

Eindeutige Faktoren von Graphen – Maximale Kantenzahl und Extremalgraphen

Von der Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Mathematikerin Petra Johann
aus Kamen

Berichter: Universitätsprofessor Dr. Eberhard Triesch
Professor Dr. Lutz Volkmann

Tag der mündlichen Prüfung: 25. September 2000

Diese Dissertation ist auf den Internetseiten der Hochschulbibliothek online
verfügbar.

Für Burkhard

Einleitung

Eines der interessantesten Gebiete der Graphentheorie ist sicherlich die extremale Graphentheorie. Jeder, der sich intensiver mit der Graphentheorie befaßt, wird immer wieder auf Probleme stoßen, die – in einem engeren oder weiteren Sinn – zur extremalen Graphentheorie gehören. Ein typisches Problem aus der extremalen Graphentheorie ist das folgende: Gegeben sei eine Klasse \mathcal{G} von Graphen. Man kann sich \mathcal{G} als Menge aller Graphen mit einer bestimmten Eigenschaft vorstellen, z.B. sei \mathcal{G} die Menge aller Kreise. Die Frage lautet dann: Wieviele Kanten darf ein Graph auf n Knoten maximal enthalten, der keinen Graphen aus \mathcal{G} als Teilgraph besitzt? Wir bezeichnen diese maximale Anzahl mit $m_n(\mathcal{G})$ und die Menge aller zugehörigen extremalen Graphen mit $M_n(\mathcal{G})$. Es enthält also jeder Graph mit n Knoten und $m_n(\mathcal{G}) + 1$ Kanten mindestens einen Graphen aus \mathcal{G} als Teilgraph. Wir wollen die obige Frage in der vorliegenden Arbeit wie folgt modifizieren: Wieviele Kanten kann ein Graph auf n Knoten maximal haben, der genau einen Graphen aus \mathcal{G} als Teilgraph besitzt? Wir bezeichnen die maximale Anzahl analog zu oben mit $\tilde{m}_n(\mathcal{G})$ und die Menge aller zugehörigen extremalen Graphen mit $\tilde{M}_n(\mathcal{G})$.

Die Motivation für diese Fragestellung liegt im Bereich der Suchprobleme. Wir untersuchen das sogenannte Identifizierungsproblem, das wir – wie bei vielen Suchproblemen üblich – als Spiel zwischen zwei Spielern A (für Algorithmus) und S (für Strategie) beschreiben wollen. Gegeben sei eine Knotenmenge V der Kardinalität $|V| = n$ und eine Klasse \mathcal{G} von Graphen auf V . Spieler A versucht, einen unbekanntes Graphen G^* mit Knotenmenge V zu identifizieren. Von diesem Graphen weiß er a priori nur, daß er zu \mathcal{G} gehört. Um diesen Graphen zu identifizieren, darf A für je zwei Knoten x und y aus V fragen, ob die Kante $\{x, y\}$ zu G^* gehört oder nicht. Spieler S beantwortet diese Fragen mit „ja“ oder „nein“. Er darf antworten, wie es ihm beliebt, solange stets noch mindestens ein Graph aus \mathcal{G} mit den gegeb-

nen Antworten kompatibel ist. Ziel von A ist es, den unbekanntem Graphen mit möglichst wenig Fragen zu identifizieren, wohingegen S versucht, ihn zu möglichst vielen Fragen zu zwingen. Man beachte hierbei, daß S sich nicht von vornherein auf einen Graphen $G^* \in \mathcal{G}$ festlegen muß. Wir bezeichnen mit $c_n(\mathcal{G})$ die Anzahl der Fragen, welche zur Identifizierung von G^* notwendig sind, falls beide Spieler optimal spielen, und nennen $c_n(\mathcal{G})$ die Komplexität des Spiels.

Aigner und Triesch [2] haben die sogenannte Greedy-Strategie für den Spieler S untersucht. Diese Strategie besteht darin, daß S solange wie möglich „nein“ sagt. Obwohl diese Strategie auf den ersten Blick sehr einfach anmutet, gibt es doch einige Klassen \mathcal{G} , bei denen sich die Verwendung dieser Strategie für S als (im wesentlichen) optimal herausstellt. Wie muß nun A auf diese Strategie reagieren? Bezeichnen wir die von A nacheinander getesteten Kanten mit e_1, e_2, e_3 usw. und den vollständigen Graphen auf V mit K_V , dann muß nach k Tests der gesuchte Graph G^* ein Teilgraph von

$$K_V - \{e_1, \dots, e_k\}$$

sein. Offensichtlich kann A den gesuchten Graphen genau dann nach k Tests identifizieren, wenn der Graph $K_V - \{e_1, \dots, e_k\}$ noch genau einen Graphen aus \mathcal{G} als Teilgraph enthält. Daher ist es für A optimal, sukzessive alle Kanten aus $K_V - H$ zu fragen, wobei H ein Graph aus $\widetilde{M}_n(\mathcal{G})$ ist. A braucht daher bei optimaler Spielweise genau $\binom{n}{2} - \widetilde{m}_n(\mathcal{G})$ Tests, um G^* zu identifizieren, wenn S die Greedy-Strategie anwendet. Da es für S möglicherweise noch bessere Strategien gibt, ergibt sich für die Suchkomplexität die sogenannte Greedy-Schranke:

$$c_n(\mathcal{G}) \geq \binom{n}{2} - \widetilde{m}_n(\mathcal{G}).$$

Diese Dissertation beschäftigt sich mit Eigenschaften von Graphen, welche genau einen Teilgraphen eines bestimmten Typs enthalten. Das erste Kapitel enthält einige grundlegende Definitionen und bereits bekannte Ergebnisse zu diesem Thema. Im zweiten Kapitel untersuchen wir Graphen mit eindeutigem f -Faktor, wobei $f : V \rightarrow \mathbb{N}$ eine beliebige Abbildung von der Knotenmenge des Graphen in die Menge der natürlichen Zahlen ist. Ausgangspunkt unserer Untersuchung ist ein Satz von Jackson und Whitty [12], daß jeder 2-kantenzusammenhängende Graph G mit eindeutigem f -Faktor einen Knoten x_0 enthält, für den $d_G(x_0) = f(x_0)$ gilt. Wir werden zeigen,

daß dieses Ergebnis auch dann gilt, wenn man die Bedingung, daß G 2-kantenzusammenhängend ist, ersetzt durch die Forderung, daß der eindeutige f -Faktor zusammenhängend ist. Für den Fall, daß der Graph keine der obigen Voraussetzungen an den Zusammenhang erfüllt, zeigen wir die Existenz eines Knotens x_0 von G mit $d_G(x_0) = f(x_0) + 1$. Gilt $f(x) = k$ für alle Knoten x des Graphen, so spricht man auch von einem k -Faktor. Im dritten Kapitel untersuchen wir Graphen mit eindeutigem k -Faktor. Wir werden verschiedene Aussagen über die Struktur solcher Graphen zeigen und insbesondere die folgenden Vermutungen von Hendry [11] beweisen: Es sei \mathcal{R}_n^k die Menge der k -regulären Graphen auf n Knoten. Dann gilt für alle $k < n$ mit kn gerade: $\tilde{m}_n(\mathcal{R}_n^k) \leq \frac{n^2}{4} + (k-1)\frac{n}{4}$. Ist $n = 2kl$ für ein $l \in \mathbb{N}$, so gilt sogar Gleichheit und der zugehörige Extremalgraph ist eindeutig bis auf Isomorphie. Ist $\frac{n}{2} < k < n$ mit kn gerade, so gilt $\tilde{m}_n(\mathcal{R}_n^k) = \frac{nk}{2} + \binom{n-k}{2}$. Wir werden auch alle zu dieser Gleichung gehörenden Extremalgraphen bestimmen.

Im vierten Kapitel werden wir uns mit Graphen mit eindeutigem Hamilton-Pfad oder eindeutigem Hamilton-Kreis befassen. Sheehan [15] hat bereits 1977 die maximale Anzahl von Kanten in solchen Graphen bestimmt. Barefoot und Entringer [3] haben 1981 eine rekursive Prozedur zur Konstruktion aller zugehörigen extremalen Graphen angegeben. Wir werden diese Graphen direkt angeben. Ferner werden wir Graphen auf $n + 1$ Knoten untersuchen, welche genau einen Pfad der Länge $n - 1$ enthalten. Wir werden die maximale Anzahl der Kanten solcher Graphen und die zugehörigen extremalen Graphen bestimmen, welche eine interessante Unregelmäßigkeit aufweisen. Ferner werden wir im vierten Kapitel einen Algorithmus konstruieren, der eine neue obere Schranke für die Komplexität des Problems, einen Hamilton-Kreis auf n Knoten zu finden, zeigt.

Das fünfte und letzte Kapitel behandelt Teilgraphen auf einer festen Anzahl $k \leq n$ von Knoten. Wir werden beweisen, daß die Komplexität des zugehörigen Suchproblems höchstens um kn Tests von der Greedy-Schranke abweicht.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	1
1.1	Definitionen	1
1.2	Das Identifizierungsproblem	2
2	Eindeutige f-Faktoren	7
2.1	Allgemeines zu f -Faktoren und Notation	7
2.2	Knoten von kleinem Grad	8
3	Eindeutige k-Faktoren	13
3.1	Über die Nachbarschaft $\Gamma_r(x) \cup \Gamma_b(x)$ eines einzelnen Knoten .	15
3.1.1	$\Gamma_r(x)$ enthält keine blaue Kante	15
3.1.2	$\Gamma_b(x)$ enthält keine rote Kante	18
3.2	Eine Abschätzung für $(d_b(x))_{x \in V}$	20
3.3	Die maximale Anzahl von Kanten in einem Graphen mit eindeutigem k -Faktor für $k \leq \frac{n}{2}$	22
3.4	Die maximale Anzahl von Kanten in einem Graphen mit eindeutigem k -Faktor für $k > \frac{n}{2}$	28
4	Hamilton-Kreise und Hamilton-Pfade	31
4.1	Konstruktion aller Graphen mit genau einem Hamilton-Kreis bzw. Hamilton-Pfad	33
4.2	Ein Algorithmus zur Identifizierung eines Hamilton-Kreises . .	38
4.3	Eindeutige Pfade kürzerer Länge	47
5	Teilgraphen mit kleiner Knotenzahl	59
5.1	Der allgemeine Fall	59
5.2	Vollständige bipartite Teilgraphen	61

Literaturverzeichnis

65

Kapitel 1

Grundlagen

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wollen wir kurz die graphentheoretische Notation vorstellen, welche wir in der vorliegenden Arbeit benutzen werden. Wir übernehmen dabei weitgehend die Notation aus dem Buch *Modern Graph Theory* von Bollobás [6]. Begriffe, die wir nur in einzelnen Kapiteln benötigen, werden wir dort definieren. Im zweiten Abschnitt werden wir das Identifizierungsproblem ausführlich erläutern und einige bereits bekannte Ergebnisse zu diesem Thema vorstellen.

1.1 Definitionen

Ein *Graph* G ist ein geordnetes Paar (V, E) . Dabei ist $V = V(G)$ eine endliche Menge, die Menge der *Knoten* von G , $E = E(G)$ ist eine Teilmenge der Menge der zweielementigen Teilmengen von V . Die Elemente von E nennen wir *Kanten* des Graphen. Die Knoten $x, y \in V$ heißen *Endknoten* der Kante $\{x, y\}$. Statt $\{x, y\}$ schreiben wir gelegentlich auch $x-y$. Enthält G die Kante $\{x, y\}$, so heißen x und y *benachbart* (in G). Wir sagen dann auch, x und y *inzidieren mit der Kante* $\{x, y\}$. Die Menge der Nachbarn eines Knotens $x \in V$ bezeichnen wir mit $\Gamma_G(x)$ oder mit $\Gamma(x)$, der *Grad von x* ist definiert durch $d(x) := d_G(x) := |\Gamma(x)|$. Doppeltes Abzählen liefert sofort die folgende Gleichung:

$$2|E(G)| = \sum_{x \in V(G)} d_G(x). \quad (1.1)$$

Zwei Graphen $G_i = (V_i, E_i)$ ($i = 1, 2$) heißen *isomorph*, falls es eine Bijektion $\sigma : V_1 \rightarrow V_2$ gibt, so daß für alle Knoten $x, y \in V_1$ gilt: $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow$

$\{\sigma(x), \sigma(y)\} \in E_2$. Wir schreiben dann $G_1 \cong G_2$.

Ein Graph $H = (W, F)$ heißt *Teil-* oder *Untergraph* des Graphen $G = (V, E)$, falls $W \subseteq V$ und $F \subseteq E$ gilt. Gilt $W = V$, so heißt H *aufspannender Teilgraph* oder *Faktor* von G . Für $W \subseteq V$ heißt der Graph $G[W] = (W, \{e \in E \mid e \subseteq W\})$ der *durch W induzierte Untergraph* von G . Mit $G - W$ bezeichnen wir den Graphen $G[V \setminus W]$. Für eine Teilmenge F der Kantenmenge E sei $G - F$ der aufspannende Teilgraph mit Kantenmenge $E \setminus F$.

Eine Folge $x_0 - x_1 - x_2 - \dots - x_{l-1} - x_l$ von Knoten x_i ($i = 0, \dots, l$) und paarweise verschiedenen Kanten $x_{i-1} - x_i$ ($i = 1, \dots, l$) heißt ein *Kantenzug der Länge l* . Gilt $x_0 = x_l$, so sprechen wir von einem *geschlossenen Kantenzug*. Ein *Pfad der Länge l* ist ein Kantenzug der Länge l , bei dem alle Knoten paarweise verschieden sind, ein *Kreis der Länge l* ist ein geschlossener Kantenzug der Länge l , bei dem die Knoten x_0, \dots, x_{l-1} paarweise verschieden sind. Bis auf Isomorphie gibt es genau einen Pfad und genau einen Kreis der Länge l . Wir werden im folgenden mit P_l den Pfad der Länge $l - 1$ und mit C_l den Kreis der Länge l bezeichnen. P_l und C_l sind also Graphen auf l Knoten.

Der Graph $G = (V, E)$ heißt *zusammenhängend*, falls je zwei Knoten aus G durch einen Pfad miteinander verbunden sind. Ein maximaler zusammenhängender Teilgraph heißt *Zusammenhangskomponente* oder *Komponente von G* . Für $k \geq 2$ heißt G *k -zusammenhängend*, falls $|V| \geq k + 1$ ist und für jede Teilmenge W von V mit $|W| \leq k - 1$ gilt: $G - W$ ist zusammenhängend. G heißt *k -kantenzusammenhängend*, falls $|V| \geq 2$ ist und für jede Teilmenge F von E mit $|F| \leq k - 1$ gilt: $G - F$ ist zusammenhängend.

1.2 Das Identifizierungsproblem

Gegeben sei eine fest gewählte Knotenmenge V der Kardinalität $|V| = n$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $V = \{1, \dots, n\}$ wählen. Ferner sei \mathcal{G} eine Klasse von Graphen auf V . Dann definieren wir die folgenden Parameter:

$$m_n(\mathcal{G}) := \max\{|E(G)| \mid G \text{ ist Graph auf } V, \text{ welcher keinen Graphen aus } \mathcal{G} \text{ als Teilgraph enthält}\},$$

$$\tilde{m}_n(\mathcal{G}) := \max\{|E(G)| \mid G \text{ ist Graph auf } V, \text{ welcher genau einen Graphen aus } \mathcal{G} \text{ als Teilgraph enthält}\}.$$

Die zugehörigen Mengen der Extremalgraphen bezeichnen wir mit $M_n(\mathcal{G})$ und $\widetilde{M}_n(\mathcal{G})$:

- $M_n(\mathcal{G}) :=$ Menge aller Graphen auf V , die $m_n(\mathcal{G})$ Kanten haben
und keinen Graphen aus \mathcal{G} als Teilgraph enthalten,
 $\widetilde{M}_n(\mathcal{G}) :=$ Menge aller Graphen auf V , die $\widetilde{m}_n(\mathcal{G})$ Kanten haben
und genau einen Graphen aus \mathcal{G} als Teilgraph enthalten.

Das *Identifizierungsproblem*, das wir im folgenden betrachten werden, wurde erstmals von Aigner und Triesch [2] untersucht. Wir beschreiben es als Spiel zwischen zwei Spielern A (für Algorithmus) und S (für Strategie). A versucht, mit Hilfe von Fragen der Art „Enthält G^* die Kante $\{x, y\}$?“ einen unbekanntem Graphen $G^* \in \mathcal{G}$ zu identifizieren. Dabei sind x und y zwei beliebige, von A frei wählbare Knoten aus V . Wir bezeichnen eine solche Frage auch als *Test* der Kante $\{x, y\}$. Spieler S antwortet mit „ja“ oder „nein“. Er darf beliebig antworten, solange noch mindestens ein Graph aus \mathcal{G} diesen Antworten genügt. Ziel von A ist es, den unbekanntem Graphen mit möglichst wenig Fragen zu identifizieren, wohingegen S versucht, ihn zu möglichst vielen Fragen zu zwingen. Man beachte hierbei, daß S sich nicht von vornherein auf einen Graphen $G^* \in \mathcal{G}$ festlegen muß. Es sei \mathcal{A} die Menge der möglichen Vorgehensweisen (Algorithmen) für Spieler A , \mathcal{S} sei die Menge der möglichen Vorgehensweisen (Strategien) für Spieler S . Für $A_0 \in \mathcal{A}$ und $S_0 \in \mathcal{S}$ bezeichnen wir mit $c_n(\mathcal{G}, A_0, S_0)$ die Anzahl der Fragen, die zur Identifizierung des unbekanntem Graphen G^* notwendig sind, falls A Algorithmus A_0 und S Strategie S_0 benutzt. Dann gilt (vgl. z.B. [1], S. 72):

$$c_n(\mathcal{G}) := \max_{S_0 \in \mathcal{S}} \min_{A_0 \in \mathcal{A}} c_n(\mathcal{G}, A_0, S_0) = \min_{A_0 \in \mathcal{A}} \max_{S_0 \in \mathcal{S}} c_n(\mathcal{G}, A_0, S_0).$$

Den Parameter $c_n(\mathcal{G})$ nennen wir auch die *Komplexität* des zu \mathcal{G} gehörenden Identifizierungsproblems. Er gibt die Anzahl der notwendigen Fragen für den Fall an, daß beide Spieler optimal spielen.

Die Greedy-Strategie

Aigner und Triesch haben die folgende Strategie S_g für den Spieler S untersucht, welche sie *Greedy-Strategie* genannt haben. Diese Strategie S_g besteht

darin, daß S solange wie möglich „nein“ sagt. Aigner und Triesch haben gezeigt, daß A , falls er optimal spielen will, dann einen Graphen $H \in \widetilde{M}_n(\mathcal{G})$ wählen und alle Kanten aus $K_V - H$ fragen muß. Auf diese Weise benötigt A genau $\binom{n}{2} - \widetilde{m}_n(\mathcal{G})$ Fragen. Es folgt die sogenannte Greedy-Schranke:

Satz 1.1 (Aigner, Triesch [2]) $c_n(\mathcal{G}) \geq \binom{n}{2} - \widetilde{m}_n(\mathcal{G})$

Die Kenntnis des Parameters $\widetilde{m}_n(\mathcal{G})$ liefert also eine untere Schranke für die Suchkomplexität $c_n(\mathcal{G})$. Im allgemeinen ist die Bestimmung der Parameter $c_n(\mathcal{G})$ und $\widetilde{m}_n(\mathcal{G})$ NP-vollständig (vgl. [2]). Aigner und Triesch haben beide Parameter für die folgenden Graphenklassen bestimmt:

- die Menge \mathcal{S}_n der Sterne $K_{1,n-1}$ auf n Knoten,
- die Menge \mathcal{T}_n der Bäume auf n Knoten,
- die Menge \mathcal{M}_l der perfekten Matchings M_l auf $2l$ Knoten ($2l \leq n$),
- die Menge \mathcal{K}_l der vollständigen Graphen K_l auf l Knoten ($l \leq n$).

Bemerkung 1.2 Wir hatten oben verlangt, daß alle Graphen aus \mathcal{G} die Knotenmenge V haben sollen. Dies ist in den letzten beiden Fällen zunächst nicht der Fall. Z.B. besitzt der Graph K_l für $l < n$ weniger als n Knoten. In diesem Fall kann man jedoch durch Hinzufügen von $n - l$ isolierten Knoten den Graphen K_l mit einem Graphen auf n Knoten identifizieren. Offensichtlich enthält ein Graph G auf n Knoten genau dann einen K_l als Teilgraph, wenn er einen K_l vereinigt mit $n - l$ isolierten Knoten als Teilgraph enthält. In diesem Sinn sind also auch \mathcal{M}_l und \mathcal{K}_l Klassen von Graphen auf n Knoten, und die Parameter $m_n(\mathcal{M}_l)$, $m_n(\mathcal{K}_l)$ usw. sind entsprechend zu verstehen.

Satz 1.3 (Aigner, Triesch [2])

- a) Für $n \geq 3$ gilt: $\widetilde{m}_n(\mathcal{S}_n) = \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{2} \right\rfloor$ und $c_n(\mathcal{S}_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.
- b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $m_n(\mathcal{T}_n) = n - 1$ und $c_n(\mathcal{T}_n) = \binom{n}{2} - 1$.
- c) Für $2l \leq n$ gilt: $\widetilde{m}_n(\mathcal{M}_l) = l^2$ und $c_n(\mathcal{M}_l) = \binom{n}{2} - l^2$.
- d) Für $l \leq n$ gilt: $\widetilde{m}_n(\mathcal{K}_l) = \binom{l}{2} + (l - 2)(n - l) + t(n - l, l)$.
Ist $n \geq (l - 1)^2 + 1$, dann gilt: $c_n(\mathcal{K}_l) = \binom{n}{2} - \binom{l}{2} - (l - 2)(n - l) - t(n - l, l)$.
Dabei bezeichne $t(n - l, l)$ die Turán-Zahl, d.h. die maximale Anzahl von Kanten in einem Graphen auf $n - l$ Knoten ohne einen K_l .

Bemerkung 1.4 Alle obigen Graphenklassen \mathcal{G} besitzen folgende Eigenschaft: Für je zwei isomorphe Graphen F und F' auf Teilmengen von V gilt: $F \in \mathcal{G} \Leftrightarrow F' \in \mathcal{G}$. Solche Klassen sind durch die Angabe eines Repräsentantensystems (bzgl. der Relation \cong) eindeutig bestimmt. Ist $\{H_1, \dots, H_t\}$ ein solches Repräsentantensystem für \mathcal{G} , dann schreiben wir auch $m_n(H_1, \dots, H_t)$ statt $m_n(\mathcal{G})$ usw. Im Fall, daß einer dieser Graphen H_i weniger als n Knoten besitzt, identifizieren wir ihn, wie in Bemerkung 1.2 beschrieben, mit einem Graphen auf n Knoten.

Bemerkung 1.5 (vgl. [2]) In den Fällen a), c) und d) ist die Greedy-Schranke im wesentlichen korrekt, im Fall b) weicht sie von der tatsächlichen Komplexität um einen linearen Term ab. Es fällt in diesem Zusammenhang auf, daß in den Fällen a), c) und d) die Klasse \mathcal{G} bis auf Isomorphie genau ein Element enthält, während dies bei \mathcal{T}_n nicht der Fall ist. ($\{K_l\}$ ist Repräsentantensystem für \mathcal{K}_l , $\{M_l\}$ für \mathcal{M}_l und $\{K_{1,n-1}\}$ für \mathcal{S}_n .) Die Vermutung, daß die Greedy-Schranke im Fall, daß \mathcal{G} bis auf Isomorphie nur ein Element enthält, bis auf einen konstanten Summanden korrekt ist, ist allerdings falsch, wie ein Gegenbeispiel von I. Althöfer (vgl. [2], S. 39) zeigt.

Bemerkung 1.6 Die Fälle c) und d) verleiten noch zu einer weiteren Vermutung: Dazu betrachten wir eine Graphenklasse \mathcal{G} , welche bis auf Isomorphie genau einen Graphen F auf $k < n$ Knoten enthält. F habe die Zusammenhangskomponenten F_1, \dots, F_p . Sei nun $G = (V, E)$ ein Graph aus $\widetilde{M}_n(\mathcal{G}) = \widetilde{M}_n(F)$. Dann enthält G genau eine isomorphe Kopie F' von F als Teilgraphen, und somit ist $W := V(F')$ eine echte Teilmenge von V . E zerfällt in die drei Teilmengen $E(G[W])$, $E(G[V \setminus W])$ und $E_G(W, V \setminus W)$, wobei $E_G(W, V \setminus W)$ die Menge der Kanten aus G bezeichnet, die einen Endknoten in W und den anderen in $V \setminus W$ haben. Offensichtlich darf dann der Teilgraph $G[V \setminus W]$ keine isomorphe Kopie von einer der Zusammenhangskomponenten F_i enthalten. D.h. der Graph $G[V \setminus W]$ hat höchstens $m_{n-k}(F_1, \dots, F_p)$ Kanten. Der Teilgraph $G[W]$ hat andererseits genau einen zu F isomorphen Teilgraphen, nämlich F' , und besitzt somit höchstens $\widetilde{m}_k(F)$ Kanten.

In den Fällen c) und d) (für $2l < n$ bzw. $l < n$) besitzen nun die entsprechenden Teilgraphen genau diese maximale Kantenzahl, d.h. es gilt jeweils $G[V \setminus W] \in M_{n-k}(F_1, \dots, F_p)$ und $G[W] \in \widetilde{M}_k(F)$. Man ist daher versucht, zu vermuten, daß dieser Sachverhalt generelle Gültigkeit besitzt, oder aber daß zumindest für jeden Graphen $G \in \widetilde{M}_n(\mathcal{G})$ entweder $G[V \setminus W] \in M_{n-k}(F_1, \dots, F_p)$ oder $G[W] \in \widetilde{M}_k(F)$ gilt. Dies ist jedoch nicht der Fall, wie wir an einem Beispiel im vierten Kapitel sehen werden.

Kapitel 2

Eindeutige f -Faktoren

2.1 Allgemeines zu f -Faktoren und Notation

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge E , und sei $f : V \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung. Ein aufspannender Teilgraph F von G heißt dann ein f -Faktor von G , falls gilt:

$$d_F(x) = f(x) \quad \text{für jeden Knoten } x \in V.$$

Gilt $f(x) = k$ für alle Knoten $x \in V$, so nennen wir F einen k -Faktor. Demnach ist ein k -Faktor ein k -regulärer aufspannender Teilgraph von G . Es gibt verschiedene notwendige Bedingungen dafür, daß ein Graph einen f -Faktor besitzt. Ist F ein f -Faktor von G , so gilt $2|E(F)| = \sum_{x \in V} f(x)$. Dies impliziert, daß ein f -Faktor nur existieren kann, falls $\sum_{x \in V} f(x)$ gerade ist. Analog kann ein k -Faktor nur existieren, falls $k|V|$ gerade ist. Belck [4] hat 1950 die Graphen charakterisiert, welche einen k -Faktor enthalten. Tutte hat 1952 notwendige und hinreichende Kriterien für die Existenz eines f -Faktors in einem Graphen angegeben (vgl. z.B. [19], [21], [22]). Es ist leicht zu sehen, daß der vollständige Graph K_n auf n Knoten genau dann einen k -Faktor hat, wenn nk gerade ist. (Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar. Umgekehrt nehme man k kantendisjunkte 1-Faktoren, falls k ungerade ist, und $\frac{k}{2}$ kantendisjunkte Hamilton-Kreise, falls k gerade ist.)

Wir wollen uns in diesem Kapitel mit Graphen befassen, welche genau einen f -Faktor besitzen. Dazu führen wir folgende Notation ein: Ist $G = (V, E)$ ein Graph mit (eindeutigem) f -Faktor F , so färben wir alle Kanten von F rot und alle anderen Kanten von G blau. D.h. wir zerlegen E in die

Menge E_r der roten Kanten und in die Menge E_b der blauen Kanten. Für einen Knoten $x \in V$ sei $\Gamma_r(x)$ bzw. $\Gamma_b(x)$ die Menge der Nachbarn von x , die mit x über eine rote bzw. blaue Kante verbunden sind. Die Elemente von $\Gamma_r(x)$ bzw. $\Gamma_b(x)$ werden wir auch *rote* bzw. *blaue Nachbarn* von x nennen. Ferner sei $d_r(x) := |\Gamma_r(x)| = f(x)$ bzw. $d_b(x) := |\Gamma_b(x)|$ die Anzahl der roten bzw. blauen Nachbarn von x . In den Abbildungen in diesem und im nächsten Kapitel werden die roten Kanten zur Verdeutlichung stets fett gedruckt sein.

Proposition 2.1 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $f : V \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung und F ein f -Faktor von G . Färbt man die Kanten von F rot und alle anderen Kanten von G blau, so gilt: G hat einen weiteren f -Faktor genau dann, wenn G einen geschlossenen rot-blau-alternierenden Kantenzug besitzt.*

Beweis. Hat G einen geschlossenen rot-blau-alternierenden Kantenzug C , so erhält man durch Vertauschen der roten und blauen Kanten auf C einen weiteren f -Faktor. Sei umgekehrt F' ein weiterer f -Faktor von G . Wir betrachten den Teilgraphen H von G mit $V(H) = V$ und $E(H) = (E(F) \setminus E(F')) \cup (E(F') \setminus E(F))$. Wegen $F \neq F'$ ist $E(H) \neq \emptyset$. Wähle einen beliebigen Knoten $u \in V$, der in H nicht isoliert ist. Sei P ein maximaler, in u mit einer roten Kante beginnender, rot-blau-alternierender Kantenzug in H . Da jeder Knoten in H genauso viele rote wie blaue Nachbarn hat, folgt, daß P in u endet, und zwar mit einer blauen Kante. P ist also ein geschlossener rot-blau-alternierender Kantenzug. \square

2.2 Knoten von kleinem Grad

Wir wollen im folgenden Graphen mit genau einem f -Faktor untersuchen. Dazu sei $G = (V, E)$ ein Graph und $f : V \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung auf der Knotenmenge von G . Da f beliebig ist, ist es schwierig, globale Aussagen über Graphen G mit eindeutigem f -Faktor zu machen. Es ist jedoch möglich, die Existenz gewisser Knoten $x \in V$ nachzuweisen, für welche $d(x) - f(x)$ klein ist. Ein erstes Resultat in dieser Richtung stammt von Jackson und Whitty.

Satz 2.2 (Jackson, Whitty [12]) *Enthält ein 2-kantenzusammenhängender Graph $G = (V, E)$ genau einen f -Faktor, so existiert ein Knoten $x_0 \in V$ mit $d_G(x_0) = f(x_0)$.*

Korollar 2.3 (Jackson, Whitty [12]) Sei $l \in \mathbb{N}, l \geq 2$, und $f(x) \geq l - 1$ für alle $x \in V$. Der Graph G sei l -zusammenhängend und habe genau einen f -Faktor. Dann enthält G $l - 1$ Knoten x_1, \dots, x_{l-1} mit $d(x_i) = f(x_i)$ ($i = 1, \dots, l - 1$).

Bemerkung 2.4

1. Satz 2.2 gilt auch, falls G nicht zusammenhängend ist, aber alle Komponenten von G 2-kantenzusammenhängend sind. Zum Beweis wende man den Satz auf die einzelnen Komponenten an. Man erhält dann in jeder Komponente die Existenz eines Knoten, der keine blauen Nachbarn hat. Mit anderen Worten besagt dieser Satz also, daß jeder Graph mit einem eindeutigen f -Faktor entweder eine Brücke oder einen Knoten x_0 mit $d_G(x_0) = f(x_0)$ besitzt.

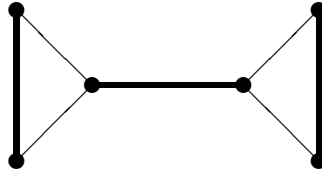
2. Jackson und Whitty haben (ebenfalls in [12]) eine Folge $(G_n, f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Tupeln konstruiert, für die folgendes gilt:

- i) G_n ist $(n + 1)$ -kantenzusammenhängender Graph auf $2^{n+1} - 1$ Knoten.
- ii) $f_n : V(G_n) \rightarrow \mathbb{N}$ ist eine Abbildung.
- iii) G_n enthält genau einen f_n -Faktor und genau einen Knoten x_0 mit $d_{G_n}(x_0) = f_n(x_0)$.

Demnach ist Satz 2.2 insofern optimal, als auch eine stärkere Voraussetzung an den Kantenzusammenhang nicht die Existenz mehrerer Knoten x mit $d(x) = f(x)$ garantiert.

3. Da f eine Abbildung nach \mathbb{N} ist, gilt $f(x) \geq 1$ für alle $x \in V$. Diese Bedingung ist für Satz 2.2 in der Tat notwendig, wie schon das folgende einfache Beispiel zeigt: G sei der vollständige Graph auf $\{1, 2, 3\}$, $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{N}_0$ sei gegeben durch $f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 0$. Dann hat G genau einen f -Faktor, aber für $x \in \{1, 2, 3\}$ gilt $d_G(x) = 2 > f(x)$.

Der Satz von Jackson und Whitty macht Aussagen über Graphen, welche mindestens 2-kantenzusammenhängend oder mindestens 2-zusammenhängend sind. Wir wollen nun Graphen untersuchen, die diesen Bedingungen nicht genügen. Man betrachte zum Beispiel den Graphen in Abb. 2.1. Dieser hat genau einen 1-Faktor, enthält jedoch keinen Knoten x mit $d(x) = 1 = f(x)$. Dies zeigt, daß auf die Voraussetzungen des Satzes 2.2 i.a. nicht verzichtet werden kann. Unser nächstes Ergebnis ersetzt die Voraussetzung, daß

Abbildung 2.1: Der Graph G_1

G 2-kantenzusammenhängend ist, durch die Voraussetzung, daß F zusammenhängend ist. Da es eine direkte Folgerung aus Satz 2.2 ist, bezeichnen wir es als Korollar 2.5.

Korollar 2.5 *Ist G ein Graph mit genau einem f -Faktor F , und ist F zusammenhängend, so existiert ein Knoten $x_0 \in V$ mit $d_G(x_0) = f(x_0)$.*

Beweis. Mit F ist auch G zusammenhängend. Ist G sogar 2-Kantenzusammenhängend, so folgt die Behauptung aus Satz 2.2. Andernfalls besitzt G eine Brücke. Wegen des Zusammenhangs von F sind alle Brücken rot. Ist nun G ein Baum, so sind alle Kanten Brücken. Also ist $G = F$ und für jeden Knoten $x \in V$ gilt: $d_G(x) = f(x)$. Andernfalls besitzt G einen Kreis und damit einen maximalen 2-kantenzusammenhängenden Teilgraphen H . Sei F' der Teilgraph von H , welcher genau die roten Kanten aus $E(H)$ enthält. Wegen der Maximalität von H ist F' zusammenhängend und es gilt $d_{F'}(x) \geq 1$ für jeden Knoten $x \in V(H)$. Ferner ist F' ein f' -Faktor von H für die Abb. $f' : V(H) \rightarrow \mathbb{N}$, $f'(x) = d_{F'}(x)$ ($x \in V(H)$). Da mit G auch H keinen geschlossenen rot-blau-alternierenden Kantenzug besitzt, ist F' nach Proposition 2.1 eindeutiger f' -Faktor von H . Wegen des 2-Kantenzusammenhangs von H und Satz 2.2 existiert ein Knoten $x_0 \in V(H)$ mit $d_H(x_0) = f'(x_0)$, d.h. x_0 hat keinen blauen Nachbarn in H . Wegen der Maximalität von H sind alle weiteren mit x_0 inzidenten Kanten Brücken, also rot. Demnach hat x_0 keine blauen Nachbarn und es folgt $d_G(x_0) = f(x_0)$. \square

Abschließend wollen wir noch den Fall untersuchen, daß keine Zusammenhangsvoraussetzungen an G und F gemacht werden.

Satz 2.6 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit genau einem f -Faktor, wobei $f : V \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung mit $f(x) \geq 2$ ($x \in V$) ist. Dann besitzt G einen Knoten x_0 mit $d(x_0) \leq f(x_0) + 1$.*

Beweis. Sei F der eindeutige f -Faktor von G . Wie oben beschrieben, färben wir die Kanten von F rot und alle anderen Kanten von G blau. Dann ist die Behauptung äquivalent zur Existenz eines Knotens $x_0 \in V$ mit $d_b(x_0) \leq 1$. Angenommen, es gilt $d_b(x) \geq 2$ für alle Knoten $x \in V$. Sei y_0 ein beliebiger Knoten aus V , und sei $P = \{e_1, e_2, \dots, e_l\}$ ein maximaler, mit einer roten Kante startender, rot-blau-alternierender Kantenzug mit Kanten $e_i = \{y_{i-1}, y_i\}$ ($i = 1, \dots, l$). Wir unterscheiden zwei Fälle:

I. $y_0 = y_l$: Seien $e_1, e_{i_1}, e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{s-1}}, e_{i_{s-1}+1}, e_{i_s}$ ($1 < i_1 < i_2 < \dots < i_s = l$), die Kanten von P , die inzident zu y_0 sind. Geht man also die Kanten von P in der Reihenfolge e_1, e_2, \dots, e_l ab, so ist e_{i_j} die Kante, mit welcher man zum j -ten Mal in y_0 hineinläuft, $e_{i_{j+1}}$ ist die Kante, mit welcher man zum $(j+1)$ -ten Mal aus y_0 herausläuft. Da e_1 rot ist, muß e_{i_1} ebenfalls rot sein, da andernfalls e_1, \dots, e_{i_1} ein geschlossener rot-blau-alternierender Kantenzug wäre. Wegen $d_b(y_0) \geq 2$ existiert dann die blaue Kante e_{i_1+1} , und da P in y_0 endet, existiert ebenfalls die Kante e_{i_2} . Ist e_{i_2} rot, so ist $e_{i_1+1}, \dots, e_{i_2}$ ein geschlossener rot-blau-alternierender Kantenzug. Ist e_{i_2} blau, so ist e_1, \dots, e_{i_2} ein geschlossener rot-blau-alternierender Kantenzug. In beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch zu Proposition 2.1.

II. $y_0 \neq y_l$: Analog zu I. seien $e_{i_1}, e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{s-1}}, e_{i_{s-1}+1}, e_{i_s}$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_s = l$) die Kanten von P , die inzident zu y_l sind.

II.1 e_{i_1} ist rot: Wegen $d_b(y_l) \geq 2$ existieren noch mindestens die blaue Kante e_{i_1+1} und die Kante e_{i_2} . Wäre e_{i_2} rot, dann wäre $e_{i_1+1}, \dots, e_{i_2}$ ein geschlossener rot-blau-alternierender Kantenzug. Also ist e_{i_2} blau. Wegen $d_r(y_l) = f(y_l) \geq 2$ existiert dann die rote Kante e_{i_2+1} und die Kante e_{i_3} . Ist e_{i_3} rot, so ist $e_{i_1+1}, \dots, e_{i_3}$ ein geschlossener rot-blau-alternierender Kantenzug, andernfalls ist $e_{i_2+1}, \dots, e_{i_3}$ ein solcher. In beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch zu Proposition 2.1.

II.2 e_{i_1} ist blau: Diesen Fall kann man analog zu Fall II.1 beweisen, indem man im Beweis „blau“ mit „rot“ vertauscht. \square

Bemerkung 2.7 Auf die Voraussetzung $f \geq 2$ kann in obigem Satz nicht verzichtet werden, wie folgendes Beispiel zeigt: Wir konstruieren eine Folge $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Graphen, so daß für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{i) } |V(G_i)| = 2^{i+2} - 2$$

$$\text{ii) } d_{G_i}(x) \geq i + 1 \quad \forall x \in V$$

iii) G_i hat genau einen 1-Faktor.

Sei G_1 der Graph aus Abb. 2.1. G_1 hat 6 Knoten und es gilt $d_{G_1}(x) \geq 2$ für alle Knoten $x \in V(G_1)$. Ferner hat G_1 genau einen 1-Faktor, dieser besteht gerade aus den fettgedruckten Kanten.

Sei nun $i \geq 2$. Wir konstruieren G_i aus G_{i-1} wie folgt: Wir nehmen zwei disjunkte Kopien H_1 und H_2 von G_{i-1} und fügen zwei neue Knoten x_i und y_i hinzu. Dann fügen wir die Kante $\{x_i, y_i\}$, alle möglichen Kanten zwischen x_i und $V(H_1)$ und alle möglichen Kanten zwischen y_i und $V(H_2)$ hinzu. Es ist klar, daß jeder 1-Faktor von G_i die Kante $\{x_i, y_i\}$ enthalten muß. Da die dann verbleibenden Komponenten Kopien von G_{i-1} sind und als solche genau einen 1-Faktor haben, gilt iii) für G_i . i) und ii) sind nach Konstruktion ebenfalls klar.

Kapitel 3

Eindeutige k -Faktoren

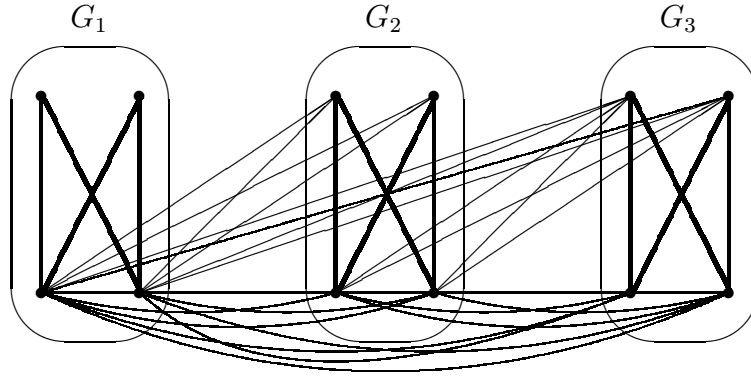
Wir werden in diesem Kapitel Graphen untersuchen, welche genau einen k -Faktor besitzen. Obwohl k -Faktoren ein Spezialfall der im vorangegangenen Kapitel untersuchten f -Faktoren sind, widmen wir diesem Thema aufgrund seines Umfangs ein eigenes Kapitel. Wir werden dazu die Notation aus dem vorangegangenen Kapitel übernehmen. Wie wir dort bereits gesehen haben, gibt es genau dann einen k -regulären Graphen auf n Knoten, wenn $k < n$ und kn gerade ist. Wir werden dies im folgenden stets voraussetzen. Es bezeichne \mathcal{R}_n^k die Menge der k -regulären Graphen auf n Knoten. Unser Ziel in diesem Kapitel ist es, den Parameter $\tilde{m}_n(\mathcal{R}_n^k)$ zu bestimmen bzw. abzuschätzen. Für $k = 1$ ist dieses Problem schon lange gelöst: Hetyei hat 1964 (vgl. [13], Korollar 1.6) gezeigt, daß für gerades $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\tilde{m}_n(\mathcal{R}_n^1) = \frac{n^2}{4}.$$

Die einzige, dem Autor bekannte Arbeit über Graphen mit genau einem k -Faktor stammt von Hendry. In [11] zeigt er

$$\tilde{m}_n(\mathcal{R}_n^2) = \left\lfloor \frac{n(n+1)}{4} \right\rfloor.$$

Ferner konstruiert er für den Fall $n = 2kl$, $l \in \mathbb{N}$, den folgenden Graphen $H_{n,k}$: Es sei K_k der vollständige Graph auf k Knoten, \overline{K}_k sein Komplement. Mit $K_k + \overline{K}_k$ bezeichnen wir den Graphen, der aus zwei disjunkten Graphen K_k und \overline{K}_k besteht und zu dem alle Kanten zwischen $V(K_k)$ und $V(\overline{K}_k)$ hinzugefügt wurden. Zur Konstruktion von $H_{n,k}$ nehmen wir l disjunkte Kopien von $K_k + \overline{K}_k$, welche wir mit G_1, \dots, G_l bezeichnen, und fügen für

Abbildung 3.1: Der Graph $H_{12,2}$

$1 \leq i < j \leq l$ alle Kanten zwischen $V(K_k)$ in G_i und $V(G_j)$ hinzu. Abb. 3.1 zeigt den Graphen $H_{12,2}$. Es ist leicht zu sehen, daß $H_{n,k}$ genau einen k -Faktor und $\frac{n^2}{4} + (k-1)\frac{n}{4}$ Kanten enthält. Daher gilt:

$$\tilde{m}_{2lk}(\mathcal{R}_{2lk}^k) \geq \frac{(2kl)^2}{4} + (k-1)\frac{2kl}{4} \quad (k, l \in \mathbb{N}) \quad (3.1)$$

Hendry vermutete, daß in (3.1) Gleichheit gilt.

Für den Fall $k > \frac{n}{2}$ hat Hendry, ebenfalls in [11], den folgenden Graphen konstruiert, den wir mit $\tilde{H}_{n,k}(\tilde{F})$ bezeichnen wollen. Sei \tilde{F} ein $(2k-n)$ -regulärer Graph auf k Knoten. (Nach unseren Überlegungen zu Anfang des vorangegangenen Kapitels existiert ein solcher Graph, weil mit nk auch $(2k-n)k$ gerade ist und ferner wegen $k > \frac{n}{2}$ auch $1 \leq 2k-n < k$ gilt.) $\tilde{H}_{n,k}(\tilde{F})$ sei der Graph $\tilde{F} + K_{n-k}$. Es ist wiederum leicht zu sehen, daß $\tilde{H}_{n,k}(\tilde{F})$ genau einen k -Faktor hat. Dieser enthält gerade alle Kanten in \tilde{F} und alle Kanten zwischen \tilde{F} und K_{n-k} . Ferner hat $\tilde{H}_{n,k}(\tilde{F})$ genau $\frac{nk}{2} + \binom{n-k}{2}$ Kanten. Es folgt also

$$\tilde{m}_n(\mathcal{R}_n^k) \geq \frac{nk}{2} + \binom{n-k}{2} \quad (n > k > \frac{n}{2}) \quad (3.2)$$

Hendry vermutete, daß in (3.2) ebenfalls Gleichheit gilt.

Wir werden im folgenden Abschnitt die Struktur von Graphen mit einzigem k -Faktor untersuchen. Insbesondere werden wir die Nachbarschaft

$\Gamma(x) = \Gamma_r(x) \cup \Gamma_b(x)$ eines Knoten $x \in V$ untersuchen. Wir werden verschiedene Fakten über diese Nachbarschaft beweisen. Mit Hilfe dieser Fakten werden wir im zweiten Abschnitt die „blauen Grade“ $d_b(x)$ ($x \in V$) abschätzen. Im dritten Abschnitt zeigen wir, daß für alle $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$, kn gerade, gilt:

$$\tilde{m}_n(\mathcal{R}_n^k) \leq \frac{n^2}{4} + (k-1)\frac{n}{4}.$$

Dies impliziert, daß tatsächlich Gleichheit in (3.1) gilt. Ferner zeigen wir, daß im Fall $n = 2kl$, $l \in \mathbb{N}$, die extremalen Graphen gerade die Graphen $H_{n,k}$ sind. Im vierten Abschnitt werden wir beweisen, daß auch die zweite Vermutung von Hendry richtig ist, d.h. daß Gleichheit in (3.2) gilt, und das hier die extremalen Graphen gerade die Graphen $\tilde{H}_{n,k}(\tilde{F})$ sind.

3.1 Über die Nachbarschaft $\Gamma_r(x) \cup \Gamma_b(x)$ eines einzelnen Knoten

Sei im folgenden $G = (V, E)$ ein Graph auf n Knoten, welcher genau einen k -Faktor F enthält. Wie zu Anfang des vorherigen Kapitels beschrieben, färben wir die Kanten von F rot und alle anderen Kanten von G blau. Sei nun x ein fest gewählter Knoten von G . Wir wollen die Nachbarschaft $\Gamma(x) = \Gamma_r(x) \cup \Gamma_b(x)$ von x untersuchen. Angenommen, es existiert eine blaue Kante zwischen zwei Elementen $u_1, u_2 \in \Gamma_r(x)$ und eine rote Kante zwischen zwei Elementen $v_1, v_2 \in \Gamma_b(x)$. Dann enthält G den geschlossenen rot-blau-alternierenden Kantenzug $C : x \text{---} u_1 \text{---} u_2 \text{---} x \text{---} v_1 \text{---} v_2 \text{---} x$, im Widerspruch zu Proposition 2.1. Wir werden daher im folgenden stets zwei Fälle unterscheiden:

1. $\Gamma_r(x)$ enthält keine blaue Kante.
2. $\Gamma_b(x)$ enthält keine rote Kante.

3.1.1 $\Gamma_r(x)$ enthält keine blaue Kante

Wir untersuchen in diesem Abschnitt den Fall, daß $\Gamma_r(x)$ keine blauen Kanten enthält. Man beachte, daß die Fakten, welche wir im folgenden beweisen werden, stets nur unter dieser Voraussetzung gelten!

Wir definieren Mengen $P, B, R \subseteq V$ wie folgt:

$$\begin{aligned} P &:= \Gamma_b(\Gamma_r(x)) \cap \Gamma_b(x), \text{ d.h. } P \text{ ist die Menge der blauen} \\ &\quad \text{Nachbarn von } \Gamma_r(x), \text{ die zu } \Gamma_b(x) \text{ gehören,} \\ B &:= \Gamma_b(\Gamma_r(x)) \setminus P, \text{ d.h. } B \text{ ist die Menge der blauen Nachbarn} \\ &\quad \text{von } \Gamma_r(x), \text{ die nicht zu } \Gamma_b(x) \text{ gehören,} \\ R &:= \Gamma_r(P) \setminus \Gamma_r(x), \text{ d.h. } R \text{ ist die Menge der roten Nachbarn} \\ &\quad \text{von } P, \text{ welche nicht zu } \Gamma_r(x) \text{ gehören.} \end{aligned}$$

Fakt 1.1: Die Mengen $\Gamma_r(x), \Gamma_b(x), \{x\}, B$ und R sind paarweise disjunkt.

Beweis. Nach Definition und wegen unserer Annahme sind die Mengen $\Gamma_r(x), \Gamma_b(x), \{x\}$ und B disjunkt, und es gilt $R \cap (\Gamma_r(x) \cup \{x\}) = \emptyset$. Daher genügt es zu zeigen, daß $R \cap \Gamma_b(x) = \emptyset$ und $R \cap B = \emptyset$ gilt.

Angenommen, es existiert ein Knoten $v \in R \cap \Gamma_b(x)$. Nach Definition von R hat dann v einen roten Nachbarn $u \in P$, und nach Definition von P hat u einen blauen Nachbarn $y \in \Gamma_r(x)$. Daher enthält G den geschlossenen rot-blau-alternierenden Kantenzug $C : x \text{---} y \text{---} u \text{---} v \text{---} x$, ein Widerspruch zu Proposition 2.1. Also gilt $R \cap \Gamma_b(x) = \emptyset$.

Wir nehmen nun an, es gibt einen Knoten $v \in R \cap B$. Nach Definition von R und B hat v einen roten Nachbarn $u \in P$ und einen blauen Nachbarn $y \in \Gamma_r(x)$. Daher enthält G den geschlossenen rot-blau-alternierenden Kantenzug $C : x \text{---} y \text{---} v \text{---} u \text{---} x$, wiederum ein Widerspruch zu Proposition 2.1. Also gilt $R \cap B = \emptyset$, und Fakt 1.1 ist bewiesen. \square

Es sei nun

$$r_0 := \text{Anzahl roter Kanten zwischen } P \text{ und } \Gamma_r(x).$$

Abb. 3.2 zeigt die Mengen $\Gamma_r(x), \Gamma_b(x), \{x\}, B$ und R und ihre Beziehungen untereinander. Die Abbildung ist allerdings insofern nicht vollständig, als es z.B. auch blaue Kanten zwischen R und P oder rote Kanten zwischen $\Gamma_r(x)$ und B geben könnte.

Fakt 1.2: $|B| \geq \frac{1}{k} \left(\sum_{y \in \Gamma_r(x)} d_b(y) \right) - |P| + \frac{r_0}{k}$.

Gilt Gleichheit, dann folgt: $\forall y \in \Gamma_r(x) : P \subseteq \Gamma(y) \wedge B \subseteq \Gamma_b(y)$.

Beweis. Da es keine blauen Kanten in $\Gamma_r(x)$ gibt, gibt es $\sum_{y \in \Gamma_r(x)} d_b(y)$ blaue Kanten zwischen $\Gamma_r(x)$ und $V \setminus \Gamma_r(x)$. Die gesamte Anzahl von Kanten

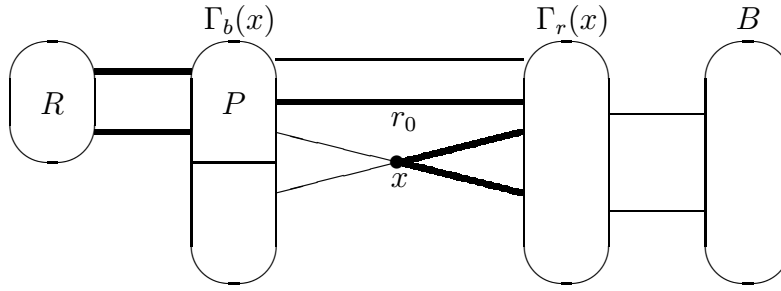


Abbildung 3.2: Die Nachbarschaft von x im Fall, daß es keine blaue Kante in $\Gamma_r(x)$ gibt.

zwischen P und $\Gamma_r(x)$ ist durch $|P||\Gamma_r(x)| = |P|k$ nach oben beschränkt. Deshalb gibt es höchstens $|P|k - r_0$ blaue Kanten zwischen $\Gamma_r(x)$ und P , und daher gibt es mindestens $(\sum_{y \in \Gamma_r(x)} d_b(y)) - (k|P| - r_0)$ blaue Kanten zwischen $\Gamma_r(x)$ und B . Da es insgesamt höchstens $|\Gamma_r(x)||B| = k|B|$ Kanten zwischen $\Gamma_r(x)$ und B geben kann, folgt:

$$k|B| \geq \left(\sum_{y \in \Gamma_r(x)} d_b(y) \right) - (k|P| - r_0)$$

Division durch k ergibt den ersten Teil der Behauptung.

Im Falle der Gleichheit sind alle Schranken in obiger Argumentation scharf. Daher gibt es genau $k|B|$ blaue Kanten zwischen $\Gamma_r(x)$ und B , d.h. es gilt $B \subseteq \Gamma_b(y) \forall y \in \Gamma_r(x)$, und es gibt genau $k|P|$ Kanten zwischen $\Gamma_r(x)$ und P , d.h. es gilt $P \subseteq \Gamma(y) \forall y \in \Gamma_r(x)$. \square

Fakt 1.3: $|R| \geq |P| - \frac{r_0}{k}$

Gilt Gleichheit, dann folgt: $\Gamma_r(R) \subseteq P$.

Beweis. Nach Definition von R und r_0 ist die Anzahl der roten Kanten zwischen P und R genau $k|P| - r_0$. Da jeder Knoten in R höchstens k rote Nachbarn in P hat, folgt $k|R| \geq k|P| - r_0$ und damit die behauptete Ungleichung.

Im Falle der Gleichheit gibt es genau $k|R|$ rote Kanten zwischen R und P , und somit gilt: $\Gamma_r(R) \subseteq P$. \square

3.1.2 $\Gamma_b(x)$ enthält keine rote Kante

Wir untersuchen nun den Fall, daß $\Gamma_b(x)$ keine roten Kanten enthält. Man beachte wiederum, daß die Fakten, welche wir im folgenden beweisen werden, stets nur unter dieser Voraussetzung gelten.

Wir definieren Mengen $A, B, R_1, R_2 \subseteq V$ wie folgt:

$$\begin{aligned} A &:= \Gamma_r(\Gamma_b(x)) \cap \Gamma_r(x), \text{ d.h. } A \text{ ist die Menge der Knoten in } \Gamma_r(x), \\ &\quad \text{die einen roten Nachbarn in } \Gamma_b(x), \text{ haben,} \\ B &:= \Gamma_b(\Gamma_r(x)) \setminus (\Gamma_b(x) \cup \Gamma_r(x)), \text{ d.h. } B \text{ ist die Menge der blauen} \\ &\quad \text{Nachbarn von } \Gamma_r(x), \text{ welche nicht zu } \Gamma_b(x) \cup \Gamma_r(x) \text{ gehören,} \\ R_1 &:= \Gamma_r(\Gamma_b(x)) \setminus A, \text{ d.h. } R_1 \text{ ist die Menge der roten Nachbarn} \\ &\quad \text{von } \Gamma_b(x), \text{ welche nicht zu } \Gamma_r(x) \text{ gehören,} \\ R_2 &:= \Gamma_r(\Gamma_r(x)) \setminus (\Gamma_r(x) \cup \Gamma_b(x) \cup B \cup \{x\}), \text{ d.h. } R_2 \text{ ist die Menge} \\ &\quad \text{der roten Nachbarn von } \Gamma_r(x), \text{ welche nicht zu } \Gamma_r(x) \cup \Gamma_b(x) \\ &\quad \cup B \cup \{x\} \text{ gehören.} \end{aligned}$$

Fakt 2.1 Die Mengen $\Gamma_r(x), \Gamma_b(x), \{x\}, B$ und $R_1 \cup R_2$ sind disjunkt.

Beweis. Nach der Definition dieser Mengen sind die Mengen $\Gamma_r(x), \Gamma_b(x), \{x\}, B$ und R_2 disjunkt. Nach Definition von R_1 und wegen unserer Annahme sind die Mengen $\Gamma_r(x), \Gamma_b(x), \{x\}$ und R_1 ebenfalls disjunkt. Es bleibt also noch zu zeigen, daß gilt: $R_1 \cap B = \emptyset$. Angenommen, es existiert ein Knoten $v \in R_1 \cap B$. Dieser Knoten v hat dann einen roten Nachbarn $u \in \Gamma_b(x)$ und einen blauen Nachbarn $y \in \Gamma_r(x)$. Somit enthält G den geschlossenen rot-blau-alternierenden Kantenzug $C : x \text{---} y \text{---} v \text{---} u \text{---} x$, Widerspruch. \square

Wir definieren nun

$$\begin{aligned} r_1 &:= \text{Anzahl roter Kanten zwischen } A \text{ und } \Gamma_b(x), \\ r_2 &:= \text{Anzahl roter Kanten zwischen } \Gamma_r(x) \setminus A \text{ und } B, \\ b &:= \text{Anzahl blauer Kanten mit beiden Endknoten in } \Gamma_r(x) \setminus A, \\ r &:= \text{Anzahl roter Kanten mit beiden Endknoten in } \Gamma_r(x) \setminus A. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$r + b \leq \binom{k - |A|}{2}. \quad (3.3)$$

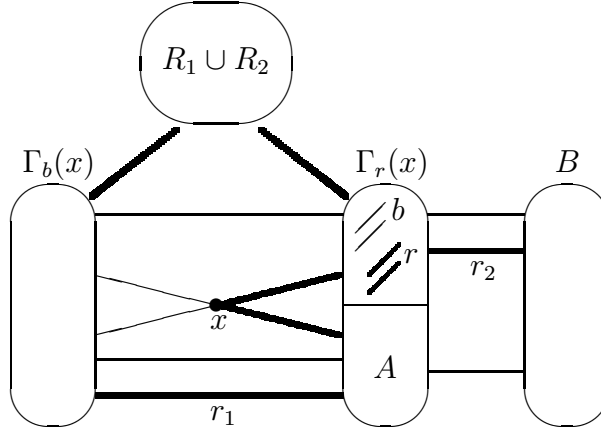


Abbildung 3.3: Die Nachbarschaft von x im Fall, daß es keine rote Kante in $\Gamma_b(x)$ gibt.

Abb. 3.3 zeigt die Mengen $\Gamma_r(x), \Gamma_b(x), \{x\}, B$ und $R_1 \cup R_2$ und ihre Beziehungen zueinander. Wiederum ist die Abbildung nicht vollständig, z.B. könnte es Kanten innerhalb von B oder $R_1 \cup R_2$ geben.

Fakt 2.2: $\Gamma_b(A) \cap \Gamma_r(x) = \emptyset$.

Beweis. Sei $y \in A$. Wir nehmen an, y besitzt einen blauen Nachbarn $y' \in \Gamma_r(x)$. Nach Definition von A hat y einen roten Nachbarn $v \in \Gamma_b(x)$. Daher enthält G den geschlossenen rot-blau-alternierenden Kantenzug $C : x \text{---} y' \text{---} y \text{---} v \text{---} x$, Widerspruch. \square

Fakt 2.3: $|B| \geq \frac{1}{k}(\sum_{y \in \Gamma_r(x)} d_b(y)) - d_b(x) - \frac{2b}{k} + \frac{1}{k}(r_1 + r_2)$.
Gilt Gleichheit, dann folgt: $\forall y \in \Gamma_r(x) : B \cup \Gamma_b(x) \subseteq \Gamma(y)$.

Beweis. Fakt 2.2 impliziert, daß es genau b blaue Kanten gibt, welche beide Endknoten in $\Gamma_r(x)$ haben. Daher ist $\sum_{y \in \Gamma_r(x)} d_b(y) - 2b$ die Anzahl blauer Kanten zwischen $\Gamma_r(x)$ und $V \setminus \Gamma_r(x)$. Da $kd_b(x) - r_1$ die maximale Anzahl von blauen Kanten zwischen $\Gamma_r(x)$ und $\Gamma_b(x)$ ist, gibt es mindestens $\sum_{y \in \Gamma_r(x)} d_b(y) - 2b - (kd_b(x) - r_1)$ blaue Kanten zwischen $\Gamma_r(x)$ und B . Da $k|B|$ die maximale Anzahl von Kanten zwischen $\Gamma_r(x)$ und B ist und es genau r_2 rote Kanten zwischen diesen beiden Mengen gibt, erhalten wir die

folgende Ungleichung für die Kardinalität von B :

$$k|B| \geq \sum_{y \in \Gamma_r(x)} d_b(y) - 2b - kd_b(x) + r_1 + r_2.$$

Division durch k liefert die behauptete Ungleichung.

Im Fall, daß Gleichheit gilt, sind alle Schranken in obiger Argumentation scharf. Dann ist $k|B| - r_2$ die Anzahl der blauen Kanten zwischen $\Gamma_r(x)$ und B , und $kd_b(x) - r_1$ ist die Anzahl der blauen Kanten zwischen $\Gamma_r(x)$ und $\Gamma_b(x)$. Dies liefert den zweiten Teil der Behauptung. \square

Fakt 2.4: $|R_1 \cup R_2| \geq d_b(x) + \frac{1}{k}(k - |A|)(k - |A| - 1) - \frac{2r}{k} - \frac{1}{k}(r_1 + r_2)$.
Gilt Gleichheit, dann folgt $\Gamma_r(R_1 \cup R_2) \subseteq \Gamma(x)$.

Beweis. Nach unserer Annahme, daß es keine roten Kanten in $\Gamma_b(x)$ gibt, ist die Anzahl roter Kanten zwischen $\Gamma_b(x)$ und $R_1 \cup R_2$ genau $k|\Gamma_b(x)| - r_1 = kd_b(x) - r_1$. Da jeder Knoten $y \in \Gamma_r(x) \setminus A$ höchstens $|A| + 1$ rote Nachbarn in $\{x\} \cup A$ haben kann und keine roten Nachbarn in $\Gamma_b(x)$ hat, gibt es mindestens $\max\{(k - |A|)(k - |A| - 1) - 2r - r_2, 0\}$ rote Kanten zwischen $\Gamma_r(x) \setminus A$ und $R_1 \cup R_2$. Da jeder Knoten in $R_1 \cup R_2$ höchstens k rote Nachbarn in $\Gamma_r(x) \cup \Gamma_b(x)$ hat, folgt:

$$k|R_1 \cup R_2| \geq kd_b(x) - r_1 + (k - |A|)(k - |A| - 1) - 2r - r_2.$$

Division durch k ergibt den ersten Teil der Behauptung.

Im Fall der Gleichheit gibt es genau $k|R_1 \cup R_2|$ rote Kanten zwischen $R_1 \cup R_2$ und $\Gamma(x)$. Dies liefert den zweiten Teil der Behauptung. \square

3.2 Eine Abschätzung für $(d_b(x))_{x \in V}$

Wir werden nun die in den vorausgegangenen Unterabschnitten gezeigten Fakten benutzen, um folgenden Satz zu zeigen:

Satz 3.1 Für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k < n$ und nk gerade gilt:

- a) Sei $G = (V, E)$ ein Graph der Ordnung n , welcher genau einen k -Faktor F besitzt. Färbt man die Kanten von F rot und alle anderen Kanten von G blau, so gilt:

$$kd_b(x) + \sum_{y \in \Gamma_r(x)} d_b(y) \leq k(n - k - 1) \quad \forall x \in V.$$

b) Gilt für ein $x \in V$ Gleichheit, so gilt:

1. Falls es keine blaue Kante in $\Gamma_r(x)$ gibt, so gilt $\Gamma_r(R) \subseteq P$ und $P \subseteq \Gamma(y) \wedge B \subseteq \Gamma_b(y)$ ($y \in \Gamma_r(x)$). Ferner ist

$$V = B \dot{\cup} R \dot{\cup} \Gamma_r(x) \dot{\cup} \Gamma_b(x) \dot{\cup} \{x\}.$$

2. Falls es keine rote Kante in $\Gamma_b(x)$ gibt, so gilt $\Gamma_r(R_1 \cup R_2) \subseteq \Gamma(x)$ und $B \cup \Gamma_b(x) \subseteq \Gamma(y)$ ($y \in \Gamma_r(x)$). Ferner ist

$$V = B \dot{\cup} (R_1 \cup R_2) \dot{\cup} \Gamma_r(x) \dot{\cup} \Gamma_b(x) \dot{\cup} \{x\}.$$

Beweis. Sei $G = (V, E)$ ein Graph der Ordnung n und sei F sein einziger k -Faktor. Wir unterscheiden dieselben zwei Fälle wie oben:

1. $\Gamma_r(x)$ enthält keine blaue Kante:

Wir definieren die Mengen P, B, R und den Parameter r_0 wie oben. Da nach Fakt 1.1 die Mengen $R, B, \Gamma_r(x), \Gamma_b(x)$ und $\{x\}$ disjunkt sind, erhalten wir folgende Abschätzung für die Anzahl der Knoten in G :

$$n = |V| \geq |B| + |R| + |\Gamma_b(x)| + |\Gamma_r(x)| + |\{x\}| \quad (3.4)$$

$$\stackrel{\text{F. 1.2, F. 1.3}}{\geq} \frac{1}{k} \left(\sum_{y \in \Gamma_r(x)} d_b(y) \right) - |P| + \frac{r_0}{k} + |P| - \frac{r_0}{k} + d_b(x) + k + 1 \quad (3.5)$$

$$= \frac{1}{k} \left(\sum_{y \in \Gamma_r(x)} d_b(y) \right) + d_b(x) + k + 1. \quad (3.6)$$

Subtraktion von $k + 1$ und Multiplikation mit k liefert den ersten Teil der Behauptung.

Gilt nun $kd_b(x) + \sum_{y \in \Gamma_r(x)} d_b(y) = k(n - k - 1)$, so folgt Gleichheit in (3.5) und damit Gleichheit in Fakt 1.2 und Fakt 1.3. Ferner folgt Gleichheit in (3.4) und damit $V = B \dot{\cup} R \dot{\cup} \Gamma_r(x) \dot{\cup} \Gamma_b(x) \dot{\cup} \{x\}$.

2. $\Gamma_b(x)$ enthält keine rote Kante:

Wir definieren die Mengen A, B, R_1, R_2 und die Parameter r_1, r_2 wie oben. Da nach Fakt 2.1 die Mengen $\Gamma_r(x), \Gamma_b(x), \{x\}, B$ und $R_1 \cup R_2$ disjunkt sind, erhalten wir die folgende Abschätzung für die Ordnung von G :

$$n = |V| \geq |B| + |R_1 \cup R_2| + |\Gamma_b(x)| + |\Gamma_r(x)| + |\{x\}| \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\text{F. 2.3, F. 2.4}}{\geq} \frac{1}{k} \left(\sum_{y \in \Gamma_r(x)} d_b(y) \right) - d_b(x) - \frac{2b}{k} + \frac{1}{k}(r_1 + r_2) \\
& \quad + d_b(x) + \frac{1}{k}(k - |A|)(k - |A| - 1) - \frac{2r}{k} \\
& \quad - \frac{1}{k}(r_1 + r_2) + d_b(x) + k + 1 \tag{3.8} \\
& = \frac{1}{k} \left(\sum_{y \in \Gamma_r(x)} d_b(y) \right) + d_b(x) + k + 1 \\
& \quad + \frac{1}{k} \underbrace{\left((k - |A|)(k - |A| - 1) - 2(b + r) \right)}_{\geq 0 \text{ wegen (3.3)}} \\
& \geq \frac{1}{k} \left(\sum_{y \in \Gamma_r(x)} d_b(y) \right) + d_b(x) + k + 1.
\end{aligned}$$

Subtraktion von $k + 1$ und Multiplikation mit k liefert den ersten Teil der Behauptung.

Gilt nun $\sum_{y \in \Gamma_r(x)} d_b(y) = k(n - k - 1 - d_b(x))$, so folgt Gleichheit in (3.8) und damit Gleichheit in Fakt 2.3 und Fakt 2.4. Ferner folgt Gleichheit in (3.7) und damit $V = B \dot{\cup} (R_1 \cup R_2) \dot{\cup} \Gamma_r(x) \dot{\cup} \Gamma_b(x) \dot{\cup} \{x\}$. \square

3.3 Die maximale Anzahl von Kanten in einem Graphen mit eindeutigen k -Faktor für $k \leq \frac{n}{2}$

In diesem Abschnitt geben wir eine obere Schranke für $\tilde{m}_n(\mathcal{R}_n^k)$ an. Obwohl diese Schranke für alle $k < n$ gilt, ist sie nicht sehr gut für $k > \frac{n}{2}$. Wir werden uns daher mit diesem Fall im nächsten Abschnitt ausführlich befassen.

Satz 3.2 *Sei $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k < n$ und kn gerade. Dann gilt:*

- a) $\tilde{m}_n(\mathcal{R}_n^k) \leq \frac{n^2}{4} + (k - 1)\frac{n}{4}$.
- b) *Ist $n = 2kl$ für ein $l \in \mathbb{N}$, dann gilt Gleichheit. Ist G ein zugehöriger Extremalgraph, so ist G isomorph zu $H_{n,k}$.*

Beweis. a) Der erste Teil des Theorems folgt unmittelbar aus Satz 3.1. Sei $G = (V, E)$ ein Graph der Ordnung n , und sei F sein eindeutiger k -Faktor. Färben wir die Kanten von G wie oben, so gilt:

$$\begin{aligned}
4k|E_b| &= \sum_{x \in V} 2kd_b(x) \\
&= \sum_{x \in V} (kd_b(x) + \sum_{y \in \Gamma_r(x)} d_b(y)) \\
&\stackrel{\text{Satz 3.1}}{\leq} \sum_{x \in V} k(n - k - 1) \\
&= nk(n - k - 1).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Division durch $4k$ ergibt

$$|E_b| \leq \frac{n^2}{4} - (k + 1)\frac{n}{4}.$$

Wegen $|E_r| = |E(F)| = \frac{nk}{2}$ folgt daher

$$|E| = |E_r| + |E_b| \leq \frac{nk}{2} + \frac{n^2}{4} - (k + 1)\frac{n}{4} = \frac{n^2}{4} + (k - 1)\frac{n}{4}.$$

b) Es sei nun $n = 2lk$ für ein $l \in \mathbb{N}$. Wegen Ungleichung (3.1) gilt in diesem Fall tatsächlich Gleichheit.

Sei nun $G = (V, E)$ ein beliebiger Graph der Ordnung n mit $\frac{n^2}{4} + (k - 1)\frac{n}{4}$ Kanten, welcher genau einen k -Faktor F besitzt. Für G gilt dann Gleichheit in (3.9). Zusammen mit Satz 3.1 impliziert dies

$$kd_b(v) + \sum_{y \in \Gamma_r(v)} d_b(y) = k(n - k - 1) \quad \forall v \in V. \tag{3.10}$$

Wir müssen zeigen, daß G isomorph zu $H_{n,k}$ ist. Es genügt zu zeigen, daß V disjunkte Teilmengen U und W besitzt, für welche gilt:

- (i) $|U| = |W| = k$.
- (ii) $\Gamma_r(U) = W$ und $\Gamma_r(W) = U$.
- (iii) $d_b(u) = 0 \quad \forall u \in U$ und $d_b(w) = n - k - 1 \quad \forall w \in W$.

Dann ist der induzierte Teilgraph $G[U \cup W]$ isomorph zu G_1 in $H_{n,k}$, wobei $G[U]$ isomorph zu \bar{K}_k und $G[W]$ isomorph zu K_k ist. Bedingung (iii) impliziert, daß die Knoten aus W mit allen anderen Knoten verbunden sind und daß es keine weiteren Kanten zwischen U und $V \setminus (U \cup W)$ gibt. Entfernt man dann die Knoten aus $U \cup W$ aus G und wiederholt dieses Argument $l-1$ mal, so erhält man Teil b) des Satzes.

Um solche Mengen U und W zu finden, wählen wir den Knoten $x \in V$, für den gilt:

$$d_b(x) = \max\{d_b(v) \mid v \in V\}.$$

Wir untersuchen die Nachbarschaft von x und unterscheiden wieder dieselben Fälle wie oben.

1. $\Gamma_r(x)$ enthält keine blaue Kante:

Es seien wieder P, B, R, r_0 definiert wie oben. Unser Ziel ist es zu zeigen, daß $\Gamma_r(x)$ gerade die gesuchte Menge U ist. Wir haben daher u.a. zu zeigen, daß P und B leer sind. Gleichung (3.10) und Satz 3.1 implizieren Gleichheit in Fakt 1.2 und Fakt 1.3. Daher gilt

$$\Gamma_r(R) \subseteq P \wedge \forall y \in \Gamma_r(x) : P \subseteq \Gamma(y) \wedge B \subseteq \Gamma_b(y). \quad (3.11)$$

Ferner gilt:

$$V = \Gamma_r(x) \dot{\cup} \Gamma_b(x) \dot{\cup} \{x\} \dot{\cup} R \dot{\cup} B. \quad (3.12)$$

Fakt 1.4: $\Gamma_r(\Gamma_b(x) \setminus P) \subset \Gamma_r(x) \cup (\Gamma_b(x) \setminus P)$.

Beweis. Sei $w \in \Gamma_b(x) \setminus P$, und sei w' ein roter Nachbar von w . Wegen $\Gamma_r(R) \subseteq P$ und $\Gamma_r(P) \subseteq \Gamma_r(x) \cup R$ gehört w' weder zu R noch zu P . Falls $w' \notin \Gamma_r(x) \cup (\Gamma_b(x) \setminus P)$ gilt, muß w' wegen (3.12) zu B gehören. Nach Definition von B hat w' dann einen blauen Nachbarn $y \in \Gamma_r(x)$. Damit enthält G den geschlossenen rot-blau-alternierenden Kantenzug $C : x \text{---} y \text{---} w' \text{---} w \text{---} x$, Widerspruch. \square

Fakt 1.5: $\Gamma_r(B) \subseteq B$

Beweis. Sei $z \in B$. Wir betrachten einen roten Nachbarn z' von z . Wegen (3.11) kann z' weder zu R noch zu $\Gamma_r(x)$ gehören. Ist $z' \in \Gamma_b(x)$, dann enthält G den geschlossenen rot-blau-alternierenden Kantenzug $C : x \text{---} y \text{---} z \text{---} z' \text{---} x$, wobei y ein beliebiger Knoten in $\Gamma_r(x)$ ist. Wegen (3.12) folgt daher $z' \in B$. \square

Fakt 1.6: $\Gamma_b(R) \subseteq P$.

Beweis. Sei $v \in R$, $u \in P$ ein roter und v' ein blauer Nachbar von v . Wegen $\Gamma_b(\Gamma_r(x)) = P \cup B$ gilt $v' \notin \Gamma_r(x)$. Falls v' zu B gehört, existiert nach Fakt 1.5 ein Knoten $z \in B \cap \Gamma_r(v')$ und damit der geschlossene, rot-blau-alternierende Kantenzug $C : x \text{---} y \text{---} z \text{---} v' \text{---} v \text{---} u \text{---} x$, wobei y ein blauer Nachbar von z in $\Gamma_r(x)$ ist, Widerspruch.

Angenommen, $v' \in R$. Dann besitzt v' einen roten Nachbarn $u' \in P \setminus \{u\}$, und G besitzt somit den geschlossenen rot-blau-alternierenden Kantenzug $C : x \text{---} y \text{---} u' \text{---} v' \text{---} v \text{---} u \text{---} x$, wobei y ein blauer Nachbar von u' in $\Gamma_r(x)$ ist, Widerspruch. Es gilt also $v' \notin \Gamma_r(x) \cup R \cup B \cup \{x\}$ und daher wegen (3.12) $v' \in \Gamma_b(x)$.

Angenommen, $v' \in \Gamma_b(x) \setminus P$. Sei w ein roter Nachbar von v' . Nach Fakt 1.4 gilt entweder $w \in \Gamma_r(x)$ oder $w \in \Gamma_b(x) \setminus P$. Ist $w \in \Gamma_b(x) \setminus P$, dann enthält G den geschlossenen rot-blau-alternierenden Kantenzug $C : x \text{---} y \text{---} u \text{---} v \text{---} v' \text{---} w \text{---} x$, wobei $y \in \Gamma_r(x) \cap \Gamma_b(u)$ beliebig, Widerspruch. Also gilt $w \in \Gamma_r(x)$. Da x roter Nachbar von w ist, gilt $|\Gamma_r(w) \cap P| \leq k - 1$, d.h. w hat wegen (3.11) mindestens $|P| - (k - 1)$ blaue Nachbarn in P . Andererseits ist $|P \cap \Gamma_r(v)| = k$ wegen $\Gamma_r(v) \subseteq P$. Daher gibt es einen Knoten $u' \in \Gamma_r(v) \cap \Gamma_b(w)$. Dann enthält aber G den geschlossenen rot-blau-alternierenden Kantenzug $C : v' \text{---} w \text{---} u' \text{---} v \text{---} v'$, wiederum ein Widerspruch. Es folgt, daß v' zu P gehört. \square

Fakt 1.7: $P = \emptyset$.

Beweis. Wir betrachten zwei beliebige Knoten $v \in R$ und $y \in \Gamma_r(x)$. Gleichung (3.11) und Fakt 1.6 implizieren $\Gamma(v) \subseteq P$ und damit $d_b(v) \leq |P| - k$. Da y höchstens $k - 1$ rote Nachbarn in P hat, folgt zusammen mit (3.11) $d_b(y) \geq |P| - k + 1 + |B|$ und somit

$$d_b(v) < d_b(y) \quad \forall v \in R \quad \forall y \in \Gamma_r(x). \quad (3.13)$$

Wir nehmen nun an, es existiert ein Knoten $u \in P$. Nach Definition von P hat u mindestens einen blauen Nachbarn in $\Gamma_r(x)$ und somit mindestens einen roten Nachbarn in R . Damit gilt $\Gamma_r(u) \cap R \neq \emptyset$. Mit $|\Gamma_r(x) \setminus \Gamma_r(u)| = |\Gamma_r(u) \cap R| \geq 1$ erhält man:

$$\sum_{v \in \Gamma_r(u)} d_b(v) = \sum_{v \in \Gamma_r(u) \cap \Gamma_r(x)} d_b(v) + \sum_{v \in \Gamma_r(u) \cap R} d_b(v)$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(3.13)}{<} \sum_{v \in \Gamma_r(u) \cap \Gamma_r(x)} d_b(v) + \sum_{y \in \Gamma_r(x) \setminus \Gamma_r(u)} d_b(y) \\
& = \sum_{y \in \Gamma_r(x)} d_b(y).
\end{aligned}$$

Zusammen mit (3.10) impliziert diese Ungleichung $d_b(x) < d_b(u)$ im Widerspruch zur Maximalität von $d_b(x)$. \square

Fakt 1.8: $k \geq 2$ and $B \neq \emptyset \Rightarrow \Gamma_r(\Gamma_b(x)) \subseteq \Gamma_r(x)$.

Beweis. Sei $k \geq 2$ und sei $z \in B$. Wegen Fakt 1.5 hat z einen roten Nachbarn $z' \in B$. Angenommen, es gibt eine rote Kante zwischen zwei Knoten $v, v' \in \Gamma_b(x)$. Dann enthält G den geschlossenen rot-blau-alternierenden Kantenzug $C : x \text{---} y \text{---} z \text{---} z' \text{---} y' \text{---} x \text{---} v \text{---} v' \text{---} x$, wobei y und y' zwei beliebige Elemente aus $\Gamma_r(x)$ sind. Widerspruch. Daher ist $\Gamma_r(\Gamma_b(x)) \cap \Gamma_b(x) = \emptyset$. Zusammen mit Fakt 1.4 und Fakt 1.7 erhält man Fakt 1.8. \square

Fakt 1.9: $B = \emptyset$.

Beweis. $k \geq 2$: Ist $B \neq \emptyset$, dann folgt aus Fakt 1.5, daß $|B| > k$ gilt. Wegen Fakt 1.8 gibt es einerseits mindestens $k|\Gamma_b(x)| = kd_b(x)$ rote Kanten zwischen $\Gamma_b(x)$ und $\Gamma_r(x)$. Da jeder Knoten aus $\Gamma_r(x)$ höchstens $k - 1$ rote Nachbarn in $\Gamma_b(x)$ hat, folgt andererseits, daß es höchstens $|\Gamma_r(x)|(k - 1) = k(k - 1)$ rote Kanten zwischen $\Gamma_b(x)$ und $\Gamma_r(x)$ gibt. Zusammen erhalten wir, daß $d_b(x) \leq k - 1$ gilt. Aber dann folgt $d_b(x) \leq k - 1 < k < |B| = d_b(y)$ für alle Knoten $y \in \Gamma_r(x)$, ein Widerspruch zur Wahl von x .

$k = 1$: Sei $\Gamma_r(x) = \{y\}$. Wir nehmen an, daß $B = \Gamma_b(y)$ nicht leer ist. Dann ist wegen $d_b(y) \leq d_b(x)$ auch $\Gamma_b(x)$ nicht leer. Da mit P auch R leer ist, impliziert (3.12)

$$|B| + |\Gamma_b(x)| = n - k - 1 = n - 2. \quad (3.14)$$

Fakt 1.4 und Fakt 1.5 implizieren, daß für jeden Knoten $z \in B$ bzw. $v \in \Gamma_b(x)$ genau ein roter Nachbar $z' \in B$ bzw. $v' \in \Gamma_b(x)$ existiert. Gäbe es eine blaue Kante zwischen z und v , dann besäße G den geschlossenen rot-blau-alternierenden Kantenzug $C : x \text{---} y \text{---} z' \text{---} z \text{---} v \text{---} v' \text{---} x$. Daher gibt es keine blauen Kanten zwischen $\Gamma_b(x)$ und B . Nach Fakt 1.4 gibt es auch keine roten Kanten zwischen $\Gamma_b(x)$ und B . Daher gilt

$$|E| = 1 + |\Gamma_b(x)| + |B| + |E(G[B])| + |E(G[\Gamma_b(x)])|.$$

Da es genau einen 1-Faktor in $G[B]$ und genau einen 1-Faktor in $G[\Gamma_b(x)]$ gibt, impliziert Teil a) unseres Satzes

$$\begin{aligned}
|E| &\leq 1 + |\Gamma_b(x)| + |B| + \frac{|\Gamma_b(x)|^2}{4} + \frac{|B|^2}{4} \\
&\stackrel{B \neq \emptyset, \Gamma_b(x) \neq \emptyset}{<} 1 + |\Gamma_b(x)| + |B| + \frac{(|B| + |\Gamma_b(x)|)^2}{4} \\
&\stackrel{(3.14)}{=} n - 1 + \frac{(n-2)^2}{4} = \frac{n^2}{4},
\end{aligned}$$

im Widerspruch zu $|E| = \frac{n^2}{4}$. \square

Fakt 1.7 und Fakt 1.9 implizieren

$$d_b(y) = 0 \quad \forall y \in \Gamma_r(x). \quad (3.15)$$

Sei $y \in \Gamma_r(x)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{z \in \Gamma_r(y)} d_b(z) &\stackrel{d_b(y)=0}{=} kd_b(y) + \sum_{z \in \Gamma_r(y)} d_b(z) \\
&\stackrel{(3.10)}{=} k(n - k - 1).
\end{aligned}$$

Wegen $d_b(z) \leq n - k - 1$ für $z \in \Gamma_r(y)$ und $|\Gamma_r(y)| = k$ folgt hieraus $d_b(z) = n - k - 1$ für alle $z \in \Gamma_r(y)$ und somit

$$d_b(z) = n - k - 1 \quad \forall z \in \Gamma_r(\Gamma_r(x)).$$

Insbesondere folgt $\Gamma_r(x) \cap \Gamma_r(\Gamma_r(x)) = \emptyset$, also $\Gamma_r(\Gamma_r(x)) \subseteq \Gamma_b(x) \cup \{x\}$. Sei $z \in \Gamma_r(\Gamma_r(x))$, $z \neq x$. Da es wegen Fakt 1.7 keine blauen Kanten zwischen z und $\Gamma_r(x)$ geben kann, impliziert $d_b(z) = n - k - 1$, daß $\Gamma_b(z) = \{x\} \cup \Gamma_b(x) \setminus \{z\}$ und somit $\Gamma_r(z) = \Gamma_r(x)$ gilt. Mit $U := \Gamma_r(x)$ und $W := \Gamma_r(\Gamma_r(x))$ folgt also $\Gamma_r(U) = W$ und $\Gamma_r(W) = U$ und damit $|W| = |U| = k$. Ferner gilt $d_b(y) = 0 \quad \forall y \in U$ und $d_b(z) = n - k - 1 \quad \forall z \in W$, d.h. U und W genügen den obigen Bedingungen (i), (ii) und (iii).

2. $\Gamma_b(x)$ enthält keine rote Kante:

Es seien $A, B, R_1, R_2, r_1, r_2, r, b$ definiert wie oben. Sei $\{y, y'\}$ eine blaue Kante in $\Gamma_r(x)$, andernfalls siehe 1. Gleichung (3.10) und Satz 3.1 implizieren Gleichheit in Fakt 2.3 und Fakt 2.4. Nach Fakt 2.3 ist dann y mit allen Knoten

in $\Gamma_b(x)$ über eine Kante verbunden. Angenommen, für ein $v \in \Gamma_b(x)$ ist die Kante $\{v, y\}$ rot. Dann enthält G den geschlossenen rot-blau-alternierenden Kantenzug $C : x \text{---} y' \text{---} y \text{---} v \text{---} x$, ein Widerspruch. Es folgt also $\Gamma_b(x) \subseteq \Gamma_b(y)$. Wegen $y' \in \Gamma_b(y) \setminus \Gamma_b(x)$ ergibt dies aber $d_b(y) > d_b(x)$ im Widerspruch zur Wahl von x . \square

3.4 Die maximale Anzahl von Kanten in einem Graphen mit eindeutigen k -Faktor für $k > \frac{n}{2}$

Satz 3.3 Für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n}{2} < k < n$ und kn gerade gilt:

- a) $\tilde{m}_n(\mathcal{R}_n^k) = \frac{nk}{2} + \binom{n-k}{2}$.
- b) Ist G ein zugehöriger Extremalgraph, so gibt es einen $(2k-n)$ -regulären Graphen \tilde{F} auf k Knoten, so daß G isomorph zum Graphen $\tilde{H}_{n,k}(\tilde{F})$ ist.

Beweis. Da der Satz für $k = n - 1$ offenkundig richtig ist, können wir im folgenden annehmen, daß $\frac{n}{2} < k < n - 1$ gilt. Wir beweisen beide Teile des Satzes in einem. Sei $G = (V, E)$ ein Graph auf n Knoten mit $\tilde{m}_n(\mathcal{R}_n^k)$ Kanten und genau einem k -Faktor F . Wir färben die Kanten von F rot und alle anderen Kanten von G blau. Sei

$$R := \{x \in V \mid d(x) = k\} \quad \text{und} \quad r := |R|,$$

d.h. R enthält alle Knoten, welche keine blaue Nachbarn haben. Wir wollen zeigen, daß $r = k$ gilt. Angenommen, es ist $r < k$. Wir betrachten den Graphen $G' := G - R$ und definieren $f' : V \setminus R \rightarrow \mathbb{N}$ vermöge

$$f'(x) := k - |\Gamma_r(x) \cap R| \quad \forall x \in V \setminus R.$$

Nach unserer Annahme gilt tatsächlich $f' \geq 1$. F' sei aufspannender Teilgraph von G' mit Kantenmenge $E(F') = E(F) \cap E(G')$. Dann ist F' ein f' -Faktor von G' , und zwar der einzige, da G' als Teilgraph von G keinen geschlossenen rot-blau-alternierenden Kantenzug besitzt. Da nach Definition von R der Graph G' keinen Knoten x mit $d(x) = f'(x)$ enthält, muß G'

nach Satz 2.2 eine Brücke e besitzen. Seien G_1 und G_2 die Komponenten von $G' - e$, sei x_i der Endknoten von e , der zu G_i gehört, und sei $n_i := |V(G_i)|$ ($i = 1, 2$). Dann gilt

$$n_1 + n_2 + r = n. \quad (3.16)$$

Da $x_i \notin R$ und $r < k$ ist, gilt $n_i \geq 2$ ($i = 1, 2$). Also enthält G_1 einen Knoten $x \neq x_1$. Da x keine Nachbarn in G_2 hat, gilt $\Gamma_r(x) \subseteq R \cup V(G_1) \setminus \{x\}$ und daher $n_1 + r - 1 \geq k$. Analog kann man zeigen, daß $n_2 + r - 1 \geq k$ gilt. Wir erhalten also

$$n_1 \geq k - r + 1 \quad \wedge \quad n_2 \geq k - r + 1. \quad (3.17)$$

Wir zählen nun die blauen Kanten in G . Da die Knoten in R keine blauen Nachbarn haben, gilt $E_b(G) = E_b(G')$. Wir betrachten einen beliebigen Knoten $x \in V(G_1)$, $x \neq x_1$. Da alle blauen Nachbarn von x zu G_1 gehören und x mindestens $k - r$ rote Nachbarn in G_1 hat, folgt: $d_b(x) \leq n_1 - 1 - (k - r)$. Da x_1 genau einen Nachbarn in G_2 hat, folgt analog: $d_b(x_1) \leq n_1 - (k - r)$. Genauso kann man zeigen, daß $d_b(x_2) \leq n_2 - (k - r)$ und $d_b(y) \leq n_2 - 1 - (k - r)$ für alle Knoten $y \in V(G_2)$, $y \neq x_2$ gilt. Dies impliziert

$$\begin{aligned} |E_b(G')| &\leq \frac{n_1(n_1 - 1 - (k - r))}{2} + \frac{n_2(n_2 - 1 - (k - r))}{2} + 1 \\ &\stackrel{(3.16)}{=} \frac{n_1(n - k - 1 - n_2)}{2} + \frac{n_2(n - k - 1 - n_1)}{2} + 1 \\ &= \frac{(n_1 + n_2)(n - k - 1)}{2} - n_1 n_2 + 1 \\ &\stackrel{(3.16)}{=} \frac{(n - r)(n - k - 1)}{2} - n_1 n_2 + 1. \end{aligned}$$

Wegen (3.16) und (3.17) nimmt dieser Term für festes r in $n_1 = k + 1 - r$ und $n_2 = n - r - (k + 1 - r) = n - k - 1$ sein Maximum an. Damit gilt

$$\begin{aligned} |E_b(G)| &\leq \frac{(n - r)(n - k - 1)}{2} - \frac{2(k + 1 - r)(n - k - 1)}{2} + 1 \\ &= \frac{(n - k - 1)(n - 2k - 2 + r)}{2} + 1 \\ &\stackrel{r < k}{<} \frac{(n - k - 1)(n - k - 2)}{2} + 1 = \binom{n - k - 1}{2} + 1 \\ &\leq \binom{n - k}{2} \end{aligned}$$

und daher

$$\tilde{m}_n(\mathcal{R}_n^k) = |E(G)| = \frac{nk}{2} + |E_b(G')| < \frac{nk}{2} + \binom{n-k}{2},$$

im Widerspruch zu (3.2). Daher war unsere Annahme falsch und es gilt $r \geq k$. Mit $\tilde{m}_n(\mathcal{R}_n^k) = |E(G)| = \frac{1}{2} \sum_{x \in V} d(x)$ erhalten wir nun die folgende Ungleichungskette:

$$\frac{nk}{2} + \binom{n-k}{2} \stackrel{(3.2)}{\leq} \tilde{m}_n(\mathcal{R}_n^k) = \frac{1}{2} \left(\sum_{x \in R} d(x) + \sum_{x \in V \setminus R} d(x) \right) \quad (3.18)$$

$$\leq \frac{1}{2} (rk + (n-r)(n-1)) \quad (3.19)$$

$$= \frac{1}{2} (n(n-1) - \underbrace{r(n-k-1)}_{>0})$$

$$\stackrel{r \geq k}{\leq} \frac{1}{2} (n(n-1) - k(n-k-1)) \quad (3.20)$$

$$= \frac{nk}{2} + \binom{n-k}{2}.$$

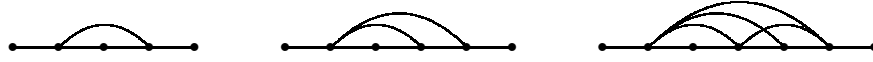
Daher gilt Gleichheit in (3.18)–(3.20). Dies impliziert Teil a) unseres Satzes. Gleichheit in (3.20) impliziert ferner, daß $r = k$ gilt, und zusammen mit der Gleichheit in (3.19) impliziert dies, daß G genau k Knoten vom Grad k und $n - k$ Knoten vom Grad $n - 1$ enthält. Es ist klar, daß G dann zu einem der Graphen $\tilde{H}_{n,k}(\tilde{F})$ isomorph ist. Dies impliziert Teil b) unseres Satzes. \square

Kapitel 4

Hamilton-Kreise und Hamilton-Pfade

In diesem Kapitel untersuchen wir Graphen mit genau einem Hamilton-Kreis bzw. Hamilton-Pfad, und geben neue Schranken für die Komplexität des Problems, einen Hamilton-Kreis bzw. Hamilton-Pfad zu identifizieren, an. Es sei $V = \{1, \dots, n\}$ die zugrundeliegende Knotenmenge. Ein *Hamilton-Kreis* bzw. ein *Hamilton-Pfad* auf V ist ein Kreis bzw. Pfad auf V , welcher alle Knoten aus V enthält. Wir bezeichnen mit C_n den Kreis auf n Knoten und mit P_n den Pfad auf n Knoten. (Man beachte hierbei, daß manche Autoren mit P_n den Pfad der Länge n , d.h. den Pfad auf $n + 1$ Knoten bezeichnen. Uns schien aber diese Notation in diesem Zusammenhang weniger sinnvoll.) Dann ist $\tilde{m}_n(C_n)$ bzw. $\tilde{m}_n(P_n)$ die maximale Anzahl an Kanten, welche ein Graph mit eindeutigem Hamilton-Kreis bzw. -Pfad besitzen kann. $\widetilde{M}_n(C_n)$ bzw. $\widetilde{M}_n(P_n)$ sind die Mengen der zugehörigen Extremalgraphen.

Die erste Aussage über Graphen mit eindeutigem Hamilton-Kreis ist wohl der Satz von C. A. B. Smith (vgl. [20]), daß jeder 3-reguläre Graph mit einem Hamilton-Kreis noch einen weiteren Hamilton-Kreis besitzt. John Sheehan hat 1979 vermutet, daß jeder Graph mit eindeutigem Hamilton-Kreis einen Knoten vom Grad höchstens 3 besitzt (vgl. [12]). Diese Vermutung ist bis heute ungelöst. Es gibt jedoch einige Arbeiten über diese Vermutung und verwandte Probleme (vgl. z.B. [9], [16], [17], [18]). Im Rahmen dieser Arbeit interessieren wir uns besonders für die Parameter $\tilde{m}_n(C_n)$ und $\tilde{m}_n(P_n)$ und die zugehörigen Extremalgraphen. Sheehan hat $\tilde{m}_n(C_n)$ und $\tilde{m}_n(P_n)$ 1977 bestimmt:

Abbildung 4.1: Die Graphen H_5^p , H_6^p und H_7^p

Satz 4.1 (Sheehan [15]) a) $\tilde{m}_n(P_n) = \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1$,
 b) $\tilde{m}_n(C_n) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1$.

Wir werden den Beweis der Aussage a) weiter unten noch besprechen, da wir einige Ideen aus diesem Beweis noch benötigen werden.

Sheehan hat die folgenden Extremalgraphen $H_n^p \in \widetilde{M}_n(P_n)$ und $H_n^c \in \widetilde{M}_n(C_n)$ konstruiert: H_n^p habe die Knotenmenge $\{1, 2, \dots, n\}$ und die Kanten $\{i, i+1\}$ ($i = 1, \dots, n-1$) und $\{2j, h\}$ ($j = 1, \dots, \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$, $h = 2j+2, \dots, n-1$). Für $n = 2, 3, 4$ ist H_n^p gerade ein Hamilton-Pfad auf n Knoten. Abb. 4.1 zeigt die Graphen H_5^p , H_6^p und H_7^p . Es ist leicht zu sehen, daß H_n^p genau einen Hamilton-Pfad, nämlich $P : 1 - 2 - \dots - n$, enthält und $\left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1$ Kanten besitzt. Den Extremalgraphen H_n^c erhält man, indem man zu H_{n-1}^p den Knoten n und alle Kanten zwischen n und $\{1, \dots, n-1\}$ hinzufügt. Sheehans Aussage, daß diese Graphen bis auf Isomorphie die jeweils einzigen extremalen Graphen sind, ist jedoch falsch. Barefoot und Entringer haben gezeigt:

Satz 4.2 (Barefoot, Entringer [3]) *Es gibt bis auf Isomorphie genau $2^{\lfloor n/2 \rfloor - 4}$ Extremalgraphen in $\widetilde{M}_n(C_n)$.*

Barefoot und Entringer haben eine rekursive Prozedur zur Konstruktion aller extremalen Graphen mit genau einem Hamilton-Kreis angegeben. Wir werden im ersten Abschnitt dieses Kapitels die Anzahl der extremalen Graphen in $\widetilde{M}_n(P_n)$ bestimmen und diese Graphen dann explizit angeben. Mit Hilfe von Satz 4.2 werden wir dann auch die Graphen aus $\widetilde{M}_n(C_n)$ explizit angeben können.

Sheehans Ergebnis impliziert zusammen mit der Greedy-Schranke (Satz 1.1), daß für die zugehörigen Suchkomplexitäten gilt:

$$c_n(C_n) \geq \left\lfloor \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \quad (4.1)$$

und

$$c_n(P_n) \geq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - 1. \quad (4.2)$$

Aigner und Triesch geben in [2] einen Algorithmus an, der – im Rahmen unseres Suchproblems – einen Hamilton-Kreis mit höchstens $\frac{n^2}{2} - \frac{9}{2}n + 20$ Tests findet. Da das Problem, soweit wir wissen, noch nicht näher untersucht wurde, ist dies der bisher beste uns bekannte Algorithmus. Wir werden im zweiten Abschnitt dieses Kapitels einen Algorithmus konstruieren, welcher mit höchstens $\frac{3}{10}n^2 + O(n)$ Tests einen Hamilton-Kreis bzw. -Pfad auf n Knoten identifiziert. Zusammen mit der Greedy-Schranke erhalten wir damit

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \leq c_n(C_n) \leq \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{20} + O(n)$$

und

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - 1 \leq c_n(P_n) \leq \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{20} + O(n).$$

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden wir Graphen auf $n + 1$ Knoten, die genau einen P_n enthalten, untersuchen. Dabei wird uns die Darstellung aller extremalen Graphen mit eindeutigem Hamilton-Pfad aus dem ersten Abschnitt sehr nützlich sein. Wir werden zeigen, daß

$$\tilde{m}_{n+1}(P_n) = \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1$$

gilt, und wir werden alle zugehörigen extremalen Graphen bestimmen.

4.1 Konstruktion aller Graphen mit genau einem Hamilton-Kreis bzw. Hamilton-Pfad

Wir untersuchen zuerst Graphen mit eindeutigem Hamilton-Pfad. Wir werden zunächst noch einmal die Ungleichung

$$\tilde{m}_n(P_n) \leq \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1 \quad (4.3)$$

von Sheehan beweisen, da wir aus dem Beweis einige Folgerungen ziehen werden, welche wir zur Konstruktion der extremalen Graphen benötigen. Obwohl unser Beweis nicht mit Sheehans Beweis identisch ist, benutzen wir dieselben Ideen.

Beweis von (4.3). Wir betrachten einen Graphen G mit Knotenmenge $\{1, 2, \dots, n\}$ und Kantenmenge E , der genau einen Hamilton-Pfad, nämlich $P : 1 - 2 - \dots - n$, enthält. Zunächst ist klar, daß $d(1) = d(n) = 1$ gilt, da es ansonsten einen weiteren Hamilton-Pfad gäbe. Wir nennen nun jede Kante $\{i, j\}$ mit $2 \leq i < j \leq n - 1$ und $j - i \geq 2$ eine *Sehne der Länge* $j - i$ von P . Die größtmögliche Länge einer Sehne von G ist gerade $n - 3$. Sie wird nur von der Sehne $\{2, n - 1\}$ erreicht. Angenommen, G besitzt zwei benachbarte Sehnen $\{i, j\}$ und $\{i + 1, j + 1\}$. Dann enthält G außer P noch einen weiteren Hamilton-Pfad (vgl. Abb. 4.2, der zweite Hamilton-Pfad ist fett gedruckt). Dies ist ein Widerspruch zur Eindeutigkeit von P . Demnach enthält G für jedes $h \in \{2, 3, \dots, n - 3\}$ nur jede zweite Sehne der Länge h , also insgesamt höchstens $\lfloor \frac{n-h-1}{2} \rfloor$ Sehnen der Länge h . Da jede Kante von G entweder eine Sehne ist oder zu P gehört, folgt für die Anzahl der Kanten von G :

$$|E| \leq n - 1 + \sum_{h=2}^{n-3} \left\lfloor \frac{n-h-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1. \quad (4.4)$$

□

Soweit zum Beweis von Sheehan. Danach ist es klar, daß jeder extremale Graph neben dem Hamilton-Pfad $P : 1 - 2 - \dots - n$ als weitere Kanten genau $\lfloor \frac{n-h-1}{2} \rfloor$ Sehnen der Länge h enthält, die paarweise nicht benachbart sind. Sei G ein solcher Graph. Wir betrachten zunächst den Fall, daß n ungerade ist. In diesem Fall hat G für gerades $h \in \{2, 4, \dots, n - 3\}$ genau die Sehnen $\{2j, 2j + h\}$ ($j = 1, 2, \dots, \frac{n-1-h}{2}$) der Länge h . Für ungerades



Abbildung 4.2: Zweiter Hamilton-Pfad bei benachbarten Sehnen

$h \in \{3, 5, \dots, n-4\}$ gibt es dann ein $l_h := l_h(G) \in \{1, 2, \dots, \frac{n-h-2}{2}\}$, so daß G gerade die Sehnen $\{2j, 2j+h\}$ ($j = 1, \dots, l_h$) und $\{2j+1, 2j+1+h\}$ ($j = l_h+1, \dots, \frac{n-h-2}{2}$) der Länge h enthält. Die Sehnen $\{2j, 2j+h\}$ ($j = 1, \dots, l_h$) nennen wir *linksbündig angeordnet*, die Sehnen $\{2j+1, 2j+1+h\}$ ($j = l_h+1, \dots, \frac{n-h-2}{2}$) entsprechend *rechtsbündig angeordnet*. Demnach sind $r_h := \frac{n-2-h}{2} - l_h$ Sehnen der Länge h rechtsbündig angeordnet.

Im Fall, daß n gerade ist, sind die Sehnen ungerader Länge eindeutig festgelegt. Dann kann man für $h = 2, 4, \dots, n-4$ die Anzahl l_h der linksbündig bzw. die Anzahl r_h der rechtsbündig angeordneten Sehnen der Länge h analog definieren. Offensichtlich gilt mit diesen Definitionen dann für die von Sheehan konstruierten Graphen $l_h(H_n^p) = \lfloor \frac{n-1-h}{2} \rfloor$ für alle h , d.h. alle Sehnen sind linksbündig angeordnet.

Wir zeigen nun

Satz 4.3 *Sei G ein Graph auf $\{1, \dots, n\}$ mit Hamilton-Pfad $P : 1 - 2 - \dots - n$. Für $n \leq 7$ ist G genau dann ein Extremalgraph aus $\widetilde{M}_n(P_n)$, wenn G isomorph zu H_n^p ist. Für $n \geq 8$ ist G genau dann ein Extremalgraph aus $\widetilde{M}_n(P_n)$, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

- a) G hat genau $\lfloor \frac{n-h-1}{2} \rfloor$ Sehnen der Länge h , die paarweise nicht benachbart sind ($h = 2, \dots, n-3$).
- b) Ist n ungerade, dann gilt für $h = 3, 5, \dots, n-6$:

- i) $l_h \geq l_{h+2}$
- ii) $l_h \leq l_{h+2} + 1$.

Ist n gerade, dann gilt für $h = 2, 4, \dots, n-6$:

- i) $l_h \geq l_{h+2}$
- ii) $l_h \leq l_{h+2} + 1$.

Bevor wir diesen Satz beweisen, zeigen wir noch die im folgenden nützliche

Proposition 4.4 *Sei G ein Graph mit Hamilton-Pfad $P : 1 - 2 - \dots - n$, welcher die Sehnen $\{i, j\}$ und $\{i-1, k\}$ enthält. Besitzt G dann noch die Sehne $\{j-1, k+1\}$ mit $i+2 \leq j \leq k$ oder die Sehne $\{k-1, j+1\}$ mit $i+2 \leq k \leq j$, dann enthält G einen zweiten Hamilton-Pfad.*



Abbildung 4.3: Zweiter Hamilton-Pfad in Proposition 4.4

Beweis. Man vergleiche Abb. 4.3 für den Fall, daß $j < k$ ist. Der zweite Hamilton-Pfad ist fettgedruckt. Der andere Fall geht analog. \square

Beweis von Satz 4.3. Man sieht leicht, daß der Satz für $n \leq 7$ richtig ist. Wir zeigen den Satz nur für ungerades $n \geq 9$, der Beweis für gerades $n \geq 8$ funktioniert mit ähnlichen Überlegungen.

\Rightarrow : Die Notwendigkeit von Bedingung a) folgt aus unseren obigen Überlegungen. Sei G daher ein Graph auf $\{1, 2, \dots, n\}$ mit genau einem Hamilton-Pfad, nämlich $P : 1 - 2 - \dots - n$, welcher Bedingung a) genügt. Dann besitzt $G \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1$ Kanten. Wir beweisen nun durch Induktion nach h , daß die Parameter $l_h := l_h(G)$ ($h = 3, 5, \dots, n-6$) den Bedingungen i) und ii) aus b) genügen. Als Induktionsanfang betrachten wir $h = 3$:

- i) Angenommen, es gilt $l_3 < l_5$. Dann enthält G die Sehnen $\{2l_5, 2l_5 + 5\}$, $\{2l_5 + 1, 2l_5 + 4\}$ und $\{2l_5 + 3, 2l_5 + 6\}$ und damit nach Proposition 4.4 einen weiteren Hamilton-Pfad im Widerspruch zur Eindeutigkeit von P .
- ii) $l_3 \geq l_5$ impliziert aus Symmetriegründen $r_3 \geq r_5$. Es folgt $\frac{n-5}{2} - l_3 = r_3 \geq r_5 = \frac{n-7}{2} - l_5$ und damit $l_3 \leq l_5 + 1$.

Sei nun $h \in \{5, 7, \dots, n-6\}$.

- i) Angenommen, es gilt $l_h < l_{h+2}$. Dann enthält G die Sehnen $\{2l_{h+2}, 2l_{h+2} + h + 2\}$ und $\{2l_{h+2} + 1, 2l_{h+2} + h + 1\}$. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt $l_3 \leq l_5 + 1 \leq \dots \leq l_h + \frac{h-3}{2}$, und daher nach Annahme auch $l_3 < l_{h+2} + \frac{h-3}{2}$. Daher enthält G ebenfalls die Sehne $\{2l_{h+2} + h, 2l_{h+2} + h + 3\}$. Zusammen mit Proposition 4.4 liefert dies einen Widerspruch zur Eindeutigkeit von P .
- ii) $l_h \geq l_{h+2}$ impliziert aus Symmetriegründen $r_h \geq r_{h+2}$. Es folgt $\frac{n-h-2}{2} - l_h = r_h \geq r_{h+2} = \frac{n-(h+2)-2}{2} - l_{h+2}$ und damit $l_h \leq l_{h+2} + 1$.

\Leftarrow : Wir beweisen die umgekehrte Richtung durch Induktion nach n . Sei G ein Graph auf $\{1, \dots, n\}$, welcher den Hamilton-Pfad $P : 1 - 2 - \dots - n$ enthält und den Bedingungen a) und b) genügt. Da G dann $\tilde{m}_n(P_n) = \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1$ Kanten enthält, genügt es zu zeigen, daß G keinen zweiten

Hamilton-Pfad besitzt. Im Fall $n \in \{3, 5, 7\}$ ist offensichtlich $G = H_n^p$, und G besitzt daher keinen zweiten Hamilton-Pfad. Sei also $n \geq 9$, n ungerade. Da G genau eine Sehne der Länge $n - 4$ hat, gilt $l_{n-4} = 1$ oder $l_{n-4} = 0$. Aus Symmetriegründen können wir annehmen, daß $l_{n-4} = 1$ gilt. Wegen Bedingung i) gilt dann $l_h \geq 1$ für alle $h \in \{3, \dots, n - 4\}$ und daher $d(3) = 2$. Demnach muß jeder Hamilton-Pfad von G mit dem Teilpfad $1 - 2 - 3$ starten. Wir betrachten nun den Graphen $G' := G - \{1, 2\}$, der aus G durch Entfernen der Knoten 1 und 2 und aller mit ihnen inzidenten Kanten entsteht. Nach Konstruktion besitzt G' den Hamilton-Pfad $P' : 3 - 4 - \dots - n$ und es gilt $d_{G'}(3) = d_{G'}(n) = 1$. Ferner besitzt G' genau $\left\lfloor \frac{(n-2)-1-h}{2} \right\rfloor$ Sehnen der Länge h ($h = 2, 3, \dots, (n-2) - 3$), und für die Parameter $l_h(G')$ gilt: $l_h(G') = l_h(G) - 1$ ($h = 3, 5, \dots, n - 6$). Demnach erfüllen diese Parameter die Bedingungen i) und ii) und wir können die Induktionsvoraussetzung auf G' anwenden. G' besitzt also genau einen Hamilton-Pfad. Da aber jeder Hamilton-Pfad von G sich aus $1 - 2 - 3$ und einem Hamilton-Pfad von 3 nach n aus G' zusammensetzt, besitzt mit G' auch G genau einen Hamilton-Pfad. \square

Nach Satz 4.3 ist jeder extremale Graph G durch die Parameter $l_h(G)$ eindeutig festgelegt. Es folgt

Korollar 4.5 *Zwei extremale Graphen G und G' sind genau dann isomorph, wenn entweder $l_h(G) = l_h(G')$ für alle h oder $l_h(G) = r_h(G')$ für alle h gilt. Daher gibt es für $n \leq 7$ bis auf Isomorphie genau einen extremalen Graphen. Für $n \geq 8$ gibt es bis auf Isomorphie genau $2^{\lfloor n/2 \rfloor - 3}$ extremale Graphen.*

Beweis. Die erste Behauptung ist klar. Die Behauptung für $n \leq 7$ folgt direkt aus Satz 4.3 (vgl. auch Abb. 4.1). Für $n \geq 8$ ist die Anzahl der extremalen Graphen aufgrund der ersten Aussage des Korollars gerade

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |\{(l_3, l_5, \dots, l_{n-4}) | l_{n-4} \in \{0, 1\}, l_i \in \{l_{i+2}, l_{i+2} + 1\} (i = 3, 5, \dots, n - 6)\}| \\ &= \frac{1}{2} 2^{(n-5)/2} = 2^{\lfloor n/2 \rfloor - 3}, \end{aligned}$$

falls n ungerade ist, und

$$\frac{1}{2} |\{(l_2, l_4, \dots, l_{n-4}) | l_{n-4} \in \{0, 1\}, l_i \in \{l_{i+2}, l_{i+2} + 1\} (i = 2, 4, \dots, n - 6)\}|$$

$$= \frac{1}{2} 2^{(n-4)/2} = 2^{\lfloor n/2 \rfloor - 3},$$

falls n gerade ist. □

Bemerkung 4.6 Satz 4.3 und Korollar 4.5 geben alle extremalen Graphen mit eindeutigem Hamilton-Pfad explizit an. Wir können aus diesen Graphen nun auch eine explizite Darstellung aller extremalen Graphen mit genau einem Hamilton-Kreis gewinnen: Es sei $G \in \widetilde{M}_n(P_n)$. Definiere dann einen Graphen G^+ wie folgt: G^+ entstehe aus G durch Hinzufügen des Knotens $n+1$ und aller Kanten zwischen $n+1$ und $\{1, \dots, n\}$. Dann ist die Zuordnung $+ : G \mapsto G^+$ ($G \in \widetilde{M}_n(P_n)$) eine bijektive Abbildung von $\widetilde{M}_n(P_n)$ nach $\widetilde{M}_{n+1}(C_{n+1})$. Zum Beweis: Es ist klar, daß der Graph G^+ genau einen Hamilton-Kreis hat. Wegen $|E(G^+)| = |E(G)| + n = \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1 + n = \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{4} \right\rfloor + 1$ und Satz 4.1 gilt somit $G^+ \in \widetilde{M}_{n+1}(C_{n+1})$. Ferner ist klar, daß für zwei nicht isomorphe Graphen $G_1, G_2 \in \widetilde{M}_n(P_n)$ auch die Graphen G_1^+ und G_2^+ nicht isomorph sind. Daher ist $+ : \widetilde{M}_n(P_n) \rightarrow \widetilde{M}_{n+1}(C_{n+1})$ injektiv. Mit Satz 4.2 gilt nun $|\widetilde{M}_{n+1}(C_{n+1})| = 2^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor - 4} = 2^{\lfloor n/2 \rfloor - 3} = |\widetilde{M}_n(P_n)|$. Daher ist die Abbildung $+$ auch bijektiv. □

4.2 Ein Algorithmus zur Identifizierung eines Hamilton-Kreises

Wir werden nun einen Algorithmus zur Identifizierung eines Hamilton-Kreises vorstellen. Dazu einige Vorbemerkungen: G^* sei der unbekannte, zu findende Hamilton-Kreis auf der Knotenmenge V . Der Test einer Kante $\{x, y\}$ mit $x, y \in V$ entspricht der Frage, ob G^* diese Kante enthält oder nicht. Während der Durchführung des Algorithmus sei H zu jedem Zeitpunkt der Graph auf V , welcher alle bis zu diesem Zeitpunkt identifizierten Kanten von G^* enthält. Zu Beginn des Algorithmus ist H daher der Graph ohne Kanten, nach seiner Beendigung ist H der gesuchte Hamilton-Kreis, d.h. es gilt $H = G^*$. Die dem Algorithmus zugrundeliegende Idee ist die folgende: Der Algorithmus startet mit dem Test einer beliebigen Kante $\{x, y\}$. Fällt dieser Test positiv aus, so setzt er $a_1 := x$ und $B_1 := \{y\}$, andernfalls setzt er $a_1 := x$ und $a_2 := y$.

Angenommen, der Algorithmus hat bereits Knoten a_1, \dots, a_k und Knotenmengen B_1, \dots, B_k gefunden. Im zweiten Schritt testet der Algorithmus dann Kanten zwischen einem Knoten $v \in V \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_k \cup \{a_1, \dots, a_k\})$ und den Knoten aus $A := \{a_1, \dots, a_k\}$. Gehört keine dieser Kanten zu G^* , so wird v als Element a_{k+1} der Menge A zugeordnet, andernfalls wird v der Menge B_i mit $i := \min\{j \leq k \mid \{v, a_j\} \in E(G^*)\}$ zugeordnet. Im dritten Schritt sucht der Algorithmus die noch fehlenden Nachbarn der Knoten a_1, \dots, a_k . Anschließend besteht der Graph H aus einzelnen Pfaden, deren Endknoten zu $B_1 \cup \dots \cup B_k$ gehören. Im vierten Schritt werden dann alle Kanten zwischen je zwei dieser Endknoten getestet.

Algorithmus \mathcal{A} zur Identifizierung eines Hamilton-Kreises auf einer gegebenen Knotenmenge V :

0. $V(H) := V, E(H) := \emptyset$.
- 1.a. Wähle zwei beliebige Knoten x, y und teste $\{x, y\}$.
 - b. WENN $\{x, y\} \in E(G^*)$
DANN Setze $E(H) := E(H) \cup \{\{x, y\}\}$, $k := 1$, $a_1 := x$ und $B_1 := \{y\}$.
SONST Setze $k := 2$, $a_1 := x$, $a_2 := y$, $B_1 := \emptyset$ und $B_2 := \emptyset$.
- 2.a. WENN $B_1 \cup \dots \cup B_k \cup \{a_1, \dots, a_k\} \neq V$
DANN wähle einen Knoten $v \in V \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_k \cup \{a_1, \dots, a_k\})$ und setze $i := 1$.
SONST Gehe zu **3**.
- b. WENN $i = k + 1$ DANN Setze $k := k + 1$, $a_k := v$, $B_k := \emptyset$ und gehe zu **2.a**.
- c. WENN $d_H(a_i) = 2$ DANN Setze $i := i + 1$ und gehe zu **2.b**.
- d. Teste $\{v, a_i\}$.
WENN $\{v, a_i\} \in E(G^*)$
DANN Setze $E(H) := E(H) \cup \{\{v, a_i\}\}$, $B_i := B_i \cup \{v\}$ und gehe zu **2.a**.
SONST Setze $i := i + 1$ und gehe zu **2.b**.

- 3.a.** Setze $i := 1$.
- b.** WENN $i > k$ DANN Gehe zu **4**.
 - c.** $B'_i := \{b \in B_1 \cup \dots \cup B_{i-1} \mid d_H(b) < 2\}$.
 - d.** WENN $d_H(a_i) = 2$ DANN Setze $i := i + 1$ und gehe zu **3.b**.
 - e.** Wähle $b \in B'_i$ und teste $\{a_i, b\}$.
 WENN $\{a_i, b\} \in E(G^*)$
 DANN Setze $E(H) := E(H) \cup \{\{a_i, b\}\}$, $B'_i := B'_i \setminus \{b\}$ und gehe zu **3.d**.
 SONST Setze $B'_i := B'_i \setminus \{b\}$ und gehe zu **3.e**.
- 4.a.** Wähle $b \in B' := \{u \in B_1 \cup \dots \cup B_k \mid d_H(u) < 2\}$.
- b.** Wähle $b' \in B' \setminus \{b\}$ und teste $\{b, b'\}$.
 - c.** WENN $\{b, b'\} \in E(G^*)$
 DANN Setze $E(H) := E(H) \cup \{\{b, b'\}\}$.
 SONST Setze $B' := B' \setminus \{b'\}$ und gehe zu **4.b**.
 - d.** WENN $H = C_n$
 DANN STOP
 SONST Gehe zu **4.a**.

Analyse von \mathcal{A} :

Korrektheit: In den ersten beiden Schritten ordnet der Algorithmus jeden Knoten aus V einer der beiden Mengen $A := \{a_1, \dots, a_k\}$ und $B := B_1 \cup \dots \cup B_k$ zu. Dabei wird ein Knoten v genau dann als a_{i+1} in die Menge A eingeordnet, wenn keine der Kanten $\{v, a_j\}$ ($j = 1, \dots, i$) zu G^* gehört. In die Menge B_i wird v eingeordnet, falls i der kleinste Index ist, so daß G^* die Kante $\{v, a_i\}$ enthält. Nach dem 2. Schritt gilt daher für $i, j \in \{1, \dots, k\}$:

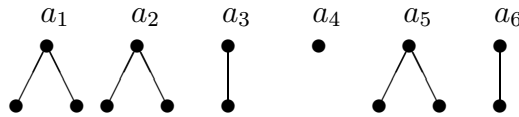
- (i) Die Mengen B_1, \dots, B_k sind paarweise disjunkt mit $|B_1| = 2$ und $|B_i| \leq 2$ für $i \geq 2$.
- (ii) $\{a_i, a_j\} \notin E(G^*)$.
- (iii) $\forall b \in B_i : \{a_i, b\} \in E(G^*)$.
- (iv) $i < j : \forall b \in B_j : \{a_i, b\} \notin E(G^*)$.

(v) $i > j : \forall b \in B_j$: Die Kante $\{a_i, b\}$ wurde noch nicht getestet.

(vi) $\forall b \in B_i \forall b' \in B_j$: Die Kante $\{b, b'\}$ wurde noch nicht getestet.

Die Bedingungen (iii)–(v) implizieren, daß für $i = 1, \dots, k$ die nach dem 2. Schritt noch fehlenden Nachbarn von a_i zu B'_i (s. **3.c.**) gehören. Im 3. Schritt werden daher für $i = 1, \dots, k$ alle Kanten zwischen a_i und B'_i getestet, bis die noch fehlenden Nachbarn von a_i identifiziert sind. Nach dem 3. Schritt besteht H aus disjunkten Pfaden, deren Endknoten zu B gehören. Im 4. Schritt werden die Kanten zwischen je zwei solchen Endknoten getestet. Da alle nach dem 3. Schritt noch fehlenden Kanten zwischen je zwei solchen Endknoten liegen, ist nach dem vierten Schritt G^* eindeutig identifiziert. D.h. der Algorithmus arbeitet korrekt.

Laufzeit: Im folgenden sei $n = |V|$. Wir betrachten zunächst die Situation vor dem 3. Schritt. Es sei H_1 der Graph auf V , der genau die Kanten von G^* enthält, welche in den ersten beiden Schritten identifiziert wurden. Dann gilt $d_{H_1}(a_i) = |B_i|$ für $i = 1, \dots, k$ und H_1 besteht aus disjunkten Pfaden der Länge 0, 1 oder 2. Dabei sind die Pfade der Länge 0 gerade die Knoten $a_i \in A$ mit $B_i = \emptyset$. Die Pfade der Länge 1 sind gerade die Kanten $a_i - b$ mit $a_i \in A$ und $B_i = \{b\}$ einelementig. Und die Pfade der Länge 2 haben die Form $b - a_i - b'$ mit $a_i \in A$ und $B_i = \{b, b'\}$ zweielementig. H_1 könnte für $n = 14$ z.B. wie folgt aussehen:



Man beachte, daß stets $d_{H_1}(a_1) = 2$ gilt, da in den ersten beiden Schritten die Kanten zwischen a_1 und allen anderen Knoten identifiziert werden. Wir definieren nun

$$R := \{a \in A \mid d_{H_1}(a) = 2\}, r := |R|, \quad (4.5)$$

$$S := \{a \in A \mid d_{H_1}(a) = 1\}, s := |S|, \quad (4.6)$$

$$T := \{a \in A \mid d_{H_1}(a) = 0\}, t := |T|. \quad (4.7)$$

Es folgt

$$r + s + t = |A| = k \wedge 2r + s = |B| \quad (4.8)$$

und damit

$$3r + 2s + t = n. \quad (4.9)$$

Offensichtlich hängt die Anzahl der Tests, die der Algorithmus benötigt, nur von den Kardinalitäten r, s und t und der Reihenfolge $(d_{H_1}(a_1), \dots, d_{H_1}(a_k))$ ab. Dabei ist zu beachten, daß die Parameter r, s und t nach den ersten beiden Schritten nicht beliebige Werte annehmen können. Insbesondere gilt

$$r \geq t. \quad (4.10)$$

Zum Beweis beachte man, daß die vor dem 3. Schritt noch fehlenden $s + 2t$ Nachbarn der Knoten aus $S \cup T$ in B liegen. Da jeder Knoten in B bereits einen Nachbarn in A hat, erhalten wir somit $s + 2t \leq |B| = 2r + s$. Subtraktion von s und Division durch 2 liefert (4.10).

Es sei nun H_2 der Graph auf V , der alle in den ersten drei Schritten gefundenen Kanten von G^* enthält. Dann gilt:

Lemma 4.7 *H_2 besteht aus $r - t$ disjunkten Pfaden, deren Endknoten alle zu B gehören.*

Beweis. Da im 3. Schritt sämtliche noch fehlenden Nachbarn der Knoten aus A gefunden werden und H_2 Teilgraph eines Hamilton-Kreises ist, besteht H_2 tatsächlich aus disjunkten Pfaden, deren Endknoten zu B gehören. Die Anzahl der Pfade in H_1 ist gerade $r + s + t$. Das Finden des fehlenden Nachbarn eines Knotens $a_i \in S$ bedeutet gerade das Verknüpfen der Kante $a_i - b$ ($B_i = \{b\}$) mit einem anderen Pfad. Das Finden der fehlenden Nachbarn eines Knotens $a_i \in T$ bedeutet gerade das Verknüpfen von a_i mit zwei anderen Pfaden. Also ist die Anzahl der Pfade nach dem 3. Schritt gerade $r + s + t - s - 2t = r - t$. \square

Lemma 4.8 *Im 4. Schritt benötigt der Algorithmus im worst-case $(r - t)^2$ Tests.*

Beweis. Zu Anfang des 4. Schritts enthält B' wegen Lemma 4.7 genau $2(r - t)$ Knoten, denen je genau ein Nachbar fehlt. Der Algorithmus wählt nun einen Knoten b und testet alle Kanten zwischen diesem Knoten und den anderen Knoten aus B' . Im worst-case benötigt er $|B'| - 1$ Tests, um eine Kante zu finden. Da er dann die beiden Endknoten dieser Kante aus B' entfernt, ist die Anzahl der benötigten Tests im 4. Schritt im worst-case höchstens

$$(2(r - t) - 1) + (2(r - t) - 3) + \dots + 3 + 1 = (r - t)^2. \quad \square$$

Die Anzahl der Tests im letzten Schritt hängt also nicht von der Reihenfolge $(d_{H_1}(a_1), \dots, d_{H_1}(a_k))$ ab. Wir überlegen nun, für welche Reihenfolge von $(d_{H_1}(a_1), \dots, d_{H_1}(a_k))$ (bei vorgegebenen Werten für r, s, t) die Anzahl der Tests maximal wird. Dabei können wir uns auf die Untersuchung der ersten drei Schritte beschränken.

Lemma 4.9 *Für gegebene Werte von r, s und t wird die Gesamtzahl der Tests durch die Reihenfolge*

$$(d_{H_1}(a_1), \dots, d_{H_1}(a_k)) = (\underbrace{2, \dots, 2}_r, \underbrace{1, \dots, 1}_s, \underbrace{0, \dots, 0}_t)$$

maximiert.

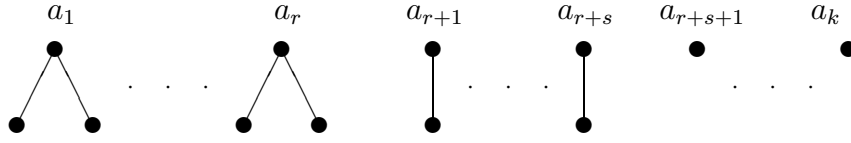
Beweis. Sei \mathcal{S} eine Strategie, welche nach den ersten beiden Schritten den Graphen H_1 erzeugt. Angenommen, es ist $(d_{H_1}(a_1), \dots, d_{H_1}(a_k)) \neq (2, \dots, 2, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$. Dann gibt es ein $i \in \{2, \dots, k\}$ mit $d_{H_1}(a_i) < d_{H_1}(a_{i+1})$. Wir unterscheiden drei Fälle:

I. $d_{H_1}(a_i) = 0$ und $d_{H_1}(a_{i+1}) = 1$: Sei $B_{i+1} = \{b\}$. Sei $\tilde{\mathcal{S}}$ die Strategie, welche bereits den Test der Kante $\{a_i, b\}$ positiv beantwortet und ansonsten in den ersten beiden Schritten dieselben Antworten gibt wie \mathcal{S} . Sei \tilde{H}_1 der entsprechende Graph und seien $\tilde{B}_i, \tilde{B}'_i$ ($i = 1, \dots, k$) die entsprechenden Mengen, die im Algorithmus erzeugt werden. Dann gilt:

Bei der Strategie $\tilde{\mathcal{S}}$ benötigt der Algorithmus zum Einordnen von b in B_i im zweiten Schritt einen Test weniger als bei \mathcal{S} . Die Anzahl der Tests zum Finden der/des fehlenden Nachbarn von a_i im 3. Schritt wäre bei beiden Strategien wegen $B'_i = \tilde{B}'_i$ gleich. Zum Finden der fehlenden Nachbarn von a_{i+1} würde der Algorithmus jedoch bei $\tilde{\mathcal{S}}$ zwei Tests mehr benötigen, denn es gilt $|B'_{i+1}| = |B'_i| - 2$ bei \mathcal{S} und $|\tilde{B}'_{i+1}| = |\tilde{B}'_i| - 1 + |\tilde{B}_i| = |\tilde{B}'_i| = |B'_i|$ bei $\tilde{\mathcal{S}}$. Die Anzahl der Tests, um die anderen Knoten in A bzw. B einzuordnen und die fehlenden Nachbarn der Knoten aus A zu finden, wäre bei beiden Strategien gleich. Demnach würde der Algorithmus bei $\tilde{\mathcal{S}}$ einen Test mehr benötigen als bei \mathcal{S} .

II. $d_{H_1}(a_i) = 1$ und $d_{H_1}(a_{i+1}) = 2$: Sei $B_{i+1} = \{b, b'\}$. Wie in I. sei $\tilde{\mathcal{S}}$ die Strategie, welche bereits den Test der Kante $\{a_i, b\}$ positiv beantwortet und ansonsten dieselben Antworten gibt wie \mathcal{S} . Analog zu I. erhält man, daß der Algorithmus bei $\tilde{\mathcal{S}}$ einen Test mehr benötigt als bei \mathcal{S} .

III. $d_{H_1}(a_i) = 0$ und $d_{H_1}(a_{i+1}) = 2$: Sei $B_{i+1} = \{b, b'\}$. Sei $\tilde{\mathcal{S}}$ die Strategie,

Abbildung 4.4: Der Graph H_1 im worst-case

welche bereits die Tests der Kanten $\{a_i, b\}$ und $\{a_i, b'\}$ positiv beantwortet und ansonsten dieselben Antworten gibt wie \mathcal{S} . Sei \tilde{H}_1 wieder der entsprechende Graph und seien $\tilde{B}_i, \tilde{B}'_i$ die entsprechenden Mengen. Bei $\tilde{\mathcal{S}}$ braucht der Algorithmus zum Einordnen von b und b' in B zwei Tests weniger. Im 3. Schritt muß er statt der fehlenden Nachbarn von a_i die fehlenden Nachbarn von a_{i+1} finden. Wegen $\tilde{B}'_{i+1} = B'_i \cup \{b, b'\}$ braucht der Algorithmus dafür zwei Tests mehr. Das Einordnen der anderen Knoten in A bzw. B und das Finden der Nachbarn der Knoten aus $A \setminus \{a_i, a_{i+1}\}$ erfordert bei beiden Strategien gleichviele Tests. Demnach würde der Algorithmus bei beiden Strategien dieselbe Anzahl von Tests benötigen.

Insgesamt erhalten wir, daß beim Übergang von der zu $(d_{H_1}(a_1), \dots, d_{H_1}(a_i), d_{H_1}(a_{i+1}), \dots, d_{H_1}(a_k))$ gehörenden Strategie \mathcal{S} zu der zu $(d_{H_1}(a_1), \dots, d_{H_1}(a_{i+1}), d_{H_1}(a_i), \dots, d_{H_1}(a_k))$ gehörenden Strategie $\tilde{\mathcal{S}}$ die Gesamtzahl der Tests nicht kleiner wird. Wiederholung dieses Arguments hinreichend oft liefert die Behauptung. \square

Um die Anzahl der Tests im worst-case abzuschätzen, können wir also davon ausgehen, daß nach den ersten beiden Schritten

$$(d_{H_1}(a_1), \dots, d_{H_1}(a_k)) = (\underbrace{2, \dots, 2}_r, \underbrace{1, \dots, 1}_s, \underbrace{0, \dots, 0}_t)$$

gilt. Abb. 4.4 zeigt den entsprechenden Graphen H_1 .

Lemma 4.10 *Für fest gegebene Werte von r, s und t braucht der Algorithmus im worst-case*

$$\binom{r+s+t}{2} + r(r+1) + s \frac{2r+s+1}{2} + 2rs + t(2r-t+1) + (r-t)^2$$

Tests.

Beweis. Wir führen den Algorithmus durch. Wegen Lemma 4.9 können wir davon ausgehen, daß für den Graphen H_1 nach den ersten beiden Schritten gilt: $d_{H_1}(a_i) = 2$ für $i = 1, \dots, r$, $d_{H_1}(a_i) = 1$ für $i = r + 1, \dots, r + s$ und $d_{H_1}(a_i) = 0$ für $i = r + s + 1, \dots, r + s + t$. Zum Einordnen des Knotens a_i in die Menge A benötigt \mathcal{A} im worst-case $i - 1$ Tests und zum Einordnen der $|B_i|$ Knoten in B_i benötigt \mathcal{A} im worst-case $|B_i| \cdot i$ Tests. Daher sind in den ersten beiden Schritten

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + \dots + (r + s + t - 1) + \sum_{i=1}^r 2i + \sum_{i=r+1}^{r+s} i \\ &= \frac{(r + s + t)(r + s + t - 1)}{2} + r(r + 1) + s \frac{2r + s + 1}{2} \end{aligned}$$

Tests erforderlich. Im 3. Schritt benötigt der Algorithmus im worst-case jeweils $2r$ Tests, um den fehlenden Nachbarn von a_i für $i \in \{r + 1, \dots, r + s\}$ zu finden. Um für $j \in \{1, \dots, t\}$ die beiden fehlenden Nachbarn von a_{r+s+j} zu finden, benötigt er im worst-case $2r - 2(j - 1)$ Tests. Daher benötigt \mathcal{A} im 3. Schritt

$$2rs + 2r + (2r - 2) + \dots + (2r - 2(t - 1)) = 2rs + t(2r - t + 1)$$

Tests. Zusammen mit Lemma 4.8 folgt die Behauptung. \square

Wegen (4.9) können wir $s = \frac{1}{2}(n - 3r - t)$ in Lemma 4.10 einsetzen. Die Gesamtzahl der Tests im worst-case ist dann gerade

$$g(r, t) := \frac{n^2}{4} + \frac{nr}{2} - \frac{5}{4}r^2 - rt + \frac{t^2}{4} + \frac{r}{2} + \frac{t}{2}.$$

Wir maximieren nun $g(r, t)$ auf dem Dreieck

$$0 \leq t \leq r \wedge 3r + t \leq n. \quad (4.11)$$

Im Inneren des Dreiecks gilt:

$$\text{grad}(g(r, t)) = \left(\frac{1}{2}n - \frac{5}{2}r - t + \frac{1}{2}, -r + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \right)^T,$$

$$g''(r, t) = \begin{pmatrix} -5/2 & -1 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Da die Hessematrix indefinit ist, hat g im Inneren des Dreiecks keine Extrema. Daher wird das Maximum auf dem Rand angenommen. Wir untersuchen den Rand:

i) $t = 0, 0 \leq r \leq \frac{1}{3}n$:

Die Parabel $h(r) := g(r, 0) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}nr - \frac{5}{4}r^2 + \frac{r}{2}$ nimmt in $r = \frac{n+1}{5}$ ihr Maximum $h(\frac{n+1}{5}) = \frac{3}{10}n^2 + \frac{n}{10} + \frac{1}{20}$ an.

ii) $r = t, 0 \leq r \leq \frac{1}{4}n$:

Die Parabel $h(r) := g(r, r) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}rn - 2r^2 + r$ nimmt in $r = \frac{n+2}{8}$ ihr Maximum $h(\frac{n+2}{8}) = \frac{9}{32}n^2 - \frac{1}{16}$ an.

iii) $3r + t = n, \frac{1}{4}n \leq r \leq \frac{1}{3}n$:

Die Parabel $h(r) := g(r, n - 3r) = \frac{1}{2}n^2 + 4r^2 - 2nr + \frac{1}{2}n - r$ nimmt auf dem Intervall $[\frac{1}{4}n, \frac{1}{3}n]$ ihr Maximum in einem der Endpunkte an. Wegen $h(\frac{1}{4}n) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}n$ und $h(\frac{1}{3}n) = \frac{5}{18}n^2 + \frac{1}{6}n$ ist dieses Maximum gerade $\frac{5}{18}n^2 + \frac{1}{6}n$.

Das absolute Maximum $\frac{3}{10}n^2 + \frac{n}{10} + \frac{1}{20}$ wird also in $r = \frac{n+1}{5}, t = 0$ angenommen.

Führt man nun den Algorithmus durch und definiert r, s und t wie in (4.5)–(4.7), so erfüllen r und t wegen (4.9) und (4.10) die Bedingungen in (4.11). Daher benötigt der Algorithmus im worst-case höchstens $\frac{3}{10}n^2 + O(n)$ Tests. Es ist klar, daß S seinen Gegenspieler A , falls dieser den beschriebenen Algorithmus verwendet, dazu zwingen kann, tatsächlich $\frac{3}{10}n^2 + O(n)$ Fragen zu stellen. (Ist 5 ein Teiler von n , so muß S dazu nur die ersten $2\frac{n}{5}$ Knoten, welche der Algorithmus testet, der Menge A zuordnen. Von den nächsten $\frac{n}{5}$ Knoten wird jeweils einer den Knoten $a_{\frac{n}{5}+1}, \dots, a_{2\frac{n}{5}}$ als Nachbar zugeordnet. Von den letzten $2\frac{n}{5}$ Knoten werden je zwei den Knoten $a_{\frac{n}{5}}, \dots, a_1$ in dieser Reihenfolge als Nachbarn zugeordnet. Im Fall, daß 5 kein Teiler von n ist, geht man ähnlich vor.) Wir erhalten somit:

Satz 4.11 *Der beschriebene Algorithmus \mathcal{A} identifiziert stets einen Hamilton-Kreis auf der gegebenen Knotenmenge V . Im worst-case benötigt er dazu gerade $\frac{3}{10}|V|^2 + O(|V|)$ Tests.*

Bemerkung 4.12 Zusammen mit der Greedy-Schranke ergibt dieser Satz daher

$$\left\lceil \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} \right\rceil - 1 \leq c_n(C_n) \leq \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{20} + O(n).$$

Bemerkung 4.13 Beim Lesen des Algorithmus drängen sich sofort einige Verbesserungsvorschläge auf. So genügt es z.B., im 3. Schritt beim Suchen der fehlenden Nachbarn eines Knoten a_i die Kanten zwischen a_i und $|B'_i| - 1$ Elementen von B'_i zu testen. Hat man dann noch nicht den letzten Nachbarn von a_i gefunden, so enthält G^* wegen $d_{G^*}(a_i) = 2$ die noch nicht getestete Kante. Eine ähnliche Verbesserung kann man ebenfalls im 4. Schritt vornehmen. Diese Verbesserungen ändern jedoch nichts an der Größenordnung der Gesamtzahl der notwendigen Tests, lediglich der lineare Anteil wird kleiner. Wir haben daher zum einen aus Gründen der Übersichtlichkeit auf die Darstellung einer verbesserten Version verzichtet. Zum anderen kann man den Algorithmus in der angegebenen Form, wenn man die Abbruchbedingung in 4.d. ändert, auch zum Finden eines Hamilton-Pfades oder eines 2-regulären Graphen verwenden, was mit einer wie oben beschriebenen verbesserten Version nicht möglich wäre. Die Analyse ist in diesen Fällen mit der angegebenen im wesentlichen identisch. Wir erhalten damit

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - 1 \leq c_n(P_n) \leq \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{20} + O(n).$$

und

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} - \frac{n}{4} \right\rfloor \leq c_n(\mathcal{R}_n^2) \leq \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{20} + O(n).$$

4.3 Eindeutige Pfade kürzerer Länge

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels haben wir Graphen auf n Knoten untersucht, welche genau einen Hamilton-Pfad, d.h. einen Pfad der Länge $n - 1$, besitzen. In diesem Abschnitt untersuchen wir Graphen auf $n + 1$ Knoten, welche genau einen Pfad der Länge $n - 1$ besitzen. Allgemein bezeichnet für $l \in \mathbb{N}$ entsprechend unserer Notation $m_n(P_l)$ die maximale Anzahl von Kanten, welche ein Graph auf n Knoten enthalten darf, ohne einen P_l zu besitzen, und $\tilde{m}_n(P_l)$ bezeichnet für $l \leq n$ die maximale Anzahl von Kanten, welche ein Graph auf n Knoten mit genau einem P_l enthalten darf. $M_n(P_l)$ und $\tilde{M}_n(P_l)$ sind die Mengen der zugehörigen Extremalgraphen. Im Zusammenhang mit dem Parameter $m_n(P_l)$ gelten die folgenden Sätze (vgl. z. B. [6] (S. 107)).

Satz 4.14 (Pósa) Sei G ein zusammenhängender Graph auf $n \geq 3$ Knoten, so daß für je zwei nicht adjazente Knoten $x, y \in V(G)$ gilt:

$$d(x) + d(y) \geq l.$$

Ist dann $l = n$, so besitzt G einen Hamilton-Kreis. Ist $l < n$, so besitzt G einen Pfad der Länge l und einen Kreis einer Länge $\geq (l + 2)/2$.

Als Folgerung erhält man

Satz 4.15 Für $n, l \in \mathbb{N}$ mit $n > l$ gilt:

$$m_n(P_l) \leq \frac{(l-2)n}{2}.$$

Für $n = p(l-1)$ mit einem $p \in \mathbb{N}$ ist diese Ungleichung scharf. Ein Graph ist genau dann ein zugehöriger Extremalgraph, falls er die disjunkte Vereinigung von p Kopien von K_{l-1} ist.

Wir wollen in diesem Abschnitt den Parameter $\tilde{m}_{n+1}(P_n)$ bestimmen. Im Zusammenhang mit Satz 4.15 drängt sich die folgende Vermutung auf: Ist $n = p(l-1) + r$ mit $p, r \in \mathbb{N}_0$, $r < l-1$, so gilt $m_n(P_l) = p \binom{l-1}{2} + \binom{r}{2}$, und der zugehörige Extremalgraph ist gerade die disjunkte Vereinigung von p Kopien von K_{l-1} und einer Kopie von K_r . Da letzterer offensichtlich keinen Pfad auf l Knoten enthält, folgt:

$$m_n(P_l) \geq p \binom{l-1}{2} + \binom{r}{2}. \quad (4.12)$$

Soweit wir wissen, ist die umgekehrte Ungleichung und damit die obige Vermutung noch nicht bewiesen. Im Fall $n < l$ ist sie natürlich trivialerweise richtig.

Wir betrachten nun einen Graphen G auf der Knotenmenge $\{1, \dots, n+k\}$ ($k \in \mathbb{N}$), welcher einen eindeutigen Pfad $P : 1-2-\dots-n$ der Länge $n-1$ enthält. Es sei $G_1 := G[\{1, \dots, n\}]$ der durch die Menge $\{1, \dots, n\}$ und $G_2 := G[\{n+1, \dots, n+k\}]$ der durch die Menge $\{n+1, \dots, n+k\}$ induzierte Untergraph von G . Offensichtlich enthält G_1 einen eindeutigen Hamilton-Pfad, nämlich P , und G_2 enthält keinen Pfad der Länge $n-1$. Angenommen, es ist $G_1 \in \tilde{M}_n(P_n)$ und $G_2 \in M_k(P_n)$. Es ist leicht zu sehen, daß G dann

keine Kanten zwischen $V(G_1)$ und $V(G_2)$ enthalten darf. Andererseits enthält aber jeder solche Graph tatsächlich genau einen P_n . Wir erhalten somit

$$\tilde{m}_{n+k}(P_n) \geq \tilde{m}_n(P_n) + m_k(P_n)$$

und daher mit Satz 4.1 und (4.12)

$$\tilde{m}_{n+k}(P_n) \geq \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1 + p \binom{n}{2} + \binom{r}{2} \quad (4.13)$$

für $k = pn + r$ mit $p, r \in \mathbb{N}_0, r < n$. Für $k = 1$ erhält man

$$\tilde{m}_{n+1}(P_n) \geq \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1. \quad (4.14)$$

Wir werden beweisen, daß hier Gleichheit gilt. Doch zuvor zeigen wir noch die folgende nützliche Proposition:

Proposition 4.16 *Sei G ein Graph auf $\{1, \dots, n+1\}$ mit eindeutigem Pfad $P : 1 - 2 - \dots - n$ der Länge $n-1$. Enthält G für $s, t \in \{1, \dots, n\}, s < t$, die Kanten $\{n+1, s\}$ und $\{n+1, t\}$, dann gilt $3 \leq s < t \leq n-3$ und $t-s \geq 3$ und G enthält keine der Kanten $\{2, s+1\}, \{2, t+1\}, \{s-1, n-1\}, \{t-1, n-1\}, \{s-2, t-1\}, \{s+1, t+2\}, \{s-1, t-2\}, \{s+2, t+1\}$.*

Beweis. Angenommen, G besitzt neben den Kanten $\{s, n+1\}$ und $\{t, n+1\}$ eine der aufgezählten Kanten. Es ist leicht zu sehen, daß G dann einen zweiten Pfad der Länge $n-1$ besitzt. Man vergleiche hierzu auch Abb. 4.5, welche den zweiten Pfad der Länge $n-1$ zeigt, falls G noch die Kante $\{s-2, t-1\}$ besitzt. Die anderen Fälle gehen ähnlich. \square

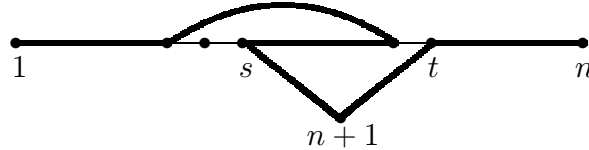


Abbildung 4.5: Weiterer P_n im Fall, daß G die Kanten $\{s, n+1\}, \{t, n+1\}$ und $\{s-2, t-1\}$ enthält.

Wir zeigen nun:

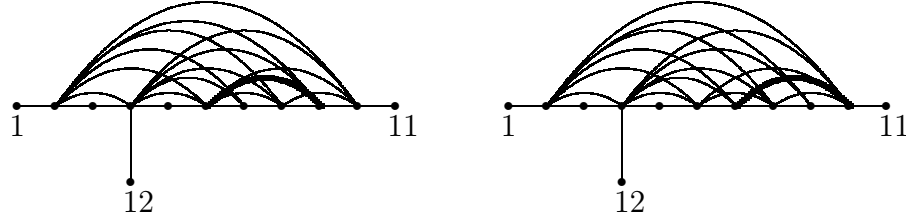


Abbildung 4.6: Die Extremalgraphen aus $\widetilde{M}_{12}(P_{11})$ vom Typ ii).

Satz 4.17 Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gilt:

- a) $\widetilde{m}_{n+1}(P_n) = \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1$.
- b) Es sei G ein zugehöriger Extremalgraph auf $\{1, \dots, n+1\}$ mit eindeutigem Pfad $P : 1 - 2 - \dots - n$. Dann gilt eine der drei folgenden Alternativen:
- i) $G[\{1, \dots, n\}] \in \widetilde{M}_n(P_n)$ und n ist ein isolierter Knoten in G .
 - ii) Es ist $n \geq 7$ ungerade, und es gibt einen Graphen $H \in \widetilde{M}_n(P_n)$ mit $l_{n-4}(H) = 1$ und $l_h(H) \geq 2$ für $h \in \{3, 5, \dots, n-6\}$, so daß gilt: $E(G) = (E(H) \setminus \{\{2, 5\}\}) \cup \{\{4, n+1\}\}$.
 - iii) Es ist $n \geq 8$ gerade, und es gibt einen Graphen $H \in \widetilde{M}_n(P_n)$ mit $l_{n-4}(H) = 1$ und $l_h(H) \geq 2$ für $h \in \{2, 4, \dots, n-6\}$, so daß gilt: $E(G) = (E(H) \setminus \{\{2, 5\}\}) \cup \{\{4, n+1\}\}$.

Abb. 4.6 zeigt die extremalen Graphen des Typs ii) für $n = 11$.

Beweis. Es ist leicht zu sehen, daß die Behauptung für $n \leq 6$ richtig ist. Sei also $n \geq 7$. Wir beweisen beide Behauptungen in einem. Wegen (4.14) ist für a) nur noch zu zeigen, daß $\widetilde{m}_{n+1}(P_n) \leq \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1$ gilt. Es sei also G ein Extremalgraph aus $\widetilde{M}_{n+1}(P_n)$ mit Knotenmenge $V = \{1, \dots, n+1\}$ und eindeutigem Pfad $P : 1-2-\dots-n$ der Länge $n-1$. Es sei $G_1 := G[\{1, \dots, n\}]$. Nach unseren obigen Überlegungen können wir annehmen, daß der Knoten $n+1$ mit mindestens einem Knoten auf P verbunden ist, andernfalls folgt die Behauptung sofort. Es seien $i_1 < \dots < i_t$ die Nachbarn von $n+1$. Damit gilt:

$$|E(G)| = |E(G_1)| + t. \quad (4.15)$$

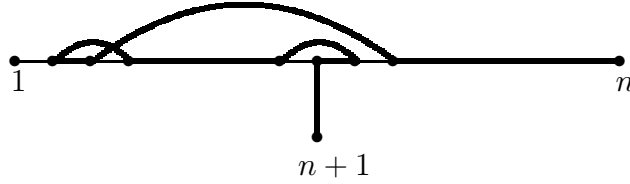


Abbildung 4.7:

Ist nun $|E(G_1)| < \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1 - t$, dann kann G wegen (4.14) kein Extremalgraph aus $\widetilde{M}_{n+1}(P_n)$ sein. Es folgt also

$$|E(G_1)| \geq \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1 - t \quad (4.16)$$

Wir betrachten zunächst den Fall, daß n ungerade ist, und unterscheiden mehrere Fälle:

I. $t = 1$:

I.a) i_1 ist ungerade:

Nach Proposition 4.16 sind in diesem Fall die Sehnen $\{2, i_1 + 1\}$ und $\{i_1 - 1, n - 1\}$ gerader Länge in G_1 verboten. Daher gibt es nach dem Beweis von (4.3) höchstens $\frac{n-1-(i_1-1)}{2} - 1$ Sehnen der Länge $i_1 - 1$ und höchstens $\frac{n-1-(n-i_1)}{2} - 1$ Sehnen der Länge $n - i_1$ in G_1 . Ist nun $i_1 - 1 \neq n - i_1$ oder enthält G_1 höchstens $\frac{n-1-(i_1-1)}{2} - 2$ Sehnen der Länge $i_1 - 1$, dann folgt aus dem Beweis zu (4.3) $|E(G_1)| \leq \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor - 1$ im Widerspruch zu (4.16). Ist $i_1 - 1 = n - i_1$ und enthält G_1 genau $\frac{n-1-(i_1-1)}{2} - 1$ Sehnen der Länge $i_1 - 1$, dann sind dies die Sehnen $\{j, j + i_1 - 1\}$ ($j = 3, 5, \dots, n - i_1 - 1$). Daher enthält G den in Abb. 4.7 dargestellten Pfad der Länge $n - 1$, im Widerspruch zur Eindeutigkeit von P . (Man beachte, daß wegen $n \geq 7$ hier auch $i_1 \geq 5$ gilt.)

I.b) i_1 ist gerade:

Es ist leicht zu sehen, daß G_1 in diesem Fall höchstens $\left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor - 1$ Sehnen der Länge 3 enthalten kann, da G andernfalls einen zweiten P_n besitzt (vgl. Abb. 4.8).

Wegen (4.16) und dem Beweis von (4.3) besitzt G_1 daher genau $\left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor - 1$ Sehnen der Länge 3 und genau $\left\lfloor \frac{n-1-h}{2} \right\rfloor$ Sehnen der Länge h ($h = 2, 4, 5, \dots, n -$

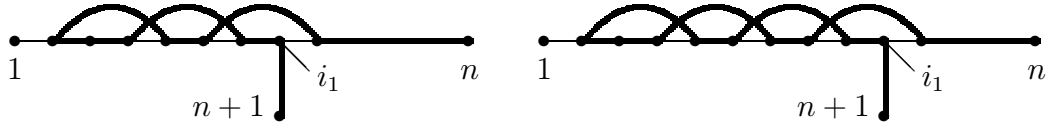


Abbildung 4.8:

3). Daher ist entweder der Graph $G' := G[\{1, \dots, i_1, n+1\}]$ Extremalgraph aus $\widetilde{M}_{i_1+1}(P_{i_1+1})$ mit eindeutigem Pfad $1 \dots i_1 (n+1)$ der Länge i_1 , oder der Graph $G'' := G[\{n+1, i_1, \dots, n\}]$ ist Extremalgraph aus $\widetilde{M}_{n-i_1+2}(P_{n-i_1+2})$ mit eindeutigem Pfad $(n+1) i_1 \dots n$ der Länge $n - i_1 + 1$. Wir können oBdA annehmen, daß $i_1 < n/2$ und damit $n \geq 2i_1 + 1$ gilt, und unterscheiden nun zwei weitere Fälle:

I.b1) $i_1 \geq 6$:

Nach Proposition 4.16 sind die Sehnen $\{2, i_1 + 1\}$ und $\{i_1 - 1, n - 1\}$ verboten.

Da G_1 genau $\lfloor \frac{n-1-(i_1-1)}{2} \rfloor$ Sehnen der Länge $i_1 - 1$ enthält, müssen alle diese Sehnen rechtsbündig angeordnet sein. Analog müssen alle Sehnen der Länge $n - i_1$ linksbündig angeordnet sein.

Angenommen, es ist G' Extremalgraph aus $\widetilde{M}_{i_1+1}(P_{i_1+1})$. Ist $i_1 = 6$, so ist $l_5(G_1) = 0$. Für $i_1 \geq 8$ gilt: Ist $l_3(G') = 0$, so nach Satz 4.3 auch $l_5(G_1) = l_5(G') = 0$. Andernfalls ist $\{2, 5\} \in G_1$. Dann muß wegen $\{3, i_1 + 2\} \in E(G)$ auch $l_{i_1-3}(G') \leq 1$ und somit $l_5(G_1) = l_5(G') \leq \frac{i_1-6}{2}$ sein. Angenommen, es ist G'' Extremalgraph aus $\widetilde{M}_{n-i_1+2}(P_{n-i_1+2})$. Gilt nun $l_3(G'') = 0$, dann ist auch $l_5(G'') = 0$ und damit $l_5(G_1) \leq \frac{i_1-2}{2}$. Ist, andererseits, $l_3(G'') > 0$, dann enthält G_1 die Sehne $\{i_1, i_1 + 3\}$. Da alle Sehnen der Länge $i_1 - 1$ rechtsbündig angeordnet sind, enthält G_1 ferner die Sehne $\{3, i_1 + 2\}$. Nach Proposition 4.4 enthält G_1 daher nicht die Sehne $\{4, i_1 + 1\}$ der Länge $i_1 - 3$, sondern die Sehne $\{5, i_1 + 2\}$. Sukzessive Wiederholung dieses Arguments liefert $\{i_1 - 3, i_1 + 2\} \in E(G_1)$ und damit $l_5(G_1) \leq \frac{i_1-6}{2}$.

Es folgt also in jedem Fall, daß G_1 die Sehnen $\{j, j + 5\}$ für $j = i_1 + 1, i_1 + 3, \dots, n - 6$ enthält. Da G_1 auch die Sehne $\{3, i_1 + 2\}$ enthält, ist nach Proposition 4.4 die Sehne $\{2, i_1 + 5\}$ verboten. Daher sind die Sehnen der Länge $i_1 + 3$ alle rechtsbündig angeordnet. Es folgt nun sukzessive, daß die Sehnen der Längen $i_1 + 3, i_1 + 7, i_1 + 11, \dots$ alle rechtsbündig angeordnet sind. Ist nun $n - i_1 = i_1 - 1 + 4h$ für ein $h \in \mathbb{N}$, so ergibt sich $\{i_1 - 1, n -$

$1\} \in E(G_1)$ und damit ein Widerspruch. Andernfalls sind die Sehnen der Länge $n - i_1 - 2$ rechtsbündig angeordnet. (Man beachte hierbei, daß wegen $n \geq 2i_1 + 1$ tatsächlich $n - i_1 - 2 \geq i_1 - 1$ gilt.) Damit enthält G_1 die Sehnen $\{3, n - i_1 + 1\}$, $\{4, n - i_1 + 4\}$ und $\{n - i_1, n - i_1 + 5\}$ im Widerspruch zu Proposition 4.16. Wir erhalten also, daß G_1 mindestens zwei Sehnen weniger haben muß als ein Extremalgraph aus $\widetilde{M}_n(P_n)$ im Widerspruch zu (4.16).

I.b2) $i_1 = 4$:

Wir wissen, daß G_1 mindestens eine Sehne der Länge 3 fehlt. Die Sehne $\{2, 5\}$ ist verboten. Wir nehmen zunächst an, daß G_1 die Sehne $\{3, 6\}$ besitzt. Dann gilt $l_5(G_1) = 0$, andernfalls besitzt G einen zweiten Pfad P_n . Sukzessive Wiederholung dieses Arguments liefert $l_{n-4}(G_1) = 0$, d.h. G_1 besitzt die Sehne $\{3, n - 1\}$ im Widerspruch zu Proposition 4.4.

Es folgt also, daß $\{3, 6\} \notin E(G_1)$. Wegen (4.16) gilt $|E(G_1)| = \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor$. Da die Kante $\{3, n - 1\}$ verboten ist, enthält G_1 die Sehne $\{2, n - 2\}$. Dann ist jedoch die Sehne $\{5, n - 1\}$ verboten. Es folgt also $l_{n-6}(G_1) \geq 2$. Sukzessive zeigt man nun, daß $l_j(G_1) \geq 2$ für $j \in \{n - 6, n - 8, \dots, 5\}$ gilt und daß G_1 die Sehne $\{4, 7\}$ enthält. G hat also die geforderte Gestalt. Andererseits ist klar, daß G wegen $d_G(3) = d_G(5) = 2$ nur genau einen P_n enthalten kann.

Es bleibt zu zeigen, daß G für $t \geq 2$ kein Extremalgraph sein kann.

II. $t \geq 2$: Wir betrachten zunächst für $s \in \{2, \dots, t\}$ die folgenden vier Fälle:

(i) i_1 gerade, i_s gerade.

Dann sind nach Proposition 4.16 die Sehnen $\{i_1 - 2, i_s - 1\}$ und $\{i_1 + 1, i_s + 2\}$ der Länge $i_s - i_1 + 1$ verboten. (Wegen $i_1 \geq 4$ und $i_s \leq n - 3$ sind dies tatsächlich mögliche Sehnen von G_1 .) Es ist leicht zu sehen, daß G_1 daher höchstens $\left\lfloor \frac{n-1-(i_s-i_1+1)}{2} \right\rfloor - 1$ Sehnen der Länge $(i_s - i_1 + 1)$ enthalten darf.

(ii) i_1 gerade, i_s ungerade.

Nach dem Beweis von (4.3) kann es nur dann $\left\lfloor \frac{n-1-(i_s-i_1+1)}{2} \right\rfloor$ Sehnen der Länge $i_s - i_1 + 1$ in G_1 geben, wenn dies genau die Sehnen $\{2j, 2j + (i_s - i_1 + 1)\}$ ($j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n-1-(i_s-i_1+1)}{2} \right\rfloor$) sind. Da jedoch nach Proposition 4.16 die Sehne $\{i_1 - 2, i_s - 1\}$ verboten ist, gibt es höchstens $\left\lfloor \frac{n-1-(i_s-i_1+1)}{2} \right\rfloor - 1$ Sehnen der Länge $(i_s - i_1 + 1)$.

(iii) i_1 ungerade, i_s gerade.

Wie in (ii) zeigt man: Da die Sehne $\{i_1 - 1, i_s - 2\}$ verboten ist, kann es nur

$\left\lfloor \frac{n-1-(i_s-i_1-1)}{2} \right\rfloor - 1$ Sehnen der Länge $i_s - i_1 - 1$ geben. Ferner ist die Sehne $\{i_1 + 1, i_s + 2\}$ verboten, also gibt es höchstens $\left\lfloor \frac{n-1-(i_s-i_1+1)}{2} \right\rfloor - 1$ Sehnen der Länge $i_s - i_1 + 1$.

(iv) i_1 ist ungerade, i_s ist ungerade.

Da $\{i_1 - 1, i_s - 1\}$ und $\{i_1 + 1, i_s + 1\}$ verboten sind, gibt es höchstens $\left\lfloor \frac{n-1-(i_s-i_1)}{2} \right\rfloor - 1$ Sehnen der Länge $i_s - i_1$ in G_1 . Da $\{i_1 - 1, i_s - 2\}$ und $\{i_1 + 2, i_s + 1\}$ verboten sind, gibt es höchstens $\left\lfloor \frac{n-1-(i_s-i_1-1)}{2} \right\rfloor - 1$ Sehnen der Länge $i_s - i_1 - 1$.

Man beachte, daß wegen $|i_s - i_{s'}| \geq 3$ für $s \neq s'$ die Längen $i_s - i_1 - 1$, $i_s - i_1$ und $i_s - i_1 + 1$ ($s = 2, \dots, t$) alle paarweise verschieden sind. Wir unterscheiden weitere Fälle:

II.a) i_1 ist ungerade:

II.a1) $t \geq 3$:

In diesem Fall enthält G_1 nach obigen Überlegungen mindestens $2(t-1) > t$ Sehnen weniger als ein Extremalgraph aus $\widetilde{M}_n(P_n)$ enthalten würde. Es folgt $|E(G_1)| < \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1 - t$ im Widerspruch zu (4.16).

II.a2) $t = 2$:

Nach den obigen Überlegungen fehlen in G_1 (gegenüber einem Extremalgraphen aus $\widetilde{M}_n(P_n)$) mindestens je eine Sehne der Längen $i_2 - i_1 - 1$ und $i_2 - i_1 + 1$, falls i_2 gerade ist, bzw. der Längen $i_2 - i_1 - 1$ und $i_2 - i_1$, falls i_2 ungerade ist. Ferner fehlt, da $\{i_1 - 1, n - 1\}$ verboten ist, eine Sehne der Länge $n - i_1 > i_2 - i_1 + 1$. Insgesamt fehlen G_1 also mindestens drei Sehnen, wieder ein Widerspruch zu (4.16).

II.b) i_1 ist gerade:

II.b1) $t \geq 3$:

In G_1 fehlt mindestens je eine Sehne der Länge $i_s - i_1 + 1$ ($s = 2, \dots, t$) und mindestens eine Sehne der Länge 3 (vgl. die Argumentation in I.). Angenommen, für ein $s \in \{2, \dots, t\}$ ist i_s ungerade. Sei s_0 der maximale solche Index. Dann fehlt G_1 auch eine Sehne der geraden Länge $i_{s_0} - 1$. Gilt nun $i_{s_0} - 1 = i_s - i_1 + 1$ für ein $s \in \{2, \dots, t\}$, dann folgt $i_s > i_{s_0}$ und i_s ist ungerade. Wegen der Maximalität von s_0 ist also $i_{s_0} - 1 \neq i_s - i_1 + 1$ für alle $s \in \{2, \dots, t\}$. Insgesamt fehlen G_1 also mindesten $t + 1$ Sehnen im Widerspruch zu (4.16). Daher sind alle i_s gerade. Wegen $\{i_2, i_3\} \subseteq \Gamma_G(n + 1)$ und

(i) kann G_1 dann höchstens $\left\lfloor \frac{n-1-(i_3-i_2+1)}{2} \right\rfloor - 1$ Sehnen der Länge $i_3 - i_2 + 1$ besitzen. Ist $i_3 - i_2 + 1 \neq i_2 - i_1 + 1$, dann fehlen G_1 mindestens $t + 1$ Sehnen im Widerspruch zu (4.16). Wir nehmen daher an, daß $i_3 - i_2 = i_2 - i_1$ gilt. Wegen Proposition 4.16 sind die Sehnen $\{i_1 - 1, i_2 - 2\}$, $\{i_1 + 2, i_2 + 1\}$, $\{i_2 - 1, i_3 - 2\}$ und $\{i_2 + 2, i_3 + 1\}$ in G_1 verboten. Man sieht leicht, daß G_1 daher höchstens $\left\lfloor \frac{n-1-(i_2-i_1-1)}{2} \right\rfloor - 1$ Sehnen der Länge $i_2 - i_1 - 1$ enthalten kann. Für $i_2 - i_1 - 1 \neq 3$ folgt daher ein Widerspruch zu (4.16). Es sei also $i_3 - i_2 = i_2 - i_1 = 4$. Es ist nun aber leicht zu sehen, daß G_1 höchstens $\frac{i_2}{2} - 2$ Sehnen der Form $\{j, j + 3\}$ mit $j \in \{2, \dots, i_2 + 1\}$ enthalten darf. (Man beachte dazu, daß G_1 nicht alle der Sehnen $\{j, j + 3\}$ ($j = 2, 4, \dots, i_1 - 2$) enthalten darf, da G sonst einen zweiten Pfad der Länge $n - 1$ enthalten würde (vgl. Abb. 4.8), und daß ferner die Sehnen $\{i_1 - 1, i_1 + 2\}$, $\{i_1 + 2, i_1 + 5\}$, $\{i_1 + 3, i_1 + 6\}$ und $\{i_1 + 6, i_1 + 9\}$ verboten sind.) Daher kann G_1 insgesamt höchstens $\left\lfloor \frac{n-1-3}{2} \right\rfloor - 2$ Sehnen der Länge 3 besitzen. Wir erhalten daher wie oben einen Widerspruch zu (4.16).

II.b2) $t = 2$:

OBdA können wir davon ausgehen, daß i_2 ebenfalls gerade ist, ansonsten vergleiche man Fall II.a2). G_1 fehlt mindestens eine Sehne der Länge 3 und eine Sehne der Länge $i_2 - i_1 + 1$. Ferner sind die Sehnen $\{i_1 - 1, i_2 - 2\}$ und $\{i_1 + 2, i_2 + 1\}$ verboten. Gilt nun $i_2 - i_1 = 4$, so sieht man ähnlich wie im vorherigen Fall, daß G_1 mindestens zwei Sehnen der Länge 3 fehlen. Sei also $i_2 - i_1 \geq 6$. Ferner nehmen wir an, daß G_1 genau $\left\lfloor \frac{n-1-(i_2-i_1-1)}{2} \right\rfloor$ Sehnen der Länge $i_2 - i_1 - 1$ besitzt. Dann gilt $l_{i_2-i_1-1}(G_1) = \frac{i_1-2}{2}$ oder $l_{i_2-i_1-1}(G_1) = \frac{i_1}{2}$. Aus Symmetriegründen können wir letzteres annehmen, d.h. G_1 besitzt die Sehne $\{i_1, i_2 - 1\}$. Dann sind jedoch die Sehnen $\{i_1 - 2, i_1 + 1\}$ und $\{i_1 - 1, i_1 + 2\}$ verboten, da G sonst einen weiteren P_n enthielte. Da G_1 nicht die Sehnen $\{j, j + 3\}$ für $j \in \{i_2 - 1, i_2 + 1, \dots, n - 4\}$ enthalten darf, folgt, daß G_1 entweder zwei Sehnen der Länge 3 fehlen oder daß G_1 die Sehne $\{i_2 - 2, i_2 + 1\}$ und somit einen zweiten P_n enthält (vgl. Abb. 4.9). In beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch.

Wir betrachten nun noch den Fall, daß n gerade ist. Zunächst mal sieht man wie im Fall I.b) für ungerades n , daß G_1 für $t \geq 1$ mindestens eine Sehne der Länge 3 weniger hat als ein Graph aus $\widetilde{M}_n(P_n)$.

I. $t = 1$:

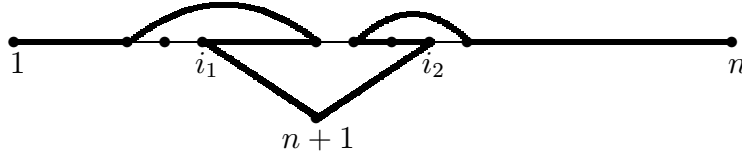


Abbildung 4.9:

Aus Symmetriegründen können wir annehmen, daß i_1 gerade ist. Da G_1 mindestens eine Sehne der Länge 3 und eine Sehne der Länge $i_1 - 1$ fehlt, können wir ferner annehmen, daß $i_1 = 4$ ist. Dann beweist man die Behauptung wie im Fall, daß n ungerade ist.

II. $t \geq 2$:

Wie im Fall, daß n ungerade ist, kann man für $s \in \{2, \dots, t\}$ zeigen:

(i) i_1, i_s gerade, dann fehlt G_1 (gegenüber einem Graphen aus $\widetilde{M}_n(P_n)$) mindestens je eine Sehne der Längen $i_s - i_1 - 1$ und $i_s - i_1 + 1$.

(ii) i_1 gerade, i_s ungerade, dann fehlt G_1 mindestens eine Sehne der Länge $i_s - i_1 + 1$.

(iii) i_1 ungerade, i_s gerade, dann fehlt G_1 mindestens je eine Sehne der Längen $i_s - i_1 - 1$ und $i_s - i_1$.

(iv) i_1, i_s ungerade, dann fehlt G_1 mindestens je eine Sehne der Längen $i_s - i_1 - 1$ und $i_s - i_1 + 1$.

II.a) $t = 2$:

Sind i_1 und i_2 gerade, so fehlt G_1 je eine Sehne der Längen $i_1 - 1$, $i_2 - 1$, $i_2 - i_1 - 1$ und $i_2 - i_1 + 1$. Wegen $i_2 - 1 - (i_1 - 1) \geq 4$ fehlen G_1 daher mindestens drei Sehnen im Widerspruch zu (4.16). Aus Symmetriegründen folgt ebenfalls ein Widerspruch, falls i_1 und i_2 ungerade sind.

Wir nehmen nun an, daß i_1 ungerade und i_2 gerade ist. Dann fehlt G_1 mindestens je eine Sehne der Länge 3, $n - i_1$, $i_2 - 1$ und $i_2 - i_1 - 1$. Es ist leicht zu sehen, daß mindestens drei dieser vier Längen verschieden sind, daß also G_1 im Widerspruch zu (4.16) mindestens drei Sehnen fehlen.

Es sei also i_1 gerade und i_2 ungerade. Dann fehlen G_1 Sehnen der Länge 3, $i_1 - 1$, $n - i_2$ und $i_2 - i_1 + 1$. Entweder sind mindestens drei dieser vier Längen verschieden oder es gilt $i_1 = 4$ und $i_2 = n - 3$. Fehlt G_1 in letzterem Fall nur eine Sehne der Länge 3 und eine Sehne der geraden Länge $i_2 - i_1 + 1$,

dann enthält G_1 gerade die Sehnen $\{j, j + 3\}$ für $j = 3, 5, \dots, n - 5$. Dann fehlt G_1 aber noch mindestens eine Sehne der Länge 5.

II.b) $t \geq 3$:

Ist i_1 ungerade, so fehlen G_1 mindestens $2(t - 1) > t$ Sehnen. Sei also i_1 gerade. Angenommen, i_s ist ungerade für $s \in \{2, \dots, t\}$. Dann fehlt G_1 je eine Sehne der Länge 3 und der Längen $i_s - i_1 + 1$ ($s \in \{2, \dots, t\}$). Ferner fehlt eine Sehne der ungeraden Länge $n - i_2$. Da $i_s - i_1 + 1$ für jedes $s \in \{2, \dots, t\}$ gerade und $n - i_2 > n - i_3 \geq 3$ ist, fehlen G_1 mindestens $t + 1$ Sehnen.

Es sei also $r = \max\{s \in \{2, \dots, t\} \mid i_s \text{ ist gerade}\}$. Dann fehlen G_1 mindestens t Sehnen von Längen der Form $i_s - i_1 - 1$ oder $i_s - i_1 + 1$, wobei für $s > r$ diese Längen gerade sind. Ferner fehlt G_1 eine Sehne der ungeraden Länge $i_r - 1$. Insgesamt fehlen daher G_1 mindestens $t + 1$ Sehnen. \square

Das Interessante an diesem Ergebnis ist die Unregelmäßigkeit, daß nicht alle Extremalgraphen in b) aus einem Extremalgraphen aus $\widetilde{M}_n(P_n)$ zusammen mit einem isolierten Knoten bestehen (vgl. Bemerkung 1.6). Allgemein vermuten wir

Vermutung 4.18 Für $k = p(n - 1) + r$ mit $p, r \in \mathbb{N}_0, r < n - 1$, gilt:

$$\widetilde{m}_{n+k}(P_n) = \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1 + p \binom{n-1}{2} + \binom{r}{2}.$$

Man kann leicht sehen, daß diese Vermutung für kleine, feste Werte von n richtig ist. Ferner kann man sie für $k = 2$ oder $k = 3$ sicher auch mit obiger Methode und entsprechendem Aufwand beweisen. Für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ muß man aber einen anderen Weg wählen. Falls diese Vermutung richtig ist, so tritt im Fall $k = 2$ noch einmal die oben erwähnte Unregelmäßigkeit auf. (Abb. 4.10 zeigt dann einen Extremalgraphen aus $\widetilde{M}_{11}(P_9)$). Für $k \geq 3$ scheint es eine solche Unregelmäßigkeit dann nicht mehr zu geben.

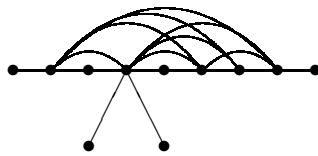


Abbildung 4.10: Graph auf 11 Knoten mit genau einem P_9

Kapitel 5

Teilgraphen mit kleiner Knotenzahl

5.1 Der allgemeine Fall

Wir wollen in diesem Abschnitt eine etwas verallgemeinerte Version des in der Einleitung beschriebenen Suchproblems diskutieren. Sei G_0 ein fest gewählter Graph auf n_0 Knoten, der keine isolierten Knoten enthält, und sei $(G_n)_{n \geq n_0}$ eine Familie von Graphen G_n auf der Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$, so daß G_n mindestens einen zu G_0 isomorphen Teilgraphen enthält. Wir beschreiben das Suchproblem wieder als Spiel zwischen zwei Spielern. Spieler A möchte mit Fragen der Art „Ist $\{x, y\} \in E(G^*)$ “ ($x, y \in \{1, \dots, n\}$) einen unbekanntem, zu G_0 isomorphen Graphen G^* finden. A weiß dabei schon vor Spielbeginn, daß der gesuchte Graph G^* ein Teilgraph von G_n ist, d.h. daß G^* keine Kante aus dem Komplement von G_n enthält. Daher wird A diese Kanten auch nicht fragen. S gibt Antworten „ja“ oder „nein“ derart, daß stets noch mindestens ein zu G_0 isomorpher Teilgraph von G_n mit diesen Antworten kompatibel ist. Ziel von S ist es, A zu zwingen, möglichst viele Fragen zu stellen. Wir bezeichnen die Komplexität dieses Spiels mit $c(G_n, G_0)$. D.h. $c(G_n, G_0)$ ist die Anzahl der Fragen, welche A im worst-case stellen muß. Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} m(G_n, G_0) &:= \max \{ |E(G)| \mid G \text{ ist aufspannender Teilgraph von } G_n \\ &\quad \text{und enthält keinen zu } G_0 \text{ isomorphen Teilgraphen.} \} \\ \tilde{m}(G_n, G_0) &:= \max \{ |E(G)| \mid G \text{ ist aufspannender Teilgraph von } G_n \} \end{aligned}$$

und enthält genau einen zu G_0 isomorphen Teilgraphen.}

erhalten wir als Greedy-Schranke für die Komplexität

$$c(G_n, G_0) \geq |E(G_n)| - \tilde{m}(G_n, G_0). \quad (5.1)$$

Im Fall, daß $G_n = K_n$ der vollständige Graph auf n Knoten ist, entspricht dieses Suchproblem dem im ersten Kapitel beschriebenen Suchproblem.

Die folgende Proposition zeigt, daß die Parameter $m(G_n, G_0)$ und $\tilde{m}(G_n, G_0)$ dieselbe Größenordnung haben. Die Proposition wurde von Aigner und Triesch für den Fall $G_n = K_n$ gezeigt. Der Beweis für den allgemeinen Fall geht analog.

Proposition 5.1 $m(G_{n-n_0}, G_0) \leq \tilde{m}(G_n, G_0) \leq m(G_n, G_0) + 1.$

Proposition 5.1 führt das Problem, $\tilde{m}(G_n, G_0)$ zu bestimmen, auf die Bestimmung von $m(G_n, G_0)$ zurück. Für den Fall $G_n = K_n$ besagt eine Folgerung aus dem Satz von Erdős–Stone (1946, vgl. [6], S. 123, Korollar 24), daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(K_n, G_0)}{n^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r(G_0)-1}\right)$ gilt. Dabei ist $r(G_0) = \min\{\chi(H) \mid H \text{ ist Komponente von } G_0\}$ und $\chi(H)$ bezeichnet die chromatische Zahl des Graphen H . Aigner und Triesch haben den folgenden Satz gezeigt.

Satz 5.2 (Aigner, Triesch [2]) *Sei G_0 ein Graph auf n_0 Knoten. Dann gilt:*

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{m}(K_n, G_0)}{n^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r(G_0)-1}\right).$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c(K_n, G_0)}{n^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{r(G_0)-1}.$$

Dieser Satz besagt also u.a., daß die Suchkomplexität und die Greedy-Schranke dieselbe Größenordnung besitzen. Wir werden im folgenden zeigen, daß sich die Greedy-Schranke und die Suchkomplexität tatsächlich nur um einen linearen Term unterscheiden. Wir werden dies für die verallgemeinerte Version des Suchproblems zeigen.

Satz 5.3 *Sei G_0 zusammenhängend. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} |E(G_n)| - \tilde{m}(G_n, G_0) &\leq c(G_n, G_0) \\ &\leq |E(G_n)| - \tilde{m}(G_n, G_0) + (n_0 - 1)n - \frac{n_0(n_0 - 1)}{2} - 1. \end{aligned}$$

Beweis. Sei G ein Extremalgraph aus $\tilde{m}(G_n, G_0)$, d.h. G ist aufspannender Teilgraph von G_n , besitzt $\tilde{m}(G_n, G_0)$ Kanten und genau eine isomorphe Kopie G^* von G_0 . Spieler A frage dann solange Kanten aus $E(G_n) \setminus E(G)$ bis S „ja“ sagt. Falls S nie „ja“ sagt, benötigt A auf diese Weise genau $|E(G_n)| - \tilde{m}(G_n, G_0)$ Fragen. Wir nehmen daher an, daß S bei der Kante $\{x, y\}$ das erste Mal „ja“ sagt. A frage dann der Reihe nach alle Kanten $\{x, u\}$ und $\{y, u\}$ ($u \in \{1, \dots, n\} \setminus \{x, y\}$). Da mit G_0 auch G^* zusammenhängend ist, liefern diese Tests mindestens einen weiteren Knoten von G^* . Jetzt frage A alle Kanten zwischen diesem Knoten und allen anderen Knoten usw. Wegen des Zusammenhangs von G^* liefert dieser Algorithmus nach höchstens

$$\begin{aligned} |E(G_n)| - \tilde{m}(G_n, G_0) + 2(n-2) + (n-3) + \dots + (n - (n_0 - 1)) \\ = |E(G_n)| - \tilde{m}(G_n, G_0) + (n_0 - 1)n - \frac{n_0(n_0 - 1)}{2} - 1 \end{aligned}$$

Fragen alle Knoten und Kanten von G^* . □

5.2 Vollständige bipartite Teilgraphen

Nach Satz 5.2 gilt $\tilde{m}(K_n, G_0) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{r(G_0)-1})n^2 + o(n^2)$ für einen fest gewählten Graphen G_0 . Es gilt nun $1 - \frac{1}{r(G_0)-1} > 0$ genau dann, wenn $r(G_0) > 2$ ist, d.h. wenn G_0 keine bipartite Komponente besitzt. Das Problem, $\tilde{m}(K_n, G_0)$ zu bestimmen, ist also für Graphen G_0 , die keine bipartite Komponente enthalten, weitgehend gelöst.

Sei im folgenden stets $s \leq m$ und $t \leq n$. Wir werden den Fall $G_0 = K_{s,t}$ betrachten. Sei $\mathcal{G}(m, n, s, t)$ die Menge aller bipartiten Graphen auf zwei Farbklassen M und N mit $|M| = m$ und $|N| = n$, welche keinen vollständigen bipartiten Teilgraphen $K_{S,T}$ mit Farbklassen $S \subseteq M$, $|S| = s$, und $T \subseteq N$, $|T| = t$, enthalten. Das bekannte Problem von Zarankiewicz (vgl. [6], S. 112 ff) ist die Bestimmung von

$$z(m, n, s, t) = \max\{|E(G)| \mid G \in \mathcal{G}(m, n, s, t)\}.$$

Es ist hierbei zu beachten, daß für $s \neq t$ die Parameter $z(m, n, s, t)$ und $m(K_{m,n}, K_{s,t})$ nicht übereinstimmen, da beim Problem von Zarankiewicz Teilgraphen $K_{S,T}$ mit $S \subseteq N$, $|S| = s$, und $T \subseteq M$, $|T| = t$, erlaubt sind.

Analog definieren wir nun $\tilde{\mathcal{G}}(m, n, s, t)$ als die Menge aller bipartiten Graphen auf zwei Farbklassen M und N mit $|M| = m$ und $|N| = n$, welche genau einen vollständigen bipartiten Teilgraphen $K_{S,T}$ mit $S \subseteq M$, $T \subseteq N$ und $|S| = s$ und $|T| = t$ enthalten. Ferner sei

$$\tilde{z}(m, n, s, t) = \max\{|E(G)| \mid G \in \tilde{\mathcal{G}}(m, n, s, t)\}.$$

Analog zu Proposition 5.1 gilt für die Parameter $z(m, n, s, t)$ und $\tilde{z}(m, n, s, t)$ die folgende Ungleichung:

$$z(m - s, n - t, s, t) \leq \tilde{z}(m, n, s, t) \leq z(m, n, s, t) + 1. \quad (5.2)$$

Für den Parameter $z(m, n, s, t)$ gilt die folgende Abschätzung:

Satz 5.4 (vgl. [6], S. 112, Lemma 9) *Für $z(m, n, s, t) = my = km + r$ mit $k, r \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq r < m$, gilt die folgende Ungleichung:*

$$m \binom{y}{t} \leq (m - r) \binom{k}{t} + r \binom{k + 1}{t} \leq (s - 1) \binom{n}{t}.$$

Als Korollar zu diesem Satz erhält man

$$z(m, n, s, t) \leq (s - 1)^{1/t} (n - t + 1) m^{1-1/t} + (t - 1)m. \quad (5.3)$$

Füredi [10] hat für $s \geq t$ diese Schranke 1996 verschärft zu

$$z(m, n, s, t) \leq (s - t + 1)^{1/t} n m^{1-1/t} + tn + tm^{2-2/t}. \quad (5.4)$$

Dies ist die beste z. Zt. bekannte Schranke für $z(m, n, s, t)$. Das Problem von Zarankiewicz ist im allgemeinen noch ungelöst. Aussagen über die Größenordnung von $z(m, n, s, t)$ gibt es nur für spezielle Werte von s und t (vgl. [6], S. 114 f). Wir wollen nun die Ungleichung (5.2) wie folgt verschärfen.

Lemma 5.5 $\max\{z(m - 1, n, s, t) + t, z(m, n - 1, s, t) + s\}$

$$\begin{aligned} &\leq \tilde{z}(m, n, s, t) \leq z(m, n, s, t) + 1 \\ &\leq \min\left\{z(m - 1, n, s, t) + \left(\frac{s - 1}{m}\right)^{1/t} (n - t + 1) + t - 1, \right. \\ &\quad \left. z(m, n - 1, s, t) + \left(\frac{t - 1}{n}\right)^{1/s} (m - s + 1) + s - 1\right\} \end{aligned}$$

Beweis. Zur linken Ungleichung: Sei $G \in \mathcal{G}(m-1, n, s, t)$ ein Extremalgraph mit Farbklassen M' , $|M'| = m-1$, und N , $|N| = n$. Da G ein Extremalgraph ist, gibt es eine t -elementige Teilmenge T von N , die von genau $s-1$ Knoten aus M' überdeckt wird. Wir fügen nun zu M' einen Knoten x_m hinzu und verbinden ihn mit allen Knoten aus T . Der so entstehende Graph hat $|E(G)| + t = z(m-1, n, s, t) + t$ Kanten und ist offensichtlich ein Element von $\tilde{\mathcal{G}}(m, n, s, t)$. Daher folgt $z(m-1, n, s, t) + t \leq \tilde{z}(m, n, s, t)$. Analog zeigt man $z(m, n-1, s, t) + s \leq \tilde{z}(m, n, s, t)$.

Die mittlere Ungleichung folgt aus der Tatsache, daß jeder Graph in $\tilde{\mathcal{G}}(m, n, s, t)$ durch Entfernen einer Kante aus dem Teilgraphen $K_{s,t}$ zu einem Graphen aus $\mathcal{G}(m, n, s, t)$ wird.

Zur rechten Ungleichung: Sei $G \in \mathcal{G}(m, n, s, t)$ ein Extremalgraph und sei x_0 ein Knoten minimalen Grades in M . Dann gilt $t-1 \leq d(x_0) \leq d := \frac{|E(G)|}{m} = \frac{z(m, n, s, t)}{m}$. Aus Satz 5.4 folgt

$$\begin{aligned}
m \binom{d}{t} &\leq (s-1) \binom{n}{t} \\
\Rightarrow \frac{d}{n} \frac{d-1}{n-1} \cdots \frac{d-(t-1)}{n-(t-1)} &\leq \frac{s-1}{m} \\
\stackrel{d \leq n}{\Rightarrow} \left(\frac{d-(t-1)}{n-(t-1)} \right)^t &\leq \frac{s-1}{m} \\
\Rightarrow d &\leq \left(\frac{s-1}{m} \right)^{1/t} (n-t+1) + t - 1. \tag{5.5}
\end{aligned}$$

Entfernt man nun den Knoten x_0 aus M , so erhält man einen Graphen aus $\mathcal{G}(m-1, n, s, t)$ mit $z(m, n, s, t) - d(x_0) \geq z(m, n, s, t) - d$ Kanten. Mit (5.5) folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 5.6 Satz 5.3 läßt sich in diesem Zusammenhang wie folgt verschärfen: Beschreibt $c(m, n, s, t)$ die Komplexität des Problems, einen $K_{s,t}$ im Graphen $K_{m,n}$ zu finden, so gilt:

$$nm - \tilde{z}(m, n, s, t) \leq c(m, n, s, t) \leq nm - \tilde{z}(m, n, s, t) + m + n - 4.$$

Zum Beweis benutze Spieler A denselben Algorithmus wie im Beweis zu Satz 5.3. Ist die Antwort stets „nein“, so benötigt A gerade $nm - \tilde{z}(m, n, s, t)$ Fragen. Ist $\{x, y\}$, $x \in M, y \in N$ die erste Kante, bei welcher S „ja“ antwortet, so muß A nur noch die Kanten $\{x, u\} (u \in N \setminus \{y, y'\})$ und $\{v, y\} (v \in M \setminus \{x, x'\})$ testen, um den unbekanntem Graphen zu finden. (Dabei ist x' (bzw. y') ein beliebiger Knoten aus $M \setminus \{x\}$ (bzw. $N \setminus \{y\}$).

Literaturverzeichnis

- [1] M. Aigner, Combinatorial Search, Wiley-Teubner Series in Computer Science (1988)
- [2] M. Aigner, E. Triesch, Searching for subgraphs, in R. Bodendiek (ed.) – Contemporary Methods in Graph Theory (1990) 31–45
- [3] C. A. Barefoot, R. C. Entringer, A census of maximum uniquely Hamiltonian graphs, J. Graph Theory **5** (1981) 315–321
- [4] Hans-Boris Belck, Reguläre Faktoren von Graphen, J. Reine Angew. Math. **188** (1950) 228–252
- [5] B. Bollobás, Extremal Graph Theory, Acad. Press London, 1978
- [6] B. Bollobás, Modern Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics, Springer 1998
- [7] J. A. Bondy, Pancyclic graphs I*, J. Combinat. Theory **11** (1971) 80–84
- [8] W. G. Brown, On graphs that do not contain a Thomsen graph, Canad. Math. Bull. **9** (1966) 281–285
- [9] R. C. Entringer, Henda Swart, Spanning cycles of nearly cubic graphs, J. Combinat. Theory B **29** (1980) 303–309
- [10] Z. Füredi, An upper bound on Zarankiewicz’s problem, Combinatorics, Probability and Computing **5** (1996) 29–33
- [11] G. R. T. Hendry, Maximum graphs with a unique k -factor, J. Combinat. Theory B **37** (1984) 53–63

- [12] B. Jackson, R. W. Whitty, A note concerning graphs with unique k -factors. *J. Graph Theory* **13** (1989) 577–580
- [13] L. Lovász, On the structure of factorizable graphs, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **23** (1972) 179–195
- [14] I. Reimann, Über ein Problem von K. Zarankiewicz, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **9** (1958) 269–279
- [15] J. Sheehan, Graphs with exactly one hamiltonian circuit, *J. Graph Theory* **1** (1977) 37–43
- [16] A. G. Thomason, Hamiltonian cycles and uniquely edge colourable graphs, *Annals of Discrete Mathematics* **3** (1978) 259–268
- [17] Carsten Thomassen, Independent dominating sets and a second Hamiltonian cycle in regular graphs, *J. Combinat. Theory B* **72** (1998) 104–109
- [18] Carsten Thomassen, Chords of longest cycles in cubic graphs, *J. Combinat. Theory B* **71** (1997) 211–214
- [19] W. T. Tutte, The factors of graphs, *Can. J. Math.* **4** (1952) 314–328
- [20] W. T. Tutte, On Hamiltonian Circuits, *J. London Math. Soc.* **21/22** (1946) 98–101
- [21] W. T. Tutte, Spanning subgraphs with specified valencies, *Discrete Mathematics* **9** (1974) 97–108
- [22] W. T. Tutte, Graph factors, *Combinatorica* **1** (1981) 79–97

Lebenslauf

Name: Petra Elisabeth Johann

Adresse: Achterstraße 33
52062 Aachen
0241 / 40 19 224

geb. am 24. 12. 1971

geb. in Kamen

Familienstand: ledig

Schulbildung:

1978 – 80 St. Franziskus-Grundschule in Dortmund

1980 – 82 Grillo-Grundschule in Unna

1982 – 91 Geschwister-Scholl-Gymnasium in Unna

Juni 1991 Abitur

Studium:

Okt. 1991 – Sept. 1994 Studium der Mathematik (Diplom) mit Nebenfach
Betriebswirtschaftslehre an der Universität Dortmund

Nov. 1993 Vordiplom

Okt. 1994 – Sept. 1997 Weiterführung des Studiums an der Rheinischen
Friedrich Wilhelms-Universität Bonn

Juni 1997 Diplom

Berufliche Tätigkeiten:

WS 92/93 u. WS 93/94 Tutor an der Universität Dortmund

seit Okt. 1997 Wissenschaftliche Angestellte am Lehrstuhl II
für Mathematik der RWTH Aachen