

# **Approximative Stabilitätsanalyse der nichtlinearen Dynamik von Flugzeugen**

Von der Fakultät für Maschinenwesen  
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen  
zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktors der Ingenieurwissenschaften genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Norbert Siepenkötter

aus

München

Berichter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Alles  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. H.-G. Reimerdes

Tag der mündlichen Prüfung: 01.08.2003

Diese Dissertation ist auf der Internetseite der Hochschulbibliothek online verfügbar.



# Vorwort

Die Vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Flugdynamik der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen im Rahmen des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Sonderforschungsbereiches 401 "Strömungsbeeinflussung und Strömungs-Struktur-Wechselwirkung an Tragflügeln".

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Alles für die Möglichkeit zu dieser interessanten Forschungstätigkeit und die stets wohlwollende Förderung und Betreuung der Arbeit. Darüber hinaus möchte ich ihm für die Möglichkeit danken, auch auf anderen Gebieten tätig werden zu dürfen. Ebenso danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. H.-G. Reimerdes für die Übernahme des Korreferats.

Bedanken möchte ich mich weiterhin bei Herrn Dr.-Ing W. Kasberg und Dr.-Ing. R. Berting für ihre außerordentlich kollegiale Unterstützung. Desweiteren danke ich meinen Kollegen Richard Arning, Harald Quix, Stefan Kirschstein und Stefan Szymanski, meinen studentischen Hilfskräften sowie meinen Studien- und Diplomarbeitern für die sehr angenehme Zusammenarbeit.

Mein Dank gilt ferner den Mitarbeitern im Institut für Luft- und Raumfahrt sowie den Kollegen im Sonderforschungsbereich für die freundliche Arbeitsatmosphäre.

Schließlich möchte ich mich ganz besonders bei meinen Eltern und Kerstin Biskupski für ihre Geduld und die Unterstützung bei der Durchsicht des Manuskriptes bedanken.

Aachen, August 2003

Norbert Siepenkötter



# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur</b>	<b>VII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Problemstellung und Stand der Technik . . . . .	1
1.2 Ziel und Aufbau der Arbeit . . . . .	3
<b>2 Stabilitätsanalyse</b>	<b>5</b>
2.1 Methoden zur Stabilitätsanalyse nichtlinearer Systeme . . . . .	5
2.2 Angewandte Approximationsmethode . . . . .	8
2.2.1 Einführung . . . . .	8
2.2.2 Methode von Beecham und Titchener . . . . .	9
2.2.3 BTS-Verfahren . . . . .	12
2.2.4 Verfahren nach Reitenbacher und ASTAN-Verfahren . . . . .	14
2.2.5 N-Massenschwinger . . . . .	19
2.2.6 Randbedingungen des Verfahrens . . . . .	23
<b>3 Ursachen für Nichtlinearitäten</b>	<b>28</b>
3.1 Luftkräfte und Luftkraftmomente . . . . .	28
3.2 Starrkörperdynamik . . . . .	29
3.3 Strukturdynamik . . . . .	30
3.4 Regelung . . . . .	30
<b>4 Agiles Flugzeug</b>	<b>32</b>
4.1 Modellierung . . . . .	32
4.2 Analyseergebnisse . . . . .	34
<b>5 Flexibles Flugzeug</b>	<b>49</b>
5.1 Modellierung . . . . .	49
5.1.1 Methoden zur Modellierung flexibler Flugzeuge . . . . .	49
5.1.2 Bewegungsgleichungen . . . . .	50
5.1.3 Generalisierte Kräfte . . . . .	59
5.1.4 Untersuchte Flugzeugkonfiguration . . . . .	64
5.2 Analyseergebnisse . . . . .	72
5.2.1 Flexibles und starres Flugzeug . . . . .	72

5.2.2	Der lineare Einfluss der Flexibilität . . . . .	73
5.2.3	Anstellwinkelschwingung . . . . .	75
5.2.4	Phygoide . . . . .	76
5.2.5	Taumelschwingung . . . . .	79
5.2.6	Rollbewegung . . . . .	80
5.2.7	Spiralbewegung . . . . .	80
5.2.8	Elastische Eigenbewegungsformen . . . . .	86
5.2.9	Analyse des Einflusses einfacher Reglerstrukturen . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>94</b>
<b>A</b>	<b>Kraft- und Momentenbeiwerte</b>	<b>102</b>
A.1	Starrkörperfreiheitsgrade . . . . .	102
A.1.1	Kräfte . . . . .	102
A.1.2	Momente . . . . .	103
A.2	Elastische Freiheitsgrade . . . . .	105
<b>B</b>	<b>Daten des flexiblen Flugzeuges</b>	<b>107</b>
B.1	Kraftbeiwerte . . . . .	107
B.2	Momentenbeiwerte . . . . .	108
B.3	Elastische Beiwerte . . . . .	108

# Nomenklatur

## Symbole

$A$	Auftriebskraft
$a$	Auslenkungsamplitude aus der Gleichgewichtslage
$a$	Abstand zweier Nachbarlösungen
$b$	Flügelspannweite
$C$	Beiwert
$C_k$	Federkonstante der $k$ -ten Feder
$c$	Örtlicher Beiwert
$D$	Dämpfungsgrad
$D_k$	Dämpferkonstante der $k$ -ten Feder
$e$	Verformungsvektor des Massenelementes
$F$	Kraftvektor
$g$	Vektor der Gravitationsbeschleunigung
$H$	Funktion der Nichtlinearitäten
$\underline{I}$	Trägheitstensor des Flugzeuges
$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$	Trägheitsmomente um die körperfesten x-, y- und z-Achsen
$\hat{i}$	Einheitsvektor in $x_m$ -Richtung
$i_s$	Einstellwinkel des Flügelstreifens
$\hat{j}$	Einheitsvektor in $y_m$ -Richtung
$K$	Verstärkungsvektor der Zustandsvektorrückführung
$K$	Konstante des agilen Flugzeuges
$\hat{k}$	Einheitsvektor in $z_m$ -Richtung
$l$	Örtliche Flügeltiefe
$\underline{M}_{\Phi m}$	Rotationsmatrix der Drehraten im mittleren Koordinatensystem zu Drehraten der Eulerwinkel
$\underline{M}_{mg}$	Rotationsmatrix vom inertialen zum mittleren Koordinatensystem
$M$	Momentenvektor
$M$	Vektor von Kontrollparametern
$M$	Gesamtmasse des Flugzeuges

$M$	Nickmoment
$M_i$	Generalisierte Masse der $i$ -ten Strukturschwingungsmode
$m_k$	$k$ -te Masse
$N$	Anzahl der Massen
$\mathbf{p}$	Position des Massenelementes
$p$	Drehrate um die x-Richtung
$p$	Proportionalitätsfaktor der Nichtlinearitäten
$p_s$	Parametrisierungsfunktion
$Q$	Generalisierte Kraft
$Q_l$	Kreisfunktion
$q$	Drehrate um die y-Richtung
$\bar{q}$	Staudruck
$q_i$	Generalisierte Koordinate
$R$	Positionsvektor
$r$	Drehrate um die z-Richtung
$S$	Flügelfläche
$\mathbf{s}$	Vektor zur unverformten Position des Massenelementes
$s$	Bogenlänge
$T$	Zeitintervall
$T$	Kinetische Energie
$T_s$	Zeitkonstante des Stellantriebes
$t$	Zeit
$U_e$	Verzerrungsenergie
$U_g$	Potentielle Energie im Gravitationsfeld der Erde
$\mathbf{u}$	Vektor der Systemparameter
$u$	Geschwindigkeit in x-Richtung
$\mathbf{V}$	Geschwindigkeitsvektor
$V$	Fluggeschwindigkeit
$V$	Ljapunov-Funktion
$dV$	Volumenelement
$v$	Geschwindigkeit in y-Richtung
$\delta W$	Virtuelle Arbeit

$w$	Geschwindigkeit in z-Richtung
$\mathbf{x}$	Vektor der Zustandsgrößen
$x$	Koordinate in Längsrichtung
$x_e$	Abstand der elastischen Achse zum Schwerpunkt
$x_s$	Abstand zwischen elastischer Achse und Angriffslinie der Auftriebskräfte
$y$	Koordinate in Spannweitenrichtung
$z$	Koordinate in Normalrichtung

### Griechische Symbole

$\alpha$	Anstellwinkel
$\beta$	Schiebewinkel
$\Delta$	Differenz
$\delta$	Dämpfung (Realteil des Eigenwertes)
$\delta$	Anfangsabstand zweier Nachbarlösungen
$\delta_H$	Höhenruderausschlag
$\dot{\delta}_{H \max}$	Maximale Stellgeschwindigkeit des Höhenruders
$\delta_{H_s}$	Stellsignal des Reglers für das Höhenruder
$\delta_{H_t}$	Getrimmter Höhenruderausschlag
$\epsilon$	Endabstand zweier Nachbarlösungen
$\epsilon$	Abwindwinkel
$\varepsilon$	Fehlervektor
$\zeta_i$	Dämpfungsgrad der $i$ -ten Strukturmode
$\eta$	Vektor der Imaginärteile des normierten Eigenvektors
$\Theta$	Nickwinkel
$\kappa$	Eigenvektor
$\mu$	Eigenwert
$\nu$	Verschiebevektor
$\rho$	Vektor der Realteile des normierten Eigenvektors
$\rho$	Dichte
$\Phi$	Rollwinkel
$\phi_i$	Strukturschwingungsmode

$\phi$	Phase
$\phi_i^b$	Örtliche Biegeverschiebung aufgrund der $i$ -ten elastischen Schwingungsform
$\phi_i^t$	Örtliche torsionale Verdrehung aufgrund der $i$ -ten elastischen Schwingungsform
$\Psi$	Gierwinkel
$\Omega$	Vektor der Drehraten
$\omega$	Eigenschwingungsfrequenz (Imaginärteil des Eigenwertes)
$\omega_0$	Ungedämpfte Eigenschwingungsfrequenz
$\omega_{0i}$	Freie, ungedämpfte Eigenschwingungsfrequenz der $i$ -ten Strukturmode

### Indizes

0	Bezugspunkt
$A$	Auftrieb
$A$	Anstellwinkelschwingung
$E$	Elastische Bewegung
$f$	Flugzeugfestes Koordinatensystem
$g$	Inertiales Koordinatensystem
$k$	Iterationsschritt
$L$	Leitwerk
$m$	Mittleres Koordinatensystem
$P$	Phygoide
$R$	Rollbewegung
$S$	Spiralbewegung
$T$	Taumelschwingung
$s$	Flügelabschnitt
$W$	Widerstand

### Abkürzungen

ASTAN	Methode zur approximativen Stabilitätsanalyse nichtlinearer Systeme
-------	---

BTS	Beecham-Titchener-Simpson-Verfahren
DFG	Deutsche Forschungsgemeinschaft
RKF	Runge-Kutta-Fehlberg-Integration
SFB	Sonderforschungsbereich

# 1 Einleitung

## 1.1 Problemstellung und Stand der Technik

Flugmechanische Untersuchungen zum dynamischen Verhalten von Luftfahrzeugen spielen bereits in der Frühphase der Flugzeugentwicklung eine wichtige Rolle. Ein wesentliches Ziel dieser Untersuchungen ist dabei, durch geeignete Maßnahmen im Entwurf der Forderung Rechnung zu tragen, dass die Bewegung des Luftfahrzeuges nach einer Auslenkung aus einem stationären Bezugsflugzustand gedämpft, d.h. dynamisch stabil ablaufen soll. Dies kann z.B. durch entsprechende Leitwerksauslegung oder den Einsatz von Flugreglern geschehen. Theoretische Vorhersagemethoden sind in diesem Zusammenhang besonders gefordert, da sich experimentelle Untersuchungen zur Flugmechanik (z.B. mit Freiflugmodellen [2] oder gelenkig aufgehängten Windkanalmodellen [35]) wegen der Vielzahl der einzuhaltenden Ähnlichkeitsparameter oft als sehr aufwändig erweisen. Dies gilt um so mehr, wenn Einflüsse von Flugreglern oder elastischen Strukturen mit berücksichtigt werden sollen. Da natürlich dennoch schon vor dem Erstflug eine sichere Vorhersage des Stabilitätsverhaltens vorliegen muss, fällt den theoretischen Verfahren in diesem Umfeld eine wichtige Rolle zu.

Zur Stabilitätsanalyse dynamischer Systeme existieren eine Vielzahl von Methoden. So kann z.B. die Entwicklung der Zustandsgrößen über der Zeit bei Versuchen oder Simulationen beobachtet werden, um Information über das Stabilitätsverhalten zu gewinnen. Alternativ dazu können die Bewegungsgleichungen des Systems analysiert werden. Klassische Methoden zur Stabilitätsanalyse basieren in der Regel auf der Betrachtung der Bewegungsabläufe um Gleichgewichtslagen, an denen die Bewegungsdifferentialgleichungen linearisiert werden. Dabei wird vorausgesetzt, dass Nichtlinearitäten für einen engen Bereich um die betrachtete Gleichgewichtslage vernachlässigt und durch lineare Zusammenhänge ersetzt werden können. Für solche linearisierten Systeme sind die Lösungen der Bewegungsgleichungen bekannt und die Stabilitätseigenschaften können sofort bestimmt werden. Zusätzlich erlaubt die Linearisierung eine Aufteilung der Gesamtbewegung in eine Überlagerung von unabhängigen Eigenbewegungsformen und somit eine übersichtliche Darstellung der Analyseergebnisse. Die Differentialgleichungen der Flugzeugbewegung

weisen jedoch im allgemeinen einen hohen Grad an Nichtlinearität auf, wobei die am Flugzeug angreifenden Luftkräfte und Momente einen wesentlichen Beitrag hierzu liefern. Sie besitzen insbesondere bei hohen Anstellwinkeln einen stark nichtlinearen Charakter. Hinzu kommen Nichtlinearitäten aufgrund der Transformationsmatrizen und Eulerterme in den Starrkörperbewegungsgleichungen, nichtlineares Reglerverhalten sowie eventuell nichtlineares Verhalten der elastischen Flugzeugstruktur. Linearisierende Analysemethoden stoßen daher bei solchen Systemen naturgemäß schnell an ihre Grenzen. Die Voraussetzung, dass die Nichtlinearitäten vernachlässigt werden können, gilt hier nur für einen sehr engen Bereich um die betrachtete Gleichgewichtslage. Bei größeren Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage können nichtlineare Effekte wie Grenzzyklen oder Bifurkationen mit zusätzlichen Gleichgewichtspunkten auftreten, die auf diese Weise nicht erfaßt werden und somit im Rahmen einer flugdynamischen Stabilitätsanalyse leicht übersehen werden. Zur Analyse von Flugzeugbewegungen wurden daher in der Vergangenheit auch Methoden aus der Klasse der Mittelwertverfahren verwendet [10, 37, 48]. Dabei werden die exakten Lösungen durch geeignete Näherungsansätze approximiert, welche in die nichtlinearen Differentialgleichungen des Systems eingesetzt werden. Dies hat zur Folge, dass die Lösung des nichtlinearen Differentialgleichungssystems auf die Lösung eines algebraischen Gleichungssystems reduziert werden kann.

Grundlage der theoretischen Untersuchungen ist ein mathematisches Modell des betrachteten Systems, z.B. in Form der Bewegungsdifferentialgleichungen. Luftfahrzeuge, die eine hohe strukturelle Steifigkeit aufweisen, zeigen eine deutliche Trennung zwischen den niederfrequenten Eigenschwingungsformen der flugmechanischen Starrkörperbewegung und der höherfrequenten elastischen Strukturbewegung. Daher werden üblicherweise bei Modellierung und Analyse der Flugzeugbewegung diese Bewegungsformen getrennt voneinander betrachtet. Untersuchungen zur flugmechanischen Stabilität und Steuerbarkeit etwa werden häufig mit Starrkörpermodellen durchgeführt, bei denen die Struktur-*elastizität* vernachlässigt wird. Die aktuelle Tendenz zur Entwicklung neuer Großraumflugzeuge mit Kapazitäten von über 600 Passagieren und den damit verbundenen großen Spannweiten führt jedoch zu Konfigurationen, bei denen sich diese Frequenzen so sehr annähern, dass eine getrennte Betrachtung von flugmechanischen und strukturmechanischen Eigenschaften zu erheblichen Fehlern führen kann. Bei den geplanten Spannweiten und Rumpflängen muß von Strukturschwingungsmoden ausgegangen werden, deren niedrigsten Frequenzen wenige Hz betragen [41] und somit durchaus an die Eigenfrequenzen der flugmechanischen Schwingungen heranreichen. In [44] sind allein zehn spezifische Beispiele zitiert, bei denen Probleme in der Flugerprobung auftraten, die auf eine un-

zureichende Modellierung der aeroelastischen Effekte in Flugdynamik und Reglerentwurf zurückzuführen waren. Das aeroelastische Verhalten muss also bei solchen Flugzeugen mit in die flugmechanischen Stabilitätsbetrachtungen einbezogen werden, d.h. die mathematische Modellierung des Systems muss die gekoppelten Bewegungsdifferentialgleichungen der Starrkörper- und der Strukturmechanik umfassen.

## 1.2 Ziel und Aufbau der Arbeit

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine Methode zur Stabilitätsanalyse nichtlinearer Systeme bereitzustellen und ihre Anwendung auf nichtlineare Flugzeugmodelle zu demonstrieren. Die dynamische Analyse soll das Stabilitätsverhalten insbesondere unter Berücksichtigung der nichtlinearen Effekte umfassen, wobei die in Zulassungsvorschriften verwendeten Bewertungskriterien für Flugeigenschaften (Dämpfung und Frequenz der Eigenbewegungsform sowie die zugehörigen Amplituden- und Phasenverhältnisse der Zustandsgrößen) beibehalten werden. Dabei soll bei der Modellierung der untersuchten Flugzeuge auch der Einfluss der Flexibilität auf das Flugverhalten in adäquater Weise berücksichtigt werden.

Kapitel 2 gibt zunächst einen Überblick über Verfahren der Stabilitätsanalyse und erläutert dann die in dieser Arbeit angewandte und weiterentwickelte Methode zur approximativen Stabilitätsanalyse nichtlinearer Systeme (ASTAN-Verfahren), [37, 22, 46, 47]. Dieses den Mittelwertmethoden zuzuordnende Verfahren knüpft in einer verallgemeinerten Form an die lineare Eigenwertanalyse an. Es wird davon ausgegangen, dass die Bewegungsgleichungen eines nichtlinearen Systems auch bei großen Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage durch Lösungsansätze in Eigenformgestalt erfüllt werden können, wenn die Kenngrößen (Eigenwerte und Eigenvektoren) als Funktionen der Auslenkung beschrieben werden. Die Ermittlung dieser Funktionen erfolgt dabei in Erweiterung der BTS-Methode [48, 10] über einen approximativen Ansatz, der auch die Ableitungen der Kenngrößen nach der Auslenkung berücksichtigt. Als Ergebnis der Approximation liegen das Dämpfungs- und Frequenzverhalten der betrachteten Bewegungsform sowie die Amplituden- und Phasenbeziehungen aller Systemzustandsgrößen innerhalb der Bewegungsform in Abhängigkeit der momentanen Auslenkung aus der Gleichgewichtslage vor. Diese Vorgehensweise erlaubt es, bei Beibehaltung der Eigenformdarstellung den Einfluss von Nichtlinearitäten auf die Systemdynamik zu berücksichtigen und somit auch nichtlineare Effekte wie zusätzliche Gleichgewichtslagen oder Grenzzyklen zu erfassen. Die Anwendung der Methode und potentielle Schwierigkeiten werden am Ende von Kapitel 2 anhand eines nichtlinearen Feder-Masse-Dämpfersystems demonstriert.

Bevor in den Kapiteln 4 und 5 auf die Modellierung und Analyse zweier Flugzeugkonfigurationen eingegangen wird, fasst Kapitel 3 in einer kurzen Übersicht die Ursachen der dabei zu erwartenden Nichtlinearitäten zusammen.

Bei der ersten untersuchten Konfiguration handelt es sich um ein auf die Starrkörperlängsbewegung beschränktes Modell eines agilen Flugzeuges. Aufgrund des großen operationellen Anstellwinkelbereiches treten bei dieser Konfiguration stark nicht-lineare Luftkräfte auf. Kapitel 4 beschreibt zunächst die vereinfachte Modellierung dieser Konfiguration und stellt daran anschließend einige Ergebnisse der nichtlinearen Analyse vor.

Kapitel 5 beschreibt als zweite Flugzeugkonfiguration die Modellierung und Analyse eines elastischen Großflugzeuges. Nach einer Übersicht über die für diese Problemstellung in Frage kommenden Modellierungsmethoden wird das verwendete Verfahren im Detail erläutert. Dabei wird bezüglich der Systemdynamik davon ausgegangen, dass für die Starrkörperfreiheitsgrade große Auslenkungen mit entsprechenden nichtlinearen Differentialgleichungen möglich sind. Die strukturelle Deformation hingegen wird als ausreichend klein angenommen, um von einem linearen Steifigkeitsverhalten ausgehen zu können. Die Bewegung der elastischen Freiheitsgrade und der Starrkörperfreiheitsgrade wird schließlich über ein gekoppeltes nichtlineares Bewegungsdifferentialgleichungssystem beschrieben. Im Anschluss an die Darstellung des Modells folgt die nichtlineare Analyse der auftretenden Bewegungsformen an ausgewählten Gleichgewichtszuständen. Abgeschlossen wird Kapitel 5 mit der Analyse des Einflusses einfacher Reglerstrukturen auf das nichtlineare Verhalten des Flugzeuges.

## 2 Stabilitätsanalyse

Beim Entwurf technischer Systeme wird im allgemeinen ein "stabiles" Verhalten angestrebt. In der Praxis bedeutet dies, dass jede beschränkte Änderung einer Eingangsgröße des Systems auch nur eine beschränkte Änderung der Zustandsgrößen hervorrufen darf [6]. Asymptotische Stabilität liegt vor, wenn das System nach der Rücknahme der Änderung des Eingangssignals zu seinem vorherigen stationären Zustand zurückkehrt. So wird beispielsweise von einem stationär fliegenden Flugzeug verlangt, dass es zwar beim Durchfliegen einer Böe zu Änderungen in Fluggeschwindigkeit, Nicklage usw. kommen darf, dass jedoch nach Abklingen der Böe das Flugzeug wieder in seinen ursprünglichen stationären Bezugsflugzustand zurückkehren muss. Bei linearen Systemen reduziert sich diese Forderung darauf, dass die Eigenwerte der Jacobimatrix des Systems im Bezugsflugzustand ausschließlich negative Realteile besitzen. Für nichtlineare Systeme können solche globalen Stabilitätsaussagen allerdings nicht so einfach aufgestellt werden. So kann z.B. ein nichtlineares System bezüglich eines stationären Gleichgewichtspunktes bei kleinen Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage ein stabiles Verhalten aufweisen, bei größeren Auslenkungen bzw. Störungen jedoch in ein instabiles Verhalten umschlagen. Ebenso ist es möglich, dass z.B. eine instabile Schwingung eine kritische Amplitude nicht überschreitet und so zu einem Grenzzyklus mit konstanter Amplitude wird.

In der Literatur finden sich eine Vielzahl von Arbeiten, die sich mit der Analyse nichtlinearer Probleme beschäftigen. In diesem Kapitel wird daher zunächst eine kurze Übersicht über Methoden zur Stabilitätsanalyse nichtlinearer Systeme gegeben und daran anschließend das verwendete Verfahren erläutert. Am einfachen Beispiel eines Feder-Massenschwingers mit nichtlinearen Federkennlinien werden schließlich die Anwendung sowie potentielle Schwierigkeiten demonstriert.

### 2.1 Methoden zur Stabilitätsanalyse nichtlinearer Systeme

Soll ein nichtlineares technisches System im Hinblick auf sein Stabilitätsverhalten untersucht werden, so bietet sich als erstes die Beobachtung der zeitlichen Entwicklung seiner Zustandsgrößen an. Die so gewonnenen Zustandsgrößenverläufe lassen sich dann in Hinblick auf Dämpfung, Frequenz, Gleichgewichtslagen, Grenzzyklen usw. z.B mit Hilfe

von Poincaré-Schnitten, numerischer Bestimmung der Ljapunovexponenten oder Fourieranalysen untersuchen [33, 13, 54]. Diese Vorgehensweise ermöglicht sowohl die Untersuchung von realen Systemen, deren zugrundeliegenden Differentialgleichungen unbekannt sein können, als auch von mathematischen Modellen, deren Zeitverläufe der Zustandsgrößen durch Integration gewonnen werden können. Um jedoch ein vollständiges Bild des Stabilitätsverhaltens zu erhalten, wäre es prinzipiell notwendig die zeitliche Entwicklung unendlich vieler Anfangszustände zu beobachten und zu analysieren. Selbst wenn nur eine begrenzte Anzahl von Anfangszuständen betrachtet werden muss, können Untersuchungen von Zeitreihen, besonders in Anbetracht der bei schwacher Dämpfung oder geringer Instabilität notwendigen großen Beobachtungs- bzw. Integrationszeitspanne, schnell sehr aufwändig werden.

Für Systeme, deren Differentialgleichungen bekannt sind, können sich daher andere Verfahren besser eignen. Für viele technische Problemstellungen ist vor allem das Stabilitätsverhalten an Gleichgewichtspunkten des Systems von Interesse. Wenn die Stabilitätsaussage auf eine enge Nachbarschaft des Gleichgewichtspunktes beschränkt bleiben kann, bietet sich eine Linearisierung der Differentialgleichungen des Systems an dem gewählten Gleichgewichtspunkt an. Anhand der Eigenwerte der Jacobimatrix an diesem Punkt können dann Aussagen über die lokale Stabilität gemacht werden [18]. Aufbauend auf der linearisierenden Analyse haben sich besonders bei Systemen, die selbst bei geringer Variation ihrer Kontrollparameter (z.B. Steuerflächenausschläge beim Flugzeug) eine abrupte Veränderung des Stabilitätscharakters aufweisen können, Methoden der Bifurkationsanalyse bewährt [45, 27, 1, 8, 26]. Dabei wird im Zustands-Kontroll-Raum die Veränderung des Gleichgewichtspunktes und seiner linearisierten Stabilitätscharakteristik bei Variation eines oder mehrerer Kontrollparameter beobachtet. Die Variation der Kontrollparameter geschieht im stationären Sinne, so dass sie bezüglich der Systemdynamik als konstant angesehen werden können. Bifurkationsmethoden erlauben so nichtlineare Phänomene, wie z.B. die Verzweigung bzw. Verschmelzung von Gleichgewichtslagen oder die Entstehung von Grenzyklen und die damit verbundenen Stabilitätsveränderungen zu analysieren.

Die Ljapunovsche Methode ermöglicht es, die Stabilität einer Gleichgewichtslage auch für nichtlineare Systeme analytisch zu bestimmen [39, 33]. Dabei wird eine Lösung als stabil im Sinne Ljapunovs bezeichnet, wenn für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle Nachbarlösungen, deren Abstand  $a$  zur Zeit  $t_0$  kleiner als  $\delta$  war gilt, dass  $a(t)$  für alle Zeiten  $t$  kleiner als  $\epsilon$  bleibt. Für ein autonomes System  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}; \mathbf{M})$  sei  $\mathbf{x}_0$  ein Gleichgewichtspunkt für die Kontrollparameter  $\mathbf{M}_0$ . Wenn nun eine skalare "Ljapunov-Funktion"  $V(\mathbf{x}; \mathbf{M})$  gefunden werden kann, die in der Nachbarschaft von  $\mathbf{x}_0$  so definiert ist, dass  $V(\mathbf{x}_0; \mathbf{M}_0) = 0$  und  $V(\mathbf{x}; \mathbf{M}) > 0$  für  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ , so gilt für die Ableitung von

$V$  entlang der Lösungskurve von  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}; \mathbf{M})$ , dass  $\mathbf{x}_0$  stabil ist im Sinne Ljapunovs wenn  $\dot{V} \leq 0$ . In der Praxis stellt sich das Auffinden einer geeigneten Ljapunov-Funktion allerdings häufig als schwierig heraus, insbesondere bei nichtlinearen Systemen mit vielen Freiheitsgraden. Darüber hinaus liefert die Ljapunovsche Methode nur eine Aussage, ob die Bewegungen des Systems stabil oder instabil verlaufen, jedoch nicht über Dämpfungs- und Frequenzverhalten einzelner Bewegungsformen.

Für viele technische Probleme ist allerdings gerade das Dämpfungs- und Frequenzverhalten von besonderem Interesse und zwar nicht nur in enger Umgebung der Gleichgewichtslagen, sondern auch für Anfangsbedingungen, die relativ weit vom Bezugspunkt entfernt liegen. In der Literatur finden sich daher zahlreiche klassische Arbeiten, die diese Problemstellung mit Hilfe analytischer Näherungsverfahren behandeln. Zu den bekanntesten Vertretern der analytischen Verfahren zählen die Störungsrechnung, die Variationsprinzipien und die Mittelwertverfahren [16, 21, 25]. Die gemeinsame Vorgehensweise dieser Verfahren ist dabei, das nichtlineare Systemverhalten mit Hilfe von Näherungsansätzen durch eine Anzahl repräsentativer Bewegungsformen zu approximieren. Die Lösung des Problems kann dann durch Einsetzen der Näherungsgleichungen in die Differentialgleichungen des Systems im Falle der Störungsrechnung auf die Lösung eines einfacheren nichtlinearen Differentialgleichungssystems und im Fall der Variationsprinzipien und Mittelwertverfahren eines nichtlinearen algebraischen Gleichungssystems reduziert werden. Viele dieser Verfahren wurden allerdings in Hinblick auf bestimmte nichtlineare Problemstellungen, z.B. der Himmelsmechanik bei der keine Reibungseffekte auftreten, entwickelt und sind somit eng mit der spezifischen Form der entsprechenden nichtlinearen Differentialgleichungssysteme verknüpft. Daher sind sie z.T. nur schwer auf andere Aufgaben übertragbar. Eine Ausnahme bilden hier die Mittelwertmethoden, die sowohl bei reibungsbehafteten Systemen als auch bei Systemen mit vielen Freiheitsgraden angewandt werden können. Erstmals von Van der Pol zur Analyse eines oszillierenden nichtlinearen Systems mit einem Freiheitsgrad angewandt [20], wurde die Methode zunächst von Krylow und Bogoljubow [4, 25] und später von Beecham, Titchener und Simpson [3, 10, 48] verallgemeinert und auf mehrere Freiheitsgrade erweitert. In der Arbeit von Reitenbacher [37] wurden schließlich einige Vereinfachungen der Methode nach Beecham, Titchener und Simpson aufgehoben, so dass zum Lösen der algebraischen Bestimmungsgleichungen von einem iterativen Ansatz mit den dort z.T. auftretenden Konvergenzproblemen zu einer direkten Bestimmung übergegangen werden konnte. Das Verfahren nach Reitenbacher wurde in dieser Arbeit erweitert und angepasst und wird im Folgenden als Verfahren zur "Approximativen Stabilitätsanalyse Nichtlinearer Systeme" (ASTAN-Verfahren) bezeichnet.

## 2.2 Angewandte Approximationsmethode

Das ASTAN-Verfahren wurde im Verlauf der vorliegenden Arbeit zur Stabilitätsanalyse verwendet und soll daher ausführlicher beschrieben werden. Dieses den Mittelwertmethoden zuzuordnende Verfahren knüpft in einer verallgemeinernden Form an die lineare Eigenwertanalyse an. Es wird davon ausgegangen, dass die Bewegungsgleichungen des nichtlinearen Systems auch bei großen Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage durch Lösungsansätze in Eigenformgestalt dargestellt werden können, wenn die Kenngrößen der Bewegung (Eigenwerte und Eigenvektoren) als Funktionen der Auslenkung beschrieben werden. Diese Vorgehensweise erlaubt es, die aus der linearen Stabilitätsanalyse vertrauten und etwa in Zulassungsvorschriften (z.B. MIL-STD-1797 [30] für Stabilitätsverhalten von Flugzeugbewegungen) verwendeten Begriffe wie Dämpfung, Frequenz, Eigenbewegung und Eigenform in einem erweiterten Sinne weiter zu verwenden und trotzdem den Einfluss der Nichtlinearitäten auf die Systemdynamik zu erfassen. Die Begriffe "Dämpfung" und "Frequenz" bezeichnen dabei im Folgenden stets den Realteil  $\delta$  bzw. den Imaginärteil  $\omega$  des betrachteten Eigenwertes.

### 2.2.1 Einführung

Mittelwertmethoden zur Lösung nichtlinearer oszillatorischer Probleme zeichnen sich dadurch aus, dass eine hochaufgelöste, detaillierte Beschreibung der Bewegung innerhalb eines bestimmten Schwingungszyklusses durch Glättung mittels Integration über dem Zyklus vereinfacht wird. So bleiben nur die für den nichtlinearen Charakter repräsentativen Parameter, nämlich die Änderung von Amplitude  $a(t)$  und Frequenz  $\omega(t)$  über der Zeit als beschreibende Größen der Bewegung erhalten. Der Aufwand zur Untersuchung eines Systems reduziert sich (z.B. im Vergleich zur direkten Zeitintegration der Bewegungsgleichung) erheblich, allerdings beinhaltet der Prozess der Mittelung natürlich auch einen Verlust an Genauigkeit. Für viele ingenieurtechnische Anwendungsbereiche ist dieser Genauigkeitsverlust jedoch unerheblich, während eine Beschreibung der Bewegung über die Dämpfung  $\delta(t) = \dot{a}(t)/a(t)$  und Frequenz  $\omega(t)$  insbesondere bei Stabilitätsbetrachtungen anschaulicher sein kann als der detaillierte Verlauf von  $x(t)$ . Mittelwertverfahren können daher hier von großem Nutzen sein.

Für Systeme in der Form

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + p H(x, \dot{x}) = 0$$

mit nur einem Freiheitsgrad ( $H$  enthält die Nichtlinearitäten des Systems mit einem Proportionalitätsfaktor  $p \ll 1$ ) führten Krylow und Bogoljubow [25, 20, 4, 32] die asymptotischen Mittelwertmethoden ein, die sich dadurch auszeichnen, dass die Lösung des nichtlinearen Systems in einem ersten Approximationsschritt in Analogie zum linearen System in der Form

$$x(t) = a(t) \cos\phi(t)$$

angenommen wird, wobei die Amplitude  $a(t)$  und die Phase  $\phi(t)$  jeweils Funktionen der Zeit sind. Die Ermittlung der Verläufe  $a(t)$  und  $\phi(t)$  erfolgt dabei, wie später gezeigt wird, mit Hilfe der Mittelung über einer Schwingungsperiode unter einigen vereinfachenden Annahmen. Approximationen höherer Ordnung wurden in Form einer Potenzreihe

$$x(t) = a(t) \cos\phi(t) + \sum_{l=1}^m p^l Q_l[a(t), \phi(t)]$$

entwickelt. Dabei sind die Funktionen  $Q_l[a(t), \phi(t)]$  orthogonale, periodische Kreisfunktionen der Phase  $\phi(t)$  und der momentanen Auslenkung  $a(t)$ . Das Mittelungsprinzip wird in diesem Zusammenhang dazu benutzt, die jeweils höherfrequenten Oszillationen herauszufiltern. Krylow und Bogoljubow konnten unter Ausnutzung von Fouriers Theorem zeigen, dass solch ein Lösungsansatz für jedes gegebene Zeitintervall asymptotisch gegen die exakte Lösung strebt.

### 2.2.2 Methode von Beecham und Titchener

Beecham und Titchener [3, 49] erweiterten in den siebziger Jahren das Verfahren, indem sie auf einige Vereinfachungen der klassischen asymptotischen Methode verzichteten. Bei ihren Untersuchungen gingen sie von einem eindimensionalen System der Form

$$\ddot{x} + F(x, \dot{x}) = 0 \tag{2.1}$$

aus, in dem  $F$  nichtlinear ist. Auch hier wird die Lösung in Analogie zu einem linearen System durch

$$x = a(t) \cos\phi(t)$$

ausgedrückt, wobei die Amplitude  $a(t)$  und die Phase  $\phi(t)$  wiederum jeweils Funktionen der Zeit sind. Dann sind

$$\dot{x} = \dot{a} \cos\phi - a \dot{\phi} \sin\phi$$

und

$$\ddot{x} = \ddot{a} \cos\phi - 2 \dot{a} \dot{\phi} \sin\phi - a \ddot{\phi} \sin\phi - (\dot{\phi})^2 a \cos\phi.$$

Einsetzen in Gleichung (2.1) und Verwendung von  $\omega(t)$  für  $\dot{\phi}(t)$  ergibt

$$-\ddot{x} = [\omega^2 a - \ddot{a}] \cos\phi + [2\omega \dot{a} + \dot{\omega} a] \sin\phi = F [a \cos\phi, \dot{a} \cos\phi - \omega a \sin\phi]. \quad (2.2)$$

Unter der Annahme, dass die Amplituden- und Frequenzänderung während eines beliebigen Schwingungszykluses "klein genug" sind, kann über einen Zyklus integriert werden, wobei die eingeklammerten Terme in Gleichung (2.2) nun nicht mehr als momentane Größen, sondern als Werte interpretiert werden, die bei einer bestimmten Amplitude  $a$  gültig sind. Multiplikation von Gleichung (2.2) mit  $\sin\phi$  bzw.  $\cos\phi$  und Integration ergibt unter Ausnutzung der Orthogonalitätseigenschaften der Kreisfunktion

$$2\omega \dot{a} + \dot{\omega} a = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F \sin\phi \, d\phi \quad (2.3)$$

und

$$\omega^2 a - \ddot{a} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F \cos\phi \, d\phi. \quad (2.4)$$

In dem originalen Krylow-Bogoljubowschen Verfahren werden an dieser Stelle die Terme  $\dot{\omega} a$  in Gleichung (2.3) und  $\ddot{a}$  in Gleichung (2.4) vernachlässigt, so dass direkt auf die gesuchten Parameter  $\delta$  und  $\omega$  in Abhängigkeit der Amplitude  $a$  geschlossen werden kann:

$$\delta = \frac{\dot{a}}{a} \simeq \frac{1}{2\pi\omega a} \int_0^{2\pi} F \sin\phi \, d\phi \quad (2.5)$$

und

$$\omega^2 \simeq \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F \cos\phi \, d\phi. \quad (2.6)$$

Die Unzulässigkeit dieser Vereinfachung zeigt sich allerdings schon am Beispiel eines einfachen linearen, gedämpften Systems der Form

$$\ddot{x} + A\dot{x} + Bx = 0. \quad (2.7)$$

Die bekannte exakte Lösung dieses Problems lautet

$$\delta = -\frac{A}{2} \quad \text{und} \quad \omega^2 = B - \frac{A^2}{4}. \quad (2.8)$$

Die Gleichungen (2.5) und (2.6) liefern jedoch mit

$$F = [A(\dot{a} \cos\phi - \omega a \sin\phi) + B a \cos\phi]$$

$$\delta \simeq -\frac{A}{2} \quad \text{und} \quad \omega^2 \simeq B - \frac{A^2}{2}.$$

Der Einfluss des geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungsparameters  $A$  auf die Frequenz wird um den Faktor 2 überbewertet. Die Vernachlässigungen erweisen sich also schon für diesen einfachen Fall als erhebliche Fehlerquelle.

Beecham und Titchener zeigten, dass auch ohne die Krylow-Bogoljubowschen Vernachlässigungen eine iterative Lösung für die Dämpfungs- und Frequenzparameter gefunden werden kann. Mit den Abkürzungen

$$f_1(a, \delta, \omega) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F \sin\phi \, d\phi \quad \text{und} \quad f_2(a, \delta, \omega) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F \cos\phi \, d\phi$$

und unter Beachtung von

$$\frac{d(\cdot)}{dt} = \delta a \frac{d(\cdot)}{da} = \delta a(\cdot)' \quad (2.9)$$

lässt sich Gleichung (2.3) umformen zu

$$\delta = \frac{f_1}{2\omega \left[ 1 + \frac{a(\omega^2)'}{4\omega^2} \right]} \quad (2.10)$$

und Gleichung (2.4) zu

$$\omega^2 = \delta^2 + a\delta\delta' + f_2. \quad (2.11)$$

Die Gleichungen (2.10) und (2.11) sind allerdings nur zwei Bestimmungsgleichungen für die insgesamt vier Kenngrößen  $\delta(a)$ ,  $\omega(a)$ ,  $(\omega(a)^2)'$  und  $\delta(a)'$ . Um dennoch zu einer Lösung zu gelangen, werden in einer ersten Näherung die Ableitungen nach der Amplitude  $(\omega^2)'$  und  $\delta'$  vernachlässigt, was zu

$$\delta \simeq \frac{f_1}{2\omega} \quad (2.12)$$

und

$$\omega^2 \simeq \delta^2 + f_2 \quad (2.13)$$

führt. Gleichung (2.12) ist identisch mit Gleichung (2.5) der Krylow-Bugoljubowschen Methode, während in Gleichung (2.13) im Vergleich zu (2.6) der zusätzliche Term  $\delta^2$  auftaucht. Somit liefert Gleichung (2.13) nun das exakte Ergebnis für die Frequenz im Fall der vorher betrachteten linearen, gedämpften Schwingung (Gl. (2.8)). Für komplexere Systeme kann die erste Näherung verbessert werden, indem durch differenzieren der Gleichungen (2.12) und (2.13) die Terme  $(\omega^2)'$  und  $\delta'$  bestimmt werden und diese dann in die

Gleichungen (2.10) und (2.11) eingesetzt werden. Häufig ist es nötig, das Ergebnis durch weitere Iterationen zu verbessern.

Auf diese Weise werden also Ausdrücke gefunden, durch die die Dämpfung  $\delta$  und die Frequenz  $\omega$  nur noch als Funktionen der lokalen Amplitude  $a$  und der Parameter in  $F$  aus der Differentialgleichung dargestellt werden. Da sie unabhängig von den Anfangsbedingungen des Problems sind, können sie ohne prinzipielle Schwierigkeit auch bis zu großen Werten von  $a$  entwickelt werden. Diese Methode wurde in [40] und [49], neben der Analyse klassischer nichtlinearer Probleme wie den Duffing- und Van-der-Pol-Gleichungen auch schon bei nichtlinearen flugmechanischen Problemen verwendet.

### 2.2.3 BTS-Verfahren

In dem als Beechham-Titchener-Simpson-Methode (BTS-Methode) [48, 10] bekannt gewordenen Verfahren hat Simpson das Verfahren von Beecham und Titchener schließlich auf Systeme mit  $n$  Freiheitsgraden erweitert. Die Differentialgleichungen des zu untersuchenden Systems lauten jetzt

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

mit dem Lösungsansatz

$$\mathbf{x} = a(t) [\boldsymbol{\rho}(t) \sin \phi(t) + \boldsymbol{\eta}(t) \cos \phi(t)]. \quad (2.15)$$

Darin sind

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \{1, \rho_2(t), \rho_3(t), \dots, \rho_n(t)\}$$

und

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \{0, \eta_2(t), \eta_3(t), \dots, \eta_n(t)\}.$$

Die Formulierung des Lösungsansatzes knüpft damit an die Eigenformdarstellung linearer Systeme an. Dabei entsprechen  $\boldsymbol{\rho}$  und  $\boldsymbol{\eta}$  dem Real- bzw. Imaginärteil des auf die erste Komponente normierten Eigenvektors und  $\delta = \dot{a}/a$  und  $\omega = \dot{\phi}$  dem Real- bzw. Imaginärteil des Eigenwertes. Im Folgenden werden daher die Bezeichnungen Eigenbewegung, Eigenwert und Eigenvektor in einem erweiterten Sinne auch für den nichtlinearen Fall weiterverwendet, wobei es sich nun nicht mehr um konstante, sondern um zeit- bzw. amplitudenabhängige Werte handelt. Die Zeitableitungen von  $\mathbf{x}$  lassen sich zu

$$\dot{\mathbf{x}} = a [\{\delta(\boldsymbol{\rho} + a\boldsymbol{\rho}') - \omega\boldsymbol{\eta}\} \sin \phi + \{\delta(\boldsymbol{\eta} + a\boldsymbol{\eta}') + \omega\boldsymbol{\rho}\} \cos \phi] \quad (2.16)$$

und

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} = a [ & \{(\delta^2 - \omega^2)\boldsymbol{\rho} - 2\delta\omega\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Delta y}\} \sin \phi \\ & + \{(\delta^2 - \omega^2)\boldsymbol{\eta} + 2\delta\omega\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Delta z}\} \cos \phi] \end{aligned} \quad (2.17)$$

mit den Abkürzungen

$$\Delta \mathbf{y} = \delta^2(3a\boldsymbol{\rho}' + a^2\boldsymbol{\rho}'') + a\delta(\delta'\boldsymbol{\rho} + a\delta'\boldsymbol{\rho}' - \omega'\boldsymbol{\eta} - 2\omega\boldsymbol{\eta}') \quad (2.18)$$

bzw.

$$\Delta \mathbf{z} = \delta^2(3a\boldsymbol{\eta}' + a^2\boldsymbol{\eta}'') + a\delta(\delta'\boldsymbol{\eta} + a\delta'\boldsymbol{\eta}' + \omega'\boldsymbol{\rho} + 2\omega\boldsymbol{\rho}') \quad (2.19)$$

bestimmen. Damit ergeben sich die Bestimmungsgleichungen für Dämpfung und Frequenz analog zum Vorgehen bei einem Freiheitsgrad zu

$$(\delta^2 - \omega^2)\boldsymbol{\rho} - 2\delta\omega\boldsymbol{\eta} + \Delta \mathbf{y} + \mathbf{F}_1(a, \delta, \omega, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\eta}') = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

$$(\delta^2 - \omega^2)\boldsymbol{\eta} + 2\delta\omega\boldsymbol{\rho} + \Delta \mathbf{z} + \mathbf{F}_2(a, \delta, \omega, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\eta}') = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

mit

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \sin\phi \, d\phi \quad , \quad \mathbf{F}_2 = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cos\phi \, d\phi$$

und

$$\mathbf{F} = \mathbf{F} \left( a [\boldsymbol{\rho} \sin\phi + \boldsymbol{\eta} \cos\phi], \right. \\ \left. a [\{\delta(\boldsymbol{\rho} + a\boldsymbol{\rho}') - \omega\boldsymbol{\eta}\} \sin\phi + \{\delta(\boldsymbol{\eta} + a\boldsymbol{\eta}') + \omega\boldsymbol{\rho}\} \cos\phi] \right).$$

Mit den Gleichungen (2.20) und (2.21) stehen nun  $2n$  Bestimmungsgleichungen für insgesamt  $4n$  Variablen ( $\delta, \omega, \delta', \omega'$  und je  $n - 1$  Komponenten von  $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}'$  und  $\boldsymbol{\eta}'$ ) zur Verfügung. Für eine erste Näherung wird daher  $\Delta \mathbf{y} \sin\phi + \Delta \mathbf{z} \cos\phi = \mathbf{0}$  gesetzt, wodurch alle Derivativa von  $\delta, \omega, \boldsymbol{\rho}$  und  $\boldsymbol{\eta}$  zu Null werden. Damit werden die Bestimmungsgleichungen (2.20) und (2.21) in erster Näherung zu

$$(\delta^2 - \omega^2)\boldsymbol{\rho} - 2\delta\omega\boldsymbol{\eta} + \mathbf{F}_1(a, \delta, \omega, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0} \quad (2.22)$$

und

$$(\delta^2 - \omega^2)\boldsymbol{\eta} + 2\delta\omega\boldsymbol{\rho} + \mathbf{F}_2(a, \delta, \omega, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0}. \quad (2.23)$$

Wie im Verfahren für einen Freiheitsgrad können die Resultate durch Ableitung der Ergebnisse der ersten Näherung nach der Amplitude  $a$  und Einsetzen in die Gleichungen (2.20) und (2.21) iterativ verbessert werden.

Das BTS-Verfahren liefert oft schon in der ersten Näherungsstufe gute Ergebnisse. Bei manchen Aufgabenstellungen ist jedoch eine iterative Verbesserung zwingend notwendig. Hier stellt sich das Konvergenzverhalten des rekursiven Iterationsprozesses in der Praxis allerdings oft als problematisch heraus [37]. Häufig führt die Iteration nicht zu einem eindeutigen Ergebnis, so dass Aussagen zur Näherungsgüte letztendlich nur am konkreten

Anwendungsfall getroffen werden können. Darüber hinaus erfordert die Mittelwertbildung über einen Schwingungszyklus einen oszillatorischen Charakter des untersuchten dynamischen Systems. Für stark gedämpfte oder angefachte, aperiodische Systeme ist das Verfahren daher nicht geeignet. Die Folgenden auf der BTS-Methode aufbauenden Verfahren (Verfahren nach Reitenbacher und ASTAN-Verfahren) umgehen diese beiden Nachteile (Konvergenzschwierigkeiten und Beschränkung auf oszillatorische Probleme) durch Approximation der Ableitungen während des Entwicklungsprozesses und Mittelung über ein geeignetes Intervall im Zeitbereich bei aperiodischen Bewegungen [37, 22, 46].

#### 2.2.4 Verfahren nach Reitenbacher und ASTAN-Verfahren

Zur Analyse mit dem Verfahren nach Reitenbacher wird das Differentialgleichungssystem (2.14) zunächst in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung umgeformt:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_0) \quad (2.24)$$

Der Vektor  $\mathbf{u}_0$  dient dabei zur Beschreibung konstanter, externer Systemparameter. Der Näherungsansatz für oszillierende Eigenbewegungsformen lautet dann

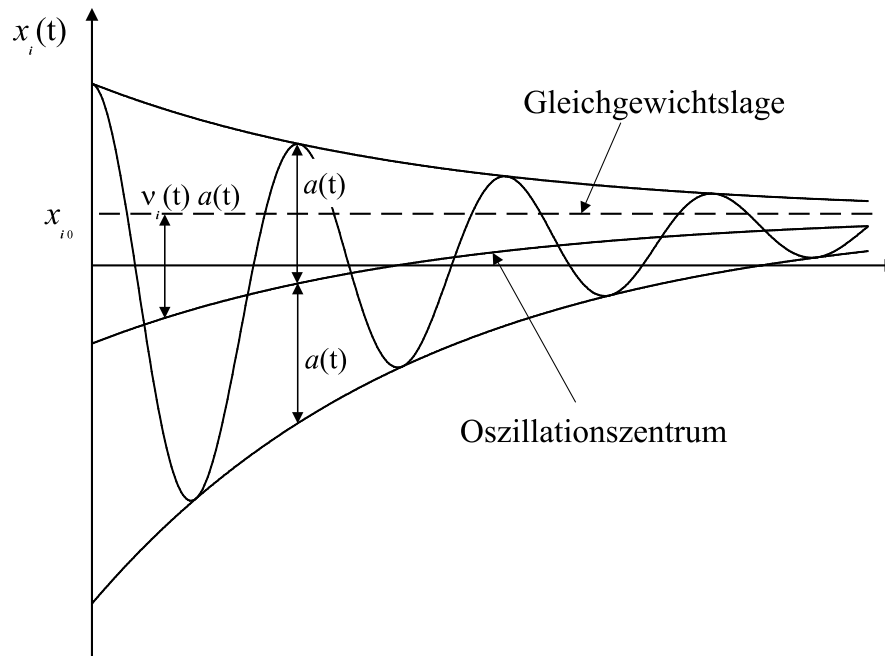
$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + a \cdot [\boldsymbol{\rho} \sin \phi - \boldsymbol{\eta} \cos \phi] + a \cdot \boldsymbol{\nu}. \quad (2.25)$$

Dies entspricht formal dem Lösungsansatz des um eine Gleichgewichtslage  $\mathbf{x}_0$  linearisierten Systems, wobei hier die Eigenwerte  $\mu_i(a(t)) = \delta_i(a(t)) + i\omega_i(a(t))$  und Eigenvektoren  $\boldsymbol{\kappa}_i(a(t)) = \boldsymbol{\rho}_i(a(t)) + i\boldsymbol{\eta}_i(a(t))$  wiederum nicht als konstant, sondern als Funktionen der Auslenkungsamplitude  $a$  aus dem betrachteten Gleichgewicht angenommen werden. Der zusätzlich im Näherungsansatz eingeführte Vektor  $\boldsymbol{\nu}(a)$  erlaubt die Berücksichtigung von Asymmetrien in den Nichtlinearitäten und kann physikalisch entsprechend Abbildung 2.1 als Verschiebung des lokalen Oszillationszentrums interpretiert werden [49]. Der Vektor  $\boldsymbol{\nu}$  wird daher auch als Verschiebungsvektor bezeichnet. Für verschwindende Auslenkungen  $a$  aus der Gleichgewichtslage strebt der Ansatz (2.25) gegen die linearisierte Lösung.

Die zeitliche Ableitung des Lösungsansatzes ergibt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{a} \cdot \{\boldsymbol{\rho} \cos \phi - \boldsymbol{\eta} \sin \phi\} + a \cdot \left\{ \left( \dot{\boldsymbol{\rho}} \cos \phi - \boldsymbol{\rho} \dot{\phi} \sin \phi \right) \right. \\ \left. - a \cdot \left( \dot{\boldsymbol{\eta}} \sin \phi - \boldsymbol{\eta} \dot{\phi} \cos \phi \right) \right\} + \dot{a} \cdot \boldsymbol{\nu} + a \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Für die zeitlichen Ableitungen der Amplitude, der Phase und der Kenngrößen (Eigenwerte, Eigenvektoren und Verschiebungsvektor) gelten die Beziehungen  $\dot{a} = a\delta$ ,  $\dot{\phi} = \omega$  und

Abbildung 2.1: Verschiebungsvektor  $\nu$ 

Gleichung (2.9).

Damit wird Gleichung (2.26) zu

$$\dot{\mathbf{x}} = a\{(\delta\rho + a\delta\rho' - \omega\boldsymbol{\eta}) \cos\phi - (\delta\boldsymbol{\eta} + a\delta\boldsymbol{\eta}' + \omega\rho) \sin\phi\} + a(\delta\boldsymbol{\nu} + a\delta\boldsymbol{\nu}'). \quad (2.27)$$

In dem Ausdruck für die zeitliche Ableitung des Lösungsansatzes verbleiben also wie bei der BTS-Methode nur noch die von der Amplitude abhängigen Kenngrößen, deren Ableitungen nach der Amplitude sowie die Amplitude und die Phase selber.

Reitenbacher definiert nun einen Fehlervektor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  als die Differenz zwischen dem in die Differentialgleichungen (2.24) eingesetzten Lösungsansatz (2.25) und der Ableitung des Lösungsansatzes (2.27).

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_0) \quad (2.28)$$

Werden die Dämpfungs- und Frequenzfunktionen  $\delta(a)$  bzw.  $\omega(a)$ , die entsprechenden Eigenvektornäherungen  $\boldsymbol{\rho}(a)$  und  $\boldsymbol{\eta}(a)$  sowie die Oszillationsverschiebung  $\boldsymbol{\nu}(a)$  so bestimmt, dass dieser Fehlervektor minimal wird, so ist der beste Näherungsansatz gefunden. Als Maß für die Güte der erzielten Näherung wird dabei die Summe der Quadrate aller über

dem Zeitintervall  $T$  einer Schwingung entstandenen Fehler angesetzt.

$$\Gamma = \int_{\tau}^{\tau+T} \{\varepsilon_1^2(t) + \dots + \varepsilon_n^2(t)\} dt \rightarrow MIN \quad (2.29)$$

Nach Substitution der Zeitabhängigkeit des Integrals durch

$$dt = \frac{1}{\omega} d\phi, \quad (2.30)$$

Zusammenfassen der gesuchten Parameter zu Koeffizientenvektoren, und unter der Voraussetzung dass die Änderungen der Parameter über einer Schwingungsperiode wiederum nur klein sind, stellt Reitenbacher mittels des Gauss'schen Quadraturverfahrens algebraische Bestimmungsgleichungen für die Kenngrößen auf [37].

Im Gegensatz zum Verfahren nach Reitenbacher werden beim ASTAN-Verfahren der Lösungsansatz und seine Ableitung direkt in die Differentialgleichungen des Systems eingesetzt. Gibt der Lösungsansatz (2.25) das Verhalten des betrachteten Systems korrekt wieder, so muss er zusammen mit seiner zeitlichen Ableitung (2.27) die Differentialgleichungen (2.24) des Systems erfüllen:

$$\begin{aligned} (a\delta\boldsymbol{\rho} + a^2\delta\boldsymbol{\rho}' - a\omega\boldsymbol{\eta}) \cos\phi - (a\delta\boldsymbol{\eta} + a^2\delta\boldsymbol{\eta}' + a\omega\boldsymbol{\rho}) \sin\phi + (a\delta\boldsymbol{\nu} + a^2\delta\boldsymbol{\nu}') \\ = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + a \cdot [\boldsymbol{\rho}\sin\phi - \boldsymbol{\eta}\cos\phi] + a \cdot \boldsymbol{\nu}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Es wird wiederum angenommen, dass die Änderungen von Eigenwert, Eigenvektor und Eigenvektorableitung über einem Schwingungszyklus klein sind, so dass die eingeklammerten Werte auf der linken Seite nicht mehr momentane Werte sind, sondern Größen, die einer bestimmten Amplitude  $a$  zugeordnet werden können. Integration und vorherige Multiplikation mit  $\sin\phi$  bzw.  $\cos\phi$  ergibt dann mit

$$a\delta\boldsymbol{\nu} + a^2\delta\boldsymbol{\nu}' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{f} d\phi, \quad (2.32)$$

$$a\delta\boldsymbol{\rho} + a^2\delta\boldsymbol{\rho}' - a\omega\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{f} \cos\phi d\phi \quad (2.33)$$

und

$$a\delta\boldsymbol{\eta} + a^2\delta\boldsymbol{\eta}' + a\omega\boldsymbol{\rho} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{f} \sin\phi d\phi \quad (2.34)$$

sofort die Bestimmungsgleichungen für die Kenngrößen. Im Gegensatz zu den Bestimmungsgleichungen des Reitenbacher-Verfahrens können diese Bestimmungsgleichungen sofort, d.h. ohne eine aufwändige Berechnung von Koeffizientenvektoren gelöst werden.

Wie zuvor stellt sich auch hier die Schwierigkeit, dass die nun  $3n$  Bestimmungsgleichungen (2.32) - (2.34) nicht ausreichen, um die nun insgesamt  $6n - 2$  Kenngrößen ( $\delta, \omega$ , je  $n - 1$  mal  $\rho_i, \rho'_i, \eta_i, \eta'_i$  sowie je  $n$  mal  $\nu_i$  und  $\nu'_i$ ) zu bestimmen. Während bei der BTS-Methode in erster Näherungsstufe alle Amplitudenableitungen zu Null gesetzt werden, schätzt das Verfahren nach Reitenbacher sie auf geeignete Weise ab. Dazu werden während der schrittweisen Entwicklung, d.h. sukzessiven Vergrößerung von  $a$  und Lösung der Bestimmungsgleichungen, die Ableitungen nach der Amplitude durch den Differenzenquotienten

$$(\cdot)' = \frac{(\cdot)_k - (\cdot)_{k-1}}{a_k - a_{k-1}} \quad (2.35)$$

mit den jeweils im Schritt zuvor ermittelten Größen angenähert (Abbildung 2.2). Da die Lösung der Gleichungen (2.32) - (2.34) bei komplizierten Differentialgleichungen (2.24) ohnehin numerisch, z.B. mittels eines Newton-Gleichungslösers durchgeführt werden muss, bedeutet die Abschätzung gemäß Gleichung (2.35) nur einen sehr geringen Mehraufwand. Die schrittweise Entwicklung von der linearisierten Lösung ( $a = 0$ ) hin zu größeren Werten

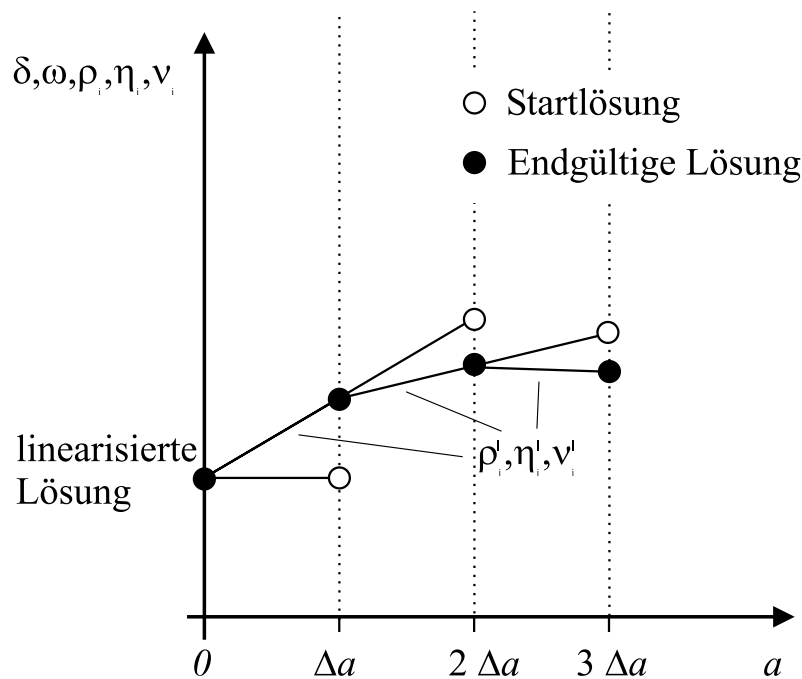


Abbildung 2.2: Entwicklung der Kenngrößen

von  $a$  hat zudem den Vorteil, dass aus den zuletzt gefundenen Lösungen auf einfache Weise Startlösungen für den Gleichungslöser des nächsten Schrittes generiert werden können (Abbildung 2.2). Während die BTS-Methode zur Ermittlung höherer Näherungstufen in rekursiver Form die Kenngrößenverläufe der jeweils vorherigen Näherungsstufe über dem gesamten Untersuchungsgebiet verwendet, können ASTAN- und Reitenbacher-Verfahren bei jedem einzelnen lokalen Amplitudenschritt auskonvergieren, was in der Praxis ein deutlich besseres Konvergenzverhalten zur Folge hat [37].

Für Bewegungsformen mit aperiodischem Charakter sind Eigenwert und Eigenvektorkomponenten reelle Zahlen, so dass sich der Lösungsansatz (2.25) zu

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + a \cdot \boldsymbol{\rho} \quad (2.36)$$

vereinfacht. Die zeitliche Ableitung wird dann zu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{a} \cdot \boldsymbol{\rho} + a \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (2.37)$$

und mit  $\dot{a} = a\delta$  und  $\dot{\boldsymbol{\rho}} = a\delta\boldsymbol{\rho}'$  aus Gl. (2.9) zu

$$\dot{\mathbf{x}} = a \cdot \delta \cdot (\boldsymbol{\rho} + a\boldsymbol{\rho}'). \quad (2.38)$$

Analog zum Vorgehen bei oszillierenden Bewegungsformen werden der Ansatz und seine zeitliche Ableitung in die Differentialgleichungen des Systems eingesetzt:

$$a \cdot \delta \cdot (\boldsymbol{\rho} + a\boldsymbol{\rho}') = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + a \cdot \boldsymbol{\rho}). \quad (2.39)$$

Wiederum wird vorausgesetzt, dass die Kenngrößen  $\delta$ ,  $\boldsymbol{\rho}$  und  $\boldsymbol{\rho}'$  über ein bestimmtes Zeitintervall  $T$  als nur "wenig" veränderlich angesehen werden können. Wird zusätzlich angenommen, dass die Dämpfungsfunktion  $\delta$  in dem betrachteten Zeitintervall keine Nullstelle besitzt, so kann mit

$$a(t) = a(o) \cdot e^{\int_0^t \delta(a(t)) dt}$$

gezeigt werden, dass  $a(t)$  monoton ist und somit das Zeitintervall  $[\tau, \tau + T]$  sofort in ein Amplitudenintervall  $[a_t, a_{t+T}]$ , bzw.  $[a, a + \Delta a]$  überführt werden kann. Mittels Abschätzung der Eigenvektorableitung  $\boldsymbol{\rho}'$  gemäß Abbildung 2.2 kann nun der Kenngrößenverlauf über die Bestimmungsgleichung (2.39) beginnend mit der linearisierten Lösung  $a = 0$  mit Schrittweiten der Größe  $\Delta a$  hin zu größeren Werten von  $a$  entwickelt werden.

### 2.2.5 N-Massenschwinger

Bevor im weiteren Verlauf der Arbeit das ASTAN-Verfahren zur Analyse der nichtlinearen Dynamik von Flugzeugen verwendet wird, sollen zunächst an einem einfacheren Beispiel die Robustheit und potentielle Schwierigkeiten der Methode demonstriert werden. Daher wird zunächst in Anlehnung an [10] ein nichtlineares Feder-Masse-Dämpfersystem betrachtet, mit dessen Hilfe die Anzahl der Freiheitsgrade sowie die enthaltenen Nichtlinearitäten einfach variiert werden können (Abb. 2.3). Die Bewegung der einzelnen Massen ist auf jeweils einen Freiheitsgrad beschränkt, so dass sich im Falle von  $N$  Massen ein System mit  $N$  Freiheitsgraden ergibt. Der Einfachheit halber wird  $m = m_1 = m_2 = \dots = m_N$  angenommen, wobei die Proportionalitätsfaktoren der Feder- bzw. Dämpferkennlinien  $C_k$  bzw.  $D_k$  im Folgenden pro Masseneinheit angegeben werden und auf die Mitführung der Maßeinheiten verzichtet wird. Im Falle verschwindender Auslenkungen  $x_k$  sind die Federn entspannt.

Die Ergebnisse der approximativen Analyse werden nachfolgend exemplarisch für einen 30-Massenschwinger dargestellt. Die Federn dieses Systems, mit Ausnahme der Wandfedern, besitzen nichtlineare Kennlinien, die durch

$$F_{C_k} = C_k \left( (x_{k-1} - x_k) + (x_{k-1} - x_k)^3 \right) \quad \text{für } k = 2, 4, 6, \dots \quad (k \leq 30) \quad \text{bzw.}$$

$$F_{C_k} = C_k \sin(x_{k-1} - x_k) \quad \text{für } k = 3, 5, 7, \dots \quad (k \leq 29)$$

beschrieben werden. Die Dämpfer besitzen lineare Kennlinien. Die Proportionalitätsfaktoren  $C_k$  und  $D_k$  sind mit normalverteilten Zufallszahlen belegt, wobei die Federkonstanten im Bereich von 5 bis 25 und die Dämpferkonstanten im Bereich von 0.5 bis 1.5 variiert wurden (Tabelle 2.1).

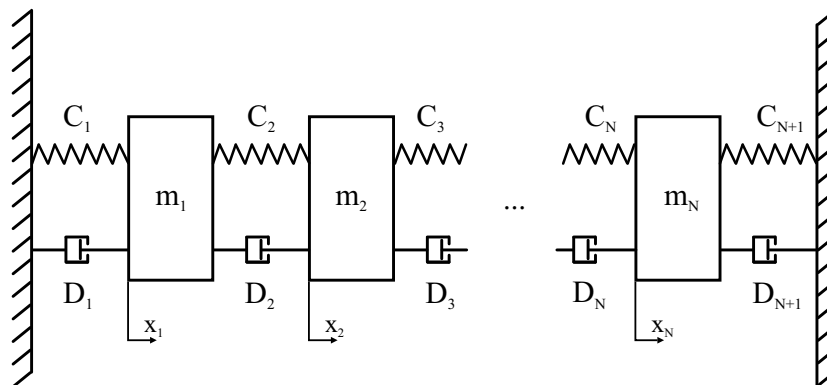


Abbildung 2.3: N-Massenschwinger in horizontaler Anordnung

Federkonstanten		Dämpferkonstanten	
$C_1 \cdots C_{16}$	$C_{17} \cdots C_{31}$	$D_1 \cdots D_{16}$	$D_{17} \cdots D_{31}$
7.7304	16.5961	0.9966	1.0466
5.2351	20.2073	1.3998	0.9449
22.8780	15.5965	1.3216	1.1946
8.9828	17.8105	1.1449	1.1213
10.9745	9.1814	1.3180	1.2948
18.2289	12.5964	1.1602	1.4568
10.6882	20.6666	0.8420	1.0226
14.3845	18.6169	0.7897	1.3801
6.2956	14.2219	0.8412	0.6730
24.7667	16.3566	1.0341	1.4797
16.6558	20.8842	1.2271	0.7714
13.4699	6.1837	0.8093	0.7523
15.3102	17.0574	1.3385	1.3757
11.6790	6.0054	1.0681	1.2373
13.6581	7.9720	0.8704	1.1046
9.5190		1.2027	

Tabelle 2.1: Feder- und Dämpferkonstanten des 30-Massenschwingers

Die Bewegungsgleichungen des Systems ergeben sich somit zu:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= -C_1 x_1 - D_1 \dot{x}_1 - C_2 ((x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)^3) - D_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\
\ddot{x}_2 &= C_2 ((x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)^3) + D_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - C_3 \sin(x_2 - x_3) - D_3 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\
\ddot{x}_3 &= C_3 \sin(x_2 - x_3) + D_3 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - C_4 ((x_3 - x_4) + (x_3 - x_4)^3) - D_4 (\dot{x}_3 - \dot{x}_4) \\
&\vdots \\
\ddot{x}_{28} &= C_{28} \sin(x_{27} - x_{28}) + D_{28} (\dot{x}_{27} - \dot{x}_{28}) - C_{29} ((x_{28} - x_{29}) + (x_{28} - x_{29})^3) \\
&\quad - D_{29} (\dot{x}_{28} - \dot{x}_{29}) \\
\ddot{x}_{29} &= C_{29} ((x_{28} - x_{29}) + (x_{28} - x_{29})^3) + D_{29} (\dot{x}_{28} - \dot{x}_{29}) - C_{30} \sin(x_{29} - x_{30}) \\
&\quad - D_{30} (\dot{x}_{29} - \dot{x}_{30}) \\
\ddot{x}_{30} &= C_{30} \sin(x_{29} - x_{30}) + D_{30} (\dot{x}_{29} - \dot{x}_{30}) - C_{31} x_{30} - D_{31} \dot{x}_{30}.
\end{aligned}$$

Bei verschwindender Auslenkung aus der Gleichgewichtslage ergibt die lineare Analyse 30

Eigenwerte $\delta_n \pm \omega_n i$		
$(n = 1, \dots, 10)$	$(n = 11, \dots, 20)$	$(n = 21, \dots, 30)$
$-1.7820 \pm 7.9405i$	$-1.7072 \pm 6.0010i$	$-0.5575 \pm 3.3282i$
$-2.2117 \pm 7.8489i$	$-1.3442 \pm 5.9176i$	$-0.4472 \pm 3.1010i$
$-1.9558 \pm 7.7997i$	$-1.3252 \pm 5.5616i$	$-0.3654 \pm 2.6677i$
$-1.9705 \pm 7.4564i$	$-1.1064 \pm 5.2407i$	$-0.2842 \pm 2.3461i$
$-2.3095 \pm 6.9676i$	$-0.8903 \pm 4.9873i$	$-0.2296 \pm 2.0156i$
$-2.0215 \pm 6.8595i$	$-1.2297 \pm 4.6142i$	$-0.1637 \pm 1.7750i$
$-1.9646 \pm 6.7917i$	$-0.8160 \pm 4.2773i$	$-0.1007 \pm 1.3579i$
$-1.8233 \pm 6.7434i$	$-0.6054 \pm 3.8237i$	$-0.0599 \pm 1.0145i$
$-1.7503 \pm 6.2316i$	$-1.2944 \pm 3.8148i$	$-0.0278 \pm 0.6656i$
$-1.5195 \pm 6.2041i$	$-1.3806 \pm 3.6327i$	$-0.0066 \pm 0.3238i$

Tabelle 2.2: Eigenwerte des linearisierten 30-Massenschwingers

oszillierende Bewegungsformen mit den entsprechenden 30 konjugiert komplexen Eigenwertpaaren (Tabelle 2.2). Analysiert man das Verhalten der ersten Eigenbewegungsform ( $-1.7820 \pm 7.9405i$ ) bezüglich der bei dieser Bewegungsform dominanten Zustandsgröße  $x_{10}$ , so ergibt sich der in Abb. 2.4 dargestellte Eigenwert- und Eigenvektorverlauf über der Auslenkungsamplitude  $\Delta x_{10}$ .

Sowohl der Eigenwert (Dämpfung  $\delta$  und Frequenz  $\omega$ ), als auch die Komponenten des normierten Eigenvektors zeigen ein stark nichtlineares Verhalten. Der Wert  $\delta$  der Dämpfung nimmt nach Erreichen eines lokalen Maximums bei  $\Delta x_{10} \approx 0.75$  zunächst wieder ab, um dann bei  $\Delta x_{10} \approx 1.465$  gegen Null zu streben. Die Frequenz  $\omega$  nimmt bei größer werdender Auslenkungsamplitude monoton zu, allerdings mit einem stark schwankenden Gradienten. Im Verlauf der auf  $\rho_{10} + i\eta_{10}$  normierten Eigenvektorkomponenten sind ebenfalls starke z.T. mit mehrfachem Vorzeichenwechsel verbundene Schwankungen zu erkennen.

Eine Bewertung der Ergebnisse kann im Zeitbereich erfolgen. Für eine vorgegebene Anfangsauslenkung werden die Zeitverläufe der Zustandsgrößen aus den Kenngrößenverläufen rekonstruiert und mit Zeitverläufen, die aus einer direkten Runge-Kutta-Fehlberg-Integration (RKF) des Differentialgleichungssystems gewonnen wurden, verglichen. Dazu werden zunächst mit den Gleichungen

$$a(t) = a(o) \cdot e^{\int_0^t \delta(a(t)) dt} \quad \text{und} \quad \phi(t) = \int_0^t \omega(a(t)) dt,$$

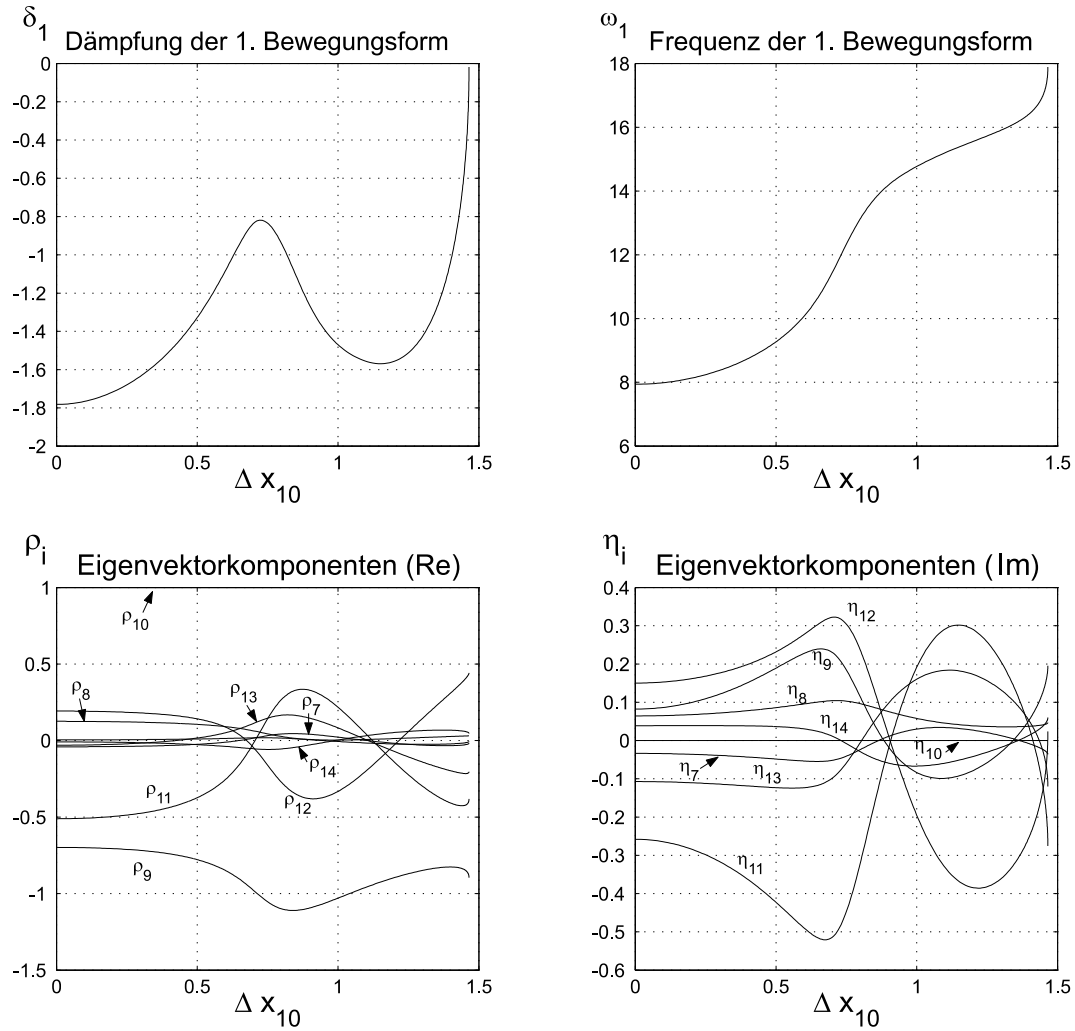


Abbildung 2.4: Eigenwertverlauf ( $\delta_1(\Delta x_{10}) + i\omega_1(\Delta x_{10})$ ) und Eigenvektorverlauf ( $\rho(\Delta x_{10}) + i\eta(\Delta x_{10})$ ) der dominierenden Zustandsgrößen über der Auslenkungsamplitude  $\Delta x_{10}$  des 30-Massenschwingers

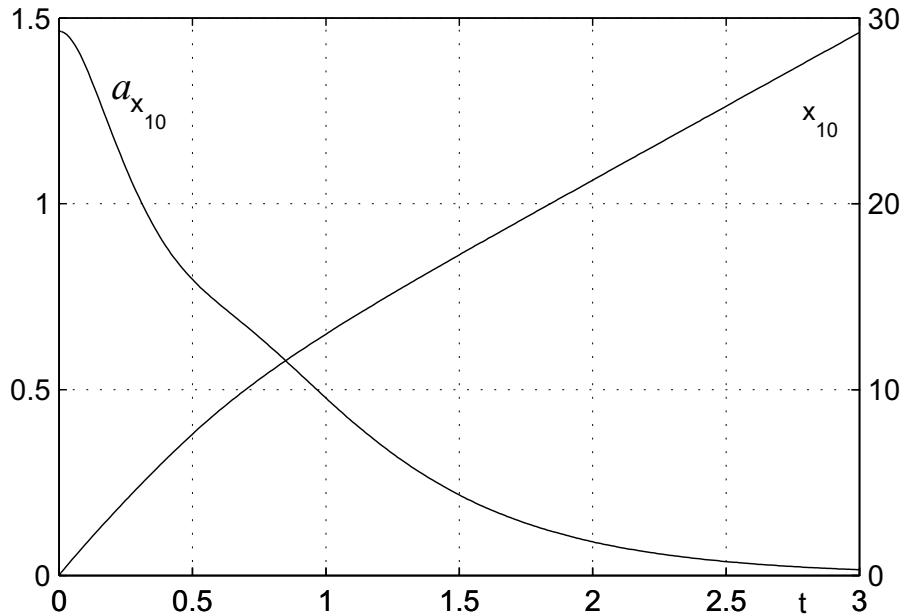


Abbildung 2.5: Zeitverläufe der Amplitude  $a_{x_{10}}$  und des Phasenwinkels  $\phi_{x_{10}}$  der 1. Bewegungsform des 30-Massenschwingers

sowie den bekannten Verläufen  $\delta(a)$  und  $\omega(a)$  die Zeitverläufe der Amplituden- und Phasenfunktion bestimmt (Abbildung 2.5) und daraus mit Hilfe des Lösungsansatzes (2.25) bzw. (2.36) die Zeitverläufe der Zustandsgrößen.

Die so gewonnenen Zeitverläufe der bei der betrachteten Bewegungsform dominierenden Zustandsgrößen sind in Abbildung 2.6 denen aus der RKF-Integration für eine Anfangsauslenkung von  $\Delta x_{10} = 1.465$  gegenübergestellt. Die gute Übereinstimmung der Kurven zeigt, dass trotz der Anlehnung an einen linearen Lösungsansatz, der mit Gleichung (2.25) definierte Approximationsansatz das Systemverhalten gut wiedergibt. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Nichtlinearitäten des Systems über die auslenkungsabhängigen Kenngrößen mit in den Approximationsansatz einfließen.

### 2.2.6 Randbedingungen des Verfahrens

Einer der wesentlichen Vorteile von ASTAN- und Reitenbacher-Verfahren gegenüber der BTS-Methode liegt in dem deutlich verbesserten Konvergenzverhalten. Während die BTS-Methode zur Ermittlung höherer Näherungstufen die Kenngrößenverläufe der jeweils vorherigen Näherungsstufe über dem gesamten Auslenkungsbereich verwendet, können ASTAN-

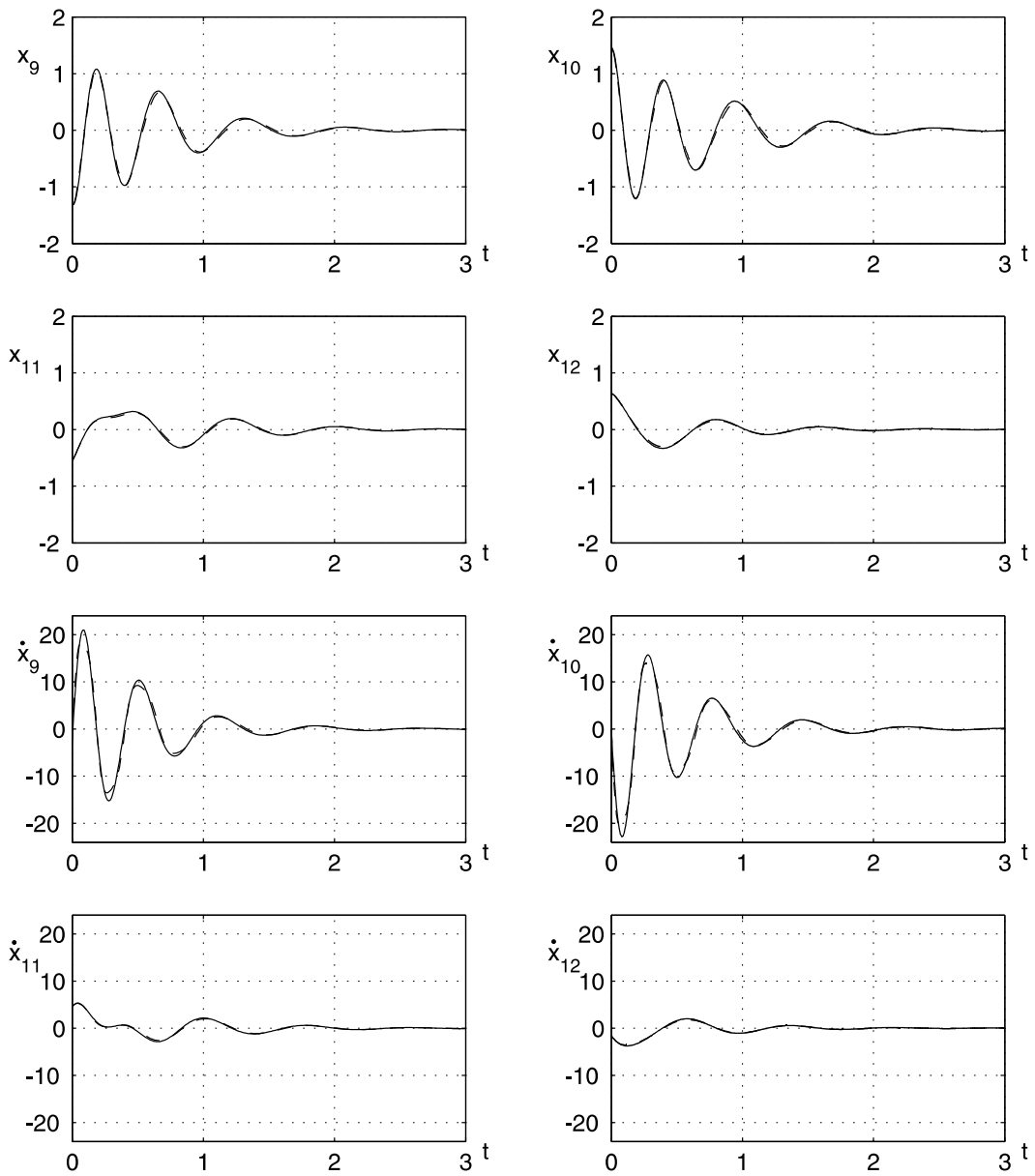


Abbildung 2.6: Zeitverläufe der dominierenden Zustandsgrößen der 1. Bewegungsform des 30-Massenschwingers (Anfangsauslenkung von  $\Delta x_{10} = 1.465$ ) (ASTAN: —, RKF: --)

und Reitenbacher-Verfahren bei jedem einzelnen lokalen Amplitudenschritt auskonvergieren.

Dennoch kann es auch beim ASTAN- bzw. Reitenbacher-Verfahren zu Problemen im Konvergenzverhalten kommen. Die prinzipielle Vorgehensweise der Methode macht es erforderlich, einige Randbedingungen bei ihrer Anwendung zu beachten. Dies betrifft neben der Wahl einer geeigneten Parametrisierungsstrategie zur schrittweisen Entwicklung der Kenngrößen auch die Vorgehensweise bei der Modellierung des zu untersuchenden Systems. Bedingt durch die Mittelwertbildung der Kenngrößen über eine vollständige Schwingung und die Abschätzung der Kenngrößenableitungen über die jeweils im Entwicklungsschritt zuvor ermittelten Kenngrößen kann es dazu kommen, dass mehrere Kombinationen aus Kenngrößen und zugehörigen Ableitungen existieren, welche die Bestimmungsgleichungen erfüllen. Die Lösung der Bestimmungsgleichungen ist dann nicht mehr eindeutig.

### Parametrisierung

Die Dämpfungs- und Frequenzverläufe (Abbildung 2.4) der zuvor betrachteten ersten Schwingungsform des 30-Massenschwingers weisen über dem betrachteten Auslenkungsintervall stark schwankende Gradienten auf. Der zunächst nur schwach ansteigende bzw. abfallende Verlauf nimmt gegen Ende des Auslenkungsintervalls eine extrem steile Form an. Während der schrittweisen Entwicklung der Kenngrößenverläufe durch Lösung der mit den Gleichungen (2.32) bis (2.34) bzw. (2.39) definierten Bestimmungsgleichungen kann dies bei der zunächst naheliegenden Verwendung einer konstanten Schrittweite  $\Delta a$  zu Schwierigkeiten führen. Wird diese aufgrund des zunächst flachen Gradienten zu groß gewählt, so können die bei der Abschätzung der Kenngrößenableitungen nach Abbildung 2.2 entstehenden Fehler im Differenzenquotienten (2.35) Probleme bereiten. In solchen Fällen hat sich eine Änderung der Parametrisierung des Entwicklungsvorganges bewährt. Anstelle der Auslenkungsamplitude  $a$  ( $\Delta x_{10}$  im vorigen Abschnitt) bietet sich z.B. die Bogenlänge  $s$  über dem Dämpfungsverlauf an (Abbildung 2.7).

Dazu werden die Bestimmungsgleichungen um die Parametrisierungsgleichung

$$0 = p_s(\delta, a, s) = (\delta(s) - \delta(s_{j-1}))^2 + (a(s) - a(s_{j-1}))^2 - (s - s_{j-1})^2 \quad (2.40)$$

erweitert und die Auslenkungsamplitude  $a$  als zusätzliche Unbekannte mitbestimmt. Hierbei bezeichnen  $\delta(s_{j-1})$  und  $a(s_{j-1})$  die während des Entwicklungsprozesses jeweils im Schritt zuvor bei der Bogenlänge  $s_{j-1}$  ermittelten Werte. Der Verlauf der Kenngrößen kann so mit diskreten Bogenlängenschrittweiten  $\Delta s = s - s_j$  entwickelt werden, wobei das

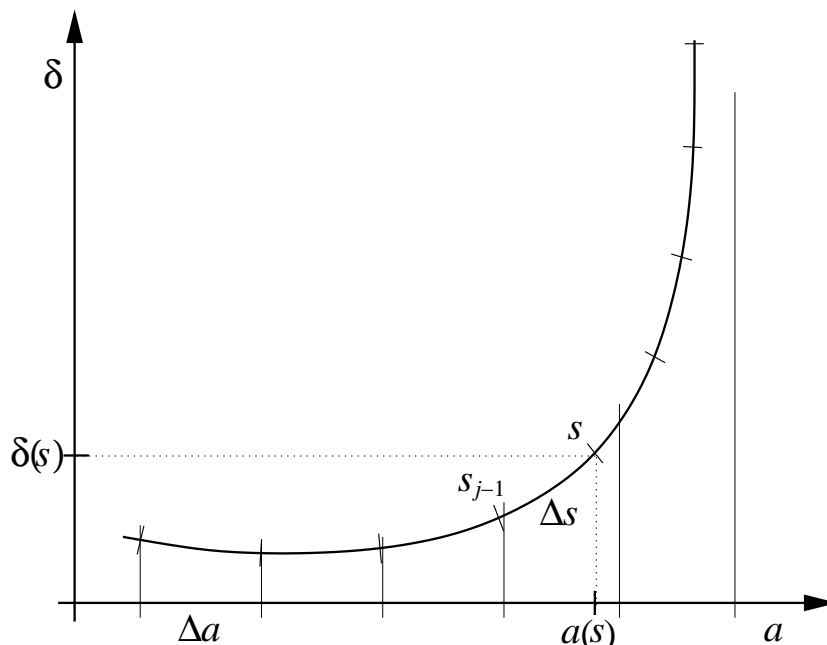


Abbildung 2.7: Parametrisierung der Bestimmungsgleichungen über die Bogenlänge  $s$

Konvergenzverhalten des Gleichungslösers unabhängig wird vom lokalen Gradienten der Kenngrößen. Der Differenzenquotient für die Kenngrößenableitungen lautet dann

$$() ' = \frac{()(s) - ()(s_{j-1})}{a(s) - a(s_{j-1})}. \quad (2.41)$$

## Modellierung

Das Verfahren erweist sich auch bei Systemen mit stark gedämpften Eigenschwingungen, wie z.B. dem 30-Massenschwinger, trotz Mittelwertbildung der Kenngrößen über einer vollständigen Schwingung als genau und unempfindlich, obwohl bei solchen Systemen die Amplitude und damit auch die amplitudenabhängigen Kenngrößen über der Schwingung deutlich variieren können. Probleme bereiten hingegen unstetige Nichtlinearitäten, z.B. aufgrund einfacher Geschwindigkeitslimitierung von Stellgliedern, welche häufig zu Konvergenzproblemen bei der Lösung der Bestimmungsgleichungen führen. Aufgrund der Voraussetzung konstanter Kenngrößen bei der Integration über eine Schwingungsperiode, kann die Unstetigkeit nicht ausreichend genau aufgelöst werden. Die resultierenden Fehler in den Kenngrößen können dann zusammen mit den Kenngrößenableitungen aus den zuvor ermittelten Lösungen dazu führen, dass die Lösung der Bestimmungsgleichung nicht

mehr eindeutig ist. Unstetige Nichtlinearitäten sollten daher bei der Modellierung des Systems durch kontinuierliche Verläufe angenähert werden.

In der Praxis kann dann die Konvergenz des Verfahrens üblicherweise, selbst in kritischen Fällen, durch eine geeignete Wahl von Parametrisierung und Amplitudenschrittweite sichergestellt werden.

## 3 Ursachen für Nichtlinearitäten

Bevor in den folgenden beiden Kapiteln zwei unterschiedliche Flugzeugmodelle mit der vorgestellten Analyse­methode untersucht werden, fasst dieses Kapitel in einem kurzen Überblick zusammen, mit welchen Nichtlinearitäten dabei zu rechnen ist. Die physikalischen Ursachen für das nichtlineare dynamische Verhalten von Flugzeugen lassen sich grob in drei Bereiche aufteilen. Dies sind die nichtlinearen aerodynamischen Kräfte und Momente, die nichtlineare Starrkörperdynamik sowie Nichtlinearitäten im elastischen Verhalten der Struktur. Zusätzlich können durch ein Regelungssystem eingeführte Nichtlinearitäten auftreten.

### 3.1 Luftkräfte und Luftkraftmomente

Die aerodynamischen Kräfte und Momente am Flugzeug können als nichtlineare Funktionen der Relativbewegung zwischen dem Flugzeug und der umgebenden Luft beschrieben werden [6]. Sie sind proportional zum Staudruck und damit zum Quadrat der Anströmgeschwindigkeit und hängen zudem wesentlich von der Geometrie des umströmten Körpers sowie der Anströmrichtung ab. Die Einflüsse von Geometrie und Anströmrichtung werden in der Regel durch dimensionslose Beiwerte  $C_{(\cdot)}$  zusammengefasst. Anstellwinkel  $\alpha$  und Schiebewinkel  $\beta$  legen die Anströmrichtung fest und haben im niedrigen Anstell- bzw. Schiebewinkelbereich einen linearen Einfluss auf die dimensionslosen Beiwerte. Bei großen Anstell- bzw. Schiebewinkeln ist diese Linearität des Einflusses jedoch nicht mehr gegeben. Die dort auftretenden Strömungsablösungen führen zu einem Einbruch im Verlauf der Beiwerte, der mit einer Verringerung der Kräfte einhergeht (Abbildung 3.1).

Zeitliche Änderungen der Anströmbedingungen, z.B. durch schwingungsinduzierte Drehraten des Flugzeuges, haben ebenfalls Einfluss auf die Kräfte und Momente am Flugzeug. Dabei lassen sich die Drehraten als lokale Anstell- bzw. Schiebewinkeländerungen an der Flugzeugstruktur interpretieren, die in der Regel Kräfte entgegen der Drehrichtung erzeugen und somit die Drehung abbremsen bzw. die Schwingung dämpfen.

Sollen strukturelle Schwingungen, bei denen das Verhältnis von Frequenz zur Fluggeschwindigkeit hoch ist, betrachtet werden, kann zusätzlich noch die aerodynamische Rückwirkung der schwingenden Struktur berücksichtigt werden. So gewinnt z.B. bei der

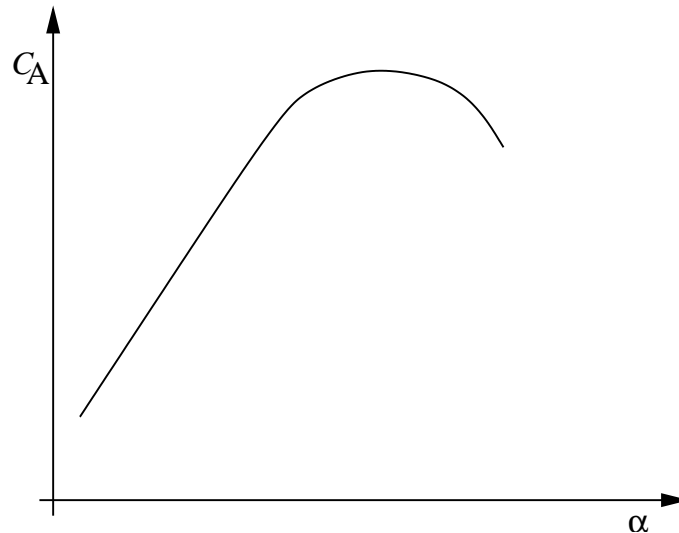


Abbildung 3.1: Abhängigkeit des Auftriebsbeiwertes vom Anstellwinkel

Flutteranalyse von Tragflächen der Einfluss der durch die schwingende Struktur erzeugten instationären Wirbelschlepe im Nachlauf des Flügels an Bedeutung [14]. Ein von Theodorsen formulierter und häufig verwendeter Ansatz zur Beschreibung der vollständig instationären Luftkräfte mittels einer Wirbelschlepenfunktion im Frequenzbereich, enthält mit der Einführung von Hankel-Funktionen zweiten Grades zusätzliche stark nichtlineare Terme [5]. Für die vorliegende Arbeit wurde auf eine Modellierung der vollständig instationären Aerodynamik verzichtet und statt dessen angenommen, dass alle aerodynamischen Reaktionen quasistationär sind, also verzögerungsfrei den Bewegungen bzw. Bewegungsgeschwindigkeiten folgen.

## 3.2 Starrkörperdynamik

Die Starrkörperbewegungsgleichungen des Flugzeuges beschreiben seine Bewegung ohne den Einfluss von Strukturelastizität zu berücksichtigen. Dabei weisen sie im Wesentlichen in zwei Bereichen nichtlinearen Charakter auf [6]. Zum einen führen die Drehraten in den Eulertermen zu nichtlinearen Zusammenhängen und zum anderen führen die Matrizen zur Transformation zwischen flugzeugbezogenem und inertialem Koordinatensystem aufgrund ihrer trigonometrischen Eigenschaften zu einem nichtlinearen Einfluss der Eulerwinkel. Dies betrifft die Transformationen der Gewichtskraft sowie der translatorischen und rotatorischen Geschwindigkeiten.

### 3.3 Strukturodynamik

Strukturdynamische Nichtlinearitäten können grob in drei Bereiche unterteilt werden [55]. Dies sind geometrische Nichtlinearitäten, insbesondere bei großen Verformungen, nichtlineares Werkstoffverhalten sowie Nichtlinearitäten aufgrund von Massenänderungen im System. Massenänderungen, z.B. durch Treibstoffverbrauch, finden über sehr lange Zeiträume statt, so dass sie bezüglich der Kurzzeitdynamik vernachlässigt werden können. Bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen des elastischen Flugzeuges in Kapitel 5 werden zudem kleine Strukturauslenkungen vorausgesetzt, so dass auch geometrische Nichtlinearitäten bei der verwendeten Modellierung nicht zu erwarten sind. Materialnichtlinearitäten aufgrund von Überdehnung und dem damit verbundenem Verlassen des linear-elastischen Bereiches im Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Werkstoffes sind im operationellen Betrieb des Flugzeuges ebenfalls nicht zu erwarten und daher in dieser Arbeit nicht berücksichtigt. Die strukturelle Dämpfung wurde in Anlehnung an [14, 24] in einen geschwindigkeitsproportionalen Anteil durch viskose Fluidreibung in der Struktur und einen auslenkungsabhängigen Anteil aufgrund von innerer Materialreibung aufgeteilt. Coulombsche Reibungsdämpfung wurde vernachlässigt.

### 3.4 Regelung

Die in dieser Arbeit betrachteten Flugregler beschränken sich auf Regler zur Verbesserung der Flugeigenschaften. Darüber hinausgehende, "höhere" Reglerebenen, etwa zur unterstützten bzw. automatischen Flugbahnführung oder Flugplanung, werden nicht berücksichtigt. Flugeigenchaftsregler haben die Aufgabe, das Eigenverhalten des Flugzeuges bezüglich seiner Eigenwerte (Zeitkonstanten, Frequenz, Dämpfung) und der Eigenvektoren (Amplituden- und Phasenverhältnisse der Zustandsgrößen zueinander) positiv zu beeinflussen. Eine Modifikation dieser Kenngrößen geschieht dabei üblicherweise durch eine automatische Rückführung gemessener Zustandsgrößen auf die Stellgrößen, d.h. auf die Steuerflächen bzw. Drosselgrade der Triebwerke. Die meist hydraulischen Stellantriebe zur Betätigung der Steuerflächen zeigen aufgrund der zu beschleunigenden Massen (Antriebsmechanik, Gestänge, Ruder usw.) in der Regel ein Übertragungsverhalten, das einem Verzögerungsglied erster Ordnung entspricht [6, 50].

Die wesentlichen nichtlinearen Eigenschaften von Stellantrieben ergeben sich vor allem durch begrenzte Laufgeschwindigkeiten, resultierend aus dem maximalen Volumenstrom im hydraulischen Antrieb [6]. Zusätzliche nichtlineare Einflüsse, etwa durch Elastizität oder Lose in der Kraftübertragung zwischen Stellantrieb und Ruder (Gestänge,

Aufhängung) können meist klein gehalten werden, beispielsweise durch Positionierung des Stellantriebes möglichst nahe am Ruder.

## 4 Agiles Flugzeug

Als erste Flugzeugkonfiguration wird in diesem Kapitel das vereinfachte Modell eines "agilen" Flugzeuges (F-8) untersucht. Die Modellierung erfolgt dabei in Anlehnung an [1, 17, 27] und bleibt auf die Längsbewegung des starren Flugzeuges beschränkt. Im Gegensatz zu konventionellen Flugzeugen muss bei solch einem agilen Flugzeug mit extremen Anstellwinkeln gerechnet werden, wobei die damit verbundenen nichtlinearen Luftkräfte den nichtlinearen Charakter der Bewegung dominieren. Der modellierte Anstellwinkelbereich reicht daher bis weit in den nichtlinearen Bereich hinein.

### 4.1 Modellierung

Die Basisgleichungen der Längsbewegung des agilen Flugzeuges bei Vernachlässigung von Luftwiderstand und Schub lauten

$$\begin{aligned}
 m(\dot{u} + w\dot{\Theta}) &= -mg \sin\Theta + A_{Fluegel} \sin\alpha + A_{Leitwerk} \sin\alpha_L \\
 m(\dot{w} + u\dot{\Theta}) &= mg \cos\Theta - A_{Fluegel} \cos\alpha - A_{Leitwerk} \cos\alpha_L \\
 I_y \ddot{\Theta} &= M_{Fluegel} + x_{Fluegel} A_{Fluegel} \cos\alpha - x_{Leitwerk} A_{Leitwerk} \cos\alpha_L - c\dot{\Theta}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

mit  $x_{Fluegel}$  und  $x_{Leitwerk}$  als konstant angenommene Abstände zwischen Flugzeugschwerpunkt und Angriffspunkt der Auftriebskraft an Flügel bzw. Leitwerk,  $c\dot{\Theta}$  als Dämpfungsmoment und  $\alpha_L$  als Anstellwinkel des Leitwerks. Mit  $w = u \tan\alpha$  und  $\dot{w} = \dot{u} \tan\alpha + u\dot{\alpha}/\cos^2\alpha$  wird Gleichungssystem (4.1) zu

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= -u\dot{\Theta} \tan\alpha - g \sin\Theta + \frac{A_{Fluegel}}{m} \sin\alpha + \frac{A_{Leitwerk}}{m} \sin\alpha_L \\
 \dot{\alpha} &= \dot{\Theta} \sin^2\alpha + \frac{g}{u} \sin\Theta \sin\alpha \cos\alpha - \frac{A_{Fluegel}}{um} \sin^2\alpha \cos\alpha \\
 &\quad - \frac{A_{Leitwerk}}{um} \sin\alpha \cos\alpha \sin\alpha_L + \dot{\Theta} \cos^2\alpha + \frac{g}{u} \cos^2\alpha \cos\Theta \\
 &\quad - \frac{A_{Fluegel}}{um} \cos^3\alpha - \frac{A_{Leitwerk}}{um} \cos^2\alpha \cos\alpha_L \\
 \ddot{\Theta} &= \frac{M_{Fluegel}}{I_y} + \frac{x_{Fluegel} A_{Fluegel}}{I_y} \cos\alpha - \frac{x_{Leitwerk} A_{Leitwerk}}{I_y} \cos\alpha_L - \frac{c}{I_y} \dot{\Theta}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

und bei vorausgesetzter konstanter Fluggeschwindigkeit ( $\dot{u} = 0$ ), zu den Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= q \cos^2 \alpha + \frac{g}{u} \cos^2 \alpha \cos \Theta - \frac{A_{Fluegel}}{um} \cos^3 \alpha - \frac{A_{Leitwerk}}{um} \cos^2 \alpha \cos \alpha_L \\ \dot{\Theta} &= q \\ \dot{q} &= \frac{M_{Fluegel}}{I_y} + \frac{x_{Fluegel} A_{Fluegel}}{I_y} \cos \alpha - \frac{x_{Leitwerk} A_{Leitwerk}}{I_y} \cos \alpha_L - \frac{c}{I_y} q\end{aligned}\quad (4.3)$$

mit den Zustandsgrößen  $\alpha$ ,  $\Theta$  und  $q$ .

Die Auftriebskräfte  $A_{Fluegel}$  und  $A_{Leitwerk}$  werden nach [1, 27] über polynomiale Funktionen modelliert (Abbildung 4.1):

$$A_{Fluegel} = \bar{q} S C_{A_{Fluegel}} = \bar{q} S (C_{A_{Fluegel}}^0 + C_{A_{Fluegel}}^1 \alpha - C_{A_{Fluegel}}^2 \alpha^3) \cdot W \quad (4.4)$$

$$A_{Leitwerk} = \bar{q} S (C_{A_{Leitwerk}}^0 + C_{A_{Leitwerk}}^1 \alpha_L - C_{A_{Leitwerk}}^2 \alpha_L^3 + a_H \delta_H) \quad (4.5)$$

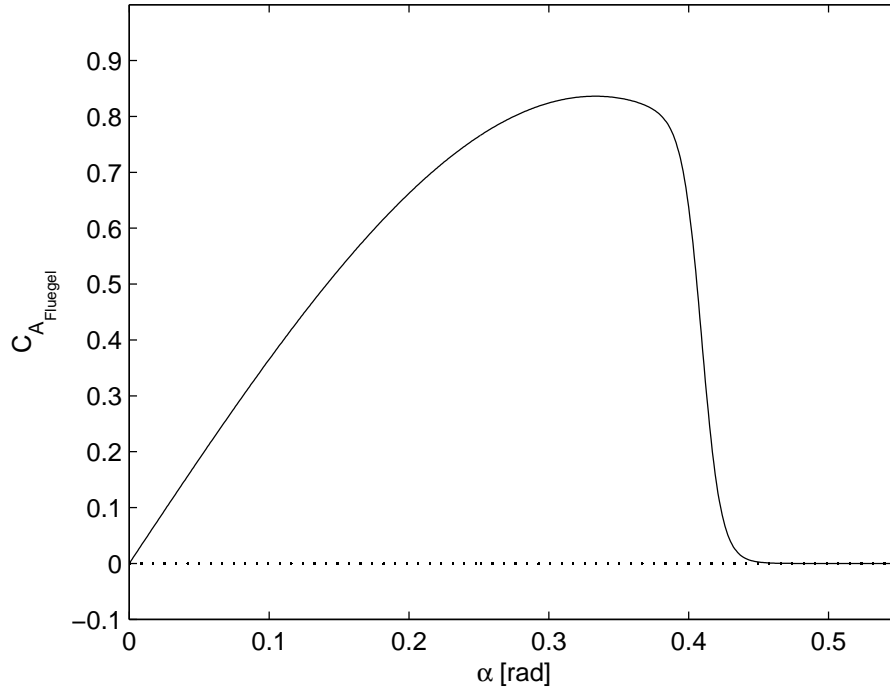


Abbildung 4.1: Auftriebskennlinie des F-8 Flügels (aus [27])

mit

$$W = 1/[1 + (\alpha/0.41)^{60}] \quad (4.6)$$

und

$$\alpha_L = \alpha - \epsilon + \delta_H = (1 - a_\epsilon)\alpha + \delta_H. \quad (4.7)$$

Darin gibt  $a_H$  den Effekt des Höhenruderausschlages  $\delta_H$  auf die Leitwerksauftriebskraft wieder und  $a_\epsilon$  den hier mit  $\epsilon = a_\epsilon\alpha$  als linear angenommenen Zusammenhang zwischen Anstellwinkel  $\alpha$  und Abwindwinkel  $\epsilon$  am Höhenleitwerk.

Bei einer Fluggeschwindigkeit von 845.6 ft/s in 30000 ft Höhe und einer Flugzeugmasse von 3338.5 slugs ergeben sich die Bewegungsgleichungen nach [27] schließlich zu

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= q \cos^2 \alpha + K_1 \cos^2 \alpha \cos \Theta - (K_2 \alpha + K_3 \alpha^3) \cos^3 \alpha \cdot W - (K_4 \alpha + K_5 \alpha^3 + K_6 \delta_H \\ &\quad + K_7 \alpha^2 \delta_H + K_8 \alpha \delta_H^2 + K_9 \delta_H^3) \cos^2 \alpha \cos(K_{10} \alpha + \delta_H) \\ \dot{\Theta} &= q \\ \dot{q} &= (K_{11} \alpha + K_{12} \alpha^3) \cos \alpha \cdot W - (K_{13} \alpha + K_{14} \alpha^3 + K_{15} \delta_H + K_{16} \alpha^2 \delta_H + K_{17} \alpha \delta_H^2 \\ &\quad + K_{18} \delta_H^3) \cos(K_{10} \alpha + \delta_H) - K_{19} q \end{aligned} \quad (4.8)$$

mit den Konstanten  $K_i$  gemäß Tabelle 4.1.

$K_1$	0.0381	$K_8$	-0.0947	$K_{15}$	4.2042
$K_2$	0.1691	$K_9$	-0.1263	$K_{16}$	-2.3072
$K_3$	-0.5072	$K_{10}$	0.2500	$K_{17}$	-9.2288
$K_4$	0.0105	$K_{11}$	0.1864	$K_{18}$	-12.3051
$K_5$	-0.0020	$K_{12}$	-0.5591	$K_{19}$	0.0792
$K_6$	0.0432	$K_{13}$	1.0254		
$K_7$	-0.0237	$K_{14}$	-0.1923		

Tabelle 4.1: Konstanten des agilen Flugzeuges

## 4.2 Analyseergebnisse

Die Abbildungen 4.2 und 4.3 zeigen jeweils die Bifurkationsdiagramme des Nickwinkels  $\Theta$ , des Anstellwinkels  $\alpha$  und der Nickrate  $q$  über dem Höhenruderwinkel  $\delta_H$  für das agile

Flugzeug (aus [27]). Dargestellt sind jeweils mögliche Gleichgewichtszustände bzw. Grenzzyklen bei unterschiedlichen Höhenruderausschlägen. Für  $\Theta > 0$  zeigt Abbildung 4.2 einen Zweig möglicher Gleichgewichtslagen, der über den gesamten Bereich des Höhenruderausschlags instabil ist. Ein zweiter Bereich möglicher Gleichgewichtslagen existiert im negativen Nickwinkelbereich. Hier sind die Gleichgewichtslagen größtenteils stabil, nur im mittleren Höhenrudewinkelbereich existiert ein Abschnitt auf dem die Gleichgewichtslagen instabil sind. In allen betrachteten Gleichgewichtslagen besitzt das agile Flugzeug jeweils einen reellen und zwei komplex konjugierte Eigenwerte und somit eine aperiodische und eine oszillierende Bewegungsform. Die Instabilität einer der beiden Bewegungsformen

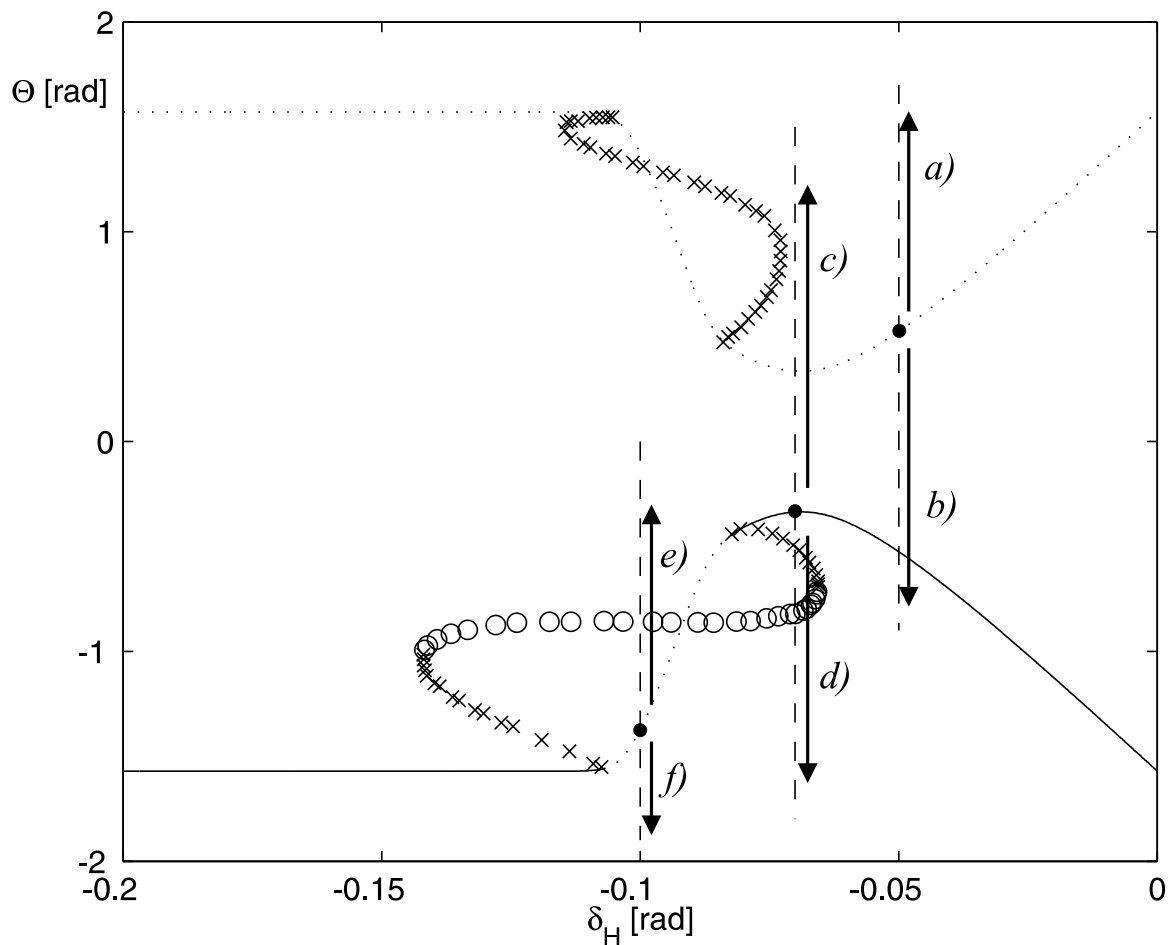


Abbildung 4.2: Bifurkationsdiagramm des Nickwinkels  $\Theta$  für das agile Flugzeug nach [27] (— stabiles Gleichgewicht,  $\cdots$  instabiles Gleichgewicht,  $\circ$  stabiler Grenzzyklus,  $\times$  instabiler Grenzzyklus)

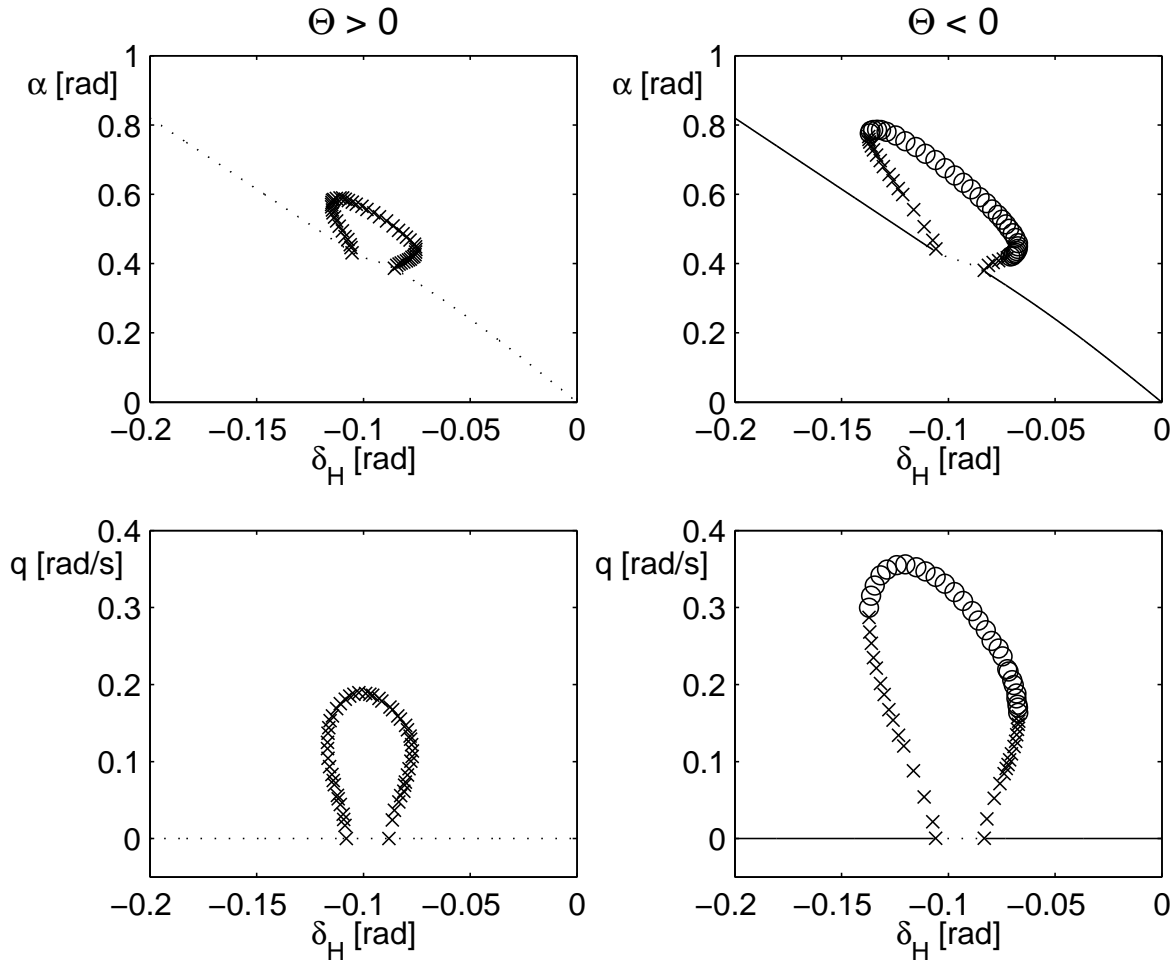


Abbildung 4.3: Bifurkationsdiagramm des Anstellwinkels  $\alpha$  und der Nickrate  $q$  für das agile Flugzeug nach [27] (— stabiles Gleichgewicht,  $\cdots$  instabiles Gleichgewicht,  $\circ$  stabiler Grenzzyklus,  $\times$  instabiler Grenzzyklus)

genügt dabei, um die Gesamtbewegung des agilen Flugzeuges zu destabilisieren.

Zusätzlich zu den zwei möglichen Gleichgewichtslagen existieren bei mittleren Höhenruderausschlägen noch Grenzzyklen, in denen das System schwingen kann. Diese sind in den Bifurkationsdiagrammen entsprechend der üblichen Notation durch Markierung eines der beiden Maximalwerte des Schwingungsausschlages gekennzeichnet und zwar jeweils bei stabilen Grenzzyklen durch Kreise und bei instabilen Grenzzyklen durch Kreuze.

Die nichtlineare Analyse des Systems wird im Folgenden an drei charakteristischen

Schnitten in je zwei Richtungen durchgeführt, entsprechend der Bezeichnungen **a)** - **f)** in Abbildung 4.2.

### Analyse **a)**

Die erste Analyse erfolgt bei einem Höhenruderwinkel von  $-0.05 \text{ rad}$  auf dem instabilen Zweig ( $\Theta > 0$ ). Tabelle 4.2 fasst die Zustandsgrößen und Eigenwerte an diesem Gleichgewichtspunkt zusammen. Betrachtet man die Eigenwerte, so zeigt sich, dass das agile Flugzeug in dieser Modellierung mit seinem dynamischen Verhalten nicht den üblichen Flugeigenschaftsanforderungen [30] genügt. In der Praxis müsste das Verhalten durch ein Regelungssystem angepasst werden. Der positive, reelle Eigenwert bestimmt mit der zugehörigen instabilen und aperiodischen Bewegungsform das Stabilitätsverhalten des Systems. Die Kenngrößenverläufe dieser aperiodischen Bewegungsform über der Auslenkungsamplitude des Nickwinkels in Richtung steigender  $\Delta\Theta$ -Werte sind in Abbildung 4.4 aufgetragen. Der positive Eigenwert nimmt bei zunehmenden  $\Delta\Theta$  zunächst zu, um dann nach Erreichen eines lokalen Maximums wieder abzunehmen, bis er bei  $\Delta\Theta = 5.234 \text{ rad}$  zu Null wird. Ein  $\Delta\Theta$  von  $5.234 \text{ rad}$  entspricht bei einer Ausgangslage von  $\Theta = 0.5246 \text{ rad}$  aufgrund der Periodizität der Eulerwinkel einem  $\Theta$  von  $-0.5246 \text{ rad}$ , und damit der stabilen Gleichgewichtslage im Bifurkationsdiagramm. Auslenkungen über die stabile Gleichgewichtslage hinaus führen wieder auf diese Gleichgewichtslage zurück, so dass die Bewegung bezüglich der Ausgangslage stabil wird. Anschaulich entspricht die Bewegung einem Überkippen des sich zunächst im Steigflug befindenden Flugzeugs nach hinten über die Rückenlage hinaus, bis es sich in einem stabilen Sinkflug wiederfindet. Die Zeitverläufe in Abbildung 4.5 geben dieses Verhalten wieder. Nach einer Anfangsstörung nehmen die Auslenkungen von Anstellwinkel, Nickwinkel und Nickrate zunächst schnell zu, um dann nach einiger Zeit gegen die neue, stabile Gleichgewichtslage zu streben.

Gleichgewichtspunkt		Eigenwerte	
$\alpha$	$0.2401 \text{ rad}$	$-0.0875 + 0.9457i$	
$\Theta$	$0.5246 \text{ rad}$	$-0.0875 - 0.9457i$	
$q$	$0 \text{ rad/s}$	0.0189	

Tabelle 4.2: Zustandsgrößen und Eigenwerte des agilen Flugzeugs,  $\delta_H = -0.05 \text{ rad}$ , Analysen **a)** u. **b)**

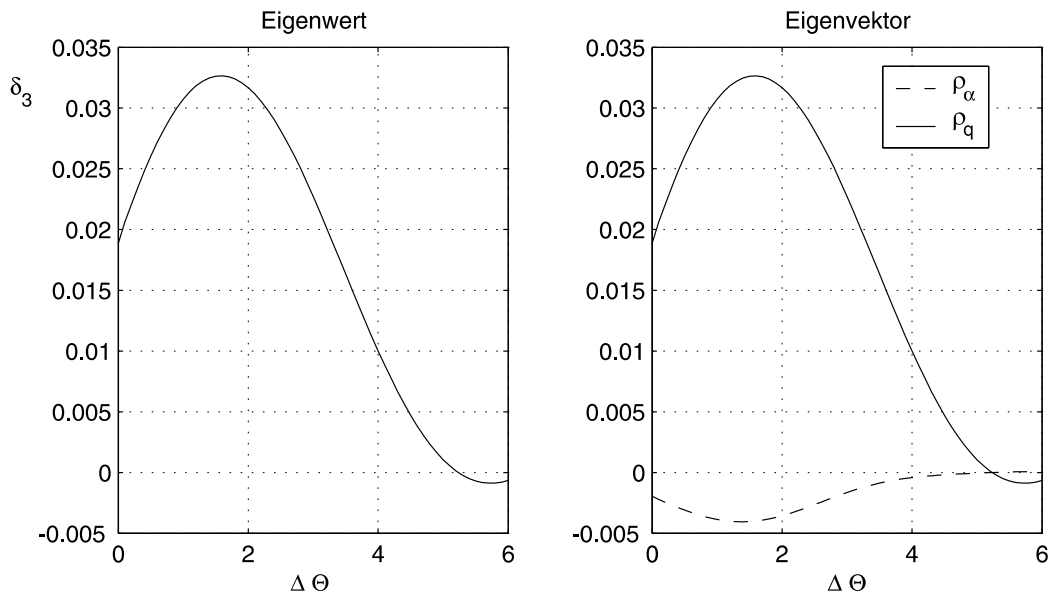


Abbildung 4.4: Eigenwert- und Eigenvektorverl. der aperiodischen Bewegungsform des agilen Flugzeuges bei  $\delta_H = -0.05$  [rad], Analyse a)

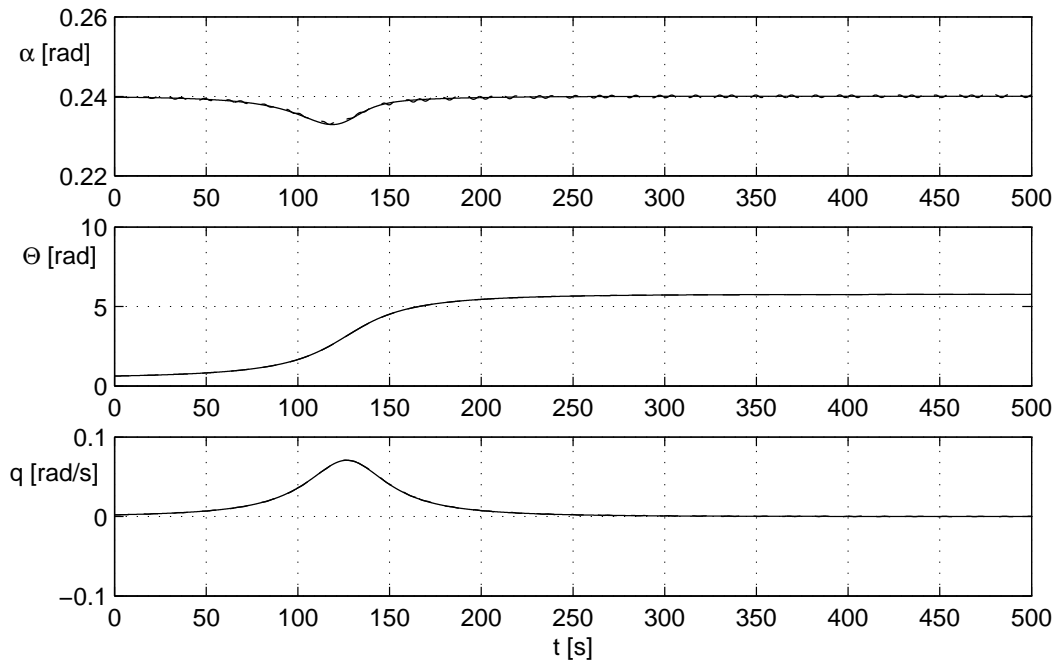


Abbildung 4.5: Zeitverläufe der Zustandsgrößen des agilen Flugzeuges bei  $\delta_H = -0.05$  [rad], Analyse a) (— ASTAN, - - - RKF)

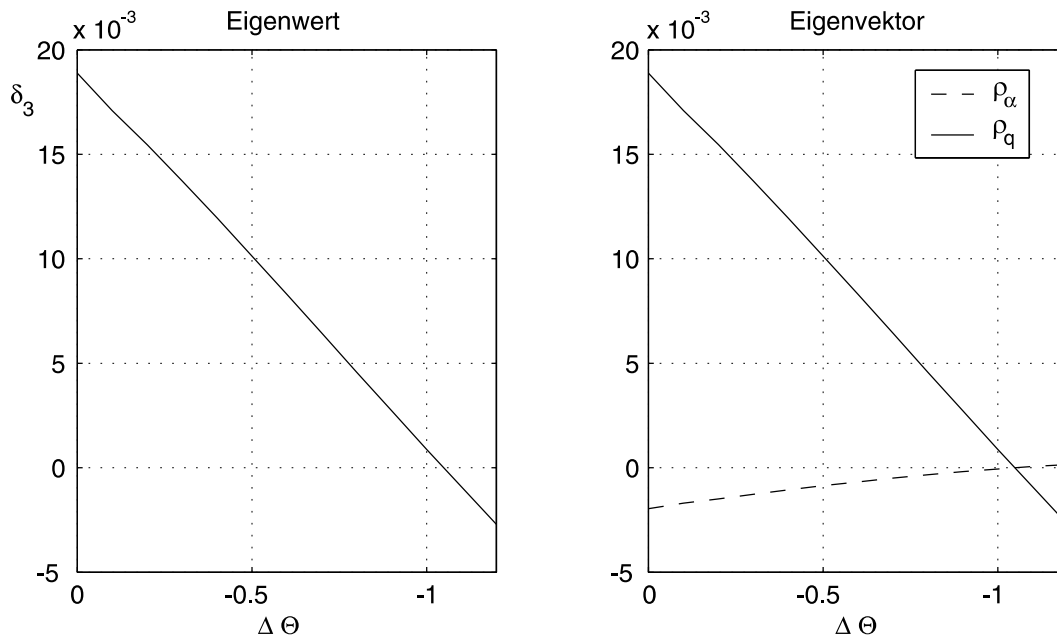


Abbildung 4.6: Eigenwert- und Eigenvektorverl. der aperiodischen Bewegungsform des agilen Flugzeuges bei  $\delta_H = -0.05$  [rad], Analyse b)

### Analyse b)

Die Analyse in negativer  $\Delta\Theta$ -Richtung ergibt ein ähnliches Bild wie Analyse a) (Abbildung 4.6). Hier kann allerdings der kürzere Weg zur stabilen Gleichgewichtslage genommen werden, so dass der Eigenwert der instabilen Bewegungsform schon bei  $\Delta\Theta = -1.05$  rad erreicht wird. Das Flugzeug verlässt also den instabilen Steigflug mit einer Nickbewegung nach vorne, um sich im stabilen Sinkflug wiederzufinden. Der Zeitverlauf dieser Bewegung ist in Abbildung 4.7 dargestellt.

### Analyse c)

Die Analysen c) und d) gehen von dem stabilen Gleichgewichtspunkt bei  $\delta_H = -0.07$  rad aus. Die zugehörigen Zustandsgrößen und Eigenwerte sind in Tabelle 4.3 aufgeführt. Analyse c) untersucht die stabile aperiodische Bewegungsform in Richtung positiver  $\Delta\Theta$ -Werte. Die Kenngrößenverläufe sind in Abbildung 4.8 dargestellt. Der Betrag des negativen Eigenwertes nimmt darin mit zunehmender Nickwinkelauslenkung ab, bis er bei  $\Delta\Theta = 0.67$  rad zu Null wird. Bei dieser Auslenkung wird der instabile Zweig im Bifurkationsdiagramm erreicht, so dass eine Auslenkung über diesen Wert hinaus bezüglich der Ausgangslage zu instabilem Verhalten führt. Entsprechend nimmt der Eigenwert bei

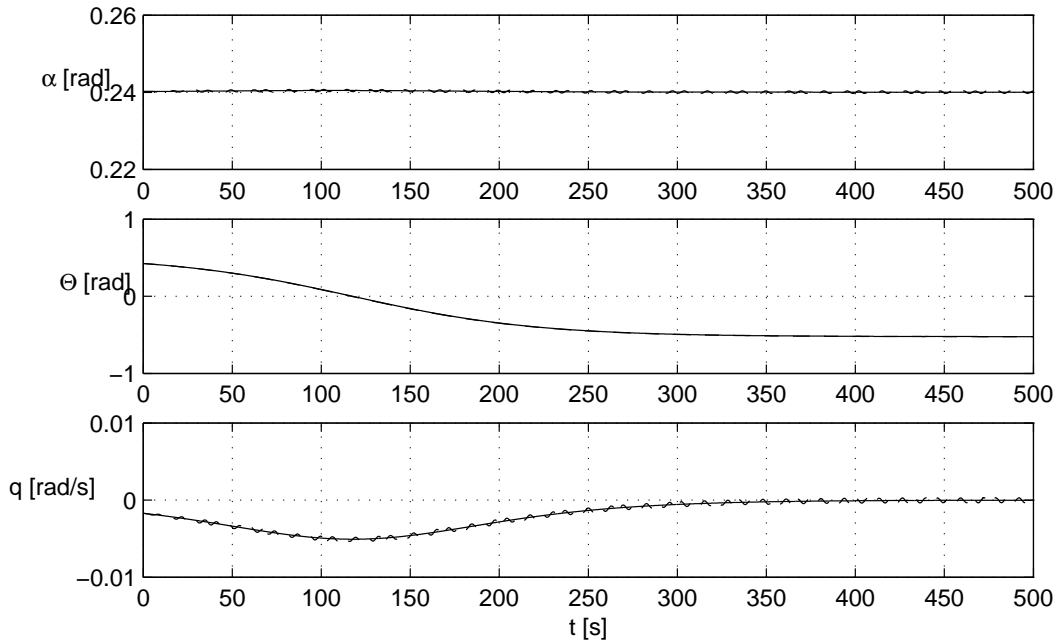


Abbildung 4.7: Zeitverläufe der Zustandsgrößen des agilen Flugzeuges bei  $\delta_H = -0.05 [rad]$ , Analyse b) (— ASTAN, - - - RKF)

weiterer Auslenkung einen positiven Wert an, der erst bei  $\Delta\Theta = 2\pi rad$  wieder zu Null wird. Eine Nickwinkelauslenkung von  $2\pi rad$  entspricht einer vollen Drehung um die y-Achse des Flugzeuges, so dass ab hier analog zu einer Auslenkung  $\Delta\Theta < 0.67 rad$  wieder ein stabiles Verhalten vorliegt. Im Zeitbereich verhalten sich die Zustandsgrößen für Anfangsauslenkungen  $\Delta\Theta < 0.67 rad$  analog zu den Zeitverläufen der Analyse b) und für Anfangsauslenkungen  $\Delta\Theta > 0.67 rad$  analog zu den Zeitverläufen der Analyse a).

Gleichgewichtspunkt		Eigenwerte	
$\alpha$	$0.3253 rad$	$-0.0361 + 0.9602i$	
$\Theta$	$-0.3358 rad$	$-0.0361 - 0.9602i$	
$q$	$0 rad/s$	$-0.0126$	

Tabelle 4.3: Zustandsgrößen und Eigenwerte des agilen Flugzeuges,  $\delta_H = -0.07 rad$ , Analysen c) u. d)

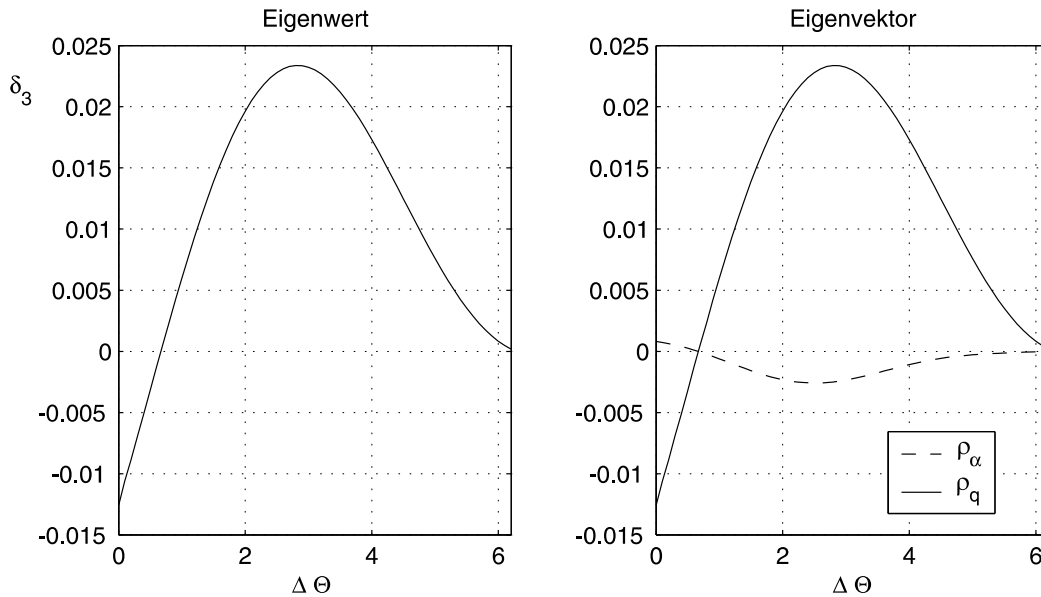


Abbildung 4.8: Eigenwert- und Eigenvektorverl. der aperiodischen Bewegungsform des agilen Flugzeuges bei  $\delta_H = -0.07$  [rad], Analyse c)

#### Analyse d)

Abbildung 4.9 gibt den Kenngrößenverlauf für Analyse d) wieder. Untersucht wurde hier die oszillierende Bewegungsform in Richtung negativer Nickwinkelauslenkungen. Bei zunehmender Auslenkungsamplitude  $\Delta\Theta$  nimmt die Größe des negativen Realteils des Eigenwertes zunächst ab. Bei  $\Delta\Theta \approx -0.14$  rad und  $\delta_1 \approx -0.006$  dreht sich diese Tendenz jedoch um, so dass der Betrag des Realteils des Eigenwertes bei weiterer Zunahme der Auslenkungsamplitude zunächst wieder zunimmt. Dieser Umkehrpunkt fällt in die Nähe der Position des instabilen Grenzzyklusses im Bifurkationsdiagramm. Die Auslenkung führt das System in die Nachbarschaft des instabilen Grenzzyklusses, wobei die Stabilität der um die stabile Gleichgewichtslage oszillierenden Bewegungsform verringert wird. Eine weitere Vergrößerung der Auslenkungsamplitude führt schließlich wieder weg von der Nachbarschaft des instabilen Grenzzyklusses und somit zu größeren Werten des negativen Realteils des Eigenwertes.

Die Abbildungen 4.10 und 4.11 zeigen die Zustandsgrößenverläufe bei Anfangsamplituden von  $\Delta\Theta = -0.1$  bzw.  $-1.0$  rad. Bei einer Auslenkungsamplitude von  $-0.1$  rad, also noch "innerhalb" des instabilen Grenzzyklusses, zeigen sowohl die aus der Analyse rekonstruierten Zeitverläufe, als auch die aus der direkten Integration gewonnenen Zeitverläufe

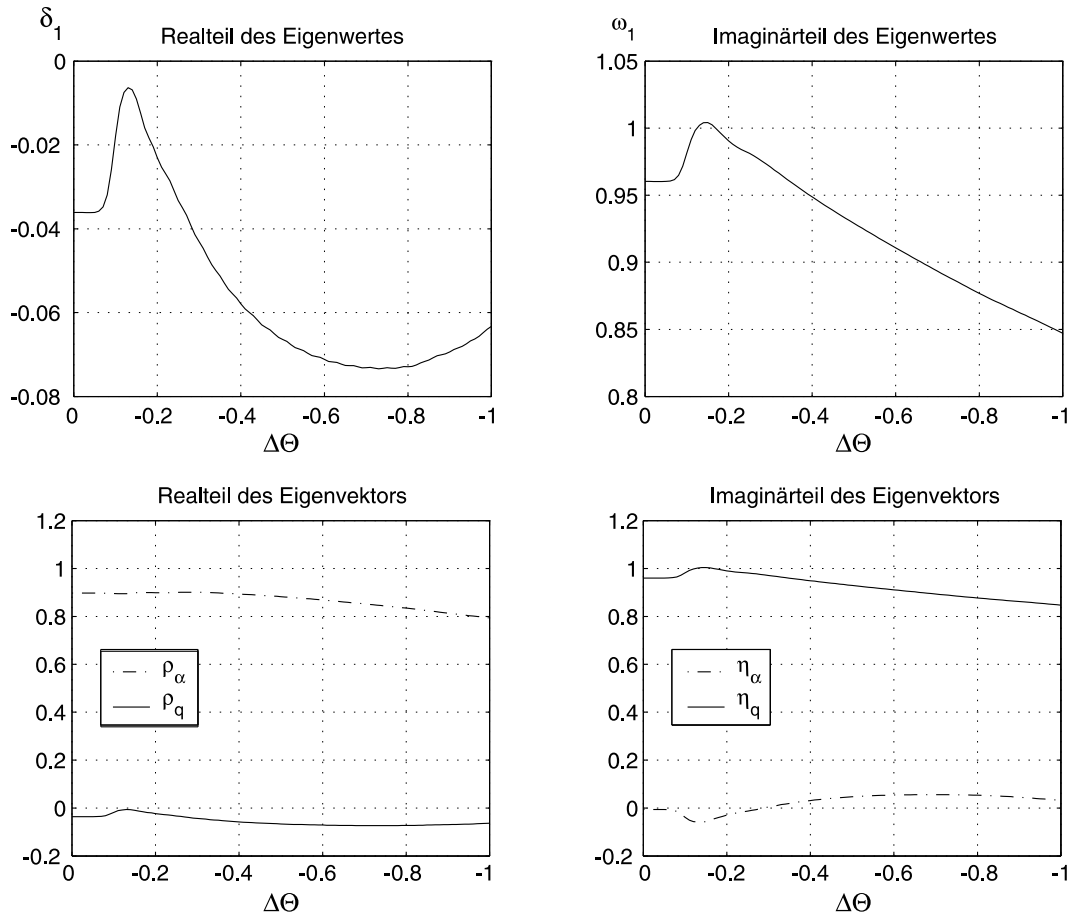


Abbildung 4.9: Eigenwert- und Eigenvektorverl. der oszillierenden Bewegungsform des agilen Flugzeuges bei  $\delta_H = -0.07 [rad]$ , Analyse d)

das bei einer Bewegungsform mit negativem Realteil des Eigenwertes zu erwartende Verhalten. Die Auslenkungsamplitude nimmt schnell ab und das System findet sich nach kurzer Zeit in der stabilen Gleichgewichtslage wieder (Abbildung 4.10). Anders sieht dies bei einer Anfangsauslenkungsamplitude von  $\Delta\Theta = -1.0 rad$  aus. Da der Eigenwert in Abbildung 4.9 bis zu dieser Auslenkungsamplitude vollständig im negativen Bereich liegt wäre auch hier ein Abklingen der Schwingung bis auf die Gleichgewichtslage zu erwarten. Tatsächlich zeigen die aus der Analyse rekonstruierten Zeitverläufe auch dieses Verhalten (Abbildung 4.11). Die direkte Integration (RKF) der Bewegungsgleichungen mit den gleichen Anfangsbedingungen zeigt jedoch ein anderes Bild. Nachdem die Amplitude der Ausgangsschwingung zunächst analog zu Abbildung 4.10 abnimmt, endet die Bewegung bei der direkten Integration nicht auf der stabilen Gleichgewichtslage, sondern auf dem

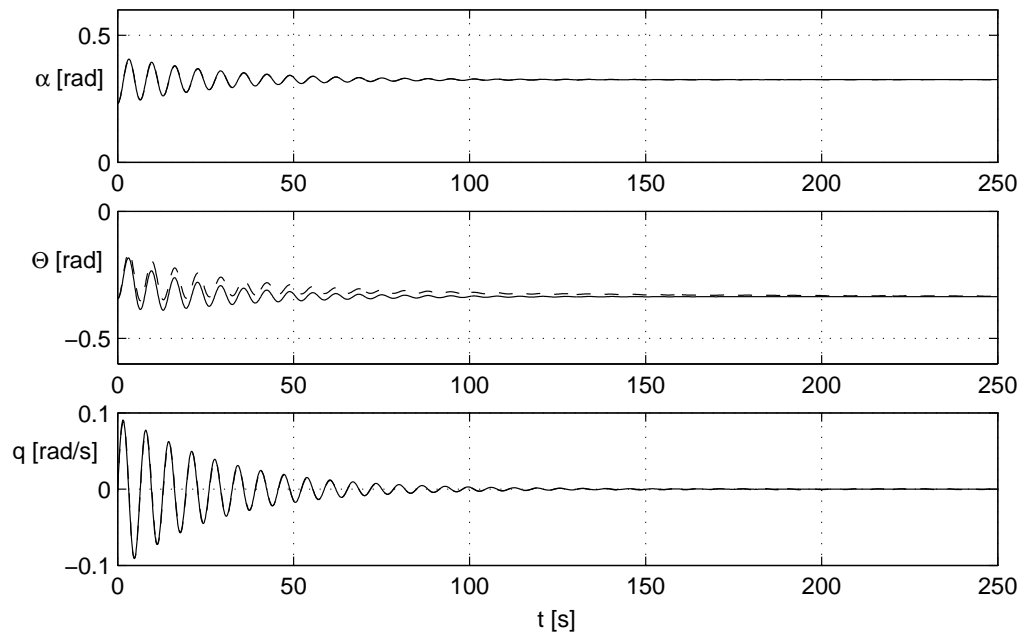


Abbildung 4.10: Zeitverl. der Zustandsgrößen des agilen Flugz. bei  $\delta_H = -0.07$  [rad], Analyse *d*), Anfangsampl.  $\Delta\Theta = -0.1$  (— ASTAN, - - - RKF)

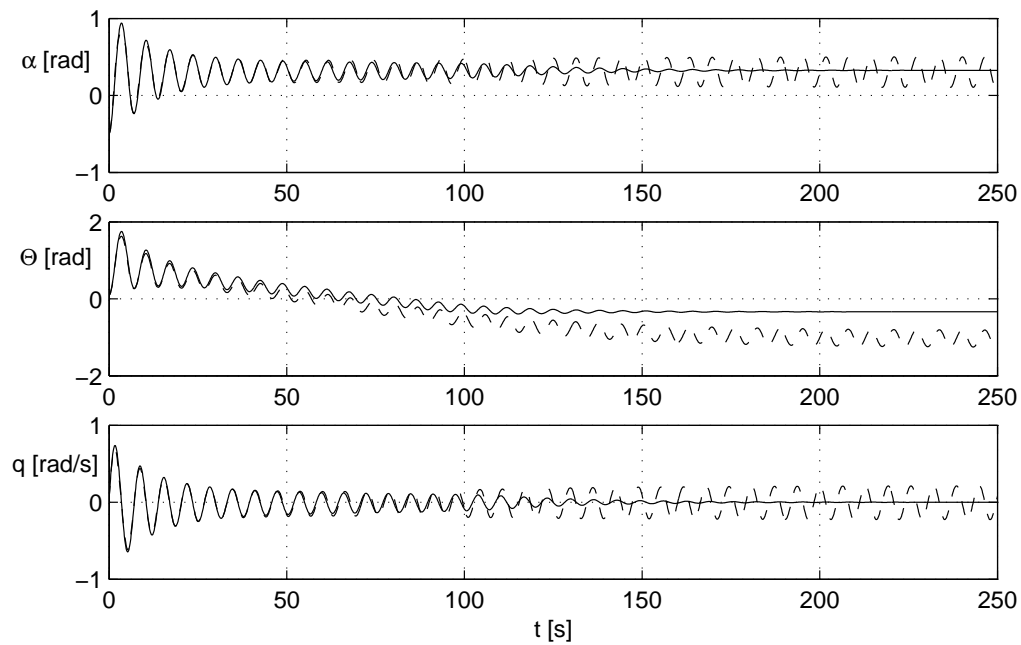


Abbildung 4.11: Zeitverl. der Zustandsgrößen des agilen Flugz. bei  $\delta_H = -0.07$  [rad], Analyse *d*), Anfangsampl.  $\Delta\Theta = -1.0$  (— ASTAN, - - - RKF)

im Bifurkationsdiagramm durch Kreise markierten stabilen Grenzyklus. Dieses Verhalten kann dadurch erklärt werden, dass sich das System bei der Integration aufgrund von Rechenungenauigkeiten und Ungenauigkeiten in den Anfangsbedingung nicht mehr exakt auf der analysierten Bewegungsform befindet. Bei der Nähe zu dem instabilen Grenzyklus im Bereich der von  $\Delta\Theta \approx -0.14 \text{ rad}$  und der dort selbst auf der exakten Bewegungsform marginalen Stabilität mit  $\delta_1 \approx -0.006$  kann es so zu einer Anfachung des instabilen Grenzyklusses kommen. Bei Auslenkungsamplituden die größer sind als die Amplitude des instabilen Grenzyklusses endet die Bewegung dann auf dem stabilen Grenzyklus (Abbildung 4.11). Für Auslenkungen die kleiner sind als die Amplitude des instabilen Grenzyklusses endet die Bewegungsform im stabilen Gleichgewicht (Abbildung 4.10).

### Analyse e)

Für die Analysen e) und f) wurde der instabile Gleichgewichtspunkt bei  $\delta_H = -0.1 \text{ rad}$  gewählt. Tabelle 4.4 fasst die zugehörigen Eigenwerte und Zustandsgrößen zusammen. An diesem Gleichgewichtspunkt besitzt das System eine instabile Eigenschwingung und eine stabile aperiodische Eigenform. Analyse e) untersucht die Stabilität der instabilen Schwingungsform an diesem Punkt in Richtung positiver  $\Delta\Theta$ -Auslenkungen (Abbildung 4.12). Der zunächst positive Realteil des Eigenwertes nimmt mit zunehmender Auslenkungsamplitude ab, bis er bei  $\Delta\Theta \approx 0.36$  zu Null wird. Ein verschwindender Realteil des Eigenwertes bedeutet allerdings wegen  $\frac{d(\Delta\Theta)}{dt} = \delta \cdot \Delta\Theta$  (Kap. 2), dass sich die Schwingungsamplitude  $\Delta\Theta$  im Zeitverlauf nicht weiter ändern kann, d.h. die instabile Bewegung muss hier in einen stabilen Grenzyklus münden. Dieser stabile Grenzyklus entspricht dem im Bifurkationsdiagramm (Abbildung 4.2) eingetragenen Grenzyklus oberhalb des betrachteten Gleichgewichtszustandes. Die Zeitverläufe der Zustandsgrößen in Abbildung 4.13 ergeben das gleiche Bild. Die zunächst schnell anwachsende Amplitude der Schwingung nimmt nach Erreichen der Grenzyklusamplitude nicht weiter zu.

Gleichgewichtspunkt		Eigenwerte	
$\alpha$	$0.4179 \text{ rad}$	$0.3217 + 1.2196i$	
$\Theta$	$-1.3735 \text{ rad}$	$0.3217 + 1.2196i$	
$q$	$0 \text{ rad/s}$	$-0.0381$	

Tabelle 4.4: Zustandsgrößen und Eigenwerte des agilen Flugzeuges,  $\delta_H = -0.1 \text{ rad}$ , Analysen e) u. f)

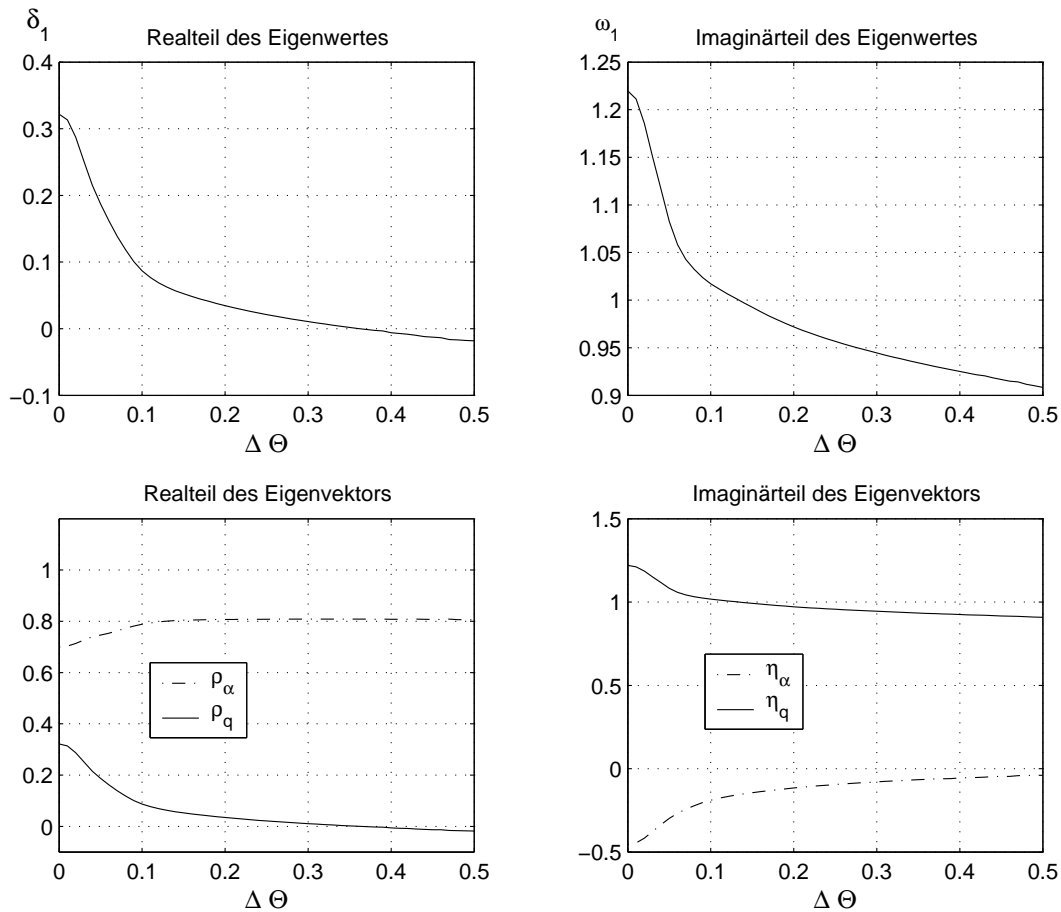


Abbildung 4.12: Eigenwert- und Eigenvektorverl. der oszillierenden Bewegungsform des agilen Flugzeuges bei  $\delta_H = -0.1$  [rad], Analyse e)

### Analyse f)

Bei der letzten Analyse wird der Gleichgewichtspunkt in Richtung negativer  $\Delta\Theta$  Auslenkungen untersucht. Dabei werden sowohl die oszillierende Bewegungsform, als auch die aperiodische Bewegungsform untersucht, deren Ergebnisse im Folgenden mit  $f_1$ ) bzw.  $f_2$ ) gekennzeichnet sind. Abbildung 4.14 zeigt den Kenngrößenverlauf für die oszillierende Bewegungsform. Das Ergebnis ist sehr ähnlich zur Analyse e), der zunächst positive Realtteil des Eigenwertes nimmt schnell ab, um in diesem Fall bei  $\Delta\Theta \approx -0.32$  zu Null zu werden. An dieser Stelle wird ebenfalls ein stabiler Grenzyklus erreicht, welcher dem aus Analyse e) entspricht. Der stabile Grenzyklus ist im Bifurkationsdiagramm der üblichen Notation entsprechend nur mit einem Extremwert der Schwingung eingetragen. Analyse

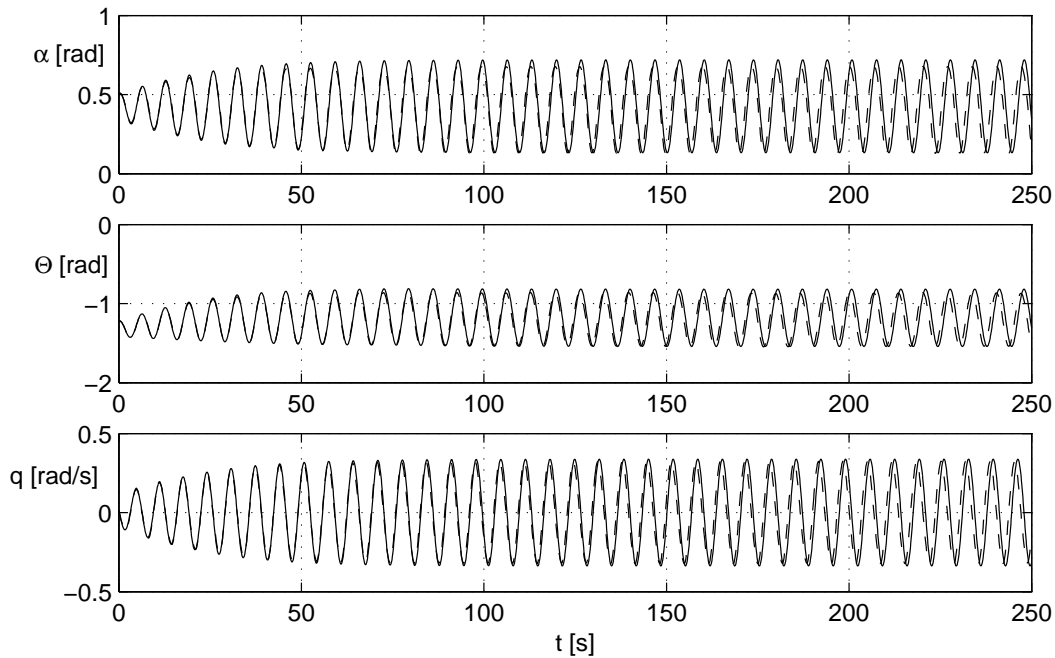


Abbildung 4.13: Zeitverläufe der Zustandsgrößen des agilen Flugzeuges bei  $\delta_H = -0.1$  [rad], Analyse e) (— ASTAN, - - - RKF)

$f_1$ ) zeigt, dass der andere Extremwert unterhalb des instabilen Gleichgewichtspunktes im Bifurkationsdiagramm liegt. Die Zeitverläufe der Zustandsgrößen ergeben ein Bild analog zu Analyse e) (Abbildung 4.13).

Abbildung 4.15 gibt schließlich den Kenngrößenverlauf der aperiodischen Bewegungsform  $f_2$ ) für den betrachteten Gleichgewichtspunkt wieder. Die Absolutänderung des Realteils des Eigenvektors ist gering, wobei die Bewegungsform über dem gesamten Auslenkungsbereich stabil ist. Die Rekonstruktion der Zeitverläufe aus den Analyseergebnissen zeigt ein entsprechend stabiles Verhalten (Abbildung 4.16). Die Anfangsauslenkung wird schnell auf die Gleichgewichtslage zurückgeführt. Bei der direkten Integration der Bewegungsgleichungen zeigt sich hingegen der instabile Charakter der Gesamtbewegung. Kleine Ungenauigkeiten und Rundungsfehler bei der Integration regen schnell die instabile Schwingungsbewegung des Flugzeuges an. Dadurch entsteht eine angefachte Schwingung, deren Amplitude solange zunimmt, bis analog zur Analyse  $f_1$ ) die Amplitude des stabilen Grenzyklusses erreicht wird.

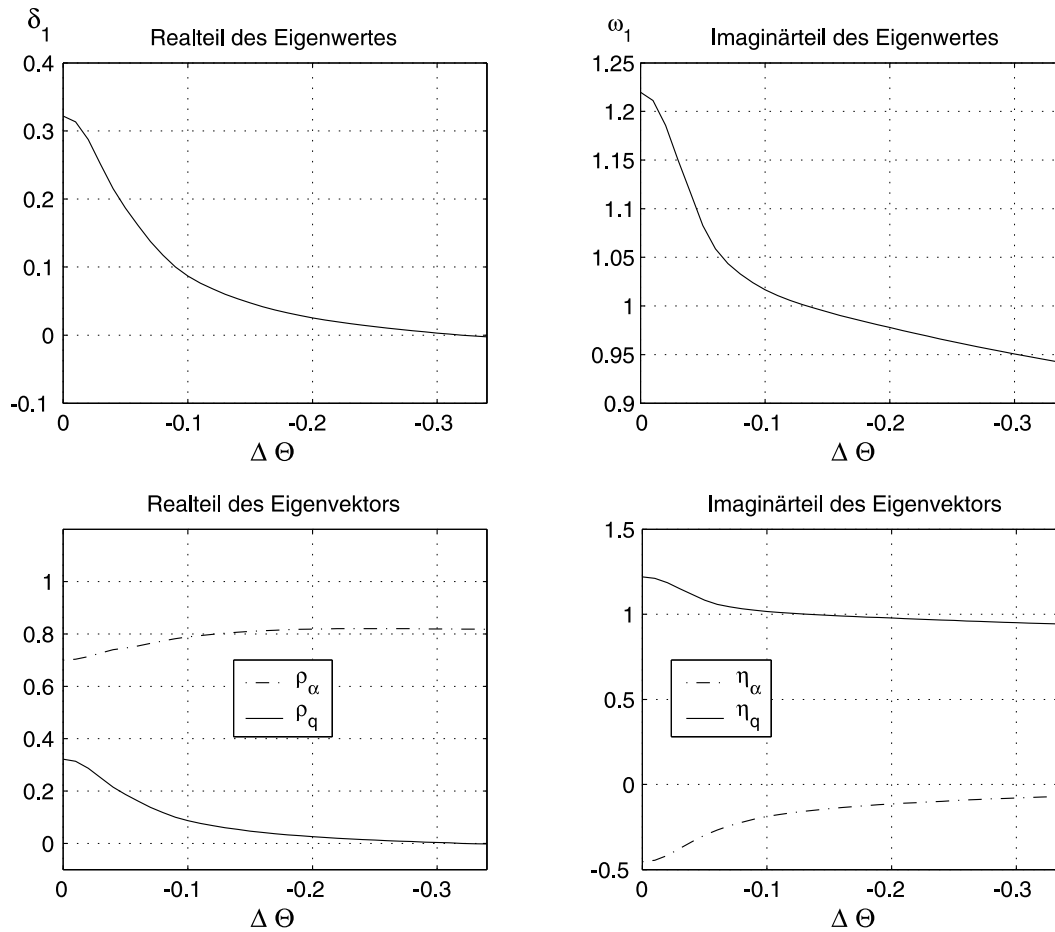


Abbildung 4.14: Eigenwert- und Eigenvektorverl. der oszillierenden Bewegungsform des agilen Flugzeuges bei  $\delta_H = -0.1$  [rad], Analyse  $f_1$ )

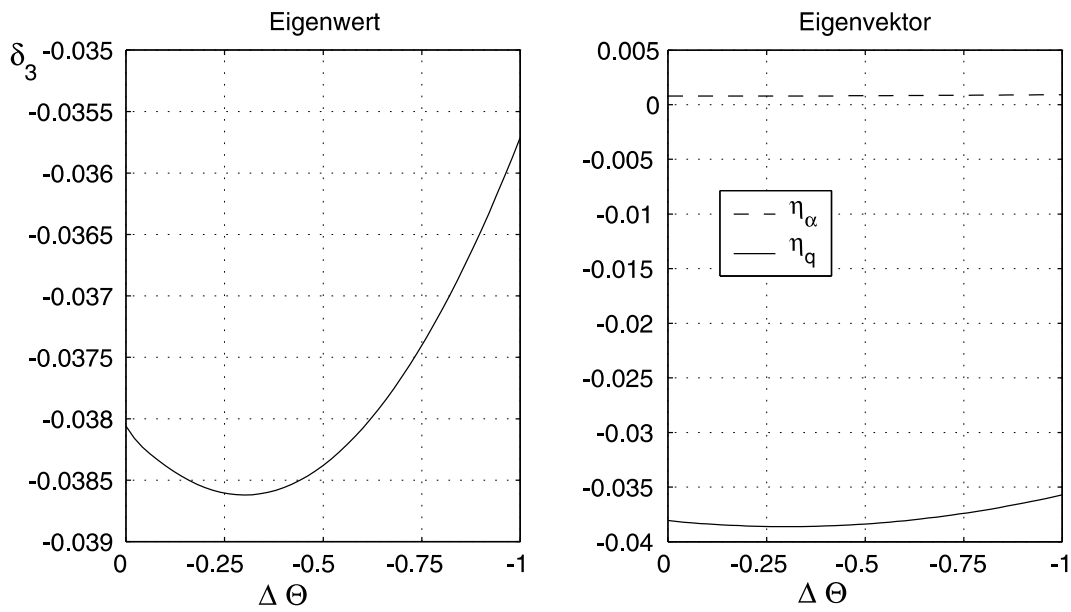


Abbildung 4.15: Eigenwert- und Eigenvektorverl. der aperiodischen Bewegungsform des agilen Flugzeuges bei  $\delta_H = -0.1$  [rad], Analyse  $f_2$ )

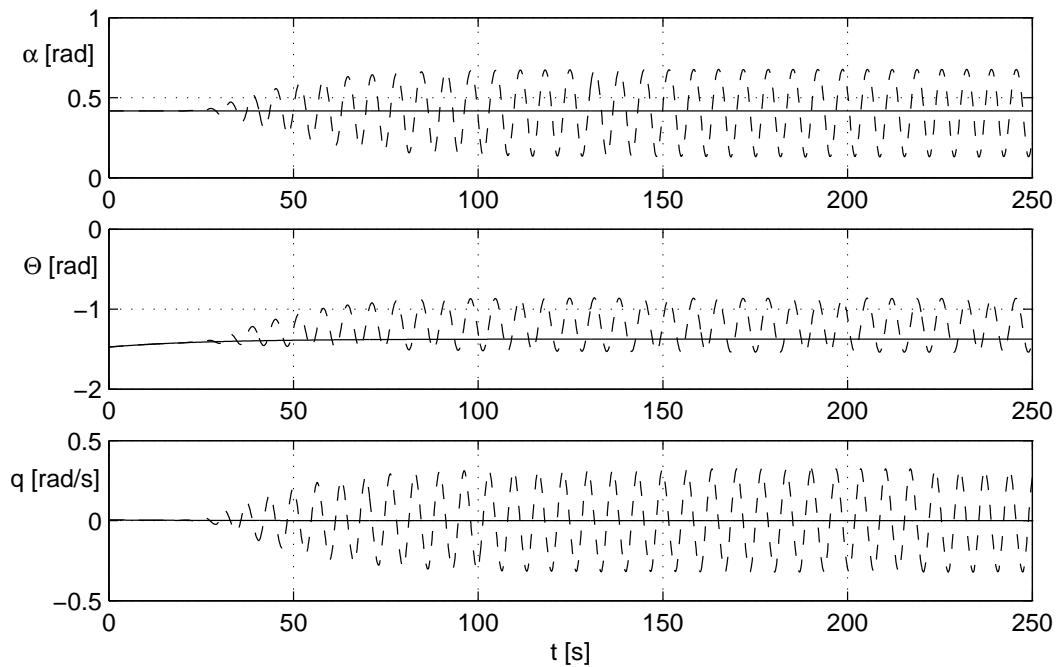


Abbildung 4.16: Zeitverläufe der Zustandsgrößen des agilen Flugzeuges bei  $\delta_H = -0.1$  [rad], Analyse  $f_2$ ) (— ASTAN, - - - RKF)

## 5 Flexibles Flugzeug

Kapitel 5 behandelt die Modellierung und Analyse eines Großflugzeuges mit flexiblen Flügelfreiheitsgraden. Nach einer kurzen Übersicht über geeignete Modellierungsverfahren wird die Herleitung der gekoppelten Struktur- und Starrkörperbewegungsgleichungen mit Hilfe der Lagrange'schen Methode, sowie die Ermittlung der generalisierten Kräfte und Momente über ein einfaches aerodynamisches Modell beschrieben. Daran schließt sich die Vorstellung der untersuchten Konfiguration und der damit gewonnenen Analyseergebnisse an.

### 5.1 Modellierung

#### 5.1.1 Methoden zur Modellierung flexibler Flugzeuge

Zur Aufstellung von Bewegungsgleichungen für elastische Flugzeuge finden sich zahlreiche Veröffentlichungen ([31, 38, 43, 51, 52, 53] etc.). Für die Anwendung im Bereich der Flugdynamik, Simulation und Regelung ergeben sich allerdings einige besondere Anforderungen an die Modellierung. Die Bewegungsgleichungen müssen große Manöverauslenkungen des Gesamtflugzeuges im körperfesten Koordinatensystem und gleichzeitig kleine Auslenkungen der elastischen Verformung gut wiedergeben können. Dies bedeutet, dass das Modell nichtlinear bezüglich der Festkörperbewegung sein muss, aber eine lineare Beschreibung der strukturellen Verformung zulassen sollte. Außerdem müssen die Gleichungen der inertialen und aerodynamischen Kopplung zwischen Struktur- und Flugdynamik Rechnung tragen.

In den Arbeiten von Waszak und Schmidt [51, 41, 53] und von Buttrill, Zeiler und Arbuckle [7, 52] werden jeweils Bewegungsgleichungen entwickelt, die diesen Anforderungen genügen. Beide Studien verwenden dazu die Lagrangesche Methode zur Ableitung der Bewegungsgleichungen relativ zu einem "mittleren Koordinatensystem". Die Verwendung des mittleren Koordinatensystems minimiert dabei den Grad der inertialen Kopplung zwischen den Starrkörperfreiheitsgraden und den elastischen Freiheitsgraden. Die Bewegungsgleichungen der Waszak-Schmidt-Studie besitzen daher, unter Verwendung einiger Vereinfachungen, eine den reinen Starrkörperbewegungsgleichungen sehr ähnliche

Struktur, zuzüglich der hinzugekommenen Freiheitsgrade der elastischen Bewegung. Diese Gleichungen haben zudem den Vorteil, dass die geringe noch vorhandene inertielle Kopplung zwischen den Starrkörperfreiheitsgraden und den elastischen Freiheitsgraden vollständig verschwindet und so die gesamte Kopplung ausschließlich durch die aerodynamischen Kräfte entsteht. Die Buttrill-Zeiler-Arbuckle-Studie hingegen hat zum Ziel, auch Effekte der exakten inertialen Kopplung zwischen den Festkörperdrehraten und den Strukturdeformationen und ihren Raten zu berücksichtigen. Daher verzichtet sie auf die Nähe zu den Starrkörperbewegungsgleichungen und erweitert die Gleichungen der rotatorischen Festkörperfreiheitsgrade um zusätzliche Kopplungsterme, welche die Variation des Trägheitstensors durch die Strukturdeformation und Kopplungen zweiter Ordnung berücksichtigen. Die Gleichungen der elastischen Bewegungsform haben ebenfalls zusätzliche Terme, assoziiert mit der Winkelbeschleunigung des körperfesten Koordinatensystems, der Coriolisbeschleunigung und der zentrifugalen Last. Eine Vernachlässigung dieser zusätzlichen Terme führt auf die gleichen Bewegungsgleichungen wie die Waszak-Schmidt-Studie. Es konnte gezeigt werden, dass eine exakte Berücksichtigung der inertialen Kopplung dann sinnvoll werden kann, wenn die aerodynamischen Lasten klein sind, die Starrkörperdrehraten von gleicher Größenordnung wie die elastischen Frequenzen sind und die Modellgeometrie ausreichend komplex ist, damit Querverformungen zu einer Veränderung der Massenverteilung führen.

Aufgrund der Anschaulichkeit und Nähe zu den Starrkörperbewegungsgleichungen wurde das Modell des elastischen Flugzeuges in dieser Arbeit mit der Waszak-Schmidt-Methode entwickelt. Insbesondere das Aufstellen der aerodynamischen Kräfte bereitet bei der Modellierung nach Buttrill, Zeiler und Arbuckle erhebliche Schwierigkeiten, ohne dass bei dem hier betrachteten großen Transportflugzeug eine signifikante Verbesserung der Genauigkeit der Modellierung zu erwarten ist.

### 5.1.2 Bewegungsgleichungen

Dynamische Modelle von Flugzeugbewegungen basieren in der Regel auf den Newton-Euler-Bewegungsgleichungen für Starrkörper [6]. Mit diesen Gleichungen kann die Bewegung eines starren Flugzeuges in seinen 3 translatorischen und 3 rotatorischen Freiheitsgraden unter Einfluss von Schubkraft, Luftkräften und Schwerkraft beschrieben werden. Zur Behandlung der Dynamik von flexiblen Flugzeugen müssen diese Gleichungen um den Einfluss der elastischen Bewegung erweitert werden. Dazu wird im Folgenden in Anlehnung an [51], [41] und [52] für die elastische Bewegung angenommen, dass Strukturaußenlenkungen vorliegen, die ausreichend klein sind, um von linearelastischen Steifig-

keiten ausgehen zu können. Dies hat zur Folge, dass die Strukturbewegung durch einen Satz orthogonaler Schwingungsmoden ausgedrückt werden kann. Sind die Schwingungsmoden bekannt (aus einer Modalanalyse der freien Strukturschwingung), so können nach Waszak [51] die kombinierten Starrkörper- und Strukturbewegungsgleichungen nach Aufstellung der Energiegleichungen und Anwendung der Lagrangeschen Gleichung als ein Satz gewöhnlicher Bewegungsdifferentialgleichungen ausgedrückt werden. Die Kopplung der elastischen Freiheitsgrade und der Starrkörperfreiheitsgrade erfolgt dabei, wie nachfolgend dargestellt, über die in den Bewegungsgleichungen enthaltenen generalisierten Kräfte.

### Aufstellung der Energiegleichungen

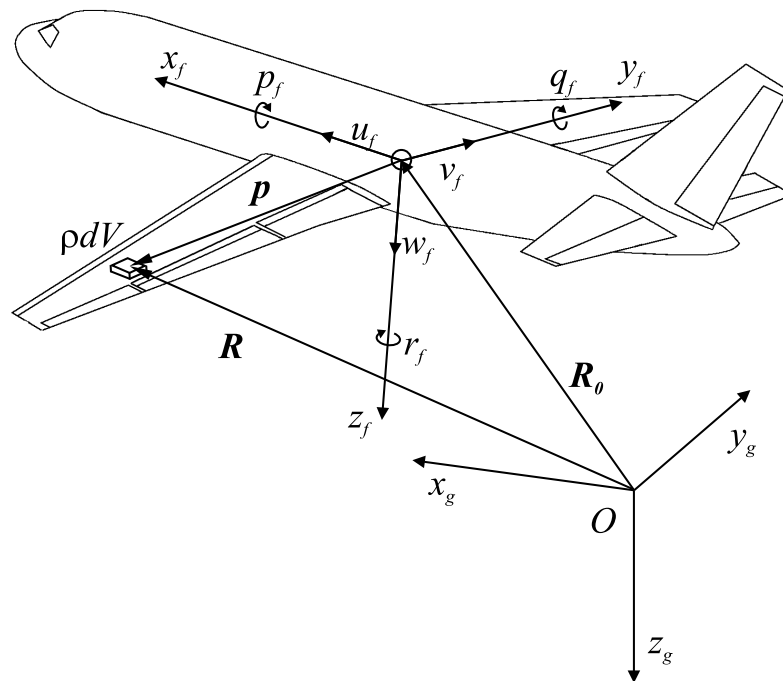


Abbildung 5.1: Flexibles Flugzeug

Abbildung 5.1 zeigt ein frei fliegendes Luftfahrzeug, bestehend aus Massenelementen  $\rho dV$ . Das mitbewegte flugzeugfeste Koordinatensystem  $[x_f, y_f, z_f]$  hat relativ zum iner-

tialen Koordinatensystem  $[x_g, y_g, z_g]$  den Abstand  $\mathbf{R}_0$  und die Drehraten  $[p_f, q_f, r_f]^T = \boldsymbol{\Omega}_f$ . Die (nicht eingezeichneten) Eulerwinkel zwischen den Koordinatensystemen sind die nach Luftfahrtnorm DIN 9300 [12] definierten Roll-, Nick- und Gierwinkel der x-Folge  $[\Phi_f, \Theta_f, \Psi_f]^T = \mathbf{E}_f$ . Die Komponenten der Relativgeschwindigkeit des flugzeugfesten Koordinatensystems zum inertialen System in flugzeugfesten Koordinaten lauten  $[u_f, v_f, w_f]^T = \mathbf{V}_f$ . Im lokalen (flugzeugfesten) Koordinatensystem wird die Position eines Massenelementes  $\rho dV$  mit  $\mathbf{p}$  beschrieben, so dass sich die inertielle Position zu  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{p}$  ergibt. Für die kinetische Energie des Gesamtkörpers gilt damit

$$T = \frac{1}{2} \int_V \frac{d\mathbf{R}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} \rho dV, \quad (5.1)$$

bzw. wenn sich das lokale Koordinatensystem gegenüber dem inertialen System mit der Drehgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\Omega}_f$  dreht, mit

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} + \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^f + \boldsymbol{\Omega}_f \times \mathbf{p} : \quad (5.2)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} + 2 \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} \cdot \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^f + \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^f \cdot \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^f + 2 \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^f \cdot (\boldsymbol{\Omega}_f \times \mathbf{p}) + (\boldsymbol{\Omega}_f \times \mathbf{p}) \cdot (\boldsymbol{\Omega}_f \times \mathbf{p}) + 2(\boldsymbol{\Omega}_f \times \mathbf{p}) \cdot \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} \right\} \rho dV. \quad (5.3)$$

Dabei bezeichnet  $\left( \frac{d(\cdot)}{dt} \right)^f$  die zeitliche Ableitung von  $(\cdot)$  im flugzeugfesten Koordinatensystem.

Die potentielle Energie  $U$  des Flugzeuges setzt sich zusammen aus der potentiellen Energie  $U_g$  im Gravitationsfeld der Erde und der Verzerrungsenergie  $U_e$  der elastischen Verformung. Mit dem Vektor  $\mathbf{g}$  der Gravitationsbeschleunigung lautet der Anteil aus dem Schwerfeld der Erde

$$U_g = - \int_V \mathbf{g} \cdot (\mathbf{R}_0 + \mathbf{p}) \rho dV. \quad (5.4)$$

Die Verzerrungsenergie der elastischen Verformung entspricht der an der Struktur verrichteten Arbeit die nötig ist, um vom unverformten Zustand in den verformten Zustand überzugehen. Führt man gemäß Abbildung 5.2 mit  $\mathbf{p} = \mathbf{s} + \mathbf{e}$  den Vektor  $\mathbf{s}(x_f, y_f, z_f)$  zur unverformten Position des Massenelementes und den Verformungsvektor  $\mathbf{e}(x_f, y_f, z_f, t)$  ein, so lässt sich die Verformungsenergie unter Anwendung des D'Alembertschen Prinzipes und Vernachlässigung der Drehträgheit des Massenelementes zu

$$U_e = - \frac{1}{2} \int_V \left( \frac{d^2 \mathbf{e}}{dt^2} \right)^f \cdot \mathbf{e} \rho dV \quad (5.5)$$

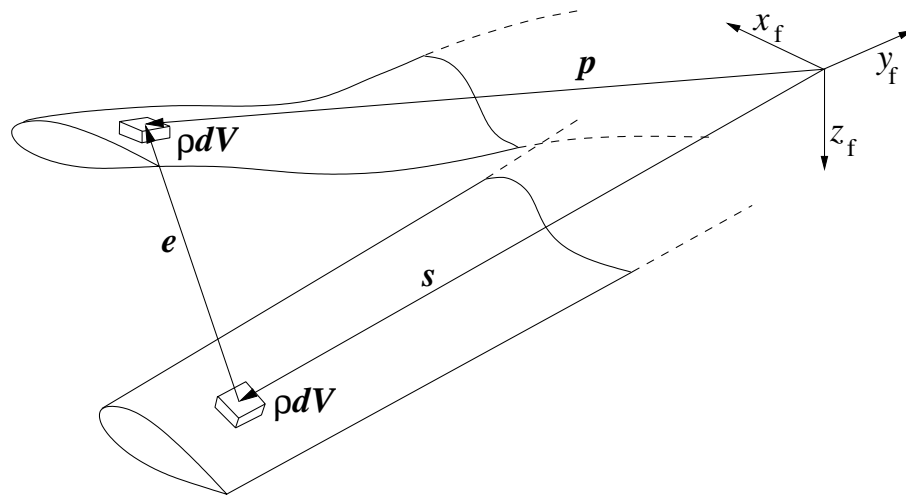


Abbildung 5.2: Verformter und unverformter Zustand

bestimmen.

Durch einen Übergang vom flugzeugfesten Koordinatensystem zu einem speziellen mittleren Koordinatensystem  $(x, y, z)$  (mean axes) nach Milne [31] können die aufgestellten Energiegleichungen vereinfacht werden. Es handelt sich bei diesem mittleren Koordinatensystem um ein mitbewegtes, flugzeugbezogenes Koordinatensystem, welches nicht an einen festen Materiepunkt im Flugzeug gekoppelt ist, sondern dessen Ursprung jeweils mit dem momentanen Schwerpunkt der flexiblen Struktur übereinstimmt. Darüber hinaus ist seine Orientierung so ausgerichtet, dass keine Trägheitskopplung zwischen den Starrkörperfreiheitsgraden und den elastischen Freiheitsgraden auftritt. Diese Anforderungen bedingen, dass die translatorischen und rotatorischen Momente aufgrund der elastischen Deformation im mittleren Koordinatensystem zu jedem Zeitpunkt verschwinden:

$$\int_V \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^m \rho dV = 0 \quad \text{u.} \quad \int_V \mathbf{p} \times \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^m \rho dV = 0. \quad (5.6a,b)$$

Analog zum flugzeugfesten Koordinatensystem bezeichnet hier  $\left( \frac{d(\cdot)}{dt} \right)^m$  die zeitliche Ableitung von  $(\cdot)$  im flugzeugbezogenen, mittleren Koordinatensystem. Die Energiegleichungen und damit auch die Bewegungsgleichungen werden in diesem flugzeugbezogenen Koordinatensystem entwickelt, so dass alle Kräfte und Momente, einschließlich der Trägheitskräfte und -momente ebenfalls in diesem Koordinatensystem bestimmt werden müssen.

Die Bedingungen des mittleren Koordinatensystems vereinfachen die Energieausdrücke erheblich. Mit Gleichung (5.6a) wird die kinetische Energie aus Gleichung (5.3) zu

$$T = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} + \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^m \cdot \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^m + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{p}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{p}) + 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{p}) \cdot \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} \right\} \rho dV. \quad (5.7)$$

Da der Ursprung des mittleren Koordinatensystems stets im Schwerpunkt der Struktur liegt, gilt

$$\int_V \mathbf{p} \rho dV = 0, \quad (5.8)$$

womit die kinetische Energie schließlich zu

$$T = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} + \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^m \cdot \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^m + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{p}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{p}) \right\} \rho dV, \quad (5.9)$$

bzw.

$$T = \frac{1}{2} M \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \int_V \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^m \cdot \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^m \rho dV \quad (5.10)$$

mit dem Trägheitstensor  $\mathbf{I}$  und der Gesamtmasse  $M$  des Flugzeuges wird. Der Trägheitstensor  $\mathbf{I}$  wird hier in Näherung als konstant angenommen, obwohl er aufgrund der Deformation des Flugzeuges eigentlich eine geringe zeitliche Änderung erfährt. Für die potentielle Energie im Gravitationsfeld ergibt sich

$$U_g = -\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{g} \int_V \rho dV - \int_V \mathbf{p} \rho dV = -\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{g} M. \quad (5.11)$$

Die exakten Bedingungen (5.6a,b) des mittleren Koordinatensystems erweisen sich in der Praxis oft als schwierig zu erfüllen. Waszak [51] schlägt daher vor, einige Annahmen zur Vereinfachung zu machen. In Gleichung (5.6a,b) wird  $\mathbf{p}$  wieder aufgeteilt in seinen undeformierten Anteil  $\mathbf{s}$  und deformierten Anteil  $\mathbf{e}$ . Da der undeformierte Anteil zeitlich invariant ist, werden die Gleichungen (5.6a,b) zu

$$\int_V \left( \frac{d\mathbf{e}}{dt} \right)^m \rho dV = 0 \quad \text{u.} \quad \int_V (\mathbf{s} + \mathbf{e}) \times \left( \frac{d\mathbf{e}}{dt} \right)^m \rho dV = 0. \quad (5.12a,b)$$

Unter der Annahme, dass die Verformung  $\mathbf{e}$  entweder klein oder kollinear mit der Verformungsgeschwindigkeit ist, kann das Kreuzprodukt aus Verformung und Verformungsgeschwindigkeit in erster Näherung vernachlässigt werden. Wird zusätzlich von einer konstanten Massendichte für jedes Massenelement ausgegangen, vereinfachen sich die Glei-

chungen (5.12a,b) weiter zu den "praktischen" Bedingungsgleichungen des mittleren Koordinatensystems

$$\left(\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{e} \rho dV\right)^m = 0 \quad \text{u.} \quad \left(\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{s} \times \mathbf{e} \rho dV\right)^m = 0. \quad (5.13a,b)$$

Bei den vorausgesetzten linear-elastischen Zusammenhängen kann die allgemeine Verformung  $\mathbf{e}(x, y, z, t)$  durch Linearkombination orthogonaler Schwingungsmoden  $\phi_i(x, y, z)$  mit den dazugehörigen generalisierten Koordinaten  $q_i(t)$  ausgedrückt werden:

$$\mathbf{e} = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x, y, z) q_i(t). \quad (5.14)$$

Da in der Praxis nur eine endliche Anzahl  $n$  von Moden berücksichtigt werden kann, basiert solch ein Modell natürlich immer auf einer beschränkten modalen Beschreibung. Bei der Auswahl der betrachteten Moden sollten gerade bei flugmechanischen Untersuchungen solche berücksichtigt werden, welche eine starke Kopplung mit den Starrkörperfreiheitsgraden aufweisen. Dies sind im allgemeinen die niederfrequenten Moden. Daneben können aber auch solche Moden von Interesse sein, die einen großen Anteil zur Beschleunigung an einzelnen ausgesuchten Orten der Struktur (z.B. Cockpit- oder Passagierbereich) beitragen.

Mit Gleichung (5.14) werden die "praktischen" Bedingungsgleichungen des mittleren Koordinatensystems zu

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{dq_i}{dt} \int_V \phi_i \rho dV = 0 \quad \text{u.} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{dq_i}{dt} \int_V \mathbf{s} \times \phi_i \rho dV = 0. \quad (5.15a,b)$$

Diese Gleichungen legen schließlich die Lage des mittleren Koordinatensystems fest. Sie können als die Bedingungen interpretiert werden, die die Orthogonalität zwischen den elastischen Schwingungsmoden und den translatorischen und rotatorischen Moden der Starrkörperdynamik erzwingen. Würden die Schwingungsmoden des Flugzeuges als freie in vacuo Schwingungen ohne äußere Zwangsbedingungen bestimmt, so erfüllt ein Referenzsystem, dessen Achsen nach den Starrkörpermoden ausgerichtet sind und dessen Ursprung im momentanen Schwerpunkt der Struktur liegt, diese "praktischen" Bedingungsgleichungen [28].

Wird die modale Darstellung (5.14) in den Ausdruck für die kinetische Energie (5.10) eingeführt, so ergibt sich mit

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)^m \cdot \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)^m \rho dV = \int_V \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \frac{dq_i}{dt} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j \frac{dq_j}{dt} \right\} \rho dV \quad (5.16)$$

und mit der Orthogonalität der Schwingungsmoden

$$\int_V \phi_i \cdot \phi_j \rho dV \quad i \neq j \quad (5.17)$$

schließlich

$$T = \frac{1}{2} M \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} M_i \dot{q}_i^2, \quad (5.18)$$

wobei die generalisierte Masse der  $i$ ten Strukturmode durch

$$M_i = \int_V \phi_i \cdot \phi_i \rho dV \quad (5.19)$$

definiert ist. Die Einführung der modalen Darstellung in Gleichung (5.5) ergibt mit  $q_i = q_{0i} \sin(\omega_{0i} t)$  und  $\ddot{q}_i = -\omega_{0i}^2 q_i$  ( $\omega_{0i}$  ist die Frequenz der freien, ungedämpften Eigenschwingung der  $i$ ten Mode) als Ausdruck für die potentielle Energie der elastischen Verformung

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \omega_{0i}^2 q_i^2 M_i. \quad (5.20)$$

Mit den Gleichungen (5.10), (5.11) und (5.20) liegen die Energiegleichungen nun in einer Form vor, die ihre Behandlung mit der Lagrangeschen Gleichung

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (5.21)$$

ermöglicht.

Die hierfür gemachten Voraussetzungen lauten zusammengefasst:

- Für die strukturelle Verformung gelten lineare elastische Beziehungen.
- Die orthogonalen Schwingungsmoden der freien Schwingung ohne Zwangsbedingungen sind bekannt.
- Die Struktur besteht aus Massenelementen mit konstanter Massendichte.
- Die Massenelemente sind Punktmassen ohne Drehträgheit.
- Die strukturelle Verformung und Verformungsgeschwindigkeit sind klein oder kollinear, so dass ihr Kreuzprodukt vernachlässigt werden kann.
- Der Trägheitstensor des Flugzeuges ist konstant.
- Das umgebende Gravitationsfeld ist konstant.

### Aufstellung der Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen des Systems sollen im flugzeugbezogenen, mittleren Koordinatensystem ausgedrückt werden. Die Anwendung der Lagrangeschen Gleichung erfordert jedoch die Verwendung von generalisierten Koordinaten, die die Bewegung im inertialen Koordinatensystem beschreiben. Die inertielle Position des Ursprunges des flugzeugbezogenen Koordinatensystems (und damit der momentane Schwerpunkt des Flugzeuges) wird daher mit

$$\mathbf{R}_0 = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (5.22)$$

anhand von Einheitsvektoren  $\hat{i}, \hat{j}$  und  $\hat{k}$  beschrieben, die mit den orthogonalen Richtungen des (nicht inertialen) flugzeugbezogenen Koordinatensystems übereinstimmen. Das Gleiche gilt für die inertialen Geschwindigkeitskomponenten  $u, v$  und  $w$

$$\frac{d\mathbf{R}_0}{dt} = \left( \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} \right)^m + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_0 = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} = \mathbf{V}, \quad (5.23)$$

sowie für die inertielle Rotationsgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{\Omega} = p\hat{i} + q\hat{j} + r\hat{k}. \quad (5.24)$$

Die Orientierung des flugzeugbezogenen Achsensystems wird durch die üblichen Eulerwinkel  $\Phi, \Psi$  und  $\Theta$  [6] beschrieben. Damit werden die Energieausdrücke zu

$$T = \frac{1}{2}M(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2}[p \ q \ r] \mathbf{I} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} M_i \dot{q}_i^2, \quad (5.25)$$

$$U_g = -Mg(-x \sin\Theta + y \sin\Phi \cos\Theta + z \cos\Phi \cos\Theta) \quad (5.26)$$

und

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \omega_{0i}^2 q_i^2 M_i. \quad (5.27)$$

Für die rotatorischen und translatorischen Geschwindigkeiten gelten die bekannten Beziehungen

$$\begin{aligned} p &= \dot{\Phi} - \dot{\Psi} \sin\Theta \\ q &= \dot{\Psi} \cos\Theta \sin\Phi + \dot{\Theta} \cos\Phi \\ r &= \dot{\Psi} \cos\Theta \cos\Phi - \dot{\Theta} \sin\Phi \end{aligned} \quad (5.28)$$

und

$$u = \dot{x} + qz - ry$$

$$v = \dot{y} + rx - pz \quad (5.29)$$

$$w = \dot{z} + py - qx.$$

Werden die Geschwindigkeitsterme in der Beziehung für die kinetische Energie (5.25) durch die Ausdrücke (5.28) und (5.29) ersetzt, so sind die Energiegleichungen durch die generalisierten Koordinaten  $x, y, z, \Theta, \Phi, \Psi$  und  $q_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ , sowie deren Ableitungen ausgedrückt. Die Lagrange'sche Gleichung (5.21) kann dann angewandt werden.

Die resultierenden Beziehungen können wiederum mit den Gleichungen (5.28) und (5.29) in  $u, v, w, p, q, r$  und  $q_i, (i = 1, 2, \dots, n)$  ausgedrückt werden, so dass die resultierenden Bewegungsgleichungen dann in vektorieller Form lauten:

- Starrkörpertranslation

$$M \left( \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qw - rv \\ ru - pw \\ pv - qu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sin\Theta \\ \sin\Phi \cos\Theta \\ \cos\Phi \cos\Theta \end{bmatrix} g \right) = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

- Starrkörperrotation (mit  $I_{yz} = I_{zy} = I_{yx} = I_{xy} = 0$ )

$$\underline{\mathbf{I}} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qr(I_{zz} - I_{yy}) - pq I_{xz} \\ rp(I_{xx} - I_{zz}) + (p^2 - r^2) I_{xz} \\ pq(I_{yy} - I_{xx}) + qr I_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{\Phi_m} \\ Q_{\Theta_m} \\ Q_{\Psi_m} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

- Elastische Bewegung

$$M_i (\ddot{q}_i + 2\zeta_i \omega_{0i} \dot{q}_i + \omega_{0i}^2 q_i) = Q_{q_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.32)$$

Hierin sind  $Q_{(\cdot)}$  die generalisierten Kräfte aus Aerodynamik und Antrieb, und  $\zeta_i$  bzw.  $\omega_{0i}$  die Dämpfung bzw. Frequenz der  $i$ ten Schwingungsmode. Hinzu kommen die kinematischen Beziehungen

- Starrkörpertranslation

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_g \\ \dot{y}_g \\ \dot{z}_g \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{M}}_{mg}^T \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

- Starrkörperrotation

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{M}}_{\Phi m} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

mit den durch die Eulerwinkel  $\Theta$ ,  $\Phi$  und  $\Psi$  festgelegten Rotationsmatrizen  $\underline{\mathbf{M}}_{mg}$  und  $\underline{\mathbf{M}}_{\Phi m}$ .  $\underline{\mathbf{M}}_{mg}$  transformiert vom inertialen zum mittleren Koordinatensystem und  $\underline{\mathbf{M}}_{\Phi m}$  transformiert Drehraten im mittleren Koordinatensystem zu Drehraten der Eulerwinkel.

Somit sind die Bewegungsgleichungen vollständig und können, sobald die generalisierten Kräfte  $Q_{(\cdot)}$  bestimmt sind, zur Untersuchung der Systemdynamik verwendet werden.

### 5.1.3 Generalisierte Kräfte

Zur Bestimmung der generalisierten Kräfte wird das Prinzip der virtuellen Arbeit herangezogen. Es gilt

$$Q_i = \frac{\partial}{\partial q_i}(\delta W), \quad (5.35)$$

wobei  $\delta W$  die Arbeit bezeichnet, die durch eine virtuelle Verschiebung der generalisierten Koordinaten  $q_i$  verrichtet wird. Werden mit

$$F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} = \mathbf{F} \quad (5.36)$$

und

$$L \hat{i} + M \hat{j} + N \hat{k} = \mathbf{M} \quad (5.37)$$

die Gesamtkräfte und -momente aus Aerodynamik und Antrieb im mittleren Koordinatensystem definiert, so bekommt man mit dem Moment  $\mathbf{M} + \mathbf{R}_0 \times \mathbf{F}$  um den Ursprung des Inertialsystems für die virtuelle Arbeit im Inertialsystem den Ausdruck

$$\begin{aligned} \delta W = & F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z + [L + (yF_z - zF_y)] \delta \Phi_m + [M + (zF_x - xF_z)] \delta \Theta_m \\ & + [N + (xF_y - yF_x)] \delta \Psi_m + \int_S \mathbf{P}(x, y, z) \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \delta q_i dS. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Der Ausdruck  $\mathbf{P}(x, y, z)$  beschreibt dabei die lokale Druckverteilung auf der Oberfläche der Struktur, die für die virtuelle Arbeit der elastischen Verformung Verantwortung trägt und die Verschiebungen  $\delta \Phi_m$ ,  $\delta \Theta_m$  und  $\delta \Psi_m$  sind die virtuellen Verdrehungen um die jeweiligen Koordinatenrichtungen des mittleren Koordinatensystems, welche mit den virtuellen Verdrehungen der generalisierten Koordinaten  $\delta \Phi$ ,  $\delta \Theta$  und  $\delta \Psi$  über  $\underline{\mathbf{M}}_{\Phi m}$ , bzw.

$$\delta \Phi_m = \delta \Phi - \delta \Psi \sin \Theta$$

$$\delta \Theta_m = \delta \Psi \cos \Theta \sin \Phi + \delta \Theta \cos \Phi \quad (5.39)$$

$$\delta \Psi_m = \delta \Psi \cos \Theta \cos \Phi - \delta \Theta \sin \Phi$$

in Beziehung stehen. Damit ergeben sich die generalisierten Kräfte sehr einfach zu

$$Q_x = F_x, \quad Q_y = F_y, \quad Q_z = F_z, \quad Q_{\Phi_m} = L, \quad Q_{\Theta_m} = M, \quad Q_{\Psi_m} = N \quad (5.40)$$

und

$$Q_{q_i} = \int_S \mathbf{P}(x, y, z) \phi_i(x, y, z) dS. \quad (5.41)$$

### Generalisierte Kräfte der Starrkörperfreiheitsgrade

Zur Bestimmung der Gesamtkräfte und -momente aus Aerodynamik und Schub ist es zweckmäßig, diese in ihre Rumpf-, Flügel- und Leitwerksanteile zu zerlegen und mit

$$\begin{aligned} F_x &= A \sin\alpha - W \cos\alpha \cos\beta + Q \cos\alpha \sin\beta + T_x \\ F_y &= -W \sin\beta - Q \cos\beta + T_y \\ F_z &= -A \cos\alpha - W \sin\alpha \cos\beta + Q \sin\alpha \sin\beta + T_z \end{aligned} \quad (5.42)$$

in Auftrieb  $A$ , Widerstand  $W$ , Seitenkraft  $Q$  und den Komponenten  $T_x, T_y$  und  $T_z$  des Schubvektors auszudrücken. Dabei bezeichnen  $\alpha$  und  $\beta$  den Anstell- bzw. Schiebewinkel des Flugzeuges. Der Auftrieb  $A$  setzt sich demnach aus

$$A = A_{Rumpf} + A_{Fluegel} + A_{Leitwerk} \quad (5.43)$$

zusammen. Werden Rumpf und Leitwerk hier als starr angenommen, so hängen  $A_{Rumpf}$  und  $A_{Leitwerk}$  nur von Anstell- und Schiebewinkel, sowie den Drehraten des Flugzeuges und dem Staudruck  $\bar{q}$  ab. Der Auftriebsanteil des elastischen Flügels wird darüber hinaus jedoch noch von der Verformung des Flügels beeinflusst. Eine einfache Methode die aerodynamischen Kräfte und Momente für solch einen elastischen Flügel abzuschätzen liefert die Streifentheorie [5]. Sie basiert auf der Annahme, dass der aerodynamische Auftrieb  $A_s$  pro Längeneinheit eines Flügelabschnittes (Streifens) im Wesentlichen von dem dort herrschenden lokalen Anstellwinkel  $\alpha_s$  abhängt:

$$A_s = \bar{q} c_{A_\alpha} l \alpha_s, \quad (5.44)$$

wobei  $c_{A_\alpha}$  den örtlichen Auftriebsbeiwert des Profils darstellt und  $l$  die örtliche Flügeltiefe. Der Auftrieb des gesamten Flügels lautet dann mit der Flügelspannweite  $b$

$$A_{Fluegel} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} A_s dy. \quad (5.45)$$

Abbildung 5.3 zeigt den Flügelabschnitt eines ungefeilten Flügels. Der Anstellwinkel  $\alpha_s$

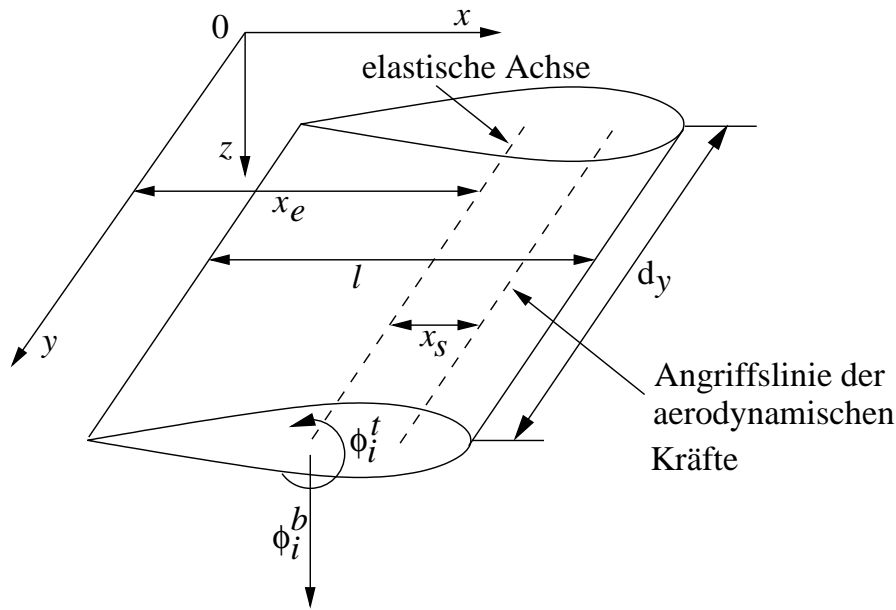


Abbildung 5.3: Flügelabschnitt

dieses Segmentes kann dann durch

$$\alpha_s = \alpha + i_s - q \left( \frac{x_e + x_s}{u} \right) + p \frac{y}{u} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \phi_i^t q_i + \frac{1}{u} \phi_i^b \dot{q}_i \right] \quad (5.46)$$

angenähert werden, wobei  $\alpha = \arctan(w/u)$  dem Anstellwinkel des Gesamtflugzeuges (des mittleren Koordinatensystems) entspricht.  $i_s$  ist der Einstellwinkel des Streifens ohne elastische Verformung,  $\phi_i^b$  die örtliche Biegeverschiebung ( $z$ -Komponente) und  $\phi_i^t = \frac{d\phi_i^b}{dx}$  die örtliche torsionale Verdrehung des Segmentes aufgrund der  $i$ -ten elastischen Schwingungsform. Damit wird der Gesamtauftrieb des Flügels zu

$$A_{Fluegel} = \bar{q} S \left[ C_{A_0} + C_{A_\alpha} \alpha + C_{A_p} p + C_{A_q} q + \sum_{i=1}^{\infty} (C_{A_{q_i}} q_i + C_{A_{\dot{q}_i}} \dot{q}_i) \right] \quad (5.47)$$

mit den Kraft-Beiwertderivativen

$$C_{A_0} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (c_{A_0} + c_{A_\alpha} i_s) l dy, \quad (5.48)$$

$$C_{A_\alpha} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} l dy, \quad (5.49)$$

$$C_{A_p} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \frac{y}{u} l dy, \quad (5.50)$$

$$C_{A_q} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \frac{x_e + x_s}{u} l dy, \quad (5.51)$$

$$C_{A_{q_i}} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \phi_i^t l dy \quad \text{und} \quad (5.52)$$

$$C_{A_{\dot{q}_i}} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \frac{1}{u} \phi_i^b l dy. \quad (5.53)$$

Die durch den flexiblen Flügel erzeugten Momente können auf ähnliche Weise angenähert werden. Das Nickmoment um den Ursprung des mittleren Koordinatensystems, also dem Massenzentrum lautet dann

$$M_{Fluegel} = \bar{q} S \bar{l} \left[ C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_p} p + C_{m_q} q + \sum_{i=1}^{\infty} (C_{m_{q_i}} q_i + C_{m_{\dot{q}_i}} \dot{q}_i) \right] \quad (5.54)$$

mit den Momenten-Beiwertderivativen

$$C_{m_0} = \frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[ c_{m_0} + (c_{A_0} + c_{A_\alpha} i_s) \left( \frac{x_e + x_s}{l} \right) \right] l^2 dy, \quad (5.55)$$

$$C_{m_\alpha} = \frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} (x_e + x_s) l dy, \quad (5.56)$$

$$C_{m_p} = \frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \frac{y (x_e + x_s)}{u} l dy, \quad (5.57)$$

$$C_{m_q} = \frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \frac{(x_e + x_s)^2}{u} l dy, \quad (5.58)$$

$$C_{m_{q_i}} = \frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} (x_e + x_s) \phi_i^t l dy \quad \text{und} \quad (5.59)$$

$$C_{m_{\dot{q}_i}} = \frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \frac{(x_e + x_s)}{u} \phi_i^b l dy. \quad (5.60)$$

Ausdrücke für die noch verbleibenden Kraft- bzw. Momentenbeiwerte der Starrkörperfreiheitsgrade können in analoger Weise hergeleitet werden und sind in Anhang A aufgeführt.

### Generalisierte Kräfte der elastischen Freiheitsgrade

Zur Herleitung der generalisierten Kräfte der elastischen Freiheitsgrade wird die durch die am Flügelsegment verrichtete virtuelle Arbeit der elastischen Verformung bestimmt. Die virtuelle Arbeit am Flügelsegment wird dabei durch Heben, bzw. Senken sowie durch Verdrehen des Flügelsegmentes verrichtet. Entsprechend kann sie als die Summe der durch Biegung bzw. Torsion erzeugten Anteile

$$W_{Bieg} = -A_s \cos \alpha_v \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^b q_i \quad (5.61)$$

und

$$W_{Tors} = (M_s + A_s x_S \cos \alpha_s) \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^t q_i \quad (5.62)$$

dargestellt werden (Abbildung 5.4), wobei der Widerstand  $W_s$  vernachlässigt wird. Mit

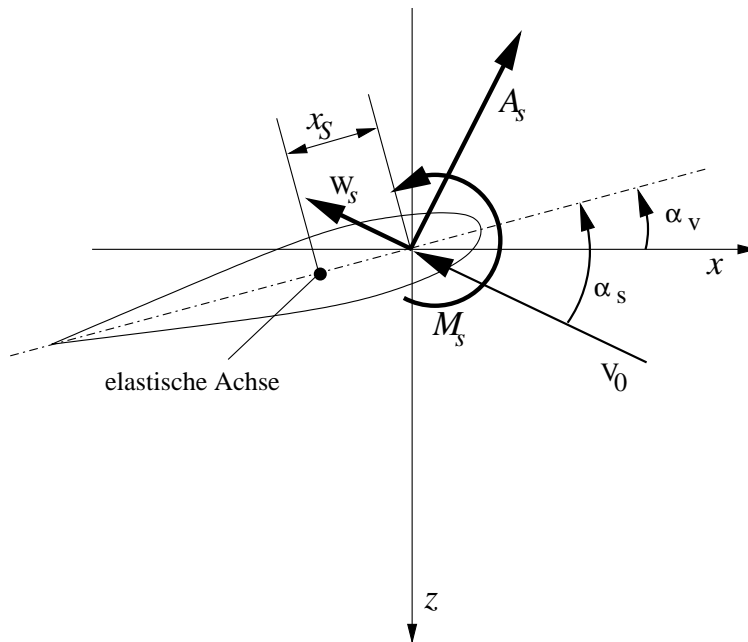


Abbildung 5.4: Flügelabschnitt

Gleichung 5.35 ergeben sich die generalisierten Kräfte der elastischen Freiheitsgrade dann zu

$$Q_{q_i} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \{ (-A_s \cos \alpha_v \phi_i^b) + [(M_s + A_s x_S \cos \alpha_s) \phi_i^t] \} dy. \quad (5.63)$$

Wird  $\cos\alpha_v \approx \cos\alpha_s$  angenommen, gilt

$$Q_{q_i} \approx (A_i + B_i)\cos\alpha_v + C_i \quad (5.64)$$

mit

$$A_i = - \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} A_s \phi_i^b dy, \quad (5.65)$$

$$B_i = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} A_s x_s \phi_i^t dy \quad (5.66)$$

und

$$C_i = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} M_s \phi_i^t dy. \quad (5.67)$$

Analog zu den klassischen Kraftbeiwerten der Starrkörperfreiheitsgrade können nun Kraftbeiwerts-Derivative für die elastischen Freiheitsgrade definiert werden, z.B:

$$A_i = -\bar{q}S\bar{l} \left[ C_0^{A_i} + C_\alpha^{A_i} \alpha_v + C_p^{A_i} p + C_q^{A_i} q + \sum_{j=1}^{\infty} (C_{q_j}^{A_i} q_j + C_{\dot{q}_j}^{A_i} \dot{q}_j) \right]. \quad (5.68)$$

Die Definitionen der Kraftbeiwerts-Derivative sind in Anhang A zusammengefasst.

Mit den so gewonnenen Ausdrücken für die äußeren Kräfte und Momente können die Bewegungsgleichungen (5.30) bis (5.32) aufgestellt werden, so dass letztendlich die vollständige Modellierung des flexiblen Flugzeuges vorliegt.

#### 5.1.4 Untersuchte Flugzeugkonfiguration

Die nichtlinearen Analysen erfolgen an einem gemäß den vorausgegangenen Abschnitten modellierten Großflugzeug mit flexiblen Flügelfreiheitsgraden. Zu Vergleichszwecken wird das gleiche Flugzeug auch in einer als starr angenommene Variante untersucht. Die folgenden Abschnitte beschreiben diese beiden Modelle.

### Flexibles Flugzeug

Bei dem flexiblen Flugzeug handelt es sich um das Modell eines in Abbildung 5.5 mit seinen wichtigsten Daten dargestellten großen Verkehrsflugzeuges [29]. Das Modell ist dabei so gestaltet, dass es die grundlegenden physikalischen Eigenschaften solch eines Flugzeuges gut wiedergibt, jedoch in seiner Komplexität so einfach und leicht interpretierbar wie möglich gehalten wird. Dazu werden einige vereinfachende Annahmen getroffen. Zunächst

einmal wird entsprechend der Herleitung der generalisierten Kräfte nur die Flexibilität des Flügels berücksichtigt, Rumpf und Leitwerk werden als starr angenommen. Die generalisierten Koordinaten  $q_i$  der Strukturbewegungsgleichungen

$$M_i (\ddot{q}_i + 2 \zeta_i \omega_{0i} \dot{q}_i + \omega_{0i}^2 q_i) = Q_{q_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.69)$$

reduzieren sich damit auf die Flügelfreiheitsgrade. Als Flügelvorbild dient hier ein Referenzflügel, wie er im Sonderforschungsbereich (SFB) 401 "Strömungsbeeinflussung und Strömungs-Struktur-Wechselwirkung an Tragflügeln" der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) definiert wurde (Abbildung 5.6) [36, 11]. Dabei handelt es sich um einen Konzeptflügel für ein Großflugzeug mit 80 m Spannweite in Hochauftriebskonfiguration. Für diesen Flügel wird angenommen, dass er sich als ein eindimensionaler schwingender Balken mit über der Spannweite kontinuierlich verlaufenden Struktureigenschaften (Masse, Trägheitsmoment, Torsions- und Biegesteifigkeit) idealisieren lässt. Die Strukturdatenverläufe des Flügels sind aus den Abbildungen 5.7 bis 5.10 zu entnehmen. Sie sind an die in [34] gegebenen Größen angelehnt und auf eine Spannweite von 80 m hochskaliert.

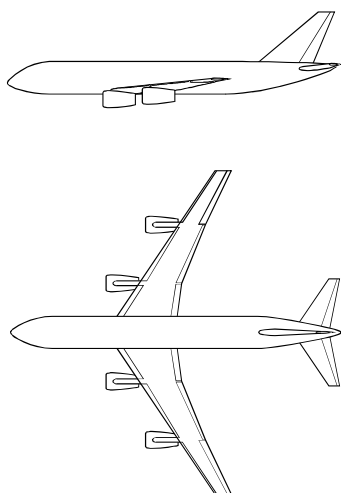
Rumpf und Triebwerke werden als Massenpunkte idealisiert (Abbildung 5.11). Ihre Strukturdaten wurden abgeschätzt und sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst.

Weiterhin wird die Flügelpfeilung vernachlässigt und von einem Zusammenfallen von elastischer Achse und Schwereachse des Flügels ausgegangen. Bei diesen Vereinfachungen ergeben sich die Eigenbewegungsformen der Struktur als reine Biege- bzw. Torsionsschwingungen. Eine Diskretisierung der Strukturgrößenverläufe und Anwendung des Verfahrens der Übertragungsmatrizen liefern die Eigenfrequenzen und Eigenformen der Biege- und Torsionsschwingung mit denen sich die Kraft- und Momentenbeiwerte nach Kapitel 5.1.3 bestimmen lassen [19]. Werden nur die vier symmetrischen Strukturschwingungsformen mit den niedrigsten ungedämpften Eigenfrequenzen, also die ersten drei Biegeeigenformungen und die erste Torsionseigenform berücksichtigt, gelten die Zusammenhänge gemäß Tabelle 5.2 und Abbildungen 5.12-5.15. Die entsprechenden Kraft- und Momentenbeiwerte sind in Anhang B zusammengefasst.

	y-Position [m]	Masse [kg]	Massenträgheitsmoment [kg · m <sup>2</sup> ]
Rumpf	0	367.700	146 · 10 <sup>6</sup>
Triebwerke	-26.4, -12, 0, 12, 26.4	8.000	90 · 10 <sup>3</sup>

Tabelle 5.1: Rumpf- und Triebwerksdaten

## Referenzflugzeug

Flügel/Rumpf

Spannweite: 80 m  
 Flügelfläche: 715,4 m<sup>2</sup>  
 Rumpflänge: 81,5 m  
 Rumpf- $\phi$ : 8 m

Höhenleitwerk

Spannweite: 26,51 m  
 HL-Fläche: 156,23 m<sup>2</sup>

Seitenleitwerk

Höhe: 12,25 m  
 SL-Fläche: 107,25 m<sup>2</sup>

Triebwerke: 4 x 580 kN

Masse und Trägheitsmomente

MTOW: 782 to  
 $I_x$ : 107 10<sup>6</sup> kg m<sup>2</sup>  
 $I_y$ : 146 10<sup>6</sup> kg m<sup>2</sup>  
 $I_z$ : 261 10<sup>6</sup> kg m<sup>2</sup>

Abbildung 5.5: Referenzflugzeug

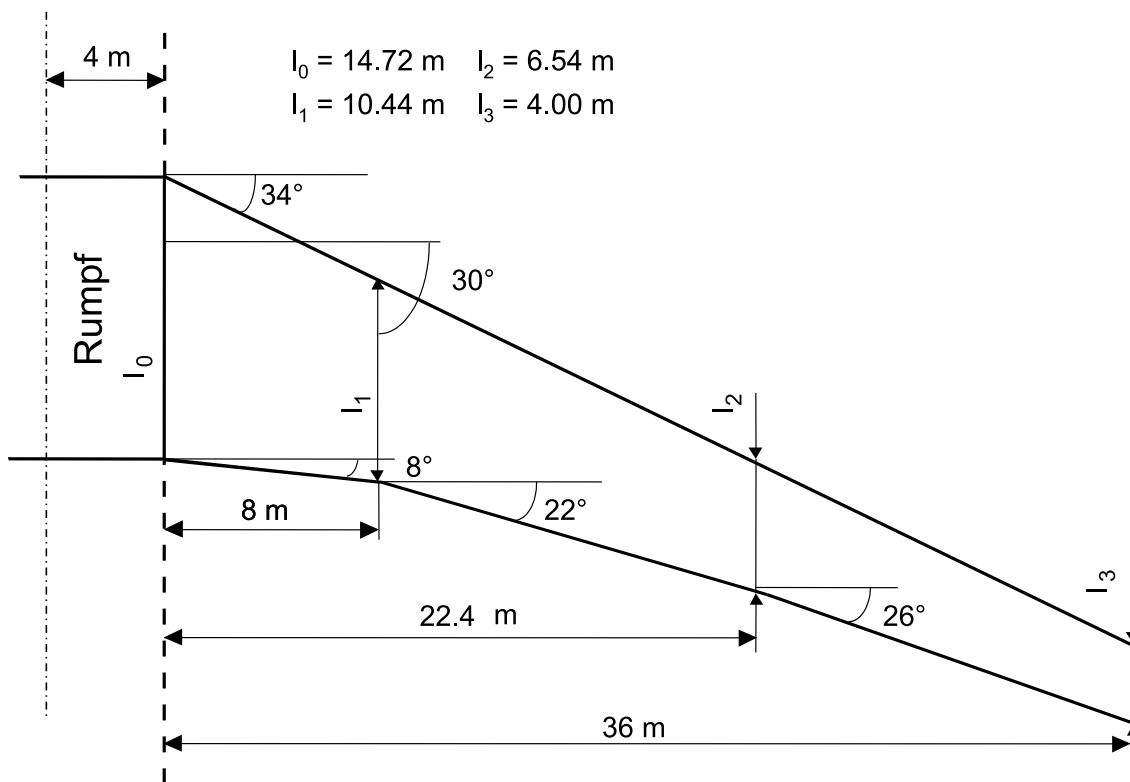
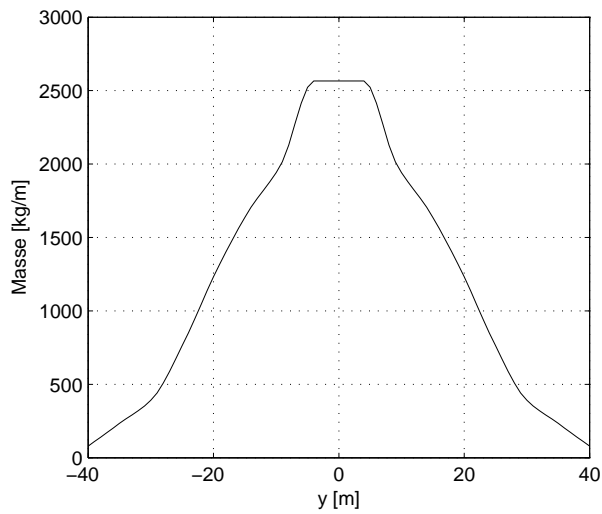
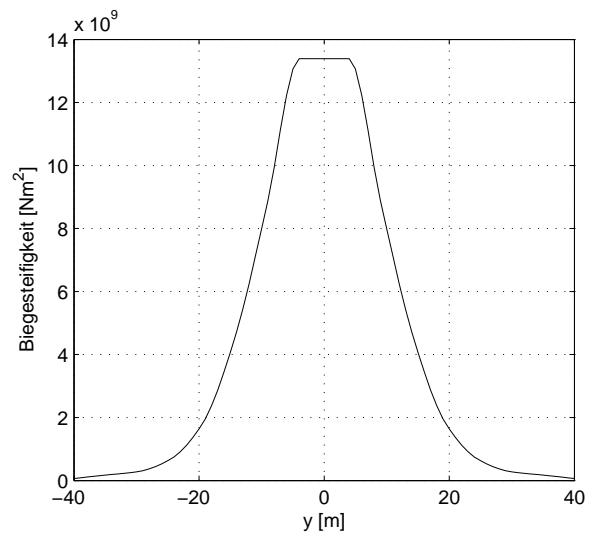
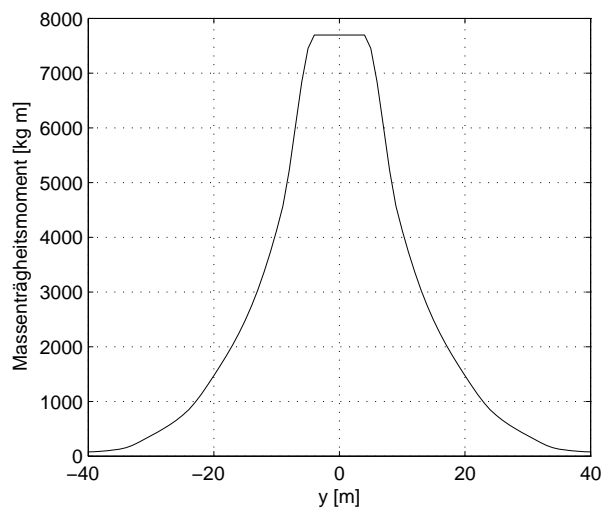
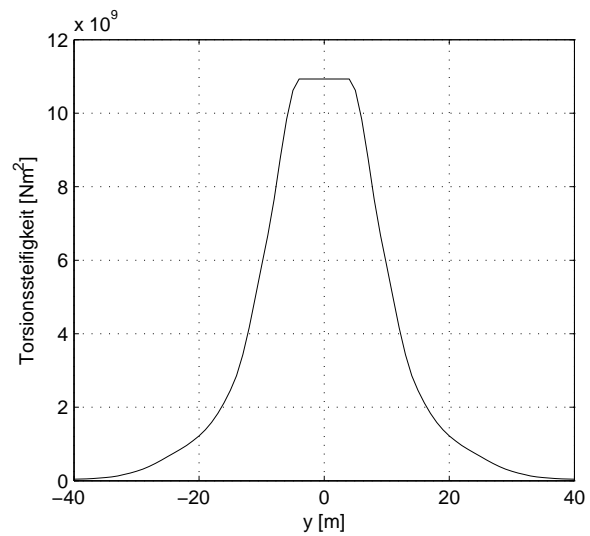


Abbildung 5.6: Referenzgeometrie des SFB401-Flügels

Abbildung 5.7: Längenbezogene Masse des Flügels  $m(y)$ Abbildung 5.8: Biegesteifigkeit des Flügels  $EJ(y)$ Abbildung 5.9: Längenbez. Massenträgheitsmoment des Flügels  $I(y)$ Abbildung 5.10: Torsionssteifigkeit des Flügels  $GJ_d(y)$

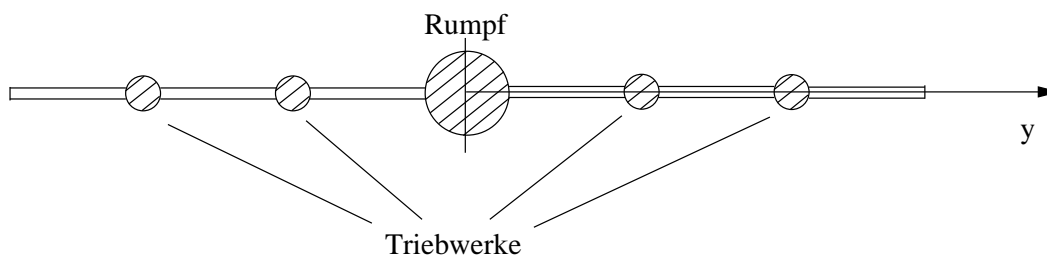


Abbildung 5.11: Rumpf und Triebwerke als Massenpunkte

Die Strukturdämpfungsterme  $\zeta_i$  der elastischen Bewegungsgleichungen (5.69) werden gemäß Tabelle 5.3 in einen konstanten und einen auslenkungsabhängigen Anteil aufgeteilt. Die Anteile wurden dabei so gewählt, dass das Gesamtflugzeug im betrachteten Geschwindigkeitsbereich kein Flattern aufweist und die niedrigste elastische Frequenz in Nachbarschaft der höchsten Starrkörperfrequenz liegt.

### Starres Flugzeug

Um den Einfluss der Flexibilität auf das dynamische Verhalten des Flugzeuges bewerten zu können, wird zu Vergleichszwecken ein starres Flugzeug gleicher Konfiguration herangezogen. Durch Vernachlässigung der elastischen Bewegungsgleichungen (5.32) und der elastischen Derivative in Anhang A ergibt sich sofort das Modell des unverformten, starren Flugzeugs. Aufgrund der durch die Flügelverformung hervorgerufenen veränderten Auftriebsverteilung nehmen jedoch die Zustandsgrößen für einen bestimmten Trimmpunkt, z.B. einen horizontalen Geradeausflug mit vorgegebener Geschwindigkeit, deutlich unterschiedliche Werte an (Tabelle 5.4).

Daher wird nicht das unverformte starre Flugzeug betrachtet, sondern das im Trimmpunkt in seinem verformten Zustand "eingefrorene" Flugzeug. D.h. die Derivative des

Schwingungsform $i$	Biegeanteil $\phi_i^b$	Torsionsanteil $\phi_i^t$	ungedämpfte Eigenfrequenz $\omega_{0i}$ [ $\frac{rad}{s}$ ]
1	$\phi_1$	0	8.158
2	$\phi_2$	0	22.706
3	$\phi_3$	0	46.368
4	0	$\psi_1$	28.225

Tabelle 5.2: Symmetrische Struktureigenschwingungsformen

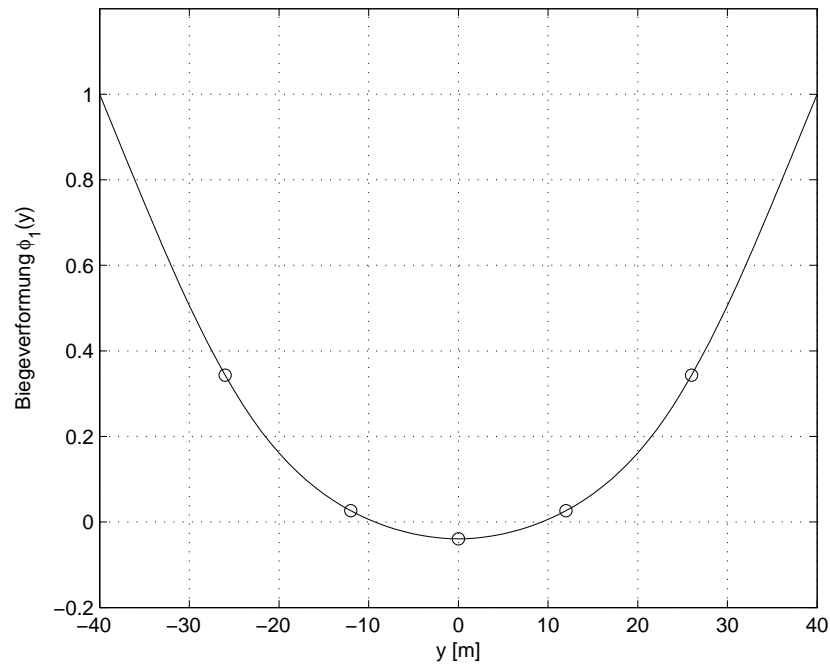


Abbildung 5.12: Eigenform der 1. Biegeschwingung  $\phi_1$ . 'o' markiert die Positionen von Rumpf und Triebwerken

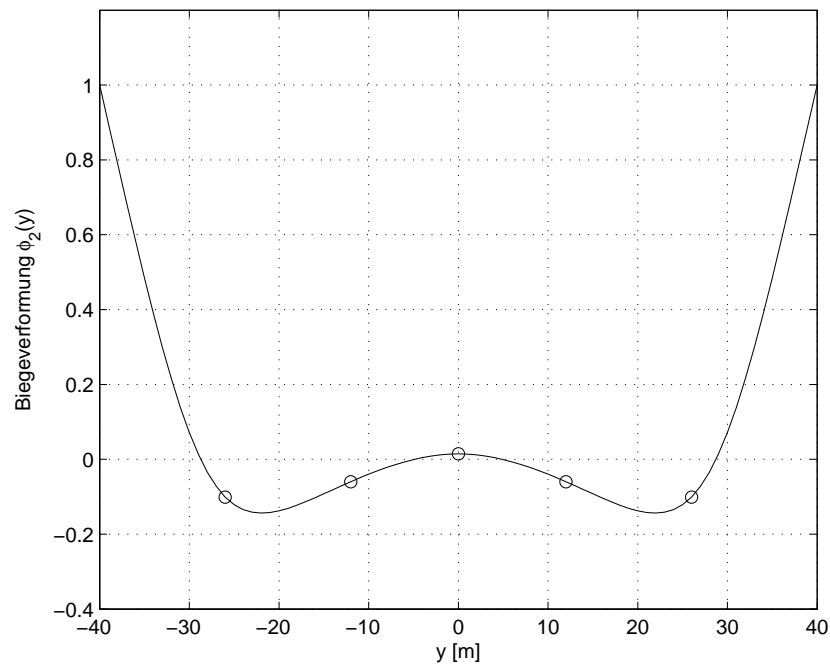


Abbildung 5.13: Eigenform der 2. Biegeschwingung  $\phi_2$ . 'o' markiert die Positionen von Rumpf und Triebwerken

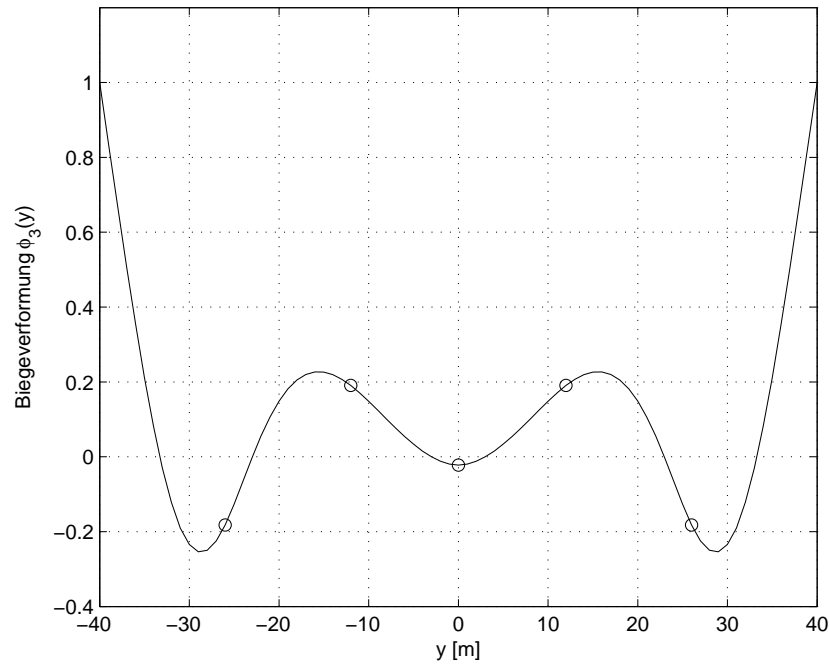


Abbildung 5.14: Eigenform der 3. Biegeschwingung  $\phi_3$ . 'o' markiert die Positionen von Rumpf und Triebwerken

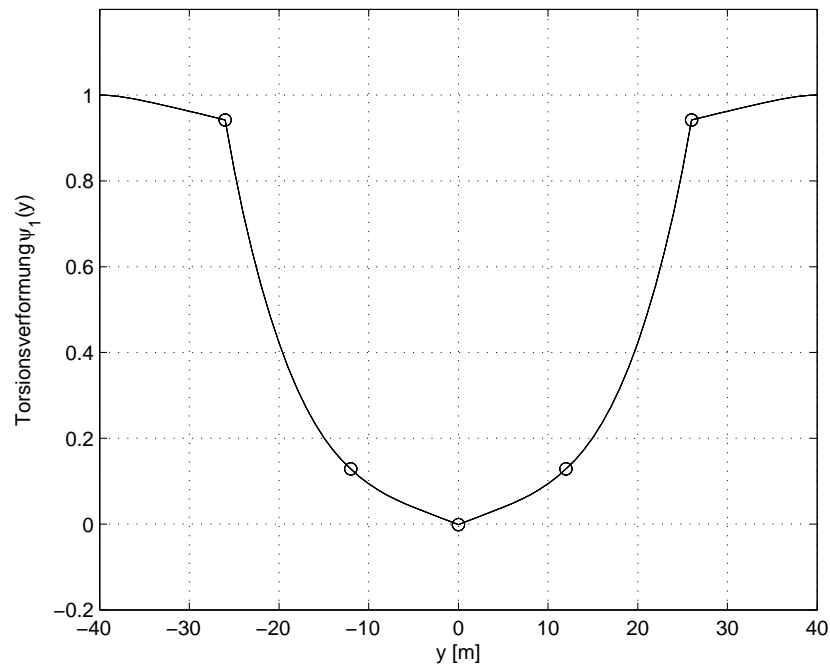


Abbildung 5.15: Eigenform der ersten Torsionsschwingung  $\psi_1$ . 'o' markiert die Positionen von Rumpf und Triebwerken

$\zeta_i = \zeta_{0_i} + \zeta_{a_i} q_i$ Schwingungsform $i$	konstanter Strukturdämpfungsgrad $\zeta_{0_i}$	auslenkungsabhängiger Strukturdämpfungsgrad $\zeta_{a_i}$
1	0.3	0.01
2	0	0.1
3	0	0.1
4	0.2	0.1

Tabelle 5.3: Strukturdämpfungsanteile der elastischen Eigenschwingungsformen

starrten Flugzeuges setzen sich nun aus einem Anteil des unverformten, starren Flugzeuges und einem Anteil der aus der jetzt als konstant angenommenen elastischen Verformung resultiert zusammen. Dazu werden die Derivative derart angepasst, dass sich im betrachteten Trimpunkt die gleichen Zustandsgrößen einstellen wie im Fall des flexiblen Flugzeuges.

Trimzustand: Horizontaler Geradeausflug mit 120 m/s			
	flexibel	unverformt starr	verformt starr
$\alpha$ [°]	3.5092	5.3074	3.5092
$V$ [m/s]	120	120	120
$\Theta$ [°]	3.5092	5.3074	3.5092
$q$ [rad/s]	0.0	0.0	0.0
$\beta$ [°]	0.0	0.0	0.0
$p$ [rad/s]	0.0	0.0	0.0
$\Phi$ [°]	0.0	0.0	0.0
$r$ [rad/s]	0.0	0.0	0.0
$q_1$ [m]	-3.8295	—	—
$q_2$ [m]	-0.2909	—	—
$q_3$ [m]	-0.0732	—	—
$q_4$ [rad]	0.1289	—	—

Tabelle 5.4: Zustandsgrößen des flexiblen bzw. starren Flugzeuges

## 5.2 Analyseergebnisse

Die Ergebnisse der nichtlinearen Analyse der beiden Flugzeugkonfigurationen werden in den folgenden Abschnitten dargestellt und diskutiert. Dazu werden jeweils ausgewählte Trimmzustände mit den zugehörigen Bewegungsformen untersucht.

### 5.2.1 Flexibles und starres Flugzeug

Tabelle 5.5 listet die Eigenwerte der Bewegungsformen des flexiblen Flugzeuges für unterschiedliche Fluggeschwindigkeiten auf. Die Trimmzustände sind dabei jeweils horizontale Geradeausflüge, an denen die Bewegungsgleichungen linearisiert und die Eigenwerte bestimmt wurden. Bei Verzicht auf das Mitführen der Zustandsgrößen der Position und des Gierwinkels reduziert sich die Anzahl der Zustandsgrößen auf 8 Starrkörperzustandsgrößen und 8 elastische Zustandsgrößen. Entsprechend ergeben sich 16 Eigenwerte, die anhand der dominierenden Zustandsgrößenamplituden den klassischen Starrkörperbewegungsformen und den neu hinzugekommenen elastischen Bewegungsformen zugeordnet werden können. Dies sind die Anstellwinkelschwingung, Phygoide, Taumelschwingung, Rollbewegung und Spiralbewegung, sowie die 4 Eigenschwingungsformen der elastischen Struktur, die aufgrund der Entkopplung als 3 Biegeschwingungen und eine Torsionschwingung identifiziert werden können.

Die Anstellwinkelschwingung zeichnet sich durch eine hohe Frequenz ( $1.383 \text{ rad/s}$  bei  $V = 100 \text{ m/s}$ ) und starke Dämpfung aus, wobei sowohl Dämpfung, als auch Frequenz

Bewegungsf.	$V = 100 \frac{m}{s}$	$V = 110 \frac{m}{s}$	$V = 120 \frac{m}{s}$	$V = 130 \frac{m}{s}$
$\alpha$ -Schw.	$-0.498 \pm 1.383i$	$-0.590 \pm 1.531i$	$-0.699 \pm 1.691i$	$-0.827 \pm 1.875i$
Phygoide	$-0.022 \pm 0.145i$	$-0.021 \pm 0.137i$	$-0.022 \pm 0.131i$	$-0.023 \pm 0.127i$
Taumelschw.	$-0.023 \pm 0.258i$	$-0.024 \pm 0.275i$	$-0.025 \pm 0.293i$	$-0.026 \pm 0.311i$
Rollbeweg.	$-1.3558$	$-1.6398$	$-1.9508$	$-2.2885$
Spiralbeweg.	$+0.0043$	$+0.0041$	$+0.0040$	$+0.0038$
1. Biegeform	$-5.533 \pm 5.828i$	$-6.103 \pm 5.084i$	$-6.778 \pm 3.807i$	$-8.730 / - 6.391$
2. Biegeform	$-3.458 \pm 22.23i$	$-4.181 \pm 21.54i$	$-4.275 \pm 20.58i$	$-4.039 \pm 19.72i$
3. Biegeform	$-1.817 \pm 46.23i$	$-1.976 \pm 46.21i$	$-2.133 \pm 46.18i$	$-2.290 + 46.15i$
1. Torsionsf.	$-4.684 \pm 23.66i$	$-3.947 \pm 23.39i$	$-3.743 \pm 23.33i$	$-3.776 \pm 23.17i$

Tabelle 5.5: Eigenwerte des flexiblen Flugzeuges

mit zunehmender Fluggeschwindigkeit zunehmen. Die Phygoide als zweite Bewegungsform der Längsbewegung besitzt eine um eine Größenordnung niedrigere Frequenz als die Anstellwinkelschwingung und ist deutlich weniger gedämpft. Dabei zeigt sich die Dämpfung als wenig abhängig von der Fluggeschwindigkeit, während die Frequenz zu höheren Fluggeschwindigkeiten hin abnimmt.

Taumelschwingung, Rollbewegung und Spiralbewegung sind Eigenformen der Seitenbewegung, wobei Dämpfung und Frequenz der Taumelschwingung von ähnlicher Größenordnung sind wie bei der Phygoide und mit steigender Fluggeschwindigkeit zunehmen. Roll- und Spiralbewegung hingegen sind aperiodische Bewegungsformen, wobei die Dämpfung der Rollbewegung sehr groß ist und mit zunehmender Fluggeschwindigkeit noch größer wird. Bei der Spiralbewegung handelt es sich als einzige Bewegungsform mit einem positiven Realteil des Eigenwertes um eine aufklingende Bewegungsform, allerdings mit einer sehr schwachen Anfachung, welche bei zunehmender Fluggeschwindigkeit leicht abnimmt.

Alle elastischen Eigenbewegungsformen sind stark gedämpfte Schwingungsformen, mit Ausnahme der 1. Biegeeigenform, deren Frequenz bei zunehmender Fluggeschwindigkeit so weit abnimmt, dass sie zu zwei aperiodischen, stark gedämpften Bewegungsformen degeneriert. Die Frequenzen der übrigen elastischen Eigenschwingungsformen nehmen ebenfalls mit zunehmender Fluggeschwindigkeit ab, sie bleiben jedoch aufgrund des höheren Frequenzniveaus immer oszillierende Bewegungsformen.

Ein Vergleich der Frequenzen von Anstellwinkelschwingung und 1. Biegeeigenschwingung zeigt, dass das Frequenzverhältnis von zunächst  $\approx 4.2$  bei  $V = 100 \text{ m/s}$  über  $\approx 3.4$  bei  $V = 110 \text{ m/s}$  bis auf  $\approx 2.2$  bei  $V = 120 \text{ m/s}$  abgenommen hat, bevor die 1. Biegeeigenschwingung verschwindet.

### 5.2.2 Der lineare Einfluss der Flexibilität

Zur Beurteilung des linearen Einflusses der Flexibilität des Flügels auf das dynamische Verhalten des Flugzeuges zeigt Tabelle 5.6 die Eigenwerte des starren Flugzeuges und die Tabellen 5.7 und 5.8 die Differenzen der Real- bzw. Imaginärteile der Eigenwerte im Vergleich zum elastischen Flugzeug.

Zunächst fällt auf, dass die Abweichungen in den Eigenwerten der Seitenbewegung sehr gering sind ( $\leq 2.5\%$ ). Ein Einfluss der symmetrischen Verformung auf die Seitenbewegung ist demnach kaum vorhanden. Ein anderes Bild ergibt sich bei den Längsbewegungsformen. Mit zunehmender Fluggeschwindigkeit und damit verbundener Annäherung der Frequenzen von Anstellwinkelschwingung und 1. Biegeschwingung ergibt sich vor al-

Bewegungsf.	$V = 100 \frac{m}{s}$	$V = 110 \frac{m}{s}$	$V = 120 \frac{m}{s}$	$V = 130 \frac{m}{s}$
$\alpha$ -Schw.	$-0.452 \pm 1.336i$	$-0.521 \pm 1.469i$	$-0.588 \pm 1.570i$	$-0.626 \pm 1.616i$
Phygoide	$-0.021 \pm 0.132i$	$-0.019 \pm 0.119i$	$-0.019 \pm 0.109i$	$-0.019 \pm 0.099i$
Taumelschw.	$-0.022 \pm 0.259i$	$-0.024 \pm 0.276i$	$-0.025 \pm 0.294i$	$-0.026 \pm 0.312i$
Rollbew.	-1.3561	-1.6401	-1.9510	-2.2887
Spiralbew.	+0.0042	+0.0041	+0.0039	+0.0038

Tabelle 5.6: Eigenwerte des starren Flugzeuges

lem bei der Anstellwinkelschwingung eine erhebliche Differenz im Eigenwert. Während bei  $V = 100 \text{ m/s}$  die relativen Abweichung der Dämpfung und Frequenz schon 9.3% bzw. 3.4% beträgt, so steigt sie bis  $V = 130 \text{ m/s}$  auf 13.8%, bzw. 24.2%. Die Differenzen der Eigenwerte der Phygoide zeigen ein ähnliches Verhalten, wobei allerdings die absoluten Differenzen erheblich geringer sind. Dieses Verhalten deckt sich mit Beobachtungen in [9], nachdem ab einem Frequenzverhältnis der niedrigsten Struktureigenfrequenz zur höchsten Starrkörpereigenfrequenz von unter 3.5 Kopplungseffekte zwischen Starrkörperbewegung und elastischer Bewegung zu erwarten sind.

Bewegungsf.	$V = 100 \frac{m}{s}$	$V = 110 \frac{m}{s}$	$V = 120 \frac{m}{s}$	$V = 130 \frac{m}{s}$
$\alpha$ -Schw.	0.0462 (9.3%)	0.0692 (11.7%)	0.1110 (15.9%)	0.2003 (24.2%)
Phygoide	0.0014 (6.3%)	0.0021 (9.8%)	0.0028 (12.9%)	0.0038 (16.7%)
Taumelschw.	0.0002 (0.9%)	0.0002 (0.8%)	0.0002 (0.8%)	0.0001 (0.4%)
Rollbew.	0.0003 (0.02%)	0.0003 (0.02%)	0.0002 (0.01%)	0.0002 (0.01%)
Spiralbew.	0.0001 (2.3%)	0 (0%)	0.0001 (2.5%)	0 (0%)

Tabelle 5.7: Differenzen des Realteils der Eigenwerte starres/flexibles Flugzeug

Bewegungsf.	$V = 100 \frac{m}{s}$	$V = 110 \frac{m}{s}$	$V = 120 \frac{m}{s}$	$V = 130 \frac{m}{s}$
$\alpha$ -Schw.	0.0467 (3.4%)	0.0629 (4.1%)	0.1207 (7.1%)	0.2586 (13.8%)
Phygoide	0.0130 (8.9%)	0.0174 (12.7%)	0.022 (16.8%)	0.0279 (21.9%)
Taumelschw.	0.0013 (0.5%)	0.0012 (0.4%)	0.0012 (0.4%)	0.0011 (0.3%)

Tabelle 5.8: Differenzen des Imaginärteils der Eigenwerte starres/flexibles Flugzeug

### 5.2.3 Anstellwinkelschwingung

Abbildung 5.16 zeigt das Ergebnis der nichtlinearen Analyse der Anstellwinkelschwingung des flexiblen Flugzeuges mit dem ASTAN-Verfahren bei  $V = 120 \text{ m/s}$ . Aufgetragen sind Dämpfung und Frequenz, d.h. Real- und Imaginärteil des Eigenwertes der Anstellwinkelschwingung, über der Auslenkung der bei dieser Bewegungsform dominierenden Zustandsgröße  $\alpha$  aus ihrer Ruhelage. Im Wesentlichen zeigt sich eine Abnahme der Dämpfung und Erhöhung der Frequenz bei zunehmender Auslenkungsamplitude. Betrachtet man jedoch die Absolutwerte der Änderungen, so zeigt sich, dass diese im Verhältnis zu den Eigenwerten der linearisierten Lösung bei  $\Delta\alpha = 0$  verschwindend gering sind. Die Anstellwinkelschwingung zeigt also selbst bei großen Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage nahezu lineares Verhalten.

Abbildung 5.17 zeigt den Eigenwertverlauf der Anstellwinkelschwingung für das starre Flugzeug. Anders als beim flexiblen Flugzeug nimmt hier die Dämpfung bei größer werdender  $\Delta\alpha$ -Auslenkung zu. Allerdings zeigt sich auch hier, dass die Anstellwinkelschwingung in Anbetracht der sehr geringen absoluten Änderung als nahezu linear anzusehen ist.

Die Berücksichtigung der Flexibilität zeigt bei der linearen Analyse im vorherigen Abschnitt für die Anstellwinkelschwingung eine deutliche Beeinflussung der Eigenwerte. Die nichtlineare Analyse zeigt, dass sich auch im nichtlinearen Verhalten qualitative Änderungen ergeben, die allerdings aufgrund ihrer geringen Größe kaum ins Gewicht fallen.

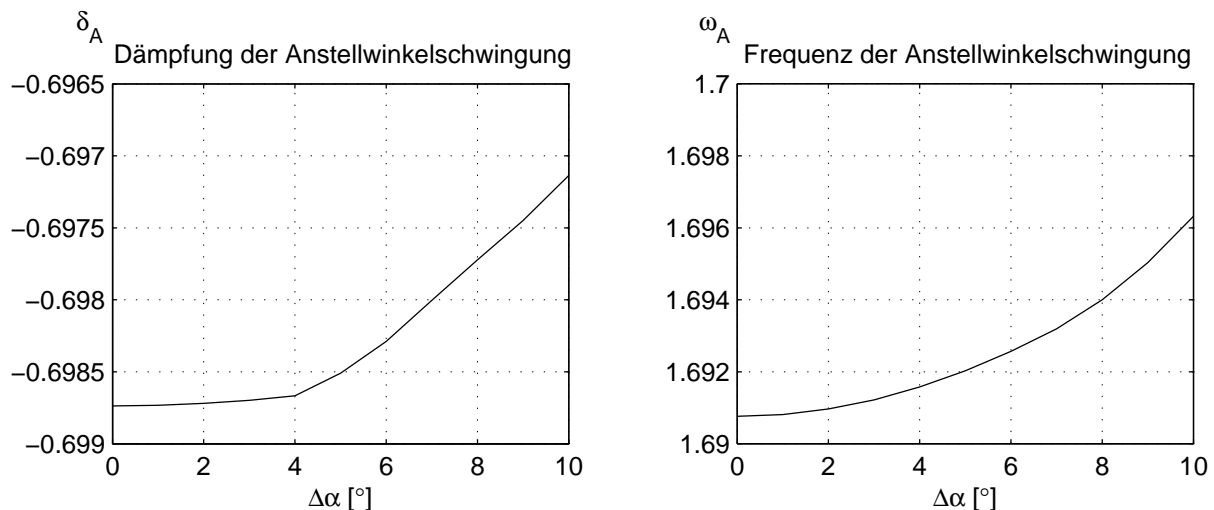


Abbildung 5.16: Eigenwertverl. der  $\alpha$ -Schwingung (flexibles Flugzeug,  $V = 120 \text{ m/s}$ )

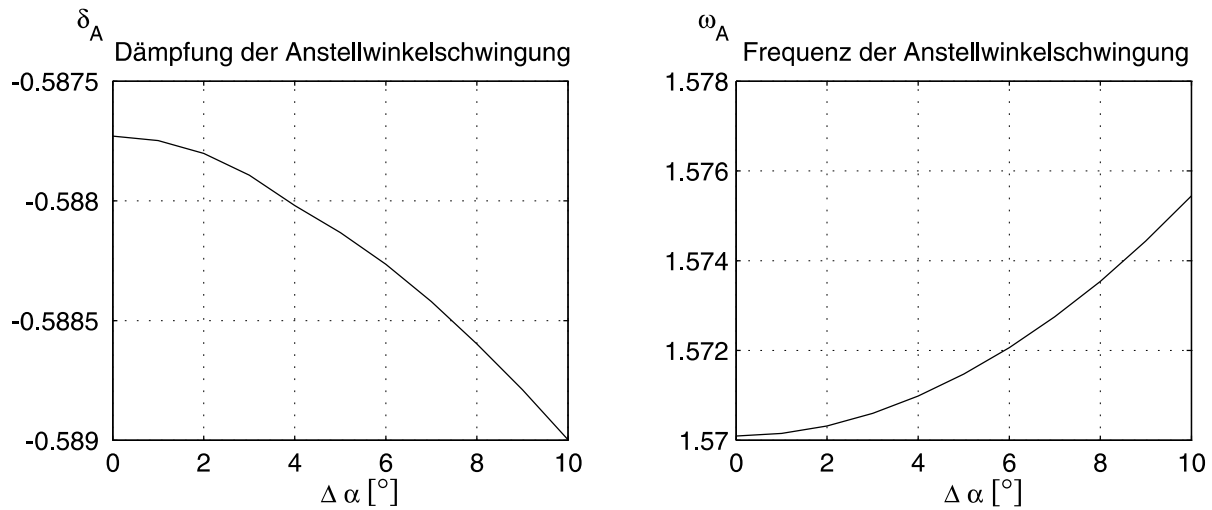
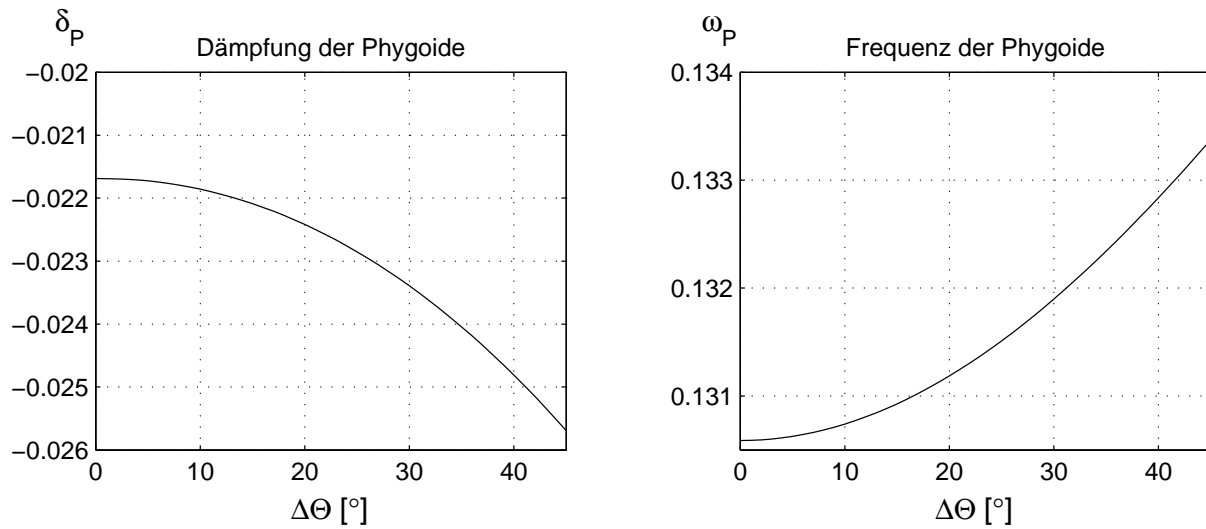
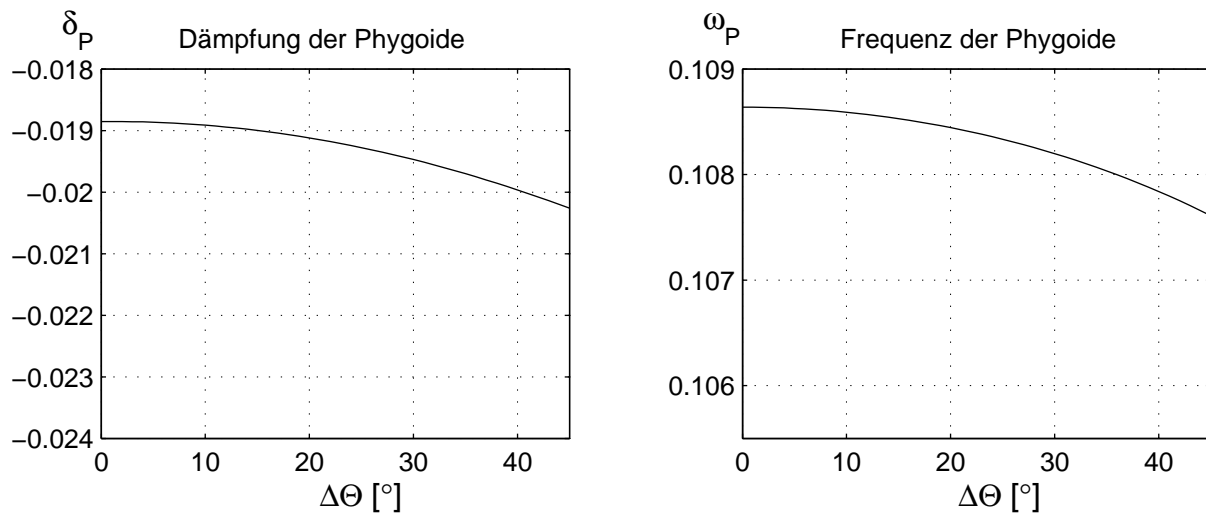


Abbildung 5.17: Eigenwertverl. der  $\alpha$ -Schwingung (starres Flugzeug,  $V = 120 \text{ m/s}$ )

#### 5.2.4 Phygoide

Typischerweise zeichnet sich die Phygoide durch einen stetigen Austausch von kinetischer und potentieller Energie in Form von Fluggeschwindigkeit und Flughöhe aus. Dies geschieht mit niedriger Frequenz, wobei die Änderung des Nickwinkels gegenüber den Änderungen der anderen Zustandsgrößen dominiert. Aufgrund ihrer Dominanz wurde daher die Nickwinkeländerung  $\Delta\Theta$  für diese Analyse als Auslenkungsamplitude gewählt. Die Ergebnisse der nichtlinearen Analyse der Phygoide des flexiblen Flugzeuges bei  $V = 120 \text{ m/s}$  sind in Abbildung 5.18 dargestellt. Obwohl bei realen Flugzeugen in der Praxis sicher nur mit erheblich geringeren Nickwinkelschwankungen zu rechnen ist, wurde die Analyse zur Verdeutlichung der auftretenden Effekte bis zu einer Auslenkungsamplitude von  $\Delta\Theta = 45^\circ$  durchgeführt. Bis zu  $\Delta\Theta = 45^\circ$  wächst der negative Realteil  $\delta_P$  des Eigenwertes von  $-0.0217$  auf  $-0.0256$  an. Dies entspricht einer Vergrößerung der Dämpfung um 18%. Die Frequenz der Bewegungsform nimmt mit zunehmender Auslenkungsamplitude ebenfalls zu, allerdings mit 2% Zuwachs bis  $45^\circ$  Nickwinkelamplitude deutlich weniger als die Dämpfung. Abbildung 5.19 zeigt die Dämpfungs- und Frequenzverläufe der Phygoide des starren Flugzeuges, ausgehend vom gleichen Gleichgewichtspunkt. Man erkennt ebenfalls eine Vergrößerung des negativen Realteils des Eigenwertes, jedoch mit einem kleineren Gradienten als im Falle des flexiblen Flugzeuges. Bis zur Auslenkungsamplitude von  $\Delta\Theta = 45^\circ$  ergibt sich hier eine Änderung von 7%. Die Änderung der Frequenz fällt mit 1% ebenfalls geringer aus als beim flexiblen Flugzeug, wobei nun eine Frequenzabnahme

Abbildung 5.18: Eigenwertverlauf der Phyoide (flexibles Flugzeug,  $V = 120 \text{ m/s}$ )Abbildung 5.19: Eigenwertverlauf der Phyoide (starres Flugzeug,  $V = 120 \text{ m/s}$ )

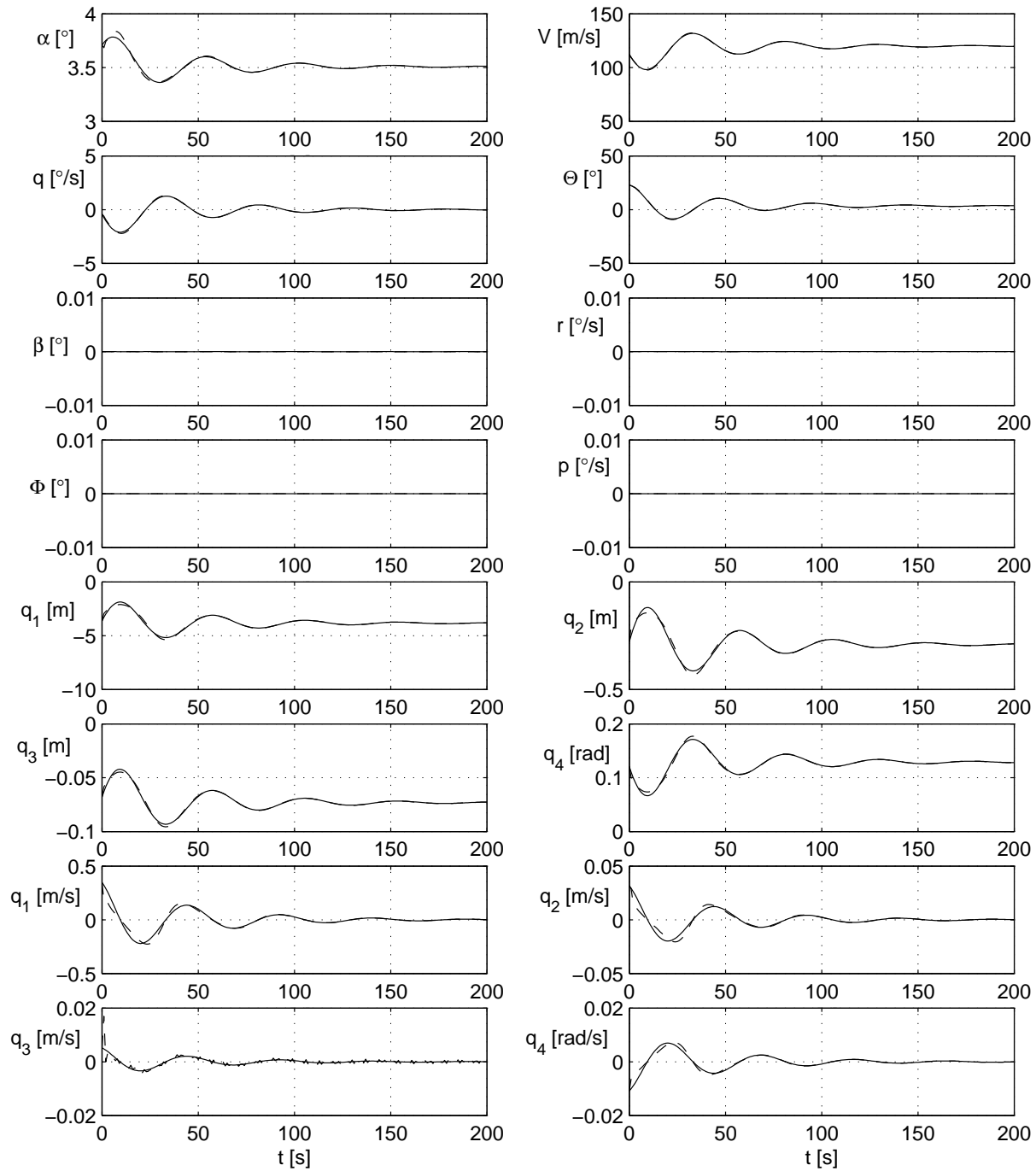


Abbildung 5.20: Verlauf der Zustandsgrößen bei der Phygoide (flexibles Flugzeug,  $V = 120 \text{ m/s}$ , Anfangsauslenkung  $\Delta\Theta = 20^\circ$ , — ASTAN, - - - RKF)

zu beobachten ist.

Die Zeitverläufe der Zustandsgrößen der Phygoide (Abbildung 5.20) zeigen, dass im betrachteten Bezugsflugzustand bei einer Anfangsamplitude von  $\Delta\Theta = 45^\circ$  die Flugeschwindigkeit während der Schwingung zwischen 100 und 150  $m/s$  betragen kann. Daher sind bei der Phygoide alleine schon aufgrund der Abhängigkeit der Luftkräfte vom Quadrat der Flugeschwindigkeit nichtlineare Effekte sowohl beim flexiblen, als auch beim starren Flugzeug zu erwarten. Im Fall des flexiblen Flugzeuges kommen zusätzlich noch die mit der Flugeschwindigkeit zunehmenden elastischen Verformungen mit den entsprechend veränderten Luftkräften hinzu. Insbesondere die nichtlinearen Widerstandskräfte aufgrund der Flügeltorsion entfalten dabei eine dämpfende Wirkung auf die Bewegungsform.

### 5.2.5 Taumelschwingung

In den Abbildungen 5.21 und 5.22 sind die Kenngrößenverläufe der Taumelschwingung in Abhängigkeit der Schiebwinkelamplitude  $\Delta\beta$  für das flexible und das starre Flugzeug dargestellt. Wieder wurde mit einer maximalen Auslenkungsamplitude von  $\Delta\beta = 30^\circ$  ein deutlich größerer Schiebewinkelbereich als im Realfall zu erwarten ist, untersucht. Beide Flugzeugmodelle zeigen ein sehr ähnliches Verhalten. Die schwache Dämpfung nimmt mit zunehmender Schiebewinkelamplitude ab, während die Frequenz zunimmt. Beide Änderungen fallen allerdings mit 3.5% bzw. 0.5% sehr gering aus. Die Taumelschwingung zeigt

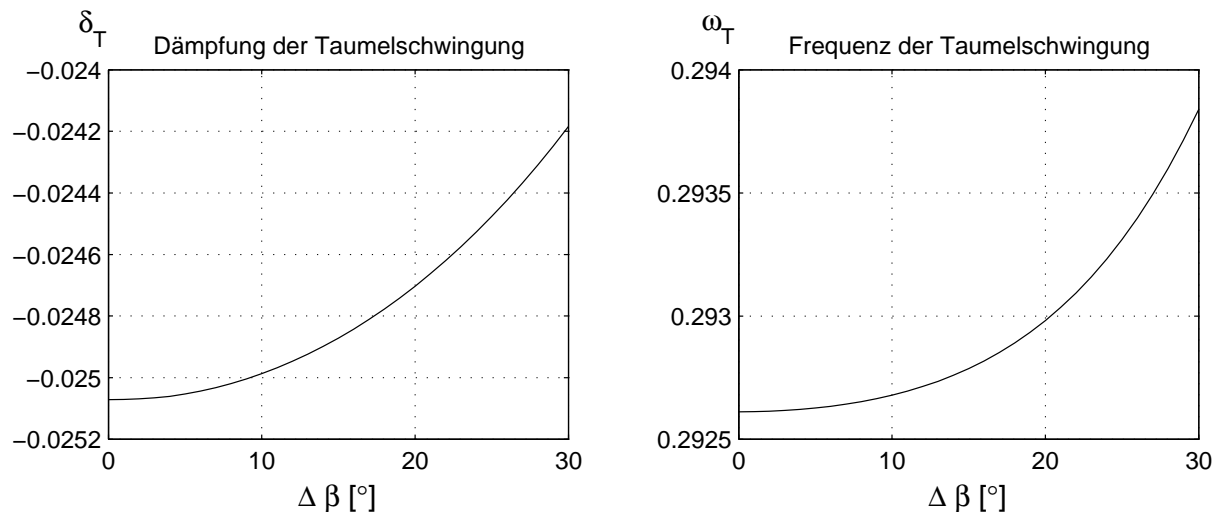


Abbildung 5.21: Eigenwertverlauf der Taumelschw. (flexibles Flugzeug,  $V = 120 m/s$ )

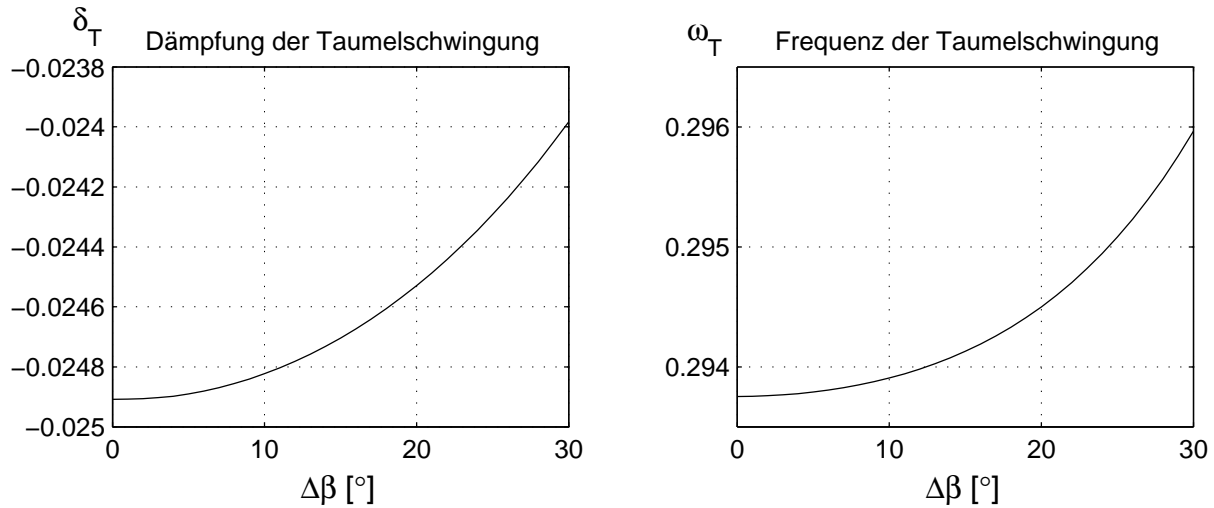


Abbildung 5.22: Eigenwertverlauf der Taumelschwingung (starres Flugzeug,  $V = 120 \text{ m/s}$ )

als oszillierende Seitenbewegungsform kaum Auswirkungen auf die Zustandsgrößen der Längsbewegung und somit auch nicht auf die ausschließlich symmetrisch modellierten elastischen Zustandsgrößen. Dementsprechend spielt die elastische Verformung im Fall der Taumelschwingung keine Rolle, so dass das starre und das flexible Flugzeug hier gleiches Verhalten aufweisen.

### 5.2.6 Rollbewegung

Die Rollbewegung stellt mit ihrem rein reellen Eigenwert die erste der beiden aperiodischen Bewegungsformen dar. Sie weist mit  $\delta_R \approx -1.95$  eine starke Dämpfung auf, die sich auch bei hohen Auslenkungswerten der bei dieser Bewegungsform dominanten Rollrate  $\Delta p$  kaum ändert (Abbildung 5.23). Die nichtlineare Analyse zeigt, dass sowohl beim flexiblen, als auch beim starren Flugzeug die Änderung der Dämpfung gering ist ( $\approx 0.1\%$ ) und die Rollbewegung somit nahezu lineares Verhalten aufweist.

### 5.2.7 Spiralbewegung

Die Spiralbewegung des flexiblen Flugzeuges sticht als einzige instabile Bewegungsform mit einem positiven Eigenwert aus der Menge der Bewegungsformen in Tabelle 5.5 hervor. Ihre Eigenwert und Eigenvektorverläufe sind in Abbildung 5.24 über der Rollwinkel auslenkung  $\Delta\Phi$  aufgetragen. Der bei verschwindender Auslenkung mit  $\Delta\Phi = 0^\circ$  zunächst positive Eigenwert von 0.0040 nimmt mit größer werdender Auslenkung ab, bis er bei

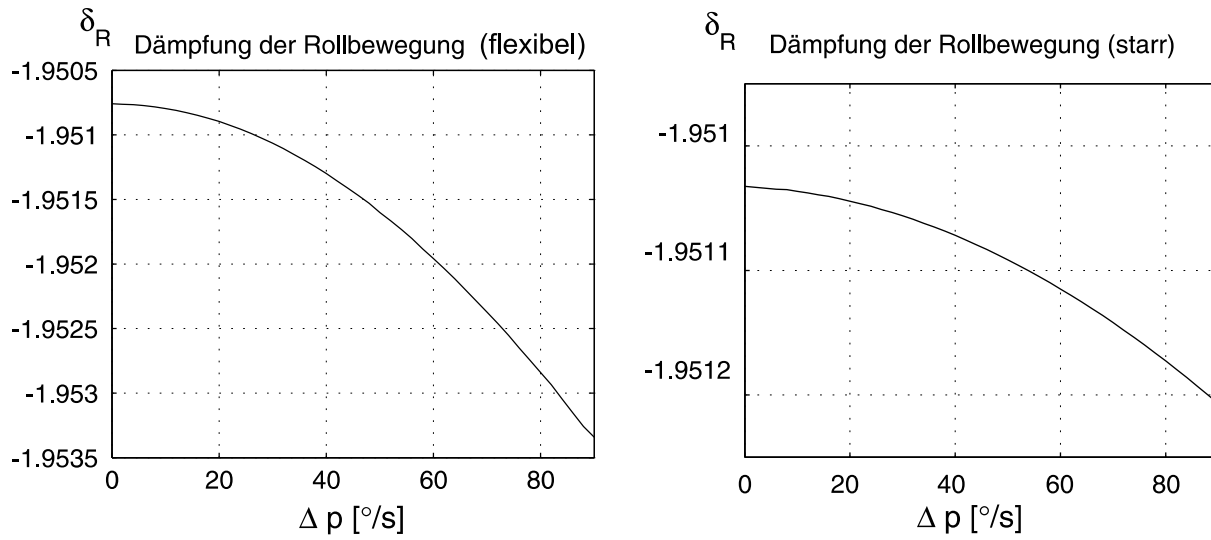


Abbildung 5.23: Eigenwertverläufe der Rollbewegung (starres u. flexibles Flugzeug,  $V = 120 \text{ m/s}$ )

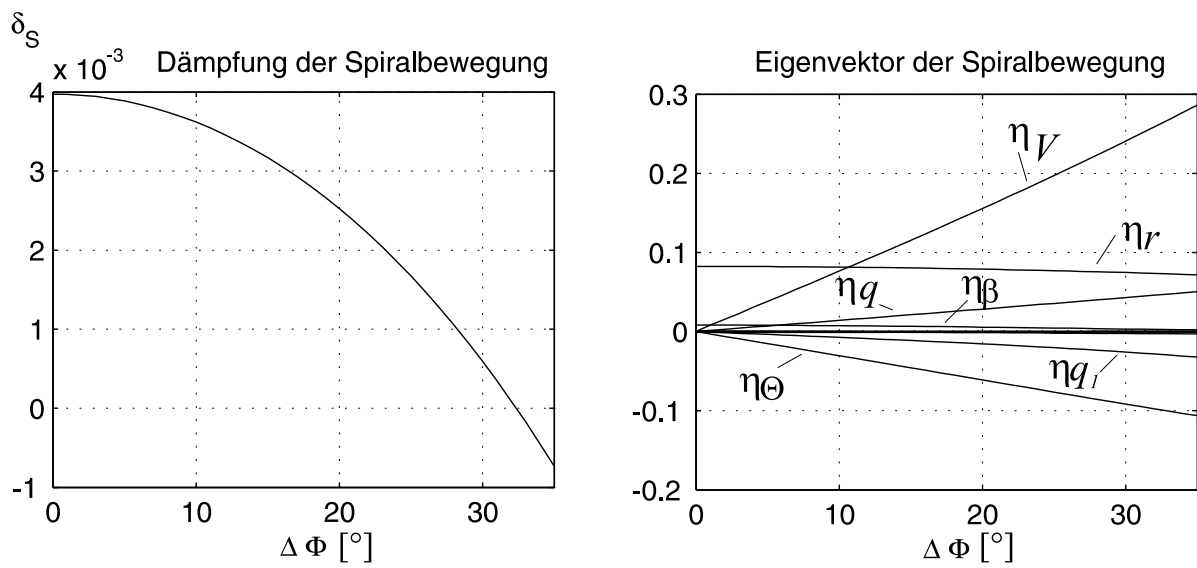


Abbildung 5.24: Eigenwert- und Eigenvektorverlauf der Spiralbewegung a) (flexibles Flugzeug,  $V = 120 \text{ m/s}$ )

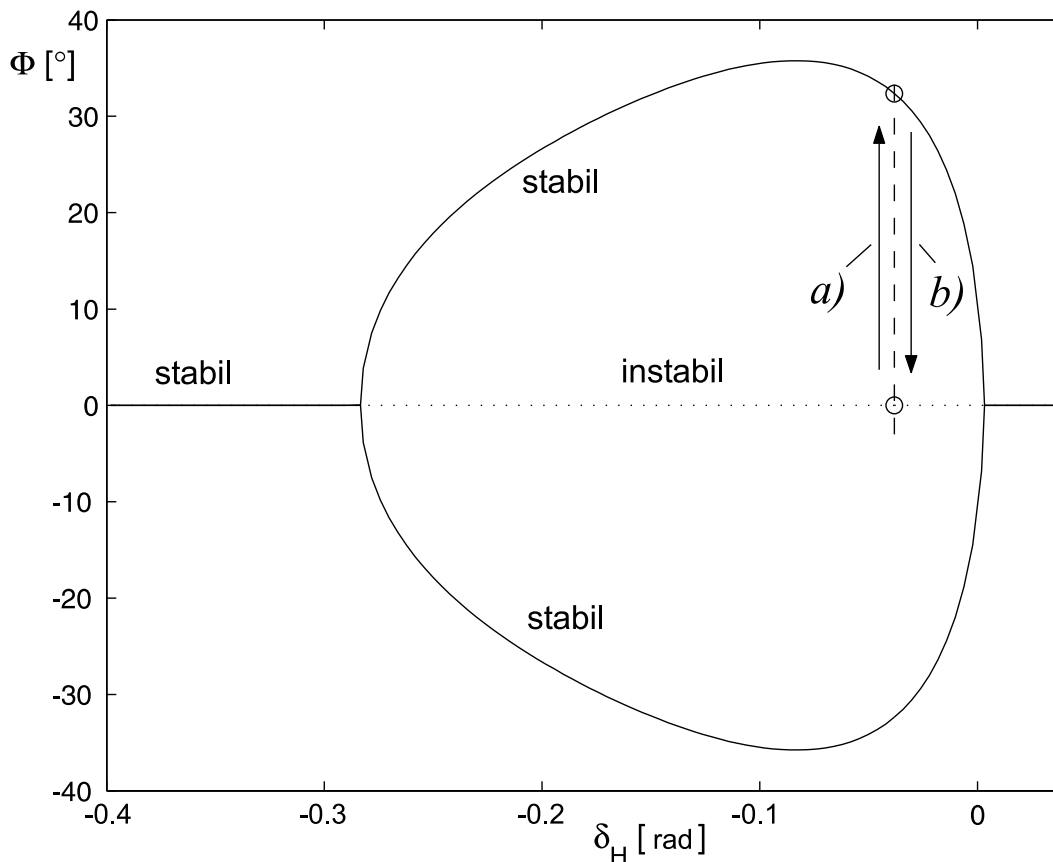


Abbildung 5.25: Bifurkationsdiagramm des Rollwinkels  $\Phi$  über dem Höhenruderausschlag  $\delta_H$

$\Delta\Phi \approx 32^\circ$  schließlich zu 0 wird. Ein verschwindender Eigenwert bedeutet allerdings wegen  $\frac{d(\Delta\Phi)}{dt} = \delta \cdot \Delta\Phi$  (Kap. 2), dass sich  $\Delta\Phi$  im Zeitverlauf nicht weiter ändern kann. Dies bedeutet, dass an dieser Stelle ein neuer, zusätzlicher Gleichgewichtspunkt vorliegen muss.

Das Bifurkationsdiagramm in Abbildung 5.25 soll dieses Verhalten des Systems verdeutlichen. Aufgetragen sind hier die Rollwinkellagen möglicher Gleichgewichtszustände über dem Höhenruderausschlag  $\delta_H$ . Dazu wurde der Gleichgewichtszustand bei  $V = 120 \text{ m/s}$  aus Tabelle 5.4 entnommen und, unter Beibehaltung der anderen Ruderausschläge und des Schubes, die sich bei sukzessiver Änderung des Höhenruderausschlages jeweils neu ergebenden Gleichgewichtslagen, einschließlich ihrer Verzweigungen, ermittelt. Negative Werte des Höhenruderausschlages  $\delta_H$  entsprechen einem 'Ziehen' am Höhenruder, positive einem 'Drücken'. Entsprechend nimmt die Fluggeschwindigkeit von links nach rechts im Bifurkationsdiagramm zu. Bei großem negativen Höhenruderausschlag  $\delta_H$

und entsprechend niedriger Fluggeschwindigkeit existiert zunächst nur eine einzige, stabile Gleichgewichtslage mit  $\Phi = 0^\circ$ , also ein Geradeausflug. Bei Verringerung des Betrages des Höhenruderausschlages und damit Zunahme der Fluggeschwindigkeit über einen bestimmten Punkt hinaus ( $\delta_H \approx -0.284 \text{ rad}$ ) ändert sich das Verhalten jedoch schlagartig. Die stabile Gleichgewichtslage verzweigt sich in eine instabile und zwei stabile Lösungen. Die beiden stabilen Lösungen entsprechen einer stationären Spiralbewegung mit jeweils konstanten Rollwinkeln, einmal rechtsdrehend und einmal linksdrehend. Der Geradeausflug bleibt ebenfalls eine mögliche Lösung, jetzt allerdings als instabile Bewegungsform. Wird der Höhenruderausschlag noch weiter verringert, so vereinen sich die drei möglichen Gleichgewichtszustände bei  $\delta_H \approx 0.002 \text{ rad}$  wieder zu einem einzigen, stabilen Geradeausflug.

Der Ausgangspunkt der in Abbildung 5.24 dargestellten nichtlinearen Analyse ist im Bifurkationsdiagramm auf dem instabilen Zweig mit einem Kreis markiert. Die Analyse entspricht dann einer Stabilitätsuntersuchung entlang der gestrichelten Linie hin zu größeren Werten von  $\Delta\Phi$  entsprechend Richtung *a*) im Bifurkationsdiagramm. Kleine Auslenkungen aus der instabilen Gleichgewichtslage führen bezüglich des Geradeausfluges zu einem divergenten Verlauf der Zustandsgrößen in Richtung des stabilen Zweiges. Eine Auslenkung  $> \approx 32^\circ$ , also über den stabilen Zweig hinaus, wird jedoch ebenfalls auf den stabilen Zweig führen, d.h. bezüglich des Geradeausfluges liegt dann kein divergentes Verhalten mehr vor. Im Eigenwertverlauf spiegelt sich dies durch den Wechsel des Vorzeichens bei  $\approx 32^\circ$  wieder. Die nichtlineare Analyse erlaubt somit eine quantitative Stabilitätsaussage entlang eines vertikalen Schnittes im Bifurkationsdiagramm.

Abbildung 5.26 zeigt den Zeitverlauf der Zustandsgrößen der Spiralbewegung für eine Anfangsauslenkung von  $\Delta\Phi = 5^\circ$ . Dabei wurden die Anfangsauslenkungen der anderen Zustandsgrößen mit Hilfe der über den Eigenvektorverlauf in Abbildung 5.24 festgelegten Amplituden- und Phasenverhältnisse so bestimmt, dass möglichst nur die Spiralbewegung angeregt wurde. Die Zeitverläufe zeigen das erwartete Verhalten: Der zunächst divergente Verlauf führt die Zustandsgrößen weg vom Geradeausflug. Bei größer werdender Auslenkung streben sie jedoch gegen einen neuen Gleichgewichtspunkt mit  $\Phi \approx 32^\circ$ . Der neue, stabile Flugzustand besitzt einen kleineren Anstellwinkel, eine höhere Geschwindigkeit und einen kleineren Nickwinkel, sowie die im stationären Spiralflyg konstanten Drehraten  $p$ ,  $q$ , und  $r$ . Außerdem weisen die vergrößerten Auslenkungen der generalisierten Koordinaten der elastischen Verformung auf eine erhöhte Strukturbelastung im Kurvenflug hin. Dabei zeigen die aus den Eigenwert- und Eigenvektorverläufen rekonstruierten Zeitverläufe eine sehr gute Übereinstimmung mit den Zeitverläufen der direkten Runge-Kutta-Fehlberg-Integration.

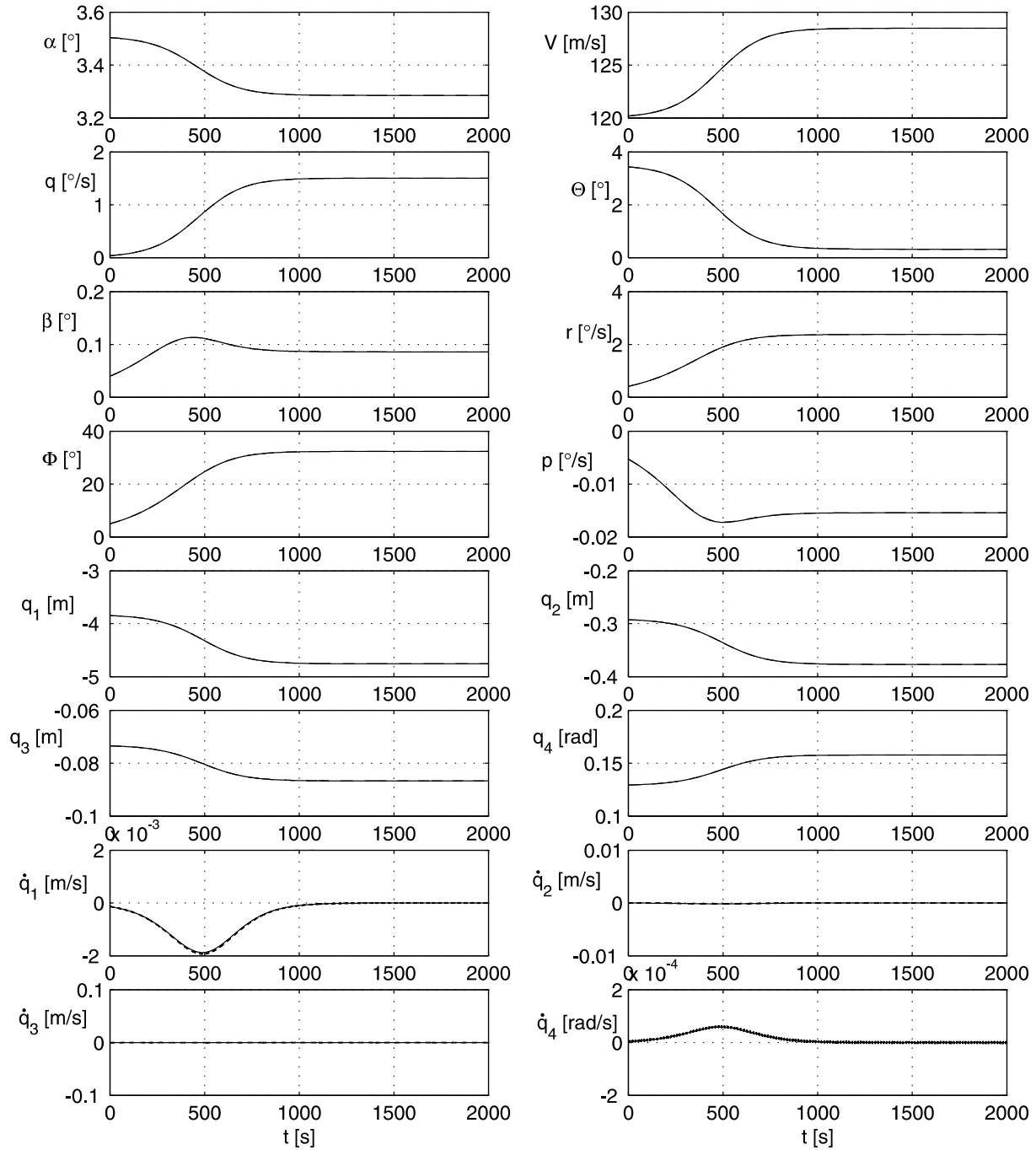


Abbildung 5.26: Verlauf der Zustandsgrößen bei der Spiralbewegung (flexibles Flugzeug,  $V = 120 \text{ m/s}$ , Anfangsauslenkung  $\Delta\Phi = 5^\circ$ , — ASTAN, - - - RKF)

Wird anstelle des instabilen Geradeausfluges einer der stabilen Gleichgewichtspunkte als Ausgangspunkt für eine Analyse genommen, so ergibt sich ein Kenngrößenverlauf gemäß Abbildung 5.27. Diese Analyse ist im Bifurkationsdiagramm mit *b)* gekennzeichnet. Hier wird der zunächst negative Eigenwert der stabilen Bewegungsform mit zunehmendem Auslenkungsbetrag immer kleiner, bis er bei  $\Delta\Phi \approx -32^\circ$  wiederum das Vorzeichen wechselt. Eine Auslenkung von  $\Delta\Phi < -32^\circ$  bezüglich der stabilen Bewegungsform führt über den Zustand des Geradeausfluges hinaus, so dass damit eine Spiralbewegung in die entgegengesetzte Richtung eingeleitet wird. Entsprechend ändert sich das zunächst stabile Verhalten bei einer ausreichend grossen Auslenkung zu einem divergenten Verhalten.

Abbildung 5.28 zeigt den Kenngrößenverlauf für die instabile Spiralbewegung des starren Flugzeuges. Ein Vergleich mit Abbildung 5.24 zeigt, dass auch hier das starre und das flexible Flugzeug eine sehr ähnliche nichtlineare Charakteristik aufweisen. Der neue Gleichgewichtspunkt liegt mit  $\Delta\Phi \approx 30.5^\circ$  nahe an dem des flexiblen Flugzeuges und lediglich die Eigenvektorkomponente der Fluggeschwindigkeit zeigt einen deutlich stärkeren Gradienten. Im Zeitverlauf der Zustandsgrößen (Abbildung 5.29) macht sich dies jedoch lediglich durch eine erhöhte Fluggeschwindigkeit im stationären Spiralflyug von  $V \approx 131 \text{ m/s}$  im Vergleich zu  $V \approx 128 \text{ m/s}$  beim flexiblen Flugzeug bemerkbar. Sowohl das flexible als auch das starre Flugzeug weisen somit bei der Spiralbewegung ein ausgeprägtes nichtlineares Verhalten auf. Die wesentliche Ursache hierfür ist in der Nichtlinearität der

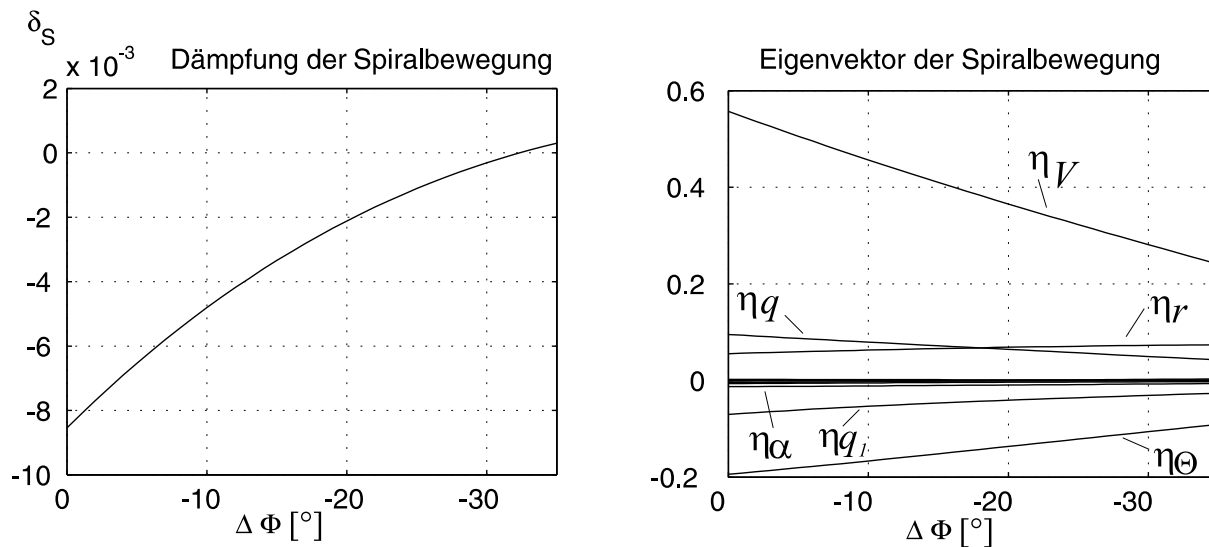


Abbildung 5.27: Eigenwert- und Eigenvektorverlauf der Spiralbewegung *b)* (flexibles Flugzeug,  $V = 120 \text{ m/s}$ )

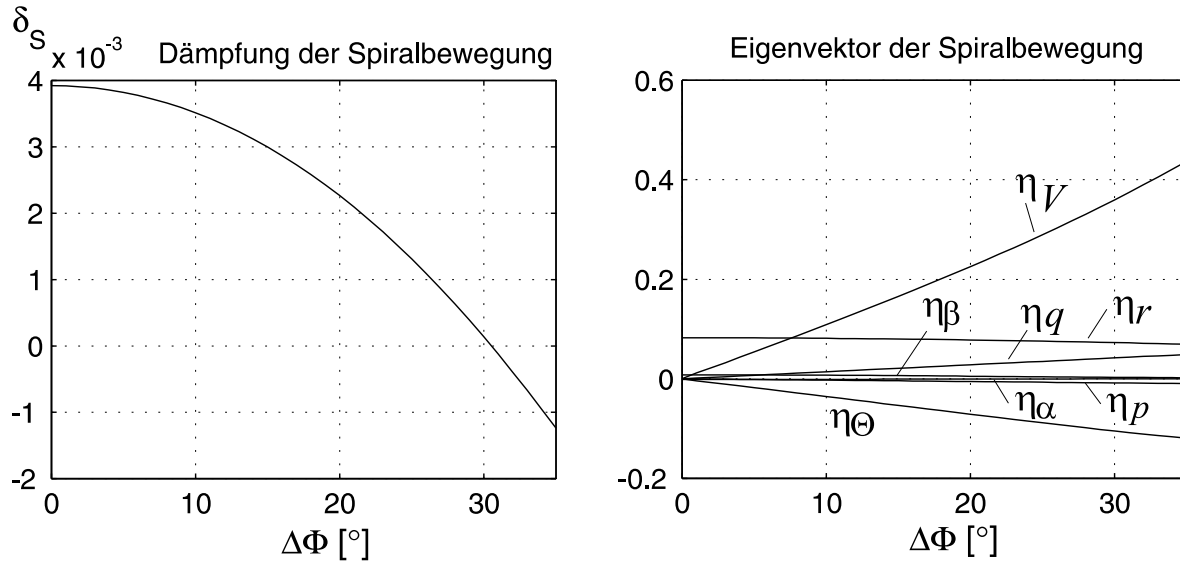


Abbildung 5.28: Eigenwert- und Eigenvektorverlauf der Spiralbewegung a)  
(starres Flugzeug,  $V = 120 \text{ m/s}$ )

Starrkörperdynamik zu suchen. Zum einen macht sich der sinusförmige Einfluss des Gravitationsvektors aufgrund des sich bei der instabilen Bewegungsform schnell aufbauenden Rollwinkels als äußere Kraft in der Dynamik bemerkbar und zum anderen üben die entstehenden Drehraten um alle drei Achsen über die Eulerterme der Bewegungsgleichungen ihren Einfluss aus. Im Zusammenspiel bewirken diese Faktoren, dass ab einem bestimmten Rollwinkel und den dazugehörigen Drehraten der instabile Charakter der Spiralbewegung aufgehoben wird und das Flugzeug eine neue Gleichgewichtslage einnimmt.

### 5.2.8 Elastische Eigenbewegungsformen

Die Abbildungen 5.30 bis 5.33 stellen die Ergebnisse der Analysen der vier elastischen Eigenbewegungsformen dar, wobei als Auslenkungsamplituden jeweils die zugehörigen generalisierten Koordinaten gewählt wurden. Bei allen Bewegungsformen ist deutlich der Einfluss der auslenkungsabhängigen Strukturdämpfung zu erkennen. Die Dämpfung des Systems nimmt mit zunehmender Auslenkungsamplitude zu, wobei die 1. Biegeschwingung ( $q_1$ ) aufgrund des kleineren auslenkungsabhängigen Strukturdämpfungsanteils (Tabelle 5.3) einen weniger ausgeprägten Realteilzuwachs des Eigenwertes aufweist als die anderen elastischen Schwingungsformen. Bei den drei Biegeeigenformen ( $q_1$ - $q_3$ ) zeigt sich eine Verringerung der Schwingungsfrequenz bei zunehmender Auslenkungsamplitude. Die

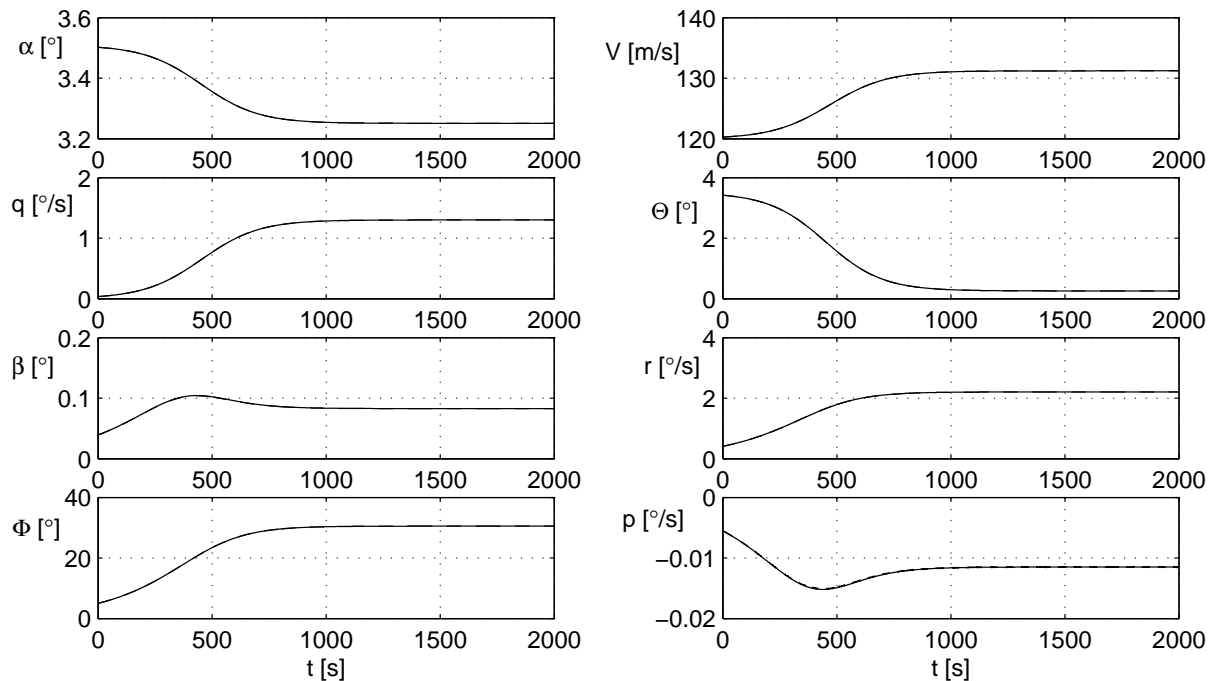


Abbildung 5.29: Verlauf der Zustandsgrößen bei der Spiralbewegung (starres Flugzeug,  $V = 120 \text{ m/s}$ , Anfangsauslenkung  $\Delta\Phi = 5^\circ$ , — ASTAN, - - - RKF)

Torsionsschwingung zeigt hingegen eine Zunahme der Frequenz bei Vergrößerung von  $\Delta q_4$ .

### 5.2.9 Analyse des Einflusses einfacher Reglerstrukturen

Im Gleichgewichtspunkt bei  $V = 120 \text{ m/s}$  besitzt das flexible Flugzeug einen Eigenwert von  $\mu_A = -0.699 \pm 1.691i$  für die Anstellwinkelschwingung und einen Eigenwert von  $\mu_P = -0.022 \pm 0.131i$  für die Phygoide (Tabelle 5.5). Bei der Anstellwinkelschwingung entspricht dies einem Dämpfungsgrad von  $D = 0.38$  bei einer ungedämpften Eigenkreisfrequenz von  $\omega_0 = 0.29 \text{ Hz}$  und bei der Phygoide einem Dämpfungsgrad von  $D = 0.164$  bei einer ungedämpften Eigenkreisfrequenz von  $\omega_0 = 0.021 \text{ Hz}$ . Damit liegen die dynamischen Eigenschaften der Längsbewegung des unregulierten, flexiblen Flugzeuges am Rande des für Flugzeuge dieser Kategorie üblicherweise als zufriedenstellend erachteten Flugeigenschaftsspektrums [30].

Die Flugeigenschaften sollen daher im Folgenden mit Hilfe einer Basisregelung durch Zustandsvektorrückführung verbessert werden. Dazu werden die Zustandsgrößen  $\alpha, V, q$  und  $\Theta$  über einen Verstärkungsvektor  $\mathbf{K}$  auf den getrimmten Höhenruderausschlag  $\delta_{H_t}$

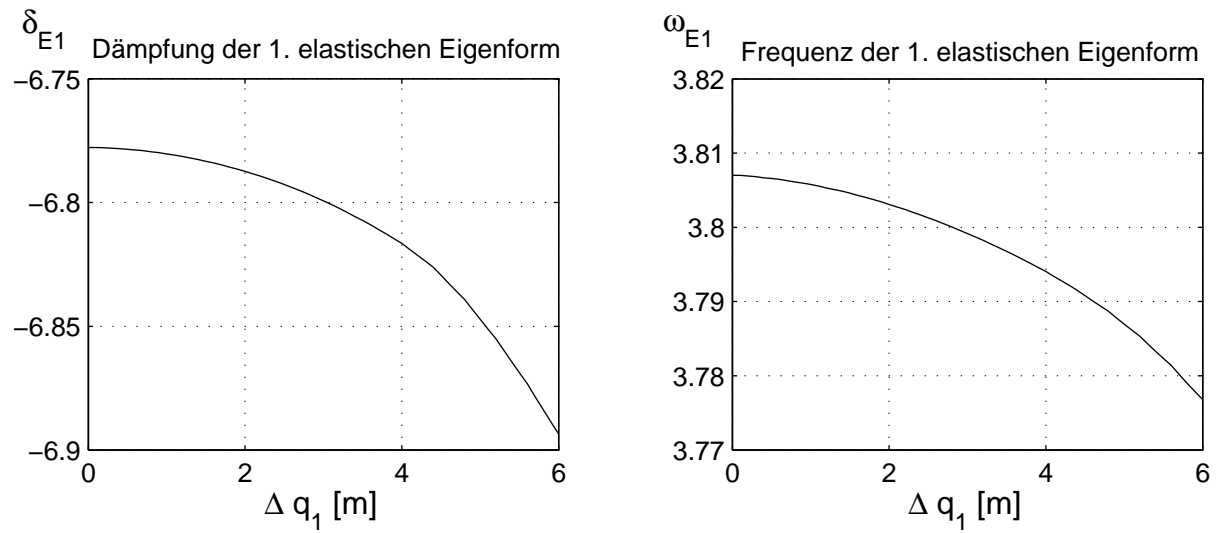


Abbildung 5.30: Eigenwertverlauf der 1. elastischen Bewegungsform (flexibles Flugzeug,  $V = 120 \text{ m/s}$ )

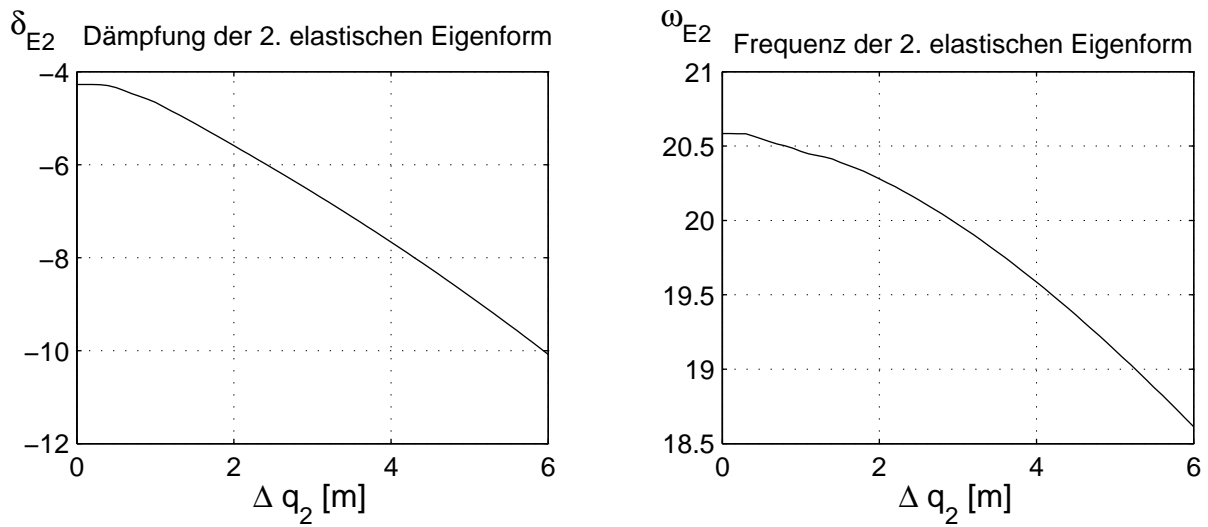


Abbildung 5.31: Eigenwertverlauf der 2. elastischen Bewegungsform (flexibles Flugzeug,  $V = 120 \text{ m/s}$ )

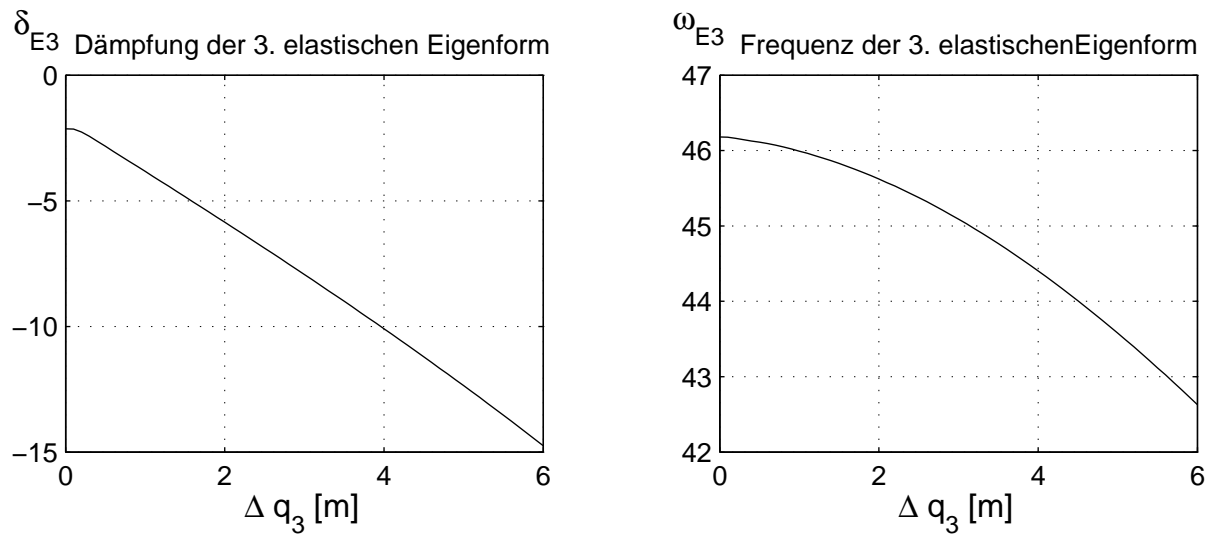


Abbildung 5.32: Eigenwertverlauf der 3. elastischen Bewegungsform (flexibles Flugzeug,  $V = 120 \text{ m/s}$ )

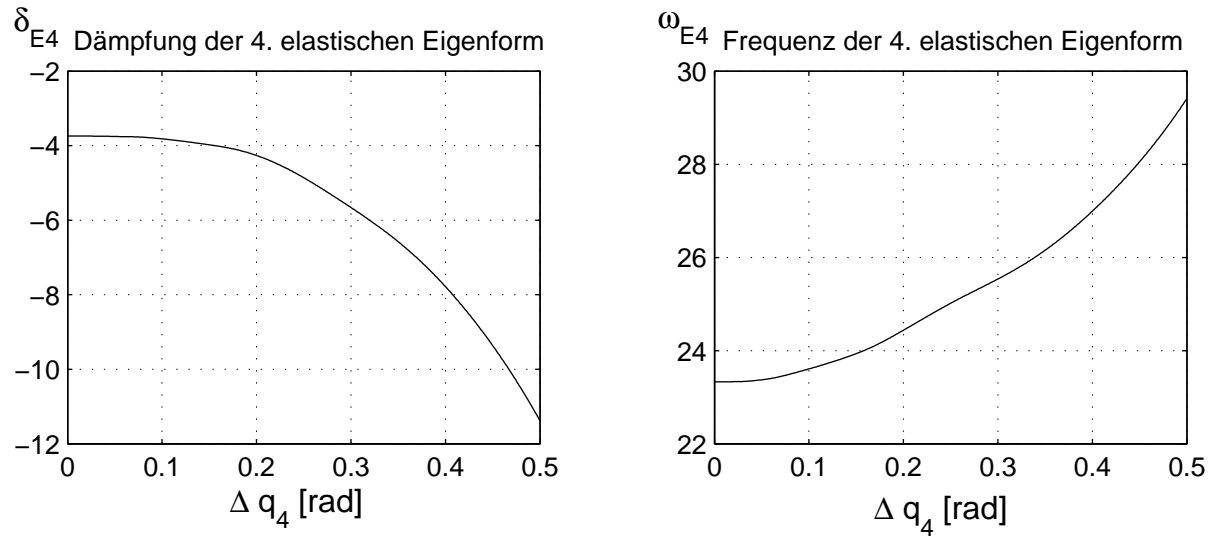


Abbildung 5.33: Eigenwertverlauf der 4. elastischen Bewegungsform (flexibles Flugzeug,  $V = 120 \text{ m/s}$ )

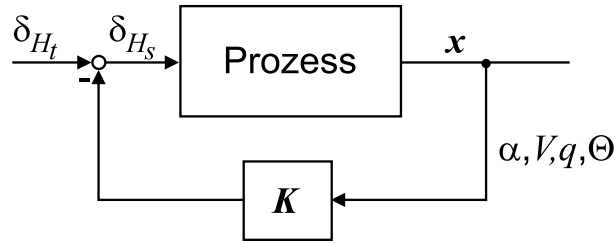


Abbildung 5.34: Zustandsvektorrückführung

zurückgeführt (Abbildung 5.34). Das Regelgesetz für den einzustellenden Höhenruderausschlag  $\delta_{H_s}$  ergibt sich damit zu

$$\delta_{H_s} = \delta_{H_t} - \mathbf{K} \begin{bmatrix} \alpha \\ V \\ q \\ \Theta \end{bmatrix}. \quad (5.70)$$

Die Eigendynamik des Stellgliedes wird in Form eines Verzögerungsgliedes 1. Ordnung modelliert. Dazu werden die Differentialgleichungen der Flugzeugbewegung um den Stellgliedfreiheitsgrad  $\delta_H$  erweitert:

$$\dot{\delta}_H = \frac{1}{T_s} (\delta_{H_s} - \delta_H) \quad (5.71)$$

Nach [6] wird als typische Zeitkonstante für hydraulische Reglerservos  $T_s = 0.03 \text{ s}$  angenommen.

Die nichtlinearen Eigenschaften des Stellantriebes werden durch die maximale Stellgeschwindigkeit  $\dot{\delta}_{H_{max}}$  definiert. Dabei hat es sich als günstig erwiesen (vgl. Kap. 2.2.6), die Eingangstellgeschwindigkeit  $\dot{\delta}_H$  nicht durch eine unstetige Funktion auf die limitierte Ausgangstellgeschwindigkeit  $\dot{\delta}'_H$  abzubilden (gestrichelte Linie in Abbildung 5.35), sondern durch eine Funktion mit stetigem Verlauf (durchgezogenen Linie in Abbildung 5.35). Die Abbildungsvorschrift lautet

$$\dot{\delta}'_H = \text{atan} \left( \frac{\dot{\delta}_H}{\dot{\delta}_{H_{max}}} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \cdot \frac{\dot{\delta}_{H_{max}}}{\frac{\pi}{2}}. \quad (5.72)$$

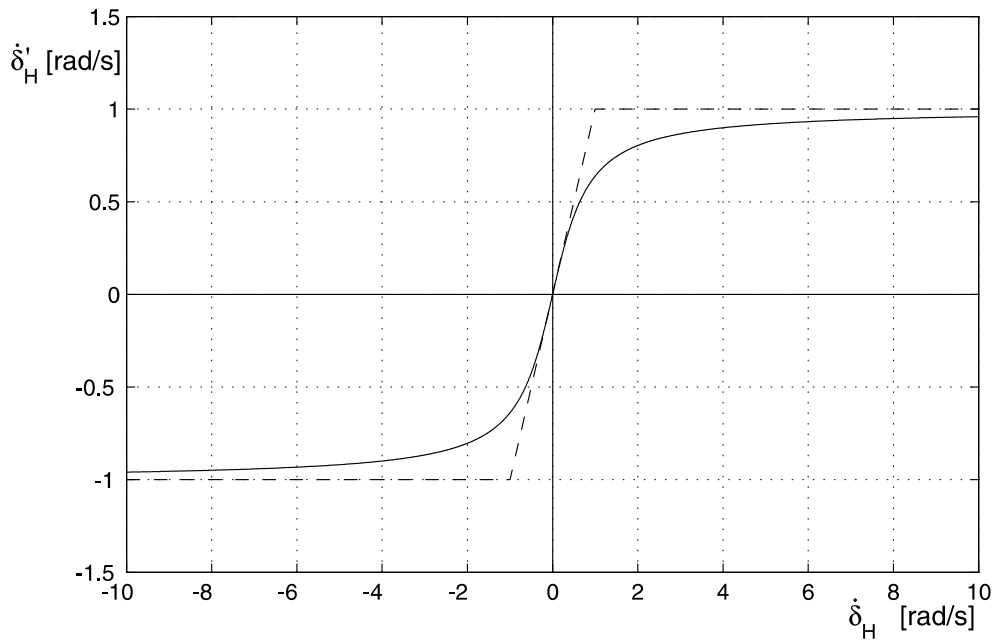
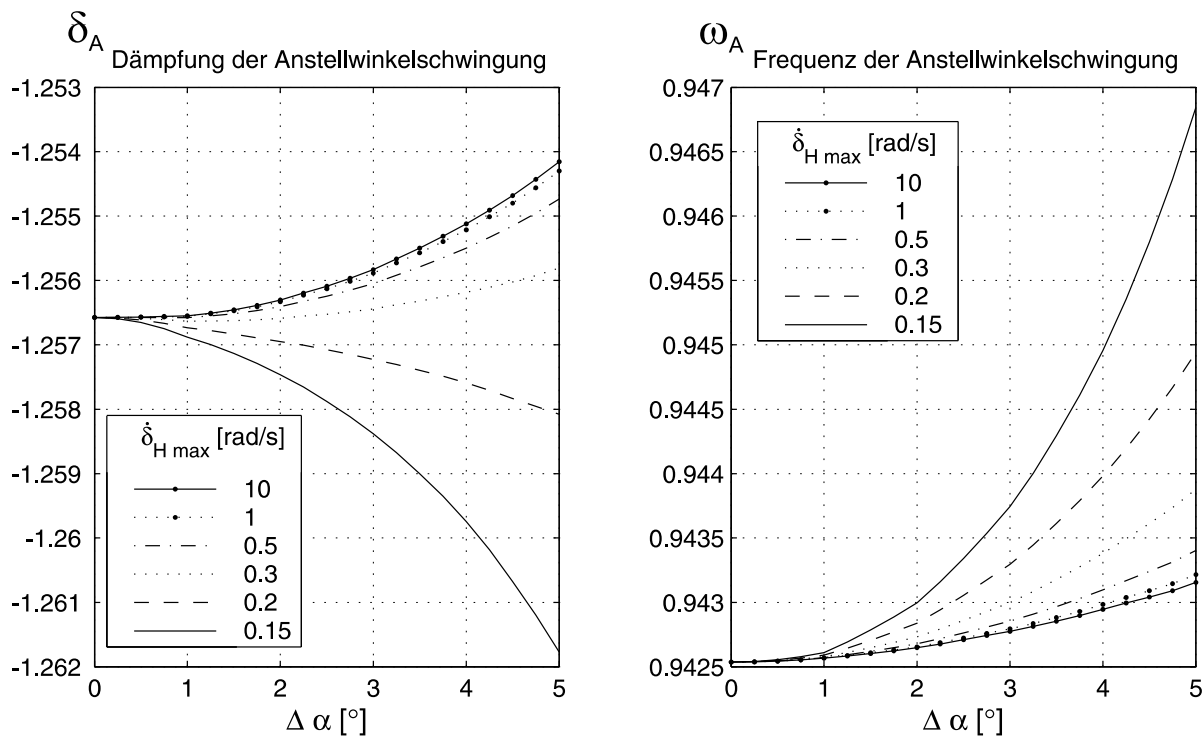


Abbildung 5.35: Limitierung der Ruderstellgeschwindigkeit (hier:  $\dot{\delta}_{H \max} = 1 \text{ rad/s}$ )

Bei einem horizontalen Geradeausflug mit  $V = 120 \text{ m/s}$  wird für die Anstellwinkelschwingung als Auslegungsziel des Reglers ein Dämpfungsgrad von  $D = 0.8$  bei einer ungedämpften Eigenkreisfrequenz von  $\omega_0 = 0.25 \text{ Hz}$  und für die Phygoide ein Dämpfungsgrad von  $D = 0.4$  bei einer unveränderten ungedämpften Eigenkreisfrequenz vorgegeben. Dies entspricht einem Eigenwert von  $\mu_A - 1.256 \pm 0.942i$  für die Anstellwinkelschwingung, bzw.  $\mu_P - 0.053 \pm 0.122i$  für die Phygoide. Nach entsprechender Auslegung des Verstärkungsvektors  $\mathbf{K}$  ergeben sich damit die Eigenwerte des geregelten flexiblen Flugzeuges gemäß Tabelle 5.9. Die Längsbewegung weist jetzt im Gleichgewichtspunkt die gewünschten Eigenwerte auf, während die übrigen Eigenwerte nahezu unverändert bleiben. Lediglich die erste Biegeschwingung wird aufgrund der Nähe ihrer Frequenz zur Anstellwinkelschwingung durch die Zustandsvektorrückführung auf das Höhenruder leicht beeinflusst.

Eine Auswirkung der Nichtlinearität des Stellgliedes auf die Eigenbewegung des Flugzeuges ist vor allem bei der Anstellwinkelschwingung zu erwarten, da hier bei großen Amplituden der zurückgeführten Zustandsgrößen und zusätzlich einer im Vergleich zur Phygoide hohen Frequenz mit den höchsten Laufgeschwindigkeiten des Stellantriebes zu rechnen ist. Abbildung 5.36 zeigt den Verlauf von Dämpfung und Frequenz der Anstellwinkelschwingung über der Auslenkungsamplitude des Anstellwinkels. Dabei sind die

Bewegungsf.	ohne Regler	mit Regler
$\alpha$ -Schw.	$-0.699 \pm 1.691i$	$-1.256 \pm 0.942i$
Phygoide	$-0.022 \pm 0.131i$	$-0.053 \pm 0.122i$
Taumelschw.	$-0.025 \pm 0.293i$	$-0.025 \pm 0.293i$
Rollbew.	$-1.9508$	$-1.9507$
Spiralbew.	$+0.0040$	$+0.0040$
1. Biegeform	$-6.778 \pm 3.807i$	$-6.726 \pm 3.776i$
2. Biegeform	$-4.275 \pm 20.58i$	$-4.276 \pm 20.58i$
3. Biegeform	$-2.133 \pm 46.18i$	$-2.133 \pm 46.18i$
1. Torsionsf.	$-3.743 \pm 23.33i$	$-3.743 \pm 23.33i$

Tabelle 5.9: Eigenwerte des flexiblen Flugzeuges mit u. ohne Regler,  $V = 120 \text{ m/s}$ Abbildung 5.36: Eigenwertverl. der  $\alpha$ -Schwingung (flexibles Flugzeug mit Regler bei unterschiedlichen Stellgeschwindigkeitsbegrenzungen  $\dot{\delta}_{H \max}$ ,  $V = 120 \text{ m/s}$ )

Verläufe für unterschiedliche maximale Laufgeschwindigkeiten  $\dot{\delta}_{Hmax}$  aufgetragen. Bei  $\dot{\delta}_{Hmax} = 10 \text{ rad/s}$  bleibt die bei der Anstellwinkelschwingung erreichte Laufgeschwindigkeit des Stellantriebs stets weit unterhalb von  $\dot{\delta}_{Hmax}$ , so dass die Kenngrößenverläufe praktisch denjenigen eines geregelten Flugzeuges ohne Laufgeschwindigkeitsbegrenzung entsprechen. Qualitativ verhalten sich Dämpfung und Frequenz analog zum unregelmäßigem Flugzeug (Abbildung 5.16), d.h. die Dämpfung nimmt mit zunehmender Auslenkungsamplitude ab, während die Frequenz zunimmt. Bedingt durch die für das Konvergenzverhalten des Verfahrens wichtige kontinuierliche Modellierung der Laufgeschwindigkeitsbegrenzung (Kap. 2.2.6) ist ein Einfluss von  $\dot{\delta}_{Hmax}$  bereits ab  $\dot{\delta}_{Hmax} \approx 1 \text{ rad/s}$  zu erkennen. Die Verringerung der Dämpfung über der Auslenkungsamplitude  $\Delta\alpha$  zeigt sich dann weniger stark ausgeprägt, während die Frequenzsteigerung zunimmt. Diese Tendenz setzt sich bei weiterer Verringerung von  $\dot{\delta}_{Hmax}$  fort, bis es bei sehr niedrigen maximalen Stellgeschwindigkeiten von etwa  $\dot{\delta}_{Hmax} < 0.25 \text{ rad/s}$  sogar zu einer Verstärkung der Dämpfung über der Auslenkungsamplitude kommt. In der Praxis werden die maximalen Stellgeschwindigkeiten bei solch einem Flugzeug allerdings nicht unter  $100^\circ/\text{s}$  bzw.  $1.75 \text{ rad/s}$  liegen, so dass ihr nichtlinearer Einfluss nur sehr schwach ausgeprägt sein wird. Darüber hinaus erweisen sich die absoluten Änderungen von Dämpfung und Frequenz bei Auslenkung aus dem Gleichgewichtspunkt auch beim geregelten Flugzeug als sehr gering. Analog zum unregelmäßigem Fall zeigt das geregelte Flugzeug daher in der Längsbewegung nahezu lineares Verhalten.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Stabilitätsanalyse der Dynamik von Flugzeugen unter Berücksichtigung von Nichtlinearitäten und Strukturelastizität. Nichtlinearitäten im Flugzeugverhalten haben zur Folge, dass klassische, linearisierende Analyseverfahren nur für einen engen Bereich um den betrachteten Linearisierungspunkt Aussagen zum Stabilitätsverhalten zulassen. Nichtlineare Effekte, wie Grenzzyklen oder mehrere gleichzeitig mögliche Gleichgewichtszustände sind somit nicht ohne weiteres erfassbar. Die Einbeziehung der Strukturelastizität in die dynamische Analyse gewinnt an Bedeutung, sobald eine deutliche Trennung der Frequenzspektren von Starrkörper- und elastischer Bewegung nicht mehr gegeben ist. Bei den aktuell geplanten Großflugzeugen ist genau dies der Fall. Die vorgesehenen Spannweiten von ca. 80 m bei sehr großen Abflugmassen führen zu Struktureigenschwingungen, deren niedrigsten Frequenzen in der Größenordnung der höchsten Starrkörperfrequenzen liegen.

Zunächst wurde daher in Kapitel 2 ein Verfahren zur nichtlinearen Analyse dynamischer Systeme vorgestellt (ASTAN-Verfahren). Bei dieser Methode wird in Anlehnung an das Verfahren nach Reitenbacher davon ausgegangen, dass auch nichtlineare Systeme analog zur linearisierenden Analyse in Form von Eigenwerten und Eigenvektoren charakterisiert werden können, wenn diese Kenngrößen nicht als Konstanten, sondern als Funktionen der Auslenkungsamplitude aus dem Gleichgewichtszustand bestimmt werden. Die Bestimmungsgleichungen für die Kenngrößenverläufe werden dabei anders als beim Reitenbacher-Verfahren nicht mehr über ein Quadraturverfahren ermittelt, sondern direkt aus den Differentialgleichungen des Systems und den Lösungsansätzen in Eigenformgestalt. Die Entwicklung der Kenngrößenverläufe über der Auslenkungsamplitude erfolgt dabei iterativ durch schrittweises Lösen der Bestimmungsgleichungen bei gleichzeitiger Approximation der Kenngrößenableitungen mit Hilfe der jeweils zuvor ermittelten Werte. Die Anwendung dieser Methode mit ihren Randbedingungen sowie möglichen Schwierigkeiten wurden anhand des Modells eines Mehrmassenschwingers demonstriert. Es wurde gezeigt, dass insbesondere eine geeignete Wahl der Parametrisierung sowie eine stetige Modellierung der Nichtlinearitäten einen günstigen Einfluss auf des Konvergenzverhalten des Verfahrens haben.

Am Beispiel eines agilen Flugzeuges wurde der Einfluss von aerodynamischen Nichtlinearitäten auf das Stabilitätsverhalten untersucht. Das Modell des agilen Flugzeuges bleibt dabei auf die Freiheitsgrade der Längsbewegung des starren Flugzeuges beschränkt. Die nichtlineare Analyse zeigt, dass die nichtlinearen Luftkräfte bei großen Anstellwinkeln eine starke Abhängigkeit der Eigenwerte von der Auslenkung aus dem untersuchten Gleichgewichtszustand bewirken. Die beobachteten Änderungen im Eigenverhalten, wie z.B. das Anstreben zusätzlicher Gleichgewichtspunkte oder Grenzyklen zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus Bifurkationsanalysen.

Die Berücksichtigung elastischer Strukturverformungen bei der Analyse der Dynamik des Flugzeuges wurde anhand des Beispiels eines Großflugzeuges mit vier flexiblen Flügelfreiheitsgraden demonstriert. Die Einbeziehung des elastischen Verhaltens erfordert die Integration des elastischen Modells in die Bewegungsgleichungen des Flugzeuges. Durch die Beschreibung der Strukturbewegung mittels Eigenschwingungsformen und die Wahl eines geeigneten, nicht fest mit der Flugzeugstruktur verbundenen 'mittleren' Koordinatensystems zur Aufstellung der Starrkörperbewegungsgleichungen kann die inertiale Kopplung zwischen Struktur- und Starrkörperbewegung weitgehend aufgehoben werden. Die Kopplung von Struktur- und Starrkörperbewegung lässt sich so auf angreifende äußere Kräfte reduzieren. Als Ergebnis liegen die vollständigen gekoppelten Bewegungsdifferentialgleichungen des Flugzeuges in einer übersichtlichen Form vor.

Die Analyse der flexiblen Flugzeugkonfiguration zeigt einen deutlichen Einfluss der flexiblen Freiheitsgrade auf die Starrkörperschwingungsformen der Längsbewegung. Je näher die Frequenzen der elastischen Schwingungen an denen der Starrkörperschwingungen liegen, desto größer ist die Abweichung in den Eigenwerten zwischen dem flexiblen und dem als starr angenommenen Flugzeug. Die nichtlineare Analyse zeigt allerdings, dass die Eigenwerte der Starrkörperbewegung sowohl beim flexiblen als auch beim starren Flugzeug selbst bei großen Auslenkungen aus dem Gleichgewichtspunkt nur geringe Änderungen erfahren. Das dynamische Verhalten des Großflugzeuges ist somit weitgehend linear. Lediglich bei der Spiralbewegung zeigt sich eine qualitative Änderung des Eigenverhaltens durch einen Wechsel des Vorzeichens des Eigenwertes bei großer Auslenkung. Die instabile Spiralbewegung wird daher ab einer bestimmten Auslenkung zu einer stabilen Bewegung in einem neuen Gleichgewichtspunkt.

Abschließend wurde der nichtlineare Einfluss eines einfachen Regelsystems zur Verbesserung der Flugeigenschaften mittels Zustandsvektorrückführung untersucht. Dabei zeigt der nichtlinear modellierte Stellantrieb des Regelsystems für die Anstellwinkelschwingung

aufgrund seiner begrenzten Laufgeschwindigkeit einen qualitativen Einfluss auf das dynamische Verhalten des Flugzeuges. Wie beim unregelten Flugzeug sind die absoluten Änderungen von Dämpfung und Frequenz bei realistischen maximalen Stellgeschwindigkeiten allerdings selbst bei großen Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage gering.

Die Untersuchungen mit dem ASTAN-Verfahren liefern Ergebnisse, die über die mit Hilfe von anderen Analysemethoden zu erlangenden Informationen hinausgehen. Es erlaubt quantitative Stabilitätsaussagen auch abseits der Lösungszweige eines Bifurkationsdiagrammes. Damit kann das Verfahren einen wertvollen Beitrag zum Verständnis des Verhaltens von nichtlinearen Systemen leisten. Die Analyse des geregelten Flugzeuges zeigte bei Auslenkung aus dem Bezugsflugzustand einen nichtlinearen Einfluss des Regelsystems auf das Stabilitätsverhalten des Flugzeuges. Für künftige Untersuchungen bietet sich daher an, diesen Einfluss im Entwurfsprozess nichtlinearer Reglerstrukturen zu berücksichtigen. Damit könnten die dynamischen Charakteristiken des geregelten Systems auch weit abseits des Auslegungspunktes sichergestellt werden. Mit dem vorgestellten Verfahren liegt ein geeignetes Werkzeug vor, um das nichtlineare Verhalten mit in den Reglerentwurfsprozess zu integrieren.

# Literaturverzeichnis

- [1] Abed, E. H., Lee, H.-C., Nonlinear Stabilization of High Angle-of-Attack Flight Dynamics Using Bifurcation Control, Proceedings of the 1990 American Control Conference, IEEE Publications, Piscataway, NJ, 1990
- [2] Arning, R., Untersuchung flugmechanischer Eigenschaften eines Raumflugzeugs mit Hilfe frei fliegender Modelle, Berichte aus der Luft- und Raumfahrttechnik, Dissertation an der RWTH-Aachen, Shaker Verlag, 2002
- [3] Beecham, L. J., Titchener, I. M., Some Notes on an Approximate Solution for the Free Oscillation Characteristics of Non-Linear Systems Typified by  $\ddot{x} + F(x, \dot{x}) = 0$ , Ministry of Aviation supply A.R.C., London, 1971, Report and Memoranda No. 3651
- [4] Bogoljubow, N. N., Mitropolski, J. A., Asymptotische Methoden in der Theorie der nichtlinearen Schwingungen, Akademie-Verlag, Berlin, 1965
- [5] Breitbach, E., Grundzüge der Aeroelastik, Vorlesungsumdruck, RWTH Aachen
- [6] Brockhaus, R., Flugregelung, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1994
- [7] Buttrill, C.S., Zeiler, T.A., Arbuckle, P.D., Nonlinear Simulation of a Flexible Aircraft in Maneuvering Flight, AIAA Paper 87-2501-CP, AIAA Flight Simulation Technologies Conference, Monterey, CA, August 1987
- [8] Carroll, J.V., Mehra, K., Bifurcation and Limit Cycle Analysis of Nonlinear Systems with an Application to Aircraft at High Angles of Attack, Proceedings of the 1982 American Control Conference, Vol 1., IEEE, New York, 1982
- [9] Chevalier, H. L., Dornfeld, G. M., Schwanz, R. C., An Analytical Method for Predicting the Stability and Control Characteristics of Large Elastic Airplanes at Subsonic and Supersonic Speeds. Part II, AGARD Conference Proceedings, AGARD CP 46, 1970
- [10] Christopher, P. A. T., Thorne, R., Some Examples of the Application of the Beecham-Titchener-Simpson (BTS) Method to Autonomous Systems, Paper No. 1344, Aeronautical Journal, Dezember 1985
- [11] Coors, D., Definition des Referenzflügels, Interner Bericht, Sonderforschungsbereich 401 der Deutschen Forschungsgemeinschaft, Juli 1997

- [12] DIN 9300, Luftfahrtnorm, Beuth-Verlag GmbH, Berlin, 1990
- [13] Eckmann, J.-P., Kamphorst, S.O., Ruelle, D., Ciliberto, S., Liapunov Exponents from Time Series, *Physical Review A*, Vol. 34, Nr. 6, pp.4971-4979, 1986
- [14] Försching, H. W., *Grundlagen der Aeroelastik*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1974
- [15] Försching, H. W., New Ultra High Capacity Aircraft (UHCA) - Challenges and Problems from an Aeroelastic Point of View, *Zeitschrift für Flugwissenschaft und Weltraumforschung*, No. 18, 1994
- [16] Forbat, N., *Analytische Mechanik der Schwingungen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1966
- [17] Garrad, W.L., Jordan, J.M., *Design of Nonlinear Automatic Flight Control Systems*, *Automatica*, Vol. 13, No.5, 1977
- [18] Gasch, R., Knothe, K., *Strukturodynamik, Diskrete Systeme, Band 1*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1989
- [19] Gasch, R., Knothe, K., *Strukturodynamik, Kontinua und ihre Diskretisierung, Band 2*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1989
- [20] Goloskokow, E. G., Filippow, A. P., *Instationäre Schwingungen mechanischer Systeme*, Akademie-Verlag, Berlin, 1970
- [21] Hagedorn, P., *Non-linear Oscillations*, Oxford Engineering Science Series, Oxford, 1982
- [22] Kasberg, W., *An Approximation Method for Stability Analysis of Nonlinear Systems*, GAMM-Tagung, Bremen, 1998
- [23] König, K., Schuler, J., *Integral Control of Large Flexible Aircraft*, RTO AVT Specialists Meeting on "Structural Aspects of Flexible Aircraft Control", RTO MP-36, Ottawa, 1999
- [24] Krammer, J., *Zum Böenverhalten elastischer Flugzeuge*, Dissertation an der technischen Universität München, 1989

- [25] Krylow, A. N., Bogoljubow, N. N., Anwendung der Methoden der nichtlinearen Mechanik in der Theorie der stationären Schwingungen, Verlag der AN der UdSSR, Kiew, 1934
- [26] Lee, D.-C., Ramesh, K. A., State Feedback Stabilization of an elastic Aircraft Motion, AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit 2000, Denver, AIAA paper 2000-4254, August 2000
- [27] Liaw, D.-C., Song, C.-C., Analysis of Longitudinal Flight Dynamics: A Bifurcation-Theoretic Approach, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 24, No. 1, 2001
- [28] Looye, G., Integrated Flight Mechanics and Aeroelastic Aircraft Modeling using Object-Oriented Modeling Techniques, AIAA 99-4192, 1999
- [29] Majunke, C., Simulation eines Großflugzeuges unter MATLAB/SIMULINK, Studienarbeit, Lehrstuhl für Flugdynamik, RWTH Aachen, 1999
- [30] Military Standard - Flying Qualities of Piloted Aircrafts, MIL-F-8785C, US Air Force Department, 1991
- [31] Milne, R. D., Dynamics of the Deformable Aeroplane, Parts I and II, Her Majestys Stationery Office, Reports and Memoranda No. 3345, September 1962
- [32] Mitropolski, J. A., Probleme der asymptotischen Theorie instationärer Schwingungen, Verlag Nauka, Moskau, 1964
- [33] Nayfeh, A. H., Balachandran, B., Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational and Experimental Methods, Wiley Series in Nonlinear Science, Wiley & Sons, New York, 1995
- [34] Nellessen, D. M., Schallnahe Strömungen um elastische Tragflügel, Fortschrittbericht Reihe 7, Nr.302, VDI Verlag, Düsseldorf, Dissertation an der RWTH-Aachen, 1996
- [35] Orlik-Rückemann, K. J., Techniques for Dynamic Stability Testing in Wind-Tunnels, Paper 1, AGARD-CP-235, 1978
- [36] Pieper, C., Coors, D., Definition der Referenzprofile, Interner Bericht, Sonderforschungsbereich 401, April 1997

- [37] Reitenbacher, S., Ein Verfahren zur approximativen Stabilitätsanalyse von nichtlinearen, dynamischen Systemen und seine Anwendung auf flugmechanische Problemstellungen. Verlag Mainz, Wissenschaftsverlag, Dissertation an der RWTH Aachen, 1996
- [38] Roger, K. L., Airplane Math Modeling Methods for Active Control Design, Structural Aspects of Active Control, AGARD-CP-228, April 1977
- [39] Romanenko, L. G., Krivosheev, S. V., Application of the Direct Lyapunov Method to Nonlinear Problems of Flight Vehicle Lateral Motion Stabilization, Soviet Aeronautics, Vol. 18, Nr. 4, New York, 1975
- [40] Ross, A., Investigation of Nonlinear Motion Experienced on a Slender-Wing Research Aircraft, Journal of Aircraft, Vol. 9, No. 9, pp.625-631, 1972
- [41] Schmidt, D. K., Raney, D. L., Modeling and Simulation of Flexible Flight Vehicles, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 24, No. 3, 2001
- [42] Schuler, J., Modell- und Reglerentwurf für eine flexible Rumpf-Flügel-Kombination, Tagungsband I der DGLR-Jahrestagung, DGLR-JT95-101, 1995
- [43] Schwanz, R. C., Consistency in Aircraft Structural and Flight Control Analysis, Structural Aspects of Active Control, AGARD-CP-228, April 1977
- [44] Schwanz, R. C., Cerra, J. J., Blair, M., Dynamic Modeling Uncertainty Affecting Control System Design, AIAA Paper 84-1057, 1984
- [45] Seydel, R., Practical Bifurcation and Stability Analysis: From Equilibrium to Chaos, 2.Ed., Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1994
- [46] Siepenkötter, N., Approximative Stabilitätsanalyse der nichtlinearen Dynamik von Flugzeugen, Tagungsband I der DGLR-Jahrestagung in Leipzig, DGLR-JT2000-058, 2000
- [47] Siepenkötter, N., Alles, W., Stability Analysis of the Nonlinear Dynamics of Flexible Aircraft, Tagungsband der DGLR-Jahrestagung in Stuttgart, DGLR-JT2002-201, 2002
- [48] Simpson, A., An Algorithm for Autonomous Non-linear Dynamical Equations, Aeronautical quarterly, August 1977

- [49] Titchener, I. M., Development of a Technique for the Analysis of Non-linear Dynamic Characteristics of a Flight Vehicle, Royal Aircraft Establishment, Technical Report 73023, 1973
- [50] Unbehauen, H., Regelungstechnik I - Klassische Verfahren zur Analyse und Synthese linearer kontinuierlicher Regelsysteme, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1986
- [51] Waszak, M. R., Schmidt, D. K., Flight Dynamics of Aeroelastic Vehicles, Journal of Aircraft, Vol. 25, No. 6, pp.563-571, 1988
- [52] Waszak, M. R., Buttrill, C. S., Schmidt, D. K., Modeling and Model Simplification of Aeroelastic Vehicles: An Overview, NASA Technical Memorandum 107691, Sept. 1992
- [53] Waszak, M. R., Schmidt, D. K., A Simulation Study of the Flight Dynamics of Elastic Aircraft: Volume One - Experiment, Results and Analysis, Technical Report NASA CP-4102, NASA, Dec. 1987
- [54] Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., Vastano, J. A., Determining Lyapunov Exponents from a Time Series, Physica 16D, pp. 285-317, 1985
- [55] Wolters, C., Ein Verfahren zur Berechnung des dynamischen Verhaltens räumlicher Mehrmassensysteme und seine Anwendung, Dissertation an der RWTH-Aachen, 2000
- [56] Zagaynov, G. I., Goman, M. G., Bifurcation Analysis of Critical Aircraft Flight Regimes, Int. Council Aeronautical Science, Proceedings Vol. 1, A48-44926 22-01, Toulouse, 1984

## A Kraft- und Momentenbeiwerte

### A.1 Starrkörperfreiheitsgrade

#### A.1.1 Kräfte

$$A = \bar{q} S \left[ C_{A_0} + C_{A_\alpha} \alpha + C_{A_p} p + C_{A_q} q + C_{A_\eta} \eta + \sum_{i=1}^{\infty} (C_{A_{q_i}} q_i + C_{A_{\dot{q}_i}} \dot{q}_i) \right] \quad (\text{A.1})$$

$$C_{A_0} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (c_{A_0} + c_{A_\alpha} i_s) l dy + C_{A_0 Rumpf} \quad (\text{A.2})$$

$$C_{A_\alpha} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} l dy + C_{A_\alpha Rumpf} \quad (\text{A.3})$$

$$C_{A_p} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \frac{y}{u} l dy \quad (\text{A.4})$$

$$C_{A_q} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \frac{x_e + x_s}{u} l dy + C_{A_q Rumpf} \quad (\text{A.5})$$

$$C_{A_{q_i}} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \phi_i^t l dy \quad (\text{A.6})$$

$$C_{A_{\dot{q}_i}} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \frac{1}{u} \phi_i^b l dy \quad (\text{A.7})$$

$$W = \bar{q} S \left[ C_{W_0} + C_{W_\alpha} \alpha + C_{W_{\alpha^2}} \alpha^2 + C_{W_p} p + C_{W_q} q + C_{W_\eta} \eta + \sum_{i=1}^{\infty} (C_{W_{q_i}} q_i + C_{W_{\dot{q}_i}} \dot{q}_i) \right] \quad (\text{A.8})$$

$$C_{W_0} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (c_{W_0} + c_{W_\alpha} i_s) l dy + C_{W_0 Rumpf} \quad (\text{A.9})$$

$$C_{W_\alpha} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{W_\alpha} l dy + C_{W_\alpha Rumpf} \quad (\text{A.10})$$

$$C_{W_{\alpha^2}} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{W_{\alpha^2}} l dy + C_{W_{\alpha^2} Rumpf} \quad (\text{A.11})$$

$$C_{W_p} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{W_{\alpha}} \frac{y}{u} l dy \quad (\text{A.12})$$

$$C_{W_q} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{W_{\alpha}} \frac{x_e + x_s}{u} l dy + C_{W_q Rumpf} \quad (\text{A.13})$$

$$C_{W_{q_i}} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{W_{\alpha}} \phi_i^t l dy \quad (\text{A.14})$$

$$C_{W_{\dot{q}_i}} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{W_{\alpha}} \frac{1}{u} \phi_i^b l dy \quad (\text{A.15})$$

$$Q = \bar{q} S \left[ C_{Q_{\beta}} \beta + C_{Q_p} p + C_{Q_r} r + C_{Q_{\zeta}} \zeta + C_{Q_{\xi}} \xi + \sum_{i=1}^{\infty} (C_{Q_{q_i}} q_i + C_{Q_{\dot{q}_i}} \dot{q}_i) \right] \quad (\text{A.16})$$

$$C_{Q_{\beta}} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{Q_{\beta}} l dy + C_{Q_{\beta} Rumpf} \quad (\text{A.17})$$

$$C_{Q_p} = C_{Q_p Rumpf} \quad (\text{A.18})$$

$$C_{Q_r} = C_{Q_r Rumpf} \quad (\text{A.19})$$

$$C_{Q_{q_i}} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{Q_{\alpha}} \phi_i^t l dy \quad (\text{A.20})$$

$$C_{Q_{\dot{q}_i}} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{Q_{\alpha}} \frac{1}{u} \phi_i^b l dy \quad (\text{A.21})$$

### A.1.2 Momente

$$L = \bar{q} S \frac{b}{2} \left[ C_{l_{\beta}} \beta + C_{l_p} p + C_{l_r} r + C_{l_{\zeta}} \zeta + C_{l_{\xi}} \xi + \sum_{i=1}^{\infty} (C_{l_{q_i}} q_i + C_{l_{\dot{q}_i}} \dot{q}_i) \right] \quad (\text{A.22})$$

$$C_{l_{\beta}} = C_{l_{\beta} Rumpf} C_{l_p} = -\frac{2}{Sb} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_{\alpha}} \frac{y^2}{u} l dy \quad (\text{A.23})$$

$$C_{l_r} = \frac{2}{Sb} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{l_r} l dy \quad (\text{A.24})$$

$$C_{l_{q_i}} = \frac{2}{Sb} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_{\alpha}} \phi_i^t y l dy \quad (\text{A.25})$$

$$C_{l\dot{q}_i} = \frac{2}{Sb} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A\alpha} \frac{1}{u} \phi_i^b y l dy \quad (\text{A.26})$$

$$M = \bar{q} S \bar{l} \left[ C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_p} p + C_{m_q} q + C_{m_\eta} \eta + \sum_{i=1}^{\infty} (C_{m_{q_i}} q_i + C_{m_{\dot{q}_i}} \dot{q}_i) \right] \quad (\text{A.27})$$

$$C_{m_0} = \frac{1}{S\bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[ c_{m_0} + (c_{A_0} + c_{A_\alpha} i_s) \left( \frac{x_e + x_s}{l} \right) \right] l^2 dy + C_{m_0 Rumpf} \quad (\text{A.28})$$

$$C_{m_\alpha} = \frac{1}{S\bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} (x_e + x_s) l dy + C_{m_\alpha Rumpf} \quad (\text{A.29})$$

$$C_{m_p} = \frac{1}{S\bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \frac{y (x_e + x_s)}{u} l dy \quad (\text{A.30})$$

$$C_{m_q} = \frac{1}{S\bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \frac{(x_e + x_s)^2}{u} l dy + C_{m_q Rumpf} \quad (\text{A.31})$$

$$C_{m_{q_i}} = \frac{1}{S\bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} (x_e + x_s) \phi_i^t l dy \quad (\text{A.32})$$

$$C_{m_{\dot{q}_i}} = \frac{1}{S\bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \frac{(x_e + x_s)}{u} \phi_i^b l dy \quad (\text{A.33})$$

$$N = \bar{q} S \frac{b}{2} \left[ C_{n_p} p + C_{n_r} r + C_{n_\zeta} \zeta + C_{n_\xi} \xi + \sum_{i=1}^{\infty} (C_{n_{q_i}} q_i + C_{n_{\dot{q}_i}} \dot{q}_i) \right] \quad (\text{A.34})$$

$$C_{n_p} = \frac{2}{Sb} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{W_\alpha} \frac{y^2}{u} l dy \quad (\text{A.35})$$

$$C_{n_r} = \frac{2}{Sb} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{n_r} l dy + C_{n_r Rumpf} \quad (\text{A.36})$$

$$C_{n_{q_i}} = \frac{2}{Sb} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{W_\alpha} \phi_i^t y l dy \quad (\text{A.37})$$

$$C_{n_{\dot{q}_i}} = \frac{2}{Sb} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{W_\alpha} \frac{1}{u} \phi_i^b y l dy \quad (\text{A.38})$$

## A.2 Elastische Freiheitsgrade

$$A_i = \bar{q} S \bar{l} \left[ C_0^{A_i} + C_\alpha^{A_i} \alpha_v + C_p^{A_i} p + C_q^{A_i} q + \sum_{j=1}^{\infty} (C_{q_j}^{A_i} q_j + C_{\dot{q}_j}^{A_i} \dot{q}_j) \right] \quad (\text{A.39})$$

$$C_0^{A_i} = -\frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (c_{A_0} + c_{A_\alpha} i_s) \phi_i^b l dy \quad (\text{A.40})$$

$$C_\alpha^{A_i} = -\frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \phi_i^b l dy \quad (\text{A.41})$$

$$C_p^{A_i} = -\frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \frac{y}{u} \phi_i^b l dy \quad (\text{A.42})$$

$$C_q^{A_i} = -\frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \frac{x_e + x_s}{u} \phi_i^b l dy \quad (\text{A.43})$$

$$C_{q_i}^{A_i} = -\frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \phi_j^t \phi_i^b l dy \quad (\text{A.44})$$

$$C_{\dot{q}_i}^{A_i} = -\frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \frac{1}{u} \phi_j^b \phi_i^b l dy \quad (\text{A.45})$$

$$B_i = \bar{q} S \bar{l} \left[ C_0^{B_i} + C_\alpha^{B_i} \alpha_v + C_p^{B_i} p + C_q^{B_i} q + \sum_{j=1}^{\infty} (C_{q_j}^{B_i} q_j + C_{\dot{q}_j}^{B_i} \dot{q}_j) \right] \quad (\text{A.46})$$

$$C_0^{B_i} = \frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (c_{A_0} + c_{A_\alpha} i_s) x_s \phi_i^t l dy \quad (\text{A.47})$$

$$C_\alpha^{B_i} = -\frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} x_s \phi_i^t l dy \quad (\text{A.48})$$

$$C_p^{B_i} = \frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \frac{y}{u} x_s \phi_i^t l dy \quad (\text{A.49})$$

$$C_q^{B_i} = \frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \frac{x_e + x_s}{u} x_s \phi_i^t l dy \quad (\text{A.50})$$

$$C_{q_i}^{B_i} = \frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} x_s \phi_j^t \phi_i^t l dy \quad (\text{A.51})$$

$$C_{\dot{q}_i}^{B_i} = \frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \frac{1}{u} x_s \phi_j^b \phi_i^t l dy \quad (\text{A.52})$$

$$C_i = \bar{q} S \bar{l} \left[ C_0^{C_i} + C_\alpha^{C_i} \alpha_v + C_p^{A_i} p + C_q^{C_i} q + \sum_{j=1}^{\infty} (C_{q_j}^{C_i} q_j + C_{\dot{q}_j}^{C_i} \dot{q}_j) \right] \quad (\text{A.53})$$

$$C_0^{C_i} = -\frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (c_{A_0} + c_{A_\alpha} i_s) (x_e + x_s) \phi_i^t l dy \quad (\text{A.54})$$

$$C_\alpha^{C_i} = -\frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} (x_e + x_s) \phi_i^t l dy \quad (\text{A.55})$$

$$C_p^{C_i} = -\frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \frac{y}{u} (x_e + x_s) \phi_i^t l dy \quad (\text{A.56})$$

$$C_q^{C_i} = -\frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \frac{x_e + x_s}{u} (x_e + x_s) \phi_i^t l dy \quad (\text{A.57})$$

$$C_{q_i}^{C_i} = -\frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} (x_e + x_s) \phi_j^t \phi_i^t l dy \quad (\text{A.58})$$

$$C_{\dot{q}_i}^{C_i} = -\frac{1}{S \bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_{A_\alpha} \frac{1}{u} (x_e + x_s) \phi_j^b \phi_i^t l dy \quad (\text{A.59})$$

## B Daten des flexiblen Flugzeuges

### B.1 Kraftbeiwerte

	A		W		Q	
0	$C_{A_0}$	0.3	$C_{W_0}$	0.0649	—	—
$\alpha, \beta$	$C_{A_\alpha}$	4.9088	$C_{W_\alpha}$	0.6165	$C_{Q_\beta}$	-0.3219
$\alpha^2$	—	—	$C_{W_{\alpha^2}}$	2.4527	—	—
$p$	$C_{A_p}$	0.0	$C_{W_p}$	0.0	$C_{Q_p}$	-0.05
$q, r$	$C_{A_q}$	0.4984	$C_{W_q}$	0.0536	$C_{Q_r}$	0.1271
$\eta, \xi$	$C_{A_\eta}$	0.0	$C_{W_\eta}$	0.0	$C_{Q_\xi}$	0.0
$\zeta$	—	—	—	—	$C_{Q_\zeta}$	0.244
$q_1$	$C_{A_{q_1}}$	0.0	$C_{W_{q_1}}$	0.0	$C_{Q_{q_1}}$	0.0
$q_2$	$C_{A_{q_2}}$	0.0	$C_{W_{q_2}}$	0.0	$C_{Q_{q_2}}$	0.0
$q_3$	$C_{A_{q_3}}$	0.0	$C_{W_{q_3}}$	0.0	$C_{Q_{q_3}}$	0.0
$q_4$	$C_{A_{q_4}}$	1.2318	$C_{W_{q_4}}$	0.2151	$C_{Q_{q_4}}$	0.0
$\dot{q}_1$	$C_{A_{\dot{q}_1}}$	0.5951	$C_{W_{\dot{q}_1}}$	0.1039	$C_{Q_{\dot{q}_1}}$	0.0
$\dot{q}_2$	$C_{A_{\dot{q}_2}}$	0.0918	$C_{W_{\dot{q}_2}}$	0.0160	$C_{Q_{\dot{q}_2}}$	0.0
$\dot{q}_3$	$C_{A_{\dot{q}_3}}$	0.3080	$C_{W_{\dot{q}_3}}$	0.00538	$C_{Q_{\dot{q}_3}}$	0.0
$\dot{q}_4$	$C_{A_{\dot{q}_4}}$	0.0	$C_{W_{\dot{q}_4}}$	0.0	$C_{Q_{\dot{q}_4}}$	0.0

## B.2 Momentenbeiwerte

	$L$		$M$		$N$	
0	—	—	$C_{m_0}$	-0.04	—	—
$\alpha, \beta$	$C_{l_\beta}$	-0.2585	$C_{m_\alpha}$	-6.3	$C_{n_\beta}$	0.0735
$p$	$C_{l_p}$	-1.5	$C_{m_p}$	0.0	$C_{n_p}$	-0.0091
$q, r$	$C_{l_r}$	0.0969	$C_{m_q}$	-1.3111	$C_{n_r}$	-0.0027
$\eta, \xi$	$C_{l_\xi}$	-0.1	$C_{m_\eta}$	-2.0	$C_{n_\xi}$	0.0
$\zeta$	$C_{l_\zeta}$	0.0320	—	—	$C_{n_\zeta}$	-0.206
$q_1$	$C_{l_{q_1}}$	0.0	$C_{m_{q_1}}$	0.0	$C_{n_{q_1}}$	0.0
$q_2$	$C_{l_{q_2}}$	0.0	$C_{m_{q_2}}$	0.0	$C_{n_{q_2}}$	0.0
$q_3$	$C_{l_{q_3}}$	0.0	$C_{m_{q_3}}$	0.0	$C_{n_{q_3}}$	0.0
$q_4$	$C_{l_{q_4}}$	$-0.4589 \cdot 10^{-16}$	$C_{m_{q_4}}$	0.3371	$C_{n_{q_4}}$	$0.5736 \cdot 10^{-17}$
$\dot{q}_1$	$C_{l_{\dot{q}_1}}$	$-0.1530 \cdot 10^{-15}$	$C_{m_{\dot{q}_1}}$	0.1527	$C_{n_{\dot{q}_1}}$	$-0.1338 \cdot 10^{-16}$
$\dot{q}_2$	$C_{l_{\dot{q}_2}}$	$0.0459 \cdot 10^{-15}$	$C_{m_{\dot{q}_2}}$	0.0158	$C_{n_{\dot{q}_2}}$	$-0.1147 \cdot 10^{-16}$
$\dot{q}_3$	$C_{l_{\dot{q}_3}}$	$0.0918 \cdot 10^{-15}$	$C_{m_{\dot{q}_3}}$	0.0909	$C_{n_{\dot{q}_3}}$	$-0.1147 \cdot 10^{-16}$
$\dot{q}_4$	$C_{l_{\dot{q}_4}}$	0.0	$C_{m_{\dot{q}_4}}$	0.0	$C_{n_{\dot{q}_4}}$	0.0

## B.3 Elastische Beiwerte

	$Q_1$			$Q_2$		
$(\cdot)$	$C_{(\cdot)}^{A_1}$	$C_{(\cdot)}^{B_1}$	$C_{(\cdot)}^{C_1}$	$C_{(\cdot)}^{A_2}$	$C_{(\cdot)}^{B_2}$	$C_{(\cdot)}^{C_2}$
0	-0.0050	0.0	0.0	-0.0008	0.0	0.0
$\alpha$	-0.0573	0.0	0.0	-0.0088	0.0	0.0
$p$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$q$	0.0381	0.0	0.0	-0.0019	0.0	0.0
$q_1$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$q_2$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$q_3$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$q_4$	-0.0520	0.0	0.0	-0.0170	0.0	0.0
$\dot{q}_1$	-0.0344	0.0	0.0	-0.0171	0.0	0.0
$\dot{q}_2$	-0.0171	0.0	0.0	-0.0170	0.0	0.0
$\dot{q}_3$	-0.0106	0.0	0.0	-0.0097	0.0	0.0
$\dot{q}_4$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

	$Q_3$			$Q_4$		
$(\cdot)$	$C_{(\cdot)}^{A_3}$	$C_{(\cdot)}^{B_3}$	$C_{(\cdot)}^{C_3}$	$C_{(\cdot)}^{A_4}$	$C_{(\cdot)}^{B_4}$	$C_{(\cdot)}^{C_4}$
0	-0.0026	0.0	0.0	0.0	0.0087	-0.0010
$\alpha$	-0.0296	0.0	0.0	0.0	0.1000	0.0
$p$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$q$	0.0316	0.0	0.0	0.0	-0.0931	0.0
$q_1$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$q_2$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$q_3$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$q_4$	-0.0107	0.0	0.0	0.0	0.0660	0.0
$\dot{q}_1$	-0.0106	0.0	0.0	0.0	0.0355	0.0
$\dot{q}_2$	-0.0097	0.0	0.0	0.0	0.0073	0.0
$\dot{q}_3$	-0.0163	0.0	0.0	0.0	0.0070	0.0
$\dot{q}_4$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name Norbert Siepenkötter  
Geburtsdatum 05.11.1968  
Geburtsort München

## Schulbildung

1974-1987 Schulen in Aachen und Krefeld  
Abschluss: allgemeine Hochschulreife am  
Gymnasium Fabritianum in Krefeld

## Studium

10.87-04.90 Studium des Maschinenbaus an der  
Universität / GH Duisburg  
04.90-07.94 Studium des Maschinenbaus mit der  
Vertiefungsrichtung Luft- und Raumfahrt  
an der RWTH Aachen  
Abschluss: Diplom-Ingenieur

## Berufstätigkeit

09.94-03.95 freiberufliche Tätigkeit als beratender  
Ingenieur / Softwareentwicklung  
04.95-06.03 Wissenschaftliche Hilfskraft am  
Lehrstuhl für Flugdynamik und Institut  
für Luft- und Raumfahrt der RWTH Aachen  
07.95-07.03 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am  
Lehrstuhl für Flugdynamik und Institut  
für Luft- und Raumfahrt der RWTH Aachen  
06.99-12.99 freiberufliche Tätigkeit als beratender Ingenieur