rechts dargestellt. Das Rauschen wurde hier als Teil des Signals interpretiert. Kommen neue Datenpunkte zu dem Datensatz hinzu, beispielsweise durch weitere Messungen, werden sie in diesem Fall wahrscheinlich nicht der gefundenen Funktion entsprechen. Um dies zu verhindern, werden Regularisierungsmethoden verwendet. Dadurch wird das schlecht gestellte Problem durch ein naheliegendes gut gestelltes angenähert. Eine zu strikte Regularisierung ist jedoch zu vermeiden, da auch ein *Underfitting*, wie es in Abb. 2.13 links dargestellt ist, nicht wünschenswert ist. Die Eigenschaften des Problems werden dabei nicht mehr abgebildet. Bei der Regularisierung wird das iterative Lösungsverfahren modifiziert, um einen geeigneten Mittelweg zwischen den beiden Extremen zu finden. Damit können unerwünschte Eigenschaften der Lösung, beispielsweise starke Schwankungen, verringert werden. Gleichzeitig kön-

nen erwünschte Eigenschaften, wie bestimmte Strukturen, gefördert werden. Dies kann beispielsweise durch Einführung eines zusätzlichen Terms in das Optimierungsproblem geschehen. Durch diesen zusätzlichen Strafterm wird (2.42) zu

$$x_{\text{reg}} = \arg\min \left\{ \|b - f(x)\|^2 + rG(x) \right\} \tag{2.46}$$

mit dem Regularisierungsparameter r und der Regularisierungsfunktion $G(x)$ erweitert. Da mit dieser Methode Vorwissen über die Eigenschaften der Lösung in das Optimierungsproblem eingebracht wird, handelt es sich bei dem Strafterm in gewisser Weise um einen *Prior*.

Regularisierungsparameter

Der Regularisierungsparameter r dient dazu, den eingeführten Strafterm gegenüber dem ursprünglichen Optimierungsproblem zu gewichten. Die Wahl dieses Parameters hat damit direkten Einfluss auf das Ergebnis und ein mögliches Over- oder Underfitting. Für sehr kleine $r \to 0$ verschwindet der Einfluss des Strafterms. Für den Extremfall $r = 0$ handelt es sich um das ursprüngliche Problem, wobei es aufgrund von Messunsicherheiten zum bereits erwähnten Overfitting kommen kann. Für sehr große Werte von r, mit dem Extremwert $r \to \infty$, wird die Lösung dagegen vom Strafterm dominiert. Der Einfluss des gewählten Strafterms wird dadurch sehr groß und die dazugehörige Lösung hat unter Umständen nicht mehr viel mit den ursprünglichen Datenpunkten zu tun. Die Wahl eines geeigneten Parameters ist daher von entscheidender Bedeutung. Es muss daher auch für r eine Optimierung durchgeführt werden. Für die Auswahl eines geeigneten

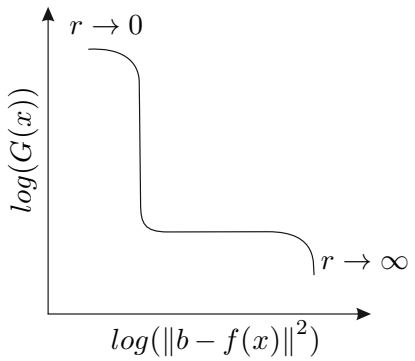


Abb. 2.14: Schematische Darstellung der *L-Curve*

Regularisierungsparameters r stehen verschiedene Methoden zur Verfügung. Bei linearen

Problemen kann die *L-Curve* Methode (Hansen und O'Leary 1993) angewendet werden. Die Optimierungsergebnisse bei Variation des Parameters r werden dazu grafisch dargestellt. Dies ist schematisch in Abb. 2.14 gezeigt. Dabei werden die beiden Bestandteile der Optimierung, das Residuum der ursprünglichen Optimierung sowie der Strafterm, übereinander aufgetragen. Die entstehende Kurve weist eine typische L-Form auf. Der optimale Wert für r befindet sich am Scheitelpunkt der Kurve.

Eine weiteres Kriterium zur Auswahl des Regularisierungsparameters r ist *Morozov's Discrepancy Principle* (MDP) (Morozov 1966; Calvetti und Somersalo 2023). Dieses kann angewendet werden, wenn die Größenordnung der Messunsicherheit e bekannt ist. Hierbei wird der Regularisierungparameter r so gewählt, dass das Residuum der Optimierung etwa der Messunsicherheit e entspricht, sodass

$$\|b - f(x_r)\| \approx \|e\| \tag{2.47}$$

gilt.

Die in den Messdaten enthaltene Unsicherheit muss in jedem Fall bei der Wahl des Regularisierungsparameter r beachtet werden. Je größer die Messunsicherheit der vorliegenden Daten ist, desto eher wird ein reines Fitting (ohne Regularisierung oder mit sehr kleinem r) zu einem Overfitting. Die Abweichung der Messdaten zum „wahren Wert" wird größer, die Daten sind sozusagen weniger vertrauenswürdig. Für eine realistische Lösung darf also auch der Abstand der Messdaten zur ermittelten Lösung zunehmen. Daher muss mit steigender Unsicherheit in den Daten auch der Regularisierungsparameter r zunehmen.

Regularisierungsfunktion

Die Regularisierungsfunktion $G(x)$ ist so zu wählen, dass sie für sinnvolle Werte der Lösung möglichst kleine Werte annimmt. Eine häufige Formulierung ist

$$G(x) = \|Lx\|^2, \tag{2.48}$$

wobei die Matrix L so gewählt werden kann, dass beispielsweise die Gesamtlänge, das Gradientenwachstum oder die Krümmung des Lösungsvektors durch ein erhöhtes Residuum bestraft werden. Im ersten Fall kann für L die Einheitsmatrix eingesetzt werden, sodass möglichst kleine Werte favorisiert werden. Für das Gradientenwachstum werden

mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

Schwankungen in der Lösung unterdrückt bzw. verringert, der Lösungsvektor wird geglättet. Eine geringe Krümmung des Lösungsvektors wird mit

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

bevorzugt.

Auch für die Auswertung des Matrixprodukts Lx zu einer in der Optimierung verwertbaren Größe existieren verschiedene Möglichkeiten. In der Regel wird dabei die euklidische Norm

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 \right) \right)^{1/2} \tag{2.51}$$

verwendet. Die Optimierung mit dieser Norm wird als Ridge Regression oder L2 Regression bezeichnet.

Alternativ kann die Optimierung als Lasso Regression durchgeführt werden. Dabei wird anstelle der euklidischen die Summennorm

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{2.52}$$

verwendet, sodass dünnbesetzte Lösungen favorisiert werden.

Sofern typische Lösungen bekannt sind, können diese in die Regularisierung einbezogen werden. Das Optimierungsproblem wird dann zu

$$x^* = \arg\min_{x \in X} \left\{ R(x) + r\|L(x - x')\| \right\}, \tag{2.53}$$

wobei x' die bekannten Lösungen beinhaltet.

2.4.3 Optimierungsverfahren

Zur Bestimmung des lokalen oder globalen Optimums eines nicht analytisch lösbaren Problems existieren zahlreiche iterative Methoden. Diese lassen sich grob in drei verschiedene Kategorien unterteilen.

Deterministische Methoden folgen bestimmten Regeln bei der Bestimmung des jeweils nächsten Schritts. Ausgehend vom selben Startwert sind die im Lösungsraum beschrittenen Pfade wiederholbar. Hierzu gehören im Grunde alle klassischen Optimierungsverfahren, zu den verbreitetsten gehören beispielsweise das Newton Verfahren und der Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno Algorithmus (BFGS). Für eine detailliertere Übersicht dieser und weiterer Verfahren sei auf Chong und Żak (2008) verwiesen.

Im Gegensatz dazu enthalten stochastischen Methoden zufällige Elemente bei der Auswahl des jeweils nächsten Optimierungsschritts. Eine exakte Wiederholbarkeit ist hier nicht gegeben. Die einfachste Methode dieser Kategorie ist *Random Sampling*, bei dem der Lösungsraum rein zufällig erkundet wird. Daneben existieren auch heuristische Ansätze wie beispielsweise *Markov Chain Monte Carlo* Methoden. Die Bewegung durch den Lösungsraum wird anhand einer Markov-Kette durchgeführt, wobei vom jeweiligen aktuellen Punkt aus ein zufälliger Wert gewählt wird, bis der nächste gültige Punkt gefunden ist und als neuer Ausgangspunkt dient. Hierzu gehören beispielsweise der Metropolis-Hastings Algorithmus (Hastings 1970) sowie Simulated Annealing (Kirkpatrick et al. 1983). Auch hier gibt es eine große Bandbreite verschiedener Methoden. Einige Beispiele sowie weiterführende Erläuterungen finden sich beispielsweise bei Kaipio und Somersalo (2006), Calvetti und Somersalo (2023) und Tsai und Chiang (2023).

Beide Arten von Optimierungen benötigen in der Regel eine große Anzahl von Auswertungen der Funktion. In vielen Fällen steht jedoch nur eine begrenzte Zahl von Auswertungen zur Verfügung, sei es aus Zeit- oder Kostengründen. Für diese Probleme existiert noch eine weitere Kategorie von Optimierungsalgorithmen. Diese wird auch als „praktische“ Optimierung bezeichnet (Brochu et al. 2010), da die Vollständigkeit der Lösung zugunsten schnellerer Ergebnisse aufgegeben wird. Grundlage dieser Algorithmen ist die Bildung eines Ersatzmodells, welche die teilweise unbekannte *Posterior* Verteilung abbildet und das im Laufe der Optimierung immer wieder aktualisiert wird. Zu dieser Kategorie gehören beispielsweise *Bayesian Optimization* (Pelikan et al. 1999), Kriging (Matheron 1971) oder Variational Bayes (Jordan et al. 1998).

Im Folgenden werden drei Methoden vorgestellt, die in der vorliegenden Arbeit verwendet werden. Es wurde dabei aus jeder Kategorie je ein Algorithmus ausgewählt.

2.4.3.1 Modifizierter Powell-Algorithmus

Der modifizierten Powell Algorithmus (Powell 1964; Press 1996) gehört zu den deterministische Optimierungsmethoden. Es handelt sich dabei um eine *Direction Set*-Methode. Dabei wird die Funktion sequentiell entlang konjugierter Richtungen minimiert.

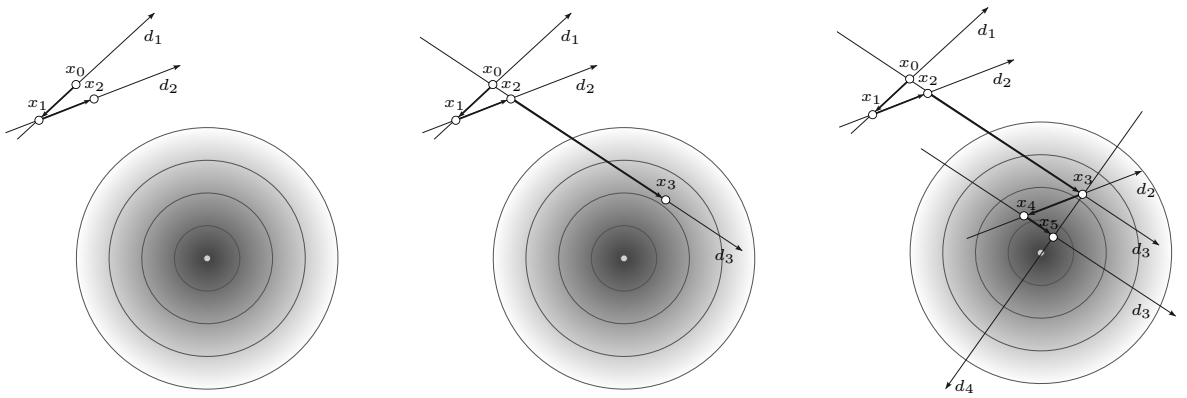


Abb. 2.15: Ablauf des modifizierten Powell Algorithmus anhand einer quadratischen Funktion

Anstatt dies nur entlang der jeweiligen Dimensionen des Lösungsvektors durchzuführen, werden beim modifizierten Powell Algorithmus konjugierte Sets bestimmt, also voneinander unabhängige Richtungen, entlang derer die iterative Optimierung durchgeführt wird. Abb. 2.15 zeigt schematisch das Vorgehen des Powell Algorithmus an einem zweidimensionalen Beispiel. Zunächst wird die Optimierung entlang d_1 mit einem Liniensuchverfahren durchgeführt, welches zum Punkt x_1 führt (Abb. 2.15a). Ausgehend von diesem Punkt folgt eine Optimierung entlang der Richtung d_2. Aus diesen beiden (bzw. beliebig vielen Richtungen je nach Anzahl der Dimensionen) folgt dann die konjugierte Richtung d_3 (Abb. 2.15b). Das Minimium x_3 entlang dieser Richtung ist der Ausgangspunkt für die nächste Iteration. Die Prozedur wird wiederholt, jedoch jeweils unter Vernachlässigung einer der n Richtungen aus dem vorherigen Schritt. Beim Original-Algorithmus nach Powell wird immer die erste Richtung jedes Sets vernachlässigt. Im vorliegenden Beispiel ist dies in Abb. 2.15c dargestellt. Ausgehend von x_3 wird die nächste Iteration entlang von d_2 und d_3 durchgeführt. Für exakt quadratische Funktionen (wie in Abb. 2.15 angedeutet) konvergiert der Algorithmus mit wenigen Iterationen. Dies birgt

jedoch die Gefahr der Bildung linear abhängiger Sets, sodass der Algorithmus in einem lokalen Minimum konvergiert. Um dies zu verhindern, wird eine modifizierte Version der Methode verwendet. Bei dieser wird anstatt von d_0 diejenige Richtung vernachlässigt, auf der die Funktion am stärksten abfällt. Diese kontraintuitive Vorgehensweise verhindert, dass diese Richtung in den folgenden konjugierten Sets zu dominant wird.

2.4.3.2 Simulated Annealing

Simulated Annealing, zuerst beschrieben von Kirkpatrick et al. (1983), ist ein heuristischer Algorithmus zur Bestimmung eines globalen Optimums, der sich einer Analogie aus der statistischen Mechanik bedient. Bei einem Körper, der aus einer ausreichend großen Anzahl Atome besteht, wird bei einem thermischen Gleichgewicht stets die wahrscheinlichste Kombination aus unterschiedlichen Zuständen der Atome beobachtet. Diese Wahrscheinlichkeit ist proportional zum Boltzmann Faktor $\exp(-E/k_BT)$. Hierin ist E die Energie des Systems bei einer bestimmten Konfiguration, T die Temperatur und k_B die Boltzmann Konstante. Während bei hohen Temperaturen noch viele verschiedene mögliche Zustände existieren, verringert sich diese Zahl beim Abkühlen des Körpers, bis schließlich ein optimaler Zustand niedriger Energie erreicht ist.

Diese Analogie wird mit der Idee des Metropolis Algorithmus kombiniert. Dieser stellt eine einfache Form eines *Markov Chain Monte Carlo* Verfahrens dar, bei dem zufällige Werte in der Umgebung eines Startwertes ausgewählt und ausgewertet werden. Ist der neue Wert besser als der Ausgangspunkt, wird dieser zum neuen Startwert. Entscheidend dabei ist, dass mit einer bestimmten vorgegebenen Wahrscheinlichkeit der Startwert auch dann wechseln kann, wenn er eigentlich schlechter ist als der ursprüngliche Anfangswert. Dadurch wird vermieden, dass der Algorithmus in ein lokales Minimum läuft.

Beim *Simulated Annealing* wird diese Wahrscheinlichkeit abhängig von einer fiktiven Abkühltemperatur gewählt. Für jeden neuen Zustand wird die Änderung der Kostenfunktion, also des verbleibenden Fehlers berechnet. Analog zum obigen Beispiel wird diese Änderung mit ΔE bezeichnet. Ist die Änderung $\Delta E \leq 0$, wird der aktuelle Punkt als neuer Startwert verwendet. Für den Fall dass $\Delta E > 0$, wird der aktuelle Punkt mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(\Delta E) = \exp(-\Delta E/k_BT) \tag{2.54}$$

akzeptiert. Die Wahrscheinlichkeit schlechtere Werte zu akzeptieren, wird somit im Laufe der Optimierung immer geringer. Ähnlich wie die Bewegung der Moleküle beim Abkühlvorgang eines Körpers werden die Bewegungen des Algorithmus im Lösungsraum immer

kleiner. Dabei muss bei jeder Temperatur zuerst ein Gleichgewichtszustand erreicht werden, bevor die nächste Temperaturstufe gewählt wird. So wird sichergestellt, dass jeweils das Optimum erreicht wird. Dabei verbessert sich die Lösung bei jedem Schritt. Durch die Verringerung des Bewegungsspielraumes nähert sich der Algorithmus dem Optimum immer weiter an.

2.4.3.3 Bayesian Optimization

Bayesian Optimization gehört zur Gruppe der Optimierungsmethoden, bei denen einfach auszuwertende Ersatzmodelle gebildet werden, um die *Posterior* Verteilung eines Problems anzunähern. Bayesian Optimization basiert auf dem Satz von Bayes (2.44). Verwendung findet die Methode vor allem dann, wenn die folgenden Einschränkungen vorliegen:

- Das Modell ist eine Black-Box, das heißt es liegen keine Informationen über die Struktur der Funktion oder über Gradienten vor.
- Das Modell ist rechenintensiv. Das durchführen mehrerer 10.000 Durchläufe ist nicht sinnvoll durchführbar.
- Die vorliegenden Daten sind stark mit Rauschen belegt.

Insbesondere wenn aufgrund von Zeit oder Kosten nur eine geringe Anzahl an Auswertungen der Funktion durchgeführt werden kann, ist Bayesian Optimization eine sinnvolle Wahl, da durch Verwendung eines Ersatzmodells die zur Verfügung stehenden Aufrufe bestmöglich genutzt werden können.

Die zu optimierende Funktion wird zunächst an einigen zufällig ausgewählten Punkten ausgewertet. Hierbei ist es vorteilhaft, die Stützstellen quasi-zufällig auszuwählen, beispielsweise mittels *Latin Hypercube Sampling* (McKay et al. 1979) oder einer Sobol-Sequenz (Sobol' 1967). Diese Methoden sorgen dafür, dass die Abstände zwischen den Stützstellen gleichmäßiger sind als bei rein zufällig gewählten Punkten. Anschließend wird ein Gauß-Prozess über die Stützstellen gelegt. Mit jedem neuen Sample wird der Gauß-Prozess aktualisiert. Man erhält so ein Ersatzmodell für die *Posterior* Funktion, sowie eine Unsicherheit der Funktion an jedem Punkt.

Ein Gauß-Prozess ist definiert als

$$f(x) \sim \mathcal{GP}\left(m(x), k(x, x')\right), \tag{2.55}$$

welche durch die Mittelwert-Funktion $m(x)$ und die Kovarianz-Funktion $k(x, x')$ vollständig definiert ist. Durch die Wahl der Kovarianz- oder auch Kernel-Funktion kann in

gewisser Weise ein *Prior*, also Vorwissen über die Struktur der Lösung, in das Problem eingebracht werden. Dies kann beispielsweise mit einem *Squared-Exponential* Kernel geschehen. Dieser wird als *Radial Basis Function* Kernel bezeichnet und ist definiert als

$$k(x_i, x_j) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left\|x_i - x_j\right\|^2\right) \tag{2.56}$$

mit den benachbarten Werten x_i und x_j. Für ähnliche Werte x_i und x_j nähert sich die Kovarianzfunktion 1 an. Für stark unterschiedliche Werte nimmt die Kovarianzfunktion Werte nahe 0 an. Durch die Verwendung von Hyperparametern kann die Kernelfunktion generalisiert werden, indem beispielsweise bei Vektoren unterschiedliche Varianzbreiten für die jeweiligen Komponenten zugelassen werden. Eine weitere Form der Generalisierung wird im Matern Kernel verwendet, welcher in der vorliegenden Arbeit verwendet wird. Hierin ist ein zusätzlicher Hyperparameter ν enthalten, der die resultierende Funktion glättet. Die Matern Kovarianz-Funktion lautet

$$k(x_i, x_j) = \frac{1}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}\left(2\sqrt{\nu}\left\|x_i - x_j\right\|\right)^{\nu} H_\nu\left(2\sqrt{\nu}\left\|x_i - x_j\right\|\right) \tag{2.57}$$

mit der Gamma-Funktion Γ und der Bessel-Funktion H. Der in dieser Arbeit verwendete Algorithmus zur Auswertung des Gauss-Prozesses (Mittelwert und Varianz) basiert auf der Arbeit von Rasmussen und Williams (2005).

Der Gauss Prozess wird mit Hilfe einer *Acquisition Function* analysiert, um zu entscheiden, an welcher Stelle die Zielfunktion als nächstes ausgewertet wird. Die Auswahl eines neuen Samples kann aufgrund unterschiedlicher Kriterien erfolgen und stellt stets einen Kompromiss zwischen *Exploration* und *Exploitation* dar. Der Begriff *Exploration* bezeichnet das Ziel, die Funktion global besser zu verstehen. Hierbei werden Punkte mit einer hohen Unsicherheit im Ersatzmodell für die nächste Funktionsauswertung ausgewählt. Hingegen bezeichnet *Exploitation*, dass ein besonderes Merkmal der Funktion genauer untersucht werden soll. Beispielsweise wird für die nächste Auswertung ein Punkt gewählt, der mit hoher Wahrscheinlichkeit das Minimum der Funktion darstellt. Die Bestimmung der nächsten Stützstelle erfolgt durch Optimierung der *Acquisition Function*. Im Folgenden werden einige *Acquisition Functions* vorgestellt.

Bei der *Probability of Improvement* (PI) Funktion (Kushner 1964) wird die Wahrscheinlichkeit einer Verbesserung gegenüber dem bisher besten Ergebnis $f(x^+)$ ausgewertet. Sie ist definiert als

$$PI(x) = P(f(x) \geq f(x^+)) = \Phi_{CDF}\left(\frac{f(x^+) - \mu(x)}{\sigma(x)}\right) \tag{2.58}$$

mit der kumulierten Verteilungsfunktion Φ_{CDF} sowie dem Mittelwert μ und der Standardabweichung σ des Gauss-Prozesses. Diese Formulierung wird jedoch kleine Verbesserungen, die mit einer hohen Sicherheit erreicht werden können, vorziehen gegenüber „unsichereren“ aber unter Umständen größeren Verbesserungen. Variationen der Funktion durch einen zusätzlichen Parameter ξ, der eine maximale Verbesserung um einen willkürlich festgelegten Wert erzwingt, können dieses Problem bis zu einem gewissen Grad beheben. Die Formulierung für die Funktion lautet dann

$$PI(x) = P(f(x) \geq f(x^+) + \xi) = \Phi_{CDF}\left(\frac{f(x^+) - \mu(x) - \xi}{\sigma(x)}\right). \tag{2.59}$$

Sinnvoller ist es jedoch, noch weitere Aspekte in der *Acquisition Function* zu berücksichtigen. Dies ist zum Beispiel bei der *Expected Improvement* (EI) Funktion (Mockus et al. 1978; Jones et al. 1998) der Fall. Wie aus der Bezeichnung bereits ersichtlich ist, wird hier auch die Höhe der erwarteten Verbesserung der Funktion einbezogen, anstatt nur überhaupt eine Verbesserung zu erzielen. Dies lässt sich in der Formulierung

$$EI(x) = \begin{cases} (f(x^+) - \mu(x))\,\Phi_{PDF}(Z) + \sigma(x)\Phi_{CDF}(Z), & \sigma(x) > 0 \\ 0, & \sigma(x) = 0 \end{cases} \tag{2.60}$$

mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion Φ_{PDF} und

$$Z = \frac{f(x^+) - \mu(x)}{\sigma(x)} \text{ für } \sigma(x) > 0 \tag{2.61}$$

ausdrücken (Archetti und Candelieri 2019). Der erste Term in (2.60) wird für x mit niedrigem vorhergesagtem Wert $\mu(x)$ kleiner und verhält sich dabei ähnlich wie die *Probability of Improvement-Acquisition Function*. Im zweiten Term wird dagegen die Unsicherheit $\sigma(x)$ der Vorhersage berücksichtigt. Bei einer hohen Unsicherheit nimmt der Term einen hohen Wert an. EI stellt damit bereits eine Kombination aus *Exploration* und *Exploitation* dar. Analog zu PI kann die Gewichtung zwischen beiden auch aktiv durch Einführung eines zusätzlichen Parameters in den ersten Term von (2.60) beeinflusst werden. Dies kann z.B. adaptiv geschehen, indem ξ mit steigender Anzahl an Funktionsauswertungen abnimmt.

Eine weitere übliche Funktion ist *Lower Confidence Bound* (LCB) (Auer 2002). Diese ist definiert als

$$LCB(x) = \mu(x) - \xi\sigma(x). \tag{2.62}$$

Der Parameter $\xi \geq 0$ wirkt dabei wie bei den zuvor beschriebenen Funktionen als Stellgröße zwischen *Exploration* und *Exploitation*. Für kleine Werte von ξ wird eher *Exploitation*, also lokale Suche an einem vermuteten Optimum durchgeführt, für große Werte eher der gesamte Raum durchsucht (*Exploration*).

In der vorliegenden Arbeit wird eine Kombination der drei vorgestellten Funktionen verwendet, welche in Python bereits implementiert ist und in Abschnitt 4.2.2 kurz beschrieben wird.

Detailliertere Beschreibungen der genannten Funktionen finden sich beispielsweise bei Brochu et al. (2010) und Archetti und Candelieri (2019).

Zu beachten ist bei *Bayesian Optimization*, dass es sich aufgrund der Verwendung eines Ersatzmodells immer nur um eine Annäherung der tatsächlichen *Posterior* Verteilung der Funktion handelt. Die vereinfachte Auswertung der Ersatzfunktion gegenüber der tatsächlichen *Posterior*-Verteilung wird daher mit einem Verlust an Genauigkeit erkauft.

Weiterhin sei angemerkt, das eine hohe Anzahl an Dimensionen des Lösungsvektors zu ungenügenden Ergebnissen führen kann. Klare Grenzen können hierfür nicht genannt werden, häufig wird eine Optimierung für Probleme mit bis zu 20 Dimensionen empfohlen (Frazier 2018).

3 Stand der Forschung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Bestimmung des äußeren Wärmestroms einer konvektiv gekühlten Gasturbinenschaufel mittels Analyse des inversen Wärmeübergangsproblems. Dieses Kapitel gibt einen Überblick zum aktuellen Stand der Forschung. Es werden dabei experimentelle Möglichkeiten sowie Verfahren zur Lösung inverser Wärmeübergangsprobleme berücksichtigt.

In den meisten Fällen wird die experimentelle Bestimmung von Wärmeströmen unter kalten Bedingungen nahe der Raumtemperatur durchgeführt. Dies gilt insbesondere für die Untersuchung von Turbinenströmungen. Es existieren nur wenige Anlagen, welche Experimente unter realitätsnahen Bedingungen ermöglichen. Im Folgenden werden daher zunächst die wenigen vorhandenen Hochtemperatur-Kaskadenprüfstände und die dort angewendeten Messverfahren vorgestellt. Zusätzlich wird eine Veröffentlichung vorgestellt, die eine Methode zur Bestimmung des Wärmeübgergangs bei niedrigeren Temperaturen beinhaltet. Die dort ermittelten Daten werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit als zusätzliche Eingangsdaten für die vorgestellte Methode verwendet.

Anschließend werden inverse Wärmeübergangsprobleme unterschiedlicher Komplexität und mit verschiedenen Lösungsansätzen diskutiert. Dabei werden verschiedene Ansätze für die iterative Lösung vorgestellt.

3.1 Experimentelle Bestimmung des Wärmeübergangs

Der Wärmestrom ist keine direkt messbare Größe. Dessen experimentelle Bestimmung kann daher nur indirekt über resultierende Effekte, wie beispielsweise eine Temperaturänderung, bei geschickt gewählten Randbedingungen erfolgen. Häufig ist dies mit einer hohen Messunsicherheiten verbunden. Die Messtechniken unterliegen dabei häufig Einschränkungen, was die Wahl des Betriebspunktes angeht. Empfindliche Messsysteme können nur bei niedrigen Temperaturen oder nur für kurze Messzeiten eingesetzt werden,

andere benötigen ausreichend Bauraum oder optische Zugänge. Im Folgenden werden einige Hochtemperatur-Kaskaden sowie die dort eingesetzten Messtechniken vorgestellt. Dies soll der Einordnung der Möglichkeiten und Grenzen des Heißgaskanals dienen, dessen Messergebnisse in dieser Arbeit verwendet werden. Zuletzt wird kurz auf die Arbeit von Turner (1971) eingegangen, deren Messdaten als zusätzliche Daten für die vorgestellte Methode verwendet werden. Diese wurden zwar bei vergleichsweise niedrigen Temperaturen ermittelt, stellen aber durch die Turbulenzgradvariation einen interessanten Testfall dar.

3.1.1 Hochtemperatur-Kaskadenprüfstände

Die meisten Untersuchungen des Wärmeübergangs an Turbinenschaufeln finden in kalten Prüfständen statt. Kaskadenprüfstände mit hochskalierten, oft zweidimensionalen Geometrien ermöglichen die detaillierte Untersuchung von Schaufelgeometrien, wobei meist Hauptstromtemperaturen von 500 K nicht überschritten werden. Dies ermöglicht detailliertere Messungen, jedoch werden hierbei Effekte vernachlässigt, welche erst bei höheren Temperaturen signifikanten Einfluss entwickeln und daher für die Übertragbarkeit der Ergebnisse auf die reale Maschine große Relevanz besitzen. Oberhalb von 800 K ändern sich die Anforderungen an Material, Prüflinge und Messtechnik stark. Nur wenige Anlagen ermöglichen die Untersuchung bei solchen maschinenähnlichen Temperaturen. Im Folgenden wird ein kurzer Überblick über solche Anlagen gegeben.

Okamura et al. (2003) führten Versuche zur Kühlung von Stator- und Rotorschaufeln einer Gasturbine an einem Hochtemperatur-Kaskadenprüfstand durch, welcher aus drei Schaufeln und zwei Passagen besteht. Der Heißgasstrom mit Temperaturen von bis zu 1973 K wird hier durch einen Wasserstoff-Sauerstoffbrenner erzeugt. Zur Kühlung der Schaufeln wird Dampf verwendet, die Statorschaufeln verfügen über ein Mehrpasssystem mit Rippen und mehreren Reihen Filmkühlbohrungen im Bereich der Vorderkante und Hinterkante. Mit Thermoelementen werden Materialtemperaturen der Schaufeln sowie der Seitenwände gemessen.

Eine gekrümmte, heiße Kaskade wird bei Rådeklint und Hjalmarsson (1998) und Wiers et al. (2001) beschrieben. Die mittels einer Druckkammer bedruckte Kaskade wird bei Alstom Power Sweden AB betrieben. Mittels eines Öl-betriebenen Brenners können Eintrittsbedingungen von bis zu 1026 K und 10.26 bar erzeugt werden. Die Testsektion besteht aus einem 36° Sektor eines Turbinenstators und umfasst sechs Schaufeln. Zusammen mit einer kalt betriebenen Kaskade gleicher Geometrie können detaillierte

aerodynamische Messungen sowie Untersuchungen des Wärmeübergangs an filmgekühlten Schaufeln durchgeführt werden. Materialtemperaturen der Schaufel werden mittels Thermoelementen in der Vorderkante sowie im Mittelschnitt einer Schaufel gemessen. Eintrittsbedingungen, Totaldruck und Totaltemperatur, werden mithilfe von Sondenrechnen bestimmt. Besonderheit dieses Prüfstands sind optische Zugänge, die Infrarot-Thermografie an der Vorderkante sowie Teilen der Druck- und Saugseiten der Schaufeln ermöglichen. Diese Messungen wurden jedoch bei niedrigeren Temperaturen durchgeführt.

In den 1970er und 80er Jahren entstanden am NASA Lewis Research Center in den USA mehrere Prüfstände, welche Untersuchungen von Turbinenschaufeln bei erhöhten Temperaturen ermöglichen. Dazu zählen eine gekrümmte Kaskade, in der Materialtemperaturmessungen an Turbinenschaufeln bei 1260 K durchgeführt wurden (Gladden und Gauntner 1975), sowie ein rotierender Turbinenprüfstand, der Eintrittsbedingungen von bis zu 2480 K ermöglicht (Cochran und Norris 1976; Gladden et al. 1985). Neben Messungen der Eintrittsbedingungen sowie Materialtemperaturen mittels Thermoelementen wurden hier Pyrometersonden zur Messung der Schaufeloberflächentemperaturen entwickelt und eingesetzt (Uguccini und Pollack 1976).

In der Detroit Diesel Allison Aerothermodynamic Cascade Facility wurden ebenfalls Turbinenschaufeln unter maschinenähnlichen Temperaturen untersucht. Hylton et al. (1983) führten Versuche bei Heißgastemperaturen von 811 K durch. Die Kaskade besteht aus drei Statorschaufeln, wobei das Mark II sowie das C3X Profil untersucht wurde. Der äußere Wärmeübergang wird mittels der Methode nach Turner (1971) bestimmt, welche im folgenden Abschnitt näher beschrieben wird. Weitere Veröffentlichungen dieser Anlage finden sich bei Nealy et al. (1984) und Nirmalan und Hylton (1989).

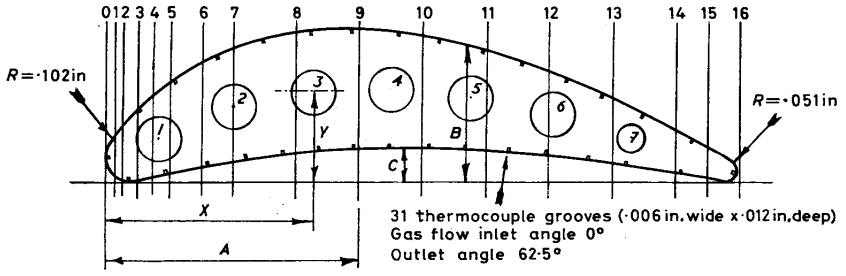
An der Purdue University entstand ein Blow Down Turbinenprüfstand, welcher vom subsonischen Bereich bis zu Mach 3 betrieben werden kann, wobei Testzeiten von bis zu 24 s erreicht werden. Es exisitiert sowohl eine lineare, als auch eine ringförmige Testsektion mit einer Rotor- und einer Statorstufe, die in Rotation gebracht werden kann. Die Eintrittstemperatur liegt bei maximal 700 K (Paniagua et al. 2018). Optische Zugänge an beiden Kaskaden ermöglichen den Einsatz optischer Messtechniken, wie beispielsweise *Particle Image Velocimetry* (PIV) (Inman et al. 2020). Die Untersuchungen von Inman et al. (2020) wurden jedoch bei reduzierten Temperaturen von 450 K durchgeführt.

Weitere Prüfstände, welche Experimente unter hohen Temperaturen ermöglichen, sind meist Brennkammerprüfstände oder erlauben lediglich die Untersuchung ebener Platten

(Straub et al. 2012; Wang et al. 2011; Behrendt und Hassa 2008).

3.1.2 Messdaten mit Turbulenzgradvariation

Um die in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Methode bei unterschiedlichen Turbulenzgraden zu testen, werden entsprechende Daten benötigt. Da die Messdaten des in Kap. 4.3 vorgestellten Heißgaskanals nicht über eine Turbulenzgradvariation verfügen, werden Daten von Turner (1971) verwendet. Dort wird eine Methode vorgestellt, mittels derer die Wärmeübergangskoeffizienten entlang der Schaufeloberfläche ausgehend von Oberflächentemperaturmessungen numerisch bestimmt werden können. Dies ist aufgrund der einfachen Geometrie der Schaufel und insbesondere der runden Kühlkanäle möglich, sodass für die Randbedingung auf der Kühlluftseite eine Korrelation verwendet werden kann. Zusätzlich liegen experimentell ermittelte Oberflächentemperaturen vor, sodass auch die äußere Randbedingung gegeben ist. Neben Geometriedaten der



Station	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A,in	0	·035	·069	·138	·208	·277	·415	·554	·831	1·108	1·385	1·662	1·939	2·216	2·493	2·632	2·77
B,in	·102	·193	·245	·326	·386	·435	·511	·564	·633	·647	·627	·573	·484	·369	·236	·159	·051
C,in	·102	·026	·006	·005	·016	·028	·061	·089	·124	·138	·135	·123	·105	·076	·038	·016	·051

Hole	1	2	3	4	5	6	7
X,in	·232	·558	·901	1·248	1·597	1·944	2·283
Y,in	·187	·323	·385	·392	·357	·284	·196
Dia.in	·188	·188	·188	·188	·188	·198	·125

Abb. 3.1: Geometrie der Schaufel nach Turner (1971)

verwendeten Schaufel (siehe Abb. 3.1) sind also sowohl Materialtemperaturen als auch Wärmeübergangskoeffizienten an der Außenseite der Schaufel verfügbar, wodurch der Wärmestrom berechnet werden kann. Die Messungen wurden unter Variation der Strömungsbedingungen, unter anderem des Turbulenzgrades, durchgeführt. Aufgrund der detaillierten verfügbaren Ergebnisse wurde diese Veröffentlichung in der vorliegenden Arbeit zur Betrachtung unterschiedlicher Turbulenzgrade verwendet und wird daher im

Folgenden kurz beschrieben.

Der für die vorgestellten Messungen verwendete Prüfstand wird bei Hodge (1960) beschrieben. Es handelt sich um eine lineare Kaskade bestehend aus drei Schaufeln. Untersuchungen der Übertragbarkeit der gemessenen Größen auf reale Turbinen finden sich in vorherigen Arbeiten (Bayley und Wood 1969). Insgesamt 31 Thermoelemente vom Typ E sind in Rillen entlang der Oberfläche eingebracht. Deren Positionen sind in Abb. 3.1 gezeigt. Da in der Veröffentlichung keine Messunsicherheit angegeben ist, wird die für diesen Typ Thermoelemente angegebene Unsicherheit von 1.5 K nach DIN EN 60584-1:2014-07 (2014) angenommen.

Die Eintrittstemperatur in den Heißgaspfad beträgt 363 K, die Kühllufttemperatur am Eintritt liegt bei 293 K. Um eine möglichst genaue Bestimmung der Wandtemperatur in den Kühlkanälen zu ermöglichen, wird ein hoher Kühlluftmassenstrom verwendet und somit eine geringe Temperaturdifferenz zwischen Kühlluftein- und austritt erreicht. Da es sich um glatte, runde Kanäle handelt, kann der Wärmeübergangskoeffizient näherungsweise mittels der Korrelation

$$\mathrm{Nu}_{KL} = 0.02\mathrm{Re}_{KL}^{0.8} \tag{3.1}$$

bestimmt werden. Die Bulktemperatur der Kühlluft wird dabei durch Mittelung der an Ein- und Austritt gemessenen Temperaturen bestimmt. Die Temperatur auf der Schaufelaußenseite ist an den Messstellen bekannt und kann durch Interpolation zwischen diesen als kontinuierliche Randbedingung verwendet werden. Das Temperaturfeld im Mittelschnitt der Schaufel wird durch numerische Lösung der Laplace Gleichung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{3.2}$$

berechnet. Dabei wird der in Gleichung (3.1) bestimmte Wärmeübergangskoeffizient als innere Randbedingung in der Form

$$-\lambda_{\mathrm{Material}} \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha_{KL}(T - T_{KL}) \tag{3.3}$$

verwendet. Aufgrund der geringen Temperaturunterschiede im Rechengebiet können Materialparameter als konstant angenommen werden. Bei Kenntnis der Oberflächentemperatur, Bulktemperatur der Kühlluft, der Wärmeübergangskoeffizienten in den Kühlkanälen und der Hauptstromtemperatur kann die Wärmeleitungsgleichung gelöst und das gesamte Temperaturfeld berechnet werden. Mittels

$$-\lambda_{\text{Material}} \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha_{HG}(T - T_{HG}) \tag{3.4}$$

kann dann der Wärmeübergangskoeffizient entlang der Schaufeloberfläche berechnet werden.

3.2 Inverse Wärmeübergangsprobleme

Inverse Wärmeübergangsprobleme existieren in zahlreichen Forschungsgebieten und finden in verschiedensten Bereichen Anwendung. Dies reicht von der Bestimmung von Wärmeübergangskoeffizienten für Strahlungsbarrieren für Hausdächer (Lauret et al. 2006) sowie der Ermittlung thermischer Eigenschaften von Hauswänden (Iglesias et al. 2017; Rodler et al. 2019), bis hin zur thermischen Modellierung tragbarer Computer (Leoni und Amon 2000). Besonders im Bereich der Strömungsmechanik finden sich zahlreiche Beispiele. So können inverse Wärmeübergangsprobleme beispielsweise bei der Auslegung von Hitzeschutzsegmenten für Wiedereintrittskörper signifikante Verbesserungen bewirken (Nakamura et al. 2014). Auch Größen wie Temperatur, Druck oder Massenstrom im Inneren eines Triebwerks können so mithilfe äußerer Temperatursensoren bestimmt werden (Cuadrado et al. 2020). Weitere Untersuchungen beschäftigen sich mit dem Wärmeeintrag in die Verdichterscheiben einer Gasturbine (Cao et al. 2022). Auch die Kühlung von Turbinenschaufeln und der innere und äußere Wärmeeintrag sind Gegenstand einiger Untersuchungen (Frąckowiak et al. 2006; Frąckowiak et al. 2011; Wróblewska et al. 2015).

Wie bereits in Kap. 2.4 gezeigt, sind inverse Probleme in der Regel instabil und neigen zu Overfitting. Um dies zu verhindern, gibt es unterschiedliche Strategien. Im Folgenden soll eine Übersicht der verschiedenen verwendeten Methoden für die Invertierung und die Vermeidung von Instabilitäten für inverse Wärmeübergangsprobleme gegeben werden.

3.2.1 Deterministische Ansätze

Frühe Ansätze zur Lösung inverser Wärmeübergangsprobleme beinhalteten häufig stark vereinfachte Modelle, beispielsweise durch die Annahme einheitlicher Temperaturverteilung (*lumped capacity*) (Burggraf 1964). Andere Ansätze basierten auf der schrittweisen

Berechnung eines transienten Wärmestroms (Stolz 1960), was ebenfalls nur eine Annährung an das reale Problem darstellt. Die Anwendungsgebiete beschränkten sich dabei auf einfache Formen.

Eine häufig verwendete Methode ist die *Truncated Singular Value Decomposition* (TSVD) (Mueller und Siltanen 2012). Die Instabilität der inversen Lösung resultiert aus großen Unterschieden in der Größenordnung der Singulärwerte. Indem sehr kleine Werte zu null gesetzt werden, können diese Instabilitäten mittels TSVD gedämpft werden. Diese wird beispielsweise von Frąckowiak et al. (2006) zur Lösung eines zweidimensionalen inversen Wärmeübergangsproblems einer Gasturbinenschaufel verwendet. Dabei werden konstante Materialeigenschaften vorausgesetzt sowie Wärmestrom- und Temperaturverteilung an der Außenseite der Schaufel. Die Randbedingungen in den Kühlkanälen in Form von Temperaturen und Wärmeübergangskoeffizienten werden linearisiert. Das resultierende lineare Gleichungssystem kann dann mittels TSVD invertiert werden und eine regularisierte Lösung gefunden werden. In einer späteren Arbeit des Autors (Frąckowiak et al. 2011) wird diese auf eine weitere exemplarische Schaufelgeometrie angewendet. Die runden Kühlkanäle werden hierbei als fiktive Wärmesenken angenommen. Nakamura et al. (2014) setzt TSVD in Kombination mit *Sequential Function Specification* für die Berechnung thermischer Lasten einer Wiedereintrittskapsel ein. Diese Methode wird eingesetzt, um Oszillationen bzw. Instabilitäten in der Lösung transienter Problemen zu vermeiden (Woodbury et al. 2023). Dabei werden zur Berechnung des Wärmestroms zum jeweils aktuellen Zeitpunkt vorauseilend auch einige zukünftige Zeitschritte in die Lösung mit einbezogen. Generell sind transiente Probleme vorteilhaft für die Betrachtung des inversen Wärmeübergangs. Durch Berücksichtigung des Aufheiz- bzw. Abkühlverhaltens eines Körpers im Gegensatz zu einem stationären Zustand sind zusätzliche Informationen verfügbar, da der zeitliche Verlauf abhängig von Materialparametern und der aufgeprägten Last ist.

Häufig ist eine direkte Invertierung des Problems nicht oder nur mit extremem Rechenaufwand möglich. In diesem Fall können iterative Methoden verwendet werden, wobei anstatt des inversen Problems das zugehörige direkte gelöst wird. Dazu wird das Optimierungsproblem (2.42) gelöst, welches in Kapitel 2.4 vorgestellt wurde. Dies kann insbesondere bei nicht linearen Problemen angewendet werden. Für die Lösung dieses Optimierungsproblems können verschiedene Methoden eingesetzt werden. Eine beliebte Methode ist das Levenberg-Marquardt Verfahren (Özisk und Orlande 2021), ein Optimierungsverfahren, welches eine Erweiterung des Gauß-Newton Algorithmus darstellt.

Es handelt sich dabei um eine *Trust Region* Methode, bei der das Problem lokal linearisiert wird. Hierfür ist jedoch die Berechnung der Jacobi-Matrix notwendig. Taler (2007) verwendet diese sowie TSVD zur Bestimmung lokaler Wärmeübergangskoeffizienten an einfachen Hohlzylinder-Geometrien. Eine abgewandelte Variante des Verfahrens wird von Cuadrado et al. (2020) angewendet, um aus Messungen der Gehäusetemperatur einer Gasturbine auf den Zustand im Strömungspfad zu schließen.

Die Tikhonov-Regularisierung, wie sie in Abschnitt 2.4.2 vorgestellt wurde, wird beispielsweise von Wróblewska et al. (2015) angewendet. Die Autorin wendet die Regularisierung auf das inverse Wärmeübergangsproblem an der Geometrie eines elliptischen Rings an.

Eine weitere Möglichkeit, die bei iterativen Ansätzen Verwendung findet und beispielsweise von Alifanov und Nenarokomov (1999) vorgestellt wird, ist die Dämpfung der Lösung durch „viskose“ Eigenschaften des Optimierungsalgorithmus. Dies geschieht durch Einführen eines Abbruchkriteriums, welches die Optimierung dann beendet, wenn das Residuum der (bekannten) Messunsicherheit entspricht. Dadurch wird ein *Overfitting* verhindert.

3.2.2 Bayesian Framework

In den letzten Jahren werden immer wieder Methoden zur Lösung inverser Wärmeübergangsprobleme angewendet, welche auf dem Theorem von Bayes basieren (2.44). In der Regel werden bei den vorgestellten Problemen nur eine kleine Anzahl von bis zu fünf Parametern gesucht. Das Auswählen von Stichproben aus der *Posterior* Verteilung kann auf unterschiedliche Weise erfolgen. Lauret et al. (2006) führen dies an einem Gitter gleichverteilter Punkte durch, anhand dessen das Minimum bestimmt wird. Besonders verbreitet ist die Verwendung eines Markov Chain Monte Carlo (MCMC) Algorithmus, insbesondere des Metropolis-Hastings Algorithmus (Raj et al. 2015; Iglesias et al. 2017; Kumar und Nagarajan 2018; Rodler et al. 2019). Dabei handelt es sich um eine zufällige Suche in der Umgebung eines Punktes. Wird dabei ein „besserer“ Punkt gefunden, so wird dieser als nächster Schritt akzeptiert und die Suche ab sofort von diesem Punkt fortgeführt. Das Besondere am Metropolis-Hastings Algorithmus ist dabei, dass teilweise auch schlechtere Punkte akzeptiert werden. Auf diese Weise wird verhindert, dass der Algorithmus in einem lokalen Minimum stecken bleibt.

Neben dieser zufälligen Erkundung des *Posterior* gibt es die Möglichkeit der Bildung eines Ersatzmodells (Leoni und Amon 2000). Dafür wird anhand einiger Stützstellen,

die beispielsweise mittels *latin hypercubes* ausgewählt wurden, ein Ersatzmodell erstellt und schrittweise aktualisiert. Leoni und Amon (2000) verwenden hierfür Kriging, was der in Abschnitt 2.4.3.3 vorgestellten Bayesian Optimization ähnelt.

Allgemeine Beispiele und Hinweise zur Anwendung Bayes'scher Methoden für inverse Wärmeübergangsprobleme finden sich bei Wang und Zabaras (2004) und Kaipio und Fox (2011).

3.3 Vorgängerarbeiten und Einordnung der vorliegenden Arbeit

Vorherige Arbeiten am Heißgaskanal des Instituts für Strahlantriebe und Turbomaschinen der RWTH Aachen beschäftigten sich mit höherwertigen Modellierungen (Wörz 2018) oder korrelationsbasierten Auslegungstools (Findeisen 2019) und nutzten experimentelle Daten hauptsächlich zur Validierung.

Die vorliegende Arbeit stellt eine Erweiterung der Analysemöglichkeiten für die Messdaten dar. Durch Betrachtung der Messdaten sowie weiterer Randbedingungen ist es möglich, ohne eine direkte Berechnung der Strömung von den Temperaturmessungen auf die vorliegende Wärmestrombelastung zu schließen. Diese wird in Form einer zweidimensionalen Verteilung im Mittelschnitt der Schaufel ermittelt.

Wie in den vorigen Abschnitten gezeigt wurde, existieren in der Literatur einige Beispiele für die Lösung solcher inversen Wärmeübergangsprobleme. Jedoch werden hier meist einfache Geometrien betrachtet. Zudem ist die Anzahl unbekannter Parameter eher im einstelligen Bereich. Um eine aussagekräftige Wärmestromverteilung zu erhalten, werden in der vorliegenden Arbeit die Temperaturdaten von mehreren Messstellen im Mittelschnitt der jeweiligen Schaufeln verwendet. Die Anzahl der Messstellen und damit der freien Parameter liegt je nach Konfiguration zwischen 23 und 30. Ähnlich wie einige der zuvor vorgestellten Arbeiten wird auch in der vorliegenden Arbeit ein iterativer Ansatz für die Lösung des als Optimierung formulierten Problems verwendet. Aufgrund der hohen Dimensionalität in Kombination mit der Rechenzeit, ist die Durchführung von mehreren 10.000enden Rechnungen, wie sie zur Durchführung von Markov Chain Monte Carlo-Methoden notwendig wären, nicht wirtschaftlich durchführbar. Es werden daher unterschiedliche Optimierungsmethoden verwendet und deren Ergebnisse sowie Rechenaufwände verglichen. Gemeinsam ist allen die Regularisierung, welche aus

den physikalischen Eigenschaften der Problemstellung abgeleitet ist. Nach Kenntnis der Autorin wurde zum Zeitpunkt der Erstellung dieser Arbeit noch keine iterative, gradientenfreie Berechnung des inversen Wärmeübergangs an Turbinenschaufeln mit komplexer Innengeometrie durchgeführt, welche sich durch die Anzahl der freien Parameter sowie die individuell angepasste Regularisierungsstrategie auszeichnet.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung einer Berechnungsmethode zur Lösung des inversen Wärmeübergangsproblems an einer zylindrischen, quasi-zweidimensionalen Schaufelgeometrie. Dabei steht eine einfach anzuwendende Methodik im Vordergrund, um diese schnell auf andere Geometrien und Randbedingungen adaptieren zu können. In erster Linie werden damit die Analysemöglichkeiten des Heißgaskanals erweitert. Neben der numerischen Berechnung des Wärmeübergangs wird somit eine zusätzliche Methode zur Bestimmung von Wärmeströmen zur Verfügung gestellt. Aufgrund des unterschiedlichen Ansatzes können Numerik und die inverse Berechnung verschiedene Aspekte des Wärmeübergangs zeigen und somit komplementär verwendet werden. Die vorgestellte Methode ist besonders für Messaufgaben vorteilhaft, bei denen aufgrund der vorherrschenden Bedingungen eine direkte Bestimmung des Wärmestroms nicht möglich ist. Dies ist beispielsweise am Heißgaskanal aufgrund der hohen Temperaturen und der fehlenden optischen Zugänge der Fall.

4 Methoden

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Bestimmung der äußeren Wärmestromverteilung im Mittelschnitt einer gekühlten Turbinenschaufel aus experimentell ermittelten Materialtemperaturen. Um dieses inverse Wärmeübergangsproblem zu lösen wird eine iterative Methode entwickelt. Deren grundlegender Aufbau wird in Abschnitt 4.1 erläutert. Da die verwendeten Messdaten des Heißgaskanals sich hauptsächlich durch unterschiedliche Temperaturniveaus unterscheiden, werden zusätzlich Messdaten von Turner (1971) verwendet. Diese zeichnen sich durch die Variation des Turbulenzgrades aus. So kann die vorgestellte Methode für qualitativ verschiedene Wärmestromverläufe getestet werden.

Als Referenzgrößen und Beurteilungskriterium dienen die im Experiment bestimmten Materialtemperaturen sowie die Messunsicherheit. Ein der Literatur entnommener Testfall wurde bereits in Abschnitt 3.1.2 beschrieben. Die vorgestellte Methode soll zur Auswertung der am Heißgaskanal gemessenen Daten verwendet werden. Der Prüfstandsaufbau sowie die Messstellenverteilung und eine Fehleranalyse werden in Kap. 4.3 beschrieben. Die Grundlagen der verwendeten Optimierungs- und Regularisierungmethoden wurden bereits in Abschnitt 2.4.3 und Abschnitt 2.4.2 erläurtert. In Abschnitt 4.2 wird daher nur noch auf die Implementierung und die notwendigen Anpassungen eingegangen. Die Berechnung des Temperaturfeldes wird mittels einer in Ansys aufgesetzten FEM Rechnung durchgeführt. Die Spezifikationen dieser Methode werden in Abschnitt 4.4 ausgeführt. Schließlich werden die mittels der vorgestellten Methode bestimmten Wärmestromverteilungen mit entsprechenden Referenzen verglichen. Für den Testcase nach Turner (1971) sind dies aus den Literaturdaten ermittelte Wärmestromverteilungen. Die Messdaten des Heißgaskanals wurden in der Vergangenheit bereits zur Validierung von CHT-Rechnungen verwendet (Wörz 2018). Die aus diesen Rechnungen resultierenden Wärmeströme dienen als Referenz für die Messdaten des Heißgaskanals. Das verwendete numerische Setup wird in Abschnitt 4.5 kurz beschrieben.

4.1 Aufbau der Methode

Das Ziel der vorgestellten Methode ist, ausgehend von einer gemessenen Temperaturverteilung, die verursachende Wärmestromverteilung auf der Heißgasseite der Schaufel zu finden. Aufgrund der Komplexität des Problems wird keine mathematische Invertierung durchgeführt, sondern eine iterative Methode entwickelt. Dazu sollen die berechneten Materialtemperaturen möglichst nah an den experimentell ermittelten Temperaturen liegen. Es handelt sich also grundsätzlich um ein Optimierungsproblem. Auf die verwendeten Optimierungsmethoden und die notwendigen Erweiterungen in Form einer Regularisierung wird in Kap. 4.2 eingegangen.

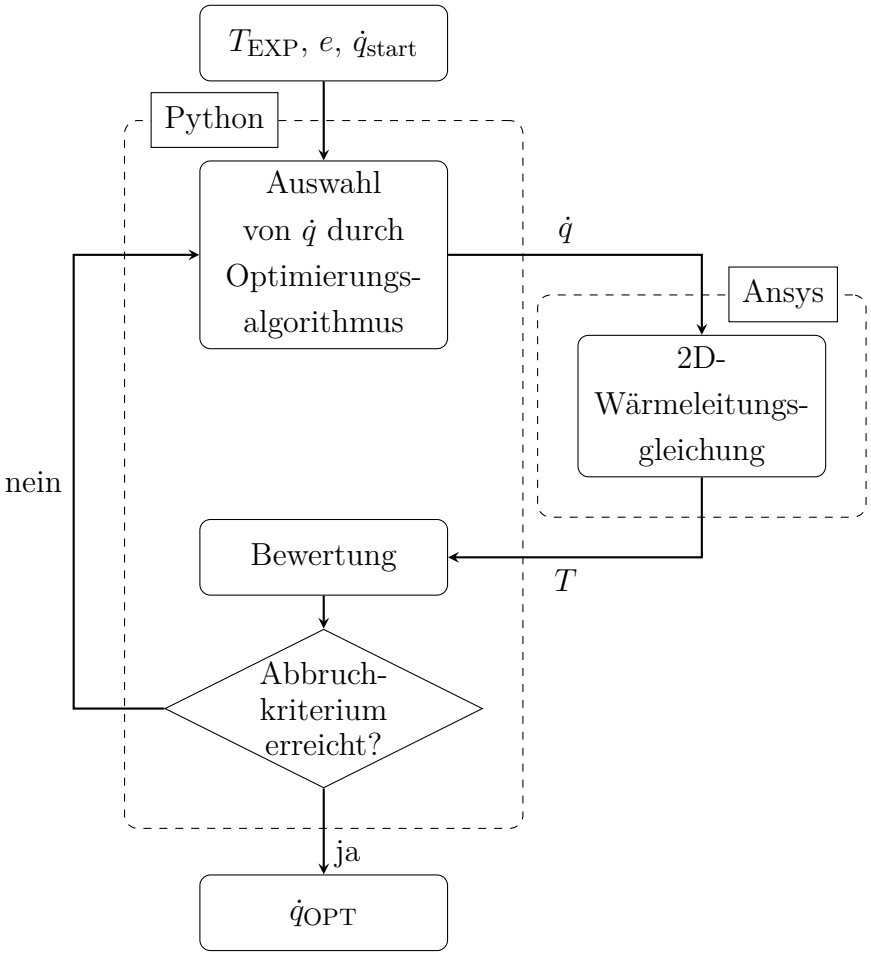


Abb. 4.1: Ablauf der Methode zur iterativen Berechnung des Wärmestroms

Das grundlegende Konzept der Methode ist in Abb. 4.1 veranschaulicht. Der Großteil der Methode ist in Python implementiert, lediglich die Berechnung des Temperaturfeldes durch Lösung der zweidimensionalen Wärmeleitungsgleichung wird mittels Ansys durchgeführt. Die experimentell ermittelte Temperaturverteilung T_{EXP} dient als Bewertungsgröße und wird zu Beginn der Berechnung vorgegeben. Im Rahmen der Arbeit werden Daten von zwei verschiedenen Prüfständen verwendet. Je nach Schaufelkonfiguration und Betriebspunkt besteht die Temperaturverteilung aus 23 bis 30 Werten. Die Position der Temperaturmessstellen ist in den Abschnitten 4.4 und 3.1.2 für die beiden Schaufelkonfigurationen dargestellt. Die Messunsicherheit e für die jeweilige Schaufelkonfiguration wird ebenfalls zu Beginn vorgegeben und zur Bewertung verwendet. Diese wurde im Rahmen der Arbeit für die Schaufelkonfiguration des Heißgaskanals bestimmt, was im Detail in Abschnitt 4.3.4 beschrieben ist. Für die zusätzlich verwendeten Literaturdaten sei auf Abschnitt 3.1.2 verwiesen.

Je nach verwendeter Optimierungsmethode muss ein Startwert $\dot{q}_{\mathrm{start}}$ für die Wärmestromverteilung vorgegeben werden. Dieser besitzt dieselbe Dimensionalität wie T_{EXP} und $\dot{q}$, wird aber als über der Lauflänge konstant angenommen. Außerdem werden die oberen und unteren Grenzen für den jeweiligen Optimierer festgelegt. Beides wird in einem ersten Schritt iterativ bestimmt. Dazu wird ein konstanter Wärmestrom über der gesamten Schaufellauflänge angenommen und eine Optimierung durchgeführt. Der so ermittelte Wert, welcher das Niveau der Wärmestromverteilung darstellt, dient als Startwert. Der obere Grenzwert wird durch ein Vielfaches des Startwerts festgelegt. Für die untere Grenze wird ein niedriger Wert größer 0 vorgegeben, um negative Wärmeströme zu verhindern. Dies ist aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht in Abb. 4.1 abgebildet.

Für die eigentliche Optimierung wird zunächst in Python die jeweils nächste auszuwertende Wärmestromverteilung festgelegt. Dies findet innerhalb der jeweiligen Optimierungsmethode statt. Die ausgewählte Wärmestromverteilung wird an Ansys übergeben, wo die Temperaturverteilung berechnet wird. Die berechnete Temperatur wird an den Koordinaten der Thermoelemente ausgewertet. Diese resultierende Temperaturverteilung T wird anschließend wieder an Python übergeben. Die Kopplung zwischen beiden erfolgt über separate Dateien, in denen die Randbedingungen bzw. Ergebnisse der Temperaturberechnung zwischengespeichert werden. Auf Basis der Differenz zwischen berechneter Temperatur und den experimentellen Daten wird eine Bewertung vorgenommen. Zusätzlich wird die Struktur des Wärmestromvektors im Rahmen der Regularisierung in die Bewertung mit einbezogen. Hierauf wird in Abschnitt 4.2.1 eingegangen.

Dieser iterative Prozess wird wiederholt, bis das Konvergenzkriterium des verwendeten Algorithmus erfüllt ist. Dieses ist ebenfalls abhängig von der Methode und kann eine minimale Änderung sein oder eine maximale Anzahl an Iterationen.

Für die Wärmestromverteilung, welche dem Optimierungsalgorithmus als Eingangsgröße übergeben wird, wird außerdem eine einfache Skalierung durchgeführt. Der Lösungsvektor wird für den Algorithmus auf die vorgegebenen Grenzen zu einem Vektor von [0,1] skaliert. Für die Berechnung der Temperaturverteilung muss dies jedoch zurückgerechnet werden, bevor die Werte an Ansys übergeben werden.

4.2 Methoden zur Optimierung und Regularisierung

Wie bereits in Kap. 4.1 beschrieben, wird mit der vorgestellten Methode die Temperaturdifferenz zwischen experimentell bestimmter und innerhalb der FEM berechneter Temperatur in Abhängigkeit der Wärmestromverteilung minimiert. Wie später noch gezeigt wird, führt eine einfache Optimierung der Temperaturdifferenz jedoch zu unphysikalischen Lösungen für den Wärmestrom. Dies ist aufgrund der Eigenheiten inverser Probleme der Fall, welche in Kap. 3.2 beschrieben wurden. Die Stabilität des direkten Problems $T = f(\dot{q})$ sowie die nicht vernachlässigbare Messunsicherheit führt hier zu einer Instabilität im inversen Problem und verursacht damit ein *Overfitting* des berechneten Wärmestroms. Um dies zu verhindern, wird ein Strafterm (auch Regularisierungsterm) zum Optimierungsproblem hinzugefügt. Die Notwendigkeit wurde bereits in Abschnitt 2.4.2 beschrieben. Das erweiterte Optimierungsproblem in Gleichung (2.46) lautet für den vorliegenden Fall

$$\dot{q}_{\mathrm{OPT}} = \underset{\dot{q}\in\mathbb{Q}}{\arg\min} \left\{ R(T) + rG(\dot{q}) \right\}, \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^{+}, \tag{4.1}$$

wobei $\mathbb{Q}$ die Menge der möglichen Wärmestromverläufe repräsentiert. Das Residuum der Optimierung entspricht hier

$$R(T) = \left\| T_{\mathrm{EXP}} - T(\dot{q}) \right\|^2 . \tag{4.2}$$

Darin ist $G(\dot{q})$ der Strafterm, welcher in der Bayesianischen Betrachtung als *Prior* angesehen werden kann, da hierin ein Vorwissen über die gesuchte Lösung enthalten ist. Hier kann beispielsweise eine möglichst glatte Lösung oder auch ein dünn besetzter Lösungsvektor bevorzugt werden, wie bereits in Abschnitt 2.4.2 beschrieben wurde. Keine dieser

Varianten ist jedoch für die vorliegende Arbeit geeignet, da der äußere Wärmestrom an einer Turbinenschaufel lokal sehr unterschiedliche Änderungsraten besitzt. Eine reine, für den gesamten Lösungsvektor konstante Glättung würde je nach Ausprägung entweder den Anstieg des Wärmestrom an der Vorder- und Hinterkante stark unterdrücken, oder unrealistisch hohe Schwankungen zulassen. Es ist daher notwendig, eine individuelle Regularisierung zu erarbeiten.

4.2.1 Entwicklung der Regularisierungsfunktion

Für die Wahl einer geeigneten Regularisierungsfunktion sind Informationen über die Struktur bzw. den Verlauf des äußeren Wärmeübergangs entlang einer Turbinenschaufel notwendig. Zu diesem Zweck werden verschiedene bekannte Verteilungen des Wärmestroms an unterschiedlichen Turbinenschaufeln verglichen.

Da am Heißgaskanal die Wärmeströme nicht direkt bestimmt werden können, werden hier die Ergebnisse aus CHT-Rechnungen herangezogen. Die CHT-Rechnungen wurden mit Hilfe des in Abschnitt 4.5 beschriebenen Setups von Wörz (2018) durchgeführt. Der berechnete äußere Wärmestrom wird an den diskreten Punkten entlang der Oberfläche ausgewählt, die für das Aufprägen der Randbedingung in der FEM verwendet werden. Als weitere Referenz werden die Wärmeströme der Messungen von Turner (1971) verwendet. In der Veröffentlichung liegen experimentell ermittelte Wandtemperaturen sowie numerisch bestimmte Wärmeübergangskoeffizienten vor. Zusammen mit der Heißgastemperatur am Eintritt können die äußeren Wärmeströme nach (2.12) berechnet werden. Zur besseren Vergleichbarkeit werden die Wärmestromverläufe auf den Maximalwert bezogen und so zu $q^* = \dot{q}/q_{\max}$ normiert. Die normierten Wärmestromverläufe für die verwendeten Betriebspunkte beider Datensätze sind in Abb. 4.2 dargestellt. Die Daten sind über der normierten Lauflänge $s^* = s/s_{\max}$ aufgetragen, sodass unterschiedliche Schaufelgeometrien übereinander abgebildet werden können.

Die Daten des Heißgaskanals fallen durch diese Normierung nahezu zusammen. Sie unterscheiden sich lediglich durch verschiedene Heißgas- und Kühllufttemperaturen sowie das daraus resultierende Wärmestromniveau. Die Messungen wurden bei gleichen Reynoldszahlen und gleichem Turbulenzniveau durchgeführt, sodass der Verlauf des Wärmestroms entlang der Schaufel qualitativ gleich ist. Turner (1971) führte Messungen bei einem deutlich niedrigeren, aber über die Messreihen nahezu gleichen Temperaturniveau bei etwa 363 K durch. Auch die Reynoldszahl variiert nicht. Durch Verwendung verschiedener Turbulenzgitter erzeugt Turner (1971) jedoch unterschiedliche Turbulenzgrade in der

Strömung. Wie in Abschnitt 2.2 beschrieben, wirkt sich dies auf den Wärmeübergang aus. Somit sind auch nach der Normierung Unterschiede erkennbar. Dies ist bei den Daten von Turner (1971) mit einem Turbulenzgrad von Tu = 0.45 bei etwa 70 % Lauflänge zu sehen. Der Wärmestrom steigt hier sprunghaft an, was einen laminar-turbulenten Umschlag an dieser Stelle vermuten lässt. Im Gegensatz hierzu ist der Wärmestrom der Messung mit Tu = 5.9 bereits stromab der Vorderkante auf einem insgesamt höheren Niveau. Hier liegt vermutlich eine vollturbulente Strömung vor. Bei den Heißgaskanal-Daten ist auf der Druckseite unmittelbar stromab der Vorderkante eine lokales Absinken des Wärmestroms zu sehen. Dieses ist auf eine Ablösung mit anschließendem Wiederanlegen der Strömung zurückzuführen. Innerhalb der Ablöseblase ist der Wärmestrom lokal stark vermindert.

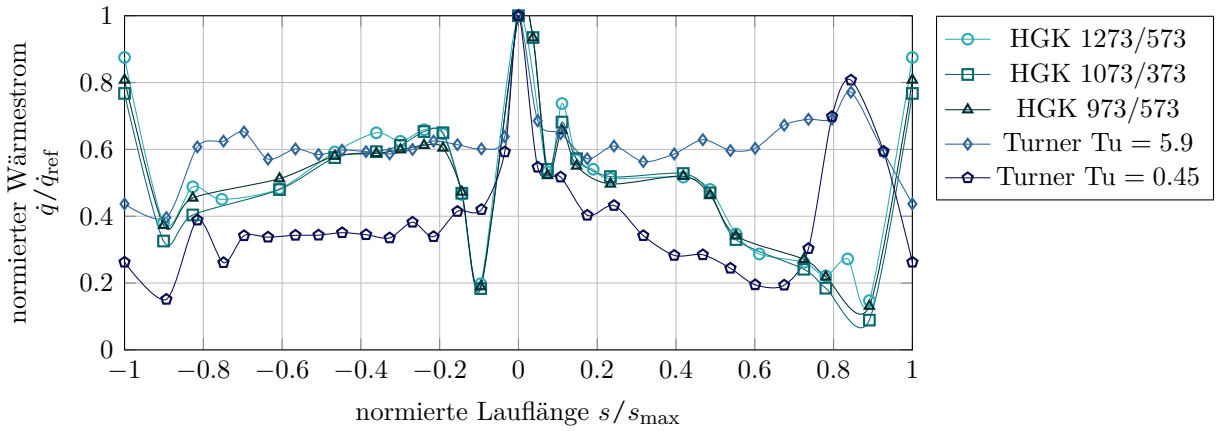


Abb. 4.2: Vergleich der normierten Wärmeströme für verschiedene Randbedingungen. Heißgaskanal-Betriebspunkte: CHT (Wörz 2018; Wörz et al. 2018b). Turner Betriebspunkte: berechnet aus Turner (1971)

Bei allen verwendeten Wärmestromverläufen fällt auf, dass jeweils im Bereich um den Staupunkt und um die Hinterkante höhere Gradienten vorhanden sind, als entlang der Saug- und Druckseiten. An der Vorderkante wird die ankommende Strömung aufgestaut, sodass die Totaltemperatur des Fluids zum größten Teil in statische Temperatur umgewandelt wird. Dies führt zu einem erhöhten Wärmestrom.

Zur Verbesserung der Vergleichbarkeit wird im nächsten Schritt die absolute Änderungsrate des Wärmestroms pro Lauflänge $|dq^*/ds^*|$ betrachtet. Diese ist in Abb. 4.3 für die verschiedenen Messungen jeweils über der normierten Lauflänge dargestellt. Um die

Streuung der Werte zu veranschaulichen, wurde aus den Änderungsraten der einzelnen Messreihen ein mittlerer Verlauf berechnet. Dieser mittlere Gradient $|dq^*/ds^*|_m$ ist ebenfalls in Abb. 4.3 dargestellt. Betrachtet man diese absoluten Änderungsraten des Wärmestroms pro Lauflänge $|dq^*/ds^*|$ für die unterschiedlichen Betriebspunkte, ist eine größere Übereinstimmung zwischen den verschiedenen Geometrien und Turbulenzgraden zu beobachten. Obwohl es Ausreißer gibt, ist bei allen Betriebspunkten ein ähnli-

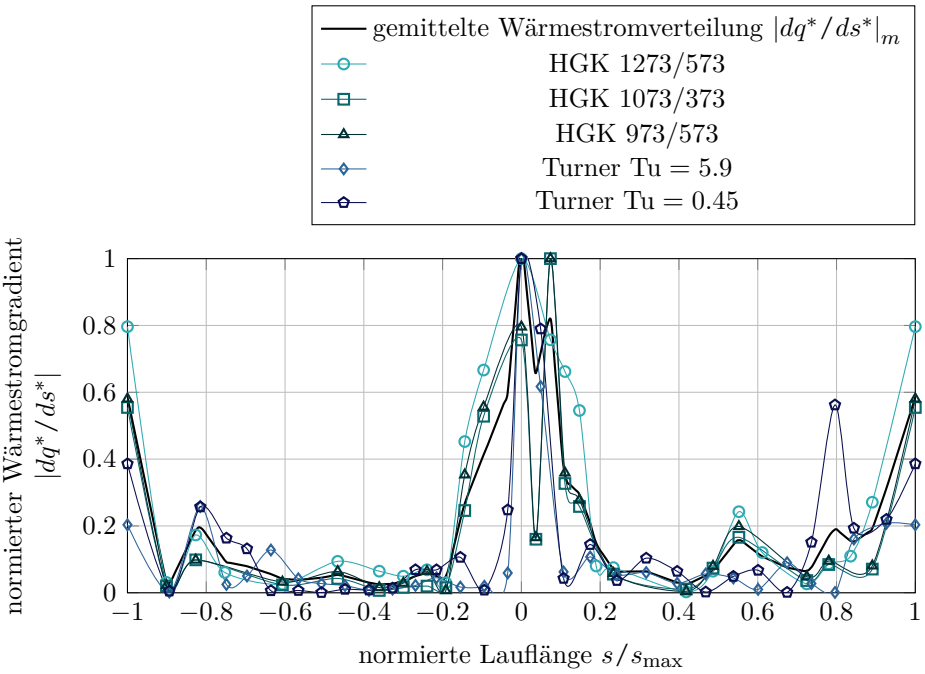


Abb. 4.3: Normierte absolute Wärmestromgradienten nach Wörz et al. (2018a) und Turner (1971)

cher Trend zu erkennen. Die Wärmestromänderung verhält sich für die verschiedenen Versuche und Prüfstände relativ ähnlich. Jeweils im mittleren Bereich der Druck- und Saugseiten fallen die Änderungsraten des Wärmestroms bei allen ausgewerteten Verläufen klein aus. In den Bereichen bis ±25 % der Lauflänge um den Staupunkt und jeweils ab ±75 % Lauflänge in der Nähe der Hinterkante sind deutlich größere Änderungen zu beobachten, auch die Streuung ist hier größer. Trotz dieser vorhandenen Unterschiede wird der generelle Trend durch die Mittelung gut abgebildet. Diese Erkenntnis wird im Folgenden in der Regularisierungsfunktion berücksichtigt. Die gemittelte Änderungsrate des Wärmestroms pro Lauflänge $|dq^*/ds^*|_m$ wird als Vergleichsgröße herangezogen,

sodass sich als Strafterm

$$G(\dot{q}) = \left\| \frac{dq^*}{ds^*} - \left(\frac{dq^*}{ds^*} \right)_m \right\|^2 \tag{4.3}$$

ergibt. Der Einfluss dieser Regularisierung wird in Kap. 5.4 noch gezeigt, ebenso wie die Auswahl des Regularisierungsparameters r anhand von *Morozov's Discrepancy Principle* sowie einer Veranschaulichung anhand der *L-Curve*.

4.2.2 Verwendete Optimierungsalgorithmen

Das beschriebene Problem weist einige Besonderheiten auf, die bei der Wahl des Optimierungsalgorithmus beachtet werden müssen. Zum einen können Gradienten nicht direkt berechnet werden. Es handelt sich quasi um eine *Blackbox* Funktion, welche aus Python heraus aufgerufen wird. Eine Berechnung der Gradienten durch Linearisierung um den aktuellen Lösungspunkt ist möglich, erhöht jedoch aufgrund der hohen Dimensionalität des Problems (zwischen 23 und 31 freien Variablen) die Anzahl der Funktionsaufrufe erheblich. Dies ist aufgrund der vergleichsweise hohen Auswertezeit der Rechnung von mehreren Sekunden nicht wünschenswert. Diese Dauer scheint im Vergleich zur Rechenzeit von CHT-Rechnungen im Bereich von Stunden oder Tagen sehr wenig, wird jedoch relevant bei einer hohen Anzahl von Funktionsaufrufen in der Größenordnung von mehreren zehntausend, welche für die iterative Lösung des Problems benötigt werden. Außerdem ist aufgrund der Temperaturabhängigkeit der Stoffgrößen keine Linearität gegeben. Dies betrifft insbesondere die Berechnungen der Heißgaskanal-Betriebspunkte.

Die Optimierung des vorgestellten Problems wird in Python mit Methoden unterschiedlicher Ansätze durchgeführt. Dabei wird jeweils eine deterministische, eine stochastische und eine Ersatzmodell-Methode verwendet.

Als deterministische Methode wird der modifizierte Algorithmus nach Powell (1964) und Press (1996) verwendet. Die Methode ist in Python implementiert und lässt sich aus dem SciPy.Optimize Modul mit Hilfe der *minimize* Funktion verwenden. Dieser zeichnet sich dadurch aus, dass keine Gradienten bekannt sein oder berechnet werden müssen, und Grenzwerte für die Eingangsvariablen vergeben werden können. Der Algorithmus wurde in Abschnitt 2.4.3.1 vorgestellt.

Außerdem wird als stochastische Methode *Simulated Annealing* verwendet. Zur Verbesserung der Genauigkeit wird hierfür ein Algorithmus verwendet, der im Bereich des gefundenen Optimums zusätzlich eine lokale Suche durchführt. Diese ist in Python ebenfalls im SciPy.Optimize Modul als *dual_annealing* implementiert.

Als weiterer Optimierungsalgorithmus wird Bayesian Optimization eingesetzt. Dazu wird die in Scikit-Optimize als *gp_minimize* implementierte Funktion verwendet. Als Acquisition Function dient eine Kombination aus den in Abschnitt 2.4.3.3 vorgestellten Funktionen. Die in der Funktion implementierte Portfolio-Strategie wertet bei jedem Schritt die drei zur Verfügung stehenden Acquisition Functions (Lower Confidence Bound, Expected Improvement und Probability of Improvement) aus, und wählt einen der drei ermittelten Punkte. Diese Auswahl erfolgt stochastisch, aber unter Berücksichtigung iterativ aktualisierter Gewichtungen, die vorausgegangene Qualität der Funktionen berücksichtigen. Durch diese Strategie können die Vorzüge aller drei zur Verfügung stehenden Acquisition Functions genutzt werden.

4.3 Der Heißgas-Gitterprüfstand

Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Messdaten wurden am Heißgaskanal des IST erfasst. Es handelt sich dabei um eine Linearkaskade, welche die Untersuchung des konjugierten Wärmeübergangs an luftgekühlten Turbinenschaufeln unter realitätsnahen Bedingungen ermöglicht. Dabei werden in der Anströmung nominale mittlere Heißgastemperaturen T_{HG} von bis zu 1273 K und Kühllufttemperaturen T_{KL} von bis zu 573 K erreicht. Seit der Inbetriebnahme 1995 wurden verschiedene konvektiv und filmgekühlte Schaufelgeometrien untersucht. Der Aufbau des Prüfstands sowie die Konfiguration der Schaufeln sind im Abschlussbericht des Vorhabens Cooreflex 3.3.4a (Wörz et al. 2018a) beschrieben. Daher wird im Folgenden nur kurz auf Aufbau und Betrieb des Prüfstands eingegangen. Auch die Schaufelgeometrie sowie die Messwerterfassung werden kurz vorgestellt. Für detaillierte Informationen zum Aufbau und Betriebsverhalten des Prüfstands sei auf die Vorgängerarbeiten von Mick (2015) und Findeisen (2019) sowie auf den Abschlussbericht des Forschungsvorhabens (Wörz et al. 2018a) verwiesen.

4.3.1 Prüfstandsbeschreibung

Eine Übersicht des Prüfstands ist in Abbildung 4.4 dargestellt. Die Luftzufuhr wird über einen zweistufigen Radialverdichter realisiert. Dieser stellt einen Massenstrom von etwa 5 kg/s mit einer Temperatur von 318 K bereit. Der Gesamtmassenstrom wird mittels eines Venturirohrs in der Rohrstrecke stromauf der Messstrecke ermittelt. Anschließend wird die Strömung über zwei Krümmer und einen Difusor sowie einen Kompensator zum Ausgleich von Wärmedehnungen zur Brennkammer geleitet.

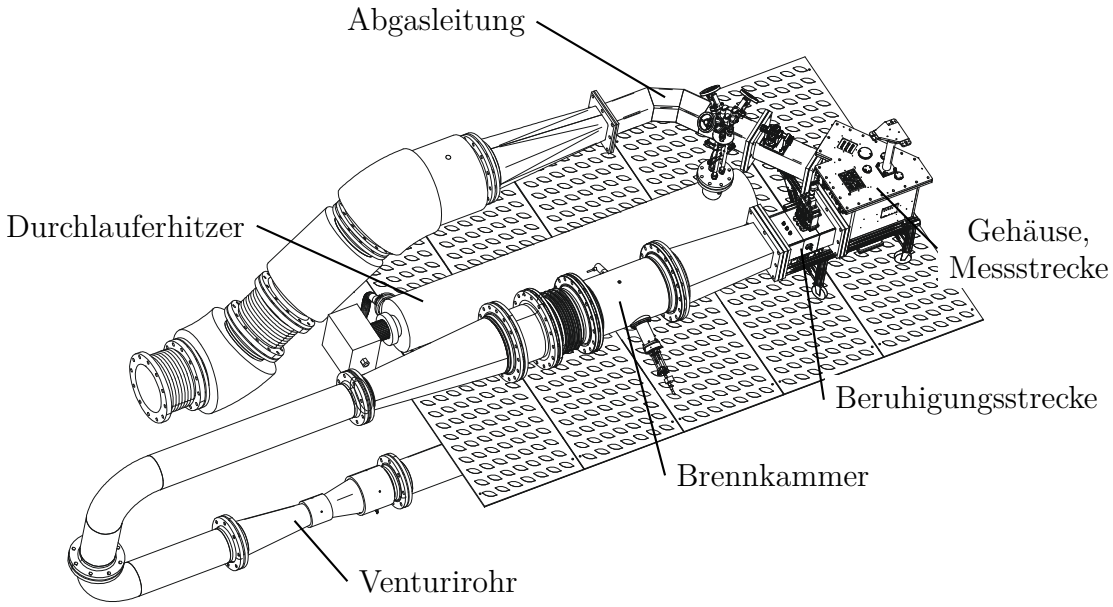


Abb. 4.4: Übersicht des Heißgas-Gitterprüfstands

Zur Aufheizung der Strömung auf Temperaturen von bis zu 1273 K wird ein Teil der Luft durch ein Flammrohr des Flugtriebwerks JT8D der Firma Pratt & Whitney geleitet (Derrar 2005). Die restliche Luft umströmt das Flammrohr und dient ab hier als Bypass-Strömung zur Kühlung des Flammrohrs und der inneren Struktur. Dieser zweischalige Aufbau des Prüfstandes ist in einer Schnittansicht in Abb. 4.5 dargestellt. Die Heißgasströmung wird nun durch ein Übergangsstück, zur Anpassung auf den rechteckigen Querschnitt der Kaskade, und eine Beruhigungsstrecke (BSH) geleitet. Diese dient der Ausmischung zu einer möglichst homogenen Strömung. In diesem Abschnitt befindet sich die Messebene zur Bestimmung der Eintrittsbedingungen in die Kaskade. Die Eintrittsprofile des Totaldrucks und der Totaltemperatur können mit drei wassergekühlten, traversierbaren Sonden bestimmt werden. Etwas stromauf dieser Ebene befinden sich drei Wanddruckbohrungen zur Bestimmung des statischen Drucks.

Das Schaufelgitter besteht aus fünf Schaufeln, wobei die mittleren drei als Messschaufeln dienen und mit beheizbarer Kühlluft von bis zu 573 K aus einem Durchlauferhitzer versorgt werden. Die beiden Randschaufeln dienen der Periodizität und werden mit unbeheizter Kühlluft durchströmt. Um eine plastische Verformung aufgrund der hohen Wärmedehnungen zu verhindern, sind die Schaufeln in einem einseitig schwimmend gelagerten Schaufelträger eingesetzt. Federpakete ermöglichen die Ausdehnung in alle drei Raumrichtungen (Findeisen 2019).

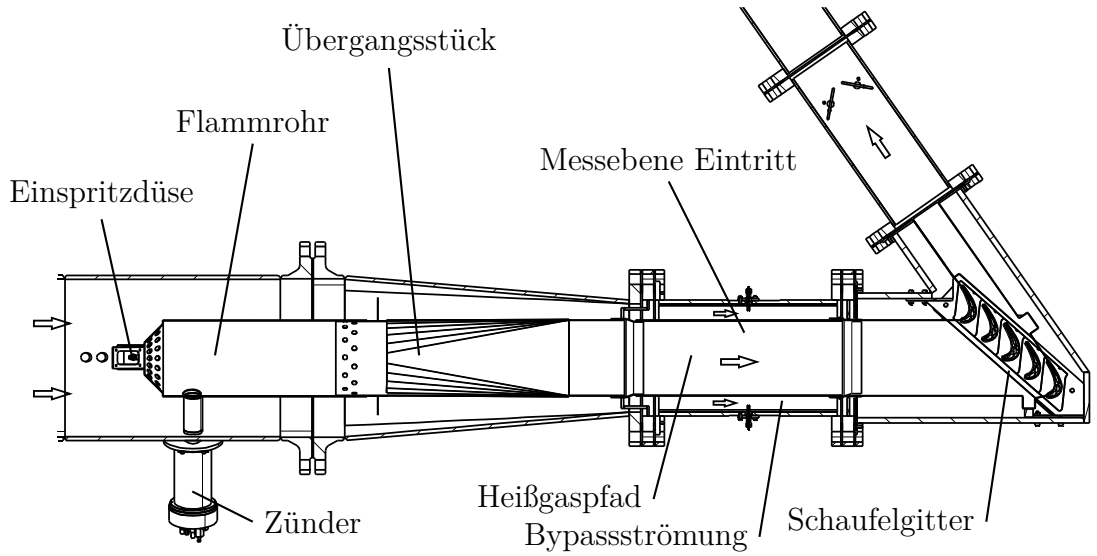


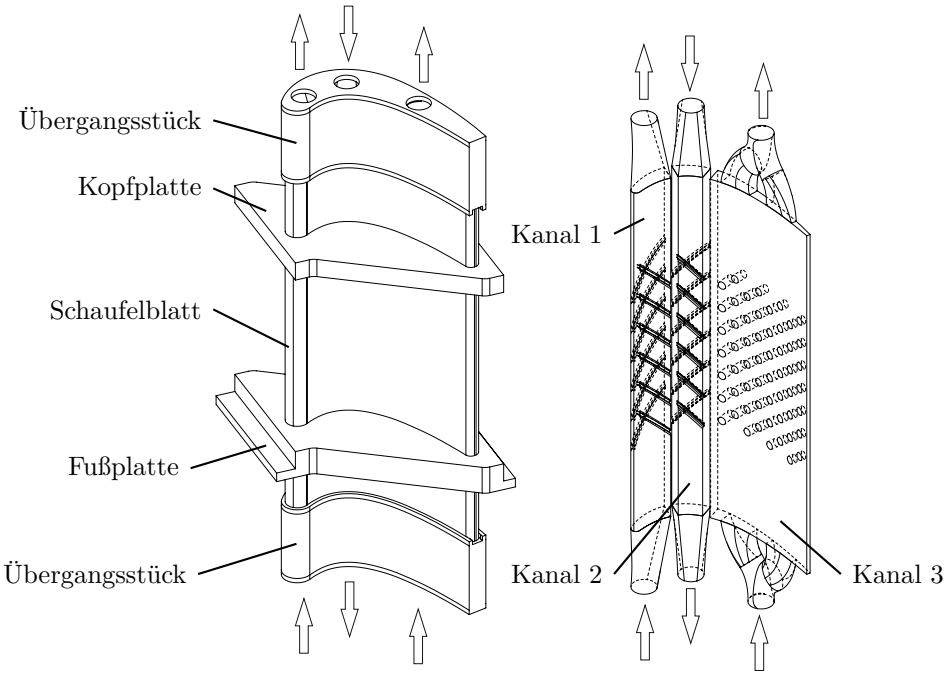
Abb. 4.5: Schnittansicht des Heißgas-Gitterprüfstands

Stromab der Kaskade findet die Ausmischung der Strömung statt, welche eine verstellbare Drossel passiert, bevor sie durch die Abgasleitungen zum Auslass auf dem Dach des Gebäudes geleitet wird.

4.3.2 Schaufelgeometrie

Bei dem verwendeten Prüfling handelt es sich um eine zylindrische Schaufel mit drei Kühlkanälen. Abb. 4.6a zeigt die äußere Geometrie der Schaufel. Das im Heißgaspfad stehende Schaufelblatt wird durch die Kopf- und Fußplatte zum Bypass hin abgedichtet. Eine Besonderheit der Schaufel ist die externe Umlenkung der Kühlluft, die eine Erfassung des Strömungszustandes vor und hinter jedem Kühlkanal ermöglicht. Die Anschlussrohre für Kühlluftzufuhr und Umlenkungen sind an den beiden Übergangsstücken angeschweißt.

In Abb. 4.6b ist die Geometrie der Kühlkonfiguration zu sehen. Die Schaufel verfügt über drei Kühlkanäle, von denen der Vorderkantenkanal sowie der mittlere Kanal mit 45° gekreuzten Rippenpaaren ausgestattet sind. Aufgrund der schmalen Geometrie des hinteren Kanals verfügt dieser über ein *Pin Fin* Array. Die Geometrieparameter der Turbulatoren sind in Tab. 4.1 aufgelistet.



(a) Außengeometrie **(b)** Innengeometrie

Abb. 4.6: Schaufelgeometrie und Kühlkonfiguration

4.3.3 Instrumentierung und Messdatenerfassung

Die Messung der Materialtemperaturen erfolgt mittels Thermoelementen vom Typ N, welche durch radiale Bohrungen in die Schaufelwand bis zum Materialkontakt eingeführt werden. Die mittlere Schaufel ist mit bis zu 60 Thermoelementen in drei Ebenen instrumentiert. Die Position dieser Ebenen ist in Abb. 4.7a an der mittleren Schaufel zu sehen. Dabei sind die Bohrungen für die mittlere Ebene abwechselnd von beiden Seiten eingebracht, sodass eine Ebene mit 30 Messstellen entsteht. Aufgrund von Fertigungsungenauigkeiten ergeben sich dadurch genau genommen zwei leicht versetzte Messebenen, was jedoch aufgrund der geringen radialen Temperaturgradienten vernachlässigbar ist. Die beiden Ebenen in der Nähe der Kopf- und Fußplatte besitzen jeweils die halbe Messstellendichte. Die Positionen der Thermoelemente in der mittleren Ebene sind in Abb. 4.7b dargestellt. Es stehen jedoch nicht an allen Messstellen auch Temperaturdaten zur Verfügung. Drei Bohrungen wurden während des Fertigungsprozesses verschlossen, an weiteren Positionen sind Thermoelemente während der Messungen ausgefallen. Je nach Betriebspunkt stehen 23 bzw. 26 Messstellen im Mittelschnitt zur Verfügung.

Für die Bestimmung der Thermoelement-Temperaturen wird eine externe Vergleichs-

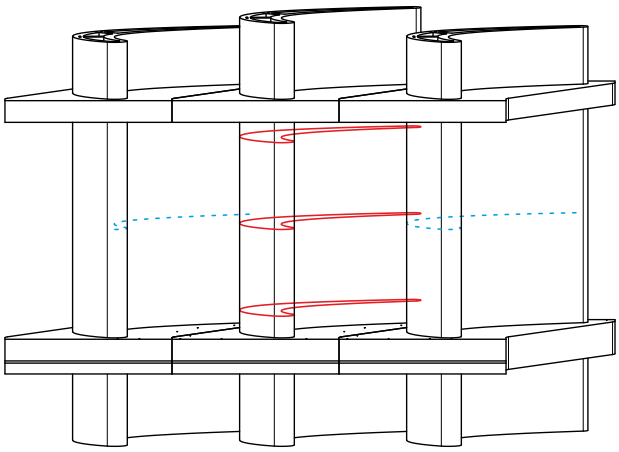
Abschnitt	Parameter	Wert
Kanal 1	hydraulischer Durchmesser	$d_h = 9.02\,\mathrm{mm}$
	Rippenkonfiguration	45° angestellt, gekreuzt, 6 Rippenpaare
	Rippenhöhe	$e/d_H = 0.15$
	Rippenabstand	$P/e = 10$
Kanal 2	hydraulischer Durchmesser	$d_h = 8.99\,\mathrm{mm}$
	Rippenkonfiguration	45° angestellt, gekreuzt, 6 Rippenpaare
	Rippenhöhe	$e/d_H = 0.15$
	Rippenabstand	$P/e = 10$
Kanal 3	hydraulischer Durchmesser	$d_h = 6.86\,\mathrm{mm}$
	Pin Fin-Anordnung	14 versetze Reihen, je 4 Pin Fins
	Querabstand der Zylinder	$S/D = 3.89$
	Längsabstand der Reihen	$X/D = 1.61$
	Höhe der Zylinder	$H/D = 0.45\,\mathrm{bis}\,2.05$

Tabelle 4.1: Geometrieparameter der Turbulatoren in den Kühlkanälen

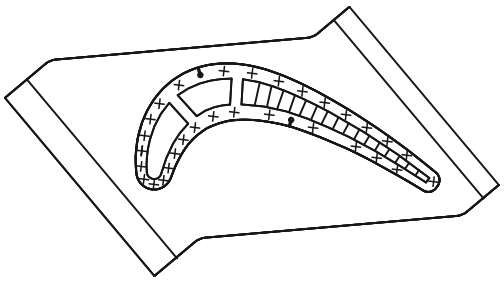
stelle verwendet. Die Verbindung zwischen den Messstellen und der Vergleichsstelle wird durch Thermoleitungen ausgeführt. Die Übergänge von Mantelrohr auf Thermoleitung sind im Gehäuse des Prüfstands umgesetzt. Außerdem sind alle Steckerkontakte bis zur Vergleichsstelle aus Thermomaterial ausgeführt, um eventuelle Fehler durch Temperaturdifferenzen über die Stecker zu vermeiden. Die Vergleichsstelle besteht aus einem isolierten Aluminium-Block sowie einem eingelassenen 4-Leiter Pt100 zur Bestimmung der Vergleichsstellentemperatur. Alle Temperaturfühler sind ab der Vergleichsstelle mittels Kupferleitungen an zwei Multiplexer vom Typ 34970 bzw. 34972A der Firma Keysight angeschlossen. Hier werden der Widerstand des Pt100 sowie die Thermospannungen gemessen.

Zur Berechnung der Messstellentemperatur muss zunächst die Temperatur der Vergleichsstelle berechnet werden. Diese wird nach DIN EN IEC 60751:2023-06 (2023) mit nachkalibrierten Koeffizienten bestimmt. Anschließend wird nach DIN EN 60584-1:2014-07 (2014) eine Pseudo-Thermospannung berechnet. Diese wird auf die gemessenen Spannungen der Thermoelemente aufaddiert, sodass die Absoluttemperatur ebenfalls nach DIN EN 60584-1:2014-07 (2014) berechnet werden kann.

In Abb. 4.7a ebenfalls eingezeichnet sind die Messebenen für die Profildruckmessungen an den beiden Nachbarschaufeln. Um die Periodizität nachzuweisen sind in der



(a) Messebenen für Temperaturmessung (mittlere Schaufel) und Druckmessung (Nachbarschaufeln)



(b) Messpositionen der Thermoelemente (+) und Referenzdruckmessstellen (•) im Mittelschnitt der Temperaturmessschaufel

Abb. 4.7: Position der Temperatur- und Druckmessstellen an der Schaufel

Messchaufel je eine Druckmessstelle auf der Druck- und Saugseite eingebracht. Da die Druckmessung für die vorliegende Arbeit nicht relevant ist, wird auf eine detailliertere Beschreibung an dieser Stelle verzichtet. Es sei auf Findeisen (2019) sowie Wörz et al. (2018a) verwiesen.

4.3.4 Fehlerbetrachtung

Da der Fokus dieser Arbeit auf der Auswertung der Materialtemperaturen liegt, wird hier hauptsächlich auf die Kalibrier- und Messkette der Thermoelemente eingegangen. Es wird eine Fehlerabschätzung für die Materialtemperaturmessungen durchgeführt. Für detailliertere Beschreibungen der Unsicherheiten weiterer Messgrößen, wie zum Beispiel Druck und Temperatur in der Anströmung, sei auf Findeisen (2019) verwiesen.

Zur Berechnung der Gesamtunsicherheit wird die Monte Carlo Methode verwendet. Dazu wird für jede Einzelunsicherheit eine Normalverteilung mit Mittelwert $\mu = 0$ und der Unsicherheit als Standardabweichung σ angenommen. Nach Coleman und Steele (2018) werden hierbei systematische und statistische Fehler gleich behandelt. Zur Reduktion der Messunsicherheit wurden im Vorfeld der Messungen Kalibrierungen der verwendeten Temperaturfühler vorgenommen.

4.3.4.1 Kalibrierung

Das in der Vergleichsstelle verwendete Pt100 wurde im institutseigenen Kalibrierlabor für den erwarteteten Temperaturbereich zwischen 293 K und 303 K kalibriert. Anhand der Kalibrierdaten wurde ein neuer Grundwiderstand R_0 bestimmt.

Für die Thermoelemente wurden aufgrund ihrer großen Anzahl keine angepassten Berechnungsvorschriften erstellt. Die Umrechnung der Thermospannungen erfolgte ohne Anpassung der Koeffizienten nach (DIN EN 60584-1:2014-07 2014). Es wurden jedoch Thermoelemente aus derselben Charge verwendet, um die Abweichung zwischen den Messfühlern möglichst gering zu halten.

Zwei Thermoelemente aus dieser Charge wurden beim Lieferanten bei bis zu 1073 K kalibriert. Diese Ergebnisse gehen in die Unsicherheitsanalyse mit ein.

Zusätzlich wurde im Kalibrierlabor des Instituts die Chargenabweichung aller Thermoelemente bestimmt, um die Werte der externen Kalibrierung zu bestätigen. Für die Kalibrierung wurde ein Temperaturbad Ecoline RE312 der Firma Lauda verwendet. Als Kalibriernormal dienten ein Präzisions-Thermometer MilliK der Firma Isotech in Kombination mit einem gemeinsam kalibrierten Pt100. Dabei wurde ein Bereich von bis zu 393 K abgedeckt.

4.3.4.2 Fertigungsbedingte Einflüsse

Die im Folgenden beschriebenen Einflüsse auf die Messunsicherheit sind nicht der Messtechnik, sondern der physikalischen Einbausituation zuzuordnen. Sie entstehen durch Unsicherheiten in der Position der Messfühler sowie durch Beeinflussung der physikalischen Gegebenheiten aufgrund der Messtechnik selbst. Zur Abschätzung der Größen wurde die Materialtemperaturverteilung der CHT-Rechnung des heißesten Betriebspunkts ($T_{HG} = 1273\,\mathrm{K}$, $T_{KL} = 573\,\mathrm{K}$) herangezogen.

Bohrungstiefe

In der vorliegenden Arbeit wird für die Durchführung der Auswertung die Annahme einer zweidimensionalen Wärmeleitung getroffen. In der Realität lässt sich jedoch die Wärmeleitung in lateraler Richtung nicht vollständig vernachlässigen.

Die Bohrungen für die Messungen im Mittelschnitt der Schaufel wurden von beiden Seiten der Schaufel ausgehend gefertigt, um so zusätzliche Messebenen auf 12.8 % und

87.2 % Kanalhöhe zu ermöglichen. Durch fertigungsbedingte Abweichungen des Erodierprozesses liegen die so gefertigten Bohrungen jedoch nicht exakt in einer Ebene. Es ergeben sich zwei Messebenen, welche jeweils 1.4 mm von der Mittelebene entfernt sind. Die theoretische Temperaturdifferenz zwischen diesen beiden Ebenen, ermittelt aus den CHT-Ergebnissen, beträgt entlang der Messstellenpositionen im Mittel 1.78 K.

Dieser Temperaturunterschied ist in erster Linie auf die Turbulatoren im Inneren der Kühlkanäle und die dadurch entstehenden lokalen Effekte des Wärmeübergangs zurückzuführen. Diese sind ausführlich in Kap. 2.3.1 beschrieben.

Bohrungsposition

Aufgrund der geringen Wandstärke kann es während der Fertigung der Messbohrungen zu einer nicht einheitlichen Wärmeverteilung beim Erodierprozess kommen. Dadurch neigen die Bohrungen mit zunehmender Tiefe zu einer Seite und befinden sich nicht mittig in der Wand. Bei den vorliegenden Bohrungstiefen wurde die Abweichung mit ± 0.2 mm angenommen. Aus den numerischen Ergebnissen kann die daraus resultierende Abweichung auf ± 1.66 K abgeschätzt werden.

Bohrungsdurchmesser

Da die Messung nicht an einem diskreten Punkt durchgeführt wird, sondern das Thermoelement und die Bohrung eine im Verhältnis zur Wanddicke und zum vorliegenden Temperaturgradienten nicht unerhebliche Größe besitzen, verschmiert die Messung über den Durchmesser der Bohrung. Aufgrund der hohen Temperaturdifferenzen zwischen Heißgas- und Kühlluftseite entstehen hohe Gradienten in der Schaufelwand. Beim verwendeten Referenz-Betriebspunkt bedeutet dies bei einem Thermoelement mit einem Durchmesser 0.5 mm einen Temperaturunterschied von bis zu 6.8 K. Für die Bestimmung der Gesamtmessunsicherheit wird daher eine Unsicherheit von 3.4 K für die Abweichung zwischen Mittelpunkt und Rand der Messstelle berücksichtigt.

Störung des Wärmestroms

Allein durch die Anwesenheit des Thermoelements kann sich die Temperatur an der Messstelle verändern. Dies kann unter anderem aufgrund unterschiedlicher Materialien oder einem nicht perfekten Wärmeübergang zwischen Schaufelmaterial und Thermoelement passieren (Barth 2010). Vergleichsrechnungen mit und ohne Messbohrungen zeigen, dass der Temperaturunterschied größtenteils unter 1 K liegt. Da in der Rechnung

lediglich leere Bohrungen und keine Thermoelemente berücksichtigt wurden, wird der tatsächliche Fehler als geringer angenommen und in der folgenden Übersicht vernachlässigt.

Unsicherheiten Temperaturmessungen Thermoelemente	
Messabweichung Thermoelemente (externe Kalibrierung bei 973 K)	1.7 K
Unsicherheit Thermoelemente (externe Kalibrierung bei 973 K)	2 K
Temperaturschwankungen des Thermoelements inkl. Messunsicherheit der Spannungsmessung	0.03 K
Unsicherheiten Temperaturmessung Vergleichsstelle	
Temperaturschwankungen der Vergleichsstelle inkl. Messunsicherheit der Widerstandsmessung	0.04 K
Temperaturabweichung in der Vergleichsstelle nach Kalibrierung	0.01 K
Unsicherheit Kalibriernormal	0.02 K
Fertigungs- und Einbaubedingte Unsicherheiten	
Bohrungstiefe	1.78 K
Bohrungsposition	1.66 K
Bohrungsdurchmesser	3.4 K
Gesamtunsicherheit	4.93 K

Tabelle 4.2: Einzelanteile der Messunsicherheit

Die einzelnen Messunsicherheiten sind in Tab. 4.2 aufgelistet. Die Gesamtunsicherheit wurde hieraus mittels der Monte-Carlo Methode bestimmt. Die resultierende Gesamtunsicherheit ist als Standardabweichung zu betrachten. Die Gesamtunsicherheit nach der Methode der maximalen Fehlerquadrate beträgt 10.63 K. Bezogen auf die mittlere Schaufeltemperatur bei dem betrachteten Betriebspunkt HGK 1273/573 von 803 K bedeutet dies eine Unsicherheit von 0.61 % (Monte-Carlo) bzw. 1.32 % (maximale Fehlerquadrate).

4.3.5 Betriebspunkte

In der vorliegenden Arbeit werden Betriebspunkte des Heißgaskanals bei unterschiedlichen Heißgas- und Kühllufttemperaturen verwendet. Diese sind in Tab. 4.3 aufgelistet. Die angegebenen Temperaturen stellen dabei gemittelte Anströmtemperaturen dar. Die

angegebenen Temperaturen sind dabei die nominalen Werte der mittleren Strömungstemperaturen jeweils im Heißgas- und Kühlluftpfad.

Bezeichnung	T_{HG}	T_{KL}
HGK 1273/573	1273 K	573 K
HGK 1073/373	1073 K	373 K
HGK 973/573	973 K	573 K

Tabelle 4.3: Verwendete Betriebspunkte

4.4 Berechnung der Materialtemperaturen mittels FEM

Zur Berechnung der Temperaturverteilung innerhalb des Schaufelquerschnitts wird Ansys Mechanical verwendet. Darin wird das Problem mittels Finite-Elemente-Methode (FEM) diskretisiert. Zur Verkürzung der Rechenzeit wird unter der Annahme zweidimensionaler Strömung lediglich ein zweidimensionales Rechengebiet aus dem Mittelschnitt der Schaufel verwendet. Aufgrund der verwendeten Schaufelgeometrie ist diese Annahme mit Einschränkungen zu betrachten. Auf die Gültigkeit der Annahme wird in Abschnitt 5.1 näher eingegangen, das daraus resultierende Vorgehen wird im vorliegenden Kapitel beschrieben.

Modell

Zur Berechnung der Materialtemperaturen wird für jeden Knoten die zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung (2.7) gelöst. Da lediglich die Wärmeleitung im Material berechnet wird, ist als Stoffgröße nur die temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit von Interesse.

In der Veröffentlichung von Turner (1971), deren Daten zur Untersuchung verschiedener Turbulenzgrade verwendet werden, ist zwar die Geometrie genau spezifiziert, zum verwendeten Material des Prüflings sind jedoch keine genauen Angaben zu finden. Dieses wird lediglich als *mild steel* bezeichnet, wobei es sich um einen Stahl mit niedrigem Kohlenstoffgehalt handelt. Aufgrund der geringen Temperaturunterschiede zwischen Heißgas und Kühlluft wird im FEM Modell für diesen Fall eine konstante, temperaturunabhängige Wärmeleitfähigkeit angenommen. Die Werte für niedrig legierten Stahl liegen im Bereich von 40 W/m K bis 60 W/m K. Für das vorliegende Model wurde eine Variation

der Wärmeleitfähigkeit unter Verwendung der in der Veröffentlichung bestimmten Wärmestromverteilung durchgeführt. Dabei wurde die Wärmeleitfähigkeit in einem Bereich von 10 W/m K bis 200 W/m K variiert. Bei einem Wert von etwa 73 W/m K wurde die beste Übereinstimmung zwischen berechneten und gemessenen Temperaturen erzielt.

Für die Simulationen der Heißgaskanal-Geometrie werden detailliertere Materialdaten verwendet. Es handelt sich hierbei um den hochlegierten Chrom-Nickel Stahl X15CrNiSi20-12. Temperaturabhängige Werte der Wärmeleitfähigkeit wurden analog zu Wörz (2018) dem VDI-Wärmeatlas (VDI-Wärmeatlas 2013) entnommen und in Ansys tabellarisch hinterlegt. Für diesen Fall wurde jedoch eine Vereinfachung der Geometrie durchgeführt. Da zur Reduktion des Rechenaufwands nur der Mittelschnitt betrachtet wird, wurde auf eine Modellierung der Turbulatoren in der Geometrie verzichtet.

Rechennetz und Netzstudie

Für die in dieser Arbeit vorgestellte Methode wird keine Simulation der Strömung durchgeführt. Die Materialtemperaturen werden in Abhängigkeit der aufgeprägten Wärmestrom-Randbedingungen berechnet. Daher wird für die FEM-Berechnungen der vorgestellten Methode eine deutlich gröbere Vernetzung als bei den CHT-Rechnungen (Kap. 4.5) verwendet. Auf Prismenschichten kann ebenfalls verzichtet werden. Das Netz wurde in Ansys mit einer Elementanzahl von ca. 2800 aus hauptsächlich viereckigen Elementen generiert.

Um die Unabhängigkeit der Ergebnisse von der Netzauflösung zu zeigen, wurde eine Netzunabhängigkeitsanalyse sowohl für den Testcase der Daten von Turner (1971) als auch für die Heißgaskanal-Schaufel durchgeführt. Die Anzahl der Elemente wird bei jeder Verfeinerung etwa verdoppelt. Als Referenzgröße wird jeweils die über die n Messstellen gemittelte Temperatur T_m mit

$$T_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_i}{n} \tag{4.4}$$

verwendet. Die Abweichung wird nach Cao et al. (2022) zu

$$Res_{h_i} = \frac{\left| T_{m,h_i} - T_{m,h_3} \right|}{T_{m,h_3}} \tag{4.5}$$

für die Netze h_i im Vergleich zum jeweils feinsten Netz h_3 berechnet. Die Ergebnisse sind in Tab. 4.4 aufgelistet.

	Netz	Anz.Elemente	T_m / K	Abweichung zum feinsten Netz / %
HGK	h1	1386	821.80	0.0238
	h2	2811	821.81	0.0211
	h3	6305	821.93	-
Turner	h1	1377	333.91	0.0139
	h2	3042	333.91	0.0019
	h3	6803	333.91	-

Tabelle 4.4: Diskretisierung

Die Abweichungen der mittleren Temperaturen sind sehr gering und liegen auch für das gröbste Netz deutlich unterhalb der Messunsicherheiten der Temperaturen (siehe Kap. 4.3.4 und Kap. 3.1.2). Für die Rechnungen wird das mittlere Netz ($h2$) verwendet, da bei einer weiteren Verfeinerung keine signifikante Änderung mehr auftritt.

Randbedingungen

Die Randbedingungen sowohl innerhalb der Kühlkanäle als auch außen an der Schaufelwand werden an diskreten Punkten vorgegeben. Die Positionen sind so gewählt, dass sie jeweils an den inneren und äußeren Wänden auf Höhe der Messpositionen liegen. In

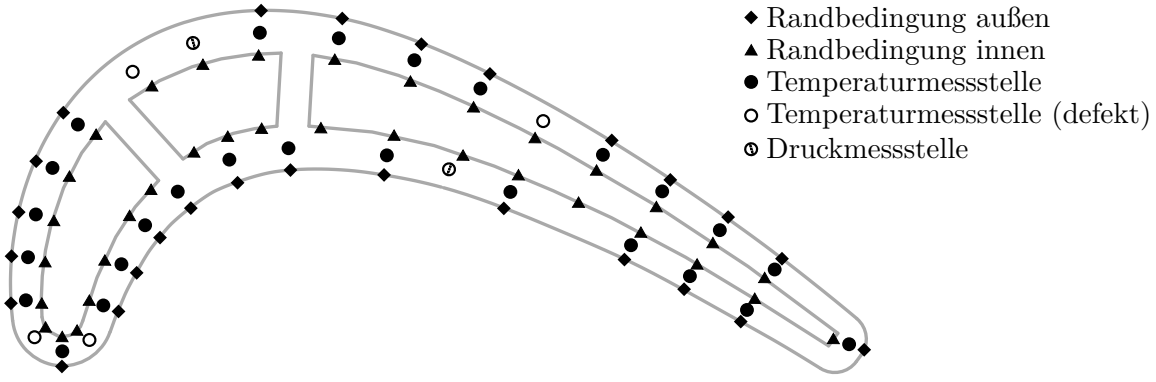


Abb. 4.8: Positionen der Messstellen und Randbedingungen der FEM für den Betriebspunkt HGK 1273/573.

Abb. 4.8 ist ein Querschnitt der Schaufel mit den Positionen der Messstellen sowie der

aufgeprägten Randbedingungen für den Betriebspunkt HGK 1273/573 dargestellt. Die Positionen der Messstellen sind mit Kreisen markiert. Dabei sind die Messstellen der verfügbaren Thermoelemente mit gefüllten Kreisen (•) markiert. Defekte Thermoelemente sind durch leere Kreise (○) bezeichnet, Druckmessstellen durch Kreise mit einem Strich (⊘). In der FEM werden Randbedingungen an den mit Rauten (außen) und Dreiecken (innen) markierten Positionen vorgegeben. Zwischen benachbarten Punkten wird entlang der Kontur interpoliert, sodass für jede Zelle ein Wert vorliegt. Für die beiden anderen Betriebspunkte des Heißgaskanals sind die Positionen der Messstellen identisch, aufgrund von Ausfällen unterscheiden sich jedoch die Positionen der äußeren Randbedingung leicht. Die Position der inneren Randbedingung ist für alle Betriebspunkte identisch. Die äußere Randbedingung wird für die Optimierung freigegeben. Diese wird nur an den Punkten vorgegeben, an welchen Temperaturinformationen aus dem Experiment vorliegen. Die Positionen beschädigter Thermoelemente werden nicht berücksichtigt. Daher ergeben sich Lücken, insbesondere auf der Saugseite auf Höhe des zweiten Kanals. Die Vorgabe der äußeren Randbedingung erfolgt in Form einer Wärmestromrandbedingung. Aufgrund der Daten von Ekkad und Han (1997) und Wörz (2018) (siehe auch Kap. 2.3.1) muss bei der inneren Randbedingung der lokal veränderliche Wärmeübergang aufgrund der vorhandenen Turbulatoren berücksichtigt werden. Dazu werden innerhalb der Kühlkanäle an den in Abb. 4.8 dargestellten Positionen Wärmeübergangskoeffizienten vorgegeben. Die höhere Dichte an Randbedingungen wurde aufgrund der Abhängigkeit des inneren Wärmestroms von lokalen Effekten gewählt. Die Werte werden nicht innerhalb der Optimierung freigegeben, sondern werden aus den CHT-Rechnungen der jeweiligen Betriebspunkte bestimmt. Pro Kanal wird eine Bulktemperatur vorgegeben, die ebenfalls aus der CHT ermittelt wurde. Diese Vorgehensweise dient in erster Linie der Reduktion der Anzahl freier Parameter in der Optimierung. Da der Rechenaufwand nicht linear, sondern mit n^3 mit der Anzahl n freier Parameter zunimmt, wird für diese erste Untersuchung der Machbarkeit eine möglichst geringe Anzahl an Parametern angestrebt. Wie in Abschnitt 5.2 noch gezeigt wird, ist für eine repräsentative Abbildung des Wärmestroms ein einzelner Wert pro Kühlkanal nicht als Randbedingung ausreichend. Stattdessen muss die Randbedingung örtlich aufgelöst vorgegeben werden, was zu einer erhöhten Anzahl an Parametern führt. Diese werden daher fest vorgegeben.

4.5 CHT-Rechnungen

Als Vergleichsdaten für die vorgestellte Methode werden Ergebnisse aus konjugierten Wärmeübergangsrechnungen (*Conjugate Heat Transfer*, CHT) verwendet. Das hierfür verwendete Setup wird im Folgenden kurz vorgestellt. Detailliertere Informationen können Wörz (2018) entnommen werden.

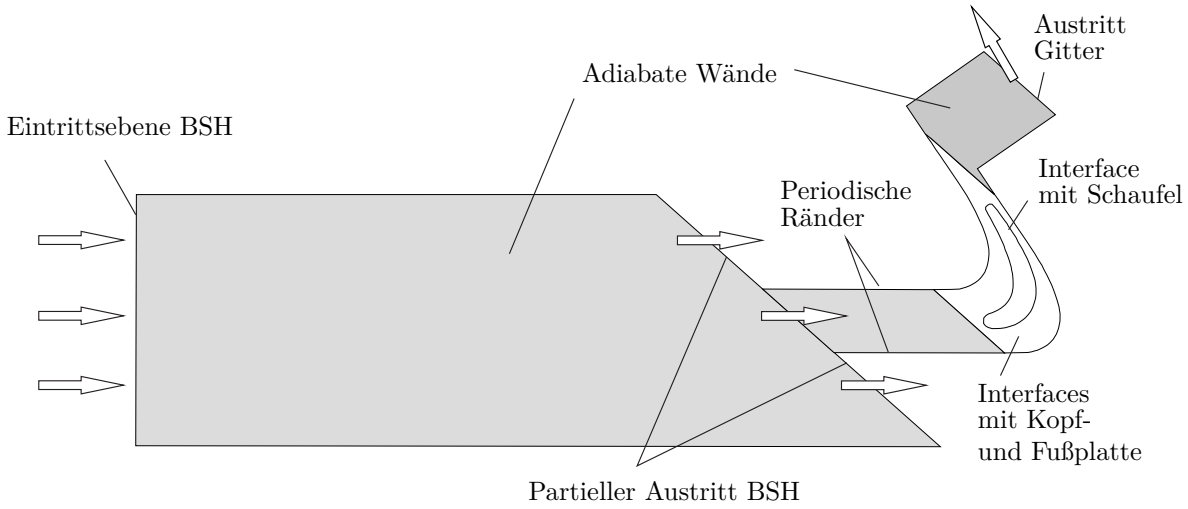


Abb. 4.9: Domain des Heißgaspfades inklusive Bezeichnung der Randbedingungen (Wörz 2018)

Die Rechnungen wurden in ANSYS CFX durchgeführt. Die Geometrie entspricht dabei so weit möglich den Heißgas- und Kühlluftpfaden des Heißgaskanals (siehe Kapitel 4.3.1). Die verwendete Domain des Heißgaspfades ist in Abb. 4.9 dargestellt. Der Heißgaspfad wird hier ausgehend von der BSH-Ebene berechnet, für die Messdaten der Totaltemperatur- und Totaldruckprofile vorliegen. In diesem Bereich wird noch die gesamte Kanalbreite berechnet, um die Ausmischung des inhomogenen Eintrittsprofils zu bestimmen. Ab etwa 1.5 - facher Sehnenlänge stromauf der Kaskade wird die Domäne auf eine einzelne Passage verkleinert, um den Rechenaufwand zu verringern. Die Positionen der periodischen Ränder und verwendeter Interfaces zwischen Fluid und Festkörper sind ebenfalls in Abb. 4.9 markiert.

Die Domäne des Kühlluftpfades ist in Abb. 4.10 abgebildet. Die Geometrie innerhalb der Kühlkanäle entspricht der in Kapitel 4.3.2 vorgestellten. Um eine ausgebildete Strömung sicherzustellen, wurden die Eintrittsebenen jedoch so weit wie möglich stromauf in die Kühlluftumlenkungen gelegt und entsprechen damit nicht den Messebenen im Experiment. Die Austrittsebenen sind analog zum Experiment platziert.

Modellierung

Im Heißgaspfad wird das Zweigleichungsmodell SST (Shear Stress Transport) zur Modellierung der Reynoldsgemittelten Impuls- und Energieerhaltungsgleichungen verwendet. Die turbulente Prandtlzahl wird dabei mit einem Wert von 0.9 als konstant angenommen.

Der laminar-turbulente Umschlag wird mit Hilfe des γ-$\widetilde{Re}_{\Theta t}$ - Transitionsmodells bestimmt. Da im Experiment keine Turbulenzgrade gemessen werden können, wurde der hier gewählte Turbulenzgrad durch Parametervariation und Abgleich mit den experimentellen Daten festgelegt. Der durch diesen Abgleich bestimmte Turbulenzgrad deutet darauf hin, dass kein Umschlag stattfindet. Da beim vorliegenden Betriebspunkt aufgrund der hohen Temperatur die Gas- und Festkörperstrahlung nicht vernachlässigt werden kann, wurde in CFX die *Discrete Transfer Method* zur Lösung der Strahlungstransportgleichung ausgewählt. Details zur Funktionsweise und Auswahl der Methode können Wörz (2018) und Mick (2015) entnommen werden.

Für die Modellierung des Kühlluftpfades werden explizit algebraische Reynoldsspannungsmodelle (EARSM) verwendet. Bei der Modellierung des turbulenten Wärmestroms wird das explizit algebraische Modell nach Abe und Suga (2001) eingesetzt.

Die Stoffgrößen des Fluids (Wärmeleitfähigkeit λ_F, dynamische Viskosität μ und spezifische Wärmekapazität c_p) sowie die Wärmeleitfähigkeit des Festkörpers λ_K werden als temperaturabhängig angenommen. Die Fluidgrößen werden mittels Polynomen nach Heywood (1988) (c_p) und VDI-Wärmeatlas (2013) (λ_F,μ) bestimmt, wobei letztere Polynome aus tabellarischen Werten erstellt wurden.

Diskretisierung

Für Strömung und Festkörper wurden aufgrund der unterschiedlichen Zeitskalen der Wärmeübergangsphänomene unterschiedliche Zeitschritte festgelegt, welche bei der Strömungsrechnung mittels *Auto-Timescale* in der Größenordnung $\mathcal{O} \sim 10^{-4}$ sec festgelegt wurden. Für den Festkörper wurden 100 sec festgelegt.

Rechennetze und Netzstudie

Die Rechennetze wurden mit ANSYS ICEM CFD 16.0 erstellt. Dabei ist der Heißgaspfad mit Hexaederelementen blockstrukturiert vernetzt. Für die Schaufelumströmung wurde dabei ein O-J-Netz erstellt. Dabei wird an der Schaufeloberfläche ein maximales y_1^+ von 0.5 erreicht. Die periodischen Ränder sind mit 1:1 Konnektivität gestaltet. Das Kühlsystem und der Festkörper sind unstrukturiert vernetzt. Im Kühlluftpfad wurden 12 Prismenschichten erstellt. y_1^+ liegt dabei ebenfalls unterhalb von 0.5. Um für die Interfaces ähnliche Zellstrukturen zu erhalten, wurden am Festkörper ebenfalls drei Prismenschichten erstellt. Es wurde eine Netzunabhängigkeitsstudie nach Roache (1997) durchgeführt. Dabei wurde der Diskretisierungsfehler für den Wandwärmestrom zu 2.80 % im Kühlluftpfad und 4.33 % im Heißgaspfad bestimmt. Eine weitere Verkleinerung ist aktuell nicht mit vertretbarem Rechenaufwand durchführbar. Der Diskretisierungsfehler für den Druckverlust lag bei 0.01 % (Kühlluft) bzw. 0.09 % (Heißgas).

Randbedingungen

Die Randbedingungen wurden weitestgehend den experimentellen Daten entnommen. Am Eintritt des Heißgaspfades wurden die gemessenen Totaldruck- und Totaltemperaturprofile verwendet, wobei zwischen den Messpunkten interpoliert sowie außerhalb bis zum Rand des Innenkanals extrapoliert wurde. Der statische Druck am Austritt wurde so gewählt, dass der sich einstellende Massenstrom am Eintritt dem aus den Messdaten ermittelten Massenstrom entspricht. Der Turbulenzgrad wurde auf 10 % festgelegt. Vergleichsrechnungen mit Variation des Turbulenzgrads zwischen 5 % und 30 % zeigten bei 10 % die besten Übereinstimmungen der Schaufeltemperaturprofile.

Für die Eintrittsbedingungen der Kühlluft wurden die am Eintritt des jeweiligen Kühlkanals gemessenen Totaltemperaturen verwendet, auch wenn die Eintrittsebenen in Experiment und CHT nicht an der gleichen Position liegen. Da die Rohre der Kühlluftumlenkungen als adiabat angenommen wurden ist dies bis zum Eintritt in die Schaufel als korrekt anzunehmen. Als Druckrandbedingung wird der statische Druck in der Austrittsebene vorgegeben, welcher aus den experimentellen Daten verfügbar ist. Der eingestellte Turbulenzgrad hat hier nur einen geringen Einfluss, da die Strömung innerhalb der Kühlkanäle durch die Turbulatoren dominiert ist.

Konvergenzkriterien

Als Konvergenzkriterium wurden quadratisch gemittelte Residuen im Bereich von 10^{-4},

die maximalen Residuen bei $\mathcal{O} \sim 10^{-1}$ akzeptiert. Zusätzlich wurden Überwachungspunkte z.B. bei der Materialtemperatur gesetzt. Die asymptotische Annäherung an konstante Werte ist ebenfalls ein Indikator für Konvergenz.

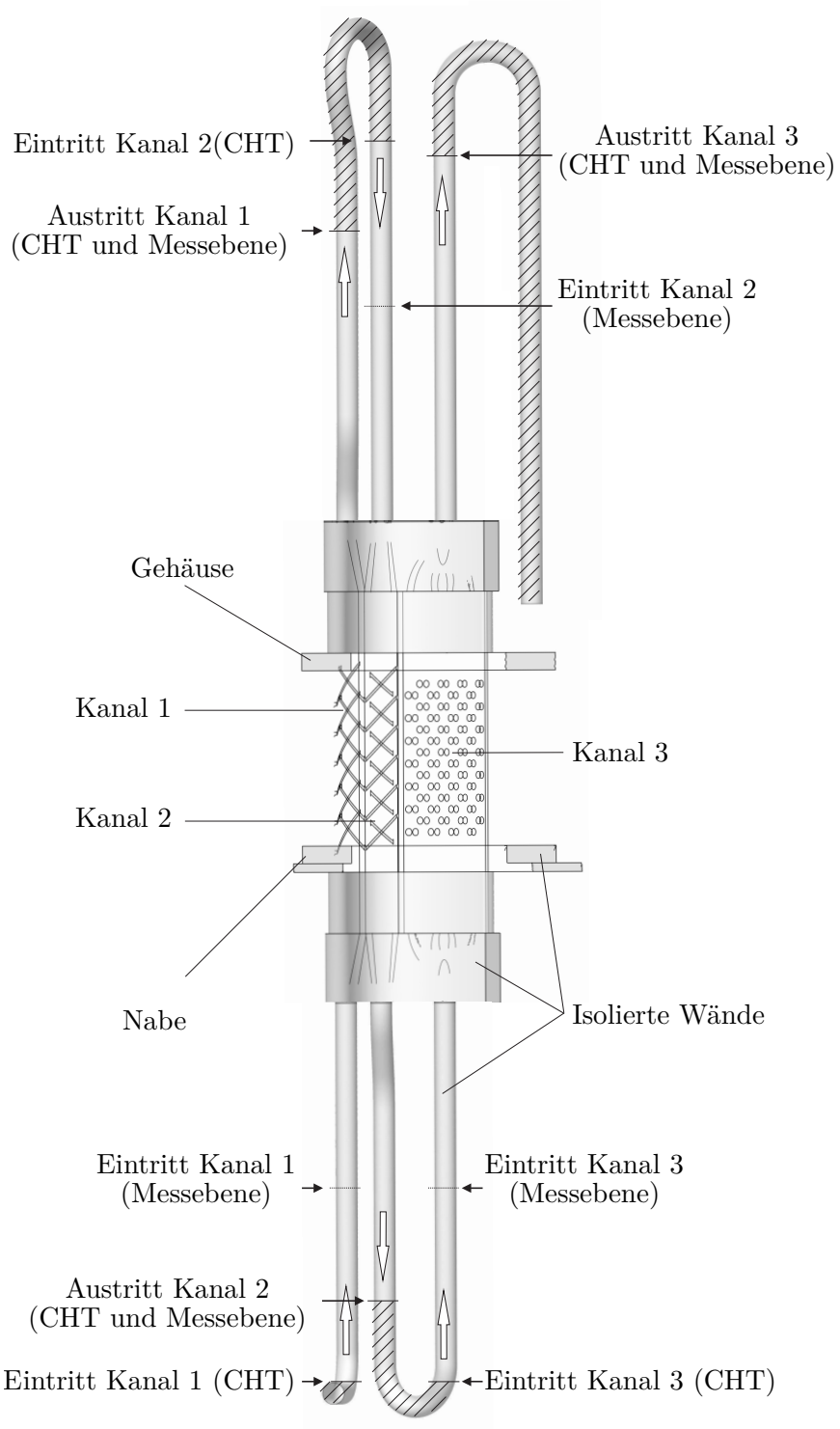


Abb. 4.10: Übersicht des Kühlsystems inklusive Messebenen und Ein- und Austrittsebenen (Wörz 2018)

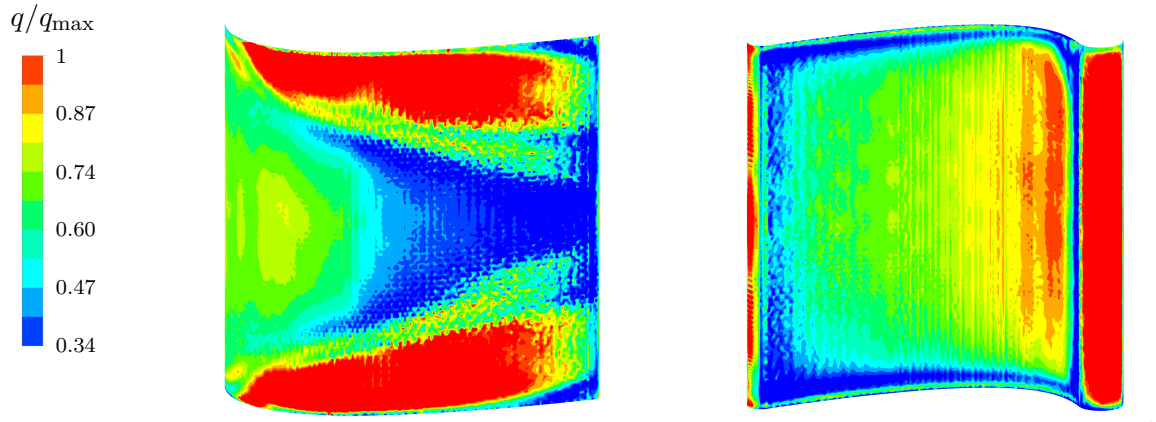
5 Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die gewählten Randbedingungen sowie Ergebnisse der entwickelten Methode diskutiert. Dazu wird zunächst die Annahme einer zweidimensionalen Wärmeleitung diskutiert, welche die Vereinfachung des Rechengebiets auf ein zweidimensionales rechtfertigt. Dazu werden Daten der konjugierten Wärmeübergangsrechnungen betrachtet und der Einfluss lokaler Schwankungen auf die Annahme diskutiert. Anschließend wird der Effekt der Diskretisierung der Randbedingungen für die Methode diskutiert. Anhand einer Sensitivitätsanalyse wird der Einfluss der Positionierung der Randbedingungen gezeigt. Auf die Wahl der Regularisierungsfunktion wurde bereits in Kap. 4.2 eingegangen. Der Einfluss der Regularisierung und die Auswahl des Regularisierungsparameters werden im Folgenden dargelegt. Schließlich werden die Ergebnisse der entwickelten Methode gezeigt, wobei unterschiedliche Betriebspunkte sowie verschiedene Optimierungsalgorithmen verglichen werden. Zusätzlich wird die Methode auf Messdaten mit unterschiedlichen Turbulenzgraden in der Anströmung und somit qualitativ unterschiedlichen Wärmestromverläufen angewendet.

5.1 Annahme zweidimensionaler Wärmeleitung

Die in der vorliegenden Arbeit entwickelte Methode beruht auf der Annahme einer zweidimensionalen Wärmeleitung. Aufgrund der prismatischen Schaufeln, wie sie in einer Kaskade sowohl am Heißgaskanal als auch in der Arbeit von Turner (1971) eingesetzt werden, kann im Mittelschnitt, wo die Temperaturmessungen durchgeführt werden, von einer zweidimensionalen Außenströmung ausgegangen werden. Dennoch wirken sich dreidimensionale Strömungsphänomene auf die Wärmestromverteilung im Mittelschnitt aus. Dies ist insbesondere bei der Kühlluftströmung am Heißgaskanal der Fall, da hier in den Kühlkanälen Turbulatoren zur Erhöhung des Wärmeübergangs vorhanden sind. In den folgenden Abschnitten wird der Einfluss dreidimensionaler Strömungseffekte auf den Wärmeübergang anhand der Schaufeln des Heißgaskanals beschrieben. Da keine gemes-

senen Wärmestromdaten verfügbar sind, werden hierfür mittels CHT berechnete Daten herangezogen.

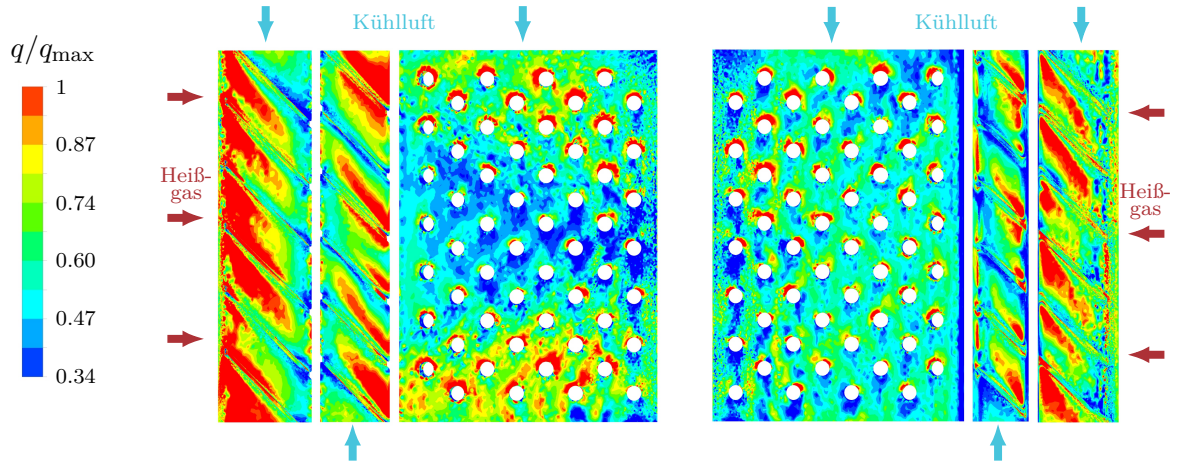


(a) Saugseite **(b)** Druckseite

Abb. 5.1: Wärmestromverteilung auf der Heißgasseite der Schaufel aus CHT-Rechnung nach Wörz (2018)

Trotz der über der Schaufelhöhe konstanten äußeren Geometrie bilden sich an der Schaufel dreidimensionale Strömungen aus. An den Übergängen der Schaufel zu Nabe und Gehäuse, bzw. im vorliegenden Fall zu den Prüfstandswänden, bilden sich unterschiedliche Sekundärströmungen aus. Diese wurden im Detail in Abschnitt 2.3.2 beschrieben. Insbesondere der Kanalwirbel, welcher aus dem druckseitigen Hufeisenwirbel entsteht, beeinflusst die Strömung auf der Saugseite. Der Einfluss auf den Wärmeübergang ist in Abb. 5.1a in Form eines erhöhten Wärmestroms an den Rändern der Schaufel zu erkennen. Zur besseren Übersichtlichkeit wurden die Kanalwände in der Darstellung weggelassen. Durch das Anwachsen des Kanalwirbels in Strömungsrichtung nimmt dieser Einfluss zur Hinterkante hin zu. In der Mittelebene der Schaufel ist dieser Einfluss jedoch vernachlässigbar. Auf der Druckseite, gezeigt in Abb. 5.1b, liegt stromab der Vorderkante ein Ablösegebiet vor. Dieses verursacht ein lokales Absinken des Wärmeübergangskoeffizienten und somit einen geringeren Wärmestrom. An den Übergängen der Schaufel zu den Wänden verursachen die Eckenwirbel eine Reduktion des Wärmeübergangs. Beide Phänomene führen jedoch nicht zu lateralen Unterschieden in der äußeren Wärmestromverteilung.

Zur Erhöhung des inneren Wärmeübergangs sind die Kühlkanäle der Heißgaskanal-



(a) Saugseite **(b)** Druckseite

Abb. 5.2: Wärmestromverteilung auf der Kühlluftseite der Schaufel aus CHT-Rechnung nach Wörz (2018)

Schaufeln mit Turbulatoren ausgestattet. Die Konfigurationen der Rippen und Pin Fins sind in Abschnitt 4.3.2 beschrieben. Hierdurch entsteht eine dreidimensionale Strömung, die zu einer Erhöhung des Wärmeübergangs führt. Dies ist für eine erhöhte Kühlwirkung durchaus beabsichtigt, schränkt jedoch die Annahme eines zweidimensionalen Strömungszustands ein. Dies gilt sowohl für die Rippen, als auch für die *Pin Fin* Konfiguration, wie bereits in Abschnitt 2.3.1 gezeigt wurde. In Abb. 5.2 ist der mittels CHT berechnete Wärmestrom an den Wänden der Kühlkanäle auf Druck- und Saugseite dargestellt. Der Effekt des Kanalwirbels wirkt sich bis auf die Kanalinnenseite aus, wie in Abb. 5.2a auf der Saugseite des dritten Kanals in der Wärmestromverteilung des *Pin Fin* Arrays zu sehen ist. Ebenso wie auf der Heißgasseite (Abb. 5.1a) gibt es jedoch in der Mittelebene einen Bereich, der von diesen äußeren Effekten unbeeinflusst bleibt. Hier ist der Wärmeübergang durch lokale Effekte aufgrund der Turbulatoren dominiert.

Um die Annahme der zweidimensionalen Wärmeleitung in der für die Methode relevanten Ebene zu überprüfen, ist in Abb. 5.3 der entsprechende Mittelschnitt der Heißgaskanal-Schaufel dargestellt. Der Einfluss der oben beschriebenen dreidimensionalen Effekte wird durch das Verhältnis des Temperaturgradienten $\partial_z T = \partial T / \partial z$ in Richtung der Ebenennormalen z im Verhältnis zu den Gradienten $\partial_{xy} T = \sqrt{(\partial T/\partial x)^2 + (\partial T/\partial y)^2}$ innerhalb der Ebene x, y ausgedrückt. Diese Darstellung wurde als Repräsentation der Wärmeleitung gewählt. Es ist ersichtlich, dass die Gradienten in Normalenrichtung im Großteil der Schaufel unter 10 % der Gradienten innerhalb der Ebene betragen. Die lokalen Erhö-

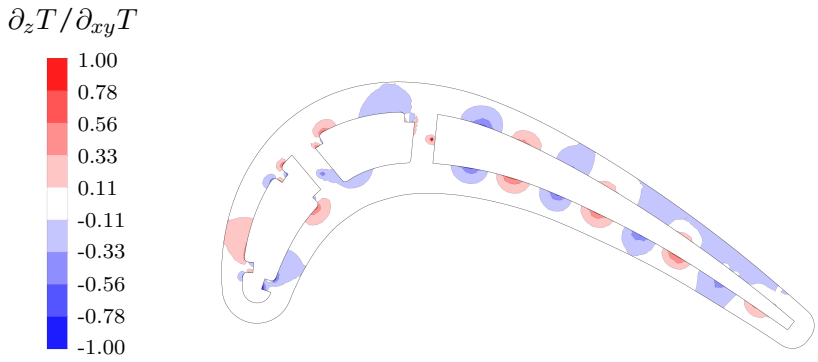


Abb. 5.3: Temperaturgradient $\partial_z T$ normal zur Ebene im Verhältnis zum Gradienten $\partial_{xy} T$ innerhalb der Ebene

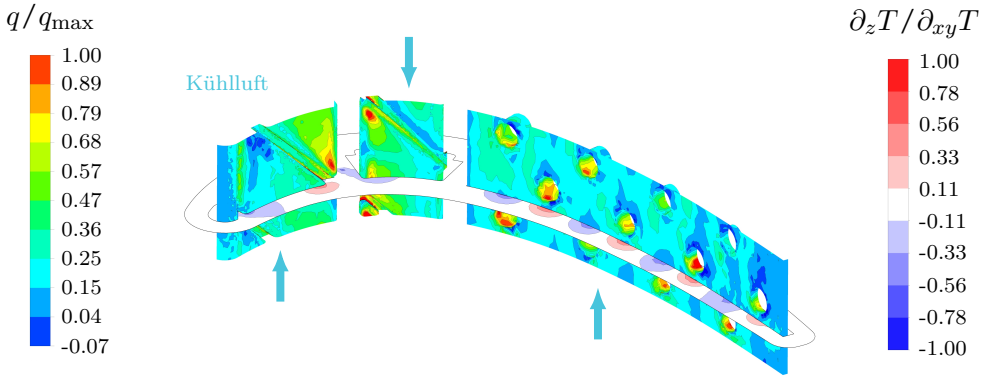


Abb. 5.4: Temperaturgradient $\partial_z T$ normal zur Ebene im Verhältnis zum Gradienten $\partial_{xy} T$ innerhalb der Ebene. Teilweise Darstellung der Innengeometrie mit normierten lokalen Wärmeströmen $q / q_{\max}$.

hungen des Temperaturgradienten in Normalenrichtung können durch den Einfluss der Turbulatoren erklärt werden. Ein Ausschnitt der lokalen Wärmestromverteilung an den Wänden der Kühlkanäle (wie zuvor gezeigt in Abb. 5.2) ist in Abb. 5.4 zusammen mit den Gradienten aus Abb. 5.3 dargestellt. Die lokalen Erhöhungen der Temperaturgradienten stimmen mit den Positionen der Geometrieelemente innerhalb der Kühlkanäle überein. Die Temperaturgradienten sind dabei in ihrer Richtung abhängig von der Strömungsrichtung sowie den durch die Turbulatoren verursachten Querströmungsphänomene.

In den vorderen beiden, berippten Kanälen entstehen die Gradienten aufgrund des durch Ablösung und Wiederanlegen der Strömung lokal veränderten Wärmeübergangs. Die in Abschnitt 2.3.1 diskutierten Einflüsse der Rippen auf die lokale Nusseltzahl und damit

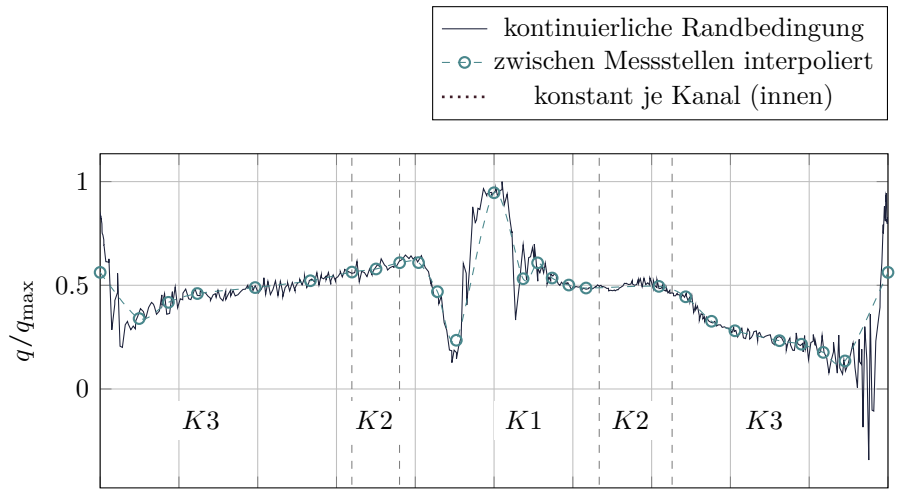
auf den Wärmestrom sind in Abb. 5.2 gut zu erkennen. Im dritten Kühlkanal ist ein richtungsabhängiger Effekt jeweils in Richtung der *Pin Fins* klar zu erkennen.

Der Einfluss lokaler Effekte auf den Wärmestrom in der Mittelebene ist zwar klein, aber insbesondere auf der Kühlluftseite nicht vollständig vernachlässigbar. Im folgenden Kapitel wird darauf eingegangen, wie dies in der vorliegenden Arbeit durch die Wahl der Randbedingungen berücksichtigt wird.

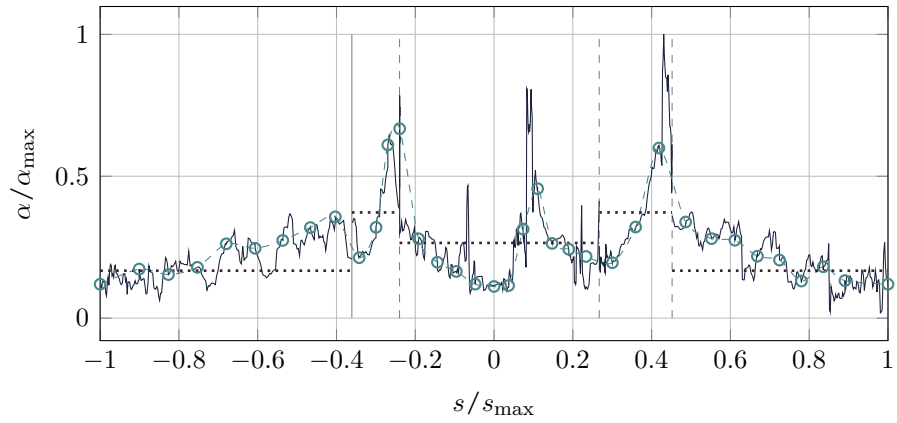
5.2 Auswahl der FEM-Randbedingungen

Die Randbedingungen der FEM Berechnung gehen als freigegebene Parameter in die vorgestellte Methode ein. Sie beeinflussen damit direkt die Dimensionalität des Problems, da jeder Wert der Randbedingung einzeln als Parameter für die Optimierung freigegeben wird. Die Anzahl der Parameter sollte also möglichst gering gehalten werden, um eine möglichst kurze Rechenzeit erreichen. Um dennoch die Qualität der Ergebnisse nicht durch eine zu geringe räumliche Auflösung zu beeinflussen, wird in diesem Abschnitt der Einfluss von verschiedenen Vereinfachungen der FEM-Randbedingungen betrachtet. Als Referenz werden Wandwärmeströme, Wärmeübergangskoeffizienten und Bulktemperaturen aus den Ergebnissen der CHT verwendet. Die genannten Größen werden im Mittelschnitt der Schaufel auf Heißgas- und Kühlluftseite ausgewertet und in unterschiedlicher Auflösung als Randbedingung für die FEM Rechnung verwendet. Die Abweichung zwischen den mittels CHT und FEM bestimmten Temperaturen an den Positionen der Messstellen wird als Vergleichskriterium für die Eignung der Randbedingung herangezogen.

Wie in Kap. 4.4 beschrieben, werden auf der Heißgasseite Wärmeströme vorgegeben, während auf der Kühlluftseite eine konvektive Randbedingung mit lokalen Wärmeübergangskoeffizienten und einer konstanten Bulktemperatur verwendet wird. Die vorgegebenen Verläufe in unterschiedlicher Auflösung sind in Abb. 5.5 normiert auf einen Maximalwert dargestellt. In Abb. 5.5a ist der Wärmestromverlauf für die Heißgasseite der Schaufel im Mittelschnitt dargestellt. Als „kontinuierlich“ wird die Randbedingung in diesem Fall bezeichnet, wenn die Auflösung dem Netz der CHT entspricht. Somit wird jedem Element der FEM, an dem die Randbedingung aufgeprägt wird, ein eigener Wert zugewiesen. Für eine Variante mit reduzierter Anzahl an vorgegebenen Werten werden nur Wärmeströme an den Punkten der äußeren Kontur vorgegeben, auf deren Höhe ein Thermoelement in der Wand platziert ist. Defekte Messstellen werden in der



(a) Äußere Randbedingung: Wärmestrom



(b) Innere Randbedingung: Wärmeübergangskoeffizient

Abb. 5.5: Verschiedene Randbedingungen

Randbedingung ebenfalls ausgelassen. Die genaue Positionierung ist in Abschnitt 4.4 in Abb. 4.8 dargestellt. Zwischen den vorgegebenen Punkten wird die Randbedingung in Ansys interpoliert. Um lokale Schwankungen auszugleichen, werden für die einzelnen aufgeprägten Werte Mittelungen durchgeführt. Dazu wurde ein gleitender Mittelwert über jeweils 10 Werte verwendet. Lediglich der Wert an der Hinterkante stellt eine Mittelung über den gesamten Bereich zwischen den benachbarten Thermoelementen dar. Die Verwendung des Maximalwertes an der Hinterkante oder eines über wenige Werte gemittelten Wertes würde in diesem Bereich zu einer unrealistischen Überhöhung der Temperatur führen. Die Mittelung über den gesamten Einflussbereich berücksichtigt somit die hohen Schwankungen, die in diesem Bereich vorliegen.

Für die kühlluftseitige Randbedingung wird analog vorgegangen, mit dem Unterschied, dass hier der Wärmeübergangskoeffizient verwendet wird. Die Bulktemperatur wird für jeden Kühlkanal separat vorgegeben. Auch hier wird einmal eine kontinuierliche Randbedingung sowie eine reduzierte Randbedingung verwendet, bei der nur an Positionen äquivalent zu den Messstellen Werte vorgegeben werden. Im Gegensatz zur Heißgasseite werden hier jedoch keine Ausfälle der Thermoelemente berücksichtigt. Wie in Abb. 4.8 gezeigt, werden zusätzliche Punkte verwendet, wenn die Abstände zwischen benachbarten Messstellen sehr groß sind. Dadurch können lokale Effekte, die aufgrund der Turbulatoren auftreten, besser abgebildet werden. In Abb. 5.5b zeigt sich, dass die lokalen Schwankungen des Wärmeübergangs in der Randbedingung durch diese Mittelung dennoch gedämpft werden. Zusätzlich wird eine pro Kanal konstante Randbedingung verwendet, welche aus dem Mittelwert der CHT Daten jeweils im Mittelschnitt eines Kanals ermittelt wurde.

Diese Randbedingungen wurden in verschiedenen Kombinationen für die heißgas- und kühlluftseitige Randbedingung angewendet. Die Ergebnisse der Temperaturberechnung mit diesen unterschiedlichen Auflösungen der Randbedingung sind in Abb. 5.6 dargestellt. Die Temperaturverläufe sind jeweils auf denselben Wert normiert über der normierten Lauflänge aufgetragen. Zum Vergleich ist für alle Varianten die in der CHT berechnete Temperatur dargestellt, wobei diese nur an den Positionen der vorhandenen Messstellen ausgewertet wurde. Die Variation der Heißgas-Randbedingung ist durch die beiden Spalten dargestellt. In der linken Spalte wurde jeweils die kontinuierliche, in der rechten Spalte die vereinfachte Randbedingung, welche zwischen Werten an den Positionen der Thermoelemente interpoliert, verwendet. Analog ist die Variation der Kühlluftrandbedingung in den drei Zeilen dargestellt. Die Ergebnisse der ersten Zeile enthalten die kontinuierliche Kühlluftrandbedingung, die zweite Zeile die vereinfachte. Eine kühlluftseitige Randbedingung mit nur einem gemittelten Wert pro Kühlkanal wurde in der letzten Zeile verwendet. Die mittlere Abweichung der Temperaturen zwischen FEM und CHT ist als Mittelung $\overline{\Delta T}$ in den Graphen angegeben.

Abb. 5.6a zeigt die Ergebnisse mit kontinuierlichen Randbedingungen sowohl auf der Kühlluft- als auch auf der Heißgasseite. Dies entspricht den Bedingungen, die in der CHT für die Berechnung der Materialtemperaturen vorherrschen. Bei identischen Randbedingungen sollten also auch die resultierenden Temperaturverläufe identisch sein. Die dennoch auftretenden Abweichungen zwischen CHT und FEM sind auf die Vereinfachungen der FEM zurückzuführen. Dazu zählt das zweidimensionale Rechengebiet, wel-

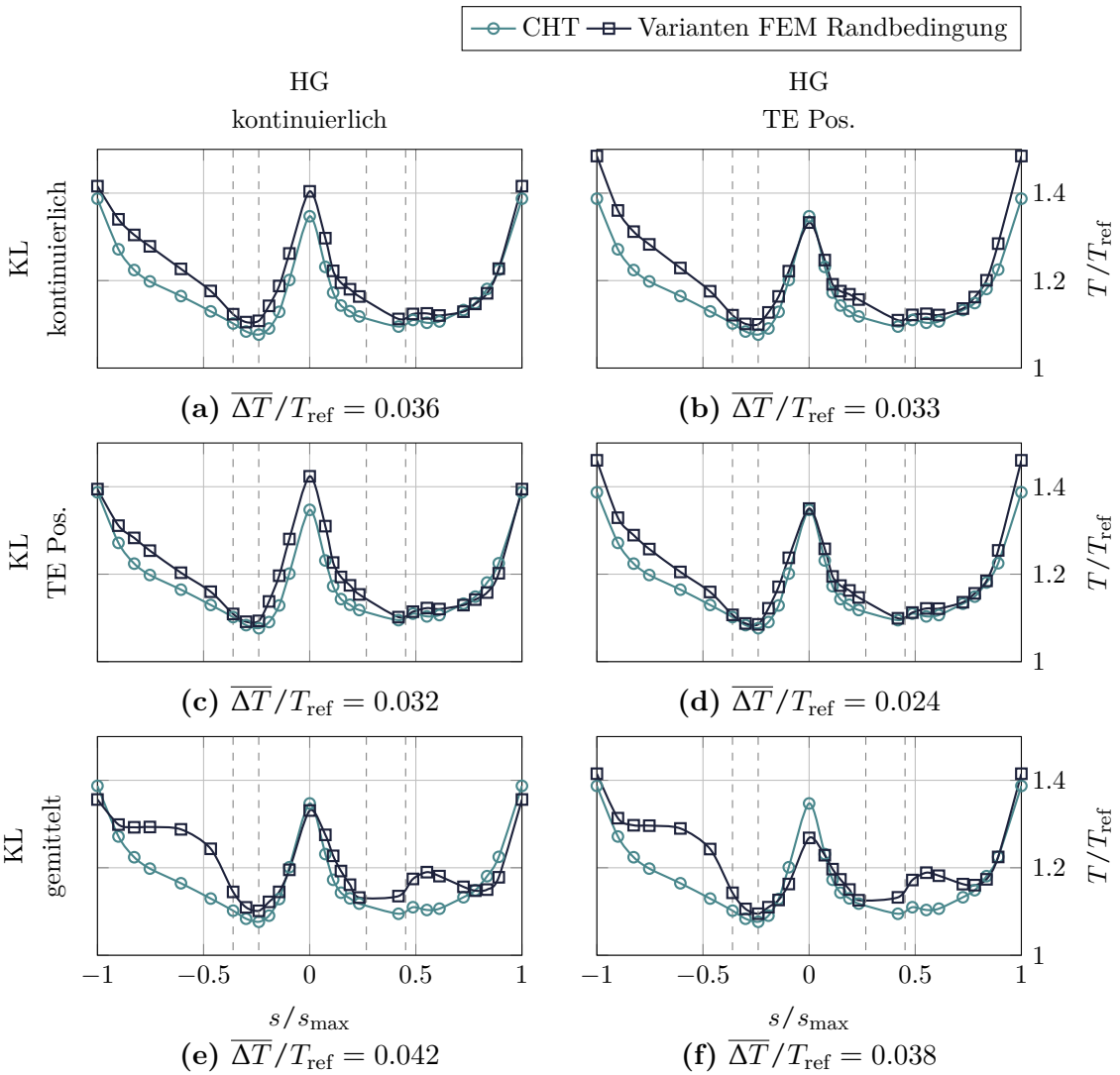


Abb. 5.6: Vergleich verschiedener Randbedingungen für Heißgas (HG) und Kühlluftseite (KL). Die Variation der Randbedingung ist durch die Zeilen/Spalten dargestellt.

1. Spalte: kontinuierliche Randbedingung für die Heißgasseite

2. Spalte: vereinfachte Randbedingung für die Heißgasseite(interpoliert zwischen den Positionen der Thermoelemente)

1. Zeile: kontinuierliche Randbedingung für die Kühlluftseite

2. Zeile: vereinfachte Randbedingung für die Kühlluftseite (interpoliert zwischen den Positionen der Thermoelemente)

3. Zeile: konstante, gemittelte Randbedingung für jeden Kühlkanal

ches aufgrund der deutlichen Reduktion des Rechenaufwands gewählt wurde. Zusätzlich wurden die Geometrieelemente der Turbulatoren nicht im Modell abgebildet, um das Rechengebiet möglichst einfach zu halten. Qualitativ ist der Verlauf jedoch sehr ähnlich, nur das Temperaturniveau wird leicht überschätzt.

Die größten Abweichungen zu den Ergebnissen der CHT ergeben sich bei Verwendung der konstanten, gemittelten Randbedingung für die Kühlkanäle, dargestellt in Abb. 5.6e und Abb. 5.6f. Hier ergeben sich auch deutliche qualitative Unterschiede der Temperaturverteilungen, insbesondere im mittleren und hinteren Bereich der Schaufel etwa zwischen 30 % bis 90 % der Lauflänge auf Druck- und Saugseite.

Ein Kompromiss zwischen möglichst einfacher Randbedingung (d.h. mit geringer Anzahl an Werten) und qualitativ sinnvollem Verlauf der resultierenden Temperaturverteilung stellt die Verwendung der vereinfachten Randbedingung auf Heißgas- und Kühlluftseite dar (Abb. 5.6d). Die Anzahl der vorgegebenen Werte wird im Vergleich zur kontinuierlichen Randbedingung um über 90 % reduziert, der Temperaturverlauf bleibt aber qualitativ gleichwertig zu dem der CHT. Für diesen Fall ist auch die mittelere Abweichung der Temperaturen zwischen CHT und FEM am niedrigsten. Dies ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass Schwankungen des Wärmestroms bzw. des Wärmeübergangskoeffizienten abgeschwächt werden und insbesondere auf der Kühlluftseite einige Extremwerte durch die Auswahl einzelner Punkte nicht berücksichtigt werden. Beim zweidimensionalen Rechengebiet der FEM werden solche Spitzen im Gegensatz zur CHT nicht durch Querwärmeleitung ausgeglichen. Für die äußere Randbedingung ist bei Reduktion der vorgegebenen Punkte gleichzeitig eine Verschmälerung des Wärmestrommaximums am Staupunkt zu beobachten und damit eine Verringerung des Wärmstroms an den benachbarten Knoten. Das Temperaturniveau liegt insgesamt etwas niedriger als für den Fall der kontinuierlichen Randbedingung. Die beiden Fälle in Abb. 5.6b und Abb. 5.6c stellen Mischformen dar, wobei jeweils eine Randbedingung kontinuierlich und eine in vereinfachter Form aufgebracht wird. Für die vorgestellte Methode wird die Randbedingung in Form reduzierter Werte, vorgegeben an den Thermoelementpositionen (Abb. 5.6d) verwendet.

5.3 Sensitivitätsanalyse

Da es sich beim vorliegenden Problem um ein inverses handelt, ist eine gewisse Instabilität der Lösung zu erwarten. Kleine Änderungen der Randbedingungen, in diesem

Fall die vorgegebenen Temperaturen des Experiments, wirken sich stark auf die Lösung, hier der äußere Wärmestrom, aus. Am vorliegenden Problem lässt sich dies anschaulich auch dadurch erklären, dass die lokale Änderung des Wärmestroms sich nicht nur auf das nächstgelegene Thermoelement auswirkt, sondern auf nahegelegene Bereiche und benachbarte Thermoelemente. Die lokale Änderung wird sozusagen über einen größeren Bereich „verschmiert“. Die aus einer Änderung des Wärmestroms resultierende

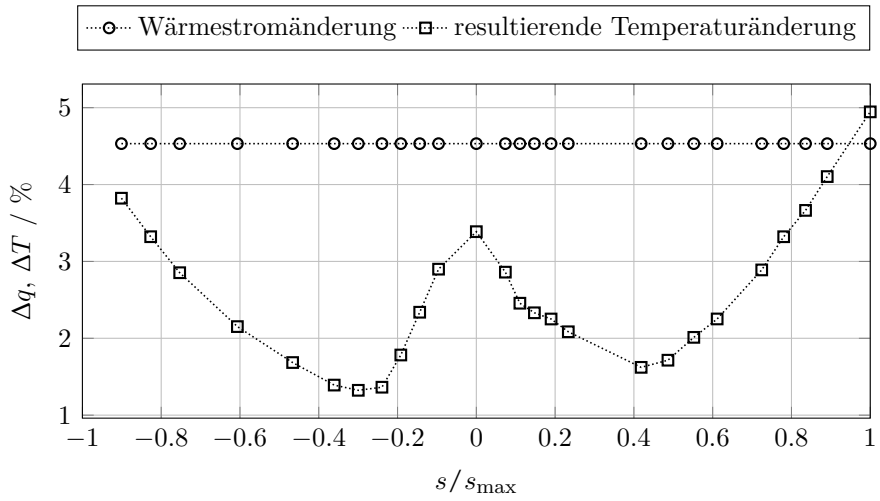


Abb. 5.7: Prozentuale Änderung des Wärmestroms und daraus resultierende Temperaturänderung

Temperaturänderung ist verhältnismäßig niedriger als die verursachende Wärmestromänderung. Dies ist in Abb. 5.7 dargestellt, wobei der Betriebspunkt HGK 1273/573 als Referenz verwendet wird. Der Wärmestrom wird um einen konstanten Betrag gegenüber dem Referenzwert auf der gesamten Lauflänge erhöht und die Änderung bezogen auf die Referenz dargestellt. Die Temperaturverteilungen für die ursprüngliche und erhöhte Wärmestromrandbedingung werden mittels FEM berechnet. Die Temperaturerhöhung wird ebenfalls auf die Referenz in Form des Temperaturpotentials $T_{HG} - T_{KL}$ bei dem verwendeten Betriebspunkt bezogen. Die relative Temperaturänderung fällt dabei geringer aus als die dazugehörige Änderung des Wärmestroms. Das direkte Problem, nämlich die Berechnung der Temperatur aus der Wärmestromrandbedingung, ist also stabil - d.h. kleine Änderungen der Randbedingung haben nur eine sehr kleine Wirkung auf das Ergebnis. Für das vorliegende inverse Problem kehrt sich dieser Zusammenhang um. Eine kleine Änderung der Temperatur als Randbedingung führt zu einer größeren Ände-

rung bzw. einer größeren Unsicherheit in der Wärmestromlösung. Die Unsicherheit der Temperaturmessung verstärkt sich somit bei der Betrachtung des inversen Problems und führt zu einer größeren Unsicherheit der Lösung bzw. zu einer größeren Anzahl möglicher Lösungen.

Ein weiterer Aspekt der Sensitivität ist die Frage, ob alle Eingangsvariablen gleichermaßen das Ergebnis beeinflussen. Da für alle Eingangsvariablen formelmäßig der gleiche Zusammenhang zu den Ausgangsvariablen besteht, könnte man annehmen, dass sich gleiche Änderungen der einzelnen Variablen auch gleich auf das Ergebnis auswirken. Dass dies nicht so ist, wird anhand einer Sensitivitätsanalyse veranschaulicht. Diese wird mittels eines Screeningplans nach Morris (1991) durchgeführt. Dieser dient dazu, die relevanten Parameter in einer mehrdimensionalen Analyse zu identifizieren. Damit kann sowohl die Stärke des Einflusses der einzelnen Parameter abgeschätzt werden, als auch nichtlineare Einflüsse und Interaktionen mit anderen Parametern. In der vorliegenden Arbeit wird die Analyse genutzt, um den Einfluss der Wärmestromrandbedingung in Abhängigkeit von ihrer Position entlang der Schaufel auf die Gesamt-Temperaturdifferenz darzustellen. Da die Wärmeströme im Rahmen der Optimierung unabhängig voneinander an den Positionen der Thermoelemente vorgegeben werden, wird jeder Wärmestromwert als separate Variable betrachtet. Mit der verwendeten Analyse werden sogenannte elementare Effekte für die einzelnen Variablen berechnet. Dazu werden die Variablen einzeln variiert, wobei dies randomisiert im gesamten Gültigkeitsbereich wiederholt wird. Der Mittelwert der resultierenden Änderungen gibt Aufschluss über den Einfluss der Variablen auf die Zielfunktion. Die Standardabweichung der elementaren Effekte ist ein Indikator für nichtlineare Einflüsse oder Interkation zwischen den Variablen. Durch geschickte Variation können pro Funktionsaufruf mehrere Effekte gleichzeitig betrachtet werden, sodass die Zahl der notwendigen Auswertungen der k-dimensionalen Funktion eher in der Größenordnung $\mathcal{O} \sim k$ als $\mathcal{O} \sim k^2$ liegt. Für eine detaillierte Beschreibung des Verfahrens wird auf Morris (1991) und Forrester et al. (2008) verwiesen. Im vorliegenden Fall wird als Ausgangsgröße die Temperaturdifferenz zwischen experimentell bestimmter Temperatur und mittels FEM berechneter Temperatur betrachtet. Abb. 5.8 zeigt das Ergebnis der Analyse. Dabei sind die elementaren Effekte für jede Eingangsvariable als Mittelwert mit der Standardabweichung als Fehlerbalken dargestellt. Die absoluten Werte sind hier nicht relevant, da lediglich die relativen Unterschiede betrachtet werden. Die Ergebnisse wurden über der Laufkoordinate aufgetragen, welche die Position der jeweiligen Randbedingung entlang der Schaufel darstellt. Da alle Eingangsvariablen mit demselben physikalischen Zusammenhang auf die Ausgangsvariable wirken, wäre eine relativ

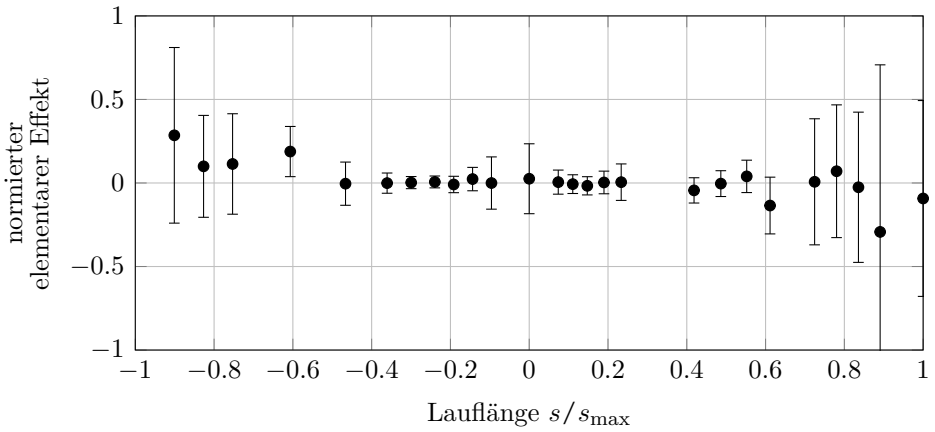


Abb. 5.8: Sensitivitätsanalyse der Wärmeströme an der Heißgaskanal-Schaufel nach Morris (1991)

gleichmäßige Sensitivität zu erwarten. Im Gegensatz zu der Erwartung einer homogenen Sensitivität ist zu erkennen, dass besonders im hinteren Bereich der Schaufel der Einfluss der Eingangsvariablen größer ist. Hier wirken sich Änderungen der Eingangsgrößen stärker auf die Ausgangsgröße aus. Dies gilt für die Hinterkante und den Bereich des 3. Kanals. Da die zugrunde liegenden Gleichungen für alle Variablen dieselben sind, liegt

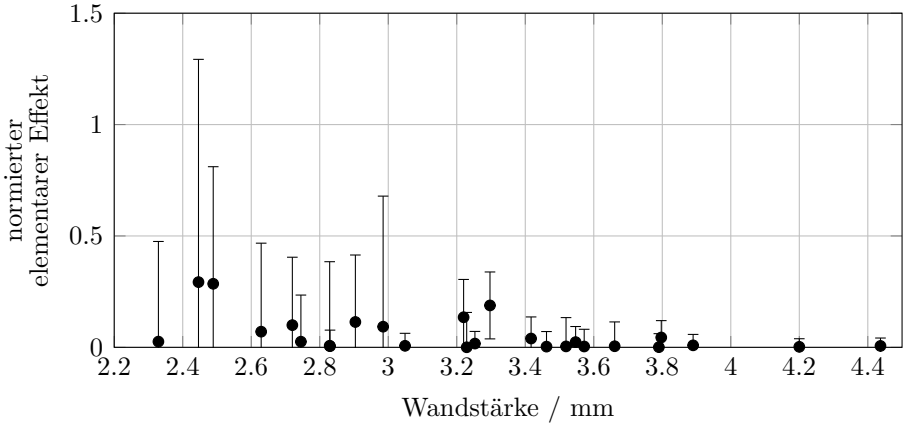


Abb. 5.9: Elementare Effekte sortiert nach aufsteigender Wandstaerke

eine andere Ursache für die unterschiedliche Stärke der Einflüsse nahe. Hierfür kommen beispielsweise geometrische Gegebenheiten in Frage, wie die variable Wandstärke der betrachteten Schaufel. In Abb. 5.9 sind die Effekte aus Abb. 5.8 noch einmal dargestellt, sortiert nach aufsteigender Wandstärke an der jeweiligen Position. Mit einigen Ausnah-

men lässt sich die klare Tendenz erkennen, dass der Einfluss des Wandwärmestroms an einer Position mit steigender Wandstärke abnimmt. Zum einen liegen die Messstellen immer mittig in der Wand, sodass bei einer geringeren Wandstärke der Abstand zur Heißgasseite ebenfalls abnimmt und die Messstellen schneller auf Veränderungen der Randbedingungen reagieren. Zum anderen ist der Einfluss auf benachbarte Messstellen größer, da sich die eingetragene Wärmemenge lateral stärker ausbreitet. Für eine Verringerung der freien Variablen empfiehlt es sich, solche mit einem geringeren Einfluss auf das Gesamtergebnis auszuwählen. Dies gilt hier für die Messstellen im vorderen Bereich der Druck- und Saugseite, stromab der Vorderkante. In der vorliegenden Arbeit werden dennoch alle gezeigten Punkte für die Optimierung freigegeben. In diesem Bereich liegen Temperaturgradienten vor, die auf lokale Strömungsphänomene zurück zu führen sind. Eine Verfälschung des Verlaufs durch Nichtbeachtung dieser Punkte soll somit vermieden werden.

5.4 Einfluss der Regularisierung

Der Einfluss der Regularisierung auf die Lösung der Optimierung wird im folgenden Abschnitt anhand der Ergebnisse des Heißgaskanal-Betriebspunktes HGK 1273/573 bei 1273 K Heißgastemperatur und 573 K Kühllufttemperatur gezeigt. Dazu werden die Ergebnisse ohne Regularisierung sowie eine Variation des Regularisierungsparameters gezeigt.

In Abb. 5.10 sind zunächst die Ergebnisse der Optimierung ohne Regularisierung abgebildet. Hier wurde $r = 0$ gesetzt und somit lediglich die Temperaturdifferenz für die Optimierung berücksichtigt. Die Optimierung wurde mit der modifizierten Powell-Methode durchgeführt. In Abb. 5.10a ist die normierte Temperaturverteilung gezeigt, die bei diesem Betriebspunkt im Mittelschnitt der Schaufel gemessen wurde. Als Referenztemperatur wurde das Temperaturpotential des Betriebspunkts verwendet. Zusätzlich sind die durch die Optimierung auf die Temperaturdifferenz bestimmten Temperaturen, sowie die in der CHT berechneten Materialtemperaturen ebenfalls normiert dargestellt. Das Ziel der Optimierung ist in diesem Fall lediglich die minimale Differenz zwischen berechneten und gemessenen Temperaturen. Dieses wurde mit einer mittleren Abweichung von 3.6 K für die meisten Messpunkte innerhalb der Messunsicherheit von ca. 4.93 K erfüllt. Bei Betrachtung des zugehörigen Wärmestroms in Abb. 5.10b fällt jedoch auf, dass dieser unrealistisch hohe Schwankungen aufweist. Dies gilt insbesondere für den

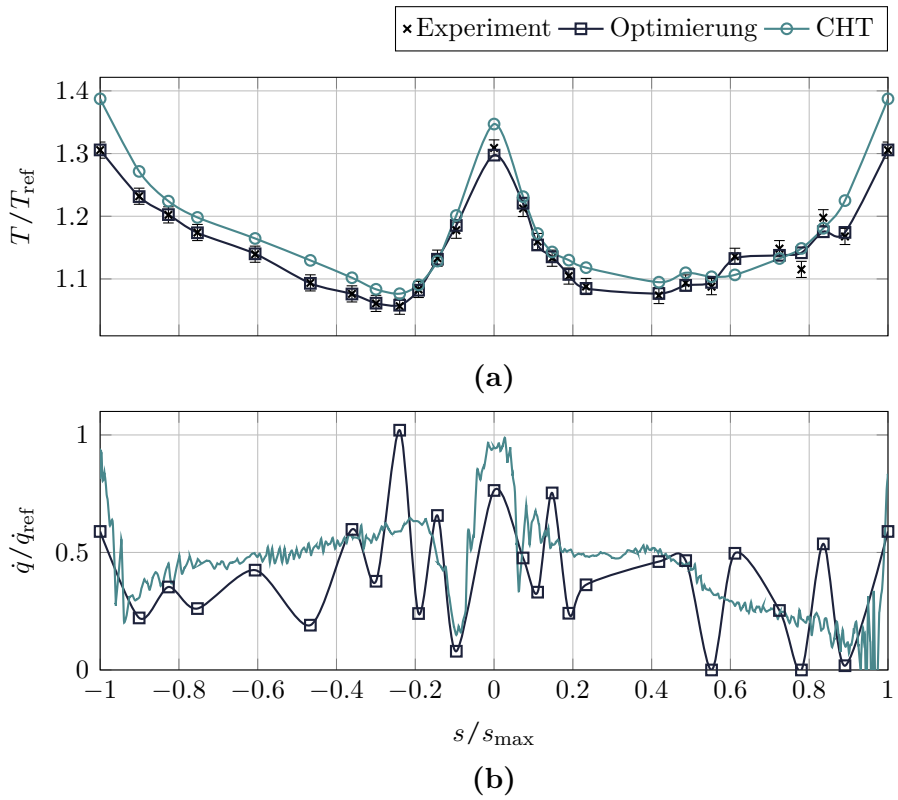


Abb. 5.10: Wärmestromverlauf und resultierende Temperaturverteilung als Ergebnis der Optimierung für den Betriebspunkt HGK 1273/573 mittels Powell-Algorithmus ohne Regularisierung, im Vergleich zu Temperaturverteilung aus Experiment und CHT

hinteren Bereich der Saugseite, in dem die experimentell bestimmten Temperaturen im Bereich von 50 % bis 100 % der Lauflänge stark schwanken. Diese Schwankungen sind möglicherweise fertigungstechnisch bedingt, da benachbarte Thermoelemente aufgrund der in Abschnitt 4.3.3 beschriebenen Fertigungsstrategie und den damit verbundenen Unsicherheiten in unterschiedlichen Ebenen liegen. In diesem Bereich werden die Temperaturen trotz der hohen Schwankungen des Wärmestroms nicht genau getroffen. Auch im vorderen Bereich der Druckseite, zwischen 0 % bis −40 % der Lauflänge sind die Schwankungen des resultierenden Wärmestroms stark ausgeprägt. Die auf der Druckseite vorliegende Ablösung könnte hier den Verlauf beeinflussen.

Wie bereits in Abschnitt 4.2 diskutiert, sind die hohen Schwankungen des Wärmestroms auf *Overfitting* zurückzuführen. Um dies zu verhindern und die möglichen Lösungen auf

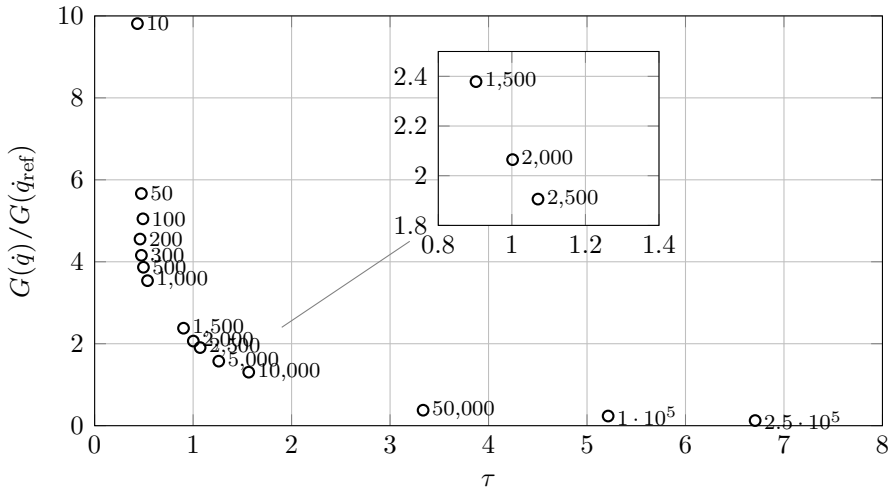


Abb. 5.11: Ergebnisse der Optimierung mit modifiziertem Powell-Algorithmus, Variation des Regularisierungsparameters r. Optimierungsgrößen $R(T)$ und $G(\dot{q})$ wurden normiert zu τ und $G(\dot{q})/G(\dot{q}_{\mathrm{ref}})$.

ihre physikalische Sinnhaftigkeit zu überprüfen und zu filtern, wird im Folgenden die Optimierung zusammen mit einer Regularisierung durchgeführt. Diese wurde bereits in Kap. 4.2 vorgestellt. In Abb. 5.11 sind die Optimierungsergebnisse des zuvor verwendeten Betriebspunkts bei einer Variation des Regularisierungsparameters zwischen 10 und $2.5 \cdot 10^5$ dargestellt. Dazu sind die beiden Optimierungsziele, nämlich die Temperaturdifferenz sowie das Ergebnis der Straffunktion für die jeweilige Wärmestromverteilung, über einander aufgetragen. Diese Darstellung entspricht der in Abschnitt 2.4.2, Abb. 2.14 vorgestellten *L-Curve*. Die beiden Ziele werden während der Optimierung mit Hilfe des Regularisierungsparameters r gegeneinander gewichtet, sodass theoretisch für jedes r ein eindeutiges Ergebnis vorliegt. In der Realität ist das tatsächliche Ergebnis auch noch von der Wahl des Optimierungs-Algorithmus abhängig, wie später noch gezeigt wird. Die beiden Optimierungsgrößen $R(T)$ und $G(\dot{q})$ sind in Abb. 5.11 normiert dargestellt. Das Residuum der Temperatur $R(T)$ wird auf die Messunsicherheit e bezogen und mittels

$$\tau = \frac{R(T)}{ne^2} \tag{5.1}$$

zu einer relativen Temperaturdifferenz τ umgeformt. Auch die Straffunktion $G(\dot{q})$ wurde auf einen Referenzwert bezogen. Da hiermit lediglich die Achse skaliert wird, kann dieser willkürlich gewählt werden. Um eine realistische Bezugsgröße zu schaffen, wurde für den Referenzwert $G(\dot{q}_{\mathrm{ref}})$ die Straffunktion auf die Wärmestromverteilung angewendet, welche mittels der CHT für den vorliegenden Betriebspunkt ermittelt wurde. Aus dem

Diagramm kann also neben der Temperaturabweichung auch die Ähnlichkeit zur CHT abgelesen werden. Aus Abb. 5.11 ist ersichtlich, dass die Gewichtung der unterschiedlichen Optimierungsziele durch den Parameter r stark beeinflusst, welches Optimierungsziel bevorzugt wird. Ergebnisse, die mit vergleichsweise kleinen Werten des Regularisierungsparameters ermittelt wurden, liegen in Abb. 5.11 im Bereich niedriger relativer Temperaturdifferenzen τ. Die Bewertung der möglichen Lösung mittels des Strafterms beeinflusst hier zwar die finale Lösung, die Temperaturdifferenz wird jedoch priorisiert. Bei kleiner werdendem r nähern sich die Temperaturdifferenzen scheinbar asymptotisch einem niedrigen Wert an. Gleichzeitig steigt der Wert des Strafterms $G(\dot{q})/G(\dot{q}_{\mathrm{ref}})$ stark an, welcher mit abnehmender Gewichtung in das Ergebnis eingeht. Da der Strafterm unphysikalische Lösungen verhindern soll, ist somit nicht mehr gewährleistet, dass die Lösungen sinnvolle Verläufe annehmen. Bei zunehmendem Wert von r wird der Strafterm $G(\dot{q})$ immer stärker gewichtet, sodass die hiermit bevorzugten Eigenschaften der Eingangsgröße $\dot{q}$ einen größeren Einfluss auf das Ergebnis haben. Die Temperaturdifferenzen können dabei im Extremfall auf ein Vielfaches der Messunsicherheit steigen, sodass die resultierende Temperatur nur noch wenig Ähnlichkeit mit der gemessenen Temperaturverteilung hat. Der resultierende Wärmestrom $\dot{q}$ wird dann eine Form annehmen, die durch den Strafterm $G(\dot{q})$ begünstigt wird. Das bedeutet, dass sich der Gradient des Wärmestroms $|dq^*/ds^*|$ dem des gemittelten Vergleichswert annähert. Daher ist selbst für diesen Fall nicht automatisch eine Ähnlichkeit zu der mittels CHT ermittelten Wärmestromverteilung zu erwarten. Im Folgenden werden zwei Beispiele für diese Extremfälle gezeigt.

Ein Beispiel für eine Lösung mit sehr niedrigem Regularisierungsparameter ist in Abb. 5.12 dargestellt. Abb. 5.12a zeigt die ermittelte normierte Temperaturverteilung, aufgetragen über der relativen Lauflänge s/s_{max}. Zusätzlich sind die experimentell ermittelten Temperaturen, welche die Referenz für die Temperaturdifferenz darstellen, abgebildet. Zum Vergleich ist außerdem die mittels CHT berechnete Temperaturverteilung abgebildet. In Abb. 5.12b sind die dazu gehörigen Wärmestromverteilungen dargestellt. Die mittels CHT bestimmte Wärmestromverteilung soll hier lediglich dem Vergleich dienen. Sowohl für den Wärmestrom als auch für die Temperaturverteilung ist zusätzlich zur Lösung ein Bereich dargestellt, der die Bandbreite möglicher realistischer Lösungen darstellt. Dazu wird für jedes im Laufe der Optimierung berechnete Ergebnis die relative Temperaturdifferenz τ bestimmt. Als Referenz wird die relative Temperaturdifferenz τ_{OPT} des Optimierungsergebnisses herangezogen. Die hinterlegten Bereiche in Abb. 5.12 enthalten alle in dieser Optimierung ermittelten Temperaturverteilungen sowie die zugehö-

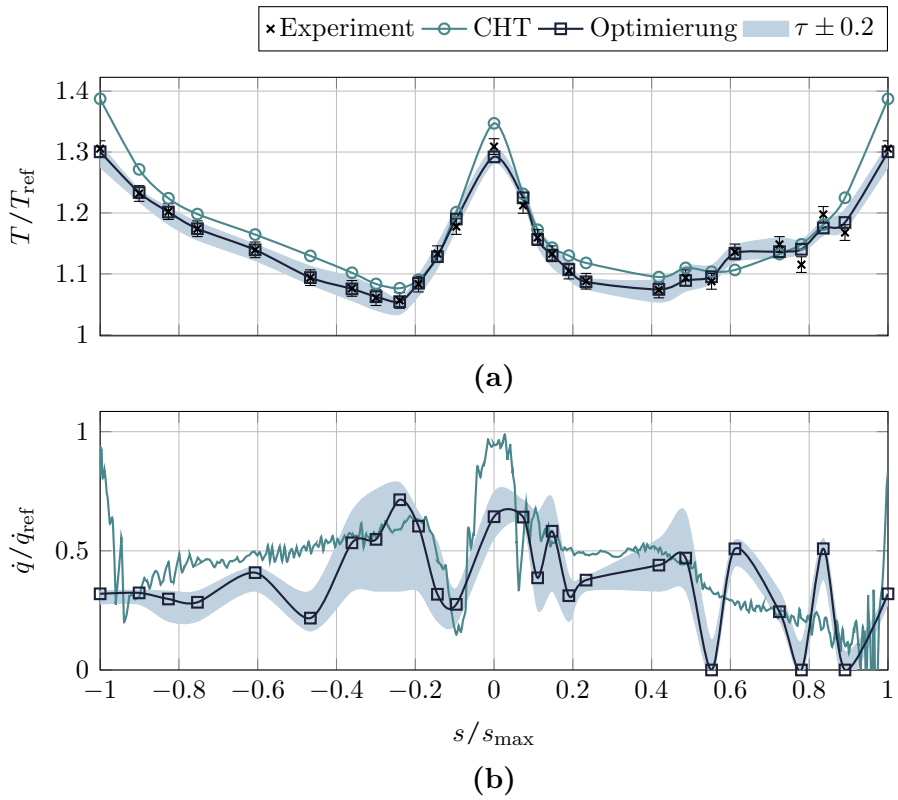


Abb. 5.12: Ergebnisse der Optimierung für den Betriebspunkt HGK 1273/573 mittels Powell-Algorithmus. Regularisierungsparameter $r = 10 < r_{\mathrm{OPT}}$. τ von 0.43 bis 0.65. $\tau_{\mathrm{OPT}} = 0.43$

rigen Wärmestromverteilungen, bei denen die relative Temperaturdifferenz im Bereich $\tau = \tau_{\mathrm{OPT}} \pm 0.2$ liegt. In einigen Fällen liegt die untere Grenze jedoch höher oder sogar bei τ_{OPT}, wenn während der Optimierung keine oder nur wenige Punkte mit einer geringeren Abweichung zur gemessenen Temperatur gefunden wurden. Die Grenzwerte für die Darstellung sowie der Wert für τ_{OPT} sind jeweils in der Bildunterschrift angegeben. Diese Darstellung wird im Folgenden für alle gezeigten Ergebnisse verwendet.

Die in Abb. 5.12 dargestellten Ergebnisse wurden mit einem sehr niedrigen Regularisierungsparameter ermittelt, sodass diese erwartungsgemäß den Ergebnissen ohne Regularisierung sehr ähnlich sehen. Die Temperaturverteilung stimmt, wie bei den Ergebnissen ohne Regularisierung, sehr gut mit den experimentellen Daten überein. Da die Temperaturdifferenz hier als dominante Optimierungsgröße verwendet wurde, ist ein solches Ergebnis nicht überraschend. Im Vergleich zu den Ergebnissen mit $r = 0$ sind jedoch Effekte aufgrund des Einflusses des Strafterms zu sehen. Die Wärmestromverteilung auf der

Druckseite im Bereich $-0.1\,\mathrm{s/s_{max}}$ bis $-0.4\,\mathrm{s/s_{max}}$ weist hier sichtbar geringere Schwankungen auf als die in Abb. 5.10 gezeigte Lösung ohne Regularisierung. Auch im Bereich der Hinterkante ab etwa $-0.75\,\mathrm{s/s_{max}}$ ist der Verlauf etwas geglättet. Im Vergleich zu den Ergebnissen ohne Regularisierung stimmen die Temperaturen in diesem Bereich ähnlich gut mit den experimentell bestimmten Werten überein. Dies zeigt den Mehrwert der Regularisierung. Aufgrund der Trägheit der Temperaturverteilung gegenüber Veränderungen des Wärmestroms (siehe auch Kap. 5.3) gibt es eine Reihe möglicher Lösungen, die zu gleichen bzw. sehr ähnlichen Temperaturverteilungen führen. Durch Einführung einer Regularisierung kann also die Qualität der Wärmestrom-Lösung deutlich verbessert werden, ohne dass die Abweichung der resultierenden Temperatur im selben Maß steigt. Da der Strafterm in diesem Beispiel nur einen geringen Einfluss hat, sind jedoch nach wie vor unphysikalische Schwankungen des Wärmestroms im Vergleich zur CHT zu sehen. Besonders deutlich sind diese im hinteren Bereich der Saugseite, ab etwa $0.5\,\mathrm{s/s_{max}}$. In diesem Gebiet sind Temperaturschwankungen in den experimentell bestimmten Daten vorhanden, welche möglicherweise auf die Platzierung der Sensoren zurück zu führen sind. Die hieraus entstehenden hohen Temperaturdifferenzen begünstigen einen stark schwankenden Wärmestrom, da der berechnete Temperaturverlauf diesen Schwankungen nicht folgen kann.

Der zweite Extremfall stellt die Wahl eines sehr großen Regularisierungsparameters dar, sodass der Strafterm $G(\dot{q})$ deutlich stärker gewichtet wird als die Temperaturdifferenz $R(T)$. Ein Beispiel für einen solchen Fall ist in Abb. 5.13 für $r = 250.000$ dargestellt. Auch wenn der qualitative Verlauf der resultierenden Temperaturverteilung dem des Experiments ähnelt, wird hier das Temperaturniveau deutlich unterschätzt. Dies spiegelt sich auch in dem erhöhten Wert von $\tau_{\mathrm{OPT}} = 6.95$ im Ergebnis der Optimierung wieder. Das Ergebnis dieser Optimierung findet sich im *L-Curve* Diagramm (Abb. 5.11) sehr weit rechts vom Scheitelpunkt, also bei niedrigen Werten des Strafterms, dafür aber einer hohen relativen Temperaturdifferenz τ. Die final ermittelte Wärmestromverteilung ist stark geglättet und weist nur in den Bereichen um den Staupunkt und die Hinterkante größere Gradienten auf. Dieses Verhalten wurde durch die Wahl des Strafterms begünstigt, welcher nicht direkt den Verlauf des Wärmestroms beeinflusst, sondern in Form von Gradienteninformationen, quasi als *Prior*, in die Optimierung einbezogen wird. Dadurch wird verhindert, dass das Ergebnis ungewollt auf einen vorgegebenen Verlauf gefittet wird. Es ist also nicht zwangsläufig eine Ähnlichkeit des Wärmestromverlaufs zum CHT-Ergebnis zu erwarten.

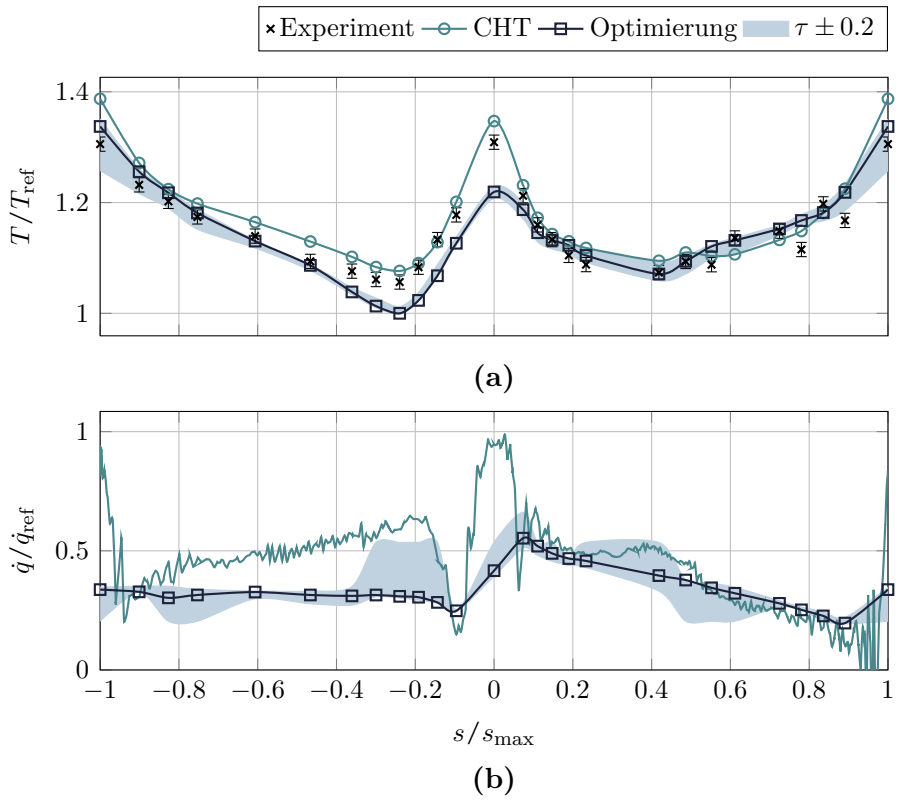


Abb. 5.13: Ergebnisse der Optimierung für den Betriebspunkt HGK 1273/573 mittels Powell-Algorithmus. $r = 250000 > r_{\mathrm{OPT}}$, τ von 6.75 bis 7.15. $\tau_{\mathrm{OPT}} = 6.95$

Ein realistisches Ergebnis muss also ein Kompromiss beider Extreme sein und sich im Bereich des Scheitelpunkts von Abb. 5.11 befinden. Nach *Morozovs Discrepancy Principle* (siehe Kap. 2.4.2) ist diejenige Lösung am vertrauenswürdigsten, bei welcher die verbleibende Abweichung zwischen gemessener und berechneter Temperaturverteilung etwa dem Messfehler entspricht. Für das vorliegende Modell sollte dies bei etwa $\tau = 1$ liegen, was hier bei $r = 2000$ der Fall ist. Zu beachten ist hierbei, dass der Wert des Regularisierungsparameters von der tatsächlichen Implementierung des Problems abhängig ist und nicht direkt auf andere Betriebspunkte übertragen werden kann.

Das Ergebnis für $r = 2000$ ist in Abb. 5.14 dargestellt. Die relative Temperaturabweichung zum Experiment liegt bei $\tau = 1$. Zusätzlich ist der Bereich für Ergebnisse mit $\tau = [0.93; 1.2]$ dargestellt. Die Grenzen sind so gewählt, dass die um $\pm 20\,\%$ abweichende Temperaturdifferenz zum besten Ergebnis der Gesamtoptimierung dargestellt wird. Die minimale erreichte relative Temperaturdifferenz liegt für diese Optimierung bei $\tau = 0.93$. Im Gegensatz zu der Lösung mit einer weniger starken Gewichtung der Form des Lö-

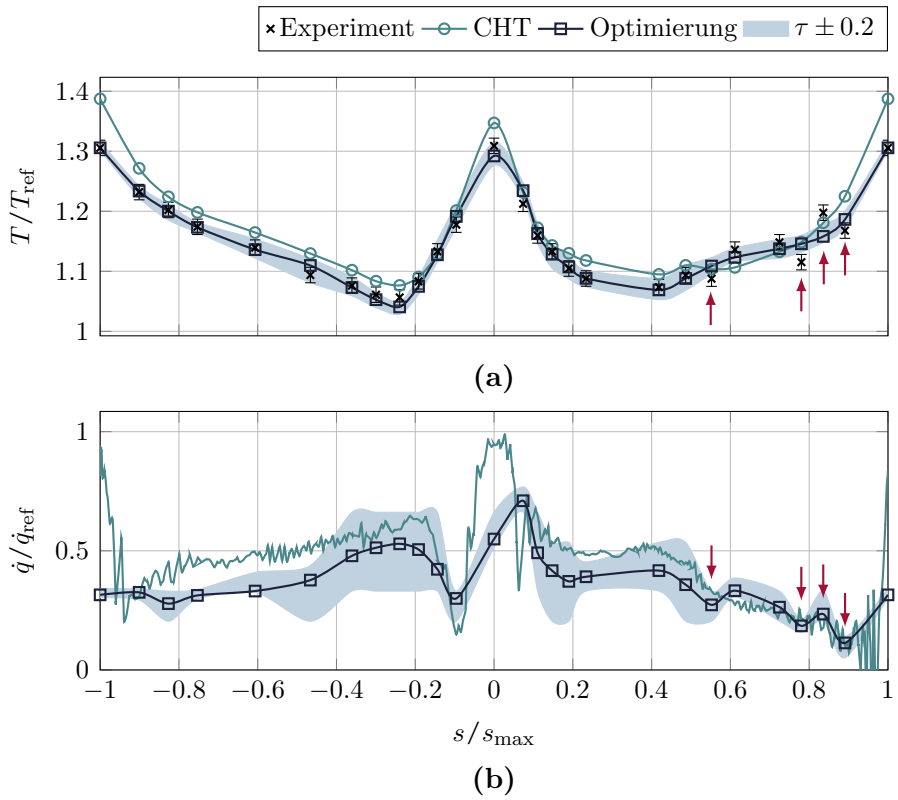


Abb. 5.14: Ergebnisse der Optimierung für den Betriebspunkt HGK 1273/573 mittels Powell-Algorithmus. Regularisierungsparameter $r = 2000$ ausgewählt nach *L-Curve* und *Morozov's Discrepancy Principle*. τ von 0.93 bis 1.2. $\tau_{\mathrm{OPT}} = 1$

sungsvektors durch den Strafterm $G(\dot{q})$ ist der Temperaturverlauf auch auf der Saugseite glatt. Die Schwankungen der experimentellen Daten werden an dieser Stelle nicht berücksichtigt. Der Verlauf des Wärmestroms besitzt qualitative Ähnlichkeiten zu der Lösung der CHT. Das Niveau liegt insgesamt etwas niedriger als die CHT-Lösung, wobei auch die berechneten Temperaturen niedriger sind als die der CHT und damit näher an den experimentell bestimmten Temperaturen liegen. Außerdem ist das Maximum des Wärmestroms vom Staupunkt etwas zur Saugseite hin verschoben. Da ein ähnlicher Effekt bei hohen Werten des Regularisierungsparameters auftritt, wird die Form des Strafterms als begünstigend für diesen Effekt vermutet. Dies tritt allerdings nicht durchweg auf, wie im Folgenden noch gezeigt wird. Im Bereich von 10 % bis 50 % der Lauflänge auf der Saugseite ist der qualitative Verlauf des Wärmestroms dem der CHT-Lösung sehr ähnlich. Lediglich im hinteren Bereich zwischen 50 % bis 70 % der Lauflänge ist eine Überhöhung des Wärmestroms im Vergleich zur CHT zu beobachten. Die resultierenden berechne-

ten Temperaturen bilden an dieser Stelle jedoch auch den Verlauf der experimentell bestimmten Temperaturen etwas besser ab. Die zwischen 70 % bis 90 % zu beobachtenden Schwankungen sind auch im Verlauf der CHT zu sehen, wenn auch weniger stark ausgeprägt. Bemerkenswert ist hier, dass punktuelle Schwankungen an Stellen auftreten, an denen die gemessenen Temperaturen ebenfalls Ausreißer aufweisen. In Abb. 5.14 sind an den entsprechenden Stellen Pfeile eingezeichnet. An diesen Stellen ist jeweils eine Veränderung des Wärmestroms in Richtung der Temperaturabweichungen zu sehen. Liegt die Temperatur der entsprechneden Messstelle unter dem (geglätteten) Ergebnis, ist eine Absenkung des Wärmestroms zu beobachten, und andersherum. Deutlich extremer ist dies bei den Ergebnissen der Optimierung ohne Regularisierung (Abb. 5.10) oder mit einem nur geringen Einfluss dieser (Abb. 5.12) zu sehen. Hier findet also noch ein Ausgleich der in den Temperaturdaten vorhandenen Schwankungen statt, der jedoch deutlich gedämpft wird.

Zur Hinterkante hin tritt wie erwartet ein leichter Anstieg des Wärmestroms auf, der jeodch niedriger ausfällt als bei der CHT. Der qualitative Verlauf des Wärmestroms auf der Druckseite ist bis auf die hinteren 10 % der Lauflänge gut getroffen. Der Anstieg des Wärmestroms an der Hinterkante ist auf der Druckseite praktisch nicht vorhanden.

5.5 Vergleich der Optimierungs-Algorithmen

Für die Optimierung wurden verschiedene Algorithmen verwendet. Um eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu ermöglichen, werden die unterschiedlichen Algorithmen auf den selben Betriebspunkt (HGK 1273/573, Messung bei 1273 K Heißgastemperatur und 573 K Kühllufttemperatur) angewendet. Auch der Regularisierungsparameter ($r = 2000$) wird aus den vorher gezeigten Ergebnissen übernommen. Neben dem bereits vorgestellten Powell-Algorithmus werden Simulated Annealing und Bayesian Optimization verwendet. Beide wurden bereits in Abschnitt 2.4.3 und Abschnitt 4.2.2 vorgestellt. Die Ergebnisse der beiden Algorithmen sind in Abb. 5.15 (für Simulated Annealing) und Abb. 5.16 (Bayesian Optimization) dargestellt. Die ermittelten Temperaturen stimmen mit einer mittleren Abweichung von 7.8 K (SA) und 6.5 K (BO) gut mit den experimentellen Temperaturen überein. Mit beiden Algorithmen wird das erwartete Maximum des Wärmestroms am Staupunkt gefunden und stimmt vom Niveau mit der CHT-Lösung überein. Auch das durch die Ablösung auf der Druckseite verursachte lokale Absinken des Wärmestroms bei etwa -10 % Lauflänge wird von beiden Verfahren gut wiederge-

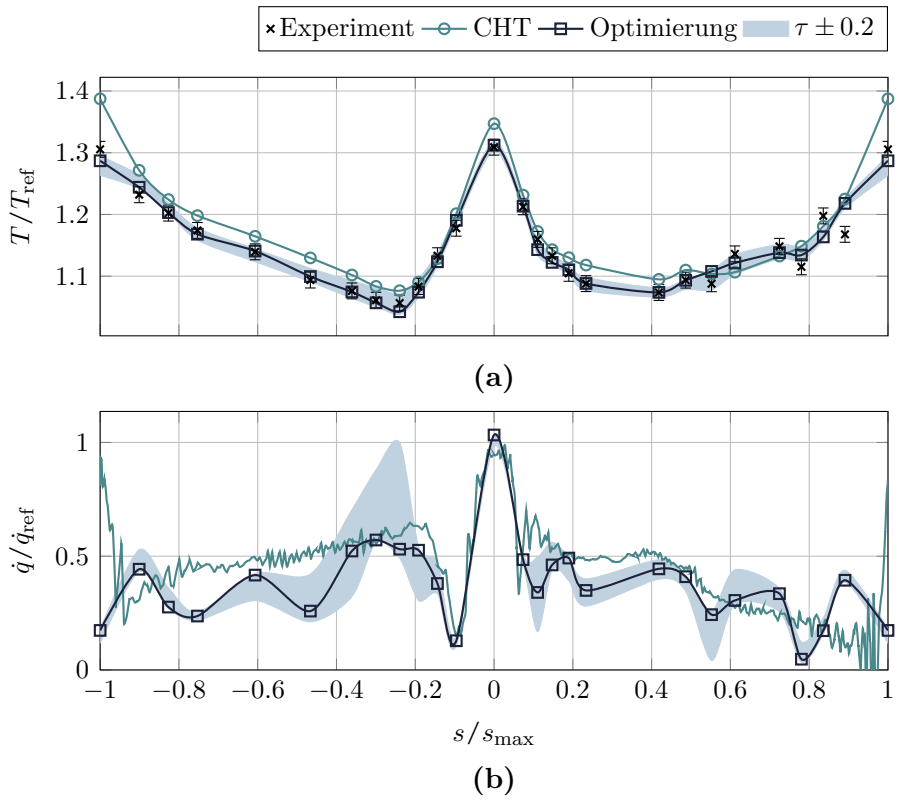


Abb. 5.15: Ergebnisse der Optimierung für den Betriebspunkt HGK 1273/573 mittels Simulated Annealing. Regularisierungsparameter $r = 2000$ ausgewählt nach *L-Curve* und *Morozov's Discrepancy Principle* bei Variation mittels Powell-Algorithmus. τ von 1.18 bis 1.4. $\tau_{\mathrm{OPT}} = 1.2$

geben. Auf der Druckseite liegen beim Simulated Annealing Ergebnis Schwankungen des Wärmestroms ab etwa $-40\,\%$ bis $-80\,\%$ Lauflänge vor, die unterhalb des Niveaus der CHT-Lösung liegen. Im selben Bereich liegt beim Ergebnis der Bayesian Optimization ein lokal verminderter Wärmestrom im Vergleich zur CHT vor. Diese Absenkung des Wärmestroms ist in schwächerer Form auch in den Ergebnissen des Powell Algorithmus zu finden. In diesem Bereich liegen die mittels CHT ermittelten Temperaturen oberhalb der Materialtemperaturen aus dem Experiment und auch außerhalb der ermittelten Messunsicherheit. Möglicherweise wird der Wärmestrom an dieser Stelle von der CHT überschätzt.

Auf der Saugseite zeigen beide Wärmestromverläufe die typischen Schwankungen, die durch schwankende Temperaturen aus dem Experiment begünstigt werden.

Aufgrund der unterschiedlichen Strategien bei der Suche nach dem Optimum unter-

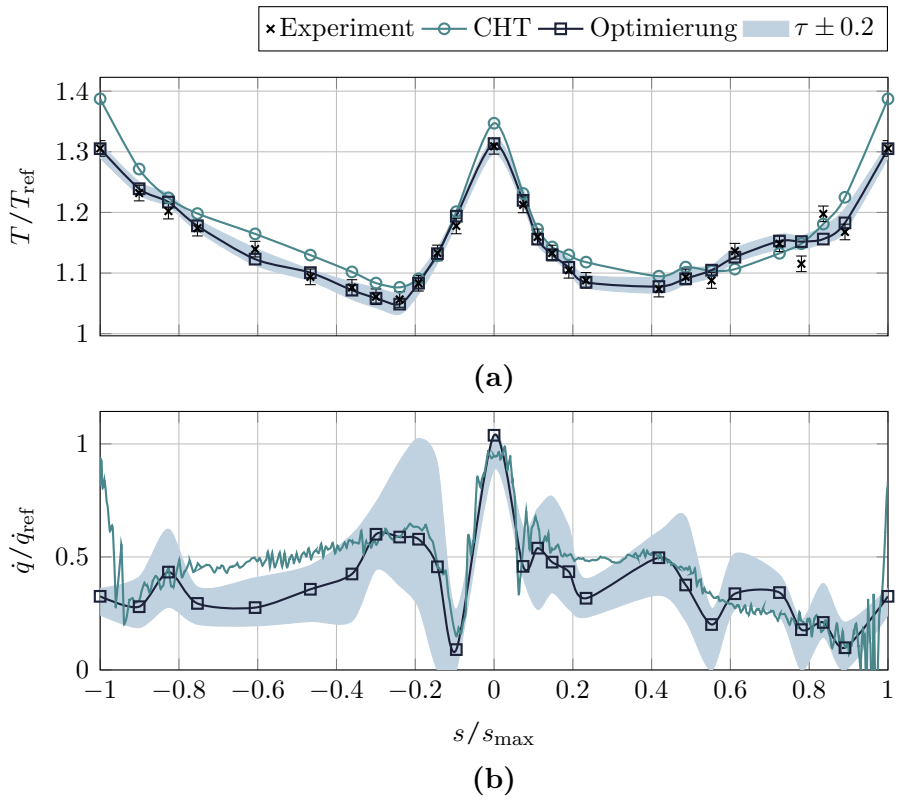


Abb. 5.16: Ergebnisse der Optimierung für den Betriebspunkt HGK 1273/573 mittels Bayesian Optimization. Regularisierungsparameter $r = 2000$ ausgewählt nach *L-Curve* und *Morozov's Discrepancy Principle* bei Variation mittels Powell-Algorithmus. τ von 0.85 bis 1.1. $\tau_{\mathrm{OPT}} = 0.9$

scheiden sich die Algorithmen in der benötigten Anzahl an Funktionsaufrufen sowie der verwendeten Rechenzeit. Abb. 5.17 zeigt Konvergenzplots der drei angewendeten Algorithmen für den genannten Betriebspunkt. Dazu wird das bis zu jedem Schritt beste Ergebnis in Form der zu optimierenden Funktion $R(T) + rG(\dot{q})$ über der Anzahl der bisher durchgeführten Funktionsaufrufe aufgetragen. In Tab. 5.1 sind neben der benötigten Anzahl an Funktionsaufrufen die jeweils notwendige Rechenzeit für alle drei Algorithmen angegeben.

Während sowohl Simulated Annealing als auch der Powell-Algorithmus ein Abbruchkriterium verwenden, wird für Bayesian Optimization ein Budget an Funktionsaufrufen vorgegeben. Ein Teil hiervon wird zur Initialisierung des Ersatzmodells verwendet. Obwohl bei den beiden anderen Algorithmen keine Initialisierung durchgeführt wird, werden die hierfür benötigten Funktionsaufrufe in die Darstellung mit einbezogen. Genau

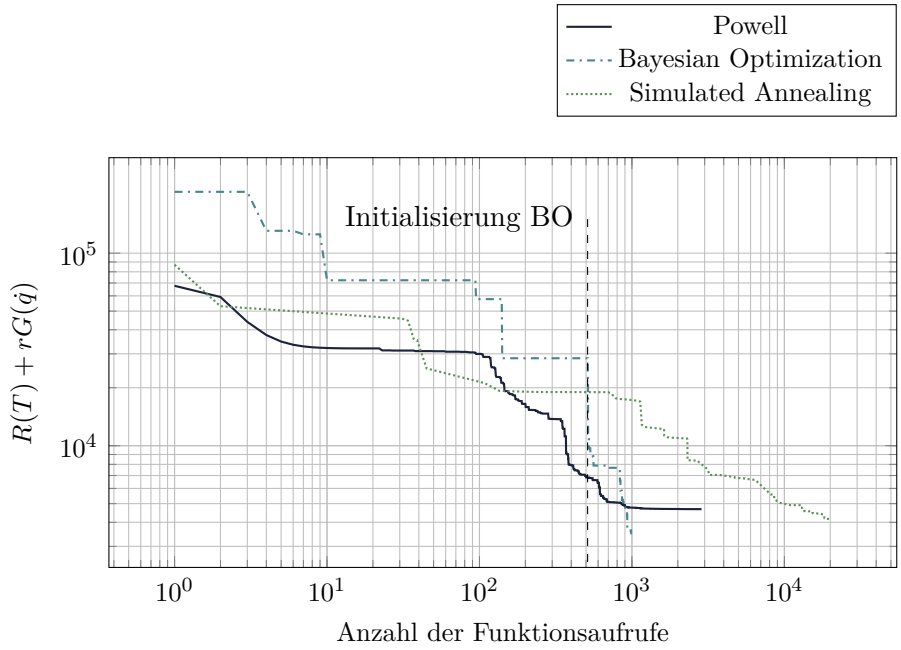


Abb. 5.17: Verlauf der Optimierung der verschiedenen Algorithmen für den Betriebspunkt HGK 1273/573 bei $r = 2000$. Aktuell bestes Ergebnis (Gesamtwert $R(T) + rG(\dot{q})$) über Anzahl der Funktionsaufrufe

genommen startet der Algorithmus jedoch erst auf Grundlage der während der Initialisierung gewonnenen Ergebnisse, sodass die eigentliche Zahl der Funktionsaufrufe noch deutlich geringer ist. Obwohl für Bayesian Optimization deutlich weniger Funktionsaufrufe benötigt werden als für die anderen beiden Algorithmen, ist hier die Rechenzeit am höchsten. Dies liegt an der Rechenleistung, die zur Berechnung des Ersatzmodells im Hintergrund benötigt wird. Für das vorliegende Problem ist also der Vorteil einer geringen Anzahl an Funktionsaufrufen nicht entscheidend. Erst bei deutlich höheren Rechenzeiten je Funktionsaufruf wird der Aufwand zur Berechnung des Ersatzmodells die

	Anzahl Funktionsaufrufe	Rechenzeit / h
Powell	2861	02:17
Bayesian Optimization	1000	28:31
Simulated Annealing	20250	15:56

Tabelle 5.1: Anzahl der Funktionsaufrufe und Rechenzeit der Algorithmen für den Betriebspunkt HGK 1273/573 bei $r = 2000$

Rechenzeit nicht mehr dominieren. Auf Basis dieser Ergebnisse wird für den Großteil der in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Untersuchungen der Powell-Algorithmus verwendet, da er reproduzierbare, qualitativ gute Ergebnisse bei vergleichsweise kurzer Rechenzeit liefert.

5.6 Weitere Betriebspunkte

Die vorgestellte Methode wurde auf zwei weitere Betriebspunkte des Heißgaskanals angewendet. Auch hier wurde eine Variation des Regularisierungsparameters durchgeführt und das jeweils beste Ergebnis nach *Morozov's Discrepancy Principle* ausgewählt.

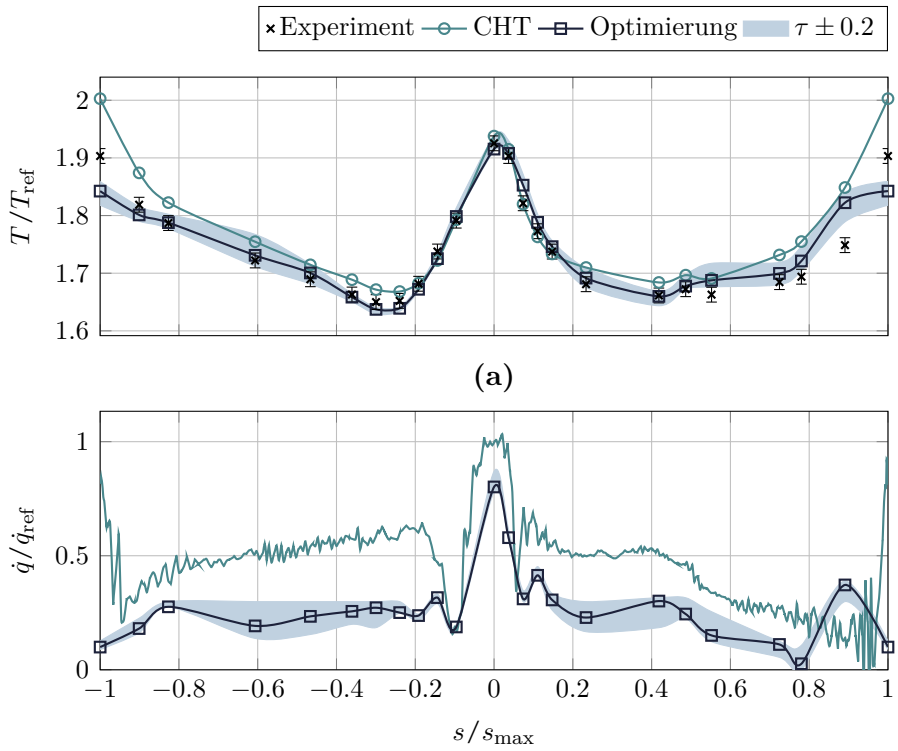


Abb. 5.18: Ergebnisse der Optimierung für den Betriebspunkt HGK 973/573 mittels modifiziertem Powell-Algorithmus. Regularisierungsparameter $r = 19000$ ausgewählt nach *L-Curve* und *Morozov's Discrepancy Principle*. τ von 0.79 bis 1.13. $\tau_{\mathrm{OPT}} = 0.93$

In Abb. 5.18 ist das Ergebnis für den Betriebspunkt HGK 973/573 bei 973 K Heißgastemperatur und 573 K Kühllufttemperatur dargestellt. Der Temperaturverlauf des Experiments ist gut wiedergegeben. Lediglich auf der Saugseite ab etwa 50 % Lauflänge liegen größere Abweichungen vor. Das Niveau des Wärmestroms liegt jedoch niedriger als es anhand der CHT Daten zu erwarten wäre. Qualitativ sind jedoch auch hier gute Übereinstimmungen zu beobachten. Das Maximum des Wärmestroms liegt am Staupunkt und ist nicht verschoben. Der abgesenkte Wärmestrom unmittelbar stromab des Staupunkts auf der Druckseite aufgrund des lokalen Ablösegebiets ist ebenfalls zu sehen. Lediglich an der Hinterkante ist im Gegensatz zur CHT-Lösung kein lokales Maximum vorhanden, dafür ist unmittelbar stromauf noch eine lokale Erhöhung des Wärmestroms zu sehen. In diesem Bereich liegen die höchsten Abweichungen zu den experimentell ermittelten Temperaturen vor. Dies deutet darauf hin, dass möglicherweise noch bessere Lösungen existieren.

Abb. 5.19 zeigt das Ergebnis für den Betriebspunkt HGK 1073/373 bei 1073 K Heißgastemperatur und 373 K Kühllufttemperatur. Dieses ähnelt qualitativ dem Ergebnis des Betriebspunktes HGK 1273/573. Im Gegensatz zu diesem Betriebspunkt liegt hier jedoch das Niveau des Wärmestroms im Vergleich zur CHT-Lösung niedriger. Das Maximum des Wärmestroms ist vom Staupunkt leicht in Richtung Saugseite verschoben. Auf der Saugseite ist der Verlauf qualitativ gut getroffen, einschließlich des Anstiegs des Wärmestroms zur Hinterkante. Auf der Druckseite bleibt der Wärmestrom auf konstant niedrigem Niveau unterhalb dem der CHT. Die ermittelten Temperaturen liegen jedoch unterhalb denen der CHT und deutlich näher an denen des Experiments.

Die Wärmestromverteilungen der CHT für die hier gezeigten Betriebspunkte (Abb. 5.14, Abb. 5.18 und Abb. 5.19) sind qualitativ sehr ähnlich. Dennoch zeigen sich Unterschiede bei den Ergebnissen der vorgestellten Methode. Insbesondere die qualitative Ähnlichkeit der Ergebnisse der beiden Betriebspunkte HGK 1273/573 und HGK 1073/373 ist auffällig. Diese weisen im Gegensatz zum Betriebspunkt HGK 973/573 ein ähnliches Temperaturpotential auf. Bei der vorliegenden Methode findet keine Berechnung des Strömungsfeldes statt, welches für alle Betriebspunkte ähnlich ist, da sich lediglich das Temperaturniveau unterscheidet. Es werden nur die Temperaturverteilungen berücksichtigt, sodass sich Unterschiede in diesen stärker auf das Ergebnis auswirken.

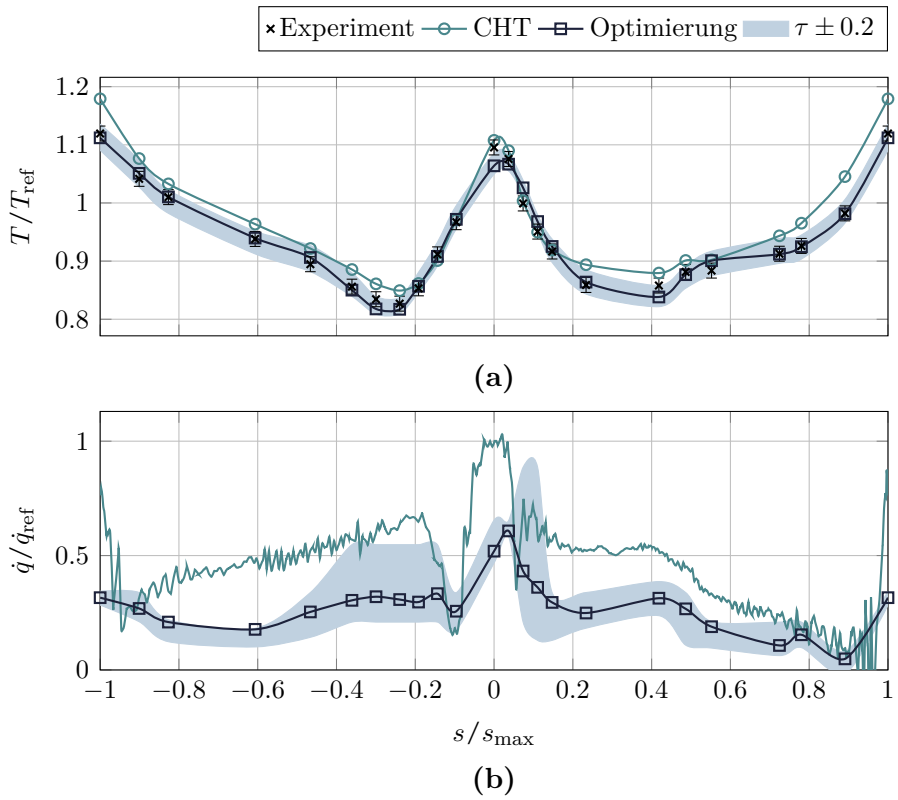
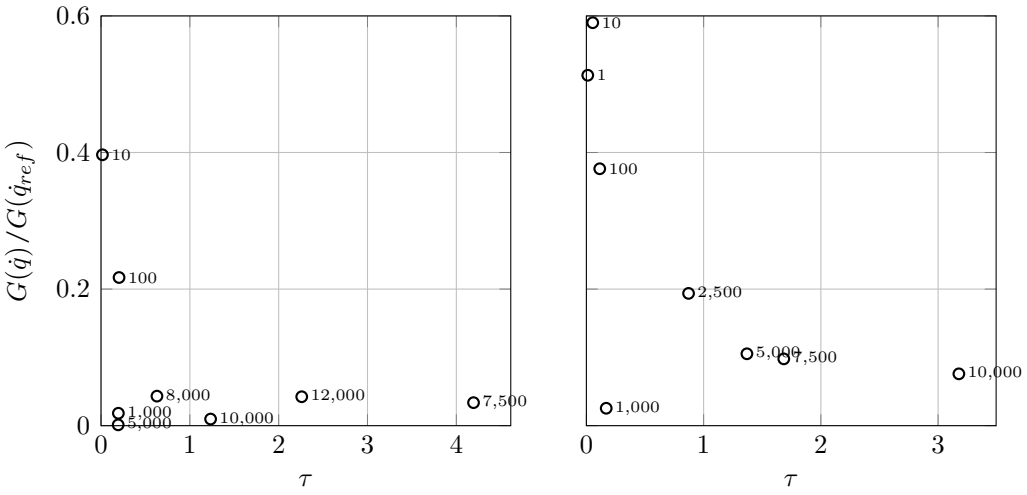


Abb. 5.19: Ergebnisse der Optimierung für den Betriebspunkt HGK 1073/373 mittels Powell-Algorithmus. Regularisierungsparameter $r = 5000$ ausgewählt nach *L-Curve* und *Morozov's Discrepancy Principle*. τ von 0.57 bis 0.97. $\tau_{\mathrm{OPT}} = 0.77$

5.7 Turbulenzgradvariation

Die Messdaten des Heißgaskanals wurden bei unveränderten Reynoldszahlen ermittelt. Die Betriebspunkte unterscheiden sich daher lediglich im Temperaturniveau. Um die entwickelte Methode bei unterschiedlichen Strömungsbedingungen und damit qualitativ verschiedenen Wärmestromverläufen zu validieren, wird diese auf Messdaten mit verschiedenen Turbulenzgraden angewendet. Diese Daten stammen aus der Veröffentlichung von Turner (1971). Es werden Messungen mit zwei verschiedenen Turbulenzgraden Tu = 5.9 und Tu = 0.45 verwendet.

In Abb. 5.20 ist eine Übersicht der Optimierungsergebnisse für beide Turbulenzgrade unter Variation des Regularisierungsparameters r gezeigt. Für die Optimierung wurde der modifizierte Powell-Algorithmus verwendet. Wie zuvor sind hier die beiden Bestandtei-



(a) Turner Tu = 5.9 **(b)** Turner Tu = 0.45

Abb. 5.20: *L-Curve* für Daten nach Turner (1971)

le der Optimierungsfunktion in normierter Form τ sowie $G(\dot{q})/G(\dot{q}_ref)$ gegeneinander aufgetragen. Beide Größen wurden auf eine geeignete Referenz bezogen. Wie bereits bei den Heißgaskanal-Daten wurde die Temperaturabweichung $R(T)$ auf den Messfehler bezogen. Als Referenz für die Regularisierungsfunktion des Lösungsvektors wurde diese auf die aus den veröffentlichten Daten bestimmte heißgasseitige Wärmestromverteilung angewendet. Auch hier ist für beide Turbulenzgrade die charakteristische L-Form der Kurve zu erkennen. Im Gegensatz zu der zuvor gezeigten Kurve der Heißgaskanal-Daten (Abb. 5.11) sind jedoch bei beiden Turbulenzgraden Ausreißer zu erkennen. Für Turner Tu = 5.9 (Abb. 5.20a) ist die Temperaturdifferenz nicht stetig mit r zunehmend. Bei einem Regularisierungsparameter von 7500 tritt ein deutlich höheres τ auf als bei höheren Parametern. Um den Bereich von $\tau = 1$ tritt ein weiterer Effekt auf. Bei einer Erhöhung des Regularisierungsparameter ab etwa $r = 8000$ ändert sich das Ergebnis der Optimierung zunächst nicht. Zwischen 9500 und 10000 gibt es einen Punkt, ab dem τ schlagartig zu- und $G(\dot{q})/G(\dot{q}_{ref})$ abnimmt. Bei höheren Werten von r stellt sich wieder die zu erwartende Tendenz ein. Der Übersichtlichkeit halber sind die Punkte zwischen 8000 und 10000 in Abb. 5.20a nicht eingetragen. Durch eine Verfeinerung des Abbruchkriteriums konnte ausgeschlossen werden, dass es sich hierbei um nicht konvergierte Ergebnisse handelt. Vermutlich macht sich hier die Kopplung des Regularisierungsterms und des ursprünglichen Optimierungsproblems bemerkbar. Da der Wärmestrom sowohl die Regularisierung als auch die Temperaturverteilung beeinflusst, sind die beobachteten

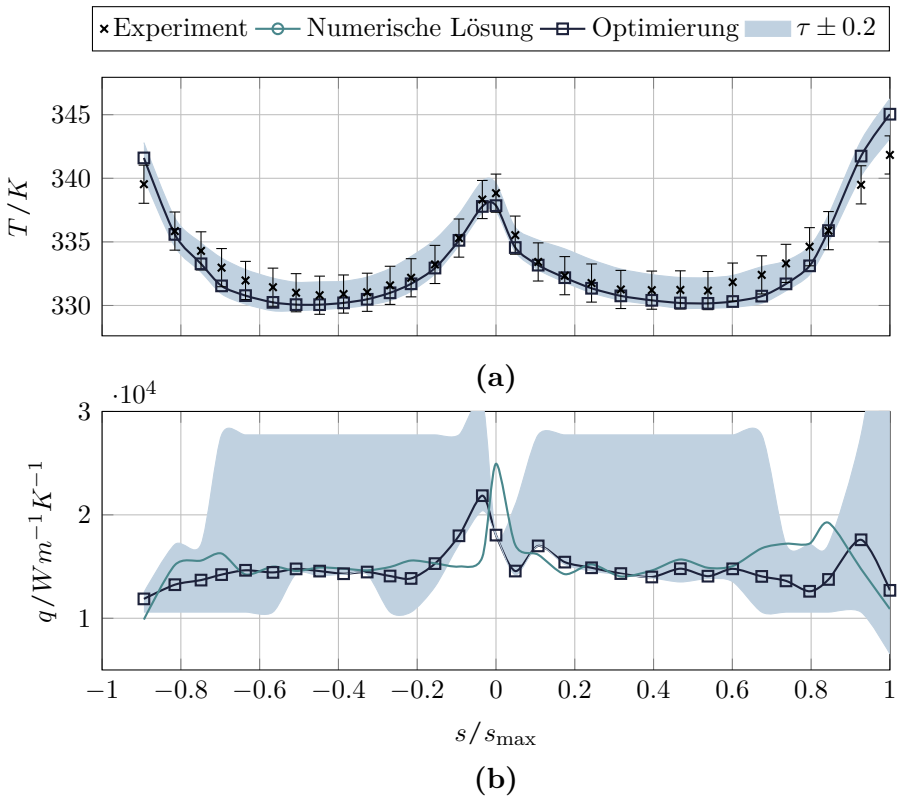


Abb. 5.21: Ergebnisse der Optimierung für Turner (1971) Betriebspunkt Turner Tu = 5.9 mittels modifiziertem Powell Algorithmus. Regularisierungsparameter $r = 8000$ ausgewählt nach *L-Curve* und MDP. τ von 0.46 bis 0.83. $\tau_{\mathrm{OPT}} = 0.63$

Effekte vermutlich auf diese Kopplung zurück zu führen.

Als repräsentatives Ergebnis für Tu = 5.9 wird das Ergebnis bei $r = 8000$ gewählt. Dieses liegt in der Nähe von $\tau = 1$ und beinhaltet im Gegensatz zu dem ebenfalls naheliegenden, höheren Regularisierungsparameter $r = 10000$ eine stärkere Gewichtung der Temperaturdifferenz. Das Ergebnis ist in Abb. 5.21 dargestellt. Die Temperaturverteilung weicht minimal von den experimentellen Daten ab, liegt jedoch mit Ausnahme weniger Punkte auf der Saugseite innerhalb des angenommenen Messfehlers. Das Niveau des Wärmestroms stimmt mit den Vergleichsdaten aus der Veröffentlichung überein. Das Maximum des Wärmestromverlaufs ist dabei vom Staupunkt etwas zur Druckseite hin verschoben und beträgt ca. 88 % des Literaturwerts. Diese Verschiebung ist möglicherweise auf die zusätzliche Messstelle auf der Druckseite zurückzuführen, durch die auf der Druckseite ein flacherer Abfall der Temperatur angenommen wird als auf der Saugsei-

te. Auf der Saugseite ist an dieser Stelle kein Messwert vorhanden, sodass hier bis zur nächsten Messstelle interpoliert wird. Dieses Ungleichgewicht beeinflusst möglicherweise das Ergebnis. Der ansonsten relativ gleichbleibende Verlauf des Wärmestroms sowie das Absinken an der Hinterkante wird von dem Optimierungsergebnis qualitativ wiedergegeben. Lediglich der Anstieg des Wärmestroms im hinteren Bereich der Saugseite wird von der Optimierung in einem geringeren Bereich (80 % bis 95 % der Lauflänge) verortet als es aus den Literaturwerten hervorgeht (60 % bis 90 % der Lauflänge). Auf der Saugseite unmittelbar stromab des Staupunkts findet sich beim Ergebnis der Optimierung eine Wärmestromsenke, die in den Vergleichsdaten nicht zu finden ist. Auffällig ist hier besonder der relativ große Bereich des Wärmestroms, der dennoch nur zu einem schmalen Bereich an möglichen Temperaturverteilungen führt. Eine solche Tendenz ist zwar grundsätzlich zu erwarten, hier jedoch sehr stark ausgeprägt. Dies ist darin begründet, dass unter den möglichen Wärmestromverläufen solche mit einzelnen Maxima an jeweils unterschiedlichen Stellen der Schaufel enthalten sind, die das Gesamtergebnis nicht stark beeinflussen. Die oberen und unteren Grenzen sind also nur durch die Gesamtzahl der berücksichtigten möglichen Lösungen gebildet, stellen aber selbst nicht zwangsläufig eine mögliche Lösung dar.

Für Turner Tu = 0.45 (Abb. 5.20b) ist das nach *L-Curve* und *Morozov's Discrepancy Principle* ausgewählte beste Ergebnis bei $r = 2500$ zu finden. Dieses ist in Abb. 5.22 zu sehen. Die mittlere relative Temperaturabweichung liegt hier bei $\tau \approx 0.87$. Der Temperaturverlauf liegt für einen großen Teil der Schaufel innerhalb des Messfehlers. Auch beim Wärmestrom ist das Niveau der Vergleichsdaten gut getroffen. Lediglich beim Verlauf gibt es einige Abweichungen. Der Verlauf ähnelt sehr dem bei einem Turbulenzgrad von Turner Tu = 5.9, mit Ausnahme des leicht ansteigenden Verlaufs an der Hinterkante. Der bei dem niedrigeren Turbulenzgrad in den Vergleichsdaten auffällige Anstieg des Wärmestroms durch den laminar-turbulenten Umschlag auf der Saugseite bei etwa 80 % Lauflänge wird hier nicht abgebildet. Betrachtet man dagegen Ergebnisse bei niedrigeren Werten des Regularisierungsparameters, also mit einer niedrigeren Gewichtung auf die vorgegebene Struktur des Wärmestroms, wird dieser Effekt bemerkbar. Abb. 5.23 zeigt das Ergebnis der Optimierung bei einem Regularisierungsparameter von $r = 10$. Der Temperaturverlauf ist hier, wie aufgrund der höheren Gewichtung bei der Optimierung zu erwarten, besser getroffen als bei der Lösung für $r = 2500$. Die relative Temperaturabweichung liegt bei etwa $\tau = 0.05$. Aber auch der Wärmestromverlauf ähnelt in diesem Fall eher den Vergleichsdaten. Zwar sind auch hier die typische Verschiebung des Maximums vom Staupunkt zur Druckseite sowie das Absinken des Wärmestroms stromab

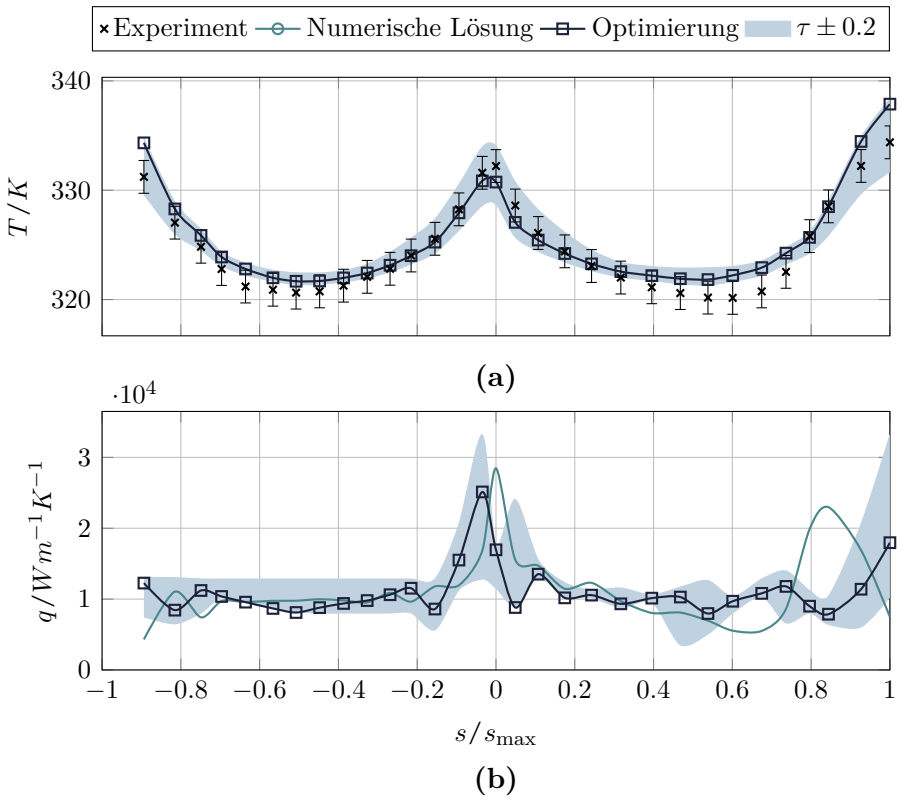


Abb. 5.22: Ergebnis der Optimierung für den Betriebspunkt Turner Tu = 0.45 (Turner 1971) mittels modifiziertem Powell Algorithmus. Regularisierungsparameter $r = 2500$ ausgewählt nach *L-Curve* und MDP. τ von 0.67 bis 1.07. $\tau_{\mathrm{OPT}} \approx 0.87$

des Staupunkts sowohl auf der Saug- als auch auf der Druckseite zu sehen. Ähnlich wie in der numerischen Lösung der Veröffentlichung ist auch eine plötzliche Erhöhung des Wärmestroms im hinteren Bereich ab ca. 70 % Lauflänge auf der Saugseite zu beobachten. Dies deutet darauf hin, dass der geringere Einfluss des Strafterms in diesem Fall eine bessere Abbildung des tatsächlichen Wärmestromverlaufs ermöglicht.

Der Verlauf und besonders die Gradienten des Wärmestroms unterscheiden sich bei diesem Betriebspunkt von den anderen vorgestellten Betriebspunkten. Dieser spezielle Verlauf fließt aber nur mit 20 % in den Strafterm ein. Daher wird bei höherer Gewichtung durch ein größeres r eher der Verlauf ohne laminar-turbulenten Umschlag begünstigt. Um dies zu überprüfen, wird im folgenden Abschnitt der Einfluss des Strafterms auf diesen Betriebspunkt genauer betrachtet.

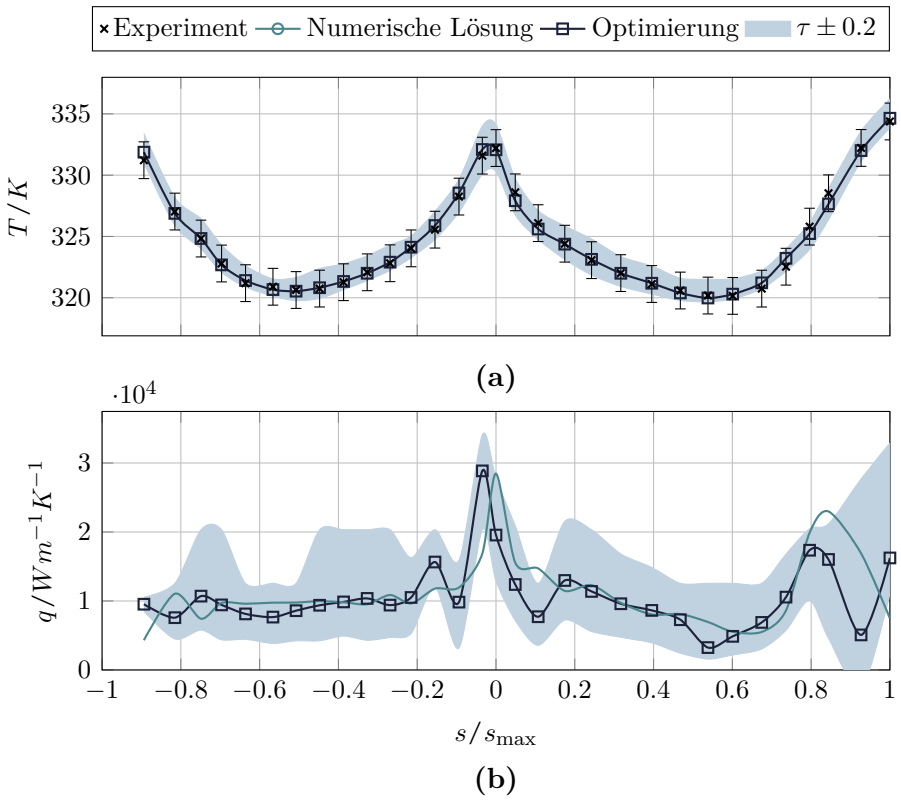


Abb. 5.23: Ergebnisse der Optimierung für den Betriebspunkt Turner Tu = 0.45 (Turner 1971) mittels modifiziertem Powell Algorithmus. $r = 10$, τ von 0.05 bis 0.25. $\tau_{\mathrm{OPT}} = 0.05$

5.8 Einfluss des Strafterms

Der verwendete Strafterm basiert auf einer Mittelung aus verschiedenen bekannten Wärmestromverteilungen und wurde in Kap. 4.2.1 vorgestellt. Dabei wurden drei Betriebspunkte des Heißgaskanals verwendet, welche sich lediglich durch das Temperaturniveau und das Temperaturpotential unterscheiden, ansonsten aber bei identischen Strömungsbedingungen erfasst wurden. Aufgrund der hohen Betriebstemperaturen kann der Turbulenzgrad nicht experimentell bestimmt werden. Die Austrittsreynoldszahl liegt bei etwa $2.5 \cdot 10^5$. Eine Parameterstudie von Wörz (2018) deutet jedoch auf einen Turbulenzgrad von etwa 10 % hin. Die numerischen Ergebnisse deuten auf eine vollständig laminare Strömung hin. Zusätzlich wurden zwei Betriebspunkte nach Turner (1971) in die Mittelung mit einbezogen, welche bei $Re = 1.05 \cdot 10^6$ am Austritt gemessen wurden. Diese weisen unterschiedliche Turbulenzgrade in der Anströmung auf. Während die Schaufel

bei Tu = 5.9 vollturbulent umströmt wird, findet bei Tu = 0.45 ein laminar-turbulenter Umschlag auf der Saugseite statt. Dieser Umschlag wirkt sich in Form eines plötzlichen Anstiegs auf den Verlauf des Wärmstroms aus. Umgekehrt kann eine solche Besonderheit im ermittelten Wärmestrom also Rückschlüsse auf die vorliegende Strömungssituation zulassen. Es ist daher wünschenswert, solche Effekte erkennbar zu machen.

In Abschnitt 5.4 wurde bereits der Einfluss der Gewichtung des Strafterms auf das Ergebnis gezeigt. Nun soll noch der Einfluss des Strafterms selbst betrachtet werden. Dieser setzt sich in der vorgestellten Variante aus den Wärmestromgradienten von fünf Betriebspunkten zusammen, wobei die drei enthaltenen Heißgaskanal-Betriebspunkte sehr ähnliche Strömungsbedingungen aufweisen. Diese Bedingungen sind dadurch in der Mittelung überrepräsentiert und begünstigen eine entsprechende Lösung. Um diesen Effekt zu untersuchen, werden im Folgenden Optimierungen des Betriebspunktes Turner Tu = 0.45 bei $r = 2500$ sowie $r = 10$ gezeigt, wobei unterschiedliche Strafterme verwendet wurden. Dazu wurde die Anzahl der in die Mittelung einbezogenen Heißgaskanal-Betriebspunkte sukzessiv verringert und entweder drei, zwei bzw. nur ein Betriebspunkt verwendet. Die beiden Betriebspunkte nach Turner (1971) sind in jedem Fall Teil der Mittelung.

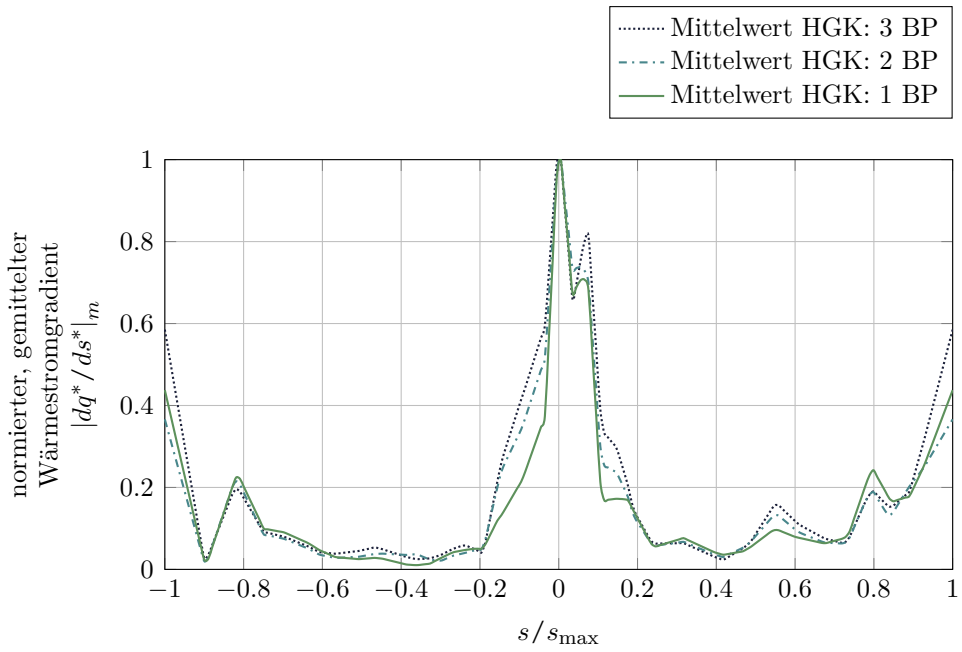


Abb. 5.24: Vergleich verschiedener gemittelter Verläufe von $|dq^*/ds^*|_m$ bei Einbeziehung unterschiedlicher Betriebspunkte

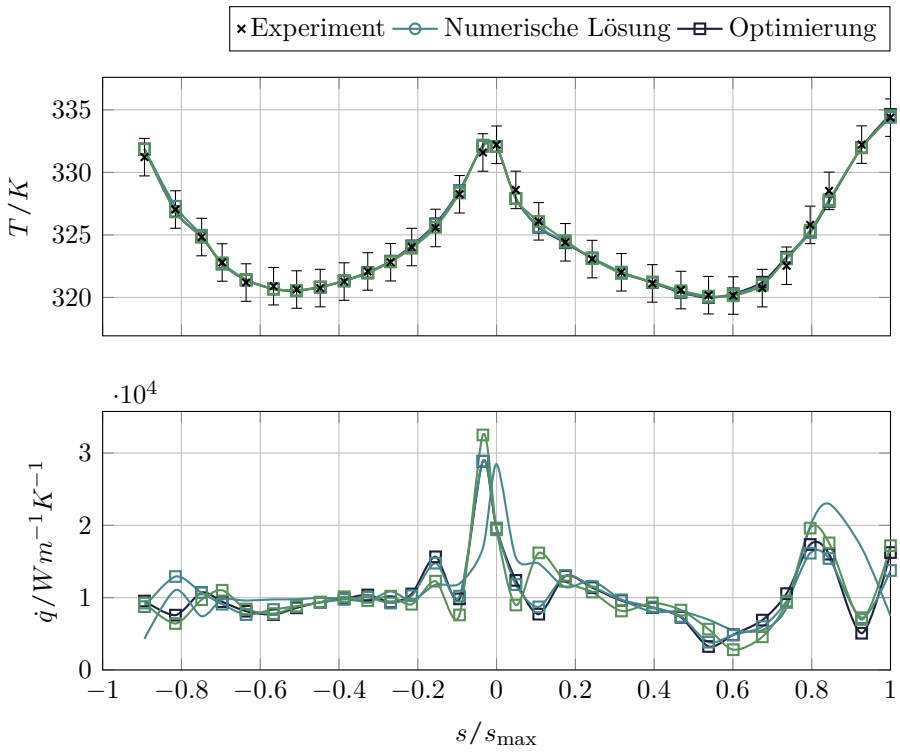


Abb. 5.25: Turner (1971), Turner Tu = 0.45, r=10, Variation $G(\dot{q})$

Die sich daraus ergebenden Strafterme sind in Abb. 5.24 dargestellt. Diese wurden jeweils auf das Maximum normiert. Die Verläufe sind grundsätzlich sehr ähnlich. Im Bereich um den Staupunkt liegen die höchsten Gradienten $|dq^*/ds^*|$ vor. Dabei fällt das zweite lokale Maximum auf der Saugseite geringer aus, je weniger Heißgaskanal-Betriebspunkte in die Mittelung einbezogen werden. Auch ist der Anstieg der Steigung zum Staupunkt hin für diesen Fall steiler. Der Gradient an der Hinterkante nimmt mit abnehmendem Einfluss der Heißgaskanal-Betriebspunkte leicht ab. Der auf den laminar-turbulenten Umschlag zurückzuführende Anstieg des Wärmestroms bei Turner Tu = 0.45 liegt auf der Saugseite bei 80 % Lauflänge. An dieser Stelle steigt der Gradient für eine reduzierte Anzahl an Heißgaskanal-Betriebspunkten in der Mittelung leicht an.

Die Optimierung wird an den beiden zuvor gezeigten Betriebspunkten nach Turner (1971) bei $r = 10$ und $r = 2500$ mit den verschiedenen Straftermen wiederholt. Die Ergebnisse sind in Abb. 5.25 und Abb. 5.26 dargestellt. Zur besseren Übersichtlichkeit sind die Wärmestromverteilungen für $r = 2500$ in jeweils eigenen Plots dargestellt. Die Temperaturverläufe unterscheiden sich insbesondere für $r = 10$ nur minimal. Auch bei $r = 2500$ liegen die Abweichungen bei maximal 3.6 K und im Mittel bei 0.67 K. Für

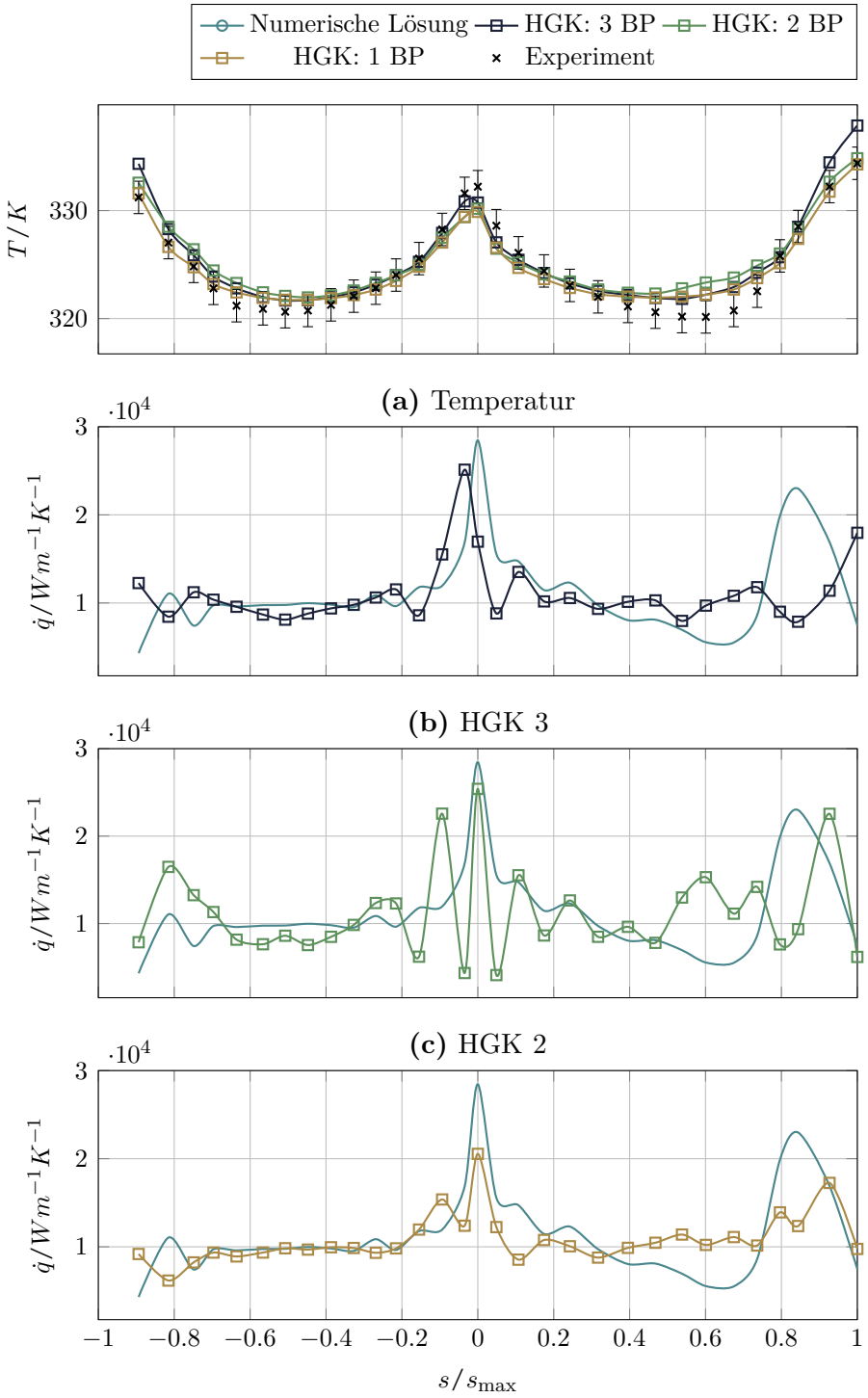


Abb. 5.26: Turner (1971), Turner Tu = 0.45, r=2500, Variation $G(\dot{q})$

$r = 10$ sind die Unterschiede in den Wärmestromverläufen nur gering. Der qualitative Verlauf ist bis auf zwei Punkte, einer auf der Saugseite bei ca. 10 % und einer auf der Druckseite bei ca. 80 % Lauflänge, identisch. Die Abweichung tritt bei Verwendung des Strafterms mit zwei von drei Heißgaskanal-Betriebspunkten auf, sodass hier keine klare Tendenz zu erkennen ist. Bei $r = 2500$ zeigen sich größere qualitative Unterschiede, die jedoch ebenfalls keine klare Tendenz bei Verringerung des Heißgaskanal-Einflusses erkennen lassen. Bei Verwendung von einem oder zwei Heißgaskanal-Betriebspunkten zur Bildung des Strafterms ist auf der Saugseite jeweils ein Anstieg des Wärmestroms im hinteren Bereich zu erkennen. Diesem gehen jedoch entweder weitere Schwankungen voraus, wie in Abb. 5.26c, oder es handelt sich um einen kontinuierlichen Anstieg, der bereits stromab des Staupunktes beginnt (Abb. 5.26d).

Hiermit wird deutlich, dass zwar die erwarteten Wärmestromverläufe für vollständig laminar oder turbulent umströmte Turbinenschaufeln recht gut abgebildet werden. Sobald jedoch unerwartete Schwankungen des Wärmestroms, beispielsweise durch laminar-turbulenten Umschlag, auftreten, sind die Ergebnisse nicht mehr eindeutig. Um auch diese Fälle abzudecken, müssen weitere Anpassungen an der Methode durchgeführt werden. Dafür existieren verschiedene Möglichkeiten. Einerseits kann die Berücksichtigung von Ausnahmen im *Prior*, also im Strafterm, durchgeführt werden. Dazu könnte anstatt eines einzelnen ähnlichen Vektors eine Auswahl unterschiedlicher möglicher Lösungen vorgegeben werden. Alternativ kann ein verändertes Kriterium zur Auswahl des Regularisierungsparameters von Nutzen sein (siehe z.B. Calvetti und Somersalo (2018)).

6 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit stellt ein Konzept zur Lösung des inversen Wärmeübergangsproblems an einer rein konvektiv gekühlten Turbinenschaufel vor. Dabei wird aus vorhandenen Temperaturmessdaten auf die vorliegende äußere Wärmestromrandbedingung zurückgerechnet. Als Datengrundlage werden Messdaten in Form von Materialtemperaturen von zwei Prüfständen bei unterschiedlichen Strömungs- und Temperaturbedingungen herangezogen. Einerseits handelt es sich dabei um den Heißgaskanal des Instituts für Strahlantriebe und Turbomaschinen der RWTH Aachen (Findeisen 2019). Neben den Messdaten liegen hier umfangreiche CHT-Rechnungen vor (Wörz 2018), deren Ergebnisse zum Wärmestrom Anhaltspunkte zur Einordnung der Ergebnisse der vorgestellten Methode liefern. Da die untersuchten Betriebspunkte des Heißgaskanal unter ähnlichen Strömungsbedingungen erfasst wurden und somit qualitativ ähnliche Wärmestromverläufe aufweisen, wird ein zusätzlicher Datensatz verwendet. Dabei handelt es sich um Messdaten in Form von Oberflächentemperaturen sowie mittels numerischer Methoden bestimmte Wärmestrominformationen von Turner (1971). Das inverse Wärmeübergangsproblem der Turbinenschaufel wird als Optimierungsproblem zwischen den experimentell ermittelten Temperaturen und einer modellierten Temperaturverteilung aufgestellt. Die Modellierung der Temperaturverteilung wird mittels der Finite-Elemente-Methode für den Mittelschnitt der jeweiligen Schaufel durchgeführt, wobei die äußere Wärmestromrandbedingung variiert wird.

Hierbei sind verschiedene Einflüsse zu beachten, die sich auf die Lösung auswirken. Zum einen wird für die FEM Berechnung lediglich ein zweidimensionaler Schnitt aus der Mittelebene der jeweiligen Schaufel verwendet. Die hierfür getroffene Annahme, dass Wärmeleitung in der Schaufel vor allem innerhalb dieser Ebene auftritt, gilt nur mit Einschränkungen. Die Anwesenheit von Turbulatoren in den Kühlkanälen der Heißgaskanalschaufel führt zu lokalen Gebieten höherer Querwärmeleitung an der Innenseite der Schaufel. Um diese abzubilden, ist die Verwendung einer eindimensionalen Randbedingung im Kühlkanal nicht ausreichend. Um eine übermäßig hohe Zahl zu optimierender

Parameter zu vermeiden, wird daher die innere Randbedingung fest vorgegeben.

Das inverse Wärmeübergangsproblem wird dabei iterativ durch Variation der FEM Randbedingung gelöst. Um ein Overfitting der FEM-generierten Temperaturen auf die mit einer Messunsicherheit behafteten gemessenen Temperaturen zu verhindern, wird eine Regularisierung eingeführt. Diese besteht aus einem Strafterm, der zusätzlich zur Temperaturdifferenz minimiert werden muss, und eine physikalisch sinnvolle Struktur der Wärmestromlösung begünstigt. Hierbei muss eine sinnvolle Wahl des Regularisierungsparameters getroffen werden, der die Balance zwischen dem ursprünglichen Optimierungsproblem (der Temperaturdifferenz) und dem Strafterm (der physikalischen Sinnhaftigkeit) hält. Dieser wird aufgrund von *Morozov's Discrepancy Principle* sowie graphisch anhand der *L-Curve* ausgewählt. Zur Lösung des Optimierungsproblems werden verschiedene Optimierungsalgorithmen verwendet und deren Ergebnisse sowie benötigten Rechenzeiten verglichen. Es handelt sich dabei um den modifizierten Powell-Algorithmus, Simulated Annealing und Bayesian Optimization.

Die Ergebnisse aller Algorithmen liefern dabei gute Ergebnisse. Bei korrekter Auswahl des Regularisierungsparameters liegen die Temperaturen trotz des verstärkten Fokus auf die Wärmestromverteilung größtenteils innerhalb der Messunsicherheit. Die Qualität der ermittelten Wärmestromverläufe schwankt je nach verwendetem Optimierungsalgorithmus, Strömungsbedingungen und auch zwischen Betriebspunkten. Der Powell-Algorithmus liefert Ergebnisse in der kürzesten Rechenzeit der drei Algorithmen und wird daher zur Bestimmung des Regularisierungsparameters und auch zur Untersuchung der meisten Betriebspunkte verwendet. Der qualitative Verlauf entspricht meist dem der CHT Ergebnisse, jedoch zeigt sich hier häufig eine leichte Verschiebung des Wärmestrommaximums zur Druck- oder Saugseite, die möglicherweise durch die Struktur des Strafterms begünstigt wird. Zukünftige Weiterentwicklungen der Methode sollten daher einen Fokus auf die Gestaltung des Strafterms legen. Qualitativ wird das Absinken des Wärmestroms auf der Druckseite der Heißgaskanalschaufeln gefunden, welches auch in den CHT-Ergebnissen zu sehen ist und auf ein Ablösegebiet an dieser Stelle zurückzuführen ist. Das Niveau des ermittelten Wärmestroms auf der Druckseite bleibt meist unter dem der CHT.

Bei der Variation des Turbulenzgrades zeigen sich Schwierigkeiten, den laminar-turbulenten Umschlag richtig zu lokalisieren. Bei den verwendeten Messdaten nach Turner (1971) gelingt dies nur bei sehr niedriger Gewichtung des Strafterms, die nicht den gewählten Kriterien für die Auswahl des Regularisierungsparameters entspricht. Dies zeigt ebenfalls

die Notwendigkeit weiterer Anpassungen des Strafterms, um auch solche Fälle besser erkennen zu können.

Die Variation des Optimierungsalgorithmus zeigt unterschiedliche Stärken und Schwächen der verschiedenen Algorithmen auf. Beim Simulated Annealing wird der Verlauf in der Nähe des Staupunkts deutlich besser getroffen, jedoch liegen auf den Flanken der Schaufel höhere Schwankungen vor. Ähnlich sieht es bei Bayesian Optimization aus, wobei hier die Schwankungen geringer ausfallen. Die beiden Algorithmen benötigen jedoch deutlich längere Rechenzeiten. Bei Simulated Annealing ist dies auf eine hohe Anzahl an benötigten Funktionsaufrufen zurückzuführen. Bayesian Optimization kommt zwar mit einer verhältnismäßig geringen Anzahl an Funktionsaufrufen zum besten Ergebnis, benötigt dafür jedoch mit Abstand die längste Rechenzeit. Dies liegt am hohen Rechenaufwand, der für die Berechnung des Ersatzmodells im Hintergrund benötigt wird.

Die vorgestellte Methode stellt ein zusätzliches Analysetool dar, welches als Vergleich zur CHT herangezogen werden kann und qualitative Informationen über den Wärmestromverlauf einer konvektiv gekühlten Turbinenschaufel liefert. Die Betrachtung des Wärmeübergangs einer konvektiv gekühlten Turbinenschaufel mit komplexer Innengeometrie als inverses Wärmeübergangsproblem, welches iterativ mit einer vergleichsweise hohen Anzahl freier Parameter unter Verwendung einer individuell erstellten Regularisierungsfunktion gelöst wurde, ist dabei erstmalig erfolgt.

Um robustere Ergebnisse zu erhalten, ist ein Tuning auf die Bedingungen eines bestimmten Prüfstands denkbar. Dazu könnte der Strafterm rein aus bekannten Ergebnissen bzw. bereits durchgeführten CHT-Rechnungen berechnet werden, um eine schnelle Vorauswertung der Ergebnisse zu ermöglichen. Weitere Anpassungen des Strafterms sollten durchgeführt werden, um zum Beispiel den laminar turbulenten Umschlag besser detektieren zu können. Dazu müssen Ausreißer aus dem vollständig laminaren oder turbulenten Fall im Strafterm berücksichtigt werden, damit diese nicht unphysikalisch geglättet werden. Auch eine Anwendung auf filmgekühlte Schaufeln ist denkbar, um qualitative Aussagen über den Wärmestromverlauf auf der Oberfläche zu erhalten. Aufgrund der hohen Bandbreite an möglichen Lösungen, die für jeden Temperaturverlauf aufgrund der Eigenheiten des inversen Problems bestehen, muss vor allem die Regularisierung und die Gestaltung des Strafterms weiter angepasst werden.

Symbolverzeichnis

Abkürzungen

BO	Bayesian Optimization
BSH	Beruhigungsstrecke, heiß
CFD	Computaional Fluid Dynamics
CHT	Conjugate Heat Transfer
DS	Druckseite
EARSM	explizit algebraisches Reynoldsspannungsmodell
EI	Expected Improvement
FEM	Finite Elemente Methoden
HGK	Heißgaskanal
IST	Institut für Strahlantriebe und Turbomaschinen
LCB	Lower Confidence Bound
MCMC	Markov Chain Monte Carlo
MDP	Morozovs Discrepancy Principle
PI	Probability of Improvement
PIV	Particle Image Velocimetry
PSP	Pressure Sensitive Paint
SA	Simulated Annealing
SS	Saugseite
SST	Shear-Stress-Transport-Modell

Griechische Buchstaben

α	Wärmeübergangskoeffizient	$\mathrm{W/m^2\,K}$
$\delta, \delta_S, \delta_T$	Grenzschichtdicke (S: Strömung, T: Temperatur)	m
ϵ	Emissionsgrad	
η	dynamische Viskosität	$\mathrm{kg/m\,s}$
η_t	turbulente Viskosität	$\mathrm{kg/m\,s}$
Γ	Gamma-Funktion	
λ	Wärmeleitfähigkeit	$\mathrm{W/m\,K}$
λ_t	turbulente Wärmeleitfähigkeit	$\mathrm{W/m\,K}$
μ	Mittelwert	
ν	kinematische Viskosität	$\mathrm{m^2/s}$

Φ_{CDF}	kumulierte Verteilungsfunktion	
Φ_{PDF}	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion	
ρ	Dichte	$\mathrm{kg/m^3}$
σ	Standardabweichung	
σ	Stefan-Boltzmann Konstante	$(5.670\,40 \pm 0.000\,04) \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2\,K^4}$
τ	Transmissionsgrad	
τ	Wandschubspannung	$\mathrm{N/m^2}$
τ	relative Temperaturdifferenz (Kap. 5)	
ξ	Parameter	

Lateinische Buchstaben

Pr_t	turbulente Prandtlzahl	
A	Oberfläche	$\mathrm{m^2}$
a	Absorptionsgrad	
A, B	Ereignisse (Kap. 3.1)	
c, c_P, c_V	spezifische Wärmekapazität (bei konstantem Druck bzw Volumen)	$\mathrm{J/kg\,K}$
c_f	Reibungsbeiwert	
d_H	hydraulischer Durchmesser	m
E	Energie; Kostenfunktion (Kap. 2.4.3.2)	
e	Messunsicherheit	%
e	Rippenhöhe	m
G	Regularisierungsfunktion	
H	Bessel-Funktion	
h	spezifische Enthalpie	J/kg
k	Kovarianzfunktion	
k_B	Boltzmann Konstante	J/K
L	Regularisierungsmatrix	
l	Länge	m
m	Mittelwertfunktion	
$\vec{n}$	Normalenvektor	
n	Anzahl der Elemente	
Nu	Nusseltzahl	
P	Leistung	W
P	Rippenabstand	m
P	Wahrscheinlichkeit	
Pr	Prandtlzahl	
$\dot{Q}$	Wärmestrom	W
$\dot{q}$	Wärmestromdichte	$\mathrm{W/m^2}$
R	Residuum	
r	Reflektionsgrad (Kap. 2.1.2)	

r	Regularisierungsparameter (ab Kap. 2.4)	
Re	Reynoldszahl	
s	Lauflänge	m
T	Temperatur	K
t	Zeit	s
Tu	Turbulenzgrad	
U	innere Energie	J
u, v, w	Strömungsgeschwindigkeiten	m/s
V	Volumen	m^3
x	Lösungsvektor	
x, y, z	Raumkoordinate	m

Operatoren

$\mathbb{E}$	Erwartungswert
$\mathcal{GP}$	Gauß-Prozess
∇	Nabla-Operator
∂	Partielles Differential
d	Totales Differential

Subskripte

0	Bezugsgröße
∞	Fernfeld
m	gemittelte Größe
t	turbulente Größe
x	lokale Größe
bulk	Bulktemperatur
CHT	mittels CHT berechnet
EXP	experimentell bestimmt
F	Fluid
HG	Heißgas
KL	Kühlluft
krit	kritische Größe
max	Maximalwert
OPT	Optimierungsergebnis
ref	Referenzgröße
reg	regularisiert
W	Wand

Superskripte

$\overline{\bullet}$	Mittelwert, Reynoldsgemittelte Größe
$\bullet'$	Fluktuation bzgl. Reynoldsmittel

$\bullet^*$	Normierte Größe

Abbildungsverzeichnis

2.1 Spektrum elektromagnetischer Wellen und Einteilung verschiedener Strahlungsarten 8
2.2 Grafische Darstellung des Wärmeübergangskoeffizienten α in der Temperaturgrenzschicht nach Baehr und Stephan (2019) 11
2.3 Geschwindigkeitsprofile der Grenzschicht einer längsangeströmten ebenen Platte nach Schlichting und Gersten (1997) 13
2.4 Laminar-turbulenter Umschlag der Grenzschicht nach Schlichting und Gersten (1997) 15
2.5 Temperaturprofile für unterschiedliche T_W/T_F 17
2.6 Einfluss der Prandtlzahl auf die Dicke der Temperaturgrenzschicht nach Schröder (2006) 18
2.7 Sekundärströmungen an 90° zur Hauptströmungsrichtung ausgerichteten Rippen mit Rippenabstand P/e $\approx$ 10 nach Leonardi et al. (2003) 21
2.8 Sekundärströmungen in berippten Rechteckkanälen in Abhängigkeit der Rippenanordnung (Wieler 2019). Von links nach rechts: 90° zur Hauptströmung ausgerichtete Rippen; 60° angestellte, parallele Rippen; V-förmige Rippen; 60° angestellte, gekreuzte Rippen. 21
2.9 Experimentell bestimmte lokale Verteilung der Nusseltzahl $\mathrm{Nu}/\mathrm{Nu}_0$ in einem einseitig berippten Zweipass-Kanal mit 45° angestellten Rippen (Singh et al. 2016). Nusseltzahlen wurden mittels der transienten Flüssigkristallmethode bestimmt, Re = 35500 22
2.10 Umströmung von Zylindern (Findeisen 2019) 23
2.11 Experimentell ermittelte Nusseltzahlverteilung an einem *Pin Fin* Array mit versetzten Reihen (Axtmann et al. 2015) 24
2.12 Sekundärströmungen in einer Schaufelpassage (Wörz 2018) 25
2.13 Schematische Darstellung verschiedener Regressionskurven für einen Datensatz. Grad des Fittings steigt von links nach rechts. 30
2.14 Schematische Darstellung der *L-Curve* 31

2.15 Ablauf des modifizierten Powell Algorithmus anhand einer quadratischen Funktion 35

3.1 Geometrie der Schaufel nach Turner (1971) 44

4.1 Ablauf der Methode zur iterativen Berechnung des Wärmestroms 52

4.2 Vergleich der normierten Wärmeströme für verschiedene Randbedingungen. Heißgaskanal-Betriebspunkte: CHT (Wörz 2018; Wörz et al. 2018b). Turner Betriebspunkte: berechnet aus Turner (1971) 56

4.3 Normierte absolute Wärmestromgradienten nach Wörz et al. (2018a) und Turner (1971) 57

4.4 Übersicht des Heißgas-Gitterprüfstands 60

4.5 Schnittansicht des Heißgas-Gitterprüfstands 61

4.6 Schaufelgeometrie und Kühlkonfiguration 62

4.7 Position der Temperatur- und Druckmessstellen an der Schaufel 64

4.8 Positionen der Messstellen und Randbedingungen der FEM für den Betriebspunkt HGK 1273/573. 70

4.9 Domain des Heißgaspfades inklusive Bezeichnung der Randbedingungen (Wörz 2018) 72

4.10 Übersicht des Kühlsystems inklusive Messebenen und Ein- und Austrittsebenen (Wörz 2018) 76

5.1 Wärmestromverteilung auf der Heißgasseite der Schaufel aus CHT-Rechnung nach Wörz (2018) 78

5.2 Wärmestromverteilung auf der Kühlluftseite der Schaufel aus CHT-Rechnung nach Wörz (2018) 79

5.3 Temperaturgradient $\partial_z T$ normal zur Ebene im Verhältnis zum Gradienten $\partial_{xy} T$ innerhalb der Ebene 80

5.4 Temperaturgradient $\partial_z T$ normal zur Ebene im Verhältnis zum Gradienten $\partial_{xy} T$ innerhalb der Ebene. Teilweise Darstellung der Innengeometrie mit normierten lokalen Wärmeströmen $q/q_{\max}$. 80

5.5 Verschiedene Randbedingungen 82

5.6 Vergleich verschiedener Randbedingungen für Heißgas (HG) und Kühlluftseite (KL). Die Variation der Randbedingung ist durch die Zeilen/Spalten dargestellt. 1. Spalte: kontinuierliche Randbedingung für die Heißgasseite 2. Spalte: vereinfachte Randbedingung für die Heißgasseite(interpoliert zwischen den Positionen der Thermoelemente) 1. Zeile: kontinuierliche Randbedingung für die Kühlluftseite 2. Zeile: vereinfachte Randbedingung für die Kühlluftseite (interpoliert zwischen den Positionen der Thermoelemente) 3. Zeile: konstante, gemittelte Randbedingung für jeden Kühlkanal 84

5.7 Prozentuale Änderung des Wärmestroms und daraus resultierende Temperaturänderung 86

5.8 Sensitivitätsanalyse der Wärmeströme an der Heißgaskanal-Schaufel nach Morris (1991) 88

5.9 Elementare Effekte sortiert nach aufsteigender Wandstaerke 88

5.10 Wärmestromverlauf und resultierende Temperaturverteilung als Ergebnis der Optimierung für den Betriebspunkt HGK 1273/573 mittels Powell-Algorithmus ohne Regularisierung, im Vergleich zu Temperaturverteilung aus Experiment und CHT 90

5.11 Ergebnisse der Optimierung mit modifiziertem Powell-Algorithmus, Variation des Regularisierungsparameters r. Optimierungsgrößen $R(T)$ und $G(\dot{q})$ wurden normiert zu τ und $G(\dot{q})/G(\dot{q}_{\mathrm{ref}})$. 91

5.12 Ergebnisse der Optimierung für den Betriebspunkt HGK 1273/573 mittels Powell-Algorithmus. Regularisierungsparameter $r = 10 < r_{\mathrm{OPT}}$. τ von 0.43 bis 0.65. $\tau_{\mathrm{OPT}} = 0.43$ 93

5.13 Ergebnisse der Optimierung für den Betriebspunkt HGK 1273/573 mittels Powell-Algorithmus. $r = 250000 > r_{\mathrm{OPT}}$, τ von 6.75 bis 7.15. $\tau_{\mathrm{OPT}} = 6.95$ 95

5.14 Ergebnisse der Optimierung für den Betriebspunkt HGK 1273/573 mittels Powell-Algorithmus. Regularisierungsparameter $r = 2000$ ausgewählt nach *L-Curve* und *Morozov's Discrepancy Principle*. τ von 0.93 bis 1.2. $\tau_{\mathrm{OPT}} = 1$ 96

5.15 Ergebnisse der Optimierung für den Betriebspunkt HGK 1273/573 mittels Simulated Annealing. Regularisierungsparameter $r = 2000$ ausgewählt nach *L-Curve* und *Morozov's Discrepancy Principle* bei Variation mittels Powell-Algorithmus. τ von 1.18 bis 1.4. $\tau_{\mathrm{OPT}} = 1.2$ 98

5.16 Ergebnisse der Optimierung für den Betriebspunkt HGK 1273/573 mittels Bayesian Optimization. Regularisierungsparameter $r = 2000$ ausgewählt nach *L-Curve* und *Morozov's Discrepancy Principle* bei Variation mittels Powell-Algorithmus. τ von 0.85 bis 1.1. $\tau_{\mathrm{OPT}} = 0.9$ 99
5.17 Verlauf der Optimierung der verschiedenen Algorithmen für den Betriebspunkt HGK 1273/573 bei $r = 2000$. Aktuell bestes Ergebnis (Gesamtwert $R(T) + rG(\dot{q})$) über Anzahl der Funktionsaufrufe 100
5.18 Ergebnisse der Optimierung für den Betriebspunkt HGK 973/573 mittels modifiziertem Powell-Algorithmus. Regularisierungsparameter $r = 19000$ ausgewählt nach *L-Curve* und *Morozov's Discrepancy Principle*. τ von 0.79 bis 1.13. $\tau_{\mathrm{OPT}} = 0.93$ 101
5.19 Ergebnisse der Optimierung für den Betriebspunkt HGK 1073/373 mittels Powell-Algorithmus. Regularisierungsparameter $r = 5000$ ausgewählt nach *L-Curve* und *Morozov's Discrepancy Principle*. τ von 0.57 bis 0.97. $\tau_{\mathrm{OPT}} = 0.77$ 103
5.20 *L-Curve* für Daten nach Turner (1971) 104
5.21 Ergebnisse der Optimierung für Turner (1971) Betriebspunkt Turner Tu = 5.9 mittels modifiziertem Powell Algorithmus. Regularisierungsparameter $r = 8000$ ausgewählt nach *L-Curve* und MDP. τ von 0.46 bis 0.83. $\tau_{\mathrm{OPT}} = 0.63$ 105
5.22 Ergebnis der Optimierung für den Betriebspunkt Turner Tu = 0.45 (Turner 1971) mittels modifiziertem Powell Algorithmus. Regularisierungsparameter $r = 2500$ ausgewählt nach *L-Curve* und MDP. τ von 0.67 bis 1.07. $\tau_{\mathrm{OPT}} \approx 0.87$ 107
5.23 Ergebnisse der Optimierung für den Betriebspunkt Turner Tu = 0.45 (Turner 1971) mittels modifiziertem Powell Algorithmus. $r = 10$, τ von 0.05 bis 0.25. $\tau_{\mathrm{OPT}} = 0.05$ 108
5.24 Vergleich verschiedener gemittelter Verläufe von $|dq^*/ds^*|_m$ bei Einbeziehung unterschiedlicher Betriebspunkte 109
5.25 Turner (1971), Turner Tu = 0.45, r=10, Variation $G(\dot{q})$ 110
5.26 Turner (1971), Turner Tu = 0.45, r=2500, Variation $G(\dot{q})$ 111

Tabellenverzeichnis

4.1 Geometrieparameter der Turbulatoren in den Kühlkanälen 63
4.2 Einzelanteile der Messunsicherheit 67
4.3 Verwendete Betriebspunkte 68
4.4 Diskretisierung 70

5.1 Anzahl der Funktionsaufrufe und Rechenzeit der Algorithmen für den Betriebspunkt HGK 1273/573 bei $r = 2000$ 100

Literatur

Abe, K. und K. Suga (2001). „Towards the Developement of a Reynolds-Averaged Algebraic Turbulent Scalar-Flux Model“. In: *International Journal of Heat and Fluid Flow* 22, S. 19–29.

AG Turbo (8. Dez. 2024). *Turbomaschinen für die Energiewende*. AG Turbo. URL: https://www.dlr.de/de/ag-turbo/ueber-uns/ueber-uns.

Alifanov, O. M. und A. Nenarokomov (Aug. 1999). „Three-dimensional boundary inverse heat conduction problem for regular coordinate systems“. In: *Inverse Problems in Engineering* 7.4, S. 335–362. ISSN: 1029-0281. DOI: 10.1080/174159799088027701.

Allied Power Group (2. Dez. 2024). *Gas Turbine Efficiency – An Overview*. Allied Power Group. URL: https://alliedpg.com/latest-articles/gas-turbine-efficiency/.

Archetti, F. und A. Candelieri (2019). *Bayesian Optimization and Data Science*. Springer International Publishing. DOI: 10.1007/978-3-030-24494-1.

Auer, P. (Jan. 2002). „Using Confidence Bounds for Exploitation-Exploration Tradeoffs.“ In: *Journal of Machine Learning Research* 3, S. 397–422.

Axtmann, M., J. von Wolfersdorf und G. Meyer (2015). „Application of the Transient Heat Transfer Measurement Technique in a Low Aspect Ratio Pin Fin Cooling Channel“. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2015: Turbine Technical Conference and Exposition*. Bd. 5A. DOI: 10.1115/GT2015-42085.

Baehr, H. D. und K. Stephan (2019). *Wärme- und Stoffübertragung*. Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 9783662584415. DOI: 10.1007/978-3-662-58441-5.

Barth, T. (2010). „Aerothermodynamische Untersuchungen facettierter Raumfahrzeuge unter Wiedereintrittsbedingungen“. Diss. Institut für Thermodynamik der Luft- und Raumfahrt, Stuttgart.

Bayes, T. (1764). „An Essay Toward Solving a Problem in the Doctrine of Chances“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 53, S. 370–418. DOI: 10.1093/biomet/45.3-4.296.

Bayley, F. J. und G. R. Wood (Sep. 1969). „Aerodynamic Performance of Porous Gas Turbine Blades“. In: *Journal of the Royal Aeronautical Society* 73.705, S. 789–796. DOI: https://doi.org/10.1017/S0001924000051654.

Behrendt, T. und C. Hassa (Feb. 2008). „A test rig for investigations of gas turbine combustor cooling concepts under realistic operating conditions“. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering* 222.2, S. 169–177. ISSN: 2041-3025. DOI: 10.1243/09544100jaero288.

Brochu, E., V. M. Cora und N. de Freitas (2010). „A Tutorial on Bayesian Optimization of Expensive Cost Functions, with Application to Active User Modeling and Hierarchical Reinforcement Learning“. In: DOI: 10.48550/ARXIV.1012.2599.

Burggraf, O. R. (1964). „An Exact Solution of the Inverse Problem in Heat Conduction Theory and Applications“. In: *Journal of Heat Transfer* 86.3, S. 373–382.

Calvetti, D. und E. Somersalo (2018). „Inverse Problems: From Regularization to Bayesian Inference“. In: *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics* 10.3, e1427. DOI: 10.1002/wics.1427.

– (2023). „Bayesian Scientific Computing“. In: *Applied Mathematical Sciences*. ISSN: 2196-968X. DOI: 10.1007/978-3-031-23824-6.

Cao, N., X. Luo und H. Tang (Sep. 2022). „A Bayesian model to solve a two-dimensional inverse heat transfer problem of gas turbine discs“. In: *Applied Thermal Engineering* 214, S. 118762. DOI: https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2022.118762.

Chong, E. K. P. und S. H. Żak (Feb. 2008). *An Introduction to Optimization*. Wiley. ISBN: 9781118033340. DOI: 10.1002/9781118033340.

Cochran, R. und J. W. Norris (1976). „A high pressure, high temperature combustor and turbine-cooling test facility“. In: *Winter Ann. Meeting of the Am. Soc. of Mechanical Engineers*. NASA-TM-X-73445.

Coleman, H. W. und W. G. Steele (Apr. 2018). *Experimentation, Validation, and Uncertainty Analysis for Engineers*. Wiley. DOI: 10.1002/9781119417989.

Cuadrado, D. G., F. Lozano und G. Paniagua (Mai 2020). „Experimental Demonstration of Inverse Heat Transfer Methodologies for Turbine Applications“. In: *Journal of Turbomachinery* 142.6. DOI: DOI:10.1115/1.4046546.

Cumpsty, N. und A. Heyes (2015). *Jet Propulsion: A Simple Guide to the Aerodynamics and Thermodynamic Design and Performance of Jet Engines*. 3. Aufl. Cambridge: Cambridge University Press.

Derrar, M. (2005). „Experimentelle und numerische Untersuchungen der Kühleffektivität an filmgekühlten Turbinenschaufeln“. Diss. RWTH Aachen.

DIN EN 60584-1:2014-07, Thermoelemente - Teil 1: Thermospannungen und Grenzabweichungen (EC 60584-1:2013); Deutsche Fassung EN 60584-1:2013 (2014). DOI: 10.31030/2153253.

DIN EN IEC 60751:2023-06, Industrielle Platin-Widerstandsthermometer und Platin-Temperatursensoren (IEC 60751:2022); Deutsche Fassung EN IEC 60751:2022 (2023). DOI: 10.31030/3405985.

Ekkad, S. V. und J. C. Han (1997). „Detailed Heat Transfer Distributions in Two-Pass Square Channels with Rib Turbulators“. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 40.11, S. 2525–2537.

Findeisen, E. (2019). „Methoden zur thermischen Auslegung konvektiv gekühlter Turbinenschaufeln“. Diss. RWTH Aachen University.

Forrester, A. I. J., A. Sóbester und A. J. Keane (Juli 2008). *Engineering Design via Surrogate Modelling*. Wiley. DOI: 10.1002/9780470770801.

Frąckowiak, A., J. v.Wolfersdorf und M. Ciałkowski (Feb. 2011). „Solution of the Inverse Heat Conduction Problem Described by the Poisson Equation for a Cooled Gas-Turbine Blade“. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 54.5-6, S. 1236–1243. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.11.001.

Frąckowiak, A., M. Ciałkowski und J. von Wolfersdorf (Jan. 2006). „Numerical solution of a two-dimensional inverse heat transfer problem in gas turbine blade cooling“. In: 27, S. 91–98.

Frazier, P. I. (2018). *A Tutorial on Bayesian Optimization*. DOI: 10.48550/ARXIV.1807.02811.

Gladden, H. J. und J. W. Gauntner (1975). *Experimental verification of film-cooling concepts on a turbine vane*. Techn. Ber.

Gladden, H. J., F. C. Yeh und D. L. Fronek (März 1985). „Heat Transfer Results and Operational Characteristics of the NASA Lewis Research Center Hot Section Cascade Test Facility“. In: DOI: https://doi.org/10.1115/85-GT-82.

Gülen, S. C. und M. Curtis (Apr. 2024). „Gas Turbine's Role in Energy Transition“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 146.10. ISSN: 1528-8919. DOI: DOI:10.1115/1.4064800.

Hadamard, J. (1902). „Sur les problèmes aux dérivés partielles et leur signification physique“. In: *Princeton University Bulletin* 13, S. 49–52.

Hansen, P. C. und D. P. O'Leary (Nov. 1993). „The Use of the L-Curve in the Regularization of Discrete Ill-Posed Problems“. In: *SIAM Journal on Scientific Computing*

14.6, S. 1487–1503. ISSN: 1095-7197. DOI: https://ui.adsabs.harvard.edu/link_gateway/1993SJSC...14.1487H/doi:10.1137/0914086.

Hastings, W. K. (Apr. 1970). „Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications“. In: *Biometrika* 57.1, S. 97–109. ISSN: 0006-3444. DOI: 10.1093/biomet/57.1.97.

Heywood, J. B. (1988). *Internal Combustion Engine Fundamentals*. McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering. McGraw-Hill.

Hodge, R. I. (1960). *A Turbine Nozzle Cascade for cooling Studies. Memorandum No. M.308*. Part I: The measurement of mean Nusselt numbers at the blade surface. Techn. Ber. Aeronautical Research Council.

Hylton, L. D., M. S. Mihelc, E. R. Turner, D. A. Nealy und R. E. York (Mai 1983). *Analytical and Experimental Evaluation of the Heat Transfer Distribution over the Surfaces of Turbine Vanes*. Techn. Ber. NASA.

Iglesias, M., Z. Sawlan, M. Scavino, R. Tempone und C. Wood (2017). „Bayesian Inferences of the Thermal Properties of a Wall Using Temperature and Heat Flux Measurements“. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 116, S. 417–431.

Inman, D., D. G. Cuadrado, V. Andreoli, J. Fisher, G. Paniagua, P. A. N. Aye-Addo, L. Bhatnagar, F. Lozano, T. Meyer und M. Bloxham (Sep. 2020). „Particle Image Velocimetry in a High-Pressure Turbine Stage at Aerodynamically Engine Representative Conditions“. In: GT2020. DOI: 10.1115/gt2020-15013.

Jones, D. R., M. Schonlau und W. J. Welch (1998). „Efficient Global Optimization of Expensive Black-Box Functions“. In: *Journal of Global Optimization* 13.4, S. 455–492. DOI: 10.1023/A:1008306431147.

Jordan, M. I., Z. Ghahramani, T. S. Jaakkola und L. K. Saul (1998). „An Introduction to Variational Methodsfor Graphical Models“. In: *Learning in Graphical Models*. Springer Netherlands, S. 105–161. ISBN: 9789401150149. DOI: 10.1007/978-94-011-5014-9_5.

Kaipio, J. und E. Somersalo (30. März 2006). *Statistical and Computational Inverse Problems*. Springer-Verlag GmbH. 340 S. ISBN: 9780387271323.

Kaipio, J. P. und C. Fox (2011). „The Bayesian Framework for Inverse Problems in Heat Transfer“. In: *Heat Transfer Engineering* 32.9, S. 718–753.

Kirkpatrick, S., C. D. Gelatt und M. P. Vecchi (Mai 1983). „Optimization by Simulated Annealing“. In: *Science* 220.4598, S. 671–680. ISSN: 1095-9203. DOI: 10.1126/science.220.4598.671.

Kumar, H. und G. Nagarajan (Apr. 2018). „A Bayesian inference approach: estimation of heat flux from fin for perturbed temperature data“. In: *Sādhanā* 43.4. ISSN: 0973-7677. DOI: 10.1007/s12046-018-0861-7.

Kushner, H. J. (März 1964). „A New Method of Locating the Maximum Point of an Arbitrary Multipeak Curve in the Presence of Noise“. In: *Journal of Basic Engineering* 86.1, S. 97–106. ISSN: 0021-9223. DOI: https://doi.org/10.1115/1.3653121.

Lauret, P., F. Miranville, H. Boyer, F. Garde und L. Adelard (2006). „Bayesian Parameter Estimation of Convective Heat Transfer Coefficients of a Roof-Mounted Radiant Barrier System“. In: *Journal of Solar Energy Engineering* 128, S. 213–225. DOI: 10.1115/1.2188957.

Leonardi, S., P. Orlandi, R. J. Smalley, L. Djenidi und R. A. Antonia (Sep. 2003). „Direct numerical simulations of turbulent channel flow with transverse square bars on one wall“. In: *Journal of Fluid Mechanics* 491, S. 229–238. ISSN: 1469-7645. DOI: 10.1017/s0022112003005500.

Leoni, N. und C. H. Amon (März 2000). „Bayesian surrogates for integrating numerical, analytical, and experimental data: application to inverse heat transfer in wearable computers“. In: *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies* 23.1, S. 23–32. DOI: DOI:10.1109/6144.833038.

Lienhard, J. H. I. und J. H. V. Lienhard (2018). *A Heat Transfer Textbook*. Phlogiston Press Cambridge, Massachusetts; U.S.A.

Matheron, G. (1971). „The Theory of Regionalized Variables and its Applications“. In.

McKay, M. D., R. J. Beckman und W. J. Conover (Mai 1979). „A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code“. In: *Technometrics* 21.2, S. 239. ISSN: 0040-1706. DOI: 10.2307/1268522.

Mick, Y. (2015). „Experimentelle und numerische Methoden zur Untersuchung einer konvektionsgekühlten Turbinenschaufel unter realen Temperaturbedingungen“. Diss. Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen.

Mockus, J., V. Tiesis und A. Zilinskas (1978). „The Application of Bayesian Methods for Seeking the Extremum“. In: *Towards Global Optimization* 2.117-129, S. 2.

Morozov, V. (Jan. 1966). „Regularization of incorrectly posed problems and the choice of regularization parameter“. In: *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 6.1, S. 242–251. ISSN: 0041-5553. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(66)90046-2.

Morris, M. D. (Mai 1991). „Factorial Sampling Plans for Preliminary Computational Experiments“. In: *Technometrics* 33.2, S. 161–174. DOI: 10.1080/00401706.1991.10484804.

Mueller, J. L. und S. Siltanen (15. Nov. 2012). *Linear and Nonlinear Inverse Problems with Practical Applications*. Society for Industrial und Applied Mathematics. 372 S. ISBN: 1611972337. DOI: 10.1137/1.9781611972344.

Nakamura, T., Y. Kamimura, H. Igawa und Y. Morino (Okt. 2014). „Inverse analysis for transient thermal load identification and application to aerodynamic heating on atmospheric reentry capsule“. In: *Aerospace Science and Technology* 38, S. 48–55. ISSN: 1270-9638. DOI: 10.1016/j.ast.2014.07.015.

Nealy, D. A., M. S. Mihelc, L. D. Hylton und H. J. Gladden (Jan. 1984). „Measurements of Heat Transfer Distribution Over the Surfaces of Highly Loaded Turbine Nozzle Guide Vanes“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 106.1, S. 149–158. DOI: https://doi.org/10.1115/1.3239528.

Nirmalan, V. und L. Hylton (1989). „An experimental study of turbine vane heat transfer with leading edge and downstream film cooling“. In: *ASME 1989 International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exposition*. American Society of Mechanical Engineers, V004T08A006–V004T08A006.

Okamura, T., H. Kawagishi, A. Koga und S. Itoh (Mai 2003). „Evaluation Tests of 1700 °C Class Turbine Cooled Blades for a Hydrogen Fueled Combustion Turbine System“. In: *Heat Transfer - Asian Research: Co-sponsored by the Society of Chemical Engineers of Japan and the Heat Transfer Division of ASME* 32.3, S. 237–252. DOI: 10.1002/htj.10088.

Özisk, M. N. und H. R. B. Orlande (2021). *Inverse Heat Transfer Fundamentals and Applications*. 2. Aufl. Routledge. ISBN: 9780203749784. DOI: 10.1201/9780203749784.

Paniagua, G., D. Cuadrado, J. Saavedra, V. Andreoli, T. Meyer, J. P. Solano, R. Herrero, S. Meyer und D. Lawrence (Aug. 2018). „Design of the Purdue Experimental Turbine Aerothermal Laboratory for Optical and Surface Aerothermal Measurements“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 141.1. DOI: 10.1115/1.4040683.

Pelikan, M., D. E. Goldberg und E. Cantú-Paz (1999). „BOA: the Bayesian optimization algorithm“. In: *GECCO'99: Proceedings of the 1st Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation* 1, S. 525–532.

Powell, M. J. D. (Feb. 1964). „An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives“. In: *The Computer Journal* 7.2, S. 155–162. DOI: 10.1093/comjnl/7.2.155.

Press, W. H. (1996). *Numerical Recipes in FORTRAN: Numerical Recipes in Fortran 77*. University Press.

Rådeklint, U. R. und C. S. Hjalmarsson (Juni 1998). „A New Test Facility for Testing of Cooled Gasturbine Components“. In: *Volume 2: Aircraft Engine; Marine; Microturbines and Small Turbomachinery*. GT1998. American Society of Mechanical Engineers. DOI: 10.1115/98-gt-557.

Raj, R. R., G. Venugopal und M. Rajkumar (2015). „Bayesian Inference for Parameter Estimation in Transient Heat Transfer Experiments“. In: *Journal of Heat Transfer* 137, S. 121011.

Rasmussen, C. E. und C. K. I. Williams (23. Nov. 2005). *Gaussian Processes for Machine Learning*. MIT Press Ltd. 272 S. ISBN: 026218253X.

Rezazadeh Reyhani, M., M. Alizadeh, A. Fathi und H. Khaledi (Juni 2013). „Turbine blade temperature calculation and life estimation - a sensitivity analysis“. In: *Propulsion and Power Research* 2.2, S. 148–161. ISSN: 2212-540X. DOI: https://pdf.sciencedirectassets.com/282159/1-s2.0-S2212540X13X00033/1-s2.0-S2212540X13000199/dx.doi.org/10.1016/j.jppr.2013.04.004.

Roache, P. J. (1997). „Quantification of Uncertainty in Computational Fluid Dynamics“. In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 29, S. 123–160.

Rodler, A., S. Guernouti und M. Musy (2019). „Bayesian inference method for in situ thermal conductivity and heat capacity identification: Comparison to ISO standard“. In: *Construction and Building Materials* 196, S. 574–593. DOI: https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2018.11.110.

Schlichting, H. und K. Gersten (1997). *Grenzschicht-Theorie*. Karlsruhe: Springer Verlag.

Schröder, W. (2006). *Strömungs- und Temperaturgrenzschichten, Vorlesungsskript*.

Singh, P., B. V. Ravi und S. V. Ekkad (Nov. 2016). „Experimental and numerical study of heat transfer due to developing flow in a two-pass rib roughened square duct“. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 102, S. 1245–1256. ISSN: 0017-9310. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.07.015.

Sobol', I. (Jan. 1967). „On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals“. In: *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 7.4, S. 86–112. ISSN: 0041-5553. DOI: 10.1016/0041-5553(67)90144-9.

Stolz, G. J. (1960). „Numerical Solutions to an Inverse Problem of Heat Conduction for Simple Shapes“. In: *Journal of Heat Transfer* 82.1, S. 20–26.

Straub, D. L., T. G. Sidwell, K. H. Casleton, M. A. Alvin, S. Chien und M. K. Chyu (Juni 2012). „High Temperature Film Cooling Test Facility and Preliminary Test

Results“. In: *Volume 4: Heat Transfer, Parts A and B*. American Society of Mechanical Engineers. DOI: 10.1115/GT2012-69767.

Taler, J. (Feb. 2007). „Determination of local heat transfer coefficient from the solution of the inverse heat conduction problem“. In: *Forschung im Ingenieurwesen* 71.2, S. 69–78. DOI: 10.1007/s10010-006-0044-2.

Tsai, C.-W. und M.-C. Chiang (2023). *Handbook of Metheuristic Algorithms*. Elsevier. ISBN: 9780443191084. DOI: 10.1016/c2022-0-00638-3.

Turner, A. B. (1971). „Local Heat Transfer Measurements on a Gas Turbine Blade“. In: *Journal of Mechanical Engineering Science* 13, S. 1–12. DOI: 10.1243/jmes_jour_1971_013_003_02.

Uguccini, O. W. und F. G. Pollack (1976). *High-resolution surface temperature measurements on rotating turbine blades with an infrared pyrometer*. NASA Lewis Research Center.

VDI-Wärmeatlas (2013). *VDI-Wärmeatlas*. Hrsg. von V.-G. V. und Chemieingenieurwesen. 11. Aufl. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Vortmeyer, D. und S. Kabelac (2013). „K3 Strahlung von Gasen und Gasgemischen“. In: *VDI-Wärmeatlas*. Springer Berlin Heidelberg, S. 1115–1128. DOI: 10.1007/978-3-642-19981-3_70.

Wang, J. und N. Zabaras (2004). „A Bayesian inference approach to the inverse heat conduction problem“. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47.17-18, S. 3927–3941.

Wang, W., P. Sun, J. Ren und H. Jiang (Jan. 2011). „Radiative Effectiveness on the Aero- and Thermodynamics in a Highly Thermally Loaded Film Cooling System“. In: *Volume 5: Heat Transfer, Parts A and B*. GT2011. ASMEDC. DOI: 10.1115/gt2011-45592.

White, F. M. (1991). *Viscous Fluid Flow*. 2. Aufl. McGraw-Hill New York. ISBN: 9780070697102.

Wieler, M. (2019). „Einfluss ausbildender Sekundärströmungen bei Rippenturbulatoren auf den Wärmeübergang im Kühlkanal einer Gasturbinenschaufel“. Diss. ISBN: 978-3-8439-4470-0.

Wiers, S.-H., T. H. Fransson, U. Rådeklint und M. Annerfeldt (Juni 2001). „Flow Field Measurements in a Cold Flow Annular Sector Turbine Cascade Test Facility and an Annular Sector Cascade Test Facility Operating at Near-Engine Conditions“. In: DOI: https://doi.org/10.1115/2001-GT-0491.

Woodbury, K. A., H. Najafi, F. Monte und J. V. Beck (März 2023). *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*. Wiley. ISBN: 9781119840220. DOI: 10.1002/9781119840220.

Wörz, B. (2018). „Numerische Modellierung turbulenter Strömung mit Wärmeübergang in einer konvektiv gekühlten Turbinenschaufel“. Diss. RWTH Aachen University.

Wörz, B., M. Wieler, E. Findeisen und V. Dehe (2018a). *Analyseverfahren moderner Gasturbinenkühlung unter flexibler Last - Experiment*. Forschungsber.

– (2018b). *Analyseverfahren moderner Gasturbinenkühlung unter flexibler Last - Theorie*.

Wróblewska, A., A. Frąckowiak und M. Ciałkowski (März 2015). „Regularization of the inverse heat conduction problem by the discrete Fourier transform“. In: *Inverse Problems in Science and Engineering* 24.2, S. 195–212. ISSN: 1741-5985. DOI: 10.1080/17415977.2015.1017480.