

Yin-Yang-Kurven lösen ein Packungsproblem

RWTHTHEMEN 2/2008

Wie muss man eine unhandliche Matratze verbiegen, damit sie möglichst wenig aus dem Kofferraum herausragt? Warum lohnt sich das behutsame und saubere Aufrollen auf eine Kabelrolle, um ein langes Stromkabel zu bändigen? Diese und ähnliche Fragestellungen lassen sich zu den Packungsproblemen zählen, bei denen man einen möglichst großen Anteil eines Gegenstandes durch geeignete Verformung in einen Behälter oder auf einer vorgegebenen Oberfläche platzieren möchte. Auch die Natur kennt solche Optimierungsprobleme: Es ist faszinierend, wie und in welcher verblüffender Dichte extrem lange Stränge viraler DNA in das sehr kleine Volumen eines Bakteriophagenkopfes verpackt werden können.

Für die Modellierung und Computersimulation derartiger Vorgänge ist es oft von entscheidender Bedeutung, solche Probleme in mathematisch idealisierter Form zu analysieren. Ein Beispiel ist die folgende Version.

Packungsproblem (P): Gesucht ist die längste Kurve vorgeschriebener Mindestdicke auf einer gegebenen Oberfläche.

Als eine solche Oberfläche wird die Sphäre vom Radius 1 gewählt. Dann lassen sich für unendlich viele Werte vorgeschriebener Mindestdicke eindeutige Lösungen des Packungsproblems konstruieren. Die einfachsten dieser Lösungskurven erinnern an das aus der fernöstlichen Kultur bekannte Yin-Yang-Symbol. In abgewandelter Form findet man solche Kurven als Nahtlinien auf handelsüblichen Tennisbällen, siehe Bild 1. Auch für Kurven mit verschiedenen Anfangs- und Endpunkten kann man aus geeigneten Halbkreisen eindeutige Lösungen konstruieren, siehe Bild 6.

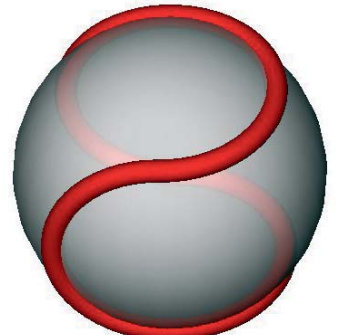
Mit dem Problem (P) betritt man das mathematische Teilgebiet der Variationsrechnung, die ganz dem Prinzip natürlicher Effizienz folgend - nach energetisch günstigsten Lösungen sucht. Die Rolle der „Energie“ übernimmt hier das Längenfunktional, welches Kurven ihre Länge zuordnet. Die Lösungen des Variationsproblems sucht man in der



Bild 1: Die Nahtlinien eines Tennisballs, die aus Halbkreisen zusammengesetzte Kurve



des Yin-Yang-Symbols und eine sphärische Lösungskurve für das Packungsproblem (P).



Klasse der Kurven, die eine solche Längenmessung zulassen. Aber wie beschreibt man mathematisch die „Dicke“ einer Kurve? Die entscheidende Idee für eine in der Variationsrechnung geeignete Definition einer Kurvendicke hatten Oscar Gonzalez und John Maddocks im Jahre 1999, indem sie auf den klassischen Umkreisradius $R(x,y,z)$ dreier Raumpunkte x,y und z zurückgriffen. Wertet man diese Radiusfunktion an allen Tripeln von Kurvenpunkten entlang einer Kurve aus und findet dabei eine positive untere Schranke $\theta > 0$ für alle diese Radien, dann schreibt man der Kurve die Mindestdicke θ zu. Wird der Umkreisradius R für ein Tripel von Kurvenpunkten klein, die entlang der Kurve sehr dicht aufeinander folgen, bedeutet das, dass sich die Kurve dort verstärkt krümmt. Dies ist ein Effekt, der nur von der lokalen Gestalt der Kurve in diesem Bereich abhängt. Wird R aber für drei Kurvenpunkte klein, von denen mindestens zwei durch einen längeren Kurvenbogen getrennt sind, dann kommen sich zwei verschiedene Kurvenstränge im Raum sehr nahe – abhängig von der Gestalt der Kurve als Ganzes, siehe Bild 2.

Mit Methoden der Variationsrechnung kann man zeigen, dass das Problem (P) auf der Sphäre tatsächlich für jede vorgeschriebene Dicke $\theta \in (0,1]$ mindestens eine Lösung besitzt. Darüber hin-

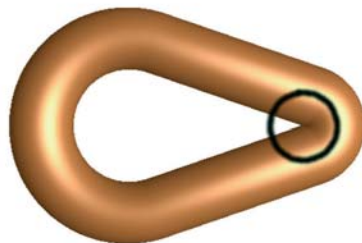
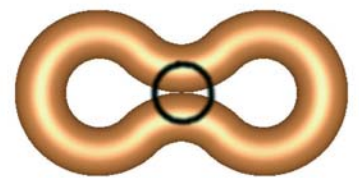


Bild 2: Die Zentrallinien dieser schlauchförmigen Gebilde sind Kurven mit positiver Dicke. Die Dicke wird bei beiden Kurven jeweils durch den Radius der schwarzen Kreislinie bestimmt, den man durch Annäherung mit Umkreisradien $R(x,y,z)$ dreier Kurvenpunkte x,y,z



erhält. Links beschränkt die lokale Krümmung die Dicke; rechts führt die räumliche Nähe verschiedener Kurvenbögen zu einer beschränkten Dicke.

Quelle:
www.ma.utexas.edu/users/og/curvature.html

aus lassen sich für die unendlich vielen Mindestdicken

$$\theta_1 = \sin \pi / 2 = 1, \quad \theta_2 = \sin \pi / 4, \dots, \quad \theta_n = \sin \pi / (2n), \dots$$

geschlossene Kurven konstruieren, deren Länge von keiner anders geformten Kurve dieser Mindestdicken erreicht wird. Speziell liefert die weiter unten beschriebene Konstruktion die Yin-Yang-Kurve auf der Sphäre für die gegebene Dicke θ_2 , siehe Bild 1.

Die Tatsache, dass man explizite und eindeutige Lösungskurven erhält, ist erstaunlich, wenn man berücksichtigt, dass man für eng verwandte Probleme, etwa

für die Suche nach so genannten „idealen Knoten“ zwar die Existenz von Lösungen beweisen konnte, aber fast gar nichts über deren tatsächliche Gestalt weiß. Ideale Knoten sind die Kurven einer vorgegebenen Knotenklasse, welche die Länge bei fixierter Mindestdicke minimieren. In einem Gedankenexperiment erzeugt man beispielsweise die „ideale Kleeblattschlinge“, indem man einen losen Kleeblatt-Knoten fester und fester zusammenzieht, siehe Bild 3. So wie das Packungsproblem (P) ist auch die Suche nach idealen Knoten nicht nur aus mathematischer Sicht in-

Explizite geometrische Konstruktionen in der Variationsrechnung

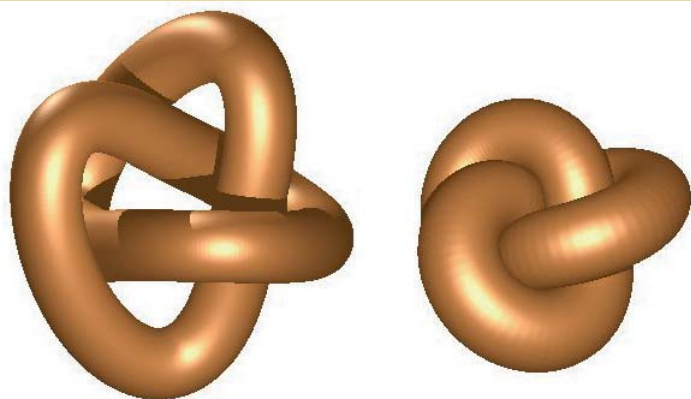


Bild 3: Die ideale Kleeblattschlinge entsteht durch Festziehen eines Knotens, also durch das Minimieren der Kurvenlänge bei gleichbleibender Mindestdicke.
Quelle:
www.ma.utexas.edu/users/og/curvature.html

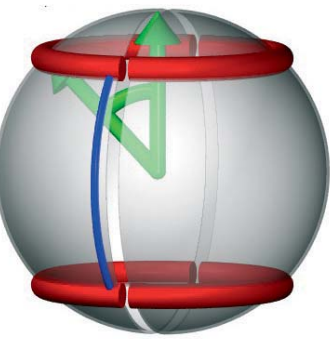
teressant: Es ist experimentell nachweisbar, dass DNA-Moleküle häufig eine verknotete und extrem verdrehte Gestalt annehmen. Aus dem mathematischen Studium idealer Konfigurationen erhofft man sich Rückschlüsse auf die mikrobiologischen Prozesse, bei denen große Mengen verknoteter DNA-Moleküle platzsparend in kleine Volumina verpackt werden. Sucht man zur Lösung des Pro-

blems (P) auf der Sphäre zunächst die längste geschlossene Kurve der Mindestdicke $\theta_1=1$, so ist der Äquator überhaupt der einzige Kandidat und damit die eindeutige Lösung. Tatsächlich ist der Äquator ein Großkreis, also ein Kreis der Länge 2π auf der Sphäre, und besitzt als Kurve im Raum die Dicke 1. Jede anders geformte Kurve auf der Sphäre enthält mindestens drei Punkte, die nicht auf einem Großkreis lie-

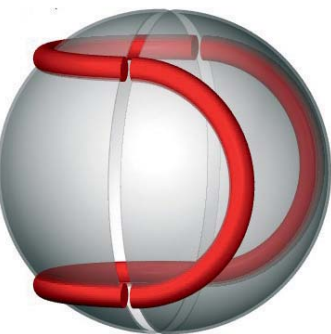
gen. Die Ebene durch diese Punkte schneidet demnach die Sphäre in einem Kreis, dessen Radius strikt kleiner als 1 ist. Folglich ist die Dicke jeder sphärischen Kurve, die kein Großkreis ist, strikt kleiner als 1.
Für die folgende Konstruktion wird dem Äquator der vom Nordpol aus gemessene sphärische Winkel $\pi/2$ zugeordnet. Für die vorgeschriebene Mindestdicke $\theta_2=\sin\pi/4$ wählt man an-

stelle des Äquators den Breitenkreis zum sphärischen Winkel $\pi/4$ und dazu einen weiteren Breitenkreis im sphärischen Abstand $\pi/2$. Um aus diesen zwei Breitenkreisen der Dicke θ_2 eine einzige geschlossene Kurve derselben Dicke zu konstruieren, zerschneidet man die Sphäre entlang eines Längenkreises in eine westliche und eine östliche Hemisphäre. Dann verdreht man die östliche Hemisphäre um den Winkel $\pi/2$ gegenüber der westlichen und klebt die so gegeneinander verdrehten Hemisphären abschließend wieder zusammen, siehe Bild 4. Das Ergebnis ist die sphärische Yin-Yang-Kurve, bestehend aus den zusammengeführten Halbkreisen der östlichen und westlichen Hemisphäre.
Allgemein wählt man zu vorgegebener Mindestdicke $\theta_n=\sin\pi/(2n)$ für $n=1,2,3,\dots$ genau n Breitenkreise im sphärischen Abstand π/n . Dann dreht man die östliche gegen die westliche Hemisphäre um den Winkel $k\pi/n$ für ein k aus der Menge $\{1,2,\dots,n-1\}$, bevor man die Hemisphären in verdrehter Stellung

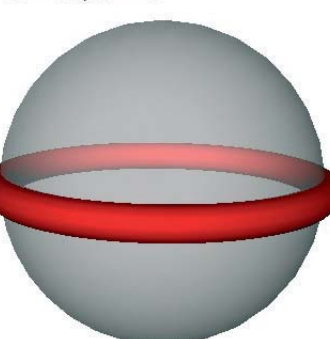
$n=2, k=0$



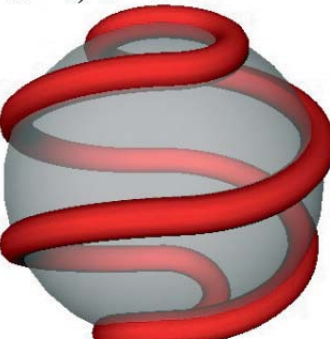
$n=2, k=1$



$n=1, k=0$



$n=4, k=1$



$n=12, k=5$



Bild 4: Konstruktion der Lösung mit Dicke $\theta_2 = \sin\pi/4$: Ein Breitenkreis zum sphärischen Winkel $\pi/4$ (grüne Pfeile) und ein zweiter Breitenkreis im sphärischen Abstand $\pi/2$ (blaue Linie) werden durch die Trennung der Hemisphären in vier Halbkreise unterteilt. Nach der Drehung um den Winkel $\pi/2$ fügen sich diese Halbkreise zur geschlossenen Yin-Yang-Kurve zusammen.

Bild 5: Lösungskurven für $n=1, 4$ und 12 . Der Parameter k bestimmt den jeweiligen Drehwinkel der Hemisphären. (Wie in Bild 4 werden die Kurven aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht in ihrer vollen Dicke θ_n dargestellt.)



Bild 6: Lösungskurven mit verschiedenen Anfangs- und Endpunkten zu unterschiedlichen Dicken. Die beiden äußeren Kurven sind mit ihrer vollen Kurvendicke dargestellt.

wieder zusammenklebt. Mit elementaren Methoden aus der Algebra lässt sich feststellen, wann dieses Verfahren zu geschlossenen Kurven wie in Bild 5 führt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Zahlen k und n teilerfremd sind. So produzieren etwa bei vorgeschriebener Minstdicke $\theta_4 = \sin \pi/8$ nur die Drehungen um die Winkel $\pi/4$ und $3\pi/4$ geschlossene - und verschiedene - Schleifen. Wenn diese Konstruktion also wirklich zu Lösungen führt, dann weiß man aus der Zahlentheorie auch direkt, wie groß die Lösungsmengen sind. Die Eulersche Phi-Funktion $\varphi(n)$ gibt an, wie viele teilerfremde Zahlen k aus der Menge $\{1, \dots, n-1\}$ zu $n=1, 2, 3, \dots$ existieren, siehe Tabelle 1. Bei jeder Primzahl sind dies naturgemäß alle natürlichen Zahlen, die kleiner sind als diese Primzahl. Es ergeben sich also teils sehr große Mengen an expliziten und in ihrer Gestalt eindeutigen Lösungen.

Warum aber sind diese so konstruierten geschlossenen Kurven tatsächlich Lösungen des Packungsproblems (P) auf der Sphäre? Den Schlüssel zur Beantwortung dieser Frage liefert ein für Untersuchungen aus der statistischen Physik hergeleiteter Satz von Harold Hotelling aus dem Jahr 1939. Dieser Satz erlaubt die explizite Berechnung des Flächeninhalts von tubenförmigen Umgebungen von dicken Kurven auf der Sphäre. Hat die Kurve der Dicke $\theta = \sin \alpha$ die Länge L , dann gilt für den Flächeninhalt F ihrer Tubenumgebung mit sphärischem Radius α die Beziehung $F = 2\theta L$. Andererseits ist der maximal auf der Sphäre über-

deckte Flächeninhalt die Gesamtoberfläche der Sphäre, also 4π . Die Formel von Hotelling liefert demnach die Zahl $2\pi/\theta$ als größtmögliche Länge einer Kurve der Minstdicke θ . Für die zu den Dicken $\theta_n = \sin \pi/(2n)$ konstruierten Kurven kann man leicht zeigen, dass deren sphärische Tubenumgebungen jeweils den maximalen Flächeninhalt 4π haben. Damit ist bewiesen, dass diese Kurven die größtmögliche Länge haben. Es wurden also tatsächlich explizite Lösungen des Packungsproblems für jede der vorgeschriebenen Minstdicken θ_n für $n=1, 2, 3, \dots$ gefunden.

Kann man aber ausschließen, dass es noch ganz andere Lösungen mit diesen Dicken gibt? Bei allgemeinen Variationsproblemen ist dies oft sehr schwierig, und in vielen Fällen ist die Frage nach der Größe der Lösungsmenge bis heute ungeklärt. Hier aber ist die Situation günstiger; denn es lässt sich folgendes beweisen: Angenommen die Tubenumgebung einer dicken sphärischen Kurve hat den auf der Sphäre maximalen Flächeninhalt 4π , dann muss die Kurvendicke den Wert $\theta_n = \sin \pi/(2n)$ für ein n aus der Menge $\{1, 2, 3, \dots\}$ haben. Anschaulich bedeutet das: Möchte man einen Fußball statt mit Geschenkpapier mit einer dicken Kordel einlagig umwickeln, um den Ball als Geschenk zu verpacken, so wird dies nicht mit jeder Kordel funktionieren. Die Dicke der Kordel muss in einem bestimmten Verhältnis zur Oberfläche des Balles stehen. Andernfalls entstünden Lücken, und man wäre gezwungen, die

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	97	120	121	122	123	124	125
$\varphi(n)$	1	2	2	4	2	6	4	6	4	96	32	110	60	80	60	100

Tabelle 1: Einige Werte der Eulerschen Phi-Funktion $\varphi(n)$, welche die Zahl der Lösungskurven der Dicke θ_n angibt.

Kordel in mehreren Lagen um den Ball zu wickeln. Hat man dies eingesehen, dann kann man zeigen, dass die Kurve mit den oben konstruierten Lösungen übereinstimmen muss. Insbesondere liefert dieser Satz die Eindeutigkeit der Lösungen. Hat beispielsweise eine Kurve der Dicke $\theta_2 = \sin \pi/4$ die nach Hotelling maximal mögliche Länge $2\pi/\theta_2$, dann muss die Kurve die sphärische Yin-Yang-Kurve in Bild 4 sein.

Analoge Resultate konnten für Kurven erzielt werden, deren Anfangs- und Endpunkte verschieden sind. Einige der expliziten und eindeutigen Lösungen sind in Bild 6 dargestellt. Auch für die Zwischenwerte $\theta \in (\theta_2, \theta_1) = (\sin \pi/4, 1)$ einer gegebenen Minstdicke wurden Kurven durch Zusammensetzen geeigneter Kreisbögen konstruiert, siehe Bild 7. Da aber die zugehörigen Tubenumgebungen die Sphäre nicht vollständig ausfüllen, ist es bislang eine offene Frage, ob diese Kurven die maximale Länge haben. Gute Kandidaten für die Lösung des Packungsproblems (P) sind sie in jedem Fall.

www.instmath.rwth-aachen.de

Autoren:
Dipl.-Math. Henryk Gerlach promoviert an der EPFL Lausanne.
Univ.-Prof. Dr.rer.nat. Heiko von der Mosel betreut das Lehr- und Forschungsgebiet Mathematik.

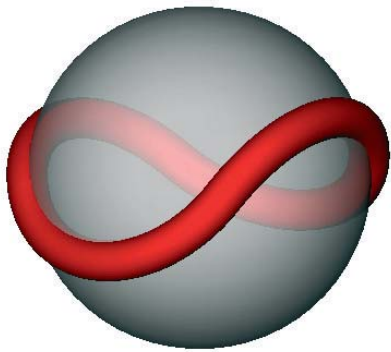


Bild 7: Eine aus kürzeren Kreisbögen zusammengesetzte Kurve der Dicke $\theta \in (\theta_2, \theta_1)$: zumindest ein sehr guter Kandidat.



Wie lässt sich ein Fußball mit einer Kordel „verpacken“?
 Professor Heiko von der Mosel
 vom Lehr- und Forschungs-
 gebiet Mathematik analysiert
 Packungsprobleme.
 Foto: Peter Winandy