

Sz
13 218=2 - B BEITRÄGE ZUR M MATHEMATIK

**Charakterwerte von Iwahori-Hecke-
Algebren von klassischem Typ**

Götz Pfeiffer

ABM B^{AND} 14

S2 13218 = 2

CHARAKTERWERTE
VON IWAHORI-HECKE-ALGEBREN VON
KLASSISCHEM TYP

Von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
genehmigte Dissertation

vorgelegt von
Diplom-Mathematiker
Götz Pfeiffer
aus Siegen

Referent: Universitätsprofessor Dr. H. Pahlings
Korreferent: Universitätsprofessor Dr. W. Plesken
Tag der mündlichen Prüfung: 9. Februar 1995.

D 82 (Diss. RWTH Aachen)



AACHENER BEITRÄGE ZUR MATHEMATIK

Herausgeber:

Professor Dr. H. H. Bock, Institut für Statistik und Wirtschaftsmathematik

Professor Dr. H. Th. Jongen, Lehrstuhl C für Mathematik

Professor Dr. W. Plesken, Lehrstuhl B für Mathematik

Pfeiffer, Götz:

Charakterwerte von Iwahori-Hecke-Algebren von klassischem Typ

1. Auflage Aachen:

Verlag der Augustinus Buchhandlung, 1995

(Aachener Beiträge zur Mathematik, Band 14)

ISBN 3-86073-423-7

© 1995 Götz Pfeiffer

Verlag der Augustinus Buchhandlung

Pontstraße 96

52062 Aachen

Tel. & Fax: 0241-23948

Druck: Druckerei Becker-Kuns, Aachen

Gedruckt auf chlorfrei gebleichtem Papier

"D 82 (Diss. RWTH Aachen)"

Vorwort.

Gegenstand dieser Arbeit ist die Berechnung der Charaktertafeln der Iwahori-Hecke-Algebren vom klassischen Typ. Den zwei Typen A und B von unendlichen Serien dieser Algebren vom klassischen Typ entsprechen die zwei Hauptergebnisse: Die Berechnung der Charaktertafel geschieht für Typ A in Satz (2.7.2) und für Typ B in Satz (3.11.1). Die vollständige Berechnung der Charaktertafel für Typ D beruht auf der Vermutung (4.3.2). Die zum Verständnis dieser Formeln nützlichen kombinatorischen Begriffe sind in den Abschnitten 2.1 und 3.1 zusammengestellt.

Eine Iwahori-Hecke-Algebra kann man sich grob als Deformation der Gruppenalgebra einer Weylgruppe vorstellen. Sie besitzt eine Basis, deren Elemente T_w durch die Elemente w der Weylgruppe parametrisiert sind (s. Abschnitt 1.2). Nun wird die Struktur einer endlichen Gruppe vom Lie-Typ in großen Teilen von ihrer Weylgruppe kontrolliert. Auch die Iwahori-Hecke-Algebren spielen in der Darstellungstheorie endlicher Gruppen vom Lie-Typ als Endomorphismenringe gewisser Moduln eine wichtige Rolle. Im einfachsten Fall handelt es sich dabei um den Permutationsmodul auf den Nebenklassen einer Borel-Untergruppe. Eine allgemeinere Situation wird in den Arbeiten von Lusztig bzw. Howlett und Lehrer untersucht. Eine detaillierte Beschreibung dieses Zusammenhangs findet man in Kapitel 10 von Carter's Buch [9].

Darstellende Matrizen für Iwahori-Hecke-Algebren vom klassischen Typ sind bereits 1974 von Hoefsmit [21] bestimmt worden. Zur Berechnung der Charaktere muß für gewisse Produkte dieser Matrizen die Spur berechnet werden.

Die Bestimmung der *Charaktertafel* als einer quadratischen Matrix gewisser Charakterwerte erfordert jedoch noch eine Vorüberlegung. Im Gegensatz zur Weylgruppe, deren Charaktertafel aus den Auswertungen der irreduziblen Charaktere auf Repräsentanten der Konjugiertenklassen besteht, ist es in der Iwahori-Hecke-Algebra nicht sofort klar, auf welchen Elementen die Charaktere am günstigsten ausgewertet werden.

Starkey hat 1975 für Typ A eine hübsche Methode angegeben, mit der sich die Charaktertafel der Iwahori-Hecke-Algebra durch Multiplikation mit einer Polynom-Matrix aus der Charaktertafel der zugehörigen Weylgruppe berechnen läßt. Dabei hat er die Charaktere der Iwahori-Hecke-Algebra nur auf Elementen ausgewertet, die zu Elementen minimaler Länge in ihrer Konjugiertenklasse gehören. Sein Resultat wird in Abschnitt 2.8 zitiert und zur Berechnung einer weiteren Polynom-Matrix benutzt.

In [20] wird nachgewiesen, daß für jede Weylgruppe der Charakterwert in der Iwahori-Hecke-Algebra auf Elementen minimaler Länge unabhängig von der tatsächlichen Wahl des Elements ist. Damit läßt sich die Charaktertafel einer Iwahori-Hecke-Algebra für jeden Typ so definieren, daß sie aus den Auswertungen der irreduziblen Charaktere auf Basiselementen T_w der Algebra besteht, die zu Konjugiertenklassenvertretern w minimaler Länge in der Weylgruppe assoziiert sind (s. Abschnitt 1.3 und 1.4).

Für die fünf exzeptionellen Typen G_2 , F_4 , E_6 , E_7 und E_8 ist es dann im Prinzip ein endliches Problem, über Standardtechniken wie Einschränken und Induzieren von Charakteren oder die Berechnung von Spuren expliziter Matrixdarstellungen, die z. B. durch die Theorie der Zellen [24] konstruiert werden können, die so definierte Charaktertafel der Iwahori-Hecke-Algebra zu bestimmen. Mit Ausnahme des Typs E_8 , für den die nötigen Berechnungen heute noch einen Computer überfordern, hat Meinolf Geck in [17] und [18] diese Tafeln bestimmt.

Für die Serien A_n , B_n und D_n der klassischen Typen wünscht man sich eine allgemeine Formel zur Berechnung der Tafeln für beliebig großes n . Vorbild hierfür ist die Murnaghan-Nakayama-Formel zur Berechnung der Charaktertafel der symmetrischen Gruppe S_n .

Eine solche Formel für die Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ A hat Arun Ram [31] 1991 entwickelt, indem er die Schur-Weyl-Dualität zwischen der Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A_{n-1} und der Quantengruppe $U_q(\mathfrak{gl}(n))$ ausgenutzt hat. Bewiesen wird die Formel dort unter Vermeidung der Quantengruppe mittels symmetrischer Polynome.

Dieselbe Formel läßt sich auch mittels elementarer Rechnungen entlang eines Beweises der gewöhnlichen Murnaghan-Nakayama-Formel durch die Littlewood-Richardson-Regel herleiten. Diese Strategie wird hier in Kapitel 2 vorgestellt.

In Kapitel 3 werden zwei Rekursionsformeln zur Berechnung von Charakterwerten der Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ B_n bewiesen. Die erste dieser Formeln (3.9.2) beruht auf einer Verallgemeinerung der Littlewood-Richardson-Regel, die in Abschnitt 3.5 bewiesen wird. Zusammen bestimmen diese beiden Formeln die Charaktertafel der Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ B_n .

Kapitel 4 untersucht die Situation im Fall der Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ D_n als Unteralgebren der vom Typ B_n . Für die wenigen Charakterwerte, die hier noch zu bestimmen sind, wird eine Vermutung angegeben. Dazu wird eine Methode beschrieben, mit der die vermuteten Werte berechnet werden können. Allerdings reichen die hier entwickelten Methoden nicht aus, um die Vermutung vollständig zu beweisen.

Erste Vermutungen über die Existenz und das ungefähre Aussehen der entsprechenden Formeln für die Charaktertafeln der Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ B oder D ergaben sich nach umfangreichen Experimenten mit den von Hoeft mit angegebenen Matrizen auf dem Computer. Dabei wurden das gruppentheoretische Programmsystem GAP [33] und das Formelmanipulationssystem MAPLE [11] benutzt.

Der Computer ist aber nicht nur dann ein nützliches Hilfsmittel, wenn es um die Multiplikation großer Matrizen oder andere aufwendige Berechnungen geht. Auch zum Speichern, zur Verwaltung und Weiterverarbeitung großer Datenmengen bietet er sich aus verschiedensten Gründen an. So enthält das System GAP z. B. neben einer Sammlung von Algorithmen aus der Gruppen- und Darstellungstheorie eine große Bibliothek von Charaktertafeln endlicher Gruppen. Viele dieser Tafeln stehen zwar als ATLAS of finite groups [12] auch in Buchform zur Verfügung. Zum Arbeiten mit diesen Daten ist es allerdings sehr bequem, sie nicht erst eintippen zu müssen.

CHEVIE [19] ist eine Sammlung von Algorithmen und Daten, die in Verbindung zu CHEValley-Gruppen oder endlichen Gruppen vom LIE-Typ stehen. In einem auf MAPLE basierenden Teil findet man generische Charaktertafeln für Serien von endlichen Gruppen vom Lie-Typ, Tabellen von Green-Polynomen und Programme zur Weiterverarbeitung dieser Daten, um z. B. neue Charaktertafeln zu konstruieren.

Außerdem enthält CHEVIE einen in GAP geschriebenen Teil, der aus Algorithmen zum Rechnen in Weylgruppen und Iwahori-Hecke-Algebren sowie Daten über sie besteht. Dort können die bekannten Charaktertafeln der Iwahori-Hecke-Algebren von exzeptionellen Typ abgerufen werden. Des weiteren sind Programme zur Berechnung der Charaktertafeln von klassischem Typ in CHEVIE implementiert worden. CHEVIE ist kostenlos per ftp auf ftp.math.rwth-aachen.de unter pub/chevie erhältlich.

Das Konzept einer generischen Algebra ist von Broué und Malle [7] bzw. Ariki und Koike [2, 1] auf allgemeine Kranzprodukte zyklischer mit symmetrischen Gruppen und gewisse ihrer Normalteiler ausgeweitet worden. Viele Aspekte der Theorie gewöhnlicher Iwahori-Hecke-Algebren verallgemeinern sich in ganz natürlicher Weise auf diese *zyklotomischen* Algebren. Broué und Malle vermuten, daß gewisse dieser Algebren auch in der Darstellungstheorie endlicher Gruppen vom Lie-Typ zu Verallgemeinerungen bekannter Theorien führen.

In dieser Arbeit wird die Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ B_n als zyklotomische Algebra eingeführt. Die Beweise der Formeln sind so gehalten, daß klar wird, welche Arbeit zu leisten ist, damit diese Beweise auch im allgemeinen Fall geführt werden können.

Vor einigen Tagen hat mir Arun Ram ein Manuskript zugeschickt, in dem er zusammen mit Thomas Halverson unter dem Titel *Murnaghan-Nakayama Rules for Characters of Iwahori-Hecke Algebras of Classical Type* ebenfalls Formeln zur Berechnung der Charaktertafeln dieser Algebren angibt. Die dort angegebenen Formeln sind im wesentlichen mit denen in dieser Arbeit identisch. Allerdings kommen Halverson und Ram mit ganz anderen als den hier verwendeten Methoden zu ihren Ergebnissen. Sie benutzen eine von Curtis Greene¹ entwickelte Theorie über planare partiell geordnete Mengen und deren Möbius-Funktionen, die speziell auch auf Partitionen und zugehörige Tableaux angewendet werden kann.

¹C. Greene, A rational function identity related to the Murnaghan-Nakayama formula for the characters of S_n , J. Alg. Comb. 1 (1992), 235-255.

Danksagungen. Diese Arbeit ist ein Beitrag zum Forschungsschwerpunkt *Algebraische Zahlentheorie und Algebra* der deutschen Forschungsgemeinschaft. Ich danke der DFG für finanzielle Unterstützung.

Ich danke der Studienstiftung des deutschen Volkes, die mir durch ihre finanzielle Unterstützung unter anderem einen sechsmonatigen Aufenthalt an der École Normale Supérieure in Paris ermöglicht hat. Ich danke der dortigen Équipe des Groupes Finis für ihre Gastfreundschaft.

Ich danke Herrn Prof. Pahlings und Herrn Prof. Neubüser für ihr Interesse an meiner Arbeit und die großzügige Unterstützung, die sie mir in den letzten Jahren gewährt haben.

Ich danke Meinolf Geck für eine Zeit fruchtbarer Zusammenarbeit und die vielen Gespräche, in deren Verlauf auch viele Ideen zur Gestaltung dieser Arbeit entstanden sind.

Mein Dank gilt allen, die zum Entstehen dieser Arbeit in der einen oder anderen Form beigetragen haben.

Inhaltsverzeichnis.

Vorwort.	i
Kapitel 1. Weylgruppen und Iwahori-Hecke-Algebren.	1
1.1. Weylgruppen.	1
1.2. Iwahori-Hecke-Algebren.	5
1.3. Konjugation in Weylgruppen.	8
1.4. Die Charaktertafel einer Iwahori-Hecke-Algebra.	9
Kapitel 2. Symmetrische Gruppen und Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ A.	11
2.1. Partitionen und andere Grundbegriffe.	12
2.2. Die Weylgruppe.	14
2.3. Charakterwerte von symmetrischen Gruppen.	14
2.4. Die Littlewood-Richardson-Regel.	16
2.5. Die Iwahori-Hecke-Algebra.	17
2.6. Charakterwerte auf Coxeter-Elementen.	18
2.7. Die Charaktertafel der Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A.	19
2.8. Beziehungen zwischen gewissen Spezialisierungen.	22
Kapitel 3. Kranzprodukte und Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ B.	27
3.1. Tupel von Partitionen und weitere Grundbegriffe.	27
3.2. Kranzprodukte mit symmetrischen Gruppen.	29
3.3. Charaktere von Kranzprodukten.	29
3.4. Die Weylgruppe.	31
3.5. Zwei Littlewood-Richardson-Regeln für Typ B.	32
3.6. Die zyklotomische Algebra vom Typ $B_n^{(r)}$.	34
3.7. Darstellende Matrizen.	35
3.8. Unteralgebren.	37
3.9. Einschränkung auf Typ $B \times A$.	39

3.10. Einschränkung auf Typ $B \times B$.	40
3.11. Die Charaktertafel der Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ B .	42
3.12. Bemerkungen.	44
Kapitel 4. Ein Normalteiler vom Index 2 und Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ D .	47
4.1. Die Weylgruppe.	47
4.2. Die Charaktertafel der Weylgruppe vom Typ D .	49
4.3. Charakterwerte der Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ D .	49
4.4. Eine abschließende Betrachtung.	51
Anhang A. Tafeln.	59
Literaturverzeichnis.	63

KAPITEL 1

Weylgruppen und Iwahori-Hecke-Algebren.

In diesem Kapitel werden Weylgruppen und Iwahori-Hecke-Algebren zusammen mit einigen grundlegenden Eigenschaften vorgestellt.

Abschnitt 1 behandelt Weylgruppen. Hier wird eine Weylgruppe als Spiegelungsgruppe definiert und auf die Möglichkeit, sie als Coxeter-Gruppe zu präsentieren, hingewiesen. Des weiteren werden so nützliche Konzepte wie die Längenfunktion, die Exchange Condition und die Bruhat-Ordnung vorgestellt. Für gewisse Untergruppen einer Weylgruppe, die selbst wieder Weylgruppen sind, wird die Struktur der Menge ihrer Nebenklassen in der Weylgruppe untersucht. Ausführlichere Einführungen in dieses Gebiet bieten z. B. das Buch von Carter [8] oder das Buch von Humphreys [22], welches sich an Bourbaki [5] orientiert.

Die zu einer Weylgruppe W assoziierte Iwahori-Hecke-Algebra H wird in Abschnitt 2 als Deformation der Gruppenalgebra von W eingeführt. Die Gruppenalgebra von W läßt sich aber auch als eine gewisse Spezialisierung von H auffassen. Den parabolischen Untergruppen von W entsprechen parabolische Unteralgebren von H . Ein nützliches Werkzeug in der Darstellungstheorie, das Einschränken und Induzieren von Darstellungen, läßt sich auf diese parabolischen Unteralgebren anwenden.

In Abschnitt 3 wird ein wichtiger Satz über Konjugation in Weylgruppen vorgestellt und in einem Fall bewiesen. Aufgrund dieser Struktureigenschaften von Konjugiertenklassen der Weylgruppe wird in Abschnitt 4 die Charaktertafel einer Iwahori-Hecke-Algebra definiert.

1.1. Weylgruppen.

Sei V ein n -dimensionaler euklidischer Vektorraum, auf dem ein (positiv definites) Skalarprodukt (v, w) definiert ist. Die *Spiegelung* an der zu einem Vektor $r \neq 0$ aus V orthogonalen Hyperebene wird mit w_r bezeichnet und ist diejenige lineare Abbildung, die durch $w_r(r) = -r$ und $w_r(x) = x$ für alle $x \in V$ mit $(r, x) = 0$ definiert ist. Für einen beliebigen Vektor $x \in V$ gilt dann

$$w_r(x) = x - \frac{2(r, x)}{(r, r)}r.$$

Ein *Wurzelsystem* in V ist eine endliche Menge Φ von Vektoren $v \neq 0$ aus V mit den folgenden Eigenschaften.

1. V wird von Φ erzeugt.

2. Für alle $r, s \in \Phi$ ist auch $w_r(s) \in \Phi$.
3. Die einzigen Vielfachen von $r \in \Phi$, die in Φ liegen, sind r und $-r$.
4. Für alle $r, s \in \Phi$ ist $2(r, s)/(r, r)$ eine ganze Zahl.

Die Vektoren in Φ heißen *Wurzeln*. Ein Wurzelsystem Φ enthält eine Teilmenge Π von *einfachen Wurzeln*, so daß

1. Π linear unabhängig und
2. für jede Wurzel $r \in \Phi$ entweder r oder $-r$ eine Linearkombination der einfachen Wurzeln aus Π mit nichtnegativen Koeffizienten ist.

Im allgemeinen gibt es verschiedene Möglichkeiten, in einem Wurzelsystem eine Menge von einfachen Wurzeln auszuwählen.

Eine *Weylgruppe* ist ein Paar (W, S) , wobei W die Gruppe ist, die von der Menge aller Spiegelungen w_r zu den Wurzeln r eines Wurzelsystems Φ erzeugt wird, und S die Menge der *einfachen* Spiegelungen zu einem System Π einfacher Wurzeln in Φ ist. Die Gruppe W wird von S erzeugt. Wir bezeichnen die Weylgruppe (W, S) auch kurz mit W . Die hier gegebene Darstellung von W in Form von Matrizen über V heißt *Spiegelungsdarstellung*. Wir werden allerdings im folgenden keinen Gebrauch von diesen Matrizen machen, sondern W als abstrakte Gruppe behandeln.

Eine Präsentation von W mit Erzeugenden S ist durch die Angabe der Ordnungen $m(s, s')$ der Produkte von jeweils zwei Erzeugern $s, s' \in S$ gegeben. Für jedes $s \in S$ ist $m(s, s) = 1$, und eine Relation der Form $s^2 = 1$ heißt *quadratische Relation*. Für $s \neq s'$ schreiben wir die Relation $(ss')^{m(s, s')} = 1$ in der Form

$$ss's \dots = s's's' \dots$$

mit jeweils $m(s, s')$ Faktoren auf jeder Seite. Eine solche Relation heißt *Zopfrelation*.

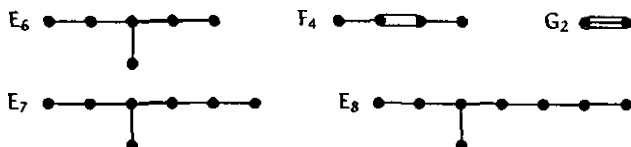
Es stellt sich heraus, daß für $m(s, s')$ ($s \neq s'$) nur die Werte 2, 3, 4 und 6 in Frage kommen. Das ermöglicht die graphische Darstellung dieser Präsentation in Form eines *Dynkindiagramms*. Dabei entsprechen die Erzeuger $s \in S$ den Knoten des Diagramms. Gilt $m(s, s') = 3$ für zwei Spiegelungen $s, s' \in S$, dann werden die zu s und s' gehörenden Knoten durch eine einfache Kante verbunden. Im Fall $m(s, s') = 4$ werden sie durch eine doppelte und im Fall $m(s, s') = 6$ durch eine dreifache Kante verbunden. Gilt $m(s, s') = 2$, also $(ss')^2 = 1$, dann ist das gleichbedeutend mit $ss' = s's$, und die zu s und s' gehörenden Knoten werden nicht verbunden.

Eine Weylgruppe heißt *irreduzibel*, wenn sie sich nicht als direktes Produkt zweier nichttrivialer Weylgruppen darstellen läßt, und das ist genau dann der Fall, wenn ihr Dynkindiagramm zusammenhängend ist. Die Klassifikation der irreduziblen Weylgruppen ergibt neben drei unendlichen Serien A_n ($n \geq 1$), B_n ($n \geq 2$) und D_n ($n \geq 4$) noch die fünf *exzeptionellen* Typen E_6 , E_7 , E_8 , F_4 und G_2 von Weylgruppen.

Die Weylgruppen vom Typ A_n werden in Abschnitt 2.2 anhand ihres Dynkindiagramms vorgestellt, die Weylgruppen vom Typ B_n in Abschnitt 3.4 und diejenigen vom Typ D_n

in Abschnitt 4.1. Diese drei unendlichen Serien bilden die Menge der Weylgruppen vom *klassischen Typ*.

Die Dynkindiagramme der exzeptionellen Typen sehen wie folgt aus.



Das einzige Diagramm, das eine dreifache Kante enthält, ist das vom Typ G_2 . Eine zweifache Kante kommt außer im Diagramm F_4 nur noch in den Diagrammen vom Typ B_n vor.

Längenfunktion, Exchange Condition und Bruhat Ordnung. Ein beliebiges $w \in W$ kann im allgemeinen auf verschiedene Weisen als Produkt einfacher Spiegelungen geschrieben werden, $w = s_1 \cdots s_r$, für gewisse $s_i \in S$. Die *Länge* $l(w)$ von w ist definiert als das kleinste mögliche r und ein Ausdruck dieser Länge für w heißt *reduzierter Ausdruck*. Damit ist $l(1) = 0$ und $l(s) = 1$ für alle $s \in S$. Allgemein gilt, wenn $l(w) = r$ und $s \in S$, dann ist $l(ws) = r + 1$ oder $r - 1$.

W erfüllt die *Exchange Condition* (hier in der Version von Bourbaki [5]):

SATZ 1.1.1. Seien $w \in W$ und $u \in S$ so daß $l(uw) < l(w)$. Dann gibt es zu jedem reduzierten Ausdruck $w = s_1 \cdots s_r$, ein $j \leq r$, so daß $us_1 \cdots s_{j-1} = s_1 \cdots s_j$.

Es gibt genau ein Element w_0 maximaler Länge in W . Dieses Element ist auch dadurch charakterisiert, daß es das einzige $w \in W$ ist, für welches $l(ws) < l(w)$ für alle $s \in S$ gilt.

Die *Bruhat Ordnung* ist eine partielle Ordnung auf der Menge der Elemente von W definiert durch: $w' \leq w$, wenn es einen reduzierten Ausdruck $w = s_1 \cdots s_r$ und Indizes i_j , $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq r$, gibt, so daß $w' = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$. In dem Fall nennen wir w' ein *Unterwort* von w .

Für $w \in W$ und $s \in S$ ist zum Beispiel $w \leq ws$, falls $l(ws) = l(w) + 1$, und $ws \leq w$, falls $l(ws) = l(w) - 1$.

Parabolische Untergruppen und ausgezeichnete Nebenklassenvertreter. Sei $S' \subseteq S$ und $W' = \langle S' \rangle$ die von S' erzeugte Untergruppe von W . Dann ist (W', S') wieder eine Weylgruppe. Eine solches W' heißt *parabolische Untergruppe* von W . Die Vertreter der Rechtsnebenklassen $W'w$ von W' in W lassen sich auf natürliche Weise wählen.

SATZ 1.1.2. Seien $S' \subseteq S$ und $W' = \langle S' \rangle$. Dann ist

$$D = \{w \in W \mid l(uw) > l(w) \text{ für alle } u \in S'\}$$

ein (Rechts-)Nebenklassenvertretersystem von W' in W , d. h., jedes $w \in W$ läßt sich eindeutig in der Form $w = w'd$ für ein $w' \in W'$ und ein $d \in D$ schreiben.

Dabei gilt $l(w) = l(w') + l(d)$. Außerdem ist d das eindeutig bestimmte Element minimaler Länge in der Nebenklasse $W'w$.

BEWEIS. [22], (1.10). □

Die so bestimmten Nebenklassenvertreter minimaler Länge von W' in W heißen *ausgezeichnete Nebenklassenvertreter*. Die Struktur der Menge D wird im wesentlichen beschrieben durch Deodhar's Lemma.

LEMMA 1.1.3. Sei $d \in D$ und $s \in S$. Dann ist $ds \in D$ oder $ds = ud$ für ein $u \in S'$.

BEWEIS. (s. [16], Lemma 3.2) Wenn $ds \notin D$, dann gibt es nach Definition von D ein $u \in S'$, so daß $l(uds) < l(ds)$. Schreibt man $ds = s_1 \cdots s_r$ für gewisse $s_i \in S$ als reduzierten Ausdruck, dann liefert die Exchange Condition (1.1.1) ein $j \leq r$, so daß $s_1 \cdots s_j = us_1 \cdots s_{j-1}$. Damit ist $uds = s_1 \cdots s_{j-1}s_{j+1} \cdots s_r$. Wegen $d \in D$ gilt $l(ud) = l(d) + 1$. Daraus folgt $l(ds) = l(d) + 1$ und $j = r$. Also ist $uds = d$ und damit $ud = ds$. □

Damit läßt sich die Menge D der Nebenklassenvertreter kompakt durch eines ihrer Elemente beschreiben.

LEMMA 1.1.4. Es gibt ein eindeutig bestimmtes längstes Element d_0 in D .

BEWEIS. Nach (1.1.2) gilt $l(wd) = l(w) + l(d)$ für alle $w \in W'$ und alle $d \in D$. Außerdem hat das (eindeutige) Element maximaler Länge w_0 von W eine eindeutige Darstellung $w_0 = w'_0 d_0$ für ein $w'_0 \in W'$ und ein $d_0 \in D$. Also ist w'_0 das längste Element von W' und d_0 das einzige Element maximaler Länge in D . □

Sei $w \in W$. Wir nennen ein Element $x \in W$ *Präfix* von w , wenn es ein $y \in W$ gibt, so daß $w = xy$ mit $l(w) = l(x) + l(y)$. (Oder kürzer: wenn $l(x^{-1}w) = l(w) - l(x)$). Dann gilt

LEMMA 1.1.5. D ist die Menge aller Präfixe von d_0 .

BEWEIS. Sei $d \in D$. Nach Lemma (1.1.3) ist $ds \in D$ falls $l(ds) < l(d)$. Dann folgt durch wiederholtes Anwenden, daß jeder Präfix von d in D liegt, also insbesondere auch jeder Präfix von d_0 .

Andererseits ist zu zeigen, daß d ein Präfix von d_0 ist. Wegen Lemma (1.1.3) genügt es, dies für ein $d \in D$ zu zeigen, für das $ds \notin D$ oder $l(ds) < l(d)$ für alle $s \in S$ ist. Nun gilt $l(w'_0 d) = l(w'_0) + l(d)$ für das längste Element w'_0 von W' . Und für $s \in S$ ist entweder $l(ds) < l(d)$ oder $ds = ud$ für ein $u \in S'$ und damit $l(w'_0 u) < l(w'_0)$. In jedem Fall ist $l(w'_0 ds) < l(w'_0 d)$ und deshalb $w'_0 d = w_0$ und $d = d_0$. □

1.2. Iwahori-Hecke-Algebren.

Sei (W, S) eine Weylgruppe. Zu jedem $s \in S$ sei q_s eine Unbestimmte über $\mathbb{Q}$, so daß $q_s = q_{s'}$, wenn s und s' in W konjugiert sind. Weiter sei $A = \mathbb{Z}[q_s | s \in S]$. Die zu W assoziierte generische Iwahori-Hecke-Algebra H_A über dem Ring A ist die assoziative A -Algebra mit Basis $\{T_w | w \in W\}$ und wie folgt definierter Multiplikation.

$$T_w T_{w'} = T_{ww'} \quad \text{falls } l(ww') = l(w) + l(w'),$$

$$T_s^2 = q_s T_1 + (q_s - 1) T_s \quad \text{für } s \in S.$$

Die Algebra H_A besitzt eine Präsentation mit Erzeugendensystem $\{T_s | s \in S\}$ und den folgenden Relationen (s. [5], IV, §2, exerc. 23).

$$T_s^2 = q_s 1_A + (q_s - 1) T_s \quad \text{für alle } s \in S \text{ (Quadratische Relation)}$$

$$T_s T_{s'} T_s \cdots = T_{s'} T_s T_{s'} \cdots \quad \text{für alle } s, s' \in S, s \neq s' \text{ (Zopfrelation)}$$

mit jeweils $m(s, s')$ Faktoren auf jeder Seite.

Da sich je zwei reduzierte Ausdrücke für ein $w \in W$ durch bloßes Anwenden der Zopfrelationen ineinander überführen lassen, folgt daraus das Lemma von Matsumoto.

LEMMA 1.2.1. Zu jedem reduzierten Ausdruck $w = s_1 \cdots s_r$ von w ist $T_w = T_{s_1} \cdots T_{s_r}$.

Sei K_0 der Quotientenkörper von A . Dann ist die Algebra $H_{K_0} = K_0 \otimes_A H_A$ halbeinfach. Für Iwahori-Hecke-Algebren vom klassischen Typ hat Hoefsmit [21] alle irreduziblen Darstellungen über K_0 realisiert (s. Abschnitt 3.7) und nachgewiesen, daß K_0 Zerfällungskörper für H_{K_0} ist. Im allgemeinen zerfällt H_{K_0} über einer endlichen Erweiterung K von K_0 . Wir bezeichnen H_K hier mit H und setzen damit voraus, daß H zerfällt.

Spezialisierung. Jeder Ringhomomorphismus $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ von A in den Körper der komplexen Zahlen bewirkt eine *Spezialisierung* der Algebra H_A , die wir mit $H_f = \mathbb{C} \otimes_f H_A$ bezeichnen.

Eine Spezialisierung ist zum Beispiel durch den Homomorphismus $A \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben, der jede Unbestimmte q_s auf die $1 \in \mathbb{C}$ abbildet. Unter diesem Homomorphismus wird die Präsentation der Iwahori-Hecke-Algebra H_A zur Präsentation der Weylgruppe und die Iwahori-Hecke-Algebra H zur Gruppenalgebra $\mathbb{C}[W]$. Diese besondere Spezialisierung erlaubt die Übertragung gewisser Eigenschaften der Weylgruppe auf die Iwahori-Hecke-Algebra.

Wann immer im folgenden ohne Angabe einer Abbildung f von Spezialisierung die Rede ist, dann ist diese besondere Spezialisierung $q_s \mapsto 1$ gemeint.

Wie nützlich Spezialisierungen sind, zeigt der Tits'sche Deformationssatz (s. [15] (68.17)).

Satz 1.2.2. Sei $K \supseteq A$ ein Zerfällungskörper und A^* der ganze Abschluß von A in K . Weiter sei χ ein irreduzibler Charakter von H . Dann ist $\chi(T_w) \in A^*$ für alle $w \in W$. Der Homomorphismus $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ läßt sich zu einem Homomorphismus $f^*: A^* \rightarrow \mathbb{C}$ fortsetzen. Wenn H_f halbeinfach ist, dann ist die Abbildung

$$\chi \mapsto f^* \circ \chi$$

eine Bijektion zwischen den irreduziblen Charakteren von H_K und denen von H_f .

Insbesondere induziert also die Spezialisierung $q_s \mapsto 1$ eine Bijektion zwischen den irreduziblen Charakteren von H und denen der Weylgruppe W .

Parabolische Unteralgebren, Einschränken und Induzieren von Darstellungen. Seien $S' \subseteq S$ und $W' = \langle S' \rangle$ die entsprechende parabolische Untergruppe von W . Dann erzeugen die T_s , $s \in S'$, eine parabolische Unteralgebra H' von H , die gleichzeitig die zu W' assoziierte Iwahori-Hecke-Algebra ist. Durch Einschränken der Operation wird ein H -Modul V zu einem H' -Modul $V|_{H'}$.

Weiter sei D die Menge der ausgezeichneten Rechtsnebenklassenvertreter von W' in W . Dann ist $T_{wd} = T_w T_d$ für alle $w \in W'$ und alle $d \in D$, da $l(wd) = l(w) + l(d)$. Damit ist H ein freier H' -Linksmodul mit Basis T_d , $d \in D$. Zu einem H' -(Rechts-)Modul V definiert man dann den induzierten H -Modul als $V^H = V \otimes_{H'} H$. Jedes Element $v \in V^H$ hat eine eindeutige Darstellung als $v = \sum_{d \in D} v_d \otimes T_d$ mit gewissen $v_d \in V$, und die Operation von T_s für $s \in S$ auf $v_d \otimes T_d$ ist durch

$$(v_d \otimes T_d)T_s = \begin{cases} (v_d T_{w'}) \otimes T_{d'}, & \text{falls } l(ds) > l(d), \\ q_s(v_d T_{w'}) \otimes T_{d'} + (q_s - 1)v_d \otimes T_d, & \text{falls } l(ds) < l(d) \end{cases}$$

gegeben, wobei $w' \in W'$ und $d' \in D$ durch $ds = w'd'$ definiert sind.

Sowohl das Einschränken res als auch das Induzieren ind von Darstellungen sind mit Spezialisierungen verträglich. Für $f: q_s \mapsto 1$ bedeutet das, daß die beiden folgenden Diagramme kommutativ sind.

$$\begin{array}{ccc} \text{mod-}H & \xrightarrow{f} & \text{mod-}W \\ \text{res} \downarrow & & \downarrow \text{res} \\ \text{mod-}H' & \xrightarrow{f} & \text{mod-}W' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{mod-}H & \xrightarrow{f} & \text{mod-}W \\ \text{ind} \uparrow & & \uparrow \text{ind} \\ \text{mod-}H' & \xrightarrow{f} & \text{mod-}W' \end{array}$$

Hier bezeichnet $\text{mod-}H$ die Kategorie der H -Moduln und $\text{mod-}W$ diejenige der W -Moduln.

Im Rest dieses Abschnitts untersuchen wir das Verhalten eines T_d , $d \in D$, unter Multiplikation mit einem T_w . Dies erleichtert in Abschnitt 4.4 die Behandlung einer induzierten Darstellung.

Für beliebiges $w \in W$ ist das Produkt

$$T_d T_w = \sum_{d' \in D} a_{d,d'}^w T_{u(w,d,d')} T_{d'},$$

mit gewissen $a_{d,d'}^w \in A$ und $u(w, d, d') \in W'$.

LEMMA 1.2.3. Wenn $w \in W$ ein Produkt verschiedener $s \in S$ ist, dann ist

$$T_d T_w = \sum_{w' \leq w} a_{d,dw'}^w T_{u(w,d,dw')} T_{dw'},$$

wobei $a_{d,dw'}^w = 0$ und $u(w, d, dw') = 1$, falls $dw' \notin D$.

BEWEIS. Die Behauptung gilt trivialerweise für $w = 1$. Sei also $w \neq 1$ und $w = vs$ für ein $v \in W$ mit $l(v) < l(w)$ und ein $s \in S$. Per Induktion nach der Länge von w gilt

$$T_d T_w = T_d T_v T_s = \sum_{w' \leq v} a_{d,dw'}^v u(v, d, dw') T_{dw'} T_s.$$

Nach Deodhar's Lemma (1.1.3) gibt es für das Produkt von T_d und T_s nur die Möglichkeiten

$$T_d T_s = \begin{cases} T_{ds}, & \text{falls } ds \in D \text{ und } l(ds) = l(d) + 1, \\ q_s T_{ds} + (q_s - 1) T_d, & \text{falls } ds \in D \text{ und } l(ds) = l(d) - 1, \text{ oder} \\ T_u T_d, & \text{falls } ds \notin D \text{ und } ds = ud \text{ für ein } u \in S'. \end{cases}$$

Also hat $T_d T_s$ in der Zerlegung höchstens zwei Summanden

$$T_d T_s = a_{d,d}^s T_{u(s,d,d)} T_d + a_{d,ds}^s T_{u(s,d,ds)} T_{ds},$$

wobei $a_{d,ds}^s = 0$, wenn $ds \notin D$. Außerdem ist $a_{d,d}^s = 0$, wenn $ds \in D$ und reduziert ist. Damit ist

$$\begin{aligned} a_{d,dw'}^v u(v, d, dw') T_{dw'} T_s &= a_{d,dw'}^v a_{dw',dw'}^s u(v, d, dw') u(s, dw', dw') T_{dw'} + \\ &\quad a_{d,dw'}^v a_{dw',dw's}^s u(v, d, dw') u(s, dw', dw's) T_{dw's}. \end{aligned}$$

Da w ein Produkt verschiedener $s \in S$ ist, folgt, daß $\{w' | w' \leq w\}$ die disjunkte Vereinigung von $\{w' | w' \leq v\}$ und $\{w' | w' \leq v\}$ ist. Deshalb gehören alle Summanden, die hier entstehen, zu verschiedenen dw' , und das Lemma ist bewiesen. $\square$

Aus dem vorhergehenden Beweis erhalten wir auch noch die Formeln

$$a_{d,dw'}^w = a_{d,dw'}^v a_{dw',dw'}^s \quad \text{und} \quad a_{d,dw's}^w = a_{d,dw'}^v a_{dw',dw's}^s,$$

sowie entsprechendes für $u(w, d, dw')$ und $u(w, d, dw's)$. Das beweist

FOLGERUNG 1.2.4. Sei $w = s_1 \cdots s_r \in W$ ein Produkt verschiedener Spiegelungen $s_j \in S$ und $w' = s_{i_1} \cdots s_{i_m} \leq w$ für gewisse $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq r$. Weiter sei $w'(j) = s_{i_1} \cdots s_{i_{k(j)}}$, wobei $k(j)$ das größte k mit $i_k \leq j$ ist. Dann ist

$$a_{d,dw'}^w = \prod_{j=1}^r a_{dw'(j-1),dw'(j)}^{s_j}.$$

Eine entsprechende Formel gilt für $u(w, d, dw')$.

Damit ist die Operation eines T_w zu einem Produkt w verschiedener Erzeuger $s \in S$ auf $v_d \otimes T_d$ beschrieben durch

$$(v_d \otimes T_d)T_w = \sum_{w' \leq w} a_{d,dw'}^w v_d T_{u(w,d,dw')} \otimes T_{dw'}.$$

1.3. Konjugation in Weylgruppen.

In diesem und dem nächsten Abschnitt folgen wir dem Artikel [20].

Sei (W, S) eine Weylgruppe. Für $w \in W$ und $s \in S$ gilt immer $l(sws) - l(w) \in \{0, +2, -2\}$. Wir schreiben $w \xrightarrow{s} w'$, falls $w' = sws$ und $l(sws) \leq l(w)$. Ist $w = w_0, \dots, w_n = w'$ eine Folge von Elementen $w_i \in W$ mit $w_{i-1} \xrightarrow{s_i} w_i$ für jedes i und jeweils ein $s_i \in S$, dann schreiben wir $w \xrightarrow{s_1 \dots s_n} w'$ oder einfach $w \rightarrow w'$.

Des weiteren schreiben wir $w \sim w'$, wenn $l(w) = l(w')$ und es ein $x \in W$ gibt, so daß $w' = xwx^{-1}$ und $l(xw) = l(x) + l(w)$ oder $l(wx^{-1}) = l(w) + l(x^{-1})$. Auch diese Relation wird transitiv auf ganz W fortgesetzt.

Zu einer konjugierten Klasse C von W bezeichne $C_{\min}$ die Menge der Elemente minimaler Länge in C .

SATZ 1.3.1. *Sei C eine konjugierte Klasse von W . Dann gilt*

1. *Zu jedem $w \in C$ gibt es ein $w' \in C_{\min}$ mit $w \rightarrow w'$.*
2. *Für alle $w, w' \in C_{\min}$ gilt $w \sim w'$.*

BEWEIS. Der Beweis dieses Satzes wird hier exemplarisch für Weylgruppen vom Typ A_n vorgeführt. Für die anderen Serien von Weylgruppen vom klassischen Typ verläuft der Beweis im wesentlichen analog. Für die endlich vielen Weylgruppen vom exzeptionellen Typ wird die Gültigkeit des Satzes durch den Einsatz von Computerprogrammen in GAP verifiziert. Für weitere Details verweise ich auf [20].

Sei also $n > 0$ und W_n die Weylgruppe vom Typ A_n mit Erzeugern $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ entsprechend dem Dynkindiagramm in Abschnitt 2.2. Die von 1 verschiedenen ausgezeichneten Rechtsnebenklassenvertreter von W_{n-1} in W_n haben die Form $s_n s_{n-1} \dots s_i$, $i \leq n$. Damit ist die Menge $D_n = \{1, s_n\}$ ein vollständiges System von Doppelnebenklassenvertretern von W_{n-1} in W_n .

So läßt sich ein beliebiges $w \in W_n$ schreiben als $w = ad_n b$ für gewisse $a, b \in W_{n-1}$ und ein $d_n \in D_n$. Offensichtlich ist $w \rightarrow bad_n$ mit konjugierenden Elementen aus W_{n-1} . Für $ba \in W_{n-1}$ gilt per Induktion nach n , daß $ba \rightarrow d_1 \dots d_{n-1}$ für gewisse $d_i \in D_i$ und konjugierende Elemente aus W_{n-2} . Da W_{n-2} mit D_n vertauschbar ist, haben wir auch $w \rightarrow d_1 \dots d_n$ mit konjugierenden Elementen aus W_{n-1} .

Da $d_i = 1$ oder s_i , besteht das so erhaltene Wort $w' = d_1 \dots d_n$ aus miteinander vertauschbaren Blöcken der Form $\{s_{j_1+1} \dots s_{j_k}\}$, die durch diejenigen d_i getrennt werden, die gleich 1 sind. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß ein solcher Block auch leer

sein kann ($k = j - 1$ für $d_{j-1} = d_j = 1$), liefern die Längen $k - j + 2$ aller Blöcke eine Komposition λ von $n + 1$. Umgekehrt beschreibt jede Komposition λ von $n + 1$ ein solches Wort in W_n . Durch Ordnen ihrer Teile wird die Komposition λ zu einer eindeutig bestimmten Partition von $n + 1$. Daß sich die Blöcke in $d_1 \cdots d_n$ entsprechend vertauschen lassen, rechtfertigt Proposition 2.4(a) in [20].

Dazu seien $m, k \geq 0$ und

$$\begin{aligned} y &= (s_{m+1} \cdots s_1)(s_{m+2} \cdots s_2) \cdots (s_{m+k+1} \cdots s_{k+1}), \\ w &= (s_1 s_2 \cdots s_m)(s_{m+2} s_{m+3} \cdots s_{m+k+1}) \quad \text{und} \\ v &= (s_1 s_2 \cdots s_k)(s_{k+2} s_{k+3} \cdots s_{k+m+1}). \end{aligned}$$

Dann ist $y^{-1}wy = v$ und $l(wy) = l(w) + l(y)$, also $w \sim v$ (Beweis durch Anwenden der Zopfrelationen und Induktion nach k).

Damit gibt es in jeder Konjugiertenklasse C von W_n ein ausgezeichnetes Element u (nämlich das in Blockform, dessen zugeordnete Komposition eine Partition ist), und zu jedem $w \in C$ gibt es ein Element w' , so daß $w \rightarrow w' \sim u$.

Aus $w' \sim u$ folgt offensichtlich $l(w') = l(u)$, aus $w \rightarrow w'$ folgt $l(w) \geq l(w')$. Falls w minimale Länge in C hat, gilt somit $l(w) = l(w') = l(u)$ und deshalb $u \in C_{\min}$. Außerdem ist $w = w'$, falls $l(w) = l(w')$. $\square$

1.4. Die Charaktertafel einer Iwahori-Hecke-Algebra.

Für Elemente w, w' und $x \in W$ gelte $l(w) = l(w')$, $w' = xwx^{-1}$ und $l(xw) = l(x) + l(w)$. Dann gilt auch $l(w'x) = l(w') + l(x)$ und in der Iwahori-Hecke-Algebra ist $T_x T_w = T_{xw} = T_{w'x} = T_{w'} T_x$. Damit sind T_w und $T_{w'}$ in H durch eine Einheit konjugiert. Satz (1.3.1b) besagt gerade, daß dies für Elemente T_w und $T_{w'}$ in H , wobei w und w' Elemente von minimaler Länge in einer Konjugiertenklasse C von W sind, immer der Fall ist.

Seien nun $w \in W$ beliebig und $s \in S$, so daß $l(sws) \leq l(w)$. Dann ist

- (i) $l(w) < l(sw)$ und $l(sw) > l(sws)$, oder
- (ii) $l(w) > l(sw)$ und $l(sw) < l(sws)$, oder
- (iii) $l(w) > l(sw)$ und $l(sw) > l(sws)$.

Im Fall (i) ist dann $T_s T_w = T_{sw} = T_{sws} T_s$ und damit $T_s T_w T_s^{-1} = T_{sws}$. Im Fall (ii) ist $T_s T_{sw} = T_w$ und $T_{sw} T_s = T_{sws}$ und damit $T_{sws} = T_s^{-1} T_w T_s$. Im Fall (iii) haben wir $T_s T_{sw} = T_w$ und $T_{sw} T_s = q_s T_{sws} + (q_s - 1) T_{sw}$ und damit $T_s^{-1} T_w T_s = T_{sw} T_s = q_s T_{sws} + (q_s - 1) T_{sw}$. Daraus folgt für jeden Charakter χ von H

$$\chi(T_w) = \chi(T_{w'}) \quad \text{für alle } w, w' \in W \text{ mit } w \rightarrow w' \text{ und } l(w) = l(w') \text{ und}$$

$$\chi(T_w) = q_s \chi(T_{w'}) + (q_s - 1) \chi(T_{sw})$$

$$\text{für alle } w, w' \in W \text{ mit } w \xrightarrow{s} w' \text{ und } l(w') < l(w).$$

Aus Satz (1.3.1) ergibt sich somit folgende Konsequenz für das Rechnen in der Iwahori-Hecke-Algebra H .

FOLGERUNG 1.4.1. Sei χ ein Charakter von H .

- (a) Für jede Konjugiertenklasse C von W ist χ konstant auf $\{T_w | w \in C_{\min}\}$.
 (b) Für beliebiges $w \in W$ ist $\chi(T_w)$ eine $\mathbb{Z}[q_s | s \in S]$ -Linearkombination

$$\chi(T_w) = \sum_C f_{w,C} \chi(T_{w_C}),$$

wobei über alle Klassen C von W summiert wird und $w_C \in C_{\min}$ gilt.

Damit ist die folgende für diese Arbeit grundlegende Definition gerechtfertigt. (Es sei daran erinnert, daß wir H als halbeinfach und über einem Zerfällungskörper definiert angenommen haben.)

DEFINITION 1.4.2. Die Charaktertafel von H ist die quadratische Matrix $(\chi(T_{w_C}))$, deren Zeilen durch die irreduziblen Charaktere χ von H und deren Spalten durch die Konjugiertenklassen C von W parametrisiert sind.

Die Polynome $f_{w,C} \in \mathbb{Z}[q_s | s \in S]$ heißen *Klassenpolynome* von H .

KAPITEL 2

Symmetrische Gruppen und Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ A.

In diesem Kapitel wird die Charaktertafel der Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A konstruiert.

Die Weylgruppe W vom Typ A_{n-1} wird in Abschnitt 2.2 mit der symmetrischen Gruppe S_n auf n Punkten identifiziert. Einen ausführlichen Überblick über die Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen bietet das Buch [23] von James und Kerber. Abschnitt 2.3 stellt die Murnaghan-Nakayama-Formel zur Berechnung der Charaktertafel der symmetrischen Gruppe vor. Diese Rekursionsformel liegt auch der Implementation der Charaktertafeln symmetrischer Gruppen in GAP (s. [29]) zugrunde und dient als Vorbild für die Charakterformeln in dieser Arbeit. Dabei wird die Frage nach dem Charakterwert eines Elements $x \in S_n$ durch das Streichen eines k -Zykels von x auf Charakterwerte in der kleineren symmetrischen Gruppe S_{n-k} zurückgeführt.

Anders gesagt: geht man per Induktion davon aus, daß die Charakterwerte für kleine symmetrische Gruppen bekannt sind, so läßt sich prinzipiell der Charakterwert eines Elements x von S_n , das schon in einem direkten Produkt von kleineren symmetrischen Gruppen liegt, durch Einschränken und Zerlegen bestimmen. Die einzigen Elemente von S_n , die in keiner sogenannten Young-Untergruppe liegen, sind die n -Zykel, von denen manche auch Coxeter-Elemente genannt werden. Die Littlewood-Richardson-Regel, die in Abschnitt 2.4 vorgestellt wird, beschreibt die Zerlegung eingeschränkter Charaktere. Das Problem der Charakterwerte ist damit im wesentlichen zurückgeführt auf die Bestimmung der Charakterwerte von Coxeter-Elementen.

In Abschnitt 2.5 werden die Iwahori-Hecke-Algebra H_n vom Typ A_{n-1} eingeführt und die Bezeichnungen für das Rechnen in ihr festgelegt. Die Charaktertafel der Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A ist durch Satz (2.7.2) bestimmt, der in Abschnitt 2.7 bewiesen wird. Dieser Beweis folgt der oben beschriebenen Strategie. Dazu wird zunächst der Charakter auf den in der Iwahori-Hecke-Algebra den Coxeter-Elementen entsprechenden T_w ausgewertet. Abschließend wird die Einschränkung des Charakters auf eine parabolische Unterálgebra $H_{n-k} \otimes H_k$ mit Hilfe der Littlewood-Richardson-Regel untersucht. Dieser Teil des Beweises folgt dem entsprechenden Abschnitt in [30].

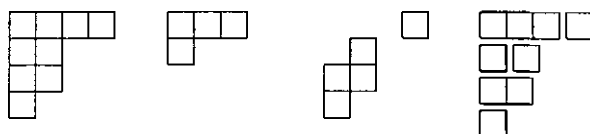
Das Kapitel endet in Abschnitt 2.8 mit einer Untersuchung der Beziehungen zwischen den Charakterwerten der Iwahori-Hecke-Algebra mit Parameter q und derjenigen mit Parameter q^2 . Es beginnt mit der Bereitstellung einiger nützlicher Begriffe und Hilfsmittel aus dem Bereich der Kombinatorik.

Wenn α und γ Kompositionen sind mit $l(\alpha) \leq l(\gamma)$ und $\alpha_i \leq \gamma_i$ für $i = 1, \dots, l(\alpha)$ schreiben wir $\alpha \subseteq \gamma$.

Seien α und γ Partitionen mit $\alpha \subseteq \gamma$. Dann bildet die mengentheoretische Differenz $\gamma \setminus \alpha$ der Diagramme γ und α ein sogenanntes *schiefes Diagramm*. Das Diagramm $\gamma \setminus \alpha$ ist ein *Streifen*, wenn es keinen 2×2 -Block enthält. Ist es darüberhinaus zusammenhängend, wird es *Haken*¹ genannt. Die *Beinlänge* eines Hakens $\gamma \setminus \alpha$ wird mit l_α^γ bezeichnet und entspricht der Anzahl der Zeilen, die der Haken im Diagramm γ belegt, minus eins. Die Zusammenhangskomponenten eines Streifens $\gamma \setminus \alpha$ sind Haken, und wir bezeichnen mit c_α^γ ihre Anzahl und mit l_α^γ die Summe der entsprechenden Beinlängen.

In Abschnitt 2.8 und später in Kapitel 4 benötigen wir noch eine weitere Operation für Partitionen. Zu einer Partition γ von n und einer Komposition α mit $\alpha \subseteq \gamma$ sei $\gamma \div \alpha$ (sprich: γ geteilt durch α) die Partition von n , die aus den Teilen α_i und $\gamma_i - \alpha_i$, $i = 1, \dots, l(\gamma)$, in einer geeigneten Reihenfolge besteht. (Hierbei wird $\alpha_i = 0$ für $i > l(\alpha)$ angenommen.)

Das folgende Bild zeigt von links nach rechts die Diagramme der Partition $\gamma = [4, 2^2, 1]$ und der Partition $\alpha = [3, 1]$, das schiefe Diagramm $\gamma \setminus \alpha$ und die Teile der Partition $\gamma \div \alpha = [3, 2, 1^4]$.



Das schiefe Diagramm $\gamma \setminus \alpha$ ist ein Streifen, der aus einem Haken der Länge 1 und einem der Länge 4 besteht, also $c_\alpha^\gamma = 2$. Die Beinlänge des kurzen Hakens ist 0, die des anderen 2, und damit ist in diesem Beispiel $l_\alpha^\gamma = 0 + 2 = 2$.

Man beachte, daß α und γ durch das schiefe Diagramm $\gamma \setminus \alpha$ nicht eindeutig bestimmt sind. Gleiches gilt für $\gamma \div \alpha$. So ist in obigem Beispiel auch $\gamma \div \alpha = \gamma \div \delta$ für $\delta = [3, 1, 2]$.

¹In [23] wird zu dem Kästchen in der Position (i, j) im Diagramm γ ein *Haken* so definiert, daß er aus eben diesem Kästchen, den in γ darunterliegenden Kästchen (das *Bein* des Hakens) und den in γ rechts daneben liegenden Kästchen (der *Arm* des Hakens) besteht. So sieht man, daß es im Diagramm γ zu einer Partition γ von n genau n verschiedene Haken gibt. Zu einem Haken in diesem Sinne korrespondiert immer das Stück des Rands von γ , welches das unterste zu dem Haken gehörende Kästchen (das unterste Kästchen in der j -ten Spalte von γ) mit dem am weitesten rechts liegenden Kästchen des Hakens (dem letzten Kästchen der i -ten Zeile von γ) verbindet. Dieser Teil des Rands besteht aus genau so vielen Kästchen wie der ursprüngliche Haken und heißt dort *Randhaken*. In dieser Arbeit ist ein Haken $\gamma \setminus \alpha$ also immer ein solcher Randhaken.

2.2. Die Weylgruppe.

Die Weylgruppe $W(A_{n-1})$ vom Typ A_{n-1} wird erzeugt von $S = \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$ mit den durch das folgende Dynkindiagramm gegebenen Relationen.



Die Weylgruppe vom Typ A_{n-1} ist isomorph zur symmetrischen Gruppe S_n auf n Punkten. Ein solcher Isomorphismus bildet z. B. für $i = 1, \dots, n-1$ ein s_i auf die Transposition $(i, i+1)$ ab.

Die Elemente von S_n sind Permutationen, die als Produkte von disjunkten Zykeln geschrieben werden. Die Zykellängen liefern (nach geeigneter Sortierung und die Fixpunkte als Zykel der Länge 1 zählend) zu jeder Permutation eine Partition von n , ihre *Zykelstruktur*. Zwei Elemente von S_n sind genau dann konjugiert, wenn sie dieselbe Zykelstruktur haben.

Das zu einer Partition der Menge $\{1, \dots, n\} = M_1 \cup \dots \cup M_r$ als $S_{M_1} \times \dots \times S_{M_r}$ definierte Produkt symmetrischer Gruppen ist eine Untergruppe von S_n und heißt *Young-Untergruppe*. Die Größen $|M_i|$ liefern (nach geeigneter Sortierung) eine Partition von n . Alle Young-Untergruppen, für die sich hier dieselbe Partition α von n ergibt, sind in S_n konjugiert. Umgekehrt ist die zu einer Komposition $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_r]$ gehörende Young-Untergruppe S_α von S_n eine Gruppe der Form $S_{\alpha_1} \times \dots \times S_{\alpha_r}$.

Zu einer Partition π von n erhält man einen *Standardrepräsentanten* der entsprechenden Konjugiertenklasse von S_n wie folgt. Zu $\pi = [\pi_1, \dots, \pi_r]$ sei $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ die Folge von Summen von Teilen von π , also $\sigma_1 = \pi_1$ und $\sigma_i = \sigma_{i-1} + \pi_i$ für $i = 2, \dots, r$. Der gesuchte Repräsentant minimaler Länge entsteht dann aus $s_1 \dots s_{n-1}$ durch Weglassen aller s_i mit $i \in \sigma$.

So ist zum Beispiel das zu der Partition $\pi = [4, 3, 1]$ von 8 gebildete $\sigma = \{4, 7, 8\}$. Der Standardrepräsentant dieser Klasse ist also $s_1 s_2 s_3 s_5 s_6$ und entspricht der Permutation $(1432)(576)(8) = (1432)(576)$.

2.3. Charakterwerte von symmetrischen Gruppen.

Wie die Konjugiertenklassen sind auch die irreduziblen Charaktere von S_n über einem Körper der Charakteristik 0 durch die Partitionen von n parametrisiert.

Neben dem 1-Charakter 1_{S_n} gibt es in jeder symmetrischen Gruppe einen weiteren linearen, den *alternierenden Charakter* ϵ_{S_n} , definiert durch $s_i \mapsto -1$. Der Kern dieses Charakters ist die alternierende Gruppe A_n , was uns hier aber nicht weiter interessiert.

Der nach S_n induzierte 1-Charakter $1_{S_\gamma}^{S_n}$ von S_γ und der nach S_n induzierte alternierende Charakter $\epsilon_{S_\gamma}^{S_n}$ der Young-Untergruppe S_γ zur assoziierten Partition $\bar{\gamma}$ haben einen gemeinsamen irreduziblen Konstituenten, der mit χ^γ bezeichnet wird. Damit gilt der folgende

SATZ 2.3.1. Die Charaktere χ^γ bilden ein vollständiges System paarweise verschiedener irreduzibler Charaktere von S_n , wenn γ alle Partitionen von n durchläuft.

BEWEIS. [23] (2.1.11). □

Für Partitionen γ und π von n bezeichnen wir mit $\chi^\gamma(\pi)$ den Wert des Charakters χ^γ auf Elementen mit Zykelstruktur π . Die folgende Murnaghan-Nakayama-Formel liefert ein rekursives Verfahren zur Berechnung aller Charakterwerte von S_n . Dazu setzen wir $\chi^{(1)} = 1$.

SATZ 2.3.2. Seien γ und π Partitionen von n und $k = \pi_i$ für ein $i \leq l(\pi)$. Weiter sei $\rho = [\pi_1, \dots, \pi_{i-1}, \pi_{i+1}, \dots, \pi_{l(\pi)}]$. Dann ist

$$\chi^\gamma(\pi) = \sum_{|\gamma \setminus \alpha| = k} (-1)^{l_\alpha} \chi^\alpha(\rho),$$

wobei über alle Partitionen α von $n - k$ summiert wird, für die $\gamma \setminus \alpha$ ein Haken ist.

BEWEIS. [23] (2.4.7), [26] (5.6). □

Zwei Beispiele demonstrieren den Gebrauch dieser Formel. In Lemma (2.3.5) berechnen wir bestimmte Charakterwerte auf den Erzeugern s_i von S_n . Als sofortige Folgerung erhalten wir eine Formel für die Charakterwerte des Coxeter-Elements $s_1 \cdots s_{n-1}$ von S_n .

FOLGERUNG 2.3.3. Sei γ eine Partition von n . Dann ist

$$\chi^\gamma(s_1 \cdots s_{n-1}) = \begin{cases} (-1)^r, & \text{falls } \gamma = [n-r, 1^r] \text{ für ein } r = 0, \dots, n-1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEWEIS. (s. [23] (2.3.17)). Die Zykelstruktur von $s_1 \cdots s_{n-1}$ ist $[n]$, damit ist in (2.3.2) $k = n$ und $\rho = []$. Die Partition γ enthält nur dann einen Haken der Länge n , wenn sie selbst ein Haken und damit von der Form $\gamma = [n-r, 1^r]$ für ein $r = 0, \dots, n-1$ ist. In diesem Fall ist die Beinlänge r und damit der Charakterwert $\chi^\gamma(s_1 \cdots s_{n-1}) = (-1)^r$. Andernfalls ist die Summe leer und $\chi^\gamma(s_1 \cdots s_{n-1}) = 0$. □

Die Berechnung eines Charakterwerts mittels der Murnaghan-Nakayama-Formel ist für $\pi = [1^n]$, also die Bestimmung des Charaktergrads, am aufwendigsten. Hierfür gibt es jedoch auch eine geschlossene Formel.

SATZ 2.3.4. Sei γ eine Partition von n . Der Grad des irreduziblen Charakters χ^γ ist bestimmt durch

$$\chi^\gamma(1) = n! / \prod_{\alpha} |\gamma \setminus \alpha|,$$

wobei das Produkt über alle Partitionen $\alpha \subseteq \gamma$, für die $\gamma \setminus \alpha$ ein Haken ist, gebildet wird.

BEWEIS. [23] (2.3.21) □

Jetzt sind wir in der Lage, für den Fall, daß γ ein Haken ist, den Charakterwert $\chi^\gamma(s)$ für eine Spiegelung $s \in S$ zu bestimmen.

LEMMA 2.3.5. Seien $n > 1$ und $0 \leq r \leq n-1$. Für $\gamma = [n-r, 1^r]$ und $s \in S$ gilt

$$\chi^\gamma(1) = \binom{n-1}{r} \quad \text{und} \quad \chi^\gamma(s) = \frac{n-1-2r}{n-1} \binom{n-1}{r}.$$

BEWEIS. Mittels des Produkts über alle Hakenlängen in (2.3.4) ist

$$\chi^\gamma(1) = n! / (r! (n-r-1)! n) = \binom{n-1}{r}.$$

Die Zykelstruktur eines Erzeugers $s \in S$ ist $\pi = [2, 1^{n-2}]$. In dem Haken $\gamma = [n-r, 1^r]$ gibt es (höchstens) zwei Möglichkeiten, einen 2-Haken wegzunehmen. Der eine hat Beinlänge 0 und führt zu dem Charakterlabel $[n-r-2, 1^r]$ (falls $n-3 \geq r$), und der andere hat Beinlänge 1 und führt zu $[n-r, 1^{r-2}]$ (falls $r-2 \geq 0$). Mit der Konvention $\binom{a}{b} = 0$ für $b < 0$ oder $b > a$ liefert die Murnaghan-Nakayama-Formel (2.3.2) in jedem Fall

$$\chi^\gamma(s) = \binom{n-3}{r} - \binom{n-3}{r-2} = \frac{n-1-2r}{n-1} \binom{n-1}{r},$$

nach der bereits bestimmten Formel für den Grad $\chi^\gamma(1)$. □

2.4. Die Littlewood-Richardson-Regel.

Die Littlewood-Richardson-Regel beschreibt Beziehungen zwischen Charakteren verschiedener symmetrischer Gruppen. Dazu muß zuerst der Begriff der Lattice Permutation erklärt werden.

DEFINITION 2.4.1. Eine *Lattice Permutation* ist eine Folge von positiven ganzen Zahlen, in der für jedes i und jedes j die Anzahl der Symbole i unter den ersten j Folgengliedern immer größer oder gleich der Anzahl der Symbole $i+1$ ist.

Sei also γ eine Partition von n , α eine Partition von $n-k$, β eine Partition von k und $g_{\alpha\beta}^\gamma$ die Vielfachheit des Charakters $\chi^\alpha \times \chi^\beta$ in der Einschränkung des Charakters χ^γ von S_n auf $S_{n-k} \times S_k$.

SATZ 2.4.2 (Littlewood-Richardson-Regel). Für Partitionen α von $n-k$, β von k und γ von n ist $g_{\alpha\beta}^\gamma$ die Anzahl der schiefen Semistandardtableaux der Form $\gamma \setminus \alpha$ mit Inhalt β , deren Einträge zeilenweise von rechts nach links gelesen eine Lattice Permutation ergeben.

Insbesondere ist $g_{\alpha\beta}^\gamma = 0$, wenn $\alpha \not\leq \gamma$.

BEWEIS. [23], (2.8.13). □

2.5. Die Iwahori-Hecke-Algebra.

Hier und in den folgenden Kapiteln bezeichnen wir mit H_n die Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A_{n-1} . Wir werden später sehen, daß sie als Unter algebra auch eine entscheidende Rolle in den Algebren vom Typ B und D spielt. Da die Erzeuger s_i der Weylgruppe vom Typ A_{n-1} alle konjugiert sind, sind die Unbestimmten q_{s_i} nach Abschnitt 1.2 alle identisch und werden mit q bezeichnet.

Seien $A = \mathbb{Z}[q]$ und K der Quotientenkörper von A . Die Iwahori-Hecke-Algebra H_n wird als K -Algebra von Elementen T_{s_i} , $i = 1, \dots, n-1$, erzeugt bezüglich der folgenden Relationen.

$$\begin{aligned} T_{s_i}^2 &= qT_1 + (q-1)T_{s_i} && \text{für } i = 1, \dots, n-1, \\ T_{s_i}T_{s_{i+1}}T_{s_i} &= T_{s_{i+1}}T_{s_i}T_{s_{i+1}} && \text{für } i = 1, \dots, n-2, \text{ und} \\ T_{s_i}T_{s_j} &= T_{s_j}T_{s_i} && \text{für } |i-j| > 1. \end{aligned}$$

H_n ist halbeinfach und K ist Zerfällungskörper für H_n (s. [21], (2.2.14)).

Zu einer Partition γ von n bezeichnen wir mit χ_γ^Y den irreduziblen Charakter von H_n , der zu dem Charakter $\chi_1^Y = \chi^\gamma$ von S_n spezialisiert.

Sei $k \leq n$. Dann ist mit diesen Bezeichnungen $H_{n-k} = \langle T_{s_1}, \dots, T_{s_{n-k-1}} \rangle$. Weiter bezeichnen wir mit H'_k das Erzeugnis von $T_{s_{n-k+1}}, \dots, T_{s_{n-1}}$. Damit ist $H'_k \cong H_k$ und $\langle H_{n-k}, H'_k \rangle \cong H_{n-k} \otimes H_k$ eine Unter algebra von H_n , die der Young-Untergruppe $S_{n-k} \times S_k$ in S_n entspricht.

Da die Einschränkung mit der Spezialisierung verträglich ist, gilt auch hier

$$\chi_q^Y|_{\langle H_{n-k}, H'_k \rangle} = \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta}^Y \chi_q^\alpha \chi_q^\beta,$$

wobei über alle Partitionen α von $n-k$ und alle Partitionen β von k mit den durch die Littlewood-Richardson-Regel gegebenen Vielfachheiten $g_{\alpha\beta}^Y$ summiert wird. Die Summe braucht sich allerdings nur über diejenigen α mit $\alpha \subseteq \gamma$ zu erstrecken, da $g_{\alpha\beta}^Y = 0$, falls $\alpha \not\subseteq \gamma$. Zu einer Partition $\alpha \subseteq \gamma$ sei

$$\chi_q^{\gamma \setminus \alpha} = \sum_{\beta} g_{\alpha\beta}^Y \chi_q^\beta \quad \text{und damit} \quad \chi_q^Y|_{\langle H_{n-k}, H'_k \rangle} = \sum_{|\gamma \setminus \alpha| = k} \chi_q^\alpha \chi_q^{\gamma \setminus \alpha},$$

wobei über alle Partitionen α von $n-k$ mit $\alpha \subseteq \gamma$ summiert wird. In Abschnitt 3.8 sehen wir, wie diese Zerlegung der Einschränkung von χ_q^γ auf $\langle H_{n-k}, H'_k \rangle$ von der Zerlegung einer bestimmten Matrixdarstellung kommt.

Wir werten χ^γ nun auf einem Coxeter-Element von H_n aus und können damit in Abschnitt 2.7 eine Murnaghan-Nakayama-Formel zur Bestimmung der Charaktertafel von H_n herleiten.

2.6. Charakterwerte auf Coxeter-Elementen.

Ein *Coxeter-Element* einer Weylgruppe (W, S) ist ein Produkt aller $s \in S$ in einer beliebigen Reihenfolge. In der symmetrischen Gruppe S_n sind die Coxeter-Elemente n -Zykel. Das folgende Lemma zeigt eine wichtige Eigenschaft des Coxeter-Elements $s_1 \cdots s_{n-1}$, die man in S_n nicht sieht.

LEMMA 2.6.1. *Sei $c = s_1 \cdots s_{n-1} \in S_n$. Dann ist T_c^n zentral in H_n .*

BEWEIS. Durch bloßes Anwenden der Zopfrelationen erhält man für $i < n-1$

$$T_c T_{s_i} = T_{s_1} \cdots T_{s_i} T_{s_{i+1}} T_{s_i} T_{s_{i+2}} T_{s_{n-1}} = T_{s_1} \cdots T_{s_{i-1}} T_{s_{i+1}} T_{s_i} T_{s_{i+1}} T_{s_{n-1}} = T_{s_{i+1}} T_c.$$

Daraus folgt $T_c^2 T_{s_{n-1}} = T_{s_1} T_c^2$ und $T_c^i T_{s_i} = T_{s_{i+j}} T_c^j$ für $i+j \leq n-1$. Damit ist

$$T_c^n T_{s_i} = T_c^{i+1} T_{s_{n-1}} T_c^{n-1-i} = T_c^{i-1} T_{s_i} T_c^{n-i+1} = T_{s_i} T_c^n$$

für jedes $i = 1, \dots, n-1$, also T_c^n zentral in H_n . $\square$

Sei $\chi_q = \chi_q^\gamma$ ein irreduzibler Charakter von H_n . Die folgende Berechnung führen wir in einem algebraischen Abschluß von K durch. Das zentrale Element T_c^n operiert in der zugehörigen irreduziblen Darstellung von H_n als Skalar, hat also nur einen Eigenwert ρ^n . Damit sind die Eigenwerte von T_c von der Form $\zeta^j \rho$, $j \in \{0, \dots, n-1\}$, für eine primitive n -te Einheitswurzel ζ . Für die Determinante von T_c gilt dann

$$(1) \quad \det_{\chi_q}(T_c) = \rho^{X(1)} \zeta^m$$

für eine positive ganze Zahl m . Andererseits ist die Determinante von T_c aber auch das Produkt der Determinanten der Faktoren von $T_c = T_{s_1} \cdots T_{s_{n-1}}$, also

$$\det_{\chi_q}(T_c) = \prod_{i=1}^{n-1} \det_{\chi_q}(T_{s_i}) = \det_{\chi_q}(T_{s_1})^{n-1}.$$

Wegen

$$(T_s - q)(T_s + 1) = 0$$

für $s \in S$ sind q und -1 die einzig möglichen Eigenwerte für T_s mit Vielfachheiten, sagen wir, a und b . Dann ist $a + b = \chi(1)$ und $a - b = \chi(s)$, also

$$a = \frac{\chi(1) + \chi(s)}{2} \quad \text{und} \quad b = \frac{\chi(1) - \chi(s)}{2}.$$

Damit haben wir

$$\det_{\chi_q}(T_c) = (-1)^{(n-1)b} q^{(n-1)a}$$

und ein Vergleich mit der ersten Determinantenformel (1) ergibt

$$\rho = \xi q^{(n-1)a/\chi(1)}$$

für eine Einheitswurzel ξ . Damit ist der Charakterwert

$$\chi_q(T_c) = Z q^{(n-1)a/\chi(1)}$$

für eine Summe Z von Einheitswurzeln. Die Spezialisierung $q \mapsto 1$ zeigt

$$Z = \chi(c) = \chi([n]),$$

ein Charakterwert in der Weylgruppe. Nun ist aber nach (2.3.3) $\chi^\gamma([n]) = 0$ (und damit auch $\chi_q^\gamma(T_c) = 0$), es sei denn $\gamma = [n-r, 1^r]$ für ein $0 \leq r \leq n-1$. In diesem Fall ist $\chi^\gamma([n]) = (-1)^r$, und nach Lemma (2.3.5) ist

$$\frac{(n-1)a}{\chi^\gamma(1)} = \frac{(n-1)(\chi^\gamma(1) + \chi^\gamma(s))}{2\chi^\gamma(1)} = \frac{(n-1)}{2} \left(1 + \frac{n-1-2r}{n-1} \right) = n-r-1.$$

Damit haben wir folgende Formel bewiesen.

SATZ 2.6.2. Sei γ eine Partition von n . Dann ist

$$\chi_q^\gamma(T_{s_1} \cdots T_{s_{n-1}}) = \begin{cases} (-1)^r q^{n-r-1} & \text{falls } \gamma = [n-r, 1^r], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkungen. Die hier vorgeführte Betrachtung der Determinanten zur Bestimmung eines Charakterwerts von H wurde zuerst von Springer (s. [13]) in dem Fall vorgenommen, daß T_{w_0} zentral in H (und w_0 das längste Element in W) ist. Später hat Lusztig (s. [27] (11.6)) ausgenutzt, daß man durch zusätzliches Wurzelziehen auch den Charakterwert eines Elements T_w bestimmen kann, welches die Eigenschaft hat, daß eine Potenz von T_w gleich T_{w_0} und zentral in H ist. Broué und Michel [6] haben diese Technik weiter ausgearbeitet. In Anlehnung an [35] nennen sie solche Elemente $w \in W$, für die eine Potenz von T_w zentral in H ist, reguläre Elemente.

In [30] folgt der obige Satz (2.6.2) aus einer allgemeinen Formel für Werte von Young-Charakteren auf Coxeter-Basiselementen einer Iwahori-Hecke-Algebra.

In Abschnitt 3.10 wird diese Strategie in einer etwas anderen Situation noch einmal angewendet.

2.7. Die Charaktertafel der Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A.

Dieser Abschnitt wurde aus [30] übernommen. Hier wird das Ergebnis aus dem vorhergehenden Abschnitt auf die Unter algebra H_k^* angewendet. Dies bildet den wichtigsten Schritt in der Herleitung einer Murnaghan-Nakayama-Formel für Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ A. Der Beweis folgt dem der Murnaghan-Nakayama-Formel für symmetrische Gruppen in [26]. Wir kommen in Abschnitt 3.9 auf diesen Beweis zurück und weisen dort nach, daß das folgende Lemma und Satz (2.7.2) auch in Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ B gelten.

Sei also $k \leq n$ fest,

$$k = s_{n-k+1} \cdots s_{n-1} \quad \text{und damit} \quad T_k = T_{s_{n-k+1}} \cdots T_{s_{n-1}}.$$

LEMMA 2.7.1. Für eine Partition γ von n und eine Partition α von $n - k$ ist

$$\chi_q^{\gamma \setminus \alpha}(T_\kappa) = \begin{cases} (q-1)^{c_\alpha^\gamma - 1} (-1)^{l_\alpha^\gamma} q^{k - l_\alpha^\gamma - c_\alpha^\gamma}, & \text{falls } \gamma \setminus \alpha \text{ ein Streifen ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEWEIS. Als Charakter von H'_k ist $\chi_q^{\gamma \setminus \alpha} = \sum_{\beta} g_{\alpha\beta}^\gamma \chi_q^\beta$, wobei über alle Partitionen β von k summiert wird, und die Koeffizienten $g_{\alpha\beta}^\gamma$ durch die Littlewood-Richardson-Regel (2.4.2) gegeben sind.

Nach (2.6.2) gilt für das Coxeter-Element $\kappa \in \langle s_{n-k+1}, \dots, s_{n-1} \rangle \cong S_k$, daß $\chi_q^\beta(T_\kappa) = 0$, es sei denn $\beta = [k-r, 1^r]$ für ein $r \leq k-1$. In dem Fall ist

$$\chi_q^\beta(T_\kappa) = (-1)^r q^{k-r-1}.$$

Deshalb ist

$$\chi_q^{\gamma \setminus \alpha}(T_\kappa) = \sum_{r=0}^{k-1} g_{\alpha, [k-r, 1^r]}^\gamma (-1)^r q^{k-r-1}.$$

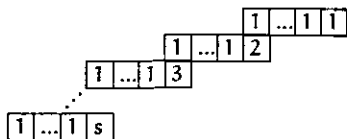
Nach (2.4.2) ist die Vielfachheit $g_{\alpha\beta}^\gamma$ gleich der Anzahl der schiefen Semistandardtableaux der Form $\gamma \setminus \alpha$ mit Inhalt β , die zeilenweise von rechts nach links gelesene Lattice Permutationen ergeben. Für $\beta = [k-r, 1^r]$ müssen also $k-r$ Symbole 1 und die Symbole $2, \dots, r+1$ in einem Diagramm der Form $\gamma \setminus \alpha$ verteilt werden. Das kann keine Lattice Permutation ergeben, wenn $\gamma \setminus \alpha$ einen 2×2 -Block enthält. Deshalb ist $g_{\alpha, [k-r, 1^r]}^\gamma = 0$, wenn $\gamma \setminus \alpha$ kein Streifen ist.

Sei also $\gamma \setminus \alpha$ ein Streifen. Dann schreiben wir

$$G(\gamma, \alpha) := \sum_{r=0}^{k-1} g_{\alpha, [k-r, 1^r]}^\gamma (-1)^r q^{k-r-1} = \sum_T (-1)^{r(T)} q^{k-r(T)-1}$$

als Summe über alle der Littlewood-Richardson-Regel entsprechenden Tableaux T der Form $\gamma \setminus \alpha$, wobei $r(T) = r$ für ein Tableau T mit Inhalt $\beta = [k-r, 1^r]$.

Da $\gamma \setminus \alpha$ ein Streifen ist, sind die Zusammenhangskomponenten eines solchen Tableaux Haken. Der erste davon hat die folgende Gestalt.

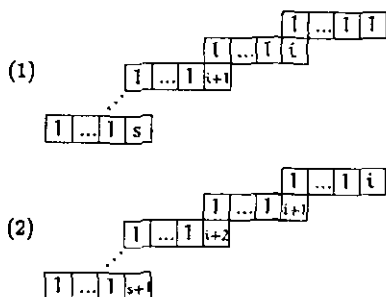


Wenn $\gamma \setminus \alpha$ zusammenhängend ist, gibt es nur ein zulässiges Tableau dieser Form mit $r(T) = l_\alpha^\gamma = s - 1$. Dann ist

$$G(\gamma, \alpha) = (-1)^{l_\alpha^\gamma} q^{k - l_\alpha^\gamma - 1},$$

womit die Behauptung für diesen Fall bewiesen ist.

Wenn $\gamma \setminus \alpha$ aus mehr als einer Zusammenhangskomponente besteht, dann haben die verbleibenden Komponenten eine der beiden folgenden Gestalten.



Nun betrachte man das Diagramm $\gamma \setminus \alpha'$, welches bis auf eine (die letzte) aus allen Zusammenhangskomponenten von $\gamma \setminus \alpha$ besteht, für eine passende Partition α' . Per Induktion nach der Anzahl der Zusammenhangskomponenten c_α^γ gilt

$$G(\gamma, \alpha') = \sum_{T'} (-1)^{r(T')} q^{k-r(T')-1} = (q-1)^{c_{\alpha'}^\gamma - 1} (-1)^{l_{\alpha'}^\gamma} q^{k'-c_{\alpha'}^\gamma - l_{\alpha'}^\gamma},$$

wobei $k' = |\gamma \setminus \alpha'|$ und die Summe über alle zulässigen Tableaux T' für $\gamma \setminus \alpha'$ entsprechend der Littlewood-Richardson-Regel läuft. Offensichtlich ist $c_{\alpha'}^\gamma = c_\alpha^\gamma - 1$.

Zu jedem zulässigen Tableau T' in der Summe $G(\gamma, \alpha')$ gehören genau zwei Tableaux T_1 und T_2 der Form $\gamma \setminus \alpha$. Dabei bestehen sowohl T_1 als auch T_2 aus T' und einer zusätzlichen Zusammenhangskomponente, welche für T_1 von der Gestalt (1) und für T_2 von der Gestalt (2) ist. Damit ist $r(T_2) = r(T_1) + 1$. Ihr Beitrag zu der Summe $G(\gamma, \alpha)$ ist

$$\begin{aligned} & (-1)^{r(T_1)} q^{k-r(T_1)-1} + (-1)^{r(T_2)} q^{k-r(T_2)-1} = (q-1) \{-1\}^{r(T_1)} q^{k-r(T_1)-2} \\ & = (-1)^{r(T')} q^{k'-r(T')-1} \cdot (q-1) \cdot (-1)^{r(T_1)-r(T')} q^{k-k'-r(T_1)+r(T')-1}, \end{aligned}$$

ein Vielfaches des Beitrags von T' zu $G(\gamma, \alpha')$. Schließlich ist $r(T_1) - r(T') = l_\alpha^\gamma - l_{\alpha'}^\gamma$, unabhängig von T' und die Summation über alle zulässigen Tableaux T' der Form $\gamma \setminus \alpha'$ ergibt deshalb

$$\begin{aligned} G(\gamma, \alpha) &= G(\gamma, \alpha') (q-1) \{-1\}^{l_\alpha^\gamma - l_{\alpha'}^\gamma} q^{k-k'-l_\alpha^\gamma + l_{\alpha'}^\gamma - 1} \\ &= (q-1)^{c_\alpha^\gamma - 1} (-1)^{l_\alpha^\gamma} q^{k-l_\alpha^\gamma - c_\alpha^\gamma}, \end{aligned}$$

womit die Behauptung auch in diesem Fall bewiesen ist. $\square$

Wir können diese Ergebnisse nun zum Hauptsatz dieses Kapitels zusammenfassen (s. [30] (3.2) und vgl. [31] (6.7)). Für ein Element $w \in S_n$ mit Zykstruktur π und minimaler Länge in dieser Konjugiertenklasse und einen irreduziblen Charakter χ_q^γ von H_n ist der Charakterwert $\chi_q^\gamma(T_w)$ nach Definition (1.4.2) ein Eintrag in der Charaktertafel von H_n und wird kurz mit $\chi_q^\gamma(\pi)$ bezeichnet. Wie vorher setzen wir $\chi_q^{(1)} = 1$.



HAUPTSATZ 2.7.2. Seien π und γ Partitionen von n und $w \in S_n$ ein Element minimaler Länge in der Klasse der Elemente mit Zykstruktur π . Weiter sei $k = \pi_i$ für ein $i \leq l(\pi)$ und $\rho = (\pi_1, \dots, \pi_{i-1}, \pi_{i+1}, \dots, \pi_{l(\pi)})$. Dann ist der Wert $\chi_q^\gamma(\pi)$ des Charakters χ_q^γ auf T_w gegeben durch

$$\chi_q^\gamma(\pi) = \sum_{|\gamma \setminus \alpha| = k} (q-1)^{c_\alpha - 1} (-1)^{l_\alpha} q^{k - l_\alpha - c_\alpha} \chi_q^\alpha(\rho),$$

wobei über alle Partitionen α von $n-k$ summiert wird, für die $\gamma \setminus \alpha$ ein Streifen ist.

BEWEIS. Sei $w' \in S_{n-k}$ ein Element minimaler Länge in der Klasse der Elemente mit Zykstruktur ρ . Dann hat $w'\kappa$ Zykstruktur π und minimale Länge in dieser Klasse. Nach (1.4.1) ist somit $\chi_q^\gamma(T_w) = \chi_q^\gamma(T_{w'}T_\kappa)$. Und da $T_{w'} \in H_{n-k}$ und $T_\kappa \in H'_k$, ist nach Abschnitt 2.5

$$\chi_q^\gamma(T_{w'}T_\kappa) = \sum_{|\gamma \setminus \alpha| = k} \chi_q^\alpha(T_{w'}) \chi_q^{\gamma \setminus \alpha}(T_\kappa).$$

Der Wert eines Charakters χ_q^α von H_{n-k} auf $T_{w'}$ ist $\chi_q^\alpha(\rho)$ und $\chi_q^{\gamma \setminus \alpha}(T_\kappa)$ ist nach Lemma (2.7.1) bestimmt und nur dann ungleich 0, wenn $\gamma \setminus \alpha$ ein Streifen ist. $\square$

Als Beispiel geben wir in Tabelle 1 die Charaktertafel der Iwahori-Hecke-Algebra H_4 vom Typ A_3 an. Weitere Tafeln befinden sich im Anhang. Die Zeilen dieser Tabelle ent-

H_4	$[1^4]$	$[21^2]$	$[2^2]$	$[31]$	$[4]$
	1	s_1	$s_1 s_3$	$s_1 s_2$	$s_1 s_2 s_3$
$[1^4]$	1	-1	1	1	-1
$[21^2]$	3	$q-2$	$-2q+1$	$-q+1$	q
$[2^2]$	2	$q-1$	q^2+1	$-q$	0
$[31]$	3	$2q-1$	q^2-2q	q^2-q	$-q^2$
$[4]$	1	q	q^2	q^2	q^3

TABELLE 1. Die Charaktertafel der Iwahori-Hecke-Algebra H_4 .

sprechen den irreduziblen Charakteren der Iwahori-Hecke-Algebra und die Spalten den Konjugiertenklassen der Weylgruppe. Für jede Klasse ist zusätzlich noch ihr Standardrepräsentant angegeben. Hier ist jede Konjugiertenklasse und jeder Charakter durch seine Partition vertreten.

2.8. Beziehungen zwischen gewissen Spezialisierungen.

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Beziehungen zwischen den Werten der Charaktere χ^α , χ_q^α und $\chi_{q^2}^\alpha$. Die Beziehung zwischen χ^α und χ_q^α wurde bereits von Starkey [36] studiert (vgl. [10]).

Zu einer Partition $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots]$ von n definieren wir ein Polynom Φ^α als

$$\Phi^\alpha(q) = \prod_{i=1}^{l(\alpha)} (q^{\alpha_i} - 1).$$

Weiter sei auch π eine Partition von n und

$$Q_q^\alpha(\pi) = \frac{\Phi^\alpha(q)}{(q-1)^{l(\pi)}} 1_{S_n}^{\pi}(\alpha).$$

Dann ist $Q_q^\alpha(\pi)$ das $1_{S_n}^{\pi}(\alpha)$ -fache des charakteristischen Polynoms eines Elements mit Zykelstruktur α in der Spiegelungsdarstellung der Young-Untergruppe S_π von S_n .

Nach Starkey läßt sich mittels der $Q_q^\alpha(\pi)$ jede Spalte der Charaktertafel von H_n als Linearkombination der Spalten der Charaktertafel von S_n darstellen. Hier bezeichnet $C(\alpha)$ die Ordnung des Zentralisators eines Elements mit Zykelstruktur α in S_n .

SATZ 2.8.1. Für Partitionen γ und π von n gilt

$$\chi_q^\gamma(\pi) = \sum_{\alpha} \frac{1}{C(\alpha)} Q_q^\alpha(\pi) \chi^\gamma(\alpha),$$

wobei über alle Partitionen α von n summiert wird.

BEWEIS. [36] (5.3.9), s. [10] und vgl. [31] (5.4). □

FOLGERUNG 2.8.2. $Q_q^\alpha(\pi) = \sum_{\gamma} \chi^\gamma(\alpha) \chi_q^\gamma(\pi).$

BEWEIS. Man multipliziere beide Seiten in (2.8.1) mit $\chi^\gamma(\sigma)$ für eine Partition σ von n , summiere über alle Partitionen γ von n , verwende die 2. Orthogonalitätsrelation und substituiere σ durch α . □

Für $n = 4$ ergibt sich Tabelle 2 als Matrix der Werte $Q_q^\alpha(\pi)$. Hierbei bezeichnet α die Zeile und π die Spalte der Matrix. Bezeichnet man die Charaktertafel der symmetrischen

	$[1^4]$	$[21^2]$	$[2^2]$	$[31]$	$[4]$
$[1^4]$	24	$12(q-1)$	$6(q-1)^2$	$4(q-1)^2$	$(q-1)^3$
$[21^2]$	0	$2(q+1)$	$2(q^2-1)$	$2(q^2-1)$	$(q^2-1)(q-1)$
$[2^2]$	0	0	$2(q+1)^2$	0	$(q^2-1)(q+1)$
$[31]$	0	0	0	q^2+q+1	(q^3-1)
$[4]$	0	0	0	0	$(q+1)(q^2+1)$

TABELLE 2. Die Werte $Q_q^\alpha(\pi)$ für $n = 4$.

Gruppe S_4 mit X und die der Iwahori-Hecke-Algebra H_4 mit X_q , dann ist diese Matrix hier $X^{tr} X_q$.

Wir untersuchen nun die Beziehung zwischen Q_q^α und $Q_{q^2}^\alpha$. Nach Definition ist

$$(q-1)^{l(\pi)} Q_q^\alpha(\pi) = 1_{S_n}^{\pi}(\alpha) \Phi^\alpha(q) \quad \text{und} \quad (q^2-1)^{l(\pi)} Q_{q^2}^\alpha(\pi) = 1_{S_n}^{\pi}(\alpha) \Phi^\alpha(q^2).$$

Damit ist

$$(q+1)^{l(\pi)} Q_q^\alpha(\pi) = (q-1)^{-l(\pi)} \Phi^\alpha(q) 1_{S_\pi}^{\alpha}(\alpha) \prod_j (q^{\alpha_j} + 1).$$

LEMMA 2.8.3. Für Partitionen α und π von n gilt

$$1_{S_\pi}^{\alpha}(\alpha) \prod_{j=1}^{l(\alpha)} (q^{\alpha_j} + 1) = \sum_{m=0}^n \left(\sum_{\mu} 1_{S_{\pi+\mu}}^{\alpha}(\alpha) \right) q^m,$$

wobei jeweils über alle Kompositionen μ von m mit $\mu \subseteq \pi$ summiert wird.

BEWEIS. Mit Mackeys Tensorproduktsatz (s. [14] (44.3)) läßt sich zeigen, daß für $m \leq n$

$$1_{S_\pi}^{\alpha} \otimes 1_{S_{n-m} \times S_m}^{\alpha} = \sum_{\mu} 1_{S_{\pi+\mu} \times S_m}^{\alpha},$$

wobei über alle Kompositionen μ von m mit $\mu \subseteq \pi$ summiert wird ([23] (2.3.10)). Weiter ist

$$\prod_{j=1}^{l(\alpha)} (q^{\alpha_j} + 1) = \sum_{m=0}^n 1_{S_{n-m} \times S_m}^{\alpha}(\alpha) q^m,$$

da

$$1_{S_{n-m} \times S_m}^{\alpha}(\alpha) = \left| \left\{ I \subseteq \{1, \dots, l(\alpha)\} \mid \sum_{j \in I} \alpha_j = m \right\} \right|.$$

Damit folgt die Behauptung aus der Tatsache, daß $S_{\pi+\mu} \times S_m \cong S_{\pi+\mu}$. □

SATZ 2.8.4. Für Partitionen α und π von n gilt

$$(q+1)^{l(\pi)} Q_q^\alpha(\pi) = \sum_{\mu \subseteq \pi} q^{|\mu|} (q-1)^{l(\pi+\mu)-l(\pi)} Q_q^\alpha(\pi + \mu),$$

wobei über alle Kompositionen $\mu \subseteq \pi$ summiert wird.

BEWEIS. Nach Lemma (2.8.3) haben wir

$$\begin{aligned} (q+1)^{l(\pi)} Q_q^\alpha(\pi) &= (q-1)^{-l(\pi)} \Phi^\alpha(q) \left(\sum_{m=0}^n \left(\sum_{\mu} 1_{S_{\pi+\mu}}^{\alpha}(\alpha) \right) q^m \right) \\ &= \sum_{\mu \subseteq \pi} q^{|\mu|} (q-1)^{-l(\pi)} \Phi^\alpha(q) 1_{S_{\pi+\mu}}^{\alpha}(\alpha), \end{aligned}$$

wobei über alle Kompositionen $\mu \subseteq \pi$ summiert wird. Ein Vergleich mit der Definition von $Q_q^\alpha(\pi)$ liefert die Behauptung. □

Als Folgerung erhalten wir dieselbe Formel für die Charakterwerte $\chi_q^\lambda(\pi)$. Diese Formel erweist sich in Kapitel 4 als Schlüssel zur Berechnung der Charakterwerte der Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ D.

FOLGERUNG 2.8.5. Für Partitionen γ und π von n gilt

$$(q+1)^{l(\pi)} \chi_{q^2}^\gamma(\pi) = \sum_{\mu \subseteq \pi} q^{|\mu|} (q-1)^{l(\pi \div \mu) - l(\pi)} \chi_q^\gamma(\pi \div \mu),$$

wobei über alle Kompositionen $\mu \subseteq \pi$ summiert wird.

BEWEIS. Nach Satz (2.8.1) ist

$$\chi_q^\gamma(\pi) = \sum_{\alpha} \frac{1}{C(\alpha)} Q_{\alpha}^{\alpha}(\pi) \chi^\gamma(\alpha) \quad \text{und} \quad \chi_{q^2}^\gamma(\pi) = \sum_{\alpha} \frac{1}{C(\alpha)} Q_{q^2}^{\alpha}(\pi) \chi^\gamma(\alpha).$$

So folgt die Behauptung durch Multiplikation beider Seiten in (2.8.4) mit $\frac{1}{C(\alpha)} \chi^\gamma(\alpha)$ und anschließende Summation über alle Partitionen α von n . $\square$

Mittels dieser Formel läßt sich ein Charakterwert $\chi_{q^2}^\gamma(\pi)$ als Linearkombination der Werte von χ_q^γ schreiben. So gibt es z. B. für $\pi = [3, 1]$ acht Kompositionen μ mit $\mu \subseteq \pi$ ($\mu = [\mu_1]$ oder $[\mu_1, 1]$ für $\mu_1 = 0, 1, 2$, oder 3). Die möglichen Partitionen $\pi \div \mu$ sind in diesem Fall $[2, 1^2]$ und $[3, 1]$, und für jede Partition γ von 4 gilt

$$\chi_{q^2}^\gamma([3, 1]) = q(q-1) \chi_q^\gamma([2, 1^2]) + (q^2 - q + 1) \chi_q^\gamma([3, 1]).$$

Im allgemeinen können hier auch Potenzen von $(q+1)$ als Nenner der Koeffizienten auftauchen. Insgesamt erhalten wir für $n = 4$ die in Tabelle 3 angegebene Wertematrix. Mit der Bezeichnung X_q für die Charaktertafel der Iwahori-Hecke-Algebra H_q mit Pa-

	$[1^4]$	$[21^2]$	$[2^2]$	$[31]$	$[4]$
$[1^4]$	1	$\frac{q(q-1)}{q+1}$	$\frac{(q-1)^2 q^2}{(q+1)^2}$	0	0
$[21^2]$	0	$\frac{q^2+1}{q+1}$	$\frac{(2q-2)(q^2+1)q}{(q+1)^2}$	$q(q-1)$	0
$[2^2]$	0	0	$\frac{(q^2+1)^2}{(q+1)^2}$	0	$\frac{q^2(q-1)}{q+1}$
$[31]$	0	0	0	$q^2 - q + 1$	$\frac{(q-1)(q^2+1)q}{q+1}$
$[4]$	0	0	0	0	$\frac{q^4+1}{q+1}$

TABELLE 3. $\chi_{q^2}^\gamma(\pi)$ als Linearkombination von $\chi_q^\gamma(\mu)$ für $n = 4$.

rameter q ist die Matrix der Koeffizienten hier $X_q^{-1} X_{q^2}$. Das oben berechnete Beispiel findet man in der mit $[31]$ bezeichneten Spalte wieder.

KAPITEL 3

Kranzprodukte und Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ B.

Dieses Kapitel enthält die zur Berechnung der Charaktertafel der Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ B_n nötigen Begriffe und Sätze. Die Weylgruppe W vom Typ B_n wird mit einigen ihrer Eigenschaften in Abschnitt 3.4 vorgestellt. W ist ein Kranzprodukt einer zyklischen mit einer symmetrischen Gruppe. Diese Kranzprodukte werden allgemein in Abschnitt 3.2, ihre Charaktere in Abschnitt 3.3 behandelt.

Die Iwahori-Hecke-Algebra H vom Typ B_n wird in Abschnitt 3.6 als Deformation der Gruppenalgebra eines Kranzprodukts und damit als *zyklotomische Algebra* eingeführt. Abschnitt 3.7 stellt die von Ariki und Koike [2] als Verallgemeinerung eines Verfahrens von Hoefsmit [21] entwickelten Matrixdarstellungen für diese Algebren vor.

Die Charaktertafel der Iwahori-Hecke-Algebra H wird durch Satz (3.11.1) beschrieben. Die Strategie zum Beweis dieser Formel besteht ähnlich wie in Kapitel 2 im wesentlichen aus der Einschränkung auf gewisse Unteralgebren. Dazu stellt (3.8.3) eine allgemeine Formel zur Berechnung des eingeschränkten Charakters aus Charakteren kleinerer Algebren bereit. Der Charakter wird auf einem Coxeter-Element einer Teilalgebra explizit ausgewertet, wobei hier (im Gegensatz zu Kapitel 2) zwei sehr verschiedene Fälle auseinander gehalten werden müssen.

Abschnitt 3.9 behandelt den ersten Fall, den der Einschränkung auf eine Unteralgebra vom Typ $B \times A$, welcher im wesentlichen auf Abschnitt 2.7 zurückgeführt werden kann. Dies ist möglich, weil in diesem Fall eine passende Littlewood-Richardson-Regel gilt, die in Abschnitt 3.5 hergeleitet wird.

Der andere Fall, die Einschränkung auf eine Unteralgebra vom Typ $B \times B$, wird in Abschnitt 3.10 behandelt. Hier ist zu bemerken, daß man in der Iwahori-Hecke-Algebra im Unterschied zur entsprechenden Weylgruppe im allgemeinen keine Unteralgebra vom Typ $B \times B$ im eigentlichen Sinne findet. Dennoch ist diese Sprechweise gerechtfertigt.

Das Kapitel beginnt mit Verallgemeinerungen der in Abschnitt 2.1 eingeführten Begriffe.

3.1. Tupel von Partitionen und weitere Grundbegriffe.

Ein r -Tupel von Partitionen von n ist eine Folge $\gamma = (\gamma^0, \dots, \gamma^{r-1})$ von r Partitionen mit $\sum_{i=0}^{r-1} |\gamma^i| = n$. Viele der Begriffe aus Abschnitt 2.1 in Kapitel 2 lassen sich in natürlicher Weise auf r -Tupel von Partitionen verallgemeinern. Ein 2-Tupel von Partitionen heißt auch *Doppelpartition*.

Das r -Tupel von Partitionen γ wird durch das r -Tupel der Diagramme zu den γ^i dargestellt. Dieses Diagramm wird auch mit γ bezeichnet. Wenn α und γ r -Tupel von Partitionen mit $\alpha^i \subseteq \gamma^i$ für $i = 0, \dots, r-1$ sind, schreiben wir $\alpha \subseteq \gamma$. In diesem Fall bildet die mengentheoretische Differenz $\gamma \setminus \alpha$ wieder ein *schiefes Diagramm*. Ein *Streifen* $\gamma \setminus \alpha$ enthält keine 2×2 -Blöcke, und ein *Haken* ist ein zusammenhängender Streifen. Für einen Haken $\gamma \setminus \alpha$ gilt $\alpha^i = \gamma^i$ für bis auf $i = \tau(\gamma \setminus \alpha)$ alle $0 \leq i \leq r-1$. Das heißt, $\tau(\gamma \setminus \alpha)$ bezeichnet die Position derjenigen Komponente des r -Tupels von Partitionen γ , die den Haken $\gamma \setminus \alpha$ (vollständig) enthält.

Ein zu einem r -Tupel von Partitionen γ gebildetes *Tableau* T ist ein r -Tupel $(T^0, \dots, T^{r-1})$ von gewöhnlichen Tableaux, wobei T^i die Form γ^i hat für $i = 0, \dots, r-1$. Ein solches Tableau heißt *Semistandardtableau*, wenn jede Komponente ein (gewöhnliches) Semistandardtableau ist, und es heißt *Standardtableau*, wenn es darüber hinaus jede der Zahlen $1, \dots, n$ genau einmal enthält.

Sei $k \leq n$ und α ein r -Tupel von Partitionen von $n-k$ mit $\alpha \subseteq \gamma$. Ein (schiefes) *Standardtableau* T der Form $\gamma \setminus \alpha$ ordnet jedem Kästchen des Diagramms $\gamma \setminus \alpha$ eine der Zahlen $n-k+1, \dots, n$ zu, so daß diese Zahlen entlang der Zeilen und der Spalten einer jeden Komponente von T monoton steigen.

Die Anzahl der Standardtableaux der Form γ (bzw. $\gamma \setminus \alpha$) wird mit f^γ (bzw. $f^{\gamma \setminus \alpha}$) bezeichnet.

Mit der Bezeichnung $ST(\gamma)$ für die Menge aller Standardtableaux der Form γ gilt

LEMMA 3.1.1. Sei $k \leq n$ und γ ein r -Tupel von Partitionen von n . Die Abbildung

$$ST(\gamma) \rightarrow \bigcup_{\gamma \setminus \alpha = k} ST(\alpha) \times ST(\gamma \setminus \alpha) \\ T \mapsto (T_1, T_2),$$

die jedes *Standardtableau* T der Form γ in den Teil T_1 , der die Zahlen $1, \dots, n-k$ enthält, und den Teil T_2 , der die Zahlen $n-k+1, \dots, n$ enthält, zerlegt, ist eine Bijektion.

BEWEIS. Da T ein *Standardtableau* ist, bilden die Stellen, an denen die Zahlen $1, \dots, n-k$ in T stehen, ein Diagramm $\alpha \subseteq \gamma$ für ein r -Tupel von Partitionen α von $n-k$.

Umgekehrt fügen sich ein *Standardtableau* der Form α und eins der Form $\gamma \setminus \alpha$ eindeutig zu einem *Standardtableau* der Form γ zusammen. $\square$

Wenn T ein *Standardtableau* ist, definieren wir $\tau(T: m)$ für jedes $m \leq n$ so, daß die Zahl m in der Komponente $T^{\tau(T: m)}$ von T steht. Der *Gehalt* von m ist wieder $c(T: m) = i-j$, wenn m dort in der i -ten Zeile und in der j -ten Spalte steht. Der *axiale Abstand* zweier Zahlen m_1 und m_2 in T ist $r(m_1, m_2) = c(T: m_2) - c(T: m_1)$.

Die symmetrische Gruppe S_n operiert auf der Menge aller Tableaux der Form γ mit Inhalt $[1^n]$ durch Vertauschen der Einträge. So entsteht für $s_i = (i, i+1)$ das Bild

$T(i, i+1)$ von T unter s_i aus T dadurch, daß die Zahlen i und $i+1$ in T ihre Plätze tauschen. Dabei ist das Bild $T(i, i+1)$ eines Standardtableaux T nur dann wieder ein Standardtableau, wenn i und $i+1$ in T weder in derselben Zeile noch in derselben Spalte einer Komponente von T stehen.

3.2. Kranzprodukte mit symmetrischen Gruppen.

Sei G eine endliche Gruppe mit r Konjugiertenklassen von Elementen, vertreten durch $(g_0, \dots, g_{r-1})$. Das Kranzprodukt von G mit der symmetrischen Gruppe S_n wird mit $X_n = G \wr S_n$ bezeichnet. Offensichtlich gilt $|G \wr S_n| = |G|^n n!$.

Die Elemente von X_n haben die Form $x = (f; \sigma) = (f_1, \dots, f_n; \sigma)$ mit $f_i \in G$, $i = 1, \dots, n$ und $\sigma \in S_n$. Zwei Elemente $x = (f; \sigma)$ und $y = (h; \rho)$ dieser Form werden wie folgt miteinander multipliziert.

$$xy = (f_1 h_{1\sigma}, \dots, f_n h_{n\sigma}; \sigma\rho)$$

Zu einem Element $x = (f; \sigma) \in X_n$ und einem k -Zykel $\kappa = (j, j\kappa, \dots, j\kappa^{k-1})$ von σ ist

$$g((f; \sigma), \kappa) = f_j f_{j\kappa} \cdots f_{j\kappa^{k-1}}$$

ein Element von G und heißt das *Zykelprodukt* von x und κ . Nun sei π die Zykelstruktur von $\sigma \in S_n$. Diese Partition wird nun nach folgendem Verfahren in r Partitionen $(\pi^0, \dots, \pi^{r-1})$ aufgespalten. Wenn das Zykelprodukt $g((f; \sigma), \kappa)$ in G zu g_i konjugiert ist, soll der der Zykellänge k von κ entsprechende Teil von π zu π^i gehören. Das resultierende r -Tupel von Partitionen von n ist die *Zykelstruktur* von $x = (f; \sigma)$, und es gilt derselbe Satz wie in der symmetrischen Gruppe.

SATZ 3.2.1. *Zwei Elemente von X_n sind genau dann konjugiert, wenn sie dieselbe Zykelstruktur haben.*

Beweis. [23] (4.2.8). □

Offensichtlich gibt es zu jedem r -Tupel von Partitionen von n auch ein Element $x \in X_n$ mit einer solchen Zykelstruktur. So sind die Konjugiertenklassen von X_n durch die r -Tupel von Partitionen von n parametrisiert.

3.3. Charaktere von Kranzprodukten.

Die r -Tupel von Partitionen von n parametrisieren auch die irreduziblen Charaktere von $X_n = G \wr S_n$. Der Charakter χ^α zu einem r -Tupel $\alpha = (\alpha^0, \dots, \alpha^{r-1})$ von Partitionen von n wird wie folgt konstruiert.

Dazu seien $\phi_0, \dots, \phi_{r-1}$ die irreduziblen Charaktere von G . Das äußere Tensorprodukt $\prod_{c=0}^{r-1} \phi_c^{|\alpha^c|}$ von jeweils $|\alpha^c|$ Kopien von ϕ_c , $c = 0, \dots, r-1$, ist ein irreduzibler Charakter des Normalteilers G^n von X_n . Er kann in natürlicher Weise zum Charakter

$$\prod_{c=0}^{r-1} \phi_c^{|\alpha^c|}$$

der Trägheitsgruppe

$$T_\alpha = T_{\alpha^0} \times \cdots \times T_{\alpha^{r-1}} \cong X_{|\alpha^0|} \times \cdots \times X_{|\alpha^{r-1}|}$$

fortgesetzt werden. Diese Fortsetzung von $\prod_{c=0}^{r-1} \phi_c^{|\alpha^c|}$ auf T_α wird mit dem irreduziblen Charakter $\prod_{c=0}^{r-1} \chi^{\alpha^c}$ des Trägheitsfaktors

$$T_\alpha/G^n \cong S_{|\alpha^0|} \times \cdots \times S_{|\alpha^{r-1}|}$$

tensoriert. Induzieren nach X_n liefert schließlich einen irreduziblen Charakter von X_n . Umgekehrt ist jeder irreduzible Charakter von X_n von der Form

$$\chi^\alpha = \left(\prod_{c=0}^{r-1} \overline{\phi_c^{|\alpha^c|}} \otimes \chi^{\alpha^c} \right)^{X_n}.$$

SATZ 3.3.1. Die Charaktere χ^α bilden ein vollständiges System paarweise verschiedener absolut irreduzibler Charaktere von X_n , wenn α alle r -Tupel von Partitionen von n durchläuft.

BEWEIS. [23] (4.4.3). □

Für Kranzprodukte $X_n = G \wr S_n$ gilt eine Verallgemeinerung der Murnaghan-Nakayama-Formel (2.3.2).

SATZ 3.3.2. Sei $\gamma = (\gamma^0, \dots, \gamma^{r-1})$ mit $\sum_i |\gamma^i| = n$ ein r -Tupel von Partitionen von n . Weiter sei $x_\pi \in X_n$ ein Element mit Zykelstruktur π für ein r -Tupel $\pi = (\pi^0, \dots, \pi^{r-1})$ von Partitionen von n . Für ein $t \in \{0, \dots, r-1\}$ enthalte die Partition π^t einen Teil k und ρ sei dasjenige r -Tupel von Partitionen, welches aus π durch Entfernen dieses Teils k entsteht, dazu $x_\rho \in X_{n-k}$ mit Zykelstruktur ρ und $\chi^{\rho^i} = 1$. Dann ist

$$\chi^\gamma(x_\pi) = \sum_{|\gamma \setminus \alpha| = k} \phi_s(g_t) (-1)^{l_\alpha} \chi^\alpha(x_\rho),$$

wobei über alle r -Tupel von Partitionen α von $n-k$ summiert wird, für die $\gamma \setminus \alpha$ ein Haken ist und $s = \tau(\gamma \setminus \alpha)$ jeweils die Position des Hakens in γ angibt.

BEWEIS. [29] (4.4), vgl [37] (4.3). □

Ist G eine zyklische Gruppe, dann vereinfacht sich die Formel wie folgt.

FOLGERUNG 3.3.3. Sei $X_n = C_r \wr S_n$ das Kranzprodukt der zyklischen Gruppe der Ordnung r mit der symmetrischen Gruppe S_n und ζ eine primitive r -te Einheitswurzel. Weiter seien γ und π r -Tupel von Partitionen von n , $k = \pi_i^t$ für ein $t < r$, $i \leq l(\pi^t)$ und ρ dasjenige r -Tupel von Partitionen von $n-k$, welches aus π durch Streichen dieses Teils π_i^t der Länge k hervorgeht.

Der Wert des irreduziblen Charakters χ^γ auf einem Element $x \in X_n$ mit Zykelsstruktur π ist bestimmt durch

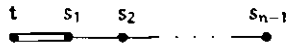
$$\chi^\gamma(\pi) = \sum_{\gamma \setminus \alpha = k} \zeta^{st}(-1)^{l_\alpha} \chi^\alpha(\rho),$$

wobei über alle r -Tupel von Partitionen α von $n-k$ summiert wird, für die $\gamma \setminus \alpha$ ein Haken ist. Hierbei ist $s = \tau(\gamma \setminus \alpha)$.

BEWEIS. (ζ^{st}) ist die Charaktertafel der zyklischen Gruppe C_r . Für einen expliziten Beweis s. [2] (2.2). $\square$

3.4. Die Weylgruppe.

Die Weylgruppe $W_n = W(B_n)$ vom Typ B_n wird erzeugt von $S = \{t, s_1, \dots, s_{n-1}\}$ mit den durch das folgende Dynkindiagramm gegebenen Relationen.



Die Elemente $s_1, \dots, s_{n-1}$ erzeugen eine zu S_n isomorphe Untergruppe von W_n . Definiert man die Vorzeichenwechsel t_i als $t_0 = t$ und $t_i = s_i t_{i-1} s_i$ für $i = 1, \dots, n-1$, so erzeugen die t_i einen elementar-abelschen 2-Normalteiler der Ordnung 2^n von W_n .

W_n ist isomorph zum Kranzprodukt $C_2 \wr S_n$ einer zyklischen Gruppe der Ordnung 2 mit der symmetrischen Gruppe S_n auf n Punkten. Dieses Kranzprodukt hat eine Darstellung als Gruppe aller monomialen $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen ± 1 . Ein solcher Isomorphismus bildet die Erzeuger s_i auf die der Transposition $(i, i+1)$ entsprechende Permutationsmatrix ab und den Erzeuger t auf den Vorzeichenwechsel $1 \mapsto -1, i \mapsto i$, für $i = 2, \dots, n$.

Für jedes $k \leq n$ ist die Untergruppe $\langle t_{n-k}, s_{n-k+1}, \dots, s_{n-1} \rangle$ von W_n isomorph zu W_k und die Untergruppe $\langle t, s_1, \dots, s_{n-k-1}, t_{n-k}, s_{n-k+1}, \dots, s_{n-1} \rangle$ isomorph zu $W_{n-k} \times W_k$.

Die Ordnung von W_n ist $2^n n!$ und die Anzahl ihrer Konjugiertenklassen ist gleich der Anzahl der Doppelpartitionen von n .

Einen Standardrepräsentanten minimaler Länge der durch die Doppelpartition $\pi = (\pi^0, \pi^1)$ von n bezeichneten Klasse von W_n erhält man wie folgt. Dazu sei $l = l(\pi^1)$. Nun bildet man ähnlich wie in Abschnitt 2.2 eine Folge von Summen σ durch

$$\sigma_i = \begin{cases} 0 & \text{für } i = 0, \\ \sigma_{i-1} + \pi^1_{i-1} & \text{für } i = 1, \dots, l \text{ und} \\ \sigma_{i-1} + \pi^0_{i-1} & \text{für } i = l+1, \dots, l+l(\pi^0). \end{cases}$$

Man beachte, daß hier zuerst π^1 in umgekehrter Reihenfolge zur Summenbildung benutzt wird. Der Repräsentant entsteht nun aus $s_0 s_1 \dots s_{n-1} s_n$, indem für $i \in \sigma$ und $i < \sigma_1$ der Faktor s_i durch t_i ersetzt, und für alle anderen $i \in \sigma$ das entsprechende s_i

ausgelassen wird. Man beachte, daß 0 und n immer in σ liegen, also die undefinierten Symbole s_0 und s_n immer ersetzt oder ausgelassen werden.

Die z. B. zu der Doppelpartition $\pi = ([3], [4, 1])$ von 8 gebildete Summenfolge ist $\sigma = \{0, 1, 5, 8\}$ mit $l = 2$. So erhält man als Repräsentanten $t_0 t_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_7 = t s_1 t s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_7$.

Eine Präsentation des Kranzprodukts $C_r \wr S_n$ einer zyklischen Gruppe der Ordnung r mit der symmetrischen Gruppe S_n erhält man aus obiger Präsentation von $W(B_n)$, indem man die Relation $t^2 = 1$ durch die Relation $t^r = 1$ ersetzt. $C_r \wr S_n$ ist eine *komplexe Spiegelungsgruppe*, d. h., sie besitzt eine komplexe Darstellung, in der sie von *Pseudo-Spiegelungen* ($n \times n$ -Matrizen mit $n-1$ Eigenwerten 1) erzeugt wird. In der Klassifikation der irreduziblen endlichen komplexen Spiegelungsgruppen durch Shephard und Todd [34] hat $C_r \wr S_n$ die Bezeichnung $G(r, 1, n)$.

Wir gehen in Abschnitt 3.6 von dieser komplexen Spiegelungsgruppe aus, um eine zyklotomische Algebra vom Typ B zu definieren.

3.5. Zwei Littlewood-Richardson-Regeln für Typ B.

Die Littlewood-Richardson-Regel beschreibt die Zerlegung von Einschränkungen von irreduziblen Charakteren symmetrischer Gruppen auf Young-Untergruppen. In diesem Abschnitt beweisen wir Verallgemeinerungen dieser Regel für Weylgruppen vom Typ B_n .

Dazu seien α , β und γ Doppelpartitionen von $n-k$, k und n (resp.), und $g_{\alpha\beta}^\gamma$ die Vielfachheit des Charakters $\chi^\alpha \times \chi^\beta$ in der Einschränkung des Charakters χ^γ von W_n auf $W_{n-k} \times W_k$. Dann läßt sich die Berechnung der Vielfachheit auf die klassische Littlewood-Richardson-Regel (2.4.2) zurückführen.

SATZ 3.5.1. Für Doppelpartitionen $\alpha = (\alpha^0, \alpha^1)$ von $n-k$, $\beta = (\beta^0, \beta^1)$ von k und $\gamma = (\gamma^0, \gamma^1)$ von n ist $g_{\alpha\beta}^\gamma = g_{\alpha^0\beta^0}^{\gamma^0} g_{\alpha^1\beta^1}^{\gamma^1}$.

BEWEIS. Mittels Frobenius-Reziprozität ist $g_{\alpha\beta}^\gamma$ auch die Vielfachheit von χ^γ in dem nach W_n induzierten Charakter $(\chi^\alpha \times \chi^\beta)^{W_n}$, also

$$(\chi^\alpha \times \chi^\beta)^{W_n} = \sum_{\gamma} g_{\alpha\beta}^\gamma \chi^\gamma.$$

Nach Konstruktion entsteht der Charakter χ^γ zu einer Doppelpartition $\gamma = (\gamma^0, \gamma^1)$ von n durch Induzieren eines irreduziblen Charakters ϕ^γ einer Trägheitsgruppe T_γ , die isomorph zum direkten Produkt $W_{|\gamma^0|} \times W_{|\gamma^1|}$ ist. Genauer ist

$$\phi^\gamma = \chi^{\gamma^0} \times \epsilon \chi^{\gamma^1},$$

wobei die Charaktere χ^{γ^i} , $i = 0, 1$, der symmetrischen Gruppen $S_{|\gamma^i|}$ hier als Charaktere von $W_{|\gamma^i|}$ aufgefaßt werden und ϵ der lineare Charakter von $W_{|\gamma^1|}$ ist, der die Vorzeichenwechsel auf -1 und alle anderen Erzeuger auf 1 abbildet. Entsprechendes gilt natürlich auch für χ^α und χ^β .

Wegen der Vertauschbarkeit von Induzieren und äußerem Tensorprodukt (s. [14], (43.2)) ist

$$\chi^\alpha \times \chi^\beta = (\phi^\alpha)^{W_{n-k}} \times (\phi^\beta)^{W_k} = (\phi^\alpha \times \phi^\beta)^{W_{n-k} \times W_k}.$$

Des weiteren haben wir

$$\phi^\alpha \times \phi^\beta = \chi^{\alpha^0} \times \epsilon \chi^{\alpha^1} \times \chi^{\beta^0} \times \epsilon \chi^{\beta^1} = (\chi^{\alpha^0} \times \chi^{\beta^0}) \times \epsilon (\chi^{\alpha^1} \times \chi^{\beta^1}),$$

da $\epsilon \chi^{\alpha^1} \times \epsilon \chi^{\beta^1} = \epsilon (\chi^{\alpha^1} \times \chi^{\beta^1})$ für die jeweils passenden Charaktere ϵ gilt.

Definiere $n_i = |\alpha_i| + |\beta_i|$ für $i = 0, 1$. Dann ist

$$\left((\chi^{\alpha^0} \times \chi^{\beta^0}) \times \epsilon (\chi^{\alpha^1} \times \chi^{\beta^1}) \right)^{W_n} = \left((\chi^{\alpha^0} \times \chi^{\beta^0})^{W_{n_0}} \times \epsilon (\chi^{\alpha^1} \times \chi^{\beta^1})^{W_{n_1}} \right)^{W_n}.$$

Weiter gilt mit der Littlewood-Richardson-Regel (2.4.2), daß

$$(\chi^{\alpha^0} \times \chi^{\beta^0})^{W_{n_0}} = \sum_{\gamma^0} g_{\alpha^0 \beta^0}^{\gamma^0} \chi^{\gamma^0} \quad \text{und} \quad \epsilon (\chi^{\alpha^1} \times \chi^{\beta^1})^{W_{n_1}} = \sum_{\gamma^1} g_{\alpha^1 \beta^1}^{\gamma^1} \epsilon \chi^{\gamma^1},$$

wobei jeweils über alle Partitionen γ^i von n_i summiert wird. Damit haben wir schließlich

$$\begin{aligned} (\chi^\alpha \times \chi^\beta)^{W_n} &= (\phi^\alpha \times \phi^\beta)^{W_n} = \\ &= \left(\sum_{\gamma^0} g_{\alpha^0 \beta^0}^{\gamma^0} \chi^{\gamma^0} \times \sum_{\gamma^1} g_{\alpha^1 \beta^1}^{\gamma^1} \epsilon \chi^{\gamma^1} \right)^{W_n} = \sum_{\gamma^0, \gamma^1} g_{\alpha^0 \beta^0}^{\gamma^0} g_{\alpha^1 \beta^1}^{\gamma^1} (\chi^{\gamma^0} \times \epsilon \chi^{\gamma^1})^{W_n}, \end{aligned}$$

wobei nach Konstruktion $(\chi^{\gamma^0} \times \epsilon \chi^{\gamma^1})^{W_n} = \chi^\gamma$ ist. $\square$

Als nächstes untersuchen wir die Einschränkung von χ^γ auf eine Untergruppe der Form $W_{n-k} \times S_k$.

LEMMA 3.5.2. *Sei $k \leq n$. Für die Einschränkung des Charakters χ^γ von W_n auf $W_{n-k} \times S_k$ gilt*

$$\chi^\gamma|_{W_{n-k} \times S_k} = \sum_{\alpha, \beta, \delta} g_{\alpha \beta}^\gamma g_{\beta^0 \beta^1}^\delta \chi^\alpha \times \chi^\delta,$$

wobei über alle Doppelpartitionen α von $n-k$, β von k und alle Partitionen δ von k summiert wird.

BEWEIS. Nach Konstruktion ist $\chi^\beta|_{S_k} = (\chi^{\beta^0} \times \chi^{\beta^1})^{S_k} = \sum_{\delta} g_{\beta^1 \beta^2}^\delta \chi^\delta$, wobei über alle Partitionen δ von k summiert wird und die Koeffizienten $g_{\beta^1 \beta^2}^\delta$ durch die klassische Littlewood-Richardson-Regel (2.4.2) gegeben sind. Die Behauptung folgt dann mit obigem Satz (3.5.1). $\square$

Zeichnet man sich die Komponenten des schiefen Doppel-Diagramms $\gamma \setminus \alpha$ in einer fest vorgegebenen Reihenfolge schräg übereinander, unterscheidet sich das so erhaltene Diagramm nicht von einem schiefen Diagramm gewöhnlicher Partitionen, und man kann von Tableaux der Form $\gamma \setminus \alpha$ mit Inhalt β für eine gewöhnliche Partition β von n reden.

SATZ 3.5.3. Für Doppelpartitionen α von $n-k$, γ von n und eine Partition $\beta = [k-r, 1^r]$ von k ist $g_{\alpha\beta}^\gamma$ die Anzahl der schiefen Standardtableaux der Form $\gamma \setminus \alpha$ mit Inhalt β , deren Einträge zeilenweise von rechts nach links gelesen eine Lattice Permutation ergeben.

Insbesondere ist $g_{\alpha\beta}^\gamma = 0$, wenn $\alpha \not\subseteq \gamma$.

Beweis. Nach Lemma (3.5.2) ist

$$g_{\alpha\beta}^\gamma = \sum_{\delta} g_{\alpha\delta}^{\gamma^0} g_{\alpha^1\delta^1}^{\gamma^1} g_{\delta^0\delta^1}^\beta,$$

wobei über alle Doppelpartitionen δ von k summiert wird. Wir untersuchen die von Null verschiedenen Summanden. Sei also $g_{\delta^0\delta^1}^\beta > 0$. Dann ist $\delta^i \subseteq \beta$ für $i = 0, 1$, und da $\beta = [k-r, 1^r]$ ein Haken ist, müssen auch die δ^i Haken sein. Damit ist $\gamma^i \setminus \alpha^i$ ein Streifen für $i = 0, 1$. Wir bezeichnen mit $\pi_{\pi^2\pi^3}^\pi$ die Menge aller Standardtableaux der Form $\pi^1 \setminus \pi^2$, die gemäß der Littlewood-Richardson-Regel mit Inhalt π^3 gefüllt sind. Unter diesen Bedingungen läßt sich eine Bijektion σ zwischen der Menge

$$\bigcup_{\delta} \{ (T_0, T_1, T_2) \mid T_i \in G_{\alpha^i\beta^i}^{\gamma^i}, i = 0, 1, \text{ und } T_2 \in G_{\delta^0\delta^1}^\beta \}$$

und der Menge aller Tableau $\{T'_0, T'_1\}$ der Form $\gamma \setminus \alpha$ mit Inhalt β angeben. Für $\sigma(T_0, T_1, T_2) = (T'_0, T'_1)$ ist hier $T'_0 = T_0$, und T'_1 geht aus T_1 hervor, indem die von 1 verschiedenen Einträge (und eventuell die letzte 1 in der ersten Zeile von T_1) so abgeändert werden, daß (T'_0, T'_1) Inhalt β hat (vgl. die Illustration im Beweis von (2.7.1)). $\square$

Bemerkung. Es ist anzunehmen, daß eine passende Verallgemeinerung von Satz (3.5.1) in beliebigen Kranzprodukten $C_r \wr S_n$ gilt. Außerdem gilt Satz (3.5.3) sicher für beliebige Partitionen β und beliebige r -Tupel von Partitionen γ und α . Für diese Arbeit genügt es aber, die Sätze in der oben bewiesenen Form zu haben.

3.6. Die zyklotomische Algebra vom Typ $B_n^{(r)}$.

Wir folgen [2] und [7] und definieren eine zyklotomische Algebra zu der komplexen Spiegelungsgruppe $C_r \wr S_n$. Dazu seien $q, Q_0, \dots, Q_{r-1}$ Unbestimmte über $\mathbb{Q}$, weiter $A = \mathbb{Z}[q, Q_0, \dots, Q_{r-1}]$ und K der Quotientenkörper von A .

DEFINITION 3.6.1. Die zyklotomische Algebra $H_n^{(r)}$ vom Typ $B_n^{(r)}$ wird als K -Algebra erzeugt von Elementen $T, S_1, \dots, S_{n-1}$ bezüglich der Relationen

- (i) $(T - Q_0) \cdots (T - Q_{r-1}) = 0$,
- (ii) $S_i^2 = q + (q-1)S_i$ für $i = 1, \dots, n-1$,
- (iii) $TS_1TS_1 = S_1TS_1T$,
- (iv) $TS_i = S_iT$ für $i > 1$,
- (v) $S_iS_j = S_jS_i$ für alle i, j mit $|i-j| \geq 2$, und
- (vi) $S_iS_{i+1}S_i = S_{i+1}S_iS_{i+1}$ für $i = 1, \dots, n-2$.

SATZ 3.6.2. $H_n^{(r)}$ ist eine halbeinfache Algebra der Dimension $n! r^n$ über K und K ist Zerfällungskörper für $H_n^{(r)}$.

Beweis. [2] (3.10). □

Die Elemente $S_1, \dots, S_{n-1}$ erzeugen eine Unteralgebra vom Typ A_{n-1} , die wir wieder kurz mit H_n bezeichnen.

Wir definieren weitere Elemente $T_i \in H_n^{(r)}$ als $T_0 = 1$ und $T_i = S_i T_{i-1} S_i$ für $i = 1, \dots, n-1$. In H_n ist nach dem Lemma von Matsumoto (1.2.1) zu einem reduzierten Ausdruck $w = s_{i_1} \cdots s_{i_l} \in S_n$ eindeutig ein $T_w = S_{i_1} \cdots S_{i_l}$ definiert, das unabhängig von der Wahl des reduzierten Ausdrucks für w ist. Dagegen ist nicht klar, wie sich verschiedene reduzierte Ausdrücke für ein beliebiges $w \in C_r \wr S_n$ zueinander verhalten. Es gilt jedoch ([2], (3.4))

$$H_n^{(r)} = \sum_{\substack{w \in S_n \\ 0 \leq k_i \leq r-1}} K T_0^{k_0} \cdots T_{n-1}^{k_{n-1}} T_w$$

als K -Vektorraum.

Auch in dieser allgemeineren Situation liefert ein Ringhomomorphismus $f: A \rightarrow C$ eine Spezialisierung von $H_n^{(r)}$. Spezialisiert man $q \mapsto 1$ und $Q_i \mapsto \zeta^i$ für eine primitive r -te Einheitswurzel ζ , so wird $H_n^{(r)}$ zur Gruppenalgebra des Kranzprodukts $C_r \wr S_n$. Diese Spezialisierung bewirkt auch wieder eine Bijektion der irreduziblen Charaktere.

Für $r = 2$ und $Q_i = -1$ ist $H_n^{(2)}$ die Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ B_n zu Parametern $q_i = q$, $i = 1, \dots, n-1$, und $q_1 = Q_0$. Wir bezeichnen in diesem Fall Q_0 einfach mit Q . Ab Abschnitt 3.9 beschränken wir uns auf die Untersuchung dieses Falles.

Man beachte noch, daß für $r = 1$ und $Q_0 = 1$ die Algebra $H_n^{(r)}$ zur Iwahori-Hecke-Algebra H_n vom Typ A_{n-1} wird.

3.7. Darstellende Matrizen.

Ariki und Koike ([2] (3.6)) geben ein Verfahren an, mit welchem sich alle irreduziblen Darstellungen von $H_n^{(r)}$ in Form von Matrizen für die Erzeuger von $H_n^{(r)}$ konstruieren lassen. Damit verallgemeinern sie das Verfahren von Hoefsmit (siehe [21] (2.2.6)) für die gewöhnlichen Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ B_n .

Sei γ ein r -Tupel von Partitionen von n , dazu $f' = \chi^\gamma(1)$ der Grad des zugehörigen Charakters von $C_r \wr S_n$ und $\{T_p | p = 1, \dots, f'\}$ die Menge aller Standardtableaux der Form γ . Diese Tableaux bilden eine formale Basis für den $H_n^{(r)}$ -Modul V_γ , der jetzt definiert wird. Zu $k \in \mathbb{Z}$ und $y \in K$ sei

$$\Delta(k, y) = 1 - q^k y \quad \text{und} \quad M(k, y) = \frac{1}{\Delta(k, y)} \begin{bmatrix} q-1 & \Delta(k+1, y) \\ q\Delta(k-1, y) & -q^k y(q-1) \end{bmatrix}$$

eine 2×2 -Matrix über K . Die Operation von T auf V^γ ist diagonal und gegeben durch

$$T_p T = Q_{\tau(T_p, i)} T_p \quad \text{für alle } p = 1, \dots, r^\gamma,$$

wobei die 1 in der Komponente $T_p^{\tau(T_p, i)}$ von T_p steht. Die Operation von S_i auf V^γ ist gegeben durch

$$T_p S_i = q T_p,$$

falls i und $i+1$ in derselben Zeile einer Komponente von T_p stehen, und durch

$$T_p S_i = -T_p,$$

falls i und $i+1$ in derselben Spalte einer Komponente von T_p stehen. Andernfalls ist $T_q := T_p(i, i+1)$ wieder ein Standardtableau und S_i operiert auf dem Teilraum mit Basis (T_p, T_q) als Matrix

$$M(r(i+1, i), Q_{\tau(T_p, i)}/Q_{\tau(T_p, i+1)}).$$

Hier ist $r(i+1, i)$ der axiale Abstand zwischen $i+1$ und i in T_p , und i (bzw. $i+1$) steht in der Komponente $T_p^{\tau(T_p, i)}$ (bzw. $T_p^{\tau(T_p, i+1)}$) von T_p .

Der axiale Abstand zwischen $i+1$ und i in T_q ist gleich $-r(i+1, i)$, und es gilt

$$M(-r(i+1, i), Q_{\tau(T_p, i+1)}/Q_{\tau(T_p, i)}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M(r(i+1, i), Q_{\tau(T_p, i)}/Q_{\tau(T_p, i+1)}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Damit ist die Operation von S_i auf V^γ eindeutig definiert.

SATZ 3.7.1. *Die V^γ bilden ein vollständiges System absolut irreduzibler paarweise nicht äquivalenter Darstellungen von $H_n^{(r)}$, wenn γ alle r -Tupel von Partitionen von n durchläuft.*

BEWEIS. [2] (3.7), (3.10). □

Nach der vorhergehenden Definition operiert $T_0 = T$ in jeder der angegebenen Darstellungen als Diagonalmatrix. Es zeigt sich, daß alle T_i , $i = 0, \dots, n-1$, als Diagonalmatrizen operieren.

SATZ 3.7.2. *Sei $i \leq n-1$ und T ein Standardtableau der Form γ . Dann ist*

$$T T_i = Q_{\tau(T, i+1)} q^{c(T, i+1)+1} T,$$

wobei $c(T; i)$ den Gehalt von i im Tableau T angibt.

BEWEIS. [2] (3.16), vgl. [21] (3.3.3). □

Für jedes $h \in H_n^{(r)}$ wird die Matrix der Operation von h auf V^γ bezüglich der Basis aus Standardtableaux der Form γ mit $M^\gamma(h)$ bezeichnet. Der Charakter von $h \in H_n^{(r)}$ auf V^γ ist die Spur von $M^\gamma(h)$ und wird mit $\chi_q^\gamma(h)$ bezeichnet.

3.8. Unteralgebren.

Die folgenden Bezeichnungen für Unteralgebren gelten für den Rest des Kapitels. Dabei sei $k \leq n$ beliebig aber fest.

$$\begin{aligned} H_{n-k}^{(r)} &= \langle T, S_1, \dots, S_{n-k-1} \rangle \\ H'_k &= \langle S_{n-k+1}, \dots, S_{n-1} \rangle \\ H_k^* &= \langle T_{n-k}, S_{n-k+1}, \dots, S_{n-1} \rangle \end{aligned}$$

So ist $H_{n-k}^{(r)}$ eine Unteralgebra vom Typ $B_{n-k}^{(r)}$, $H'_k \cong H_k$ eine Unteralgebra vom Typ A_{k-1} , und H_k^* entspricht einer Unteralgebra vom Typ B_k (s. dazu Abschnitt 3.12).

Zu einem r -Tupel von Partitionen α von $n-k$ sei $V^{\gamma \setminus \alpha}$ ein K -Vektorraum mit der Menge aller Standardtableaux der Form $\gamma \setminus \alpha$ als Basis. Mit Lemma (3.1.1) hat V^γ als Vektorraum die Struktur einer direkten Summe von Tensorprodukten,

$$V^\gamma = \bigoplus_{\alpha} V^\alpha \otimes V^{\gamma \setminus \alpha}.$$

Wir schreiben $T = T_1 \otimes T_2$ für die Zerlegung eines Standardtableaux T der Form γ in ein Standardtableau T_1 der Form α und ein Standardtableau T_2 der Form $\gamma \setminus \alpha$ gemäß Lemma (3.1.1).

Wir können annehmen, daß die Menge aller Standardtableaux der Form γ wie folgt geordnet ist. Dazu sei die Menge aller r -Tupel von Partitionen von $n-k$ linear geordnet und zu jedem r -Tupel von Partitionen α von $n-k$ sei eine lineare Ordnung auf der Menge aller Standardtableaux der Form α und eine lineare Ordnung auf der Menge aller Standardtableaux der Form $\gamma \setminus \alpha$ gegeben. Seien T und T' Standardtableaux der Form γ mit $T = T_1 \otimes T_2$ für ein T_1 der Form α und $T' = T'_1 \otimes T'_2$ für ein T'_1 der Form α' . Dann sei $T < T'$, wenn

- (i) $\alpha < \alpha'$, oder
- (ii) $\alpha = \alpha'$ und $T_1 < T'_1$, oder
- (iii) $\alpha = \alpha'$ und $T_1 = T'_1$ und $T_2 < T'_2$.

Nun haben gewisse Matrizen die Struktur einer Blockdiagonalmatrix, wobei jeder Block ein Kroneckerprodukt zweier Matrizen ist. Genauer gesagt gilt

LEMMA 3.8.1. Sei $h \in H_{n-k}^{(r)}$. Dann ist

$$M^\gamma(h) = \bigoplus_{\alpha} M^\alpha(h) \otimes \text{Id},$$

wobei α über alle r -Tupel von Partitionen von $n-k$ mit $\alpha \subseteq \gamma$ läuft und Id die $f^{\gamma \setminus \alpha} \times f^{\gamma \setminus \alpha}$ -Einheitsmatrix ist.

BEWEIS. Für $T = T_1 \otimes T_2$ ist nach Definition der Operation in Abschnitt 3.7

$$TT = Q_{\tau(T;1)}(T_1 \otimes T_2) = T_1 T \otimes T_2,$$

da die 1 in derjenigen Komponente von T_1 steht, in der sie auch in T steht, also $\tau(T : 1) = \tau(T_1 : 1)$.

Für alle $i \leq n - k$ gilt $\tau(T : i) = \tau(T_1 : i)$ und $c(T : i) = c(T_1 : i)$. Damit ist auch der axiale Abstand $\tau(i + 1, i)$ derselbe in T und T_1 . Weiter ist $T(i, i + 1) = T_1(i, i + 1) \otimes T_2$ für alle $i < n - k$. Damit ist

$$TS_i = T_1 S_i \otimes T_2 \quad \text{für alle } i < n - k.$$

Also operiert ein $h \in H_{n-k}^{(r)}$ auf jedem Teilraum $V^\alpha \otimes T_2$ von V^γ als Matrix $M^\alpha(h)$ (die wie in Abschnitt 3.7 für das r -Tupel von Partitionen α definiert ist).

Die Ordnung auf der Basis von V^γ bewirkt die behauptete Block-Diagonalgestalt. $\square$

LEMMA 3.8.2. *Sei $h \in H_k^*$. Dann gibt es zu jedem r -Tupel von Partitionen α von $n - k$ eine Matrix $M^{\gamma \setminus \alpha}(h)$, so daß*

$$M^\gamma(h) = \bigoplus_{\alpha} \text{Id} \otimes M^{\gamma \setminus \alpha}(h),$$

wobei α über alle r -Tupel von Partitionen von $n - k$ mit $\alpha \subseteq \gamma$ läuft und Id die $f^\alpha \times f^\alpha$ -Einheitsmatrix ist.

Die Abbildung $h \mapsto M^{\gamma \setminus \alpha}(h)$ macht $V^{\gamma \setminus \alpha}$ zu einem H_k^* -Modul.

BEWEIS. Sei $T = T_1 \otimes T_2$ ein Standardtableau der Form γ . Nach (3.7.2) ist

$$\begin{aligned} (T_1 \otimes T_2) T_{n-k} &= Q_{\tau(T_1, n-k+1)} q^{c(T_1, n-k+1)+n-k} (T_1 \otimes T_2) \\ &= (T_1 \otimes Q_{\tau(T_2, n-k+1)} q^{c(T_2, n-k+1)+n-k} T_2). \end{aligned}$$

Für $i \geq n - k$ ist $\tau(T : i) = \tau(T_2 : i)$ und $c(T : i) = c(T_2 : i)$. Damit ist der axiale Abstand $\tau(i + 1, i)$ zwischen $i + 1$ und i in T derselbe wie in T_2 . Weiter ist $T(i, i + 1) = T_1 \otimes T_2(i, i + 1)$.

Also gibt es zu jedem r -Tupel von Partitionen α von $n - k$ und jedem T_1 der Form α eine Matrix $M^{\gamma \setminus \alpha}(h)$, so daß $h \in H_k^*$ auf dem Teilraum $T_1 \otimes V^{\gamma \setminus \alpha}$ als $M^{\gamma \setminus \alpha}(h)$ operiert.

Die Ordnung auf der Basis von V^γ bewirkt die behauptete Block-Diagonalgestalt.

Mit M^γ ist auch $M^{\gamma \setminus \alpha}$ eine Matrixdarstellung von H_k^* . $\square$

Wir bezeichnen mit $\chi_q^{\gamma \setminus \alpha}$ den Charakter von H_k^* auf $V^{\gamma \setminus \alpha}$.

SATZ 3.8.3. *Seien $h_1 \in H_{n-k}^{(r)}$, $h_2 \in H_k^*$ und γ ein r -Tupel von Partitionen von n . Dann ist*

$$\chi_q^\gamma(h_1 h_2) = \sum_{|\gamma \setminus \alpha| = k} \chi_q^\alpha(h_1) \chi_q^{\gamma \setminus \alpha}(h_2),$$

wobei über alle r -Tupel von Partitionen α von $n - k$ mit $\alpha \subseteq \gamma$ summiert wird.

BEWEIS. Die Matrix $M^\gamma(h_1 h_2)$ von $h_1 h_2$ hat mit (3.8.1) und (3.8.2) als

$$\begin{aligned} M^\gamma(h_1 h_2) &= M^\gamma(h_1) M^\gamma(h_2) = \bigoplus_{\alpha} (M^{\alpha}(h_1) \otimes I) (I \otimes M^{\gamma \setminus \alpha}(h_2)) \\ &= \bigoplus_{\alpha} (M^{\alpha}(h_1) \otimes M^{\gamma \setminus \alpha}(h_2)) \end{aligned}$$

Blockdiagonalgestalt, wobei jeder Block zu einem r -Tupel von Partitionen α von $n-k$ gehört und ein Kroneckerprodukt $M^{\alpha}(h_1) \otimes M^{\gamma \setminus \alpha}(h_2)$ ist. Damit ist der Charakterwert

$$\chi_q^\gamma(h_1 h_2) = \text{Spur}(M^\gamma(h_1 h_2)) = \sum_{\alpha} \chi_q^{\alpha}(h_1) \chi_q^{\gamma \setminus \alpha}(h_2).$$

□

3.9. Einschränkung auf Typ $B \times A$.

Von nun an sei $r = 2$ und damit $H_n^{(2)}$ die Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ B_n . Es sei daran erinnert, daß hier $Q_1 = -1$ und $Q_0 = Q$ ist. Außerdem gilt in diesem Fall das Lemma von Matsumoto (1.2.1) für alle Elemente $w \in W$. Zur Bestimmung der Charakterwerte $\chi^\gamma(T_w)$ für Elemente $w \in W_n$ von minimaler Länge in ihrer Konjugiertenklasse gehen wir ähnlich vor wie in Kapitel 2. Dazu seien $k \leq n$ fest,

$$\kappa = s_{n-k+1} \cdots s_{n-1} \in W_n \quad \text{und damit} \quad T_\kappa = S_{n-k+1} \cdots S_{n-1} \in H.$$

Wir untersuchen in diesem Abschnitt den Charakterwert von Elementen der Form $h T_\kappa$ und im nächsten Abschnitt von solchen der Form $h T_{n-k} T_\kappa$ für beliebiges $h \in H_{n-k}^{(2)}$.

LEMMA 3.9.1. Seien γ eine Doppelpartition von n und α eine Doppelpartition von $n-k$. Dann ist

$$\chi_q^{\gamma \setminus \alpha}(T_\kappa) = \begin{cases} (q-1)^{c_\alpha-1} (-1)^{l_\alpha} q^{k-l_\alpha-c_\alpha}, & \text{falls } \gamma \setminus \alpha \text{ ein Streifen ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEWEIS. In Abschnitt 3.8 wurde $\chi_q^{\gamma \setminus \alpha}$ als Charakter von H_k^* definiert. Eingeschränkt auf H_k^* ist $\chi_q^{\gamma \setminus \alpha} = \sum_{\beta} g_{\alpha\beta}^\gamma \chi_q^\beta$, wobei über alle Partitionen β von k summiert wird und die Koeffizienten $g_{\alpha\beta}^\gamma$ durch die Littlewood-Richardson-Regel (3.5.3) gegeben sind.

Um den Wert von $\chi_q^{\gamma \setminus \alpha}(T_\kappa)$ zu bestimmen, braucht man jedoch nicht über alle möglichen β zu summieren. Nach (2.6.2) ist $\chi_q^\beta(T_\kappa) = 0$, es sei denn $\beta = [k-r, 1^r]$ für ein $r \leq k-1$, wobei dann

$$\chi_q^\beta(T_\kappa) = (-1)^r q^{k-r-1}$$

gilt. Deshalb ist

$$\chi_q^{\gamma \setminus \alpha}(T_\kappa) = \sum_{r=0}^{k-1} g_{\alpha, [k-r, 1^r]}^\gamma (-1)^r q^{k-r-1}.$$

Nach (3.5.3) ist für $\beta = [k-r, 1^r]$ die Vielfachheit $g_{\alpha\beta}^\gamma$ die Anzahl der schiefen Semistandardtableaux der Form $\gamma \setminus \alpha$ mit Inhalt β , die zeilenweise von rechts nach links

gelesen Lattice Permutationen ergeben. Damit läßt sich der Beweis hier wortwörtlich so zu Ende führen wie der Beweis von (2.7.1). $\square$

Damit erhalten wir die gewünschte Rekursionsformel für diesen Fall.

SATZ 3.9.2. Sei $h \in H_{n-k}^{(2)}$. Dann ist

$$\chi_q^\gamma(hT_k) = \sum_{h \setminus \alpha = k} (q-1)^{c_\alpha-1} (-1)^{l_\alpha} q^{k-l_\alpha-c_\alpha} \chi_q^\alpha(h),$$

wobei über alle Doppelpartitionen $\alpha \subseteq \gamma$ summiert wird, für die $\gamma \setminus \alpha$ ein Streifen ist.

BEWEIS. Die Behauptung folgt mit der Zerlegung des Charakters $\chi_q^\gamma = \sum_\alpha \chi_q^\alpha \chi_q^{\gamma \setminus \alpha}$ in (3.8.3) und der Berechnung von $\chi_q^{\gamma \setminus \alpha}(T_k)$ in (3.9.1). $\square$

3.10. Einschränkung auf Typ B $\times$ B.

Im Unterschied zur Weylgruppe finden wir in der Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ B_n im allgemeinen keine Unterálgebra vom Typ $B_{n-k} \times B_k$. Dennoch ist es möglich, eine ähnliche Strategie wie im vorhergehenden Abschnitt zu verfolgen.

Seien κ und T_κ wie in Abschnitt 3.9 und $W_k^* = \langle t_{n-k}, s_{n-k+1}, \dots, s_{n-1} \rangle \leq W_n$. Durch Spezialisierung von (3.8.3) erhält man die folgende Formel für Kranzprodukte.

LEMMA 3.10.1. Für alle $w_1 \in W_{n-k}$ und $w_2 \in W_k^*$ ist

$$\chi^\gamma(w_1 w_2) = \sum_{\alpha \subseteq \gamma} \chi^\alpha(w_1) \chi^{\gamma \setminus \alpha}(w_2).$$

FOLGERUNG 3.10.2. Für Doppelpartitionen γ von n , α von $n-k$ und $i = 0, 1$ gilt

$$\chi^{\gamma \setminus \alpha}(t_{n-k}^i \kappa) = \begin{cases} (-1)^{l_\alpha} (-1)^{i_j}, & \text{falls } \gamma \setminus \alpha \text{ ein Haken ist,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $j = \tau(\gamma \setminus \alpha)$.

BEWEIS. Dies folgt aus der Murnaghan-Nakayama Formel (3.3.3) für Kranzprodukte $C_r \wr S_n$ zyklischer mit symmetrischen Gruppen und der Regularität der Charaktertafel $(\chi^\alpha(w_1))$ von W_{n-k} . $\square$

Wir definieren

$$T_\Delta = \prod_{i=n-k}^{n-1} T_i \quad \text{und} \quad e_\alpha^\gamma = \frac{c(\gamma) - c(\alpha)}{k} + n - \frac{k+1}{2}$$

für Doppelpartitionen $\alpha \subseteq \gamma$ mit $|\gamma \setminus \alpha| = k$. Die Operation von T_Δ auf $V^{\gamma \setminus \alpha}$ ist skalar.

LEMMA 3.10.3. Sei T ein Standardtableau der Form $\gamma \setminus \alpha$. Dann ist

$$TT_{\Delta} = q^{ke_{\alpha}^{\gamma}} \prod_{i=n-k}^{n-1} Q_{\tau(T:i+1)} T.$$

BEWEIS. Nach Definition von T_{Δ} und Satz (3.7.2) gilt

$$TT_{\Delta} = T \prod_{i=n-k}^{n-1} T_i = \prod_{i=n-k}^{n-1} (q^{c(T:i+1)+i} Q_{\tau(T:i+1)}) T.$$

Dabei ist $\sum_{i=n-k}^{n-1} c(T:i+1) = c(\gamma) - c(\alpha)$, dem Gehalt des schiefen Diagramms $\gamma \setminus \alpha$, und $\sum_{i=n-k}^{n-1} i = kn - k(k+1)/2$, also die Summe der Exponenten von q gleich ke_{α}^{γ} . $\square$

LEMMA 3.10.4. $(T_{n-k} T_k)^k = T_{\Delta}$.

BEWEIS. Für $k > 1$ und $i \geq n-k+2$ erhalten wir durch bloßes Anwenden der Zopfrelationen

$$S_i(T_{n-k} T_k) = (T_{n-k} T_k) S_{i-1}$$

und für $j < k$

$$(T_{n-k} T_k)^j = (T_{n-k} S_{n-k+1} \cdots S_{n-2})^j S_{n-1} \cdots S_{n-j}.$$

Damit ist

$$(T_{n-k} T_k)^k = (T_{n-k} S_{n-k+1} \cdots S_{n-2})^{k-1} S_{n-1} \cdots S_{n-k+1} T_{n-k} S_{n-k+1} \cdots S_{n-1},$$

wobei die $(k-1)$ -te Potenz per Induktion gleich $T_{n-k} \cdots T_{n-2}$ und der Rest nach Definition T_{n-1} ist. $\square$

Für den Fall, daß $\gamma \setminus \alpha$ ein Haken ist, definieren wir noch eine weitere Größe d_{α}^{γ} als den Gehalt des Kästchens unmittelbar unter dem Haken $\gamma \setminus \alpha$. Man beachte, daß e_{α}^{γ} und d_{α}^{γ} von der tatsächlichen Wahl von γ und α und nicht nur von $\gamma \setminus \alpha$ abhängen.

LEMMA 3.10.5. Wenn $\gamma \setminus \alpha$ ein Haken ist, dann ist $e_{\alpha}^{\gamma} = n + d_{\alpha}^{\gamma}$.

BEWEIS. Ein Haken der Länge k besetzt immer genau ein Feld auf einer Reihe von k benachbarten Diagonalen. Also ist

$$c(\gamma) - c(\alpha) = \sum_{i=1}^k (d_{\alpha}^{\gamma} + i) = kd_{\alpha}^{\gamma} + k(k+1)/2,$$

und die Behauptung folgt mit der Definition von e_{α}^{γ} . $\square$

LEMMA 3.10.6. Es ist

$$\chi_d^{\gamma \setminus \alpha}(T_{n-k} T_k) = \begin{cases} Q_{\tau(\gamma \setminus \alpha)}(-1)^{l_{\alpha}^{\gamma}} q^{n+d_{\alpha}^{\gamma}}, & \text{falls } \gamma \setminus \alpha \text{ ein Haken ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEWEIS. Sei $\rho = (\prod_{i=n-k}^{n-1} Q_{\tau(i+1)})^{1/k} e_{\alpha}^{\gamma}$. Nach (3.10.4) ist $T_{\Delta} = (T_{n-k} T_k)^k$ und hat nach (3.10.3) auf $V^{\gamma \setminus \alpha}$ nur ρ^k als Eigenwert.

Die Eigenwerte von $T_{n-k} T_k$ sind deshalb von der Form $\xi^j \rho$ für eine k -te Einheitswurzel ξ und gewisse $j = 0, \dots, k-1$. Damit ist $\chi_q^{\gamma \setminus \alpha}(T_{n-k} T_k) = Z \rho$ für eine Summe Z von k -ten Einheitswurzeln.

ρ spezialisiert zu $(\prod (-1)^{\tau(i+1)})^{1/k}$, und nach (3.10.2) ist

$$Z \left(\prod_{i=n-k}^{n-1} (-1)^{\tau(i+1)} \right)^{1/k} = \chi^{\gamma \setminus \alpha}(t_{n-k} k) = \begin{cases} (-1)^{l_{\alpha}} (-1)^{\tau(\gamma \setminus \alpha)} & \text{für Haken } \gamma \setminus \alpha, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $\rho \neq 0$, ist $Z = 0$ und damit $\chi_q^{\gamma \setminus \alpha}(T_{n-k} T_k) = 0$, wenn $\gamma \setminus \alpha$ kein Haken ist.

Andernfalls befinden sich alle Kästchen des Diagramms $\gamma \setminus \alpha$ in derselben Komponente $\tau(\gamma \setminus \alpha)$ des Diagramms γ und $\prod_{i=n-k}^{n-1} Q_{\tau(i+1)} = Q_{\tau(\gamma \setminus \alpha)}^k$. Dann ist $\rho = q^{\epsilon k} Q_{\tau(\gamma \setminus \alpha)}$ und spezialisiert zu $(-1)^{\tau(\gamma \setminus \alpha)}$. Damit haben wir $Z = (-1)^{l_{\alpha}}$, und nach (3.10.5) ist $e_{\alpha}^{\gamma} = n + d_{\alpha}^{\gamma}$. $\square$

Die Rekursionsformel für diesen Fall lautet also wie folgt.

SATZ 3.10.7. Sei $h \in H_{n-k}^{(2)}$. Dann ist

$$\chi_q^{\gamma}(h T_{n-k} T_k) = \sum_{\gamma \setminus \alpha = k} Q_{\tau(\gamma \setminus \alpha)} (-1)^{l_{\alpha}} q^{n+d_{\alpha}^{\gamma}} \chi_q^{\alpha}(h),$$

wobei über alle Doppelpartitionen α von $n-k$ summiert wird, so daß $\gamma \setminus \alpha$ ein Haken ist. Dabei ist d_{α}^{γ} der Gehalt eines Kästchens unmittelbar unter dem Haken $\gamma \setminus \alpha$.

BEWEIS. Die Behauptung folgt mit der Zerlegung des Charakters $\chi_q^{\gamma} = \sum_{\alpha} \chi_q^{\alpha} \chi_q^{\gamma \setminus \alpha}$ in (3.8.3) und der Berechnung von $\chi_q^{\gamma \setminus \alpha}(T_{n-k} T_k)$ in (3.10.6). $\square$

3.11. Die Charaktertafel der Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ B.

Zusammenfassend ist die Charaktertafel der Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ B_n durch folgende Formel bestimmt. Dazu sei $\chi_q^{(1,1)} = 1$.

HAUPTSATZ 3.11.1. Seien $\gamma = (\gamma^0, \gamma^1)$ und $\pi = (\pi^0, \pi^1)$ Doppelpartitionen von n und $w \in W_n$ ein Element minimaler Länge in der Klasse der Elemente mit Zykkelstruktur π . Weiter sei $\epsilon = 1$, falls $\pi^0 = []$, und $\epsilon = 0$ sonst.

Im Fall $\epsilon = 0$ sei $k = \pi_1^0$ für $l = l(\pi^0)$, andernfalls sei $k = \pi_1^1$. Schließlich sei ρ diejenige Doppelpartition von $n-k$, die aus π durch Streichen des Teils k hervorgeht. Dann ist der Wert $\chi_q^{\gamma}(\pi)$ des Charakters χ_q^{γ} auf T_w gegeben durch

$$\chi_q^{\gamma}(\pi) = \begin{cases} \sum_{h \setminus \alpha = k} (q-1)^{\epsilon l_{\alpha}-1} (-1)^{l_{\alpha}} q^{k-l_{\alpha}-\epsilon l_{\alpha}} \chi_q^{\alpha}(\rho), & \text{falls } \epsilon = 0, \text{ und} \\ \sum_{h \setminus \alpha = k} Q_{\tau(\gamma \setminus \alpha)} (-1)^{l_{\alpha}} q^{n+d_{\alpha}^{\gamma}} \chi_q^{\alpha}(\rho) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei wird über alle Doppelpartitionen α von $n - k$ summiert, für die $\gamma \setminus \alpha$ im Fall $\epsilon = 0$ ein Streifen und im Fall $\epsilon = 1$ ein Haken ist.

BEMERKUNG. Der in Abschnitt 3.1 konstruierte Standardrepräsentant w_π der Klasse mit Label π besteht aus Blöcken der Form $t_{s_{i+1}}^\epsilon \cdots s_{i+j-1}$, die für $\epsilon = 1$ einem Teil j von π^1 und für $\epsilon = 0$ einem Teil j von π^0 entsprechen. Dabei bilden die Blöcke mit $\epsilon = 1$ den Anfang des Wortes w_π , sortiert nach aufsteigender Länge, danach kommen, nach absteigender Länge sortiert, die Blöcke mit $\epsilon = 0$. In [20] wurde gezeigt, daß die so gebildeten Elemente minimale Länge in ihrer Konjugiertenklasse haben (s. Abschnitt 1.3).

Das entsprechende Element $T_{w_\pi} \in H_n^{(2)}$ hat damit die Form

$$T_{w_\pi} = T_{w_0} T_{n-k}^\epsilon S_{n-k+1} \cdots S_{n-1}$$

für ein nach demselben Verfahren gebildetes T_{w_0} . Falls $\epsilon = 1$, folgt $\pi^0 = []$ und $k = \pi_1^1$. Da $S_{n-k+1} \cdots S_{n-1} = T_\pi$, folgt die Behauptung hier mit (3.10.7) und $h = T_{w_0} \in H_{n-k}^{(2)}$.

Andernfalls ist $k = \pi_{1(n^0)}^0$, und die Behauptung folgt mit (3.9.2) und $h = T_{w_0}$. $\square$

Man beachte, daß die Reihenfolge der Längen der Blöcke mit $\epsilon = 0$ in w_π im Prinzip beliebig gewählt werden kann; alle so entstehenden Wörter haben minimale Länge in ihrer Konjugiertenklasse. Wir haben uns hier der Eindeutigkeit halber für eine Sortierung nach absteigender Länge, also der von der Partition π^0 vorgegebenen Reihenfolge entschieden. Anders verhält es sich bei den Blöcken mit $\epsilon = 1$. Damit das konstruierte Element w_π minimale Länge in seiner Konjugiertenklasse hat, müssen diese Blöcke nach aufsteigender Länge sortiert sein, also in umgekehrter Reihenfolge von π^1 , und vor den Blöcken mit $\epsilon = 0$ erscheinen.

Die Charaktertafel der Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ B_2 in Tabelle 1 veranschaulicht das Ergebnis aus Satz (3.11.1). Weitere Tafeln stehen im Anhang. Die Zeilen dieser Ta-

$H(B_2)$	$(1^2, 0)$	$(1, 1)$	$(0, 1^2)$	$(2, 0)$	$(0, 2)$
	1	t	tsts	s	ts
$(1^2, 0)$	1	Q	Q^2	-1	-Q
$(1, 1)$	2	$Q - 1$	$-2qQ$	$q - 1$	0
$(0, 1^2)$	1	-1	1	-1	1
$(2, 0)$	1	Q	$q^2 Q^2$	q	qQ
$(0, 2)$	1	-1	q^2	q	-q

TABELLE 1. Die Charaktertafel der Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ B_2 .

belle entsprechen den Charakteren und die Spalten den Konjugiertenklassen der Weylgruppe. Für die Klassen sind auch die Repräsentanten minimaler Länge angegeben.

3.12. Bemerkungen.

Satz (3.7.2) hat eine interessante Konsequenz.

FOLGERUNG 3.12.1. Für $T_{n-1} = S_{n-1} \cdots S_1 T S_1 \cdots S_{n-1}$ gilt

$$\prod_{i=0}^{2n-2} \prod_{j=0}^{r-1} (T_{n-1} - q^i Q_j) = 0.$$

BEWEIS. Nach (3.7.2) operiert T_{n-1} in jeder irreduziblen Darstellung von $H_n^{(r)}$ diagonal mit Eigenwerten der Form $q^{c(T:n)+n-1} Q_j$. Der Gehalt $c(T:n)$ von n in einem Standardtableau der Form γ für ein r -Tupel von Partitionen γ von n liegt zwischen $-(n-1)$ und $n-1$. Damit ist $0 \leq c(T:n) + (n-1) \leq 2n-2$. (Für $r=1$ und $n=1, 2, 3$ lassen sich hier weitere Einschränkungen angeben.) $\square$

FOLGERUNG 3.12.2. H_k^* ist epimorphes Bild einer Spezialisierung der zyklotomischen Algebra vom Typ $B_k^{(r(2(n-k)+1))}$.

BEWEIS. Die Erzeuger S_i , $i = n-k+1, \dots, n-1$ von H_k^* erfüllen untereinander die definierenden Relationen (ii), (v) und (vi) der zyklotomischen Algebra vom Typ $B_k^{(r(2(n-k)+1))}$ in Definition (3.6.1). Der Erzeuger T_{n-k} von H_k^* ist mit allen S_i , $i > n-k+1$, vertauschbar (iv), und es gilt

$$T_{n-k} S_{n-k+1} T_{n-k} S_{n-k+1} = T_{n-k} T_{n-k+1} = T_{n-k+1} T_{n-k} = S_{n-k+1} T_{n-k} S_{n-k+1} T_{n-k}.$$

Außerdem erfüllt T_{n-k} nach (3.12.1) die Relation

$$\prod_{i=0}^{2(n-k)} \prod_{j=0}^{r-1} (T_{n-k} - q^i Q_j) = 0$$

und damit alle definierenden Relationen einer zyklotomischen Algebra vom Typ $B_k^{(r(2(n-k)+1))}$, deren Parameter zu $(q; q^i Q_j | i = 0, \dots, 2(n-k); j = 0, \dots, r-1)$ spezialisiert worden sind. $\square$

Außerdem ist $H_{n-k}^{(r)}$ mit H_k^* vertauschbar.

LEMMA 3.12.3. Seien $h_1 \in H_{n-k}^{(r)}$ und $h_2 \in H_k^*$. Dann ist $h_1 h_2 = h_2 h_1$.

BEWEIS. Wegen der Relationen in Definition (3.6.1) genügt es, die Vertauschbarkeit von T_{n-k} mit den Erzeugern von $H_{n-k}^{(r)}$ nachzuweisen. Dazu sei $1 \leq j < n-k$. Dann ist durch bloßes Anwenden der Zopfrelationen

$$S_j T_{n-k} = S_{n-k} \cdots S_1 S_{j+1} T S_1 \cdots S_{n-k} = S_{n-k} \cdots S_1 T S_{j+1} S_1 \cdots S_{n-k} = T_{n-k} S_j.$$

Weiter gilt

$$T T_{n-k} = S_{n-k} \cdots S_2 T S_1 T S_1 \cdots S_{n-k} = S_{n-k} \cdots S_1 T S_1 T S_2 \cdots S_{n-k} = T_{n-k} T.$$

$\square$

Dies rechtfertigt, in Abschnitt 3.10 von einer Einschränkung auf eine Unteralgebra vom Typ $B \times B$ zu reden.

Mit einer weiteren Verallgemeinerung der Littlewood-Richardson-Regeln aus Abschnitt 3.5 auf Kranzprodukte $C_r \wr S_n$ läßt sich der Beweis von (3.9.2) auch für Elemente der Form hT_π in der zyklotomischen Algebra $H_n^{(r)}$ mit $r > 2$ führen. Auch der Beweis von (3.10.7) läßt sich mit wenig mehr Aufwand für $r > 2$ führen. Damit gelten diese beiden Charakterformeln ganz allgemein in zyklotomischen Algebren $H_n^{(r)}$. Allerdings reichen diese beiden Formeln für $r > 2$ nicht aus, um eine Charaktertafel dieser Algebra zu bestimmen.

Hier gilt es, zunächst auch die Frage zu klären, auf welchen Elementen $h \in H_n^{(r)}$ in Analogie zu Satz (1.3.1) die Charaktere ausgewertet werden sollen und wie die Charakterwerte auf anderen Elementen aus der Tafel zu erhalten sind.

Für $r = 1$ (und $Q_0 = 1$) ist $H_n^{(r)}$ die Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A_{n-1} . Hier ist also $T = 1$. Definiert man unter dieser Voraussetzung Elemente $T_i = S_i \cdots S_1 T S_1 \cdots S_i$, dann sind dies keine Basiselemente. Dennoch kann man zu einer Partition π von n ein Produkt von Blöcken der Form $T_i S_{i+1} \cdots S_{i+1}$ bilden. Für diese Elemente erhält man aus Satz (3.11.1) folgende Formel.

FOLGERUNG 3.12.4. Seien γ eine Partition von n und $T_\pi = h T_{n-k} S_{n-k+1} \cdots S_{n-1}$ für ein $h \in H_{n-k}$. Dann ist

$$\chi_\pi^Y(T_\pi) = \sum_{h \setminus \alpha = k} (-1)^{l_\alpha} q^{n+d_\alpha} \chi_\alpha^Y(h),$$

wobei nur über die Partitionen α von $n-k$ summiert wird, für die $\gamma \setminus \alpha$ ein Haken ist, und d_α den Gehalt eines Kästchens direkt unterhalb des Hakens $\gamma \setminus \alpha$ bezeichnet.

Für $n = 4$ ergibt diese Formel die in Tabelle 2 angegebenen Charakterwerte. Auch diese

	$[1^4]$	$[21^2]$	$[2^2]$	$[31]$	$[4]$
	$S_1^2 S_2 S_2^2 S_3 S_3 S_2 S_1 S_2 S_3$	$S_1^2 S_2 S_1^2 S_2 S_3$	$S_1 S_2 S_1^2 S_2 S_3$	$S_1^2 S_2 S_3$	$S_1 S_2 S_3$
$[1^4]$	1	-1	1	1	-1
$[21^2]$	$3q^4$	$-q^3$	$-q^2$	0	q
$[2^2]$	$2q^6$	$q^4 - q^3$	$2q^3$	$-q^2$	0
$[31]$	$3q^8$	q^4	$-q^4$	0	$-q^2$
$[4]$	q^{12}	q^7	q^6	q^4	q^3

TABELLE 2. Eine andere Tafel der Iwahori-Hecke-Algebra H_4 .

Tafel spezialisiert zur Charaktertafel der Weylgruppe S_4 . Da in diesem Fall nur über Haken summiert wird, enthält diese Tafel mehr Einträge 0 als die Charaktertafel in Abschnitt 2.7.

Wünschenswert wäre auch eine Analogie zu Starkeys Ergebnis (2.8.1) für Typ A, das die Beziehung zwischen den Charakterwerten der Weylgruppe und denen der Iwahori-Hecke-Algebra in natürlicher Weise beschreibt. Für Typ B wird die Situation durch die Anwesenheit einer zweiten Unbestimmten verkompliziert. Die in kleinen Beispielen berechneten Werte lassen leider keine offensichtliche Regelmäßigkeit erkennen.

KAPITEL 4

Ein Normalteiler vom Index 2 und Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ D.

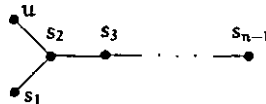
Dieses Kapitel handelt von der Berechnung der Charaktertafel der Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ D_n .

Dazu wird in Abschnitt 4.1 die Weylgruppe vom Typ D_n als normale Untergruppe der Weylgruppe vom Typ B_n vorgestellt. Charaktere von $W(D_n)$ erhält man durch Einschränkung von Charakteren von $W(B_n)$. Dadurch übertragen sich die Bezeichnungen der Konjugiertenklassen und die der irreduziblen Charaktere aus dem vorhergehenden Kapitel auf die Weylgruppen $W(D_n)$. Zur Bestimmung der Charaktertafel von $W(D_n)$ in Abschnitt 4.2 muß zunächst geklärt werden, welche Konjugiertenklassen von $W(B_n)$ in mehrere Konjugiertenklassen von $W(D_n)$ zerfallen und welche irreduziblen Charaktere von $W(B_n)$ bei Einschränkung auf $W(D_n)$ nicht irreduzibel bleiben. Die Bestimmung der vollständigen Charaktertafel beschränkt sich dann im wesentlichen auf die Berechnung der Werte aufspaltender Charaktere auf aufspaltenden Klassen. Das ist nur dann nötig, wenn n gerade ist, und geschieht in Satz (4.2.1) durch die Berechnung eines Differenzcharakters. Es stellt sich heraus, daß der Wert des Differenzcharakters ein Vielfaches eines Charakterwerts der symmetrischen Gruppe $S_{n/2}$ ist.

Die Iwahori-Hecke-Algebra H vom Typ D_n ist eine Unteralgebra einer Spezialisierung der Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ B_n . So erhält man auch hier Charaktere von H als Einschränkungen von Charakteren von $H(B_n)$. Wie im Fall der Weylgruppe ist auch hier der größte Teil der Charaktertafel mit den Ergebnissen des vorhergehenden Kapitels bereits bekannt. Nur für gerades n müssen noch die Werte gewisser Differenzcharaktere auf aufspaltenden Klassen bestimmt werden. Wir geben als Vermutung (4.3.2) eine Formel für den Wert dieses Differenzcharakters an. Dieser Wert ist ein Vielfaches eines Charakterwerts der Iwahori-Hecke-Algebra $H_{n/2}$ vom Typ $A_{n/2-1}$ mit Parameter q^2 . Die abschließende Betrachtung in Abschnitt 4.4 stellt eine Verbindung zu Abschnitt 2.8 her und beleuchtet das Auftreten des Parameters q^2 .

4.1. Die Weylgruppe.

Die Weylgruppe $W(D_n)$ vom Typ D_n ist bestimmt durch das folgende Dynkindiagramm.



Die Weylgruppe $W(D_n)$ ist ein Normalteiler vom Index zwei in der Weylgruppe vom Typ B_n . Eine mögliche Einbettung von $W(D_n)$ in $W(B_n)$ ist durch die Abbildung gegeben, die den Erzeuger u auf $t_1 s_1$ in $W(B_n)$ und jeden Erzeuger s_i , $i = 1, \dots, n-1$, von $W(D_n)$ auf den entsprechenden Erzeuger s_i von $W(B_n)$ abbildet. Die Spiegelungen $s_1, \dots, s_{n-1}$ erzeugen hier wie in $W(B_n)$ eine zu S_n isomorphe Untergruppe von $W(D_n)$.

Als Normalteiler ist $W(D_n)$ eine Vereinigung von Konjugiertenklassen von $W(B_n)$. Eine Klasse von $W(B_n)$ mit Label (π^0, π^1) gehört genau dann zu $W(D_n)$, wenn die Länge $l(\pi^1)$ gerade ist. Die Klasse zerfällt in $W(D_n)$ in zwei Klassen gleicher Länge, genau dann, wenn der Zentralisator eines solchen Elements in $W(B_n)$ ganz in $W(D_n)$ liegt, und dies ist genau dann der Fall, wenn $\pi^1 = []$ und π^0 nur aus geraden Teilen besteht. In diesem Fall ist n gerade und $\pi^0 = 2\pi$ für eine Partition π von $n/2$. Wir bezeichnen die beiden so entstandenen Klassen mit $(2\pi, +)$ und $(2\pi, -)$. Dabei sei $(2\pi, +)$ diejenige Klasse, die Elemente der Untergruppe $S_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \rangle$ von $W(D_n)$ enthält. Die nichtzerfallenden Klassen werden in $W(D_n)$ mit derselben Doppelpartition wie in $W(B_n)$ bezeichnet.

Einen Standardrepräsentanten der Klasse mit Label (π^0, π^1) erhält man wie folgt. Dazu sei $t'_1 = s_1 u = u s_1$ und $t'_i = s_i t'_{i-1} s_i$ für $i = 2, \dots, n-1$. Damit ist t'_i der simultane Vorzeichenwechsel an den Plätzen 1 und $i+1$. Weiter setzen wir $t'_0 = 1$. Dann liefert das Verfahren für $W(B_n)$ aus Abschnitt 3.4 auch hier einen Standardrepräsentanten. Im Fall einer aufspaltenden Klasse mit Label $(2\pi, [])$ erhält man so ein Wort w , das mit s_1 beginnt. Dies ist der Standardrepräsentant der Klasse $(2\pi, +)$. Ersetzt man nun dieses s_1 durch u , so erhält man mit $u s_1 w$ den Standardrepräsentanten der Klasse $(2\pi, -)$.

Zur Veranschaulichung listen wir hier die Standardrepräsentanten der Konjugiertenklassen der Weylgruppe vom Typ D_4 auf. (Wir bedienen uns dabei einer kompakten Schreibweise und bezeichnen die leere Partition mit 0.)

Wir untersuchen das Verhalten der Standardrepräsentanten von $W(D_n)$ unter der Einbettung in $W(B_n)$. Dazu sei w Standardrepräsentant einer Klasse von $W(D_n)$, deren Label nicht von der Form $(2\pi, -)$ ist.

Dann läßt sich w als Produkt von Blöcken der Form $t_i^{\epsilon_i} s_{i+1} \dots s_j$ mit $\epsilon_i = 0$ oder 1 lesen. Dazu muß man sich, falls π^1 nicht leer ist, $t'_0 = 1$ an den Anfang des Worts denken. So ist zum Beispiel $s_1 t'_2 s_3 = t'_0 s_1 t'_2 s_3$ ein Produkt aus zwei Blöcken mit $\epsilon_i = 1$ und der Repräsentant der Klasse $(0, 2^2)$.

$(1^4, 0)$	1
$\{1^2, 1^2\}$	t'_1
$(0, 1^4)$	$t'_1 t'_2 t'_3$
$(21^2, 0)$	s_1
$(1, 21)$	$t'_1 s_2$
$(2, 1^2)$	$t'_1 s_3$
$(2^2, +)$	$s_1 s_3$
$(2^2, -)$	$u s_3$
$(0, 2^2)$	$s_1 t'_2 s_3$
$(31, 0)$	$s_1 s_2$
$(0, 31)$	$t'_1 s_2 s_3$
$(4, +)$	$s_1 s_2 s_3$
$(4, -)$	$u s_2 s_3$

In $W(B_n)$ ist $t'_i = t_i t = t_i t$ für $i = 0, \dots, n-1$ und damit $t'_i s_{i+1} \dots s_j = t_i s_{i+1} \dots s_j = t_i s_{i+1} \dots s_j t$. Da w als Standardrepräsentant von $W(D_n)$ immer eine gerade Anzahl von Blöcken der Form $t'_i s_{i+1} \dots s_j$ enthält, kürzen sich die Faktoren t in dem entsprechenden Ausdruck in $W(B_n)$ heraus und w ist auch Standardrepräsentant seiner Klasse in $W(B_n)$.

Der Standardrepräsentant einer Klasse $(2\pi, -)$ hat die Form uw für ein $w \in \langle s_2, \dots, s_{n-1} \rangle$. Hier ist $uw = ts_1 w = ts_1 w t$ ein Element, das nicht minimale Länge in seiner Konjugiertenklasse in $W(B_n)$ hat.

4.2. Die Charaktertafel der Weylgruppe vom Typ D.

Da die Weylgruppe $W(D_n)$ ein Normalteiler vom Index zwei in der Weylgruppe vom Typ B_n ist, kann ihre Charaktertafel mittels Cliffordtheorie aus der Charaktertafel von $W(B_n)$ gewonnen werden (vgl. [25], (2.25) und (2.45), und [28])

Die Charaktere $\chi^{(\alpha, \beta)}$ und $\chi^{(\beta, \alpha)}$ von $W(B_n)$ schränken zu demselben irreduziblen Charakter von $W(D_n)$ ein, wenn $\alpha \neq \beta$. Der Charakter $\chi^{(\alpha, \alpha)}$ schränkt auf eine Summe von zwei irreduziblen Charakteren $\chi^{(\alpha, +)}$ und $\chi^{(\alpha, -)}$ ein. In diesem Fall ist n gerade und α eine Partition von $n/2$.

Nun sind die meisten Charakterwerte unmittelbar aus der Tafel von $W(B_n)$ bekannt. Insbesondere ist für ungerades n die Charaktertafel von $W(D_n)$ eine Teilmatrix der Charaktertafel von $W(B_n)$. Zu ermitteln sind noch die Werte der zerfallenden Charaktere auf den zerfallenden Klassen. Hier kennen wir auch bereits die Summe zweier Charakterwerte. Das Problem wird nun gelöst durch die Bestimmung der Differenz dieser Charakterwerte.

Dazu seien n gerade, α und π Partitionen von $n/2$, $w \in W$ ein Element aus der Klasse mit Label $(2\pi, +)$ und

$$\Delta^\alpha(w) = \chi^{(\alpha, +)}(w) - \chi^{(\alpha, -)}(w).$$

Dann ist

$$\chi^{(\alpha, \pm)}(w) = \frac{1}{2} (\chi^{(\alpha, \alpha)}(2\pi, []) \pm \Delta^\alpha(w)).$$

SATZ 4.2.1. Für Partitionen α und π von $n/2$ und ein $w \in W$ aus der durch $(2\pi, +)$ parametrisierten Klasse gilt

$$\Delta^\alpha(w) = 2^{l(\pi)} \chi^\alpha(\pi),$$

wobei $\chi^\alpha(\pi)$ der durch α und π bestimmte Charakterwert der symmetrischen Gruppe $S_{n/2}$ ist.

BEWEIS. [29] (5.1) und vgl. [37]

□

4.3. Charakterwerte der Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ D.

Sei $H_0(B_n)$ die Spezialisierung der Iwahori-Hecke-Algebra $H(B_n)$ unter der Abbildung $f_0: Q \mapsto 1$. Diese Abbildung induziert eine Bijektion zwischen den irreduziblen Charakteren von $H(B_n)$ und $H_0(B_n)$. Wir bezeichnen den spezialisierten Charakter $f_0 \circ \chi_q^{(\alpha, \beta)}$ von $H_0(B_n)$ wieder mit $\chi_q^{(\alpha, \beta)}$. $H_0(B_n)$ ist eine $\mathbb{Q}(q)$ -Algebra mit Basis $\{T_w | w \in W(B_n)\}$. Mit $T = T_t$ und $S_i = T_{s_i}$, $i = 1, \dots, n-1$ gelten die Relationen (ii) – (vi) aus Definition (3.6.1) und

$$(i') \quad T_t^2 = 1.$$

Die Iwahori-Hecke-Algebra $H(D_n)$ ist isomorph zu der von $T_{s_1}, \dots, T_{s_{n-1}}$ und $T_u = T_t T_{s_1} T_t$ erzeugten Unterálgebra von $H_0(B_n)$.

Nach [21] gilt hier (wie für die entsprechenden Weylgruppen), daß ein Charakter $\chi_q^{(\alpha, \beta)}$ von $H_0(B_n)$ eingeschränkt auf $H(D_n)$ irreduzibel bleibt, wenn $\alpha \neq \beta$. Die Einschränkung eines Charakters $\chi_q^{(\alpha, \alpha)}$ von $H_0(B_n)$ auf $H(D_n)$ zerfällt in zwei irreduzible Konstituenten $\chi_q^{(\alpha, +)}$ und $\chi_q^{(\alpha, -)}$. Dies kommt offensichtlich nur für gerades n vor.

LEMMA 4.3.1. *Sei χ_q ein irreduzibler Charakter von $H_0(B_n)$ und χ'_q seine Einschränkung auf $H(D_n)$. Weiter sei $w \in W(D_n)$ ein Element minimaler Länge in seiner Konjugiertenklasse. Dann ist*

$$\chi'_q(T_w) = \chi_q(T_{w'})$$

für ein Element w' minimaler Länge in seiner Konjugiertenklasse in $W(B_n)$.

BEWEIS. Es genügt, dies für die Standardrepräsentanten zu zeigen. Nach Abschnitt 4.1 ist ein Standardrepräsentant einer Klasse von $W(D_n)$ entweder selbst schon ein Element minimaler Länge in $W(B_n)$ oder von der Form $uw = ts_1wt$ für ein $w \in \langle s_2, \dots, s_{n-1} \rangle$. In diesem Fall ist aber

$$T_{uw} = T_{ts_1wt} = T_t T_{s_1w} T_t$$

wegen $T_t^2 = 1$ in $H_0(B_n)$ zu T_{s_1w} konjugiert. Das Element s_1w hat minimale Länge in $W(B_n)$ und es gilt $\chi'_q(T_{uw}) = \chi_q(T_{uw}) = \chi_q(T_{s_1w})$. $\square$

Damit sind die meisten Charakterwerte von $H(D_n)$ schon aus der durch (3.11.1) bestimmten Charaktertafel von $H_0(B_n)$ bekannt. Insbesondere ist für ungerades n die Charaktertafel von $H(D_n)$ eine Teilmatrix der Charaktertafel von $H_0(B_n)$.

Sei also n gerade und α eine Partition von $n/2$. Wir definieren

$$\Delta_q^\alpha = \chi_q^{(\alpha, +)} - \chi_q^{(\alpha, -)}$$

als Differenz der beiden irreduziblen Charaktere von $H(D_n)$, deren Summe die Einschränkung des Charakters $\chi_q^{(\alpha, \alpha)}$ von $H_0(B_n)$ ist. Dann ist

$$\chi_q^{(\alpha, \pm)}(T_w) = \frac{1}{2} (\chi_q^{(\alpha, \alpha)}(2\pi, [1]) \pm \Delta_q^\alpha(T_w))$$

für jedes $w \in W(D_n)$ von minimaler Länge in der Klasse $(2\pi, +)$. Nach Hoefsmit's [21] Konstruktion und Lemma (3.1) in [4] ist

$$\chi_q^{(\alpha, -)}(T_w) = \chi_q^{(\alpha, +)}(T_{tw})$$

für alle $w \in W(D_n)$. Da t per Konjugation auf der Menge der Erzeuger $\{u, s_1, \dots, s_{n-1}\}$ von $W(D_n)$ operiert, ist $l(w) = l(twt)$ für alle $w \in W(D_n)$. Wenn also w minimale

Länge in seiner Konjugiertenklasse in $W(D_n)$ hat und w und $\text{tw}t$ in $W(D_n)$ konjugiert sind, dann hat auch $\text{tw}t$ minimale Länge in dieser Klasse. Mit (1.4.1) gilt dann

$$\chi_q^{(\alpha,+)}(T_{\text{tw}t}) = \chi_q^{(\alpha,+)}(T_w),$$

also $\Delta_q^\alpha(T_w) = 0$ für alle $w \in W(D_n)$, die nicht in einer aufspaltenden Klasse $(2\pi, [])$ liegen. Zur Bestimmung der vollständigen Charaktertafel von $H(D_n)$ ist in diesem Fall also nur noch der Differenzcharakter Δ_q^α auf einem Element T_w für ein w aus der Klasse mit Label $(2\pi, +)$ auszuwerten.

Die explizite Berechnung der Charaktertafeln von $H(D_4)$ und $H(D_6)$ legt folgende Formel¹ für die Werte des Differenzcharakters nahe.

VERMUTUNG 4.3.2. Seien n gerade und $w \in S_n$ der Standardrepräsentant der Klasse von Elementen mit Zykelform 2π für eine Partition π von $n/2$. Dann ist

$$\Delta_q^\alpha(T_w) = (q+1)^{l(\alpha)} \chi_{q^2}^\alpha(\pi),$$

wobei $\chi_{q^2}^\alpha(\pi)$ der durch α und π bestimmte Charakterwert der Iwahori-Hecke-Algebra $H_{n/2}$ mit Parameter q^2 ist.

4.4. Eine abschließende Betrachtung.

Wir beenden dieses Kapitel mit einer Betrachtung, die das Auftreten des Parameters q^2 in der Formel (4.3.2) in Verbindung zu den Ergebnissen aus Abschnitt 2.8 bringt. Es bleibt offen, ob sich diese Betrachtung zu einem Beweis der Formel ausbauen läßt. In Anlehnung an die Strategie, die in [37] zur Herleitung der entsprechenden Formel für die Weylgruppe benutzt wird, berechnen wir den Wert $(q+1)^{l(\alpha)} \chi_{q^2}^\alpha(\pi)$ als Spur eines bestimmten Endomorphismus auf dem $H_0(B_n)$ -Modul $V^{(\alpha, \alpha)}$. Das genaue Ergebnis ist in Satz (4.4.2) formuliert.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß das interessante Element w in der zu S_n isomorphen Untergruppe $\langle s_1, \dots, s_{n-1} \rangle$ liegt und unsere Betrachtungen auf S_n und die zugehörige Iwahori-Hecke-Algebra H_n beschränken.

Wir wechseln den Standpunkt und betrachten zunächst gewisse Darstellungen der Universalalgebra $H_{n+m} = \langle T_{s_1}, \dots, T_{s_{n+m-1}} \rangle$ von $H(D_{n+m})$ für ein $m \geq 0$.

Dazu seien α eine Partition von n , β eine Partition von m und damit (α, β) eine Doppelpartition von $n+m$. Weiter seien V^α ein H_n -Modul mit Charakter χ_q^α , Grad f^α und Basis $\{v_i | i = 1, \dots, f^\alpha\}$ und V^β ein H_m -Modul mit Charakter χ_q^β , Grad f^β und Basis $\{w_j | j = 1, \dots, f^\beta\}$. Außerdem sei D ein System von Rechtsnebenklassenvertretern von $S_n \times S_m$ in S_{n+m} . Hier ist $S_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \rangle$ und $S_m = \langle s_{n+1}, \dots, s_{n+m-1} \rangle$, wenn $S_{n+m} = \langle s_1, \dots, s_{n+m-1} \rangle$. Dann bildet die Menge $\{v_i \otimes w_j \otimes T_d | i = 1, \dots, f^\alpha; j = 1, \dots, f^\beta; d \in D\}$ in der üblichen Weise (s. Abschnitt 1.2) eine Basis für den induzierten H_{n+m} -Modul $V^{(\alpha, \beta)} = (V^\alpha \otimes V^\beta)^{H_{n+m}}$.

¹Wie bereits im Vorwort dieser Arbeit erwähnt, läßt sich diese Formel anhand der Arbeit von A. Ram und T. Halverson verifizieren.

Mit $S'_m = (s_1, \dots, s_{m-1})$ und $S'_n = (s_{m+1}, \dots, s_{m+n-1})$ ist $S'_m \times S'_n$ eine zu $S_n \times S_m$ isomorphe Untergruppe von S_{n+m} . Ein Isomorphismus ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \phi: S_n \times S_m &\rightarrow S'_m \times S'_n \\ s_i &\mapsto s_{i+m \pmod{n+m}}. \end{aligned}$$

Sei

$$d_0 = (s_n \cdots s_1)(s_{n+1} \cdots s_2) \cdots (s_{n+m-1} \cdots s_m).$$

Dann gilt

LEMMA 4.4.1. d_0 ist das (eindeutige) längste Element in D und $\phi(w) = d_0^{-1} w d_0$ für alle $w \in S_n \times S_m$.

BEWEIS. Für das längste Element w_0 von S_{n+m} gilt $w_0^{-1} s_i w_0 = s_{m+n-i}$, $i = 1, \dots, n+m-1$. Entsprechendes gilt für die längsten Elemente von S_n und S_m . Deren Produkt ist das längste Element von $S_n \times S_m$ und wird mit w'_0 bezeichnet. Daraus folgt, daß ϕ die Konjugation mit $w_0'^{-1} w_0$, also dem längsten Element in D ist.

Das längste Element von S_{n+m} ist

$$w_0 = s_1(s_2 s_1)(s_3 s_2 s_1) \cdots (s_{n+m-1} \cdots s_1),$$

und entsprechendes gilt für die längsten Elemente von S_n , S_m und S'_m . Es ist $w_0 = w_0(S_n) d_0 w_0(S'_m)$ (wobei $w_0(S_n)$ das längste Element von S_n ist und $w_0(S'_m) = s_1(s_2 s_1) \cdots (s_{m-1} \cdots s_1)$ dasjenige von S'_m). Mit $d_0 w_0(S'_m) = w_0(S_m) d_0$ für das längste Element $w_0(S_m)$ von S_m folgt $d_0 = w_0'^{-1} w_0$. $\square$

Zu jedem $d \in D$ sei

$$\hat{d} = d_0^{-1} d.$$

Nach Lemma (1.1.5) gilt $l(d) + l(\hat{d}) = l(d_0)$. Das längste Element von $S'_m \times S'_n$ ist $\phi(w'_0) = d_0^{-1} w'_0 d_0$. Damit ist $d_0^{-1} = (d_0^{-1} w'_0 d_0)^{-1} w_0$ der längste Nebenklassenvertreter von $S'_m \times S'_n$ in S_{n+m} und $\hat{d}$ als Präfix von d_0^{-1} ein ausgezeichnete Nebenklassenvertreter von $S'_m \times S'_n$ in S_{n+m} .

Wir definieren eine lineare Abbildung σ zwischen $V^{(\alpha, \beta)}$ und $V^{(\beta, \alpha)}$ durch

$$(v_i \otimes w_j \otimes T_d) \sigma = w_j \otimes v_i \otimes T_{\hat{d}}.$$

Offensichtlich ist σ ein Isomorphismus.

Sei nun $\alpha = \beta$. Dann ist $V^{(\alpha, \alpha)}$ isomorph zur Einschränkung eines $H_0(B_{2n})$ -Moduls mit Charakter $\chi_d^{(\alpha, \alpha)}$ auf H_{2n} . Wir können nun den angekündigten Satz formulieren.

SATZ 4.4.2. Sei $w \in S_{2n}$ der Standardrepräsentant der Klasse von Elementen mit Zykelstruktur 2π für eine Partition π von n . Dann ist

$$\text{Spur}(T_w \sigma, V^{(\alpha, \alpha)}) = (q+1)^{l(\alpha)} \chi_q^{\alpha_2}(\pi).$$

Dieser Satz folgt aus (4.4.5) und (2.8.2). Der Beweis von (4.4.5) bildet den Rest dieses Kapitels.

Zur Berechnung der Spur von $T_w \sigma$ auf $V^{(\alpha, \alpha)}$ müssen wir die Operation von H_{2n} auf $V^{(\alpha, \alpha)}$ genau untersuchen.

Dazu sei $d \in D$ und $w \in S_{2n}$ mit $w \leq s_1 \cdots s_{2n-1}$ ein Unterwort eines Coxeter-Elements. Da w dann Produkt verschiedener Spiegelungen ist, gilt mit Lemma (1.2.3)

$$T_d T_w = \sum_{w' \leq w} a_{d, dw'}^w T_{u(w, d, dw')} T_{dw'}$$

für gewisse Koeffizienten $a_{d, dw'}^w \in A$ und passende Elemente $u(w, d, dw')$, die in $S_n \times S_n$ als Produkt $u_1(w, d, dw') u_2(w, d, dw')$ geschrieben werden können. Hierbei ist $a_{d, dw'}^w = 0$, falls $dw' \notin D$. Es sei daran erinnert, daß $\phi(u_2(w, d, dw'))$ in S_n liegt, also die Operation von $T_{\phi(u_2(w, d, dw'))}$ auf V^α definiert ist. Damit ist die Operation von T_w auf $V^{(\alpha, \alpha)}$ gegeben durch

$$(v_i \otimes v_j \otimes T_d) T_w = \sum_{w' \leq w} a_{d, dw'}^w (v_i T_{u_1(w, d, dw')} \otimes v_j T_{\phi(u_2(w, d, dw'))} \otimes T_{dw'})$$

und $T_w \sigma$ operiert als

$$(v_i \otimes v_j \otimes T_d) T_w \sigma = \sum_{w' \leq w} a_{d, dw'}^w (v_j T_{\phi(u_2(w, d, dw'))} \otimes v_i T_{u_1(w, d, dw')} \otimes T_{dw'}).$$

Ein Beitrag zur Spur entsteht nur dann, wenn $\hat{d} = dw'$ ist. Wir untersuchen diese Situation genauer. Als Permutation ist

$$d_0 = (s_n \cdots s_1)(s_{n+1} \cdots s_2) \cdots (s_{n+m-1} \cdots s_m) = (1, n+1)(2, n+2) \cdots (n, 2n)$$

ein Element mit Zykelstruktur $[2^n]$. Das (eindeutige) Element minimaler Länge in dieser Klasse ist

$$x_0 = s_1 s_3 \cdots s_{2n-1} = (1, 2)(3, 4) \cdots (2n-1, 2n).$$

Weiter sei

$$b = (s_n \cdots s_2)(s_{n+1} \cdots s_4) \cdots (s_{2n-3} s_{2n-4}) s_{2n-2}.$$

Dann ist

$$d_0 = b x_0 b^{-1}$$

ein reduzierter Ausdruck für d_0 , und b ist dadurch eindeutig bestimmt. Wir definieren $U = \{1, 3, \dots, 2n-1\}$ als die Menge aller ungeraden Indizes und $G = \{2, 4, \dots, 2n-2\}$ als die Menge aller geraden Indizes. Zu jedem $R \subseteq U$ sei

$$w(R) = \prod_{i \in R} s_i$$

(man beachte, daß die s_i , $i \in U$, miteinander vertauschbar sind), und zu $S \subseteq G$ sei

$$x(S) = x_1 x_2^{\epsilon_2} x_3 x_4^{\epsilon_4} x_5 \cdots x_{2n-2}^{\epsilon_{2n-2}} x_{2n-1} \quad \text{mit} \quad \epsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in S, \\ 0, & \text{falls } i \notin S. \end{cases}$$

Dann ist $x_0 = w(U) = x(\emptyset)$. Jedes $w(R)$ hat Ordnung zwei und ist deshalb gleich seinem Inversen.

LEMMA 4.4.3. Sei $d \in D$ mit $\hat{d} = dw'$ für ein $w' \leq w$. Dann ist $w' = x_0$ und $d = bw(R)$ für ein $R \subseteq U$.

BEWEIS. Seien d und w' mit $\hat{d} = dw'$ gegeben. Nach Definition ist $\hat{d} = d_0 d$ und damit $w' = d^{-1} d_0 d$, also zu d_0 konjugiert. Jedes von x_0 verschiedene Konjugierte von x_0 enthält einen Erzeuger s_i mindestens zweimal. Da w' ein Unterwort von $s_1 \cdots s_{2n-1}$ ist, in dem jedes s_i höchstens einmal vorkommt, folgt $w' = x_0$.

Sei

$$b_d = dw(R_d), \quad \text{wobei } R_d = \{i \in U \mid l(ds_i) < l(d)\}.$$

Dann ist $d = b_d w(R_d)$ mit $l(d) = l(b_d) + l(w(R_d))$ und $\hat{d} = dx_0 = b_d w(R_d) w(U) = b_d w(\bar{R}_d)$, wobei $\bar{R}$ das Komplement von R in U bezeichnet. Da $l(b_d s_i) = l(b_d) + 1$ für alle $i \in U$, ist $b_d = b_{\bar{d}}$ und $R_d = \bar{R}_d$ in der entsprechenden Zerlegung von $\hat{d}$. Also ist $d_0 = b_d x_0 b_d^{-1}$ ein reduzierter Ausdruck für d_0 . Damit ist $b_d = b$, und $d = bw(R)$ für ein $R \subseteq U$. $\square$

Nun sei π eine Partition von n und w der Standardrepräsentant der Klasse von Elementen mit Zykelsstruktur 2π in S_{2n} . Dann gilt $x_0 \leq w \leq s_1 \cdots s_{2n-1}$ und $w = x(S)$ für ein $S \subseteq G$. Weiter sei T ein Tableau der Form π , zeilenweise von rechts nach links gefüllt mit den Zahlen $1, 3, \dots, 2n-1$. Zu einer Teilmenge $R \subseteq U$ beschreiben die Zahlen $i \in R$ auch eine Teilmenge von T , welche in manchen Fällen das Diagramm einer Komposition $\mu \subseteq \pi$ darstellt. In einem solchen Fall sagen wir, R definiert eine Komposition $\mu \subseteq \pi$.

LEMMA 4.4.4. Sei $R \subseteq U$ und $d = bw(R) \in D$. Wenn R eine Komposition $\mu \subseteq \pi$ definiert, dann gelten

$$\begin{aligned} a_{d\hat{d}}^w &= q^{|w|} (q-1)^{l(\pi \div \mu) - l(\pi)}, \\ u_1(w, d, \hat{d}) &= s_1^{\epsilon_1} \cdots s_{n-1}^{\epsilon_{n-1}}, \quad \epsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } 2i \in S \text{ und } 2i-1 \notin R, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{und} \\ u_2(w, d, \hat{d}) &= s_{n+1}^{\epsilon_{n+1}} \cdots s_{2n-1}^{\epsilon_{2n-1}}, \quad \epsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } 2i-n \in S \text{ und } 2i-n+1 \in R, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Außerdem hat $u_1(w, d, \hat{d}) \phi(u_2(w, d, \hat{d}))$ in diesem Fall die Zykelsstruktur $\pi \div \mu$.

Andernfalls ist $a_{d\hat{d}}^w = 0$.

BEWEIS. Wir bestimmen den zu $\hat{d} = bw(\bar{R})$ gehörenden Summand in der Zerlegung von $T_d T_{x(S)} = \sum_{d'} a_{d,d'}^{x(S)} u(x(S), d, d') T_{d'}$.

Zur Verdeutlichung der Abhängigkeit von n setzen wir hier $b = b_n$. Dann ist $b_n = (s_{n+1} \cdots s_{2n-2}) b_{n-1}$. Weiter sei für eine Teilmenge $A \subseteq \{1, \dots, 2n-1\}$ und ein $i \in$

$\{1, \dots, 2n-1\}$

$$\delta_A(i) = \begin{cases} s_i, & \text{falls } i \in A, \text{ und} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist $w(R) = w(R')\delta_R(2n-1)$ für eine Teilmenge $R' \subseteq U' = \{1, 3, \dots, 2n-3\}$ und $x(S) = x'(S')\delta_S(2n-2)s_{2n-1}$ für ein $S' \subseteq G' = \{2, 4, \dots, 2n-4\}$ mit passend definiertem x' . Wir haben dann

$$T_{b_n w(R)} T_{x(S)} = T_{s_n s_{n+1} \dots s_{2n-2}} T_{b_{n-1} w(R')} T_{x'(S')} T_{\delta_R(2n-1)} T_{\delta_S(2n-2)} T_{s_{2n-1}},$$

da $\delta_R(2n-1)$ mit $x'(S') \in \langle s_1, \dots, s_{2n-3} \rangle$ vertauschbar ist. Schließlich ersetzen wir zum Zweck dieses Beweises die Schreibweise $a_{d\delta}^w$ durch die einfachere Schreibweise $a(R, S)$ mit der durch $d = b_n w(R)$ und $w = x(S)$ gegebenen Übersetzung. Entsprechend definieren wir $u_1(R, S)$ und $u_2(R, S)$.

Wir erhalten den gesuchten Summanden $a(R, S)u_1(R, S)u_2(R, S)T_\delta$ in der Zerlegung von $T_d T_{x(S)}$ nach Lemma (1.2.3) aus dem Summanden zu $T_{b_{n-1} w(U \setminus R')}$ in der Zerlegung von $T_{b_{n-1} w(R')} T_{x'(S')}$. Der ist per Induktion nach n gleich

$$a'(R', S') T_{u_1'(R', S')} T_{u_2'(R', S')} T_{b_{n-1}} T_{w(U \setminus R')}.$$

Sei $\pi' = [\pi_1, \dots, \pi_{l(\pi)-1}, \pi_{l(\pi)} - 1]$. Dann ist $x'(S')$ der Standardrepräsentant der Klasse von Elementen mit Zykelstruktur $2\pi'$ in S_{2n-2} .

Wenn R' keine Komposition in π' definiert, dann ist $a'(R', S') = 0$. Damit ist auch $a(R, S) = 0$ und die Behauptung für diesen Fall bewiesen, da dann auch R keine Komposition in π definiert.

Sei also $R' \subseteq U'$ so daß R' eine Komposition $\mu' \subseteq \pi'$ definiert. Dann ist $a'(R', S') = q^{l(u')}(q-1)^{l(\pi' \div \mu') - l(\pi')}$. Weiter ist in diesem Fall

$$\begin{aligned} u_1'(R', S') &= \prod_{i \in S', i-1 \notin R'} s_i \in \langle s_1, \dots, s_{n-2} \rangle \text{ und} \\ u_2'(R', S') &= \prod_{i \in S', i+1 \in R'} s_i \in \langle s_n, \dots, s_{2n-3} \rangle. \end{aligned}$$

Den interessanten Summand zu $T_{b_n w(R)}$ in der Zerlegung von $T_{b_n w(R)} T_{x(S)}$ erhalten wir dann aus

$$\begin{aligned} T_{s_n \dots s_{2n-2}} a'(R', S') T_{u_1'(R', S')} T_{u_2'(R', S')} T_{b_{n-1} w(U \setminus R')} T_{\delta_R(2n-1)} T_{\delta_S(2n-2)} T_{s_{2n-1}} \\ = a'(R', S') T_{u_1'(R', S')} T_{u_2''(R', S')} T_{b_n} T_{\delta_R(2n-1)} T_{w(U \setminus R')} T_{\delta_S(2n-2)} T_{s_{2n-1}}, \end{aligned}$$

da $u_1'(R', S')$ und $\{s_n \dots s_{2n-2}\}$ vertauschbar sind. Weiter ist $\{s_n \dots s_{2n-2}\} u_2''(R', S') = u_2'(R', S') \{s_n \dots s_{2n-2}\}$, wobei $u_2''(R', S')$ aus $u_2'(R', S')$ durch $s_i \mapsto s_{i+1}$ hervorgeht und damit in $\langle s_{n+1}, \dots, s_{2n-1} \rangle$ liegt.

Wir untersuchen zunächst den Fall $2n-2 \notin S$, also $\delta_S(2n-2) = 1$. Dann führt

$$a'(R', S') T_{u_1'(R', S')} T_{u_2''(R', S')} T_{b_n} T_{\delta_R(2n-1)} T_{w(U \setminus R')} T_{s_{2n-1}}$$

zu

$$q\alpha'(R', S')T_{u_1'(R', S')}u_2''(R', S')T_{b_n w(R)},$$

falls $2n-1 \in R$, und zu

$$\alpha'(R', S')T_{u_1'(R', S')}T_{u_2''(R', S')}T_{b_n w(R)},$$

falls $2n-1 \notin R$. In jedem Fall ist $\alpha(R, S) = q^{|\mu|} (q-1)^{l(\pi \div \mu) - l(\mu)}$, da $|\mu| = |R| = |R'| = |\mu'|$, falls $2n-1 \notin R$, andernfalls $|\mu| = |\mu'| + 1$ und $l(\pi \div \mu) - l(\mu) = l(\pi' \div \mu') - l(\mu')$. Auch $u_1(R, S) = u_1'(R', S')$ und $u_2(R, S) = u_2''(R', S')$ entsprechen wegen $2n-2 \notin S$ der Behauptung.

Sei nun $2n-2 \in S$, also $\delta_S(2n-2) = s_{2n-2}$. Wir unterscheiden weitere vier Fälle in Abhängigkeit davon, ob $2n-3$ und $2n-1$ in R liegen.

Erster Fall: $2n-3 \in R$ und $2n-1 \in R$. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha'(R', S')T_{u_1'(R', S')}T_{u_2''(R', S')}T_{b_n}T_{s_{2n-1}}T_{w(U \wedge R')}T_{s_{2n-2}}T_{s_{2n-1}} \\ = \alpha'(R', S')T_{u_1'(R', S')}T_{u_2''(R', S')}T_{s_{2n-1}}T_{b_n}T_{s_{2n-1}}T_{s_{2n-1}}T_{w(U \wedge R')}, \end{aligned}$$

da wegen $2n-3 \in R$ die Faktoren $w(U' \setminus R')$ und $T_{s_{2n-2}}T_{s_{2n-1}}$ vertauschbar sind, und da $b_n s_{2n-2} s_{2n-1} s_{2n-2} = s_{2n-1} b_n s_{2n-1} s_{2n-1}$ unter Zuhilfenahme des letzten Faktors s_{2n-2} von b_n . Das Produkt $T_{s_{2n-1}}T_{s_{2n-1}}$ liefert einen Faktor q als Beitrag zu $\alpha(R, S) = q\alpha'(R', S')$. Unverändert bleibt $u_1(R, S) = u_1'(R', S')$, während $u_2(R, S) = u_2''(R', S')s_{2n-1}$. Da $2n-1 \in R$, ist schließlich $U' \setminus R' = \bar{R}$. Damit ist die Behauptung in diesem Fall bewiesen. Dieser Fall zeigt, wie der zur Komposition μ gehörende Teil eines Zyklus von π in $\pi \div \mu$ zu $u_2(R, S)$ beiträgt. Außerdem ist hier zu sehen, wie $2n-1 \in R$ zu einem Faktor q in $\alpha(R, S)$ führt: der Exponent von q in $\alpha(R, S)$ ist $|\mu| = |R|$.

Zweiter Fall: $2n-3 \in R$ und $2n-1 \notin R$. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha'(R', S')T_{u_1'(R', S')}T_{u_2''(R', S')}T_{b_n}T_{w(U \wedge R')}T_{s_{2n-2}}T_{s_{2n-1}} \\ = \alpha'(R', S')T_{u_1'(R', S')}T_{u_2''(R', S')}T_{b_n}T_{s_{2n-2}}T_{s_{2n-1}}T_{w(U \wedge R')}, \end{aligned}$$

da wie im ersten Fall $T_{w(U \wedge R')}$ ans Ende getauscht werden kann. $T_{s_{2n-2}}$ verschmilzt mit dem letzten Faktor $T_{s_{2n-2}}$ von T_{b_n} und liefert einen Beitrag $(q-1)$ zu $\alpha(R, S) = (q-1)\alpha'(R', S')$. Weiter ist $w(\bar{R}) = s_{2n-1}w(U' \setminus R')$ und $u_1(R, S) = u_1'(R', S')$ sowie $u_2(R, S) = u_2''(R', S')$ bleiben unverändert. Damit ist die Behauptung in diesem Fall bewiesen. Dieser Fall zeigt, wie der $\dots s_{2n-3}s_{2n-2}s_{2n-1}$ entsprechende Teil von π durch den mit $2n-3$ beendeten Teil von μ getrennt wird und bloß einen Faktor $(q-1)$ zu $\alpha(R, S)$ beiträgt: der Exponent $l(\pi \div \mu) - l(\pi)$ zählt die (echten) Trennstellen die μ in π bewirkt.

Dritter Fall: $2n-3 \notin R$ und $2n-1 \notin R$. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha'(R', S')T_{u_1'(R', S')}u_2''(R', S')T_{b_n w(U \wedge R')}T_{s_{2n-1}}T_{s_{2n-1}} \\ = \alpha'(R', S')T_{u_1'(R', S')}u_2''(R', S')T_{b_n w(R)}, \end{aligned}$$

da $b_n s_{2n-3} s_{2n-2} = s_{n-1} b_n s_{2n-3}$. Hier folgt die Behauptung mit $\alpha(R, S) = \alpha'(R', S')$, $u_1(R, S) = u_1'(R', S') s_n$ und $u_2(R, S) = u_2''(R', S')$. Dieser Fall zeigt, wie der nicht zur Komposition μ gehörende Teil eines Zyklus von π in $\pi \div \mu$ zu $u_1(R, S)$ beiträgt.

Vierter Fall: $2n-3 \notin R$ und $2n-1 \in R$. Hier haben wir mit

$$\alpha'(R', S') T_{u_1'(R', S')} T_{u_2''(R', S')} T_{b_n} T_{s_{2n-1}} T_{w(U \setminus R')} T_{s_{2n-2}} T_{s_{2n-1}}$$

einen Ausdruck, der zu keinem Summanden der Form $\alpha T_u T_{b_n} T_{w(S)}$ führt, womit dann $\alpha(R, S) = 0$ ist. In diesem Fall liegt in dem $\cdots s_{2n-3} s_{2n-2} s_{2n-1}$ entsprechenden Teil von π mit $2n-3$ ein nicht zu R gehörendes Element vor einem zu R gehörenden, womit R eben keine Komposition in π definiert.

Schließlich ist, falls $\alpha_{d, \hat{d}}^w \neq 0$,

$$u_1(w, d, \hat{d}) \phi(u_2(w, d, \hat{d})) = s_1^{\epsilon_1} \cdots s_{n-1}^{\epsilon_{n-1}},$$

wobei $\epsilon_i = 1$, falls $2i \in S$ und entweder $2i-1 \notin R$ oder $2i+1 \in R$, und sonst $\epsilon_i = 0$. Ein solches Element hat Zykelstruktur $\pi \div \mu$. $\square$

Wir sind nun in der Lage, die Spur von $T_w \sigma$ auf $V^{(\alpha, \alpha)}$ zu bestimmen.

SATZ 4.4.5. *Sei $w \in S_{2n}$ der Standardrepräsentant der Klasse von Elementen mit Zykelstruktur 2π für eine Partition π von n . Dann ist*

$$\text{Spur}(T_w \sigma, V^{(\alpha, \alpha)}) = \sum_{\mu \subseteq \pi} q^{|\mu|} (q-1)^{l(\pi \div \mu) - l(\pi)} \chi_q^\alpha(\pi \div \mu).$$

BEWEIS. Sei $E : H_n \rightarrow \text{End}(V)$ eine Matrixdarstellung mit Charakter χ_q^α . Dann ist die Operation von $T_w \sigma$ beschrieben durch

$$(v_i \otimes v_j \otimes T_d) T_w \sigma = \sum_{d' \in D} \alpha_{d, d'}^w \sum_k E_{ik}(T_{u_1(w, d, d')}) \sum_l E_{jl}(T_{\phi(u_2(w, d, d'))}) (v_k \otimes v_l \otimes T_{\hat{d}}).$$

Die Spur ist die Summe über alle die Koeffizienten, für die $i = l$, $j = k$ und $\hat{d} = d'$ ist, also

$$\sum_{i, j, d} \alpha_{d, \hat{d}}^w E_{ij}(T_{u_1(d)}) E_{ji}(T_{\phi(u_2(d))}) = \sum_{d, i} \alpha_{d, \hat{d}}^w E_{ii}(T_{u_1(d)} T_{\phi(u_2(d))}) = \sum_d \alpha_{d, \hat{d}}^w \chi_q^\alpha(T_{u(d)}),$$

wobei wir $u_i(w, d, \hat{d})$ kurz mit $u_i(d)$ bezeichnet haben und $u(d) = u_1(d) \phi(u_2(d))$.

Den Koeffizienten haben wir in (4.4.4) als $\alpha_{d, \hat{d}}^w = q^{|\mu|} (q-1)^{l(\pi \div \mu) - l(\pi)}$ bestimmt, und $u(d)$ hat danach Zykelstruktur $\pi \div \mu$. Die Behauptung folgt nun daraus, daß jedes $d \in D$ (wenn überhaupt) eine andere Komposition $\mu \subseteq \pi$ definiert. $\square$

Bemerkung. Vor kurzem hat Ariki [1] generische Algebren zu den Gruppen $G(r, p, n)$ (in der Klassifikation von Shephard und Todd [34]) definiert. Die Gruppe $G(r, p, n)$ ist ein Normalteiler vom Index p in dem Kranzprodukt $G(r, 1, n)$. Damit stellen diese Gruppen natürliche Verallgemeinerungen der Weylgruppe $W(D_n)$ dar. So hätte man für die entsprechenden Algebren auch gerne eine Charaktertheorie, die eine natürliche

Verallgemeinerung der Untersuchungen in diesem Kapitel darstellt. Die irreduziblen Darstellungen der Gruppen $G(r, p, n)$ sind in [32] bestimmt worden. Allerdings existiert wohl in der Literatur keine explizite Formel für die Charakterwerte.

ANHANG A

Tafeln.

Dieser Anhang zeigt die Charaktertafeln der Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ B_3 und D_4 . Die Charaktere und die Konjugiertenklassen werden hierbei durch die ihnen zugeordneten Paare von Partitionen bezeichnet. Für jede Klasse ist zusätzlich ein Vertreter minimaler Länge in seiner Konjugiertenklasse in der Weylgruppe angegeben.

Weitere Tafeln sowie Tafeln von Spezialisierungen können leicht mittels des Befehls `HeckeCharTable` in CHEVIE erzeugt werden. Aus technischen Gründen entspricht die Reihenfolge der Klassen in der Tafel von D_4 hier *nicht* der von den Programmen in GAP und CHEVIE benutzten.

B_3	$(1^3, 0)$ 1	$(1^2, 1)$ t_0	$(1, 1^2)$ $t_0 t_1$	$(0, 1^3)$ $t_0 t_1 t_2$	$(21, 0)$ s_1	$(1, 2)$ $t_0 s_1$
$(1^3, 0)$	1	Q	Q^2	Q^3	-1	-Q
$(1^2, 1)$	3	$2Q - 1$	$Q^2 - 2qQ$	$-3q^2 Q^2$	$q - 2$	-Q
$(1, 1^2)$	3	$Q - 2$	$-2qQ + 1$	$3q^2 Q$	$q - 2$	1
$(0, 1^3)$	1	-1	1	-1	-1	1
$(21, 0)$	2	$2Q$	$q^2 Q^2 + Q^2$	$2q^3 Q^3$	$q - 1$	$qQ - Q$
$(1, 2)$	3	$Q - 2$	$-2qQ + q^2$	$3q^4 Q$	$2q - 1$	-q
$(2, 1)$	3	$2Q - 1$	$q^2 Q^2 - 2qQ$	$-3q^4 Q^2$	$2q - 1$	qQ
$(0, 21)$	2	-2	$q^2 + 1$	$-2q^3$	$q - 1$	$-q + 1$
$(3, 0)$	1	Q	$q^2 Q^2$	$q^6 Q^3$	q	qQ
$(0, 3)$	1	-1	q^2	$-q^6$	q	-q

B_3 (cont.)	$(2, 1)$ $t_0 s_2$	$(0, 21)$ $t_0 t_1 s_2$	$(3, 0)$ $s_1 s_2$	$(0, 3)$ $t_0 s_1 s_2$
$(1^3, 0)$	-Q	$-Q^2$	1	Q
$(1^2, 1)$	$qQ - Q + 1$	qQ	$-q + 1$	0
$(1, 1^2)$	$-Q - q + 1$	qQ	$-q + 1$	0
$(0, 1^3)$	1	-1	1	-1
$(21, 0)$	$qQ - Q$	0	-q	$-qQ$
$(1, 2)$	$qQ - q + 1$	$-q^2 Q$	$q^2 - q$	0
$(2, 1)$	$qQ - Q - q$	$-q^2 Q$	$q^2 - q$	0
$(0, 21)$	$-q + 1$	0	-q	q
$(3, 0)$	qQ	$q^3 Q^2$	q^2	$q^2 Q$
$(0, 3)$	-q	q^3	q^2	$-q^2$

TABELLE 1. Die Charaktertafel der Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ B_3 .

$H(D_4)$	$(1^4, 0)$ 1	$(1^2, 1^2)$ t_1	$(0, 1^4)$ $t_1 t_2 t_3$	$(21^2, 0)$ s_1	$(1, 21)$ $t_1 s_2$	$(2, 1^2)$ $t_1 s_3$	$(0, 2^2)$ $s_1 t_2 s_3$
$(1^2, +)$	3	$-2q + 1$	$3q^4$	$q - 2$	q	$-q^2 + q - 1$	$-q^2$
$(1^2, -)$	3	$-2q + 1$	$3q^4$	$q - 2$	q	$-q^2 + q - 1$	$-q^2$
$(1, 1^3)$	4	$-2q + 2$	$-4q^3$	$q - 3$	$q - 1$	$3q - 1$	0
$(0, 1^4)$	1	1	1	-1	-1	-1	1
$(1^2, 2)$	6	$q^2 - 4q + 1$	$6q^6$	$3q - 3$	$-q^2 + q$	$-3q^2 + 3q$	$2q^3$
$(1, 21)$	8	$2q^2 - 4q + 2$	$-8q^6$	$4q - 4$	$-q^2 + q$	$q^3 - 3q^2 + 3q - 1$	0
$(0, 21^2)$	3	$q^2 + 2$	$3q^4$	$q - 2$	-1	$-q^2 + q - 1$	$-q^2$
$(2, +)$	3	$q^2 - 2q$	$3q^8$	$2q - 1$	$-q^2$	$q^3 - q^2 + q$	$-q^4$
$(2, -)$	3	$q^2 - 2q$	$3q^8$	$2q - 1$	$-q^2$	$q^3 - q^2 + q$	$-q^4$
$(0, 2^2)$	2	$q^2 + 1$	$2q^6$	$q - 1$	0	$q^3 - 1$	$2q^3$
$(1, 3)$	4	$2q^2 - 2q$	$-4q^9$	$3q - 1$	$q^3 - q^2$	$q^3 - 3q^2$	0
$(0, 31)$	3	$2q^2 + 1$	$3q^8$	$2q - 1$	q^3	$q^3 - q^2 + q$	$-q^4$
$(0, 4)$	1	q^2	q^{12}	q	q^3	q^3	q^6

$H(D_4)$ (cont.)	$(2^2, +)$ $s_1 s_3$	$(2^2, -)$ $u s_3$	$(31, 0)$ $s_1 s_2$	$(0, 31)$ $t_1 s_2 s_3$	$(4, +)$ $s_1 s_2 s_3$	$(4, -)$ $u s_2 s_3$
$(1^2, +)$	$q^2 + 2$	$-2q + 1$	$-q + 1$	0	-1	q
$(1^2, -)$	$-2q + 1$	$q^2 + 2$	$-q + 1$	0	q	-1
$(1, 1^3)$	$-2q + 2$	$-2q + 2$	$-q + 2$	$-q$	$q - 1$	$q - 1$
$(0, 1^4)$	1	1	1	1	-1	-1
$(1^2, 2)$	$q^2 - 4q + 1$	$q^2 - 4q + 1$	$q^2 - 2q + 1$	0	$-q^2 + q$	$-q^2 + q$
$(1, 21)$	$2q^2 - 4q + 2$	$2q^2 - 4q + 2$	$q^2 - 3q + 1$	q^2	$-q^2 + q$	$-q^2 + q$
$(0, 21^2)$	$-2q + 1$	$-2q + 1$	$-q + 1$	0	q	q
$(2, +)$	$2q^2 + 1$	$q^2 - 2q$	$q^2 - q$	0	q^3	$-q^2$
$(2, -)$	$q^2 - 2q$	$2q^2 + 1$	$q^2 - q$	0	$-q^2$	q^3
$(0, 2^2)$	$q^2 + 1$	$q^2 + 1$	$-q$	$-q^2$	0	0
$(1, 3)$	$2q^2 - 2q$	$2q^2 - 2q$	$2q^2 - q$	$-q^3$	$q^3 - q^2$	$q^3 - q^2$
$(0, 31)$	$q^2 - 2q$	$q^2 - 2q$	$q^2 - q$	0	$-q^2$	$-q^2$
$(0, 4)$	q^2	q^2	q^2	q^4	q^3	q^3

TABELLE 2. Die Charaktertafel der Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ D_4 .

Literaturverzeichnis.

- [1] S. Ariki, *Representation theory of a Hecke algebra of $G(r, p, n)$* , preprint, 1993.
- [2] S. Ariki und K. Koike, *A Hecke algebra of $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \wr S_n$ and construction of its irreducible representations*, Adv. Math. 106 (1992), 216–243.
- [3] C. T. Benson und C. W. Curtis, *On the degrees and rationality of certain characters of finite Chevalley groups*, Trans. Am. Math. Soc. 165 (1972), 251–273, (cf. [13]).
- [4] C. T. Benson und D. A. Gay, *On dimension functions of the generic algebra of type D_n* , J. Algebra 45 (1977), 435–438.
- [5] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, chap. 4, 5 et 6*, Hermann, Paris, 1968.
- [6] M. Broué, *Informal remarks on central elements of braid monoids*, unpublished, November 1992.
- [7] M. Broué und G. Malle, *Zyklotomische Heckealgebren*, Astérisque 212 (1993), 119–189.
- [8] R. W. Carter, *Simple groups of Lie type*, Wiley, New York, 1972.
- [9] ———, *Finite groups of Lie type: Conjugacy classes and complex characters*, Wiley, New York, 1985.
- [10] ———, *Representation theory of the 0-Hecke algebra*, J. Algebra 104 (1986), 89–103.
- [11] B. W. Char, K. O. Geddes, G. H. Gonnet, B. L. Leong, M. B. Monagan und S. M. Watt, *Maple V Language Reference Manual*, Springer-Verlag, 1991.
- [12] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker und R. A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Oxford University Press, 1985.
- [13] C. W. Curtis, *Corrections and additions to 'On the degrees and rationality of certain characters of finite Chevalley groups'*, Trans. Am. Math. Soc. 202 (1975), 405–406, (cf. [3]).
- [14] C. W. Curtis und I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Wiley, New York, 1962.
- [15] ———, *Methods of representation theory, vol. II*, Wiley, New York, 1987.
- [16] V. V. Deodhar, *Some characterizations of Bruhat ordering on a Coxeter group and determination of the relative Möbius function*, Invent. Math. 39 (1977), 187–198.
- [17] M. Geck, *Beiträge zur Darstellungstheorie von Iwahori-Hecke-Algebren*, Habilitationsschrift, RWTH Aachen, 1993.
- [18] ———, *On the character values of Iwahori-Hecke algebras of exceptional type*, Proc. London Math. Soc. (3) 68 (1994), 51–76.
- [19] M. Geck, G. Hiss, F. Lübeck, G. Malle und G. Pfeiffer, *CHEVIE – Generic Character Tables of Finite Groups of Lie Type, Hecke Algebras and Weyl Groups*, Preprint 93-62, Interdisziplinäres Zentrum für wissenschaftliches Rechnen der Universität Heidelberg, November 1993.
- [20] M. Geck und G. Pfeiffer, *On the irreducible characters of Hecke algebras*, Adv. Math. 102 (1993), 79–94.
- [21] P. N. Hoefsmit, *Representations of Hecke algebras of finite groups with BN pairs of classical type*, Ph.D. thesis, University of British Columbia, Vancouver, 1974.
- [22] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 29, Cambridge University Press, 1990.
- [23] G. D. James und A. Kerber, *The representation theory of the symmetric group*, Encyclopedia of Math., vol. 16, Addison-Wesley, 1981.

- [24] D. A. Kazhdan und G. Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. Math. 53 (1979), 165–184.
- [25] A. Kerber, *Representations of permutation groups II*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 495, Springer, Berlin, 1975.
- [26] ———, *Algebraic combinatorics via finite group actions*, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1991.
- [27] G. Lusztig, *Characters of reductive groups over a finite field*, Annals of Math. Studies, vol. 107, Princeton University Press, 1984.
- [28] S. J. Mayer, *On the characters of the Weyl group of type D*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 77 (1975), 259–264.
- [29] G. Pfeiffer, *Character tables of Weyl groups in GAP*, Bayreuther Math. Schr. 47 (1994), 165–222.
- [30] ———, *Young characters on Coxeter basis elements of Iwahori-Hecke algebras and a Murnaghan-Nakayama formula*, J. Algebra 168 (1994), 525–535.
- [31] A. Ram, *A Frobenius formula for the characters of the Hecke algebras*, Invent. Math. 106 (1991), 461–488.
- [32] E. W. Read, *On the finite imprimitive unitary reflection groups*, J. Algebra 45 (1977), 439–452.
- [33] M. Schönert et al., *GAP 3.1—Groups, Algorithms and Programming*, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen, 1992.
- [34] G. C. Shephard und J. A. Todd, *Finite unitary reflection groups*, Canad. J. Math. 6 (1954), 274–304.
- [35] T. A. Springer, *Regular elements of finite reflection groups*, Invent. Math. 25 (1974), 159–198.
- [36] A. J. Starkey, *Characters of the generic Hecke algebra of a system of BN-pairs*, Ph.D. thesis, University of Warwick, July 1975.
- [37] J. R. Stembridge, *On the eigenvalues of representations of reflection groups and wreath products*, Pacific J. Math. 140 (1989), 353–396.

Lebenslauf.

17. März 1964 geboren in Siegen als erstes von zwei Kindern des Ingenieurs Joachim Pfeiffer und seiner Frau Adeltraud geb. Fischbach.

Juli 1970 Einschulung Grundschule Allenbach.

August 1974 Eintritt in das Jung-Stilling-Gymnasium Hilchenbach.

Juni 1983 Abitur.

August 1983 Beginn des Studiums der Mathematik mit Nebenfach Informatik an der RWTH Aachen.

März 1985 – Juni 1986 Ableistung eines zivilen Ersatzdienstes beim Deutschen Roten Kreuz Aachen.

Oktober 1987 Vordiplom Mathematik.

Juli 1988 – Januar 1991 studentische Hilfskraft am Lehrstuhl D für Mathematik an der RWTH Aachen.

Januar 1991 Diplom Mathematik.

Februar 1991 – Dezember 1994 wissenschaftliche Hilfskraft am Lehrstuhl D für Mathematik an der RWTH Aachen.

Oktober 1991 – September 1992 Promotionsstipendium der RWTH Aachen.

November 1991 Aufnahme in die Studienstiftung des deutschen Volkes.

Februar – Juli 1993 Aufenthalt als étudiant chercheur étranger an der École Normale Supérieure, Paris.

seit Januar 1995 Research Assistant an der School of Mathematical and Computational Sciences der University of St. Andrews, Schottland.

Februar 1995 Promotion.

SZ13218=2



SZ13218=2

Eine Iwahori-Hecke-Algebra kann man sich grob als Deformation der Gruppenalgebra einer Weylgruppe vorstellen. Sie besitzt eine Basis, die durch die Elemente der Weylgruppe parametrisiert ist, und deren Multiplikation über diejenige der Weylgruppe beschrieben werden kann. Nun wird die Struktur einer endlichen Gruppe vom Lie-Typ in großen Teilen von ihrer Weylgruppe kontrolliert. So spielen auch die Iwahori-Hecke-Algebren in der Darstellungstheorie endlicher Gruppen vom Lie-Typ als Endomorphismenringe gewisser induzierter Moduln eine wichtige Rolle.

Die Definition der Charaktertafel einer Iwahori-Hecke-Algebra als einer quadratischen Matrix gewisser Charakterwerte beruht auf einer interessanten Eigenschaft der Konjugiertenklassen von Weylgruppen. Diese bewirkt, daß für jede Iwahori-Hecke-Algebra der Charakterwert auf Elementen minimaler Länge in ihrer Konjugiertenklasse in der Weylgruppe unabhängig von der tatsächlichen Wahl des Elements ist.

Für die drei Serien der klassischen Typen von Iwahori-Hecke-Algebren werden in dieser Arbeit Rekursionsformeln zur Berechnung ihrer Charaktertafeln hergeleitet. Vorbild für diese Formeln ist die Murnaghan-Nakayama-Formel zur Berechnung der Charaktertafel der symmetrischen Gruppe.

