

# **Beitrag zur Bemessung sattelgelagerter Behälter unter vertikaler Belastung**

Von der Fakultät für Bauingenieurwesen  
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen  
zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften  
genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Jan Alexander Keppler

aus München

Berichter:      Universitätsprofessor Dr.-Ing. Jürgen Güldenpfennig  
                    apl. Professor Dr.-Ing. Ramendra Das

Tag der mündlichen Prüfung: 17. Oktober 2003

„Diese Dissertation ist auf den Internetseiten der Hochschulbibliothek online verfügbar.“

## INHALTSVERZEICHNIS

<b>WICHTIGE BEZEICHNUNGEN UND MATHEMATISCHE FORMELZEICHEN .....</b>	<b>3</b>
<b>KAPITEL 1 EINLEITUNG .....</b>	<b>6</b>
1.1 ALLGEMEINES .....	6
1.2 LITERATURÜBERSICHT .....	7
1.3 BERECHNUNGSVORSCHRIFTEN .....	9
1.4 ZUSAMMENFASSUNG UND WERTUNG DER BISHERIGEN UNTERSUCHUNGEN.....	10
1.5 ZIELSETZUNG DIESER ARBEIT UND VORGEHENSWEISE .....	12
<b>KAPITEL 2 SCHALENTHEORETISCHE ANSÄTZE .....</b>	<b>15</b>
2.1 ALLGEMEINES .....	15
2.2 VOLLSTÄNDIGE BIEGETHEORIE DER KREISZYLINDERSCHALE NACH FLÜGGE .....	16
2.2.1 Lösungsansatz von Forbes und Tooth.....	20
2.3 VEREINFACHTE BIEGETHEORIE NACH FLÜGGE.....	22
2.3.1 Lösungsansatz von Girkmann .....	24
2.3.2 Lösungsansatz für die Differentialgleichung 8. Ordnung nach Wlassow.....	25
2.4 HALBBIEGETHEORIE NACH WLASSOW .....	28
2.4.1 Verfahren nach Krupka.....	29
2.5 VERALLGEMEINERTE TECHNISCHE BIEGETHEORIE VTB.....	32
2.5.1 Allgemeines .....	32
2.5.2 Systematik der VTB am Beispiel der klassischen Biegetheorie.....	33
2.5.3 Schalentheorie im Rahmen der verallgemeinerten technischen Biegetheorie.....	38
2.6 VERGLEICH DER SCHALENTHEORIEN.....	54
2.6.1 Allgemeines .....	54
2.6.2 Vergleich des Lösungsaufwands und der Annahmen.....	54
2.6.3 Vergleich von Berechnungsergebnissen.....	56
<b>KAPITEL 3 BIEGETHEORIE DER GEKRÜMMTEN STÄBE.....</b>	<b>62</b>
3.1 ALLGEMEINES .....	62
3.2 DIFFERENTIALGLEICHUNG DES EINFACHEN KREISRINGS .....	63
3.3 DIFFERENTIALGLEICHUNG DES ELASTISCH GEBETTETEN KREISRINGS.....	67
3.4 VERFAHREN AUF GRUNDLAGE VON BERECHNUNGEN AN KREISRINGEN .....	69
3.4.1 Verfahren nach Zick.....	69
3.4.2 Untersuchungen von Mang .....	73
<b>KAPITEL 4 UNTERSUCHUNGEN NACH DER FE-METHODE.....</b>	<b>74</b>
4.1 ALLGEMEINES .....	74
4.2 ELEMENTEIGENSCHAFTEN.....	75
4.2.1 DKT-Element.....	75
4.2.2 Gap-Element.....	76
4.3 DISKRETISIERUNG DES SATTELGELAGERTEN BEHÄLTERS .....	77
4.3.1 Kriterien zur Beurteilung der maximalen Spannungen bei starrer Lagerung.....	79
4.4 VERIFIZIERUNG DES BERECHNUNGSMODELS.....	83
4.4.1 Vergleich mit Berechnungen nach Chouihhi .....	83
4.4.2 Vergleich mit Messergebnissen.....	84
4.5 UNTERSUCHUNGEN ZUR ERFASSUNG EINER PLANMÄßIGEN WEICHEN LAGERUNG.....	86
Untersuchungen zur nichtlinearen Bettung.....	92

---

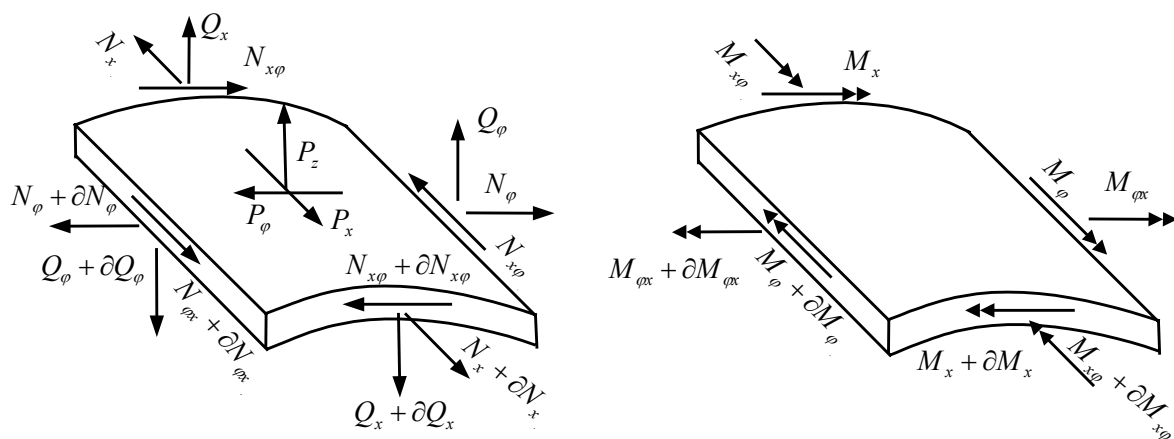
<b>KAPITEL 5 WERTUNG DER BISHERIGEN VERFAHREN.....</b>	<b>96</b>
5.1 ALLGEMEINES .....	96
5.2 VERGLEICH DER BISHERIGEN BERECHNUNGSVERFAHREN.....	96
5.3 ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK AUF DAS NEUE BERECHNUNGSVERFAHREN.....	102
<b>KAPITEL 6 AUFBAU DES NEUEN BERECHNUNGSVERFAHREN .....</b>	<b>104</b>
6.1 PRINZIP DES VERFAHRENS.....	104
6.2 IDEALISIERUNG DES SATTELGELAGERTEN BEHÄLTERS .....	106
6.3 PRESSUNGSANSATZ ZU BEGINN DER BERECHNUNG.....	108
6.4 LÖSUNGSANSÄTZE FÜR DIE DIFFERENTIALGLEICHUNG DER VTB .....	109
6.5 RAND- UND ÜBERGANGSBEDINGUNGEN .....	111
6.6 SCHUBFLUSS IN DER KREISZYLINDERSCHALE NACH DER VTB.....	116
6.7 BERECHNUNG AM ELASTISCH GEBETTETEN KREISRING.....	119
6.8 WAHL DER BETTUNGSZIFFER .....	124
<b>KAPITEL 7 STARRE LAGERUNG BEI LOSEM KONTAKT.....</b>	<b>126</b>
7.1 ALLGEMEINES .....	126
7.2 ITERATIVE BERECHNUNG .....	126
7.3 BERECHNUNG UNTER ANSATZ EINER PRESSUNGSVERTEILUNG NACH CHOUIHI.....	133
7.3.1 <i>Ansatz der Pressungsverteilung nach Chouihi</i> .....	134
7.3.2 <i>Ergebnisse</i> .....	137
7.3.3 <i>Bewertung der Ergebnisse</i> .....	141
<b>KAPITEL 8 FALL EINER WEICHEN LAGERUNG.....</b>	<b>142</b>
8.1 ALLGEMEINES .....	142
8.2 ITERATIVE BERECHNUNG .....	143
8.3 ANSATZ EINER PRESSUNGSVERTEILUNG FÜR DEN WEICHEN FALL.....	147
8.3.1 <i>Ergebnisse der Vergleichsberechnungen mit Pressungsansatz</i> .....	152
8.3.2 <i>Parameterstudie zur Bestimmung der maximalen Spannungen am Sattelhorn</i> ....	155
<b>KAPITEL 9 BERÜCKSICHTIGUNG VON AUSSTEIFUNGSRINGEN .....</b>	<b>162</b>
9.1 ALLGEMEINES .....	162
9.2 AUSSTEIFUNGSRINGE DIREKT ÜBER DEM SATTEL.....	163
9.3 AUSSTEIFUNGSRINGE SEITLICH DES AUFLAGERS.....	168
9.3.1 <i>Berechnung der maximalen Spannungen in den Ringflanschen</i> .....	168
9.3.2 <i>Berechnung der Spannungen in der Behälterschale</i> .....	170
<b>KAPITEL 10 ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK.....</b>	<b>174</b>
<b>VORSCHRIFTEN- UND LITERATURVERZEICHNIS.....</b>	<b>177</b>
<b>ANHANG .....</b>	<b>182</b>

# Wichtige Bezeichnungen und mathematische Formelzeichen

## Mechanische Bezeichnungen

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	Normalspannungen
$\sigma_{xz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	Schubspannungen
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$	[-]	Dehnungen
$\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}$	[-]	Gleitungen
E	[N/mm <sup>2</sup> ]	Elastizitätsmodul
E <sub>0</sub>	[N/mm <sup>2</sup> ]	Tangentenmodul im Nullpunkt
G	[N/mm <sup>2</sup> ]	Schubmodul
$\nu$	[-]	Querkontraktion
J		Jacobi-Determinante
I <sub>1</sub> , I <sub>2</sub> , I <sub>3</sub>		Invarianten des Verzerrungstensors
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$		Hauptdehnungsgrade
W		elastisches Potential
$\frac{\partial u}{\partial x}$ bzw. $u'$		Differentiation nach x
$\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ bzw. $\dot{u}$		Differentiation nach $\varphi$
$\nabla$		Nabla-Operator

## Schnittgrößen der Kreiszylinderschale



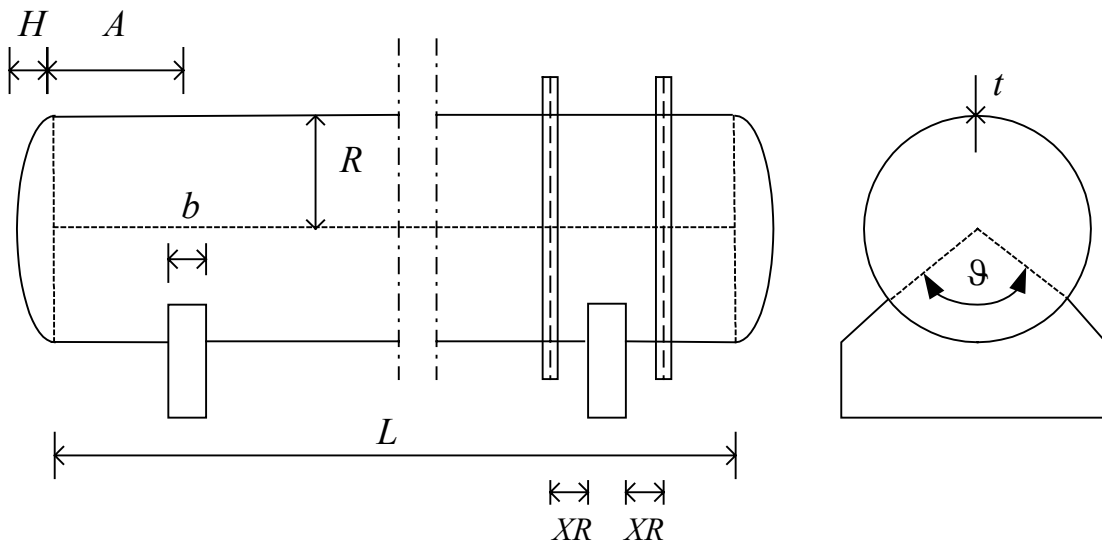
$N_x, N_\varphi, N_{x\varphi}$	[N/mm]	Membrankräfte in der Kreiszylinderschale
$M_x, M_\varphi, M_{x\varphi}$	[Nmm/mm]	Biegemomente in der Kreiszylinderschale
$Q_x, Q_\varphi$	[N/mm]	Querkräfte
$P_x, P_z, P_\varphi$	[N/mm <sup>2</sup> ]	Flächenhaft verteilte Belastungen

$w(x, \varphi)$	[mm]	Verschiebung der Schalenmittelfläche in Radialrichtung
$v(x, \varphi)$	[mm]	Verschiebung der Schalenmittelfläche in Tangentialrichtung
$u(x, \varphi)$	[mm]	Verschiebung der Schalenmittelfläche in Längsrichtung

### Bezeichnungen im Rahmen der verallgemeinerten technischen Biegetheorie

${}^kV(x)$	Verformungsfunktion
${}^k u(\varphi)$	Einheitsverwölbung
${}^k W(x)$	Spannungsergebnante (Schnittgröße)
${}^k C, {}^k D, {}^k B$	Wölbwiderstände

### Behälterparameter



R	[mm]	Behälterradius bezogen auf die Schalenmittelfläche
L	[mm]	Länge der Kreiszyklinderschale
H	[mm]	Tiefe der Behälterbodens
A	[mm]	Abstand des Behälterbodens von der Sattelmittle
b	[mm]	Sattellbreite
t	[mm]	Blehdicke der Zylinderschale
$\vartheta$	[°]	Sattelumschließungswinkel
XR	[mm]	Abstand eines Aussteifungsrings vom Sattelrand
B	[N/mm <sup>3</sup> ]	Flächenbezogene Bettungsziffer für die Sattelsteifigkeit

## Bezeichnungen im Rahmen des neuen Berechnungsverfahrens

$Q$	[N]	resultierende Auflagerkraft pro Sattel
$Q_{Fl}$	[N]	resultierende Auflagerkraft pro Sattel aus Flüssigkeitsfüllung
$Q_{EG}$	[N]	resultierende Auflagerkraft pro Sattel aus Eigengewicht
$\gamma_{äF}$	[N/mm <sup>3</sup> ]	zum Gesamtgewicht äquivalente Flüssigkeitswichte
$q_F$	[N/mm <sup>2</sup> ]	Flüssigkeitsdruck auf die Behälterwand
$q_P$	[N/mm <sup>2</sup> ]	Pressungsverteilung am Sattel
$L_i$	[mm]	Länge eines Behälterbereichs
$B$	[N/mm <sup>2</sup> ]	Flächenbezogene Bettungsziffer für die Sattelsteifigkeit
$B_{eB}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	Streckenbezogene Bettungsziffer für die Sattelsteifigkeit
$c_{Starr}$	[mm]	Abstand vom Sattelrand zur Berechnung von $N_{x\varphi}$ bei starrer Lagerung
$c_{Weich}$	[mm]	Abstand vom Sattelrand zur Berechnung von $N_{x\varphi}$ bei weicher Lagerung
$\sigma_{\varphi a}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	über die Satteltbreite gemittelte Spannungen in Umfangsrichtung an der Außenseite des Behälters
$P_0$	[N/mm <sup>2</sup> ]	Pressungsordinate am Sattelhorn
$P_1$	[N/mm <sup>2</sup> ]	Pressungsordinate am tiefsten Sattelpunkt
$P_2$	[N/mm <sup>2</sup> ]	kleinste Pressungsordinate
$\vartheta_2$	[°]	Ort der kleinsten Pressungsordinate
$d$	[mm]	Dicke einer elastischen Zwischenschicht

Weitere Bezeichnungen werden im Laufe der Arbeit an gegebener Stelle erläutert.

# Kapitel 1      Einleitung

## 1.1 Allgemeines

Bei der Ausbildung von Behältern zum Transport oder zur Lagerung von flüssigen oder gasförmigen Stoffen ist in der Industrie der liegende kreiszylindrische Behälter auf Sattellagern weit verbreitet. Der Umgang mit gefährlichen Gasen oder Flüssigkeiten erfordert eine erhöhte Sicherheit bei der Dimensionierung, wobei auch wirtschaftliche Aspekte mit berücksichtigt werden müssen. Neben der verhältnismäßig einfachen Herstellung der Behälterform und der Sattellager ist das gute Verhältnis von Außenfläche zu eingeschlossenem Volumen und die günstige Tragwirkung als Schale ausschlaggebend. Die Lagerung erfolgt in der Regel auf zwei Sätteln, um Zwängungen infolge Lagerverschiebungen oder Temperatureinwirkungen zu vermeiden. Als Behälterabschluss kommen Flachböden, Böden in Korbbogenform oder die sehr verbreiteten Klöpperböden in Frage.

Durch ihre Lagerungsart sind sattelgelagerte Behälter örtlich einer Biegebeanspruchung ausgesetzt. Die für eine Bemessung in der Regel maßgebenden Schnittgrößen am Sattelhorn in Umfangsrichtung müssen daher unter Berücksichtigung der Tragwirkung einer Kreiszyinderschale ermittelt werden. Die Pressungsverteilung im Auflagerbereich ist dabei von entscheidender Bedeutung und bildet die größte Schwierigkeit bei einem rein analytischen Berechnungsansatz. Folglich basierten erste Berechnungsverfahren auf stark vereinfachenden Annahmen, bei denen sich die Ermittlung der Pressungsverteilung unter Berücksichtigung von kinematischen Verträglichkeiten erübrigte.

Zur Reduzierung der maximalen Spannungen am Sattelhorn hat es sich als sinnvoll erwiesen, die Sattellager entweder möglichst nah an den Abschlussböden anzuordnen oder eine insbesondere am Sattelhorn nachgiebige Sattelkonstruktion zu wählen. Bei großen Behältern kommen auch Ringaussteifungen zur Spannungsreduzierung in Betracht.

Praxisorientierten Berechnungsverfahren, wie sie im British Standard oder in den AD-Merkblättern vorhanden sind, liegen Annahmen zu Grunde, welche die beschriebenen Möglichkeiten zur Minimierung der erforderlichen Behälterdicke gar nicht oder nur unzureichend genau berücksichtigen. Ein Nachweis auf Grundlage eines schalentheoretischen Lösungsansatzes oder nach der FE-Methode ist zwar möglich, jedoch ist er mit einem hohen Rechenaufwand verbunden. Systematische Auswertungen dieser Verfahren in Form von Parameterstudien erfolgten bisher nur unter Berücksichtigung einzelner Effekte.

In Anbetracht der Sicherheitsanforderungen und wirtschaftlicher Gesichtspunkte hat sich bis heute kein einheitliches Bemessungsverfahren, in dem die Schalentragswirkung und der Einfluss von konstruktiven Maßnahmen zur Spannungsreduzierung ausreichend genau berücksichtigt werden, durchgesetzt. Ein neuer genauere Berechnungsansatz in dem auch der Einfluss der konstruktiven Maßnahmen berücksichtigt werden kann, würde diesen Mangel beheben.

## 1.2 Literaturübersicht

1951 veröffentlichte Zick [68] die Ergebnisse seiner rechnerischen und experimentellen Untersuchungen an liegenden Behältern in Form eines praxisorientierten Berechnungsverfahrens für die Lagerung auf starren Sätteln. Darin wird der Behälter in Längsrichtung als Balken mit veränderlichem Querschnitt idealisiert. In Umfangsrichtung erfolgt die Berechnung der Schnittgrößen an einem am Sattelhorn fest eingespannten Kreisring, der durch Tangentialkräfte belastet wird, die über den Umfang sinusförmig verteilt sind. Den Einfluss des Bodenabstandes auf die Schnittgrößen in Umfangsrichtung berücksichtigt Zick durch Korrekturfaktoren in Abhängigkeit des Verhältnisses von Bodenabstand zum Radius. Zur Berechnung der Spannungen wird von Zick in Abhängigkeit vom Radius und der Behälterlänge eine mitwirkende Breite definiert, wobei diese Idealisierung auf empirischen Werten basiert. Brownell & Young [12] erläuterten in ihrer Arbeit von 1959 noch einmal ausführlich die von Zick aufgestellten Formeln und geben für die mitwirkende Schalenbreite in Umfangsrichtung neue Ansätze in Abhängigkeit vom Radius und von der Schalendicke an.

Die Berechnung der Spannungen in Umfangsrichtung an einem Kreisring wurde 1971 von Mang [47] im Zusammenhang mit Rohrleitungen weiter verfolgt. Er untersuchte zunächst den

Einfluss unterschiedlicher Belastungsansätze auf die Schnittgrößen und bestätigte die prinzipielle Eignung des von Zick verwendeten Ersatzsystems. Die Berechnung der Spannungen erfordert nach Mang eine detailliertere Betrachtung der mitwirkenden Breite unter Einbeziehung des Sattelumschließungswinkels, dem Ort entlang des Umfangs und der Art der Schnittgröße. Auf Grundlage dieser Erkenntnisse schlägt er einen neuen Ansatz für die mitwirkende Breite am Sattelhorn vor.

Zur Berechnung der Spannungen in einem Rohrstrang stellte 1954 Girkmann [30] eine analytische Lösung auf Grundlage der vereinfachten Schalentheorie nach Flügge [28] vor. Hinsichtlich der Auflagerpressung nahm er eine konstante Verteilung über die Sattelfläche an und löste das Schalenproblem über Fourier-Entwicklungen. Die Spannungen in der Kreiszylinderschale infolge Einzellasten und Einzelmomente nach der Schalentheorie von Flügge löste 1954 Bijlaard [15],[16],[17].

Unter Berücksichtigung der Halbbiegetheorie nach Wlassow [67] führte Krupka 1966 [34] Untersuchungen an Kreiszylinderschalen durch, die in Umfangsrichtung belastet werden. Auf Grundlage dieses Lösungsansatzes entwickelte er ein Berechnungsverfahren [35], bei dem sich die Auflagerpressung aus Verträglichkeitsbedingungen zwischen der Schale und dem Sattel ergibt. Aus seinen Berechnungen leitete Krupka einfache Formeln zur Berechnung der Spannungen in Längs- und Umfangsrichtung ab, die zum Beispiel in [36],[37] und [38] beschrieben sind. In späteren Untersuchungen erweiterte Krupka seine Formeln, um die plastische Tragfähigkeit und das Beulen der Schale zu berücksichtigen [38], [39], [40]. Ein von der Methodik gleiches Verfahren, aber auf Grundlage der Biegetheorie von Flügge, stellten 1968 Forbes und Tooth in [29] vor. Weitere Untersuchungen auf Grundlage dieses Verfahrens wurden von Wilson und Tooth in [65] und Duthie, Tooth und weiteren Autoren in [25], [26], [27] und [62] veröffentlicht. Dabei wurden Tangentialkräfte und die Sattelflexibilität berücksichtigt und mit Versuchsergebnissen verglichen.

Von Zwiesele [73] wurden 1968 Versuche zur Messung der Kontaktkräfte zwischen Behälter und Sattel durchgeführt und mit eigenen Berechnungsergebnissen verglichen. Brandes [18] stellte 1971 eine Lösung für lose gelagerte Rohre auf einer Schneidenlagerung vor. 1973 untersuchten Vinet und Doré [64] das Kontaktproblem zwischen einem steifen Ring und einer Kreiszylinderschale und 1977 berücksichtigte Doré zusammen mit Lakis [42],[43] den Einfluss einer über die Satteltbreite veränderlichen Pressung. Systematische Untersuchungen zum

Einfluss der Behälterparameter auf die Spannungen wurden von Del Gazio [20], [21], [22], [23] und Ong [50], [51], [52], [53] durchgeführt, wobei Ong auf Grundlage von Parameterstudien eine Formel mit Tabellen zur Bestimmung der maximalen Spannungen in Umfangsrichtung aufstellte.

Systematische Untersuchungen auf Grundlage der FE-Methode sind bisher kaum vorhanden. Neben den Arbeiten von Stoneking & Sheth [61] und Ladewig [41], in denen es in erster Linie um die Umsetzung der Problematik in der FE-Methode ging, ist im Wesentlichen die Arbeit von Chouihhi [19] zu erwähnen. Unter Verwendung eines degenerierten 9-Knoten-Schalenelementes und einem Kontaktelement zwischen Behälter und Sattel, führte er Parameterstudien durch. Wesentliches Augenmerk legte er dabei auf die Pressungsverteilung im Sattelpbereich und entwickelte Formeln zur Bestimmung der zu erwartenden Pressungsverteilung in Abhängigkeit der wichtigsten Behälterparameter.

### **1.3 Berechnungsvorschriften**

In Deutschland liegen für die Bemessung von liegenden sattelgelagerten Behältern die AD-Merkblätter [1] vor. Das im AD-Merkblatt S3 aufgeführte Verfahren basiert auf der DDR-Norm BR-B2 [3], welche wiederum auf der Auswertung von Literaturquellen durch Ziegenbalg [69] und auf umfangreiche Messungen der VEB Chemieanlagenbau Magdeburg basiert. Für die Anwendung gilt als Einschränkung, dass die Sattelkonstruktion am Sattelhorn weich ausgeführt werden muss. Genaue Abgrenzungskriterien, ab wann die Unterkonstruktion als weich im Sinne der Vorschrift eingestuft werden kann, werden nicht angegeben. Für den Fall der Lagerung auf einem Betonsattel wird auf die Britische Norm BS 5500 [2] verwiesen. Die Britische Norm BS 5500, wie auch die Französische Norm SNCTTI-C10, basieren auf dem Berechnungsverfahren nach Zick und verwenden globale Sicherheitsbeiwerte auf der Materialseite.

Konstruktive Hinweise und Regelausführungen von Druckbehältern bis 25 m<sup>3</sup> enthält die DIN 28020. Ausführungsformen für Behälterböden werden in DIN 28011, 28012 und 28013 und für Sättel in DIN 28080 festgelegt. Die Vorschrift für Tankcontainer GGVS [10] enthält Anweisungen bezüglich der nachzuweisenden Einwirkungen. Im einzelnen sind dies das zweifache Gesamtgewicht in Fahrtrichtung und vertikal abwärts, sowie das einfache Gesamtgewicht

horizontal seitwärts zur Fahrtrichtung und vertikal aufwärts. Berechnungsverfahren hierzu werden nicht angegeben.

## **1.4 Zusammenfassung und Wertung der bisherigen Untersuchungen**

Die bisherigen Lösungsansätze für die Problematik des liegenden sattelgelagerten Behälters lassen sich wie folgt unterscheiden:

Näherungsverfahren, die auf einer Idealisierung des Behälters als Stabwerk beruhen  
Lösung durch schalentheoretische Ansätze  
numerische Berechnungsverfahren (FEM)  
experimentelle Untersuchungen

Anfang der Entwicklung war das Näherungsverfahren von Zick, welches bis heute für den Fall einer starren Lagerung in den nationalen Vorschriften gültig ist. Es ist einfach in der Handhabung und basiert auf Messungen an großen, dickwandigen Behältern. Zahlreiche Untersuchungen haben aber gezeigt, dass bei Anwendung dieses Verfahrens auf andere Behältergeometrien die maximalen Spannungen sowohl über- als auch unterschätzt werden.

Eine schalentheoretische Betrachtung ist am besten geeignet, das Tragverhalten des vorliegenden Behältertyps zu beschreiben. Für den Fall der Kreiszyinderschale liegen eine Reihe von Schalentheorien und Lösungsansätzen vor, die aber eine umfangreiche Berechnung erfordern. Eine weitere Schwierigkeit liegt in der Berücksichtigung der kinematischen Verträglichkeit zwischen Behälter und Sattel. Bei allen Lösungsansätzen, bei denen die Interaktion im Sattelpbereich rechnerisch ermittelt wurde, wurde die kontinuierliche Sattelpressung in endliche Intervalle diskretisiert. Um den Einfluss einer nachgiebigen Sattelkonstruktion zu berücksichtigen, sind im Vorfeld der schalentheoretischen Berechnungen zusätzliche Untersuchungen zur Ermittlung der Sattelflexibilität, etwa nach der FE-Methode, erforderlich. Ein einheitlicher analytischer Lösungsansatz mit vertretbarem Rechenaufwand existiert bisher nicht.

Mit der gestiegenen Leistungsfähigkeit der Computer und der damit verbundenen Entwicklung der FE-Methode, ist die Schwierigkeit bei der Ermittlung der Interaktion zwischen der Kreiszyinderschale und einer beliebigen Sattelform, bei einer annähernd kontinuierlichen

Berücksichtigung der kinematischen Verträglichkeiten, überwunden worden. Das komplexe Problem des Zusammenwirkens von Schale und Sattel erfordert aber auch hier einen Kompromiss zwischen dem Aufwand bei der Generierung und dem Bedürfnis der Praxis nach einer einfachen Handhabung. Eine falsche Einschätzung der realen Steifigkeitsverhältnisse, eine zu grobe Diskretisierung oder eine falsche Elementwahl sind Faktoren, die unbemerkt numerische Schwierigkeiten hervorrufen und zu unrealistischen Ergebnissen führen können.

Experimentelle Untersuchungen wurden sehr früh an sattelgelagerten Behältern durchgeführt, meistens mit dem Ziel, die theoretischen Ergebnisse zu überprüfen. Die unrealistische Erfassung der Beanspruchung nach dem Näherungsverfahren von Zick wurde dabei immer wieder bestätigt. Gleichzeitig haben die Messungen gezeigt, dass die falsche Einschätzung der Steifigkeit im Sattelpbereich zu teilweise stark abweichenden Ergebnissen zwischen der Theorie und der Wirklichkeit führen. Dass trotz dieser Unterschiede bisher keine ausgeprägte Versagensehäufigkeit aufgetreten ist, wird mit den plastischen Tragreserven in der Behälterwand begründet.

Die Anwendung moderner semiprobabilistischer Sicherheitskonzepte oder eine Ausnutzung der plastischen Tragreserven erfordern eine genaue Ermittlung der Einwirkungsgrößen. Dabei muss auch gewährleistet sein, dass zur Erzielung einer wirtschaftlichen Lösung, möglichst eine große Bandbreite an Behälterparametern und konstruktiven Maßnahmen zur Spannungsminimierung berücksichtigt werden kann. Letztendlich ist aber auch die einfache Handhabung eines Verfahrens von Bedeutung, was am Festhalten an dem Berechnungsverfahren von Zick bis in die heutige Zeit zu erkennen ist. Zusammenfassend ist festzustellen, dass ein Mangel in den bisherigen Verfahren vorhanden ist, nämlich die genaue Erfassung des Tragverhaltens bei gleichzeitiger einfacher Anwendung für die Praxis.

## 1.5 Zielsetzung dieser Arbeit und Vorgehensweise

Mit der vorliegenden Arbeit wird ein Beitrag in Form eines neuen Berechnungsverfahrens zur Bestimmung der Spannungsverläufe in Umfangsrichtung bei liegenden sattelgelagerten Behältern geleistet. Unter der Vorgabe einer einfachen Handhabung soll mit der Entwicklung eines neuen Berechnungsverfahrens die Möglichkeit gegeben werden, die schalenspezifische Tragwirkung des sattelgelagerten Behälters und den Einfluss von konstruktiven Maßnahmen ausreichend genau zu erfassen.

Hinsichtlich der Materialeigenschaften der Behälterschale wird ein linear-elastisches Materialverhalten vorausgesetzt. Die Berücksichtigung von plastischen Materialeigenschaften würde die Berechnung wesentlich erschweren, wodurch eine einfache Handhabung nicht mehr gewährleistet wäre. Um später dennoch plastische Tragreserven in Rechnung stellen zu können, ist eine Bewertung der ermittelten Biegespannungen als Sekundärspannungen nach dem AD-Merkblatt S4 [1] denkbar. Als Lastfall wird in dieser Arbeit die Vollfüllung bei senkrechter statischer Belastung betrachtet. Bei der Entwicklung des Verfahrens wird aber darauf geachtet, dass für zukünftige Untersuchungen auch Teilfüllungszustände oder eine horizontale Belastung berücksichtigt werden können. Als Lagerungsbedingung stehen die Lagerung auf einem starren Sattel und eine weiche Lagerung durch Anordnung einer elastomeren Zwischenschicht im Blickpunkt der Untersuchungen.

Um das Verfahren so einfach wie möglich zu gestalten und gleichzeitig eine ausreichende Genauigkeit zu gewährleisten, werden zunächst die bisherigen Lösungsansätze hinsichtlich ihrer zu Grunde liegenden Annahmen und Vereinfachungen untersucht.

Hierzu erfolgt in Kapitel 2 eine detaillierte Darstellung der Grundlagen und Lösungsansätze von bisherigen schalentheoretischen Betrachtungen. Im Hinblick auf eine möglichst einfache Berechnung zur Lösung des schalentheoretischen Problems bietet sich die Schalentheorie im Rahmen der verallgemeinerten technischen Biegetheorie an. Da diese Schalentheorie im Zusammenhang mit sattelgelagerten Behältern noch nicht angewendet wurde, werden die Grundlagen dieser Theorie ebenfalls in Kapitel 2 erläutert. Die Eignung dieser Schalentheorie wird durch Vergleichsrechnungen belegt.

---

Neben den schalentheoretischen Lösungsansätzen sind vor allem Näherungsverfahren gebräuchlich bei denen das Tragverhalten der Behälterschale über dem Sattel durch einen Kreisring idealisiert wird. Diese Verfahren zeichnen sich durch eine einfache Handhabung aus und sind daher ebenfalls von Interesse. In Kapitel 3 werden dazu die theoretischen Grundlagen und insbesondere das Näherungsverfahren von Zick [68] erläutert. Die Theorie der bisher verwendeten einfachen Kreisringe wird durch die Theorie des elastisch gebetteten Kreisrings ergänzt, da sie im späteren Verlauf der Arbeit im Zusammenhang mit dem neuen Berechnungsverfahren von Bedeutung ist.

Zur Beurteilung der angestrebten realitätsnahen Erfassung der Beanspruchung, ist eine Vergleichsberechnung mit einem verifizierten Berechnungsverfahren notwendig. Hierzu wird eine Lösung nach der FE-Methode verwendet, die in Kapitel 4 vorgestellt wird. Die Verifizierung erfolgt durch Vergleich mit Messergebnissen aus [25] und mit Ergebnissen nach der FE-Berechnung von Chouih [19], welche von ihm ebenfalls anhand von Messungen verifiziert wurde.

Neben dem Fall der losen Lagerung auf einem starren Sattel ist ein wichtiges Ziel, die Berücksichtigung einer möglichst hohen Bandbreite an konstruktiven Maßnahmen zu ermöglichen. Dazu zählt auch die Berücksichtigung einer planmäßigen Nachgiebigkeit im Sattelbereich. In diesem Zusammenhang wird im Rahmen der Lösung nach der FE-Methode, eine Möglichkeit zur Idealisierung von dünnen elastomeren Zwischenschichten vorgestellt. Hierbei wird Wert auf eine realitätsnahe Erfassung der Materialeigenschaften gelegt, was eine Berücksichtigung von nichtlinearen Spannungs-Dehnungsbeziehungen erfordert.

Zu Vergleichszwecken werden in Kapitel 5 die Ergebnisse einer Parameterstudie auf Grundlage der bisherigen Berechnungsverfahren zur Bestimmung der maximalen Spannungen in Umfangsrichtung vorgestellt. Der Vergleich erfolgt dabei zwischen dem Verfahren nach Zick [68] als Vertreter eines Näherungsverfahrens, dem Verfahren nach Krupka [35] als Vertreter eines schalentheoretischen Lösungsansatzes und einer FE-Berechnung nach Kapitel 4. Das Ziel dieser Untersuchung ist, die Anwendungsgrenzen der Verfahren zu bestimmen und die damit zusammenhängenden Schwachpunkte zu ermitteln. Mit Kenntnis der Anwendungsgrenzen und den Schwachpunkten können Vorgaben für das neue Berechnungsverfahren aufgestellt und entsprechende Lösungsansätze festgelegt werden.

In Kapitel 6 werden auf Grundlage der in Kapitel 5 gemachten Feststellungen die schalentheoretische Lösung nach der verallgemeinerten technischen Biegetheorie und eine Berechnung an einem elastisch gebetteten Kreisring zu einem neuen Berechnungsverfahren zusammengefasst. Dieses im Rahmen dieser Arbeit neu entwickelte Verfahren ermöglicht die Lösung des Problems eines sattelgelagerten Behälters unter einer vertikalen Belastung durch die Lösung von Differentialgleichungen 4. Ordnung, deren Lösungsansätze bekannt sind und keine mathematischen Schwierigkeiten aufweisen. Die zu verwendenden Lösungsansätze, notwendige Idealisierungen und die Formulierung von Rand- und Übergangsbedingungen werden hierzu eingehend erläutert.

Durch Vergleichsrechnungen für die Fälle einer starren Lagerung, einer weichen Lagerung und einer Verstärkung durch Aussteifungsringe wird in den Kapiteln 7 bis 9 die Leistungsfähigkeit und Genauigkeit des neuen Verfahrens belegt. Im Fall der starren Lagerung wird darüber hinaus gezeigt, wie mit dem Ansatz für die Auflagerpressung nach Chouih der Berechnungsaufwand erheblich reduziert werden kann. Um für den Fall einer weichen Lagerung ebenfalls eine Reduzierung des Berechnungsaufwands zu erzielen, wird auf eine Parameterstudie zurückgegriffen. Zusätzlich wird für den weichen Fall durch eine weitere Parameterstudie eine einfache Entwurfsformel zur Bestimmung der maximalen Spannungen am Sattelhorn aufgestellt. Für den abschließend betrachteten Fall einer Aussteifung durch Ringe wird in Anlehnung an das Verfahren von Zick zwischen einem Aussteifungsring direkt über dem Sattel und Aussteifungsringen seitlich des Sattels unterschieden.

## Kapitel 2                      Schalentheoretische Ansätze

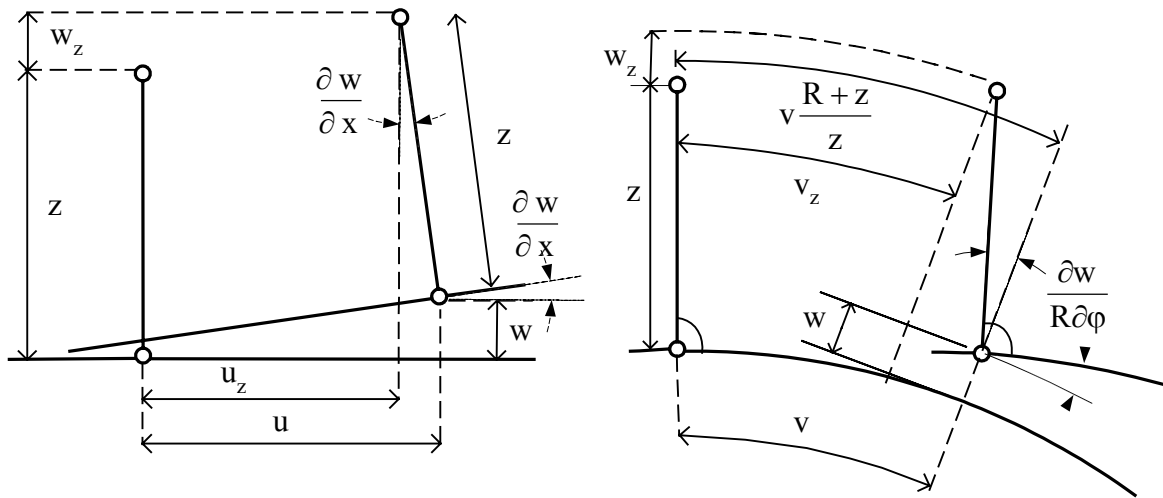
### 2.1 Allgemeines

Bei sattelgelagerten Behältern handelt es sich in der Regel um dünnwandige Kreiszyinderschalen, so dass zur Erfassung des Tragverhaltens in der Schalentheorie die Verformungsanteile infolge Querschub vernachlässigt werden können. Die Entwicklung einer Theorie zur Berücksichtigung der schalenspezifischen Tragwirkung wurde von Love 1888 eingeleitet. Dieser Ansatz wurde im Laufe der Zeit erweitert, bis 1934 Flügge [28] die vollständige Biegetheorie für dünnwandige Kreiszyinderschalen aufstellte. Die Theorie von Flügge in ihrer vollständigen oder vereinfachten Form bildet zusammen mit der Halbbiegetheorie von Wlasow die Grundlage der meisten Berechnungsverfahren mit einem schalentheoretischen Lösungsansatz. Im Rahmen dieses Kapitels werden die Grundlagen dieser Theorien eingehender erläutert und darauf aufbauend die Berechnungsverfahren mit den entsprechenden Lösungsansätzen vorgestellt.

Im Hinblick auf das neu zu entwickelnde Berechnungsverfahren wird auch die Schalentheorie im Rahmen der verallgemeinerten technischen Biegetheorie erläutert. Die ausführliche Darstellung der theoretischen Grundlagen dient auch zur Beurteilung der verschiedenen Ansätze hinsichtlich der Eignung, das Tragverhalten der Kreiszyinderschale abzubilden. Hierzu erfolgt abschließend ein Vergleich der grundlegenden Annahmen, der Lösungsmöglichkeiten und von Berechnungsergebnissen.

## 2.2 Vollständige Biegetheorie der Kreiszylinderschale nach Flügge

Die vollständige Schalentheorie für Kreiszylinderschalen wurde 1934 von Flügge [28] hergeleitet. Er stellt dabei für die Kreiszylinderschale ein System von drei partiellen Differentialgleichungen auf. Die Beziehungen zwischen Verzerrungs- und Verformungszustand basieren auf der Normalenhypothese, so dass sich der gesamte Verzerrungszustand der Schale aus der Verformung der Schalenmittelfläche bestimmen lässt.



**Abb. 2.1** : Verschiebungen der Schalenmittelfläche nach [28]

Die Beziehungen lauten dann:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{R+z} \cdot w - \frac{z}{R \cdot (R+z)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \quad \text{Gl. 2.1 (a-c)}$$

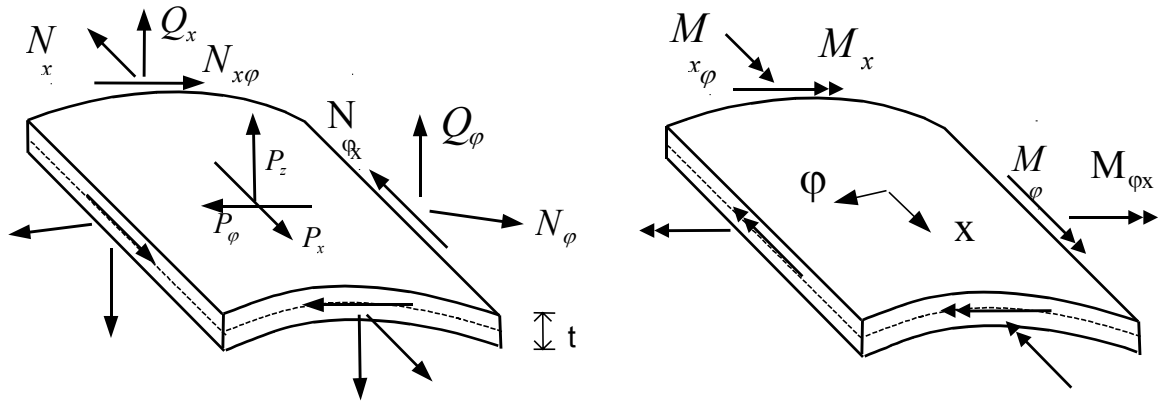
$$\gamma_{x\varphi} = \frac{1}{R+z} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \left(1 + \frac{z}{R}\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{z}{R} + \frac{z}{R+z}\right) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi}$$

Das Hooke'sche Gesetz für den ebenen Spannungszustand liefert den Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Spannungen:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_{xx} + \nu \cdot \varepsilon_{\varphi\varphi}) \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu \cdot \varepsilon_{xx}) \\ \sigma_{x\varphi} &= \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \cdot \gamma_{x\varphi}\end{aligned}\quad \text{Gl. 2.2 (a-c)}$$

Durch Integration der Spannungen über die Schalendicke  $t$  erhält man die resultierenden Kraftgrößen der Spannungen, die äquivalent zu den Schnittgrößen sind. Die Definition der positiven Schnittgrößen ist aus Abb. 2.2 ersichtlich.

$$\begin{aligned}N_x &= \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{xx} \cdot \left(1 + \frac{z}{R}\right) \cdot dz & N_\varphi &= \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{\varphi\varphi} \cdot dz \\ N_{x\varphi} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{x\varphi} \cdot \left(1 + \frac{z}{R}\right) \cdot dz & N_{\varphi x} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{\varphi x} \cdot dz \\ M_x &= - \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{xx} \cdot \left(1 + \frac{z}{R}\right) \cdot z \cdot dz & M_\varphi &= - \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{\varphi\varphi} \cdot z \cdot dz \\ M_{x\varphi} &= - \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{x\varphi} \cdot \left(1 + \frac{z}{R}\right) \cdot z \cdot dz & M_{\varphi x} &= - \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{\varphi x} \cdot z \cdot dz\end{aligned}\quad \text{Gl. 2.3 (a-f)}$$



**Abb. 2.2:** Definition der Schnittgrößen der Kreiszyinderschale nach [28]

Durch Einsetzen der Verformungs-Verzerrungsbeziehungen, des Hooke'schen Gesetzes und nach Integration über die Schalendicke erhält man den Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen und der Verformung der Schalenmittelfläche zu:

$$N_{\phi} = \frac{D}{R} \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial \phi} + w + v \cdot R \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{K}{R^3} \cdot \left( w + \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right)$$

$$N_x = \frac{D}{R} \cdot \left( R \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot w + v \cdot \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) - \frac{K}{R} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$N_{x\phi} = \frac{D}{R} \cdot \frac{1-v}{2} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial \phi} + R \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{K}{R^3} \cdot \frac{1-v}{2} \cdot \left( R \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + R \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} \right)$$

$$N_{\phi x} = \frac{D}{R} \cdot \frac{1-v}{2} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial \phi} + R \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{K}{R^3} \cdot \frac{1-v}{2} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial \phi} + R \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} \right)$$

Gl. 2.4 (a-h)

$$M_{\phi} = \frac{K}{R^2} \cdot \left( w + \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + v \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_x = \frac{K}{R^2} \cdot \left( R^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} - R \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - v \cdot \frac{\partial v}{\partial \phi} \right)$$

$$M_{\phi x} = \frac{K}{R^2} \cdot (1-v) \cdot \left( R \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{R}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$M_{x\phi} = \frac{K}{R^2} \cdot (1-v) \cdot \left( R \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} - R \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Die Schnittgrößen sind über sechs Gleichgewichtsbedingungen im Raum mit der äußeren Last und auch untereinander gekoppelt. Nach Elimination der Querkräfte erhält man über die Gleichgewichtsbedingungen:

$$R \cdot \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} + R \cdot P_x = 0$$

$$\frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} + R \cdot \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{\partial M_{\varphi}}{R \cdot \partial \varphi} - \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} + R \cdot P_{\varphi} = 0 \quad \text{Gl. 2.5 (a-c)}$$

$$\frac{\partial^2 M_{\varphi}}{\partial \varphi^2} + R \cdot \frac{\partial^2 M_{x\varphi}}{\partial x \partial \varphi} + R \cdot \frac{\partial^2 M_{\varphi x}}{\partial \varphi \partial x} + R^2 \cdot \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + R \cdot N_{\varphi} - R^2 \cdot P_z = 0$$

die Differentialgleichungen der Zylindertheorie nach Flügge:

$$R^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\nu}{2} \cdot R \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \varphi} + \nu \cdot R \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + k \cdot \left( \begin{array}{l} \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - R^3 \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ + \frac{1-\nu}{2} \cdot R \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x \varphi^2} \end{array} \right) = -P_x \cdot \frac{R^2}{D}$$

$$\frac{1+\nu}{2} \cdot R \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \varphi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2} \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} + k \cdot \left( \begin{array}{l} \frac{3}{2}(1-\nu) \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ - \frac{3-\nu}{2} \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \varphi} \end{array} \right) = -P_{\varphi} \cdot \frac{R^2}{D} \quad \text{Gl. 2.6 (a-c)}$$

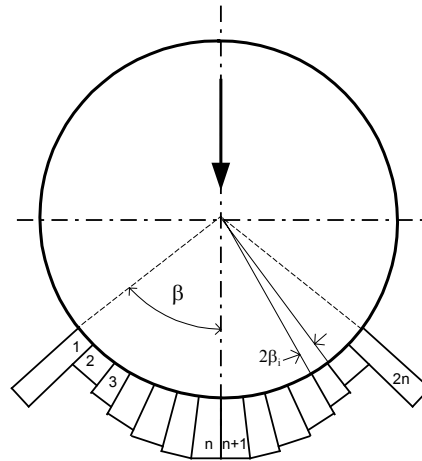
$$\nu \cdot R \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w + k \cdot \left( \begin{array}{l} \frac{1-\nu}{2} \cdot R \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x \varphi^2} - R^3 \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{3-\nu}{2} \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \varphi} + R^4 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ + 2 \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \varphi^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + 2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \end{array} \right) = P_z \cdot \frac{R^2}{D}$$

mit

$$K = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1-\nu^2)}, \quad D = \frac{E \cdot t}{1-\nu^2}, \quad k = \frac{K}{R^2 \cdot D} = \frac{t^2}{12 \cdot R^2}.$$

### 2.2.1 Lösungsansatz von Forbes und Tooth

1968 stellten Forbes und Tooth [29] ein Berechnungsverfahren zur Ermittlung der Beanspruchung von liegenden sattelgelagerten Behältern vor. Forbes und Tooth nehmen dabei an, dass sich die Reaktionskräfte zwischen Behälter und Sattel durch eine endliche Anzahl ( $2n$ ) von diskreten konstanten Teilpressungen ausreichend genau annähern lassen.



**Abb. 2.3:** Diskretisierung der Auflagerpressung nach Forbes und Tooth [29]

Das Verfahren basiert auf einem schalentheoretischen Lösungsansatz der vollständigen Differentialgleichung von Flügge. Er wird verwendet, um die Radialverschiebungen der Kreiszyklinderschale infolge einer einzelnen Teilflächenpressung zu ermitteln. Unter der Voraussetzung, dass sich die Verschiebungen linear zu der Ordinate der Teilflächenpressung verhalten, stellen Forbes und Tooth ein Gleichungssystem auf, das in einzelnen Punkten entlang des Umfangs die resultierende radiale Verformung der Kreiszyklinderschale über dem Sattel in Abhängigkeit der Ordinaten der Teilflächenpressungen beschreibt. Die Lösung erfolgt über die Bedingung, dass sich die Ordinaten der Teilflächenpressung so einstellen müssen, dass sich die Verformungsfigur der Kreiszyklinderschale an den Sattel anpasst.

Die Lösung der Differentialgleichungen Gl. 2.6, zur Ermittlung der Einflusskoeffizienten einer Pressungsordinate, erfolgt mit doppelten Fourier-Reihen-Ansätzen in Längs- und Umfangsrichtung.

Der Ansatz für die Verformungsfunktionen lautet:

$$\begin{aligned}
 u(x, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} \cdot \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \\
 v(x, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} v_{n,m} \cdot \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \\
 w(x, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} w_{n,m} \cdot \cos(n \cdot \varphi) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{L}\right)
 \end{aligned}
 \tag{Gl. 2.7(a-c)}$$

Die Belastungsfunktion, in diesem Fall nur eine in radialer Richtung, wird ebenfalls durch eine doppelte Fourier-Reihe abgebildet:

$$P_Z(x, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_{n,m} \cdot \cos(n \cdot \varphi) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{L}\right)
 \tag{Gl. 2.8}$$

mit

$$P_{0,m} = \frac{2}{\pi \cdot L} \cdot \int_0^L \int_0^\pi P_Z(x, \varphi) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx d\varphi \quad \text{für } n = 0$$

und

$$P_{n,m} = \frac{4}{\pi \cdot L} \cdot \int_0^L \int_0^\pi P_Z(x, \varphi) \cdot \cos(n \cdot \varphi) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx d\varphi \quad \text{für } n > 0.$$

Durch Einsetzen von Gl. 2.7 und Gl. 2.8 in die Differentialgleichungen Gl. 2.6 erhält man für jedes Reihenglied 3 Gleichungen für die noch 3 Unbekannten Fourier-Koeffizienten der Verschiebungen. Dieser Lösungsansatz wurde von Wilson, Duthie und anderen Autoren weiter verfolgt. Dabei wurden Tangentialkräfte am Sattel und eine Nachgiebigkeit des Sattels berücksichtigt. Die Ergebnisse dieses Verfahrens wurden durch Messungen verifiziert aber eine systematische Auswertung in Form von Parameterstudien liegt nicht vor.

### 2.3 Vereinfachte Biegetheorie nach Flügge

Flügge weist schon in seiner Herleitung der vollständigen Differentialgleichung der Kreiszylinderschale auf mögliche Vereinfachungen hin. Durch Vernachlässigung der mit der Biegesteifigkeit  $K$  behafteten Glieder bei den Membrankräften und des Einflusses der Längs- und Tangentialverschiebungen auf die Biegemomente, vereinfachen sich nach Flügge die Differentialbeziehungen aus Gl. 2.4 zu:

$$\begin{aligned}
 N_{\varphi} &= \frac{D}{R} \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w + v \cdot R \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\
 N_x &= \frac{D}{R} \cdot \left( R \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot w + v \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \\
 N_{\varphi x} = N_{x\varphi} &= \frac{D}{R} \cdot \frac{1-v}{2} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + R \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 M_{\varphi} &= \frac{K}{R^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + v \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 M_x &= \frac{K}{R^2} \cdot \left( R^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \\
 M_{x\varphi} = M_{\varphi x} &= \frac{K}{R} \cdot (1-v) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi x}
 \end{aligned}
 \tag{Gl. 2.9 (a-f)}$$

Diese vereinfachten Beziehungen in die Gleichgewichtsbedingungen Gl. 2.5 eingesetzt, liefern analog zur vollständigen Schalentheorie ein System von drei partiellen Differentialgleichungen. Die drei Differentialgleichungen der vereinfachten Biegetheorie lauten:

$$\begin{aligned}
 R^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-v}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+v}{2} \cdot R \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \varphi} + v \cdot R \cdot \frac{\partial w}{\partial x} &= -R^2 \cdot \frac{P_x}{D} \\
 \frac{1+v}{2} \cdot R \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \varphi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1-v}{2} \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= -R^2 \cdot \frac{P_{\varphi}}{D} \\
 v \cdot R \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w + k \cdot \left( R^4 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \varphi^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) &= R^2 \cdot \frac{P_z}{D}
 \end{aligned}
 \tag{Gl. 2.10 (a-c)}$$

Identische Differentialgleichungen leitete Wlassow [67] her. Durch Einführung einer Spannungsfunktion  $\Phi(\varphi, x)$  kann Wlassow die drei Differentialgleichungen in Gl. 2.10 zu einer Differentialgleichung 8. Ordnung zusammenfassen. Für die Spannungsfunktion  $\Phi$  gelten dabei folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} u &= \left( R \cdot \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \cdot \partial \varphi^2} - \nu \cdot R^3 \cdot \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \right) + u_0 \\ v &= - \left( \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \varphi^3} + (2 + \nu) \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \cdot \partial \varphi} \right) + v_0 \end{aligned} \quad \text{Gl. 2.11 (a-c)}$$

$$w = \nabla^2 \cdot \nabla^2 \cdot \Phi + w_0$$

$$\text{mit } \nabla^2 = R^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Die Terme  $u_0$ ,  $v_0$  und  $w_0$  ergeben sich aus den Partikulärlösungen infolge von äußeren Flächenlasten. Für den Fall einer äußeren Belastung in radialer Richtung  $P_Z$  nimmt die Differentialgleichung 8. Ordnung von Wlassow folgende Form an:

$$\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \cdot \Phi + \frac{1 - \nu^2}{c^2} \cdot R^4 \cdot \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = R^4 \cdot \frac{P_Z}{K} \quad \text{Gl. 2.12}$$

$$\text{mit } c^2 = \frac{h^2}{12 \cdot R^2} \quad \text{und } K = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$$

Nach Lösen von Gl. 2.12 können über die Spannungsfunktion die Verformungen nach folgenden Beziehungen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} u &= R \cdot \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial \varphi^2} - \nu \cdot R^3 \cdot \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \\ v &= - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \varphi^3} - (2 + \nu) \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial \varphi} \\ w &= \nabla^2 \cdot \nabla^2 \cdot \Phi \end{aligned} \quad \text{Gl. 2.13 (a-c)}$$

Aus den Verformungen können über die Differentialbeziehungen nach Gl. 2.9 die Schnittgrößen berechnet werden. Für den Fall der liegenden Kreiszylinderschale unter einer symmetrischen Belastung gibt Wlassow zwar keine Lösung der Differentialgleichung Gl. 2.12 an, weist aber auf einen möglichen Produktreihenansatz für die Spannungsfunktion hin:

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} F(x) \cdot \cos(m \cdot \varphi) \quad \text{Gl. 2.14}$$

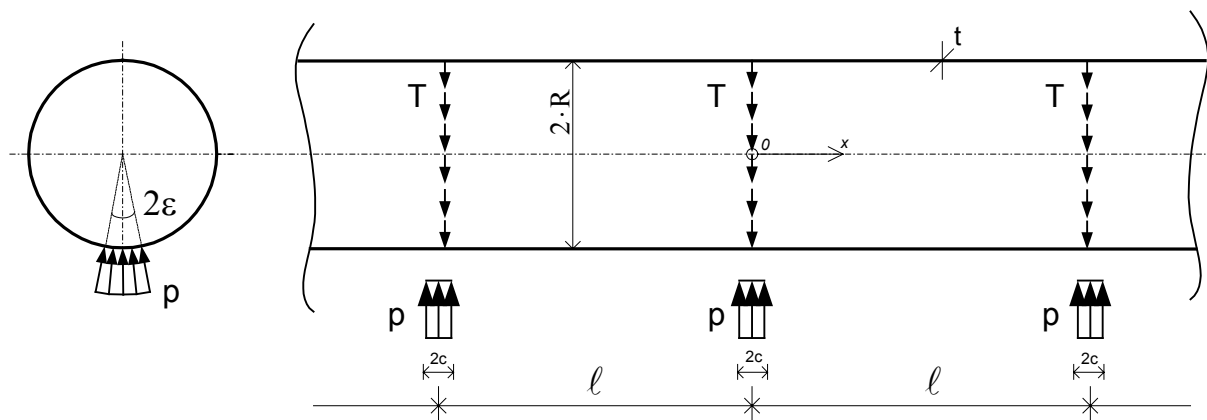
### 2.3.1 Lösungsansatz von Girkmann

Die erste analytische Lösung, die im Zusammenhang mit dem hier behandelten Problem steht, wurde von Girkmann durchgeführt. Zur Berechnung der Schnittgrößen an einem durchlaufenden Rohrstrang auf Grundlage der Schalentheorie nach Flügge, trifft Girkmann in [30] folgende Vereinfachungen:

Die Stützkkräfte im Lagerbereich verlaufen in radialer Richtung und sind über die Lagerfläche konstant verteilt.

Die Belastung des Rohrstranges durch Eigengewicht und Flüssigkeitsfüllung wird über der Stützstelle, als in Umfangsrichtung tangential wirkende Linienlast zusammengefasst.

Die durch die Stützkkräfte verursachten Störungen im Membranspannungszustand sind bis zur nächsten Stützstelle abgeklungen.



**Abb. 2.4:** Rohrstrang nach Girkmann [30]

Zur Lösung des Problems wird die äußere Belastung  $T$  in Umfangsrichtung durch eine Fourier-Reihe und in Längsrichtung durch ein Fourier-Integral dargestellt. Für die Verschiebungsfunktionen  $u$ ,  $w$  und  $v$  wird der gleiche Ansatz verwendet.

$$\begin{aligned}
 u &= \int_0^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cdot \cos n\varphi \right) \cdot \sin \frac{\lambda \cdot x}{R} \cdot d\lambda \\
 v &= \int_0^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cdot \sin n\varphi \right) \cdot \cos \frac{\lambda \cdot x}{R} \cdot d\lambda \\
 w &= \int_0^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} W_n \cdot \cos n\varphi \right) \cdot \cos \frac{\lambda \cdot x}{R} \cdot d\lambda
 \end{aligned}
 \tag{Gl. 2.15 (a-c)}$$

Nach Einsetzen der Ansatzfunktionen in Gl. 2.15 in die drei partiellen Differentialgleichungen Gl. 2.10 erhält Girkmann für jedes Reihenglied ein System von drei Gleichungen für die drei unbekanntenen Fourierkoeffizienten  $U_n$ ,  $V_n$  und  $W_n$ . Die mathematische Schwierigkeit seines Ansatzes liegt in der Lösung der uneigentlichen Integrale, die aus dem Integralansatz in Längsrichtung resultieren. Die Lösung der Integrale erfolgt nur für die Biegemomente in Längs- und Umfangsrichtung über den Residuen-Satz.

### 2.3.2 Lösungsansatz für die Differentialgleichung 8. Ordnung nach Wlassow

Der Lösungsansatz mit Fourier-Reihen oder -Integralen in Längsrichtung ist sehr aufwendig, da diese schlecht konvergieren und somit eine hohe Anzahl von Reihenglieder berücksichtigt werden müssen. Für spätere Vergleichsberechnungen wurde im Rahmen dieser Arbeit ein alternativer Lösungsansatz für den Fall einer in Längsrichtung abschnittsweise konstanten Belastung in radialer Richtung entwickelt. Die Lösung basiert auf dem von Wlassow vorgeschlagenem Reihenansatz für die Spannungsfunktion in Gl. 2.14 und erfolgt durch die Bestimmung der homogenen Lösung für die Differentialgleichung Gl. 2.12 mit Hilfe eines Algebra-Programms. Unter Verwendung des von Wlassow vorgeschlagenen Reihenansatzes in der Form:

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} {}^m F(\bar{x}) \cdot \cos(m \cdot \varphi), \quad \text{mit } \bar{x} = \frac{x}{R}, \tag{Gl. 2.16}$$

und einer Zerlegung der Belastung  $P_Z$  in eine Fourier-Reihe

$$P_Z(\bar{x}, \varphi) = \frac{B_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cdot \cos(m \cdot \varphi), \quad \text{Gl. 2.17}$$

geht die Differentialgleichung nach Wlassow Gl. 2.12 in die folgende Form über:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left( \left( \frac{\partial^8 F(\bar{x})}{\partial \bar{x}^8} - 4 \cdot m^2 \cdot \frac{\partial^6 F(\bar{x})}{\partial \bar{x}^6} \right) \cdot \cos(m \cdot \varphi) = B_m \cdot \cos(m \cdot \varphi) \right. \\ \left. + (6 + A) \cdot m^4 \cdot \frac{\partial^4 F(\bar{x})}{\partial \bar{x}^4} - 4 \cdot m^6 \cdot \frac{\partial^2 F(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} + m^8 \cdot F(\bar{x}) \right) \quad \text{Gl. 2.18}$$

$$\text{mit } A = 12 \cdot \frac{R^2 \cdot (1 - \nu^2)}{t^2}$$

Durch die Wahl der Reihen-Ansätze in Gl. 2.16 und 2.17 kann die Lösung von Gl. 2.18 unabhängig von der Winkelkoordinate  $\varphi$  und für jedes Reihenglied einzeln erfolgen. Gl. 2.18 kann damit in folgender Form dargestellt werden:

$$\frac{\partial^8 F_m(\bar{x})}{\partial \bar{x}^8} - 4 \cdot m^2 \cdot \frac{\partial^6 F_m(\bar{x})}{\partial \bar{x}^6} \\ + (6 + A) \cdot m^4 \cdot \frac{\partial^4 F_m(\bar{x})}{\partial \bar{x}^4} - 4 \cdot m^6 \cdot \frac{\partial^2 F_m(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} + m^8 \cdot F_m(\bar{x}) = B_m \quad \text{Gl. 2.19}$$

Der Index  $m$  für die Funktion  $F(\bar{x})$  soll dabei verdeutlichen, dass die Differentialgleichung Gl. 2.19 für jedes Reihenglied von Gl. 2.18 gilt und diese auch entsprechend oft gelöst werden muss. Die homogene Lösung von Gl. 2.19 erhält man über den Ansatz:

$$F_m(\bar{x}) = e^{\lambda \cdot \bar{x}} \quad \text{Gl. 2.20}$$

und durch Bestimmung der Nullstellen des daraus folgenden charakteristischen Polynoms:

$$\lambda^8 - 4 \cdot m^2 \cdot \lambda^6 + (6 + A) \cdot m^4 \cdot \lambda^4 - 4 \cdot m^6 \cdot \lambda^2 + m^8 = 0 \quad \text{Gl. 2.21}$$

Die Auswertung der Nullstellen erfolgt zweckmäßiger Weise mit einem Algebra-Programm, wie in diesem Fall mit dem Programm Maple. Es hat sich dabei für die weitere Berechnung als sinnvoll erwiesen, die Nullstellen in komplexer Form beizubehalten. Eine Umrechnung auf konjugiert komplexe Paare, aus denen die reelle Lösung abgeleitet werden kann, ist zwar möglich, doch treten dann in der weiteren Berechnung Ungenauigkeiten infolge von Rundungsfehlern auf, die einen signifikanten Einfluss auf die Ergebnisse haben.

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms in Gl. 2.21 in komplexer Form sind:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(4 \cdot m^2 + 2 \cdot i \cdot \sqrt{A} + 2 \cdot \sqrt{-\sqrt{A}} \cdot (\sqrt{A} - 4 \cdot i \cdot m^2)\right)} \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(4 \cdot m^2 + 2 \cdot i \cdot \sqrt{A} + 2 \cdot \sqrt{-\sqrt{A}} \cdot (\sqrt{A} - 4 \cdot i \cdot m^2)\right)} \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(4 \cdot m^2 + 2 \cdot i \cdot \sqrt{A} - 2 \cdot \sqrt{-\sqrt{A}} \cdot (\sqrt{A} - 4 \cdot i \cdot m^2)\right)} \\ \lambda_4 &= -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(4 \cdot m^2 + 2 \cdot i \cdot \sqrt{A} - 2 \cdot \sqrt{-\sqrt{A}} \cdot (\sqrt{A} - 4 \cdot i \cdot m^2)\right)} \\ \lambda_5 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(4 \cdot m^2 - 2 \cdot i \cdot \sqrt{A} + 2 \cdot \sqrt{-\sqrt{A}} \cdot (\sqrt{A} - 4 \cdot i \cdot m^2)\right)} \\ \lambda_6 &= -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(4 \cdot m^2 - 2 \cdot i \cdot \sqrt{A} + 2 \cdot \sqrt{-\sqrt{A}} \cdot (\sqrt{A} - 4 \cdot i \cdot m^2)\right)} \\ \lambda_7 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(4 \cdot m^2 - 2 \cdot i \cdot \sqrt{A} - 2 \cdot \sqrt{-\sqrt{A}} \cdot (\sqrt{A} - 4 \cdot i \cdot m^2)\right)} \\ \lambda_8 &= -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(4 \cdot m^2 - 2 \cdot i \cdot \sqrt{A} - 2 \cdot \sqrt{-\sqrt{A}} \cdot (\sqrt{A} - 4 \cdot i \cdot m^2)\right)}\end{aligned}$$

Gl. 2.22 (a-h)

Die partikuläre Lösung stellt in diesem Fall kein Problem dar, da es sich bei dem Fourier-Koeffizienten um eine Konstante handelt und die Lösung durch einen Koeffizientenvergleich bestimmt werden kann. Damit kann für jedes Reihenglied der Spannungsfunktion folgender Lösungsansatz verwendet werden:

$$\begin{aligned}F_m(x) &= C1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C2 \cdot e^{\lambda_2 x} + C3 \cdot e^{\lambda_3 x} + C4 \cdot e^{\lambda_4 x} \\ &+ C5 \cdot e^{\lambda_5 x} + C6 \cdot e^{\lambda_6 x} + C7 \cdot e^{\lambda_7 x} + C8 \cdot e^{\lambda_8 x} + \frac{B_m}{m^8}\end{aligned}\quad \text{Gl. 2.23}$$

Zur endgültigen Lösung müssen die 8 unbekanntenen Konstanten über Randbedingungen ermittelt werden. Für systembedingte geometrische oder statische Randbedingungen wird dazu der Lösungsansatz in Gl. 2.23 in die Beziehungen nach Gl. 2.13 und 2.9 eingesetzt und ausgewertet. Eine Darstellung der Ergebnisse auf Grundlage dieses Lösungsansatzes erfolgt in Kapitel 2.6.

## 2.4 Halbbiegetheorie nach Wlassow

Für Kreiszyinderschalen mittlerer Länge führt Wlassow in [67] weitergehende Vereinfachungen durch, in dem er den Einfluss der Biege- und Drillmomente in Längsrichtung vernachlässigt. Die Gleichgewichtsbedingungen an einem Schalenelement vereinfachen sich dadurch zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} + P_x &= 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{N_\varphi}{R} + P_z &= 0 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - \frac{Q_\varphi}{R} + P_\varphi &= 0 & Q_\varphi - \frac{1}{R} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Gl. 2.24 (a-d)}$$

Durch Elimination der Quer-, Schub- und Normalkraft in Umfangsrichtung werden die vier Gleichgewichtsbedingungen in Gl. 2.24 in eine Differentialgleichung überführt:

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} + \Omega \cdot R \cdot M_\varphi = P_\Omega \quad \text{Gl. 2.25}$$

$$\text{mit } \Omega = \frac{1}{R^4} \cdot \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad \text{und} \quad P_\Omega = -\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 P_z}{\partial \varphi^2}.$$

Über die Verschiebungs-Verzerrungsbeziehungen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{x\varphi} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{R} & \kappa_\varphi &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{v}{R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \end{aligned} \quad \text{Gl. 2.26 (a-d)}$$

den geometrischen Hypothesen, dass die Umfangsdehnungen  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$  und Gleitungen  $\gamma_{x\varphi}$  gleich Null sind, und dem Hooke'schen Gesetz unter Vernachlässigung der Querkontraktion, erhält Wlassow eine zweite simultane Differentialgleichung der Form:

$$\Omega \cdot \frac{N_x}{t} - \frac{12}{t^3} \cdot \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{Gl. 2.27}$$

Über eine Spannungsfunktion können die beiden Differentialgleichungen in Gl. 2.25 und 2.27 zu einer Differentialgleichung 4. Ordnung zusammengefasst werden. Innerhalb der Differentialgleichung kann dabei eine Schnittgröße oder eine Verschiebungsfunktion als zu bestimmende Funktion angesetzt werden. Für den Fall ohne Belastung der Oberfläche schlägt er vor, für die Tangentialverschiebungen einen Reihenansatz der Form:

$$v(x, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x) \cdot \sin(n\varphi) \quad \text{Gl. 2.28}$$

zu wählen. Die Differentialgleichung ist dann nur abhängig von der Funktion  $V(x)$  und kann für jedes Reihenglied einzeln aufgestellt werden:

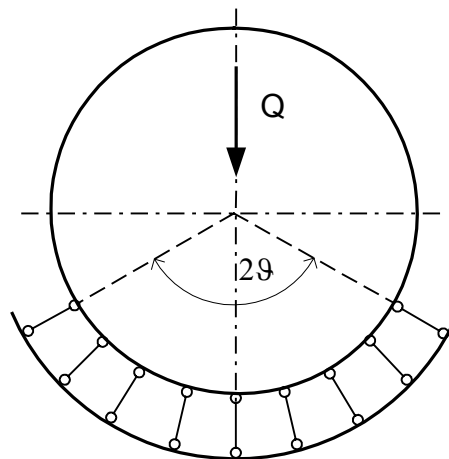
$$\frac{\partial^4 V_n(x)}{\partial x^4} + 4\mu_n^4 \cdot V_n(x) = 0 \quad \text{Gl. 2.29}$$

$$\text{mit } 4\mu_n^4 = \frac{n^4 \cdot (n^2 - 1)^2 \cdot t^2}{12R^2}.$$

Die Differentialgleichung Gl. 2.29 ist formal identisch mit der eines elastisch gebetteten Balkens deren Lösung in Kapitel 2.5.3.5 vorgestellt wird.

### 2.4.1 Verfahren nach Krupka

Zur Lösung des Kontaktproblems zwischen Schale und Sattel setzt Krupka in [34], [36] und [37], analog zu Forbes & Tooth, im Bereich des Sattels zunächst unbekannte diskrete Stützkkräfte an.

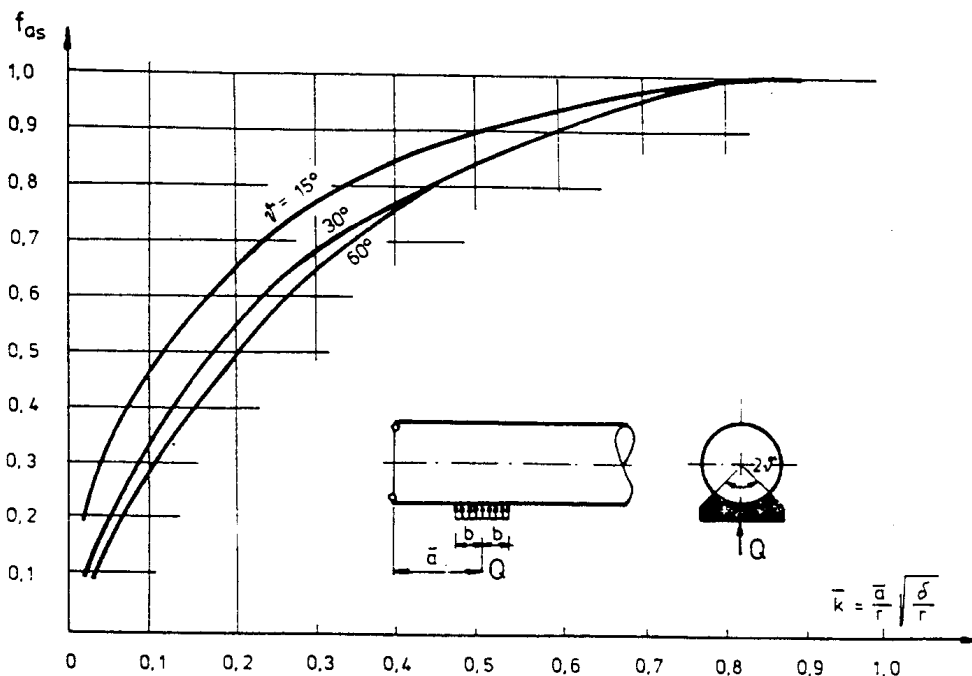


**Abb. 2.5:** Diskrete Stützkkräfte nach Krupka

Auf Grundlage der Halbbiegetheorie nach Wlassow bestimmt er dann Einflussfaktoren für die einzelnen Stützkräfte hinsichtlich der radialen Verschiebung in der Kreiszylinderschale. Mit Kenntnis dieser Einflussfaktoren kann er somit ein Gleichungssystem aufstellen, aus dem sich die Größe der Stützkräfte unter Beachtung der geometrischen Randbedingungen durch den Sattel ermitteln lassen. Auf der Grundlage dieses Verfahrens wurden von Krupka praktisch anwendbare Formeln und Diagramme zur Bestimmung der maximalen Längs- und Umfangsspannungen entwickelt. Das Verfahren ist auf Behälter mit Sattelumschließungswinkeln von 60 bis 120 Grad anwendbar. Die Berechnung der Spannungen in Umfangsrichtung erfolgt nach folgender Gleichung:

$$\sigma_s = f_{as} \cdot f_{os} \cdot \frac{Q}{t^2} \cdot \sqrt{\frac{t}{R}} \quad \text{Gl. 2.30}$$

Der Beiwert  $f_{as}$  berücksichtigt den Einfluss des Behälterbodens und wird aus folgendem Diagramm ermittelt, wobei  $\delta$  für die Blechdicke der Behälterschale und  $r$  für den Behälterradius steht:



**Abb. 2.6:** Diagramm zur Bestimmung des Einflussfaktors  $f_{as}$  [37]

Der Beiwert  $f_{os}$  berücksichtigt den Einfluss der Sattelbreite und wird aus folgendem Diagramm ermittelt:

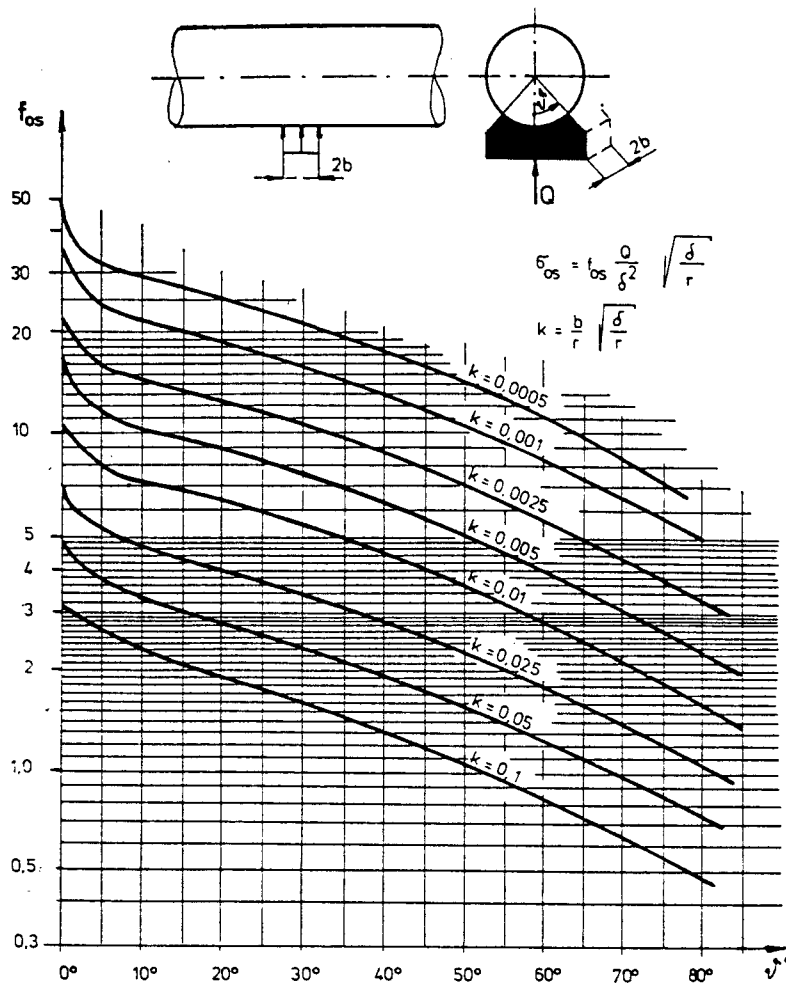


Abb.2.7: Diagramm zur Bestimmung des Einflussfaktors  $f_{os}$  [37]

## 2.5 Verallgemeinerte Technische Biegetheorie VTB

### 2.5.1 Allgemeines

Die von Schardt und Steingass in [57], [58] und [59] entwickelte verallgemeinerte technische Biegetheorie ist eine systematische Erweiterung der herkömmlichen Biegetheorie. Sie ist auf Tragwerksstrukturen anwendbar, die sich eindimensional idealisieren lassen und deren wesentliche mechanische Arbeit über eine Verformungsgröße beschrieben werden kann. Der Vorteil gegenüber der herkömmlichen Biegetheorie für Stabwerke liegt zum einen in der Systematik des Verfahrens, zum anderen in der Möglichkeit, dass neben der aus der Stabstatik bekannten Annahme, dass die Querschnittsform erhalten bleibt, auch der Einfluss von Profilverformungen berücksichtigt werden kann. Neben der ursprünglich angedachten Anwendung auf dünnwandige Stabprofile, ist die Systematik der verallgemeinerten technischen Biegetheorie auch auf Kreiszyinderschalen anwendbar. Für die geschlossene Kreiszyinderschale wird durch geeignete Annahmen das Schalenproblem auf eine Reihe entkoppelter Differentialgleichungen 4. Ordnung zurückgeführt. Die Differentialgleichungen entsprechen der eines elastisch gebetteten Balkens mit einer Zugkraft und sind gegenüber der Differentialgleichung 8. Ordnung (Gl. 2.12) von Wlassow einfacher zu lösen.

Im Folgenden soll zunächst die Systematik der verallgemeinerten technischen Biegetheorie anhand der klassischen Biegetheorie der Stäbe dargestellt werden. Im Weiteren wird auf die Herleitung der Differentialgleichungen für geschlossene Kreiszyinderschalen eingegangen.

## 2.5.2 Systematik der VTB am Beispiel der klassischen Biegetheorie

In der klassischen Biegetheorie sind vier Vorgänge von Bedeutung :

Längenänderung infolge einer Normalkraftbeanspruchung

Biegung um die 1. Hauptachse

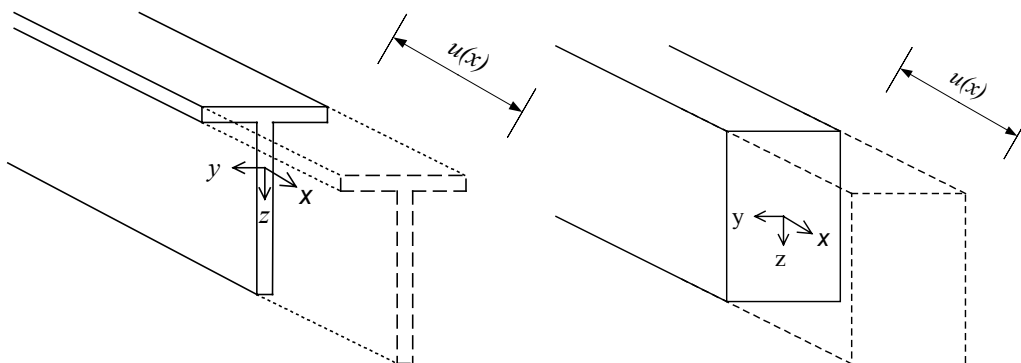
Biegung um die 2. Hauptachse

Verdrehung der Stabachse infolge einer Torsionsbeanspruchung um den Schubmittelpunkt

Der Bezug auf das Hauptachsensystem und den Schubmittelpunkt ist dabei erforderlich, um die einzelnen Vorgänge unabhängig voneinander betrachten zu können. Allgemein kann der Verformungszustand des dreidimensionalen Stabkörpers durch die drei Verschiebungsfunktionen  $u_x(x,y,z)$ ,  $u_y(x,y,z)$  und  $u_z(x,y,z)$  beschrieben werden. Durch die Annahmen, dass die Querschnittsform bei jedem der vier Vorgänge erhalten bleibt, die Querschnitte bei den ersten drei Vorgängen zusätzlich eben bleiben und bei Torsionsbeanspruchung die Querschnittsverformung in x-Richtung über eine Wölbfunktion beschrieben werden kann, reduziert sich die Berechnung des Verformungszustandes auf vier eindimensionale Funktionen  $u(x)$ ,  $v(x)$ ,  $w(x)$  und  $\varphi(x)$ . Sind diese Funktionen bekannt, können die Verschiebungsfunktionen  $u_x(x,y,z)$ ,  $u_y(x,y,z)$  und  $u_z(x,y,z)$  auf Grundlage der getroffenen Annahmen zurückgerechnet werden.

Für die Längenänderung infolge einer Normalkraftbeanspruchung gilt:

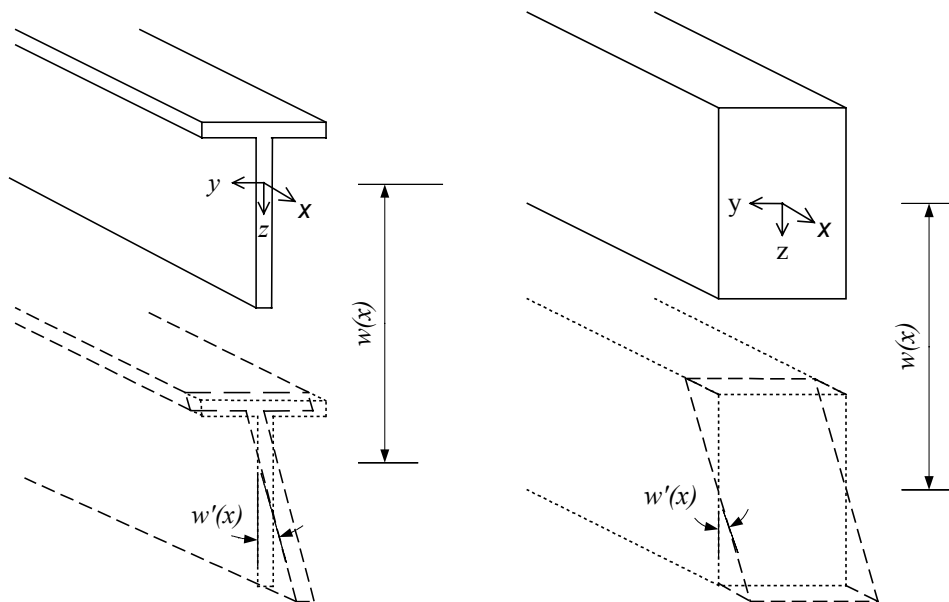
$$u_x(x,y,z) = u(x) \quad , \quad u_y(x,y,z) = 0 \quad , \quad u_z(x,y,z) = 0 \quad \text{Gl. 2.31}$$



**Abb. 2.8:** Querschnittsverformung infolge Normalkraft

für die Biegung um die 1. Hauptachse gilt:

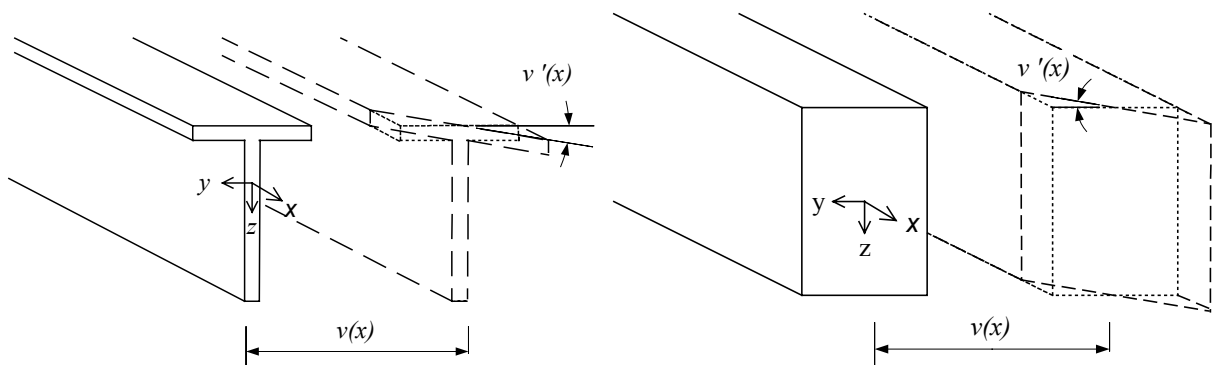
$$u_x(x, y, z) = -z \cdot \frac{\partial w(x)}{\partial x}, \quad u_y(x, y, z) = 0, \quad u_z(x, y, z) = w(x) \quad \text{Gl. 2.32}$$



**Abb. 2.9** : Querschnittsverformung infolge Biegung um die 1. Hauptachse

für die Biegung um die 2. Hauptachse gilt:

$$u_x(x, y, z) = -y \cdot \frac{\partial v(x)}{\partial x}, \quad u_y(x, y, z) = v(x), \quad u_z(x, y, z) = 0 \quad \text{Gl. 2.33}$$



**Abb. 2.10**: Querschnittsverformung infolge Biegung um die 2. Hauptachse

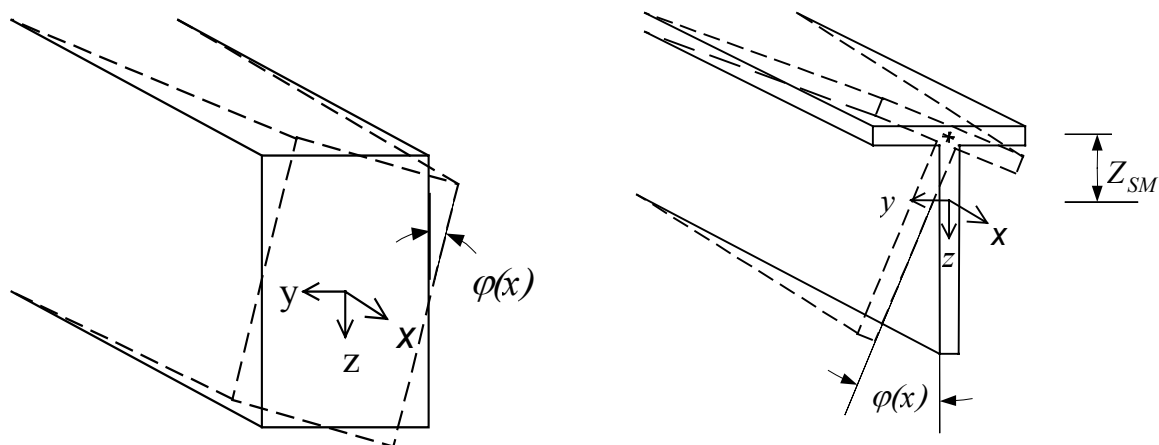
und für die Torsionsbeanspruchung gilt

$$u_x(x, y, z) = -\Psi(y, z) \cdot \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}, \quad u_y(x, y, z) = (z_{SM} - z) \cdot \varphi(x),$$

$$u_z(x, y, z) = (y_{SM} - y) \cdot \varphi(x)$$

Gl. 2.34

mit  $\Psi(y, z) =$  Wölbfunktion  
 und  $y_{SM}$  bzw.  $z_{SM} =$  Koordinaten des Schubmittelpunktes



**Abb. 2.11:** Querschnittsverformung infolge Torsion um den Schubmittelpunkt

Die Verschiebungsfunktionen in Gl. 2.31 bis 34 haben alle die Form einer Produktdarstellung aus einer Funktion über die Variable  $x$  und einer Funktion über die Variablen  $y$  und  $z$ . Lässt man den Fall der Normalkraftbeanspruchung zunächst außer Acht, können die Verschiebungsfunktionen ganz allgemein wie folgt beschrieben werden, wobei der vorgestellte Index  $k$  für den jeweils betrachteten Vorgang steht :

$${}^k u_x(x, y, z) = {}^k u(y, z) \cdot \frac{\partial {}^k V(x)}{\partial x}$$

$${}^k u_y(x, y, z) = {}^k v(y, z) \cdot {}^k V(x)$$

Gl. 2.35 (a-c)

$${}^k u_z(x, y, z) = {}^k w(y, z) \cdot {}^k V(x)$$

mit

$${}^2 u(y, z) = -z$$

$${}^2 v(y, z) = 0$$

$${}^2 w(y, z) = 1$$

$${}^3 u(y, z) = -y$$

$${}^3 v(y, z) = 1$$

$${}^3 w(y, z) = 0$$

$${}^4 u(y, z) = \Psi(y, z)$$

$${}^4 v(y, z) = z_M - z$$

$${}^4 w(y, z) = y - y_M$$

und

$${}^2V(x) = w(x)$$

$${}^3V(x) = v(x) \quad .$$

$${}^4V(x) = \varphi(x)$$

Die Funktionen  ${}^k u(y, z)$  werden Einheitsverwölbungen und die Funktionen  ${}^k v(y, z)$  und  ${}^k w(y, z)$  Einheitsverschiebungen genannt. Die Einheitsverwölbungen beschreiben in diesem Fall ein normiertes Verformungsbild des Querschnitts in  $x$ -Richtung und ihnen kommt in der allgemeinen technischen Biegetheorie eine besondere Bedeutung zu. Die Funktionen  ${}^k V(x)$  werden Verformungsfunktionen genannt und beschreiben die Veränderung des über die Einheitsverwölbungen festgelegten Verformungsbildes entlang der Stabachse. Da im Fall des Biegebalkens die wesentliche mechanische Energie in der Längenänderung der Fasern in Längsrichtung gespeichert wird, reicht die Betrachtung der Einheitsverwölbung und der Verformungsfunktion aus, die relevanten mechanischen Vorgänge zu erfassen. Dazu müssen die Normalspannungen und zugehörigen Dehnungen in Abhängigkeit der Einheitsverwölbung und der Verformungsfunktion ausgedrückt werden. Aus der Verschiebungsfunktion  $u_x(x, y, z)$  in der Produktdarstellung und mit dem Hooke'schen Gesetz für den einachsigen Spannungszustand ergibt sich:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = {}^k u(y, z) \cdot \frac{\partial^2 {}^k V(x)}{\partial x^2} \quad \text{Gl. 2.36}$$

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} = E \cdot {}^k u(y, z) \cdot \frac{\partial^2 {}^k V(x)}{\partial x^2} \quad \text{Gl. 2.37}$$

Die Schnittgrößen ergeben sich durch Integration der Normalspannungen über die Querschnittsfläche unter Berücksichtigung der Hebelarme. Unter Verwendung der Bezeichnung  ${}^k W(x)$  für die Schnittgrößen ergibt sich:

$${}^2 W(x) = M_y(x) = \int_A \sigma_{xx} \cdot z \, dA$$

$${}^3 W(x) = M_z(x) = \int_A \sigma_{xx} \cdot y \, dA \quad \text{Gl. 2.38 (a-c)}$$

$${}^4 W(x) = W(x) = \int_A \sigma_{xx} \cdot \Psi(y, z) \, dA$$

Die Hebelarme in den Integralen sind identisch mit den Einheitsverwölbungen der entsprechenden Vorgänge und unter Verwendung des Zusammenhangs zwischen der Normalspannung, der Einheitsverwölbung und der Verformungsfunktion nach Gl. 2.37 kann die einem Vorgang zugeordnete Schnittgröße wie folgt beschrieben werden:

$${}^k W(x) = \int_A \sigma_{xx} \cdot {}^k u(y, z) dA = E \cdot \int_A {}^k u(y, z)^2 dA \cdot \frac{\partial^{2k} V(x)}{\partial x^2} \quad \text{Gl. 2.39}$$

Das Integral über die quadrierte Einheitsverwölbung in Gl. 2.39 entspricht dem aus der Biegetheorie bekannten statischen Moment 2. Ordnung und wird als Wölbwiderstand  ${}^k C$  bezeichnet:

$${}^k C = \int_A {}^k u(y, z)^2 dA \quad \text{Gl. 2.40}$$

Analog zum Zusammenhang zwischen dem Biegemoment und der zweiten Ableitung der Biegelinie kann damit aus Gl. 2.39 und Gl. 2.40 ein für alle Vorgänge gültiger Zusammenhang zwischen der Schnittgröße und der Verformungsfunktion aufgestellt werden:

$$\frac{\partial^{2k} V(x)}{\partial x^2} = \frac{{}^k W(x)}{E \cdot {}^k C} \quad \text{Gl. 2.41}$$

Über die Bedingung, dass an einem infinitesimalen Balkenelement der Länge  $dx$ , die virtuelle Arbeit unter einer Einheitsverschiebung im Gleichgewichtsfall zu Null werden muss, kann ebenfalls, analog zur Differentialgleichung der Biegelinie, der differentielle Zusammenhang für alle Vorgänge zwischen der Verformungsfunktion und der Belastung hergestellt werden:

$$\frac{\partial^{4k} V(x)}{\partial x^4} = \frac{{}^k q}{E \cdot {}^k C} \quad \text{Gl. 2.42}$$

Die bisher dargestellten Zusammenhänge unterscheiden sich von der herkömmlichen Biegetheorie nur darin, dass die Vorgänge Biegung und Torsion einheitlich dargestellt werden. Durch die systematische Betrachtung der möglichen Querschnittsverformungen als Einheitsverwölbungen, kann neben den bei der klassischen Biegetheorie betrachteten Starrkörperverschiebungen des Querschnittsprofils, auch der Einfluss von Profilverformungen berücksichtigt werden. Hierzu müssen die zu einer Profilverformung korrespondierenden Einheitsverwölbungen ermittelt werden, wobei dies unter Berücksichtigung von Orthogonalitätsbedingungen erfolgen muss. Die Orthogonalitätsbedingungen resultieren aus der Forderung, dass die Diffe-

rentialgleichung für jeden Vorgang, unabhängig von den anderen Vorgängen, betrachtet und gelöst werden kann. Allgemein formuliert besagt sie, dass das Integral über das Produkt von zwei Einheitsverwölbungen, die nicht zum gleichen Vorgang gehören, verschwinden muss.

$$\int_A u^k(y, z) \cdot u^i(y, z) dA = 0 \quad \text{für } i \neq k \quad \text{Gl. 2.43}$$

Im Fall der klassischen Biegetheorie ist diese Orthogonalitätsbedingung gleichbedeutend mit der Bedingung, dass im Hauptachsensystem das Deviationsmoment gleich null ist:

$$\int_A y \cdot z dA = 0 \quad \text{Gl. 2.44}$$

### 2.5.3 Schalentheorie im Rahmen der verallgemeinerten technischen Biegetheorie

Im Rahmen der verallgemeinerten technischen Biegetheorie wird das statische Problem der Kreiszylinderschale auf eine Reihe entkoppelter Differentialgleichungen 4. Ordnung zurückgeführt. Hierzu werden hinsichtlich des sich einstellenden Verzerrungszustandes vereinfachende Annahmen getroffen, die eine Abhängigkeit der Verschiebungsfunktionen untereinander erzeugen. Durch die Verwendung eines Produkt-Reihen-Ansatzes mit getrennten Ansatzfunktionen für die Längs- und Umfangsrichtung, können die relevanten Schnittgrößen und zugehörigen Verzerrungsgrößen für jedes Reihenglied in Abhängigkeit von zwei Funktionen  $V(x)$  und  $u(\varphi)$  beschrieben werden. Die Funktion  $u(\varphi)$  bildet dabei nach der verallgemeinerten technischen Biegetheorie die dem entsprechenden Reihenglied zugeordnete Einheitsverwölbung und die Funktion  $V(x)$  die entsprechende Verformungsfunktion. Durch die Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingungen über eine Variation des Potentials der inneren und äußeren Kräfte, kann, bei Einhaltung der Orthogonalitätsbedingungen für die Einheitsverwölbungen  $u(\varphi)$ , das Schalenproblem auf eine Reihe entkoppelter Differentialgleichungen 4. Ordnung zurückgeführt werden. Die Differentialgleichungen sind dann nur noch abhängig von der Verformungsfunktion  $V(x)$ .

### 2.5.3.1 Differentialbeziehungen zwischen Verformungen und Verzerrungen

Durch eine Taylor-Reihen-Entwicklung der geometrischen Beziehungen zwischen den Verzerrungen und den Verschiebungen nach der vollständigen Schalentheorie von Flügge in Gl. 2.1, lassen sich die Verzerrungen in einen über die Schalendicke konstanten Anteil und einen über die Schalendicke linear veränderlichen Anteil aufspalten:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &&= \varepsilon_{xx}^M - z \cdot \kappa_x \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{R} \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) - z \cdot \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right) &&= \varepsilon_{\varphi\varphi}^M - z \cdot \kappa_\varphi \\ \gamma &= \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} - z \cdot \left( \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) &&= \gamma^M - z \cdot \kappa_{x\varphi}\end{aligned}\quad \text{Gl. 2.45 (a-c)}$$

Die in der vollständigen Taylor-Reihen-Entwicklung auftretenden Glieder höherer Ordnung werden vernachlässigt, wodurch gegenüber der vollständigen Schalentheorie von Flügge eine Vereinfachung auftritt. Im Vergleich zur vereinfachten Biegetheorie von Flügge oder der von Wlassow in Kapitel 2.3 ist aber keine weitergehende Vereinfachung vorhanden. Da für dünnen Schalen Flügge und Wlassow bei ihren vereinfachten Ansätzen von einer ausreichenden Genauigkeit ausgehen, gilt dies auch für die Ansätze in Gl. 2.45 nach der verallgemeinerten technischen Biegetheorie.

Gegenüber der vollständigen Schalentheorie werden weitere Annahmen getroffen mit dem Ziel, zwischen den Verschiebungsfunktionen Abhängigkeiten aufzubauen. Dies geschieht mit der Annahme, dass auf der Schalenmittelfläche die Dehnungen in Umfangsrichtung und die Gleitungen zu Null gesetzt werden. Die Verschiebungsfunktionen  $u(x)$ ,  $v(x)$  und  $w(x)$  sind damit nicht mehr voneinander unabhängig, sondern es gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\varphi\varphi}^M = 0 &\quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = -w \\ \gamma^M = 0 &\quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -R \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\quad \text{Gl. 2.46 (a-b)}$$

### 2.5.3.2 Materialgesetz

Unter Berücksichtigung der oben getroffenen Annahmen, können die Spannungen über das Hooke'sche Gesetz durch die Verzerrungen und damit über die Verschiebungsfunktionen wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_{xx} + \nu \cdot \varepsilon_{\varphi\varphi}) = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} - z \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right) \right) \right) \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu \cdot \varepsilon_{xx}) = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left( \nu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - z \cdot \left( \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right) + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \quad \text{Gl. 2.47 (a-c)} \\ \tau &= G \cdot \gamma = G \cdot z \cdot \left( -\frac{2}{R} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)\end{aligned}$$

### 2.5.3.3 Differentialbeziehungen zwischen Schnittgrößen und Verformungen

Die Differentialbeziehungen zwischen den Schnittgrößen und den Verschiebungsfunktionen erhält man durch Integration der Spannungen über die Schalendicke. Für das weitere Vorgehen genügt es, sich auf die Membrankraft in Längsrichtung und die Biegemomente zu beschränken, da nur diese Schnittgrößen mit den korrespondierenden Dehnungen beziehungsweise Krümmungen Arbeit leisten. Die Arbeit infolge Schub senkrecht zur Schalenmittelfläche wird bei dünnen Schalen generell vernachlässigt und die Membrankräfte  $N_\varphi$  und  $N_{\varphi x}$  leisten aufgrund der Annahme, dass in der Schalenmittelfläche die Dehnungen in Umfangsrichtung und die Gleitungen null sind, keine Arbeit.

Die Differentialbeziehungen der für die weitere Betrachtung relevanten Membrankraft  $N_x$  und der Schnittmomente lauten:

$$N_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{xx} \cdot dz = E \cdot t \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{xx} \cdot z \cdot dz = \frac{K}{R^2} \cdot \left( R^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + v \cdot w \right)$$

Gl. 2.48 (a-d)

$$M_\varphi = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{\varphi\varphi} \cdot z \cdot dz = \frac{K}{R^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w + v \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{x\varphi} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \tau \cdot z \cdot dz = \frac{K}{R^2} \cdot (1-v) \cdot \left( R \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{R}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\text{mit } K = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1-\nu^2)}.$$

Sind die Biegemomente und die Normalkraft in Längsrichtung bekannt, können die restlichen Schnittgrößen über Gleichgewichtsbetrachtungen an einem differentiellen Schalenelement bestimmt werden.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen der Momente um eine Achse in Längsrichtung und eine Achse senkrecht zur Schalenmittelfläche lassen sich die Querkräfte bestimmen:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial \varphi},$$

Gl. 2.49 (a,b)

$$Q_\varphi = \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi}$$

Aus dem Kräftegleichgewicht in Längs- und Umfangsrichtung lassen sich für die Schubkraft und die Normalkraft in Umfangsrichtung die Ableitungen nach der Umfangsrichtung bestimmen:

$$\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} = R \cdot \left( P_x - \frac{\partial N_x}{\partial x} \right)$$

Gl. 2.50 (a,b)

$$\frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} = R \cdot \left( \frac{1}{R} \cdot Q_\varphi - \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} - P_\varphi \right)$$

Die endgültigen Schnittkräfte können durch Integration bestimmt werden, wobei allerdings keine über den Umfang konstanten Anteile erfasst werden können.

#### **2.5.3.4 Herleitung der Differentialgleichung**

Zur Herleitung der Differentialgleichung wird für die Verschiebungsfunktionen ein Produktreihen-Ansatz gewählt und durch Variation des Potentials kann das Schalenproblem auf eine Reihe entkoppelter Differentialgleichungen 4. Ordnung überführt werden.

#### **Produktreihen-Ansatz für die Verschiebungen**

Durch die Annahme, dass in der Schalenmittelfläche die Dehnungen in Umfangsrichtung und die Gleitungen identisch null sind, entstanden Abhängigkeiten zwischen den Verschiebungsfunktionen  $u(x,\varphi)$ ,  $v(x,\varphi)$  und  $w(x,\varphi)$ :

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = -w \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -R \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{Gl. 2.51 (a,b)}$$

Durch die Bedingungen in Gl. 2.51 werden die drei unbekanntenen Verschiebungsfunktionen auf eine zu ermittelnde Verformungsgröße reduziert, welche sich im Rahmen der verallgemeinerten technischen Biegetheorie aus einer Verformungsfunktion und einer zugehörigen Einheitsverwölbung zusammensetzt.

Der Zusammenhang zwischen den Verschiebungsfunktionen, der Verformungsfunktion  $V(x)$  und der Einheitsverwölbung  $u(\varphi)$  in Form eines Produktreihen-Ansatzes wird wie folgt festgelegt:

$$\begin{aligned} u(x, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k V(x)}{\partial x^k} \cdot u(\varphi) \\ v(x, \varphi) &= -\frac{1}{R} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k V(x)}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial^k u(\varphi)}{\partial \varphi^k} \\ w(x, \varphi) &= \frac{1}{R} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k V(x)}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial^{2k} u(\varphi)}{\partial \varphi^{2k}} \end{aligned} \quad \text{Gl. 2.52 (a-c)}$$

Damit lassen sich auch die Verzerrungen und die Schnittgrößen in der Schale durch die Verformungsfunktion und die Einheitsverwölbung ausdrücken:

$$\begin{aligned} N_x &= E \cdot t \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^{2k} V(x)}{\partial x^{2k}} \cdot u(\varphi) = E \cdot t \cdot \varepsilon_x^M \\ M_x &= K \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^{2k} V(x)}{\partial x^{2k}} \cdot \frac{\partial^{2k} u(\varphi)}{\partial \varphi^{2k}} + \frac{\nu}{R^3} \cdot V(x) \cdot \left( \frac{\partial^{4k} u(\varphi)}{\partial \varphi^{4k}} + \frac{\partial^{2k} u(\varphi)}{\partial \varphi^{2k}} \right) \right) \\ M_\varphi &= K \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\partial^k V(x)}{\partial x^k} \cdot \left( \frac{\partial^{4k} u(\varphi)}{\partial \varphi^{4k}} + \frac{\partial^{2k} u(\varphi)}{\partial \varphi^{2k}} \right) + \frac{\nu}{R} \cdot \frac{\partial^{2k} V(x)}{\partial x^{2k}} \cdot \frac{\partial^{2k} u(\varphi)}{\partial \varphi^{2k}} \right) \\ M_{x\varphi} &= \frac{K}{2} \cdot (1 - \nu) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2}{R^2} \cdot \frac{\partial^k V(x)}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial^{3k} u(\varphi)}{\partial \varphi^{3k}} + \frac{2}{R^2} \cdot \frac{\partial^k V(x)}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial^k u(\varphi)}{\partial \varphi^k} \right) \end{aligned} \quad \text{Gl. 2.53 (a-d)}$$

## Variation des Potentials

Die Variation des Potentials der inneren und äußeren Kräfte ist äquivalent zu einer Gleichgewichtsbetrachtung. Die inneren Kräfte bilden mit den äußeren Kräften ein Gleichgewichtssystem, wenn für eine beliebige virtuelle Verrückung die Variation des Potentials verschwindet:

$$\partial\Pi = \partial\Pi_i + \partial\Pi_a = 0 \quad \text{Gl. 2.54}$$

Die Formulierung des inneren Potentials lautet:

$$\partial\Pi_i = \int_0^\ell \oint_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_{xx} \cdot \partial\varepsilon_{xx} + \sigma_{\varphi\varphi} \cdot \partial\varepsilon_{\varphi\varphi} + \tau_{x\varphi} \cdot \partial\gamma_{x\varphi}) \cdot dz \cdot R \cdot d\varphi \cdot dx \quad \text{Gl. 2.55}$$

Aufgrund der Annahme, dass in der Schalenmittelfläche die Dehnungen in Umfangsrichtung und die Gleitungen gleich Null sind, brauchen diese nicht weiter berücksichtigt werden und die Variation kann über die Schnittgrößen und den entsprechenden Verzerrungen wie folgt formuliert werden:

$$\partial\Pi_i = \int_0^\ell \oint (N_x \cdot \partial\varepsilon_x^M + M_x \cdot \partial\kappa_x + M_\varphi \cdot \partial\kappa_\varphi + M_{x\varphi} \cdot \partial\kappa_{x\varphi}) \cdot R \cdot d\varphi \cdot dx \quad \text{Gl. 2.56}$$

Einsetzen der Differentialbeziehungen zwischen Schnittgrößen und Verformung und der Produkt-Reihen-Ansätze für die Verschiebungen liefert den Anteil der inneren Kräfte.

$$\partial\Pi_i = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^\ell \left( \begin{array}{l} E \cdot t \cdot R \cdot {}^k V'' \cdot \oint {}^i u \cdot {}^k u \cdot d\varphi \cdot \partial^i V'' \\ + \frac{K}{R} \cdot {}^k V'' \cdot \oint {}^i \ddot{u} \cdot {}^k \ddot{u} d\varphi \cdot \partial^i V'' \\ + \frac{K}{R^5} \cdot {}^k V \cdot \oint ({}^i \ddot{u} + {}^i \ddot{\ddot{u}}) \cdot ({}^k \ddot{u} + {}^k \ddot{\ddot{u}}) \cdot d\varphi \cdot \partial^i V \\ + 2 \cdot \frac{K}{R^3} (1-\nu) \cdot {}^k V' \cdot \oint ({}^i \dot{u} + {}^i \ddot{u}) \cdot ({}^k \dot{u} + {}^k \ddot{u}) \cdot d\varphi \cdot \partial^i V' \\ + \nu \cdot \frac{K}{R^3} \cdot {}^k V \cdot \oint {}^i \ddot{u} \cdot ({}^k \ddot{u} + {}^k \ddot{\ddot{u}}) \cdot d\varphi \cdot \partial^i V'' \\ + \nu \cdot \frac{K}{R^3} \cdot {}^k V'' \cdot \oint ({}^i \ddot{u} + {}^i \ddot{\ddot{u}}) \cdot {}^k \ddot{u} \cdot d\varphi \cdot \partial^i V \end{array} \right) dx \quad \text{Gl. 2.57}$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurden wie im Folgenden die Ableitungen nach der Längsrichtung und der Umfangsrichtung wie folgt abgekürzt:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = V' \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \dot{u} \quad \text{Gl. 2.58 (a,b)}$$

Hinsichtlich der äußeren Lasten wird vorausgesetzt, dass sie sich durch das Produkt einer ausschließlich über  $x$  veränderlichen Funktion und einer ausschließlich über  $\varphi$  veränderlichen Funktion darstellen lassen:

$$P_x(x, \varphi) = f_x(x) \cdot q_x(\varphi)$$

$$P_\varphi(x, \varphi) = f_\varphi(x) \cdot q_\varphi(\varphi) + {}^1 f_\varphi(x) \quad \text{Gl. 2.59 (a-c)}$$

$$P_z(x, \varphi) = f_z(x) \cdot q_z(\varphi) + {}^1 f_z(x)$$

Die mit dem Index 1 gekennzeichneten Lastanteile in radialer und tangentialer Richtung sind Belastungen, die einen konstanten Normalkraftverlauf in Umfangsrichtung beziehungsweise einen über den Umfang konstanten Schubkraftverlauf hervorrufen. Diese Belastungsterme müssen gesondert betrachtet werden, da, diese Schnittgrößenverläufe nicht erfasst werden können. Die gesonderte Betrachtung erfolgt für den Fall eines konstanten Innendruckes über die Kesselformel:

$$P_z(x, \varphi) = P = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad N_\varphi = \frac{P \cdot R}{t} \quad \text{Gl. 2.60}$$

Für den Fall einer Beanspruchung die einen über den Umfang konstanten Schubfluss erzeugt, kann dieser direkt mit der Belastung gleichgesetzt werden. Durch die Annahme einer in Umfangsrichtung unendlich steifen Kreiszyklinderschale treten auch keine Verformungen auf, die sonst hinsichtlich ihrer kinematischen Verträglichkeit noch überprüft werden müssten. Gleiches gilt für denkbare Belastungen, die einen in Umfangsrichtung konstanten Schubkraftverlauf hervorrufen würden.

Die Variation des Potentials der äußeren Lasten  $P_x$ ,  $P_\varphi$  und  $P_z$  wird allgemein beschrieben durch:

$$\partial\Pi_a = \int_0^\ell \oint (P_x \cdot \partial u + P_\varphi \cdot \partial v + P_z \cdot \partial w) \cdot R \cdot d\varphi \cdot dx \quad \text{Gl. 2.61}$$

Ersetzt man in Gl. 2.61 die Belastungsfunktionen durch die Schreibweise nach Gl. 2.59 und die Verschiebungsfunktionen durch die Reihendarstellung nach Gl. 2.52 kann Gl. 2.61 in folgender Form dargestellt werden:

$$\partial\Pi_a = - \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\ell (f'_x \cdot {}^k q_x + f'_\varphi \cdot {}^k q_\varphi + f'_z \cdot {}^k q_z) \cdot \partial^k V \cdot dx \quad \text{Gl. 2.62}$$

mit

$$\begin{aligned} {}^k q_x &= -R \cdot \oint q_x \cdot {}^k u \cdot d\varphi \\ {}^k q_\varphi &= -\oint q_\varphi \cdot {}^k \dot{u} \cdot d\varphi \\ {}^k q_z &= \oint q_z \cdot {}^k \ddot{u} \cdot d\varphi \end{aligned} \quad \text{Gl. 2.63 (a-c)}$$

Mit Gl. 2.57 und Gl. 2.63 erfolgt eine Formulierung der Variation des Potentials von inneren und äußeren Kräften in Abhängigkeit der Einheitsverwölbungen  ${}^k u(\varphi)$  und der Verformungsfunktionen  ${}^k V(x)$ .

### Orthogonalitätsbedingungen für die Einheitsverwölbungen

Die Orthogonalitätsbedingungen für die Einheitsverwölbungen in Gl. 2.44 lauteten, dass das Integral über die Querschnittsfläche vom Produkt zweier Einheitsverwölbungen, die nicht zum gleichen Vorgang gehören, verschwinden muss. In der Variation des Potentials der inneren Kräfte bedeutet diese Bedingung, dass die Längsmembran- und die Biegespannungen im Zustand  $i$  an den entsprechenden Verzerrungen im Zustand  $k$  keine Arbeit leisten. Dadurch sind die einzelnen Reihenglieder bei der Variation des Potentials entkoppelt, womit für jedes einzelne Reihenglied, im Falle von Gleichgewicht, die Variation des Potentials gleich null sein muss.

Die Bedingung zur Entkopplung der Glieder ist gleichbedeutend damit, dass die Umfangsintegrale in der Variation des Potentials der inneren Kräfte für  $i \neq k$  verschwinden.

$$\begin{aligned}
 \oint u^{i \cdot k} \cdot u \cdot d\varphi &= 0 & \oint \dot{u}^{i \cdot k} \cdot \dot{u} \cdot d\varphi &= 0 \\
 \oint \ddot{u}^{i \cdot k} \cdot \ddot{u} \cdot d\varphi &= 0 & \oint \ddot{u}^{i \cdot k} \cdot \ddot{u} \cdot d\varphi &= 0 \\
 \oint \ddot{u}^{i \cdot k} \cdot \ddot{u} \cdot d\varphi &= 0 & \oint (\dot{u}^{i \cdot k} + \dot{u}^{i \cdot k}) \cdot (\dot{u}^{i \cdot k} + \dot{u}^{i \cdot k}) \cdot d\varphi &= 0 \\
 \oint (\dot{u}^{i \cdot k} + \dot{u}^{i \cdot k}) \cdot (\dot{u}^{i \cdot k} + \dot{u}^{i \cdot k}) \cdot d\varphi &= 0
 \end{aligned}$$

Gl. 2.64 (a-i)

Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn für  $u(\varphi)$  die Kreisfunktionen mit aufsteigender Wellenzahl verwendet werden:

$${}^k u(\varphi) = \begin{cases} R \cdot \cos(m \cdot \varphi) & \text{mit } m = (k-1)/2 \quad \text{für } k = 1,3,5\dots \\ R \cdot \sin(m \cdot \varphi) & \text{mit } m = k/2 \quad \text{für } k = 2,4,6\dots \end{cases}$$

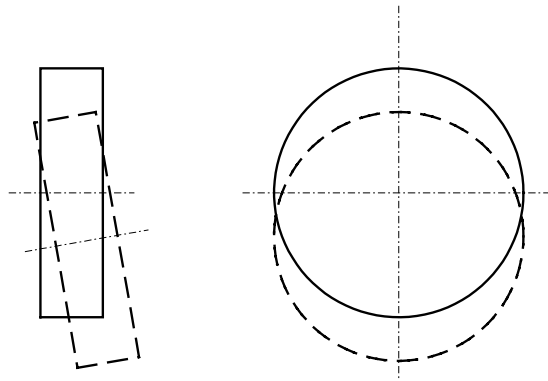
Gl. 2.65

Die Kreisfunktionen in die Umfangsintegrale eingesetzt liefern:

$$\begin{aligned}
 \oint u^{i \cdot k} \cdot u \cdot d\varphi &= \begin{cases} R^2 \cdot \pi & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} & \oint \dot{u}^{i \cdot k} \cdot \dot{u} \cdot d\varphi &= \begin{cases} R^2 \cdot m^2 \cdot \pi & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} \\
 \oint \ddot{u}^{i \cdot k} \cdot \ddot{u} \cdot d\varphi &= \begin{cases} R^2 \cdot m^4 \cdot \pi & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} & \oint \ddot{u}^{i \cdot k} \cdot \ddot{u} \cdot d\varphi &= \begin{cases} R^2 \cdot m^6 \cdot \pi & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} \\
 \oint \ddot{u}^{i \cdot k} \cdot \ddot{u} \cdot d\varphi &= \begin{cases} R^2 \cdot m^8 \cdot \pi & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} & \oint \dot{u}^{i \cdot k} \cdot \dot{u} \cdot d\varphi &= \begin{cases} -R^2 \cdot m^4 \cdot \pi & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} \\
 \oint \dot{u}^{i \cdot k} \cdot \dot{u} \cdot d\varphi &= \begin{cases} -R^2 \cdot m^6 \cdot \pi & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}
 \end{aligned}$$

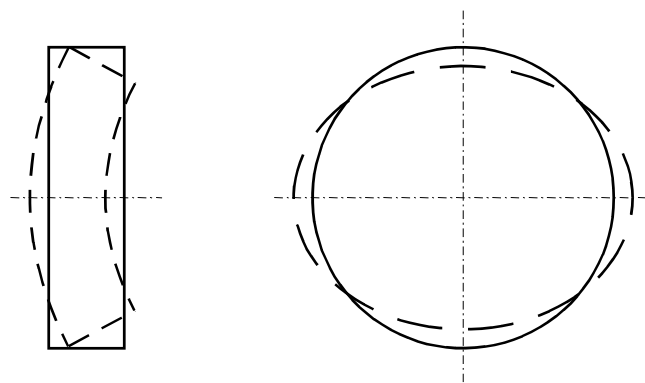
Gl. 2.66 (a-i)

Anschaulich lassen sich die Einheitsverwölbungen an den Verschiebungen in Längsrichtung und in der Querschnittsebene deuten. Die erste Einheitsverwölbung mit einem Kosinus-Term ( $k=3$ ) beschreibt eine über den Durchmesser linear verteilte Längsverschiebung und eine Starrkörperverschiebung des Kreisquerschnitts nach unten, wie in Abb. 2.12 dargestellt wird. Dies entspricht dem Verformungsbild des klassischen Biegebalkens.



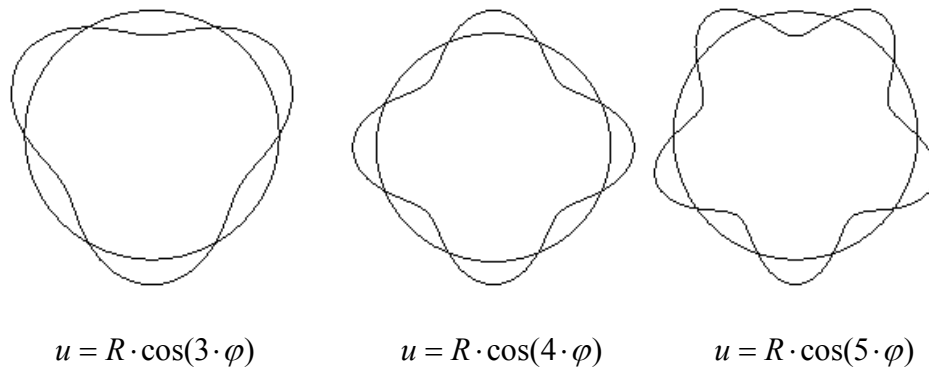
**Abb.2.12:** Querschnittsverformung im Fall der Einheitsverwölbung  ${}^3u = R \cdot \cos(\varphi)$

Die zweite Einheitsverwölbung mit einem Kosinus-Term bildet eine Erweiterung gegenüber der klassischen Biegetheorie. Mit ihr wird eine Profilverformung in Form einer Ovalisierung des Querschnitts berücksichtigt, wie sie in Abb. 2.13 dargestellt wird.



**Abb. 2.13:** Querschnittsverformung im Fall der Einheitsverwölbung  ${}^5u = R \cdot \cos(2\varphi)$

In der folgenden Abb. 2.14 sind die Profilverformungen für weitere Einheitsverwölbungen dargestellt. Die Einheitsverwölbungen mit den Sinus-Termen ergeben analoge um  $90^\circ$  gedrehte Verformungsbilder:



**Abb. 2.14:** Radialverformungen  $w(\varphi)$  infolge der Einheitsverwölbungen 7, 9 und 10

Ersetzt man in der Variation des inneren Potentials die Umfangsintegrale über die Einheitsverwölbungen durch die Lösungen in Gl. 2.66, geht die Doppelsumme in Gl. 2.57 in eine einfache Reihe über:

$$\partial \Pi_i = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\ell} \left( E^k C^k V'' \cdot \partial^k V'' + v \cdot G^k D_2 \cdot \left( {}^k V'' \cdot \partial^k V + {}^k V \cdot \partial^k V'' \right) \right. \\ \left. + G^k D_1 \cdot {}^k V' \cdot \partial^k V' + {}^k B \cdot {}^k V \cdot \partial^k V \right) dx \quad \text{Gl. 2.67}$$

mit

$${}^k C = \begin{cases} 2 \cdot \pi \cdot t \cdot R & \text{für } k = 1 \\ \pi \cdot t \cdot R^3 \cdot \left( 1 + \frac{t^2}{R^2} \cdot \frac{m^4}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \right) & \text{für } k > 1 \end{cases}$$

$${}^k D_1 = \pi \cdot \frac{t^3}{3 \cdot R} \cdot m^2 \cdot (m^2 - 1)^2 \quad ; \quad {}^k D_2 = \pi \cdot \frac{t^3}{R} \cdot \frac{1}{6 \cdot (1 - \nu)} \cdot m^4 \cdot (1 - m^2)$$

$${}^k B = \pi \cdot \frac{K}{R^3} \cdot m^4 \cdot (m^2 - 1)^2 \quad ; \quad K = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$$

Setzt man in Gl. 2.67 durch partielle Integration alle Variationen  $\partial^k V$  auf dieselbe Stufe wie in der Variation des äußeren Potentials in Gl. 2.62, erhält man die Differentialgleichung der Kreiszyklinderschale nach der verallgemeinerten technischen Biegetheorie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( E^k C \cdot \frac{\partial^{4k} V}{\partial x^4} - G^k D \cdot \frac{\partial^{2k} V}{\partial x^2} + {}^k B \cdot {}^k V = f'_x \cdot {}^k q_x + f_\varphi \cdot {}^k q_\varphi + f_z \cdot {}^k q_z \right) \quad \text{Gl. 2.68}$$

mit

$${}^k D = {}^k D_1 - 2 \cdot \nu \cdot {}^k D_2 = \pi \cdot \frac{t^3}{3 \cdot R} \cdot m^2 \cdot (m^2 - 1) \cdot \left( \frac{m^2}{1 - \nu} - 1 \right)$$

### 2.5.3.5 Lösung der Differentialgleichung 4. Ordnung (Gl. 2.68)

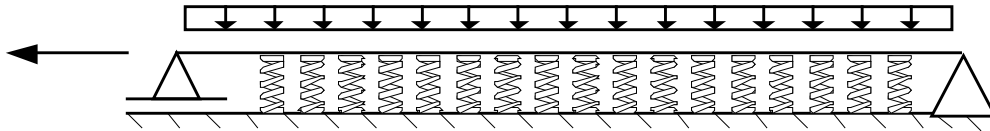
Wenn die Randbedingungen unabhängig von der Einheitsverwölbung sind, kann die Lösung der Differentialgleichungen im Reihenausdruck in Gl. 2.68 für jedes Reihenglied einzeln bestimmt werden.

Für die ersten drei Reihenglieder muss eine gesonderte Betrachtung erfolgen da die Wölbwiderstände  ${}^k B$  und  ${}^k D$  zu null werden und dadurch gegenüber den höheren Reihengliedern ein anderer Lösungsansatz erforderlich ist. Das erste Reihenglied mit  $k=1$  entspricht dem Fall eines durch eine Normalkraft belasteten Stabes mit einem Kreisringquerschnitt. Die Lösung dieses Falls ist trivial und es wird daher nicht näher darauf eingegangen. Die nächsten beiden Reihenglieder stehen für die Einheitsverwölbungen  ${}^2 u = R \cdot \cos(\varphi)$  und  ${}^3 u = R \cdot \sin(\varphi)$  mit jeweils der Wellenzahl  $m=1$ . Für diesen Fall geht die Differentialgleichung Gl. 2.68 über in die aus der klassischen Biegetheorie bekannten Form über:

$$E^2 C \cdot \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} = f'_x \cdot {}^2 q_x + f_z \cdot {}^2 q_z + f_\varphi \cdot {}^2 q_\varphi \quad \text{Gl. 2.69}$$

$$E^3 C \cdot \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} = f'_x \cdot {}^3 q_x + f_z \cdot {}^3 q_z + f_\varphi \cdot {}^3 q_\varphi \quad \text{Gl. 2.70}$$

Die beiden Fälle entsprechen dem Fall der Biegung um die beiden Hauptachsen. Der Wert  ${}^kC$  ist das Flächenträgheitsmoment und die Lastterme infolge  $q_z$  und  $q_\phi$  bilden die resultierenden Belastungen in  $y$ - und  $z$ -Richtung. Der Lastterm infolge  $q_x$  entspricht einem Streckenmoment um die  $y$ - beziehungsweise  $z$ -Achse. Die Lösung erfolgt wie in der klassischen Biegetheorie durch Integration und Einsetzen der Rand- und Übergangsbedingungen.



**Abb. 2.15:** elastisch gebetteter Balken in Analogie zur Differentialgleichung 4. Ordnung Gl.2.68

Bei allen weiteren Reihenglieder sind alle Koeffizienten im homogenen Anteil besetzt und die Differentialgleichung entspricht der eines elastisch gebetteten Balkens mit einer Zugkraft. Die homogene Lösung der Differentialgleichung Gl. 2.68 erhält man über den Ansatz

$$V(x) = e^{\lambda \cdot x} \quad \text{Gl. 2.71}$$

und dem daraus folgenden charakteristischen Polynom:

$$EC \cdot \lambda^4 - GD \cdot \lambda^2 + B = 0 \quad \text{Gl. 2.72}$$

mit den komplexen Nullstellen

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{GD}{2 \cdot EC} \pm i \cdot \sqrt{\frac{B}{EC} - \left(\frac{GD}{2 \cdot EC}\right)^2}} \quad \text{Gl. 2.73}$$

Die vier Nullstellen in Gl. 2.73 lassen sich durch Umformen als zwei konjugiert komplexe Paare darstellen:

$$\alpha \pm i \cdot \beta \qquad -\alpha \pm i \cdot \beta \qquad \text{Gl. 2.74}$$

mit 
$$\alpha = \sqrt{\sqrt{\frac{{}^k B}{4 \cdot E^k C} + \frac{G^k D}{4 \cdot E^k C}}} \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{\sqrt{\frac{{}^k B}{4 \cdot E^k C} - \frac{G^k D}{4 \cdot E^k C}}}.$$

Mit der Euler'schen Schreibweise lässt sich der Lösungsansatz in reeller Form darstellen:

$${}^k V_{\text{hom}}(x) = \left( \begin{array}{l} e^{\alpha \cdot x} \cdot (C1 \cdot \cos(\beta \cdot x) + C2 \cdot \sin(\beta \cdot x)) \\ + e^{-\alpha \cdot x} \cdot (C3 \cdot \cos(\beta \cdot x) + C4 \cdot \sin(\beta \cdot x)) \end{array} \right) \qquad \text{Gl. 2.75}$$

Die partikuläre Lösung von Gl. 2.68 hängt von der Belastungsfunktion in Längsrichtung ab. Für den Fall einer über die Länge konstanten Belastung ergibt sich die partikuläre Lösung zu:

$${}^k V_{\text{part}}(x) = \frac{1}{{}^k B} \cdot (f'_x \cdot {}^k q_x + f_\phi \cdot {}^k q_\phi + f_z \cdot {}^k q_z) \qquad \text{Gl. 2.76}$$

Für über die Länge veränderliche Belastungen kann die Lösung nach dem Grundleungsverfahren ermittelt werden:

$${}^k V_{\text{part}}(x) = \int_{x_0}^x G(x-t) \cdot f(t) dt \qquad \text{Gl. 2.77}$$

mit

$f(t)$  als den inhomogenen Anteil der Differentialgleichung, wobei  $x$  durch  $t$  ersetzt wird  
 $G(x-t)$  der Green-Funktion, in diesem Fall:

$$G(x-t) = e^{\alpha \cdot (x-t)} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{\beta \cdot (\beta^2 + \alpha^2)} \cdot \sin(\beta \cdot (x-t)) - \frac{1}{\alpha \cdot (\beta^2 + \alpha^2)} \cdot \cos(\beta \cdot (x-t)) \right) + \\ e^{-\alpha \cdot (x-t)} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{\beta \cdot (\beta^2 + \alpha^2)} \cdot \sin(\beta \cdot (x-t)) + \frac{1}{\alpha \cdot (\beta^2 + \alpha^2)} \cdot \cos(\beta \cdot (x-t)) \right)$$

$x_0$  eine geeignete Integrationsgrenze oder als Konstante.

Den endgültigen Lösungsansatz erhält man durch Addition der homogenen und partikulären Lösung:

$${}^k V(x) = {}^k V_{\text{hom}} + {}^k V_{\text{part}} \quad \text{Gl. 2.78}$$

Abschließend müssen die unbekanntenen Konstanten  $C_1$  bis  $C_4$  in Gl. 2.75 aus Randbedingungen ermittelt werden. Hierzu wird neben dem Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und der Verformungsfunktion der sich aus dem Produkt-Reihen-Ansatz in Gl.2.52 ergibt, auch der Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen und der Verformungsfunktion benötigt:

$$N_x = E \cdot t \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^{2k} V(x)}{\partial x^2} \cdot {}^k u(\varphi)$$

$$M_x = -\frac{K}{R} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} m^2 \cdot \left( \frac{\partial^{2k} V(x)}{\partial x^2} + \frac{v}{R} \cdot (1-m^2)^k V(x) \right) \cdot {}^k u(\varphi)$$

$$M_\varphi = \frac{K}{R} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} m^2 \cdot \left( \frac{1}{R^2} \cdot (m^2-1)^k V(x) - v \cdot \frac{\partial^{2k} V(x)}{\partial x^2} + \right) \cdot {}^k u(\varphi)$$

$$M_{x\varphi} = \frac{K}{R^2} \cdot (1-v) \sum_{k=2}^{\infty} (1-m^2) \cdot \frac{\partial^k V(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial^k u(\varphi)}{\partial \varphi}$$

Gl. 2.79 (a-h)

$$Q_x = -\frac{K}{R} \cdot m^2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} m^2 \cdot \left( \frac{\partial^{3k} V(x)}{\partial x^3} + \frac{1}{R^2} \cdot (1-m^2) \cdot \frac{\partial^k V(x)}{\partial x} \right) \cdot {}^k u(\varphi)$$

$$Q_\varphi = \frac{K}{R^2} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \left( (1-v-m^2) \cdot \frac{\partial^{2k} V(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \cdot m^2 \cdot (m^2-1)^k V(x) \right) \cdot \frac{\partial^k u(\varphi)}{\partial \varphi}$$

$$N_{x\varphi} = {}^1 N_{x\varphi} + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{E \cdot t \cdot R}{m^2} \cdot \frac{\partial^{3k} V(x)}{\partial x^3} + \frac{{}^k q_x}{\pi \cdot R^2 \cdot m^2} \cdot f_x \right) \cdot \frac{\partial^k u(\varphi)}{\partial \varphi}$$

$$N_\varphi = {}^1 N_\varphi + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \begin{array}{l} \frac{K}{R^4} \cdot m^2 \cdot (m^2-1)^k V(x) \\ -2 \frac{K}{R^2} \cdot \left( m^2-1+v-\frac{v \cdot m^2}{2} \right) \cdot \frac{\partial^{2k} V(x)}{\partial x^2} - \\ \frac{E \cdot t \cdot R^2}{m^2} \cdot \frac{\partial^{4k} V(x)}{\partial x^4} + \frac{1}{\pi \cdot R \cdot m^2} \cdot ({}^k q_\varphi \cdot f_\varphi - {}^k q_x \cdot f'_x) \end{array} \right) \cdot {}^k u(\varphi)$$

Darin sind die Terme  ${}^1 N_\varphi$  und  ${}^1 N_{x\varphi}$  in Gl. 2.79 die Schnittgrößenanteile, die aus einer konstanten Belastung resultieren und gesondert ermittelt werden müssen

## 2.6 Vergleich der Schalentheorien

### 2.6.1 Allgemeines

Zur Bewertung der bisher vorgestellten Schalentheorien hinsichtlich der Eignung für das zu entwickelnde Berechnungsverfahren, werden zunächst der Berechnungsaufwand bei der Lösung und die vereinfachenden Annahmen verglichen und bewertet. Anschließend werden zum Vergleich der Genauigkeit die Ergebnisse einer Untersuchung [63] für das System nach Girkmann [30] vorgestellt.

### 2.6.2 Vergleich des Lösungsaufwands und der Annahmen

Analytische Lösungsansätze mit einer Fourierreiheentwicklung in Längsrichtung für die vollständige und vereinfachte Biegetheorie von Flügge in den Kapiteln 2.2 und 2.3, sind aufgrund der komplexen Differentialgleichungen in Gl. 2.6 und 2.10 und dem schlechten Konvergenzverhalten mit einem hohen Rechenaufwand verbunden, so dass sie sich für ein praxisorientiertes Berechnungsverfahren nicht eignen.

Eine Lösung der vereinfachten Biegetheorie nach Kapitel 2.3.2, führt über die Spannungsfunktion von Wlassow zu einer Vereinfachung in Form einer Differentialgleichung 8. Ordnung Gl. 2.18, bei der auf eine Reihenentwicklung in Längsrichtung verzichtet werden kann. Die analytische Lösung kann zwar bestimmt werden, doch mit den Nullstellen des charakteristischen Polynoms in komplexer Form Gl. 2.20 ist die Berechnung weiterhin sehr aufwendig und erfordert den Einsatz eines mathematischen Computerprogramms.

Dem gegenüber stehen die Differentialgleichungen 4. Ordnung aus der Halbbiegetheorie von Wlassow in Gl. 2.29 und der verallgemeinerten technischen Biegetheorie in Gl. 2.68. Die Lösung dieser Differentialgleichungen kann in einfacher Form angegeben werden (siehe Kapitel 2.5.3.5). Neben der mathematisch einfachen Lösung liegt ein weiterer Vorteil in der Analogie der Differentialgleichungen zu der eines elastisch gebetteten Balkens. Die Tragwirkung der Kreiszylinderschale kann daher durch Vergleich zur Tragwirkung eines elastisch gebetteten Balkens veranschaulicht werden.

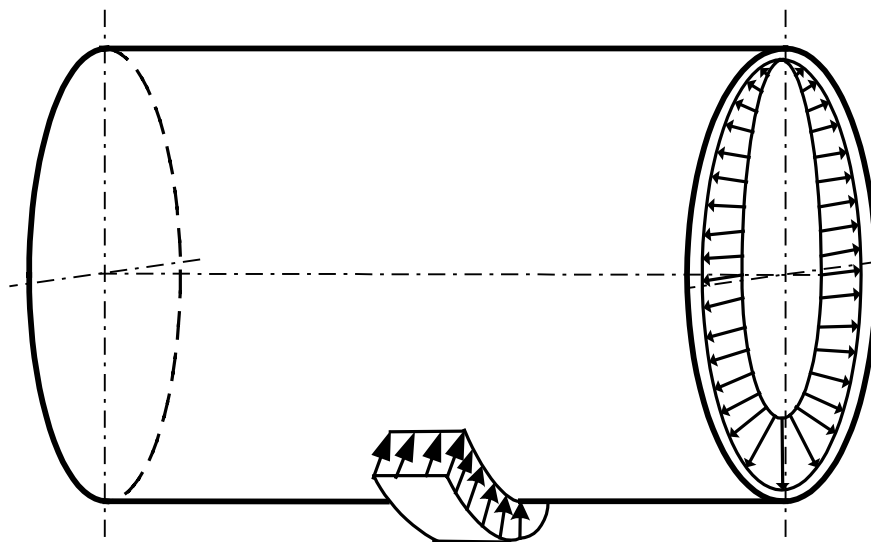
Der Vergleich der Annahmen bei der Halbbiegetheorie und bei der verallgemeinerten technischen Biegetheorie zeigt, dass in der Halbbiegetheorie weitergehende Vereinfachungen getroffen werden. Die Vernachlässigung der Gleitungen und der Dehnungen in Umfangsrichtung in der Schalenmittelfläche tritt in beiden Theorien auf (siehe Kapitel 2.4 mit 2.5.3.1). Die Vernachlässigung der Tragwirkung über Biege- und Drillmomente in Längsrichtung in der Halbbiegetheorie (Kapitel 2.4) tritt dagegen in der verallgemeinerten technischen Biegetheorie nicht auf. Die verallgemeinerte technische Biegetheorie beschreibt daher das Tragverhalten einer Kreiszyinderschale genauer.

Eine Einschränkung hinsichtlich der auftretenden Verzerrungen und Schnittgrößen sind bei der vereinfachten Biegetheorie nicht vorhanden. Aber in Bezug auf die vollständige Biegetheorie zeigt ein Vergleich der Differentialbeziehungen zwischen den Verformungen und den Schnittgrößen bei der vereinfachten Biegetheorie weitergehende Annahmen als bei der verallgemeinerten technischen Biegetheorie (siehe Gl. 2.4, 2.9 und 2.48). In der vereinfachten Biegetheorie wird für das Umfangsbiegemoment angenommen, dass zur Berücksichtigung des Einflusses der Verformungsfunktion in radialer Richtung nur die zweiten Ableitungen relevant sind und hinsichtlich des Drillmomentes der Einfluss aus den Längs- und Tangentialverschiebungen vernachlässigt werden kann. Diese Vereinfachungen gegenüber der vollständigen Biegetheorie werden bei der verallgemeinerten technischen Biegetheorie nicht getroffen und somit werden die Biegemomente in Umfangsrichtung und die Drillmomente bei der verallgemeinerten technischen Biegetheorie genauer erfasst.

Die verallgemeinerte technische Biegetheorie ist deshalb nicht als eine weitere Vereinfachung der schon vereinfachten Biegetheorie anzusehen, sondern als unabhängige Theorie, die vor allem mit Hinblick auf die wesentlich einfacher zu lösende Differentialgleichung Vorteile bietet.

### 2.6.3 Vergleich von Berechnungsergebnissen

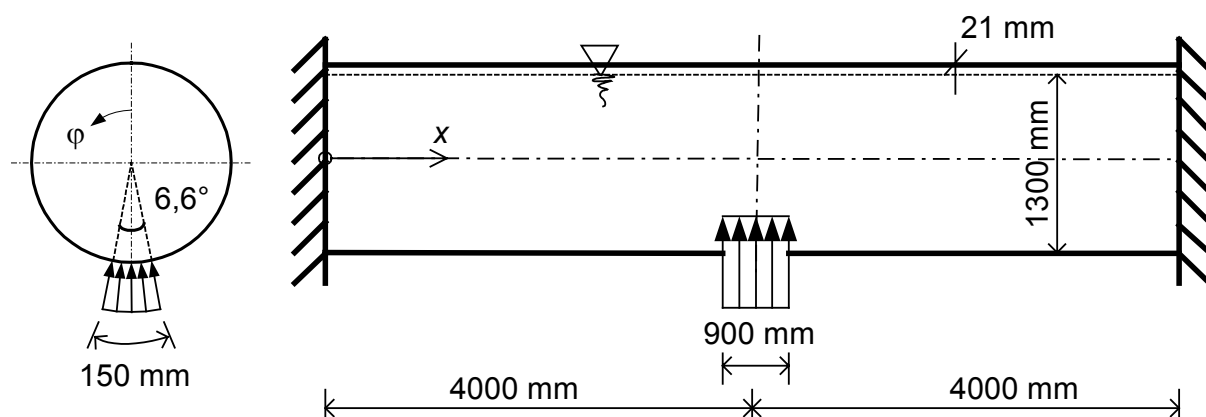
Zum Vergleich der Genauigkeit der einzelnen Schalentheorien werden die Ergebnisse aus [63] für das System von Girkmann in Kapitel 2.3.1 vorgestellt. Die Ergebnisse basieren auf dem Lösungsansatz von Girkmann in Kapitel 2.3.1, auf dem Lösungsansatz aus Kapitel 2.3.2 für die Differentialgleichung 8. Ordnung von Wlassow und der Lösung der Differentialgleichung nach der verallgemeinerten technischen Biegetheorie in Kapitel 2.5. Auf einen Vergleich mit der Halbbiegetheorie nach Wlassow wurde verzichtet, da dieser gegenüber der verallgemeinerten technischen Biegetheorie weitergehende vereinfachende Annahmen zu Grunde liegen, aber der Lösungsaufwand nicht geringer wird.



**Abb. 2.16:** Belastungsbild des Rohrstrangs

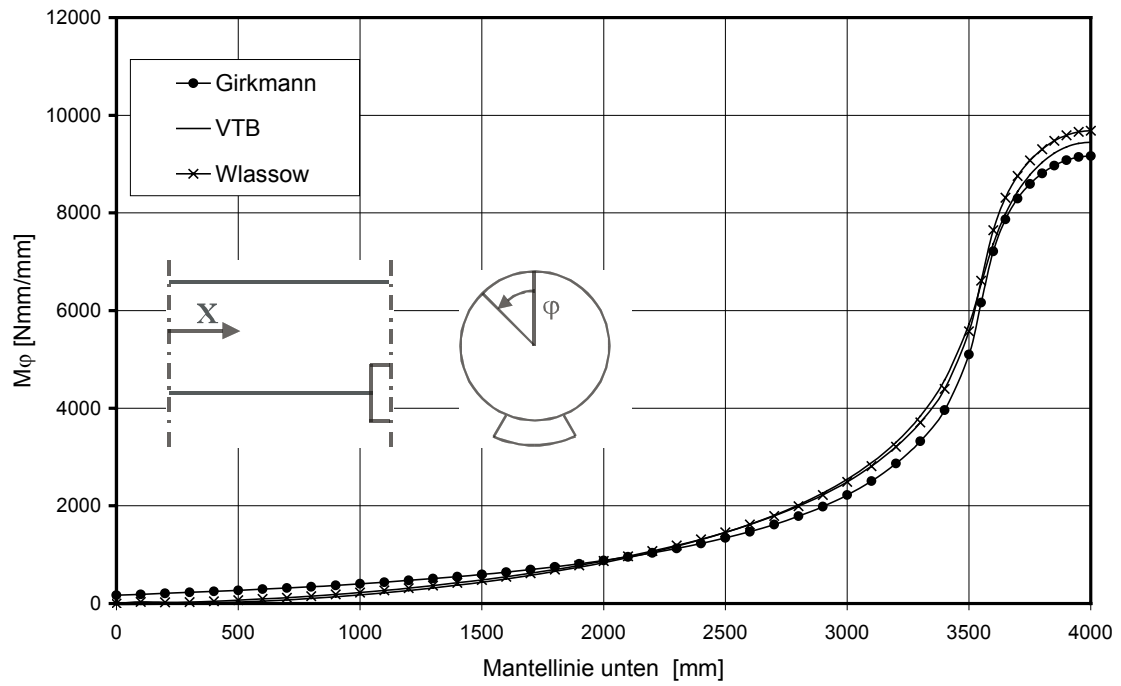
Wie schon in Kapitel 2.3.1 vorgestellt wurde, untersuchte Girkmann das Tragverhalten eines wassergefüllten Rohres, welches in immer wiederkehrenden gleichen Abständen durch eine konstante Auflagerpressung gestützt wird. Den Berechnungen nach Wlassow und nach der verallgemeinerten technischen Biegetheorie wurde ein äquivalentes System zu Grunde gelegt. Die Belastung infolge der Wasserfüllung wurde dabei nicht als Streckenlast idealisiert, sondern als hydrostatischer Druck auf die Innenwand des Rohres angesetzt. Die Auflagerpressung wurde, wie bei Girkmann, als konstant angesetzt.

In Längsrichtung wurde ein zur Auflagerachse symmetrisches Teilstück betrachtet, dessen Länge dem Lasteinzugsbereich eines Auflagers entspricht. An den Seitenenden wurde zunächst auf Grund der Symmetrie zum benachbarten Auflagerpunkt eine horizontale Festhaltung über den gesamten Umfang angesetzt. Girkmann ging in seiner Lösung davon aus, dass sich benachbarte Auflager nicht gegenseitig beeinflussen und somit die Auflagerpressung auch keinen Einfluss in Feldmitte aufweist. Daher wurden, neben der Halterung in Längsrichtung, an den Seitenenden zusätzlich die radialen und tangentialen Verformungen festgehalten, was in der Summe einer festen Einspannung entspricht.

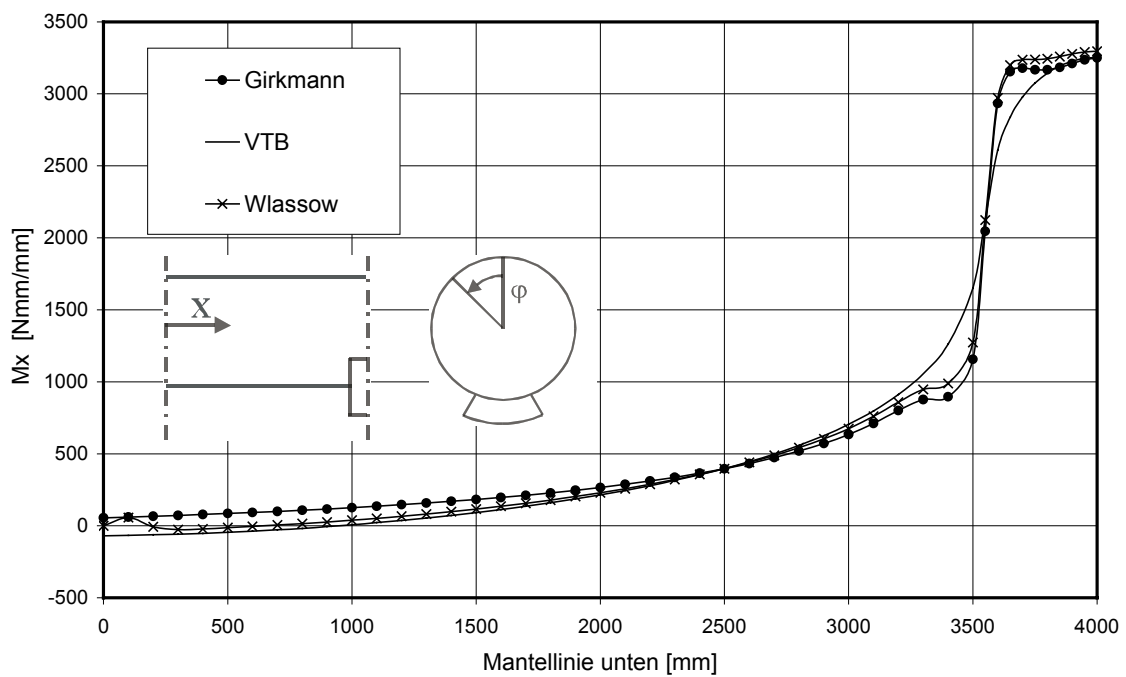


**Abb. 2.17:** statisches System in Längsrichtung und Systemabmessungen

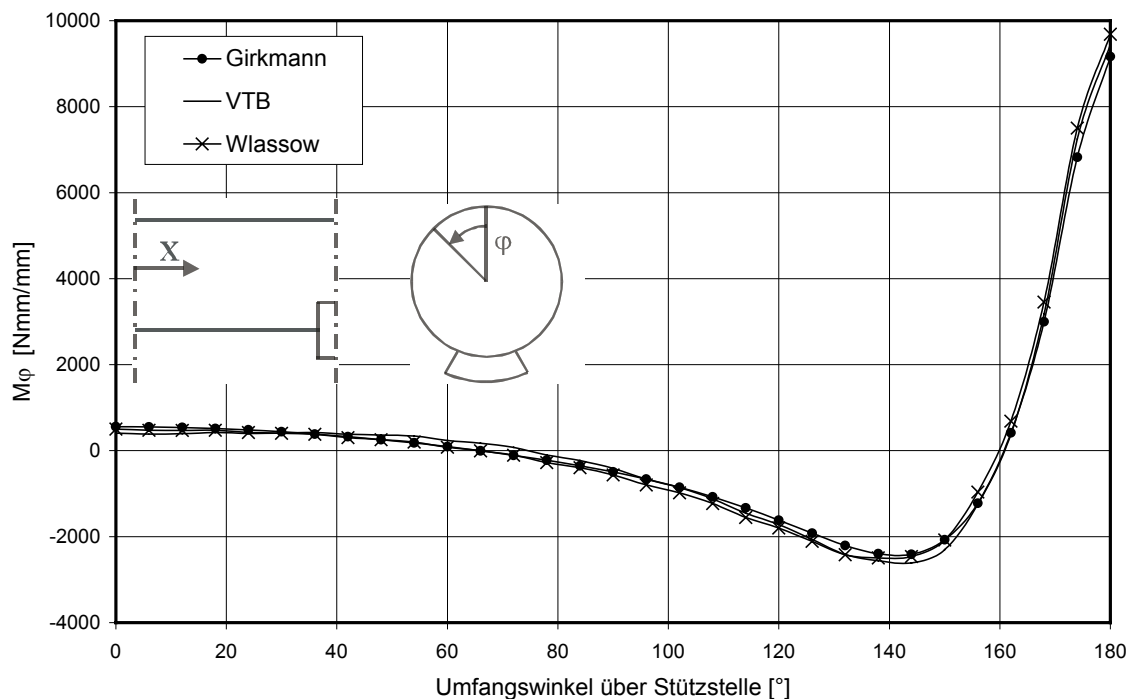
Da über den Lösungsansatz von Girkmann nur die Biegemomente in Längs- und Umfangsrichtung bestimmt werden können, werden zunächst nur diese nach allen drei Ansätzen in den Abbildungen 2.18 bis 2.21 gegenübergestellt.



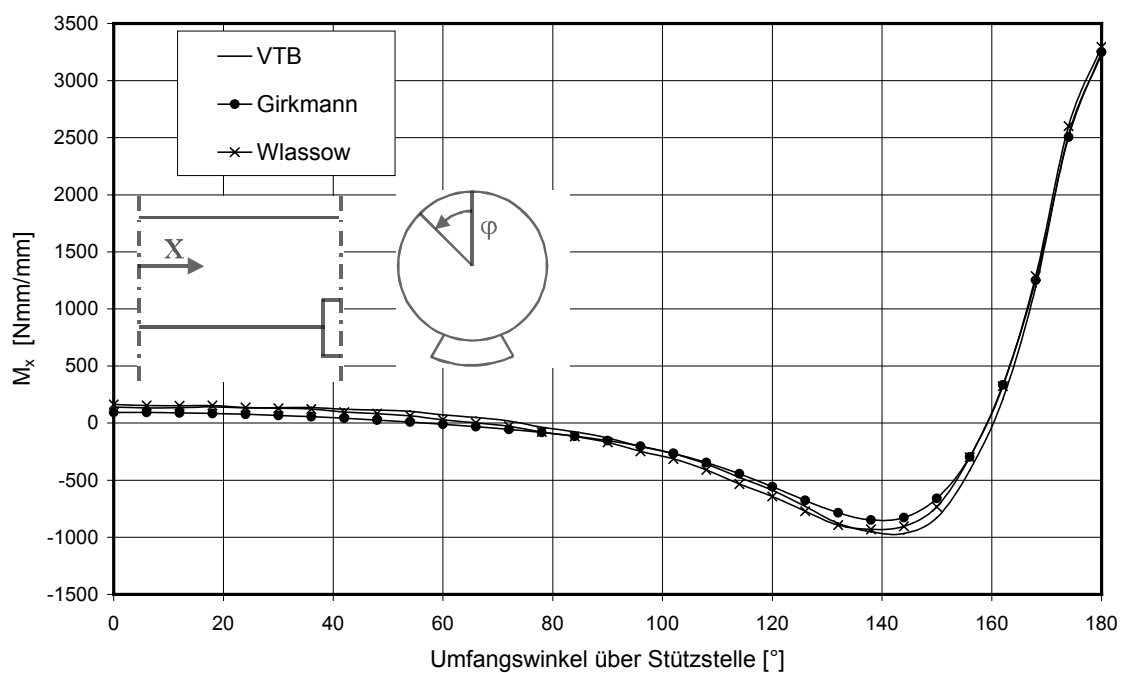
**Abb. 2.18:** Vergleich der Umfangsbiegemomente entlang der Mantellinie bei  $\varphi = \pi$



**Abb. 2.19:** Vergleich der Längsbiegemomente entlang der Mantellinie bei  $\varphi = \pi$

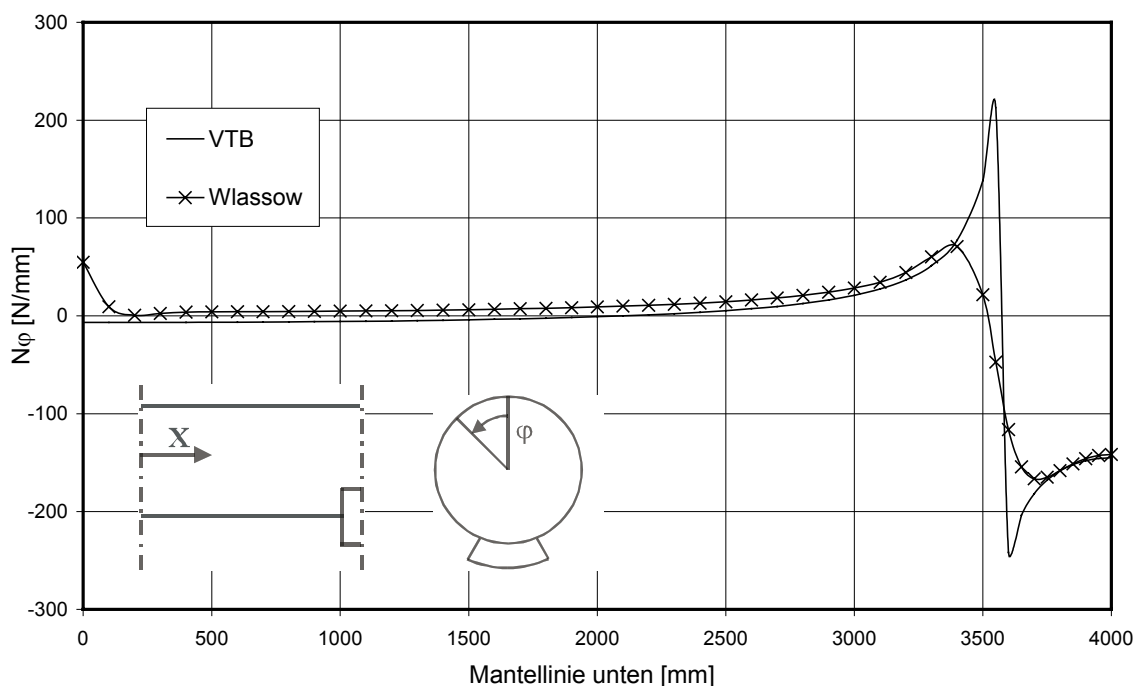


**Abb. 2.20:** Vergleich der Umfangsbiegemomente entlang des Umfangs bei  $x = 4000$  mm



**Abb. 2.21:** Vergleich der Längsbiegemomente entlang des Umfangs bei  $x = 4000$  mm

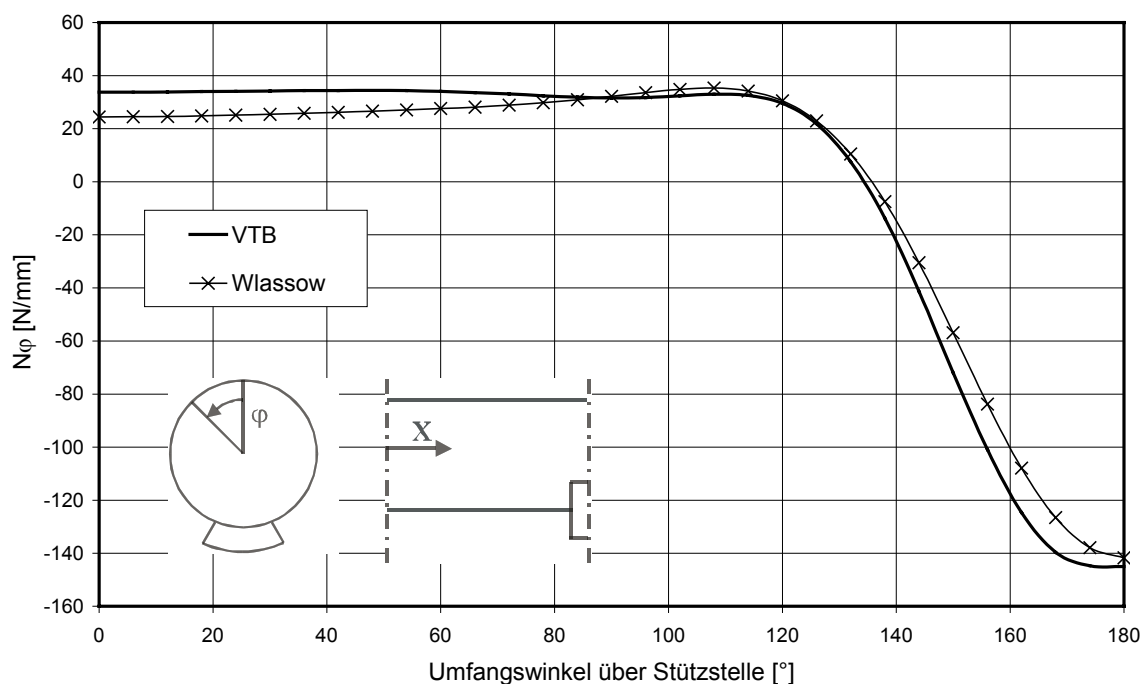
In den Diagrammen ist deutlich zu erkennen, dass alle Ansätze nahezu übereinstimmende Ergebnisse liefern. Nur bei dem Biegemoment in Längsrichtung entlang der Mantellinie sind geringe Abweichungen im qualitativen Verlauf bei der Lösung nach der verallgemeinerten technischen Biegetheorie zu erkennen. Neben den Biegemomenten ist die Erfassung der Membrankräfte in Umfangsrichtung für die Ermittlung der maximalen Spannungen von Bedeutung. Hierzu werden die Ergebnisse nach der vereinfachten Biegetheorie mit denen nach der verallgemeinerten technischen Biegetheorie verglichen.



**Abb. 2.22:** Vergleich der Umfangsmembrankraft entlang der Mantellinie bei  $\varphi = \pi$

Hier zeigen sich im Verlauf der Schnittkräfte  $N_\varphi$  entlang der Mantellinie Unterschiede. Im Randbereich der Auflagerpressung tritt bei der verallgemeinerten technischen Biegetheorie ein Sprung auf, der aus den Annahmen bezüglich der Dehnungen der Schalenmittelfläche in Umfangsrichtung resultiert. Die Annahme, dass diese Dehnungen gleich Null sind, hat zu Folge, dass die Normalkräfte in Umfangsrichtung nicht aus der Verformung der Kreiszyinderschale abgeleitet werden können, sondern über Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden müssen. In den Gleichgewichtsbedingungen wird auch die äußere Belastung berücksichtigt und eine Unstetigkeit in der Belastung in Längsrichtung, wie sie in diesem Fall vorliegt, führt dann auch zu einer Unstetigkeit der Normalkräfte in Umfangsrichtung. Wie aber aus den Abbildungen zu erkennen ist, verfälscht diese Annahme nur die Verläufe in unmittelbarer Nähe der Unstetigkeit in der Belastung. Die Störung klingt schnell ab und an der nach der vereinfachten Biegetheorie

maßgebenden Stelle in der Mitte der Auflagerpressung zeigen sich in Abb. 2.23 wieder übereinstimmende Ergebnisse



**Abb. 2.23:** Vergleich der Umfangsmembrankraft über der Stützstelle bei  $x = 4000$  mm

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass in Anbetracht der wesentlich einfacher zu lösenden Differentialgleichung nach der verallgemeinerten technischen Biegetheorie und der dennoch gut übereinstimmenden Ergebnisse, dieser Lösungsansatz vorzuziehen ist. Zur Erfassung des schalenspezifischen Tragverhaltens wird deshalb im späteren Verlauf dieser Arbeit die verallgemeinerte technische Biegetheorie als Grundlage für ein Berechnungsverfahren verwendet.

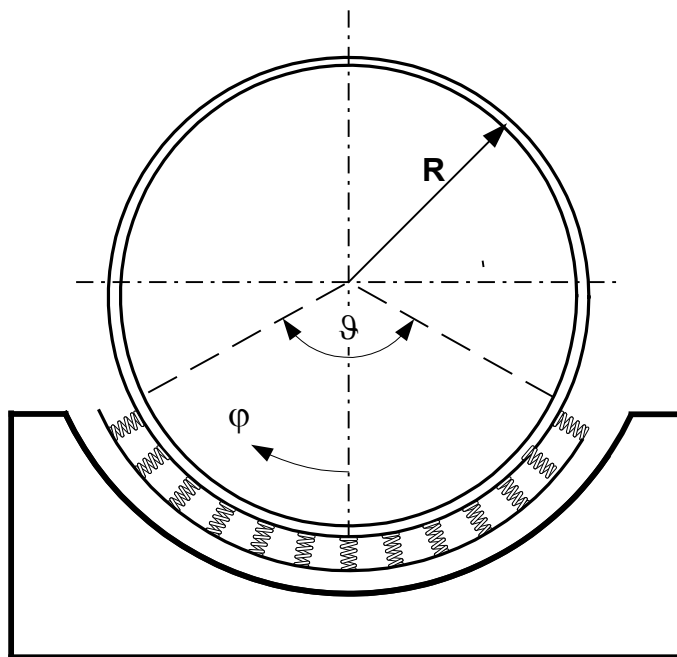
## **Kapitel 3      Biegetheorie der gekrümmten Stäbe**

### **3.1 Allgemeines**

Im Rahmen der Literaturübersicht in Kapitel 1 wurde schon auf Näherungsverfahren eingegangen, bei denen versucht wurde das Tragverhalten der Kreiszylinderschale durch Ersatzstäbe zu idealisieren. Für das Tragverhalten in Umfangsrichtung wurde dabei von Zick, Brownell & Young und Mang auf einen Kreisring zurückgegriffen, der durch einen Schubfluss nach der Balkentheorie für dünnwandige Kreisquerschnitte belastet wird.

Diese Form der Idealisierung bietet im Hinblick auf ein praxisorientiertes Berechnungsverfahren Vorteile, da die Lösung mit bekannten Methoden der Stabstatik erfolgen kann und die statischen Zusammenhänge einfacher nachvollziehbar sind, als bei einem schalentheoretischen Ansatz. Daher wird im Rahmen dieser Arbeit dieser Ansatz weiter verfolgt.

In diesem Kapitel werden die bisherigen Ansätze auf Grundlage einer Berechnung an Kreisringen vorgestellt. In Kapitel 5 werden durch Vergleichsberechnungen die existierenden Schwachpunkte dieser Ansätze aufgezeigt. Vorab kann schon gesagt werden, dass neben dem Belastungsansatz, die Wahl der Lagerungsbedingungen entscheidend für die realitätsnahe Idealisierung der Schale als Kreisring ist. Um eine kontinuierliche Lagerung, wie sie im Fall der Sattellagerung vorliegt, zu berücksichtigen, erscheint die Betrachtung eines teilweise elastisch gebetteten Kreisrings am sinnvollsten. Hierzu wird zu Beginn des Kapitels ein Lösungsansatz vorgestellt, bei dem der Kreisring in einen einfachen Ring oberhalb des Sattels und einen elastisch gebetteten Ring im Sattelbereich aufgeteilt wird.

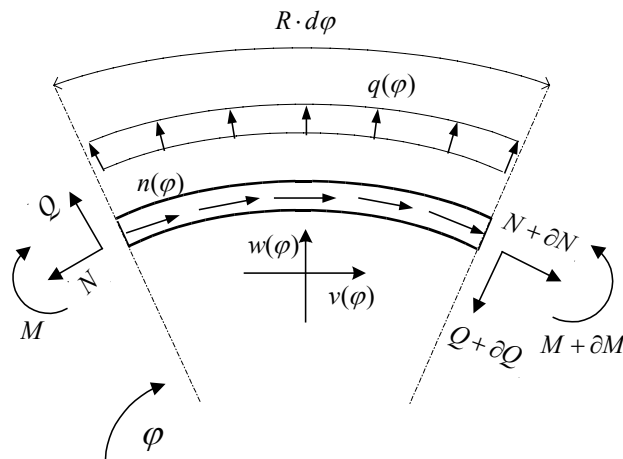


**Abb. 3.1:** elastisch gebetteter Kreisring

### 3.2 Differentialgleichung des einfachen Kreisrings

Zur Lösung des statischen Problems des Kreisringträgers kann, unter Berücksichtigung der differentiellen Zusammenhänge zwischen der Belastung, den Schnittkräften und den Verformungen, eine Differentialgleichung aufgestellt und gelöst werden. In [54] wird hierzu eine Differentialgleichung 6. Ordnung in den Tangentialverschiebungen vorgeschlagen.

Die Beziehungen lassen sich aber auch über die Radialverschiebungen in einer Differentialgleichung 4. Ordnung beschreiben, deren Herleitung hier vorgestellt wird. Zur Herleitung der Differentialgleichung des Kreisrings werden zunächst die differentiellen Beziehungen zwischen der äußeren Belastung, den Schnittgrößen und den radialen und tangentialen Verschiebungen aufgestellt. Die Beziehungen können dann zu einer Differentialgleichung zusammengefasst werden, in welcher der Zusammenhang zwischen der radialen Verschiebung und der äußeren Belastung beschrieben wird.



**Abb.3.2:** Schnittgrößen am infinitesimalen Kreisringelement

Die Gleichgewichtsbedingungen am infinitesimalen Balkenelement liefern unter Berücksichtigung von Streckenlasten in radialer  $q(\varphi)$  und tangentialer  $n(\varphi)$  Richtung:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial N}{\partial \varphi} + Q &= n(\varphi) \cdot R \\ -\frac{\partial Q}{\partial \varphi} - N &= -q(\varphi) \cdot R \\ -\frac{\partial M}{\partial \varphi} &= Q \cdot R \end{aligned} \quad \text{Gl. 3.1 (a-c)}$$

Analog zur Schalentheorie ergeben sich die Beziehungen zwischen den Verformungen und Verzerrungen zu:

$$\varepsilon = \frac{1}{R} \cdot \left( \frac{\partial v(\varphi)}{\partial \varphi} + w(\varphi) \right) \quad \text{Gl. 3.2}$$

Über das Hooke'sche Gesetz für den einachsigen Spannungszustand und nach Integration der Spannungen über die Querschnittsfläche ergeben sich folgende Differentialbeziehungen:

$$\frac{\partial^2 w(\varphi)}{\partial \varphi^2} + w(\varphi) = -\frac{R^2}{EI} \cdot M(\varphi) \quad \text{Gl. 3.3}$$

und

$$\frac{\partial v(\varphi)}{\partial \varphi} + w(\varphi) = \frac{N(\varphi)}{EA} \quad \text{Gl. 3.4}$$

Vernachlässigt man die Dehnungen infolge der Normalkraft, vereinfacht sich Gl 3.4 zu:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v(\varphi)}{\partial \varphi} = -w(\varphi). \quad \text{Gl. 3.5}$$

Somit stehen für die fünf Unbekannten  $N(\varphi)$ ,  $M(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$ ,  $w(\varphi)$  und  $v(\varphi)$  die fünf Gleichungen Gl. 3.1 (a-c), Gl. 3.3 und Gl. 3.5 zur Verfügung. Die fünf Gleichungen können zu einer Differentialgleichung 4. Ordnung zusammengefasst werden. Unter Verwendung der Gleichungen Gl. 3.1(c) und Gl. 3.3 lassen sich die Querkraft und deren erste Ableitung ausdrücken als:

$$Q(\varphi) = \frac{EI}{R^3} \cdot \left( \frac{\partial^3 w(\varphi)}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial w(\varphi)}{\partial \varphi} \right) \quad \text{Gl. 3.6}$$

und

$$\frac{\partial Q(\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{EI}{R^3} \cdot \left( \frac{\partial^4 w(\varphi)}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 w(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right). \quad \text{Gl. 3.7}$$

Mit den Gleichungen Gl. 3.1(a) und Gl. 3.6 kann die Ableitung der Normalkraft ausgedrückt werden durch:

$$\frac{\partial N(\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{EI}{R^3} \cdot \left( \frac{\partial^3 w(\varphi)}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial w(\varphi)}{\partial \varphi} \right) - R \cdot n(\varphi). \quad \text{Gl. 3.8}$$

Durch Integration über  $\varphi$  erhält man für die Normalkraft folgende Differentialbeziehung:

$$N(\varphi) = \frac{EI}{R^3} \cdot \left( \frac{\partial^2 w(\varphi)}{\partial \varphi^2} + w(\varphi) \right) - R \cdot \int n(\varphi) d\varphi + C \quad \text{Gl. 3.9}$$

Die Konstante  $C$  ergibt sich durch das unbestimmte Integral über die Belastung in tangentialer Richtung und muss später über Randbedingungen bestimmt werden.

Einsetzen der Gleichungen Gl. 3.7 und Gl. 3.9 in die Gleichung Gl. 3.1(b) ergibt für den Kreisring unter radialer und tangentialer Belastung eine Differentialgleichung 4. Ordnung der Form:

$$\frac{\partial^4 w(\varphi)}{\partial \varphi^4} + 2 \cdot \frac{\partial^2 w(\varphi)}{\partial \varphi^2} + w(\varphi) = \frac{R^4}{EI} \cdot \left( C + q(\varphi) + \int n(\varphi) d\varphi \right) \quad \text{Gl. 3.10}$$

Die homogene Lösung wird über einen Exponentialansatz für  $w(\varphi)$  und Berechnung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmt. Man erhält als homogenen Lösungsansatz:

$$w_{\text{hom}} = C_1 \cdot \cos \varphi + C_2 \cdot \sin \varphi + C_3 \cdot \varphi \cdot \cos \varphi + C_4 \cdot \varphi \cdot \sin \varphi \quad \text{Gl. 3.11}$$

Die partikuläre Lösung hängt von der Belastung ab. Für den Fall einer äußeren Belastung der Form :

$$q(\varphi) = \int n(\varphi) = a \cdot \cos(b \cdot \varphi), \quad \text{Gl. 3.12}$$

wie sie bei einer Belastung durch einen sinusförmigen Schubfluss oder durch einen hydrostatischen Druck auftritt, ergibt sich die partikuläre Lösung

$$\text{für } b = 1 \text{ zu} \quad w_{\text{Partikulär}} = -a \cdot \frac{1}{8} \cdot \varphi^2 \cdot \cos \varphi \quad \text{Gl. 3.13 (a)}$$

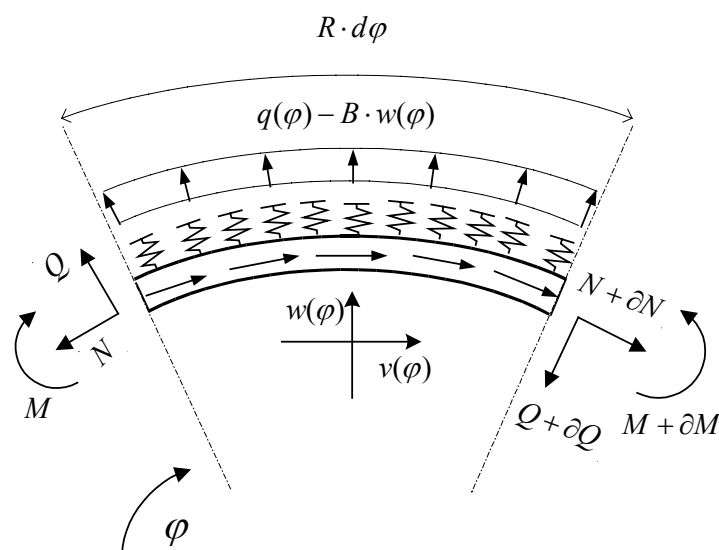
und

$$\text{für } b \neq 1 \text{ zu} \quad w_{\text{Partikulär}} = \frac{a \cdot \cos(b \cdot \varphi)}{b^4 - 2 \cdot b^2 + 1}. \quad \text{Gl. 3.13 (b)}$$

Um die endgültige Lösung von Gl. 3.10 zu bestimmen, müssen die Konstanten  $C_1$  bis  $C_4$  der homogenen Lösung in Gl. 3.11 und die Konstante  $C$  in Gl. 3.10 aus der unbestimmten Integration der Tangentialbelastung über Randbedingungen bestimmt werden. Hierzu sind auch Randbedingungen bezüglich der Tangentialverformungen  $v(\varphi)$  notwendig. Durch Integration von Gleichung Gl. 3.5 kann die Tangentialverformung über die Radialverformung bestimmt werden, wobei durch die unbestimmte Integration eine weitere Konstante auftritt. Somit sind zur Lösung des Kreisrings unter tangentialer und radialer Belastung insgesamt sechs Randbedingungen notwendig.

### 3.3 Differentialgleichung des elastisch gebetteten Kreisrings

Eine Möglichkeit zur Berücksichtigung einer elastischen Bettung in radialer und tangentialer Richtung in Bezug auf Kreisbogenträger wird von Link in [44] und [45] angegeben. Die Formulierung erfolgt dabei in den Tangentialverschiebungen in Form einer Differentialgleichung 6. Ordnung. Wie beim einfachen Kreisring kann der Zusammenhang auch über die Radialverschiebungen in Form einer Differentialgleichung 4. Ordnung beschrieben werden. Die Herleitung erfolgt analog zum einfachen Kreisring, wobei im Bereich der Bettung eine zusätzliche Radialbelastung infolge einer Verschiebung  $w(\varphi)$  zu berücksichtigen ist.



**Abb. 3.3:** Belastung und Schnittgrößen für den elastisch gebetteten Kreisring

In Gleichung Gl. 3.1(b) wird somit ein zusätzlicher Term in Abhängigkeit der Radialverschiebung und einer Bettungsziffer  $B$  angesetzt:

$$-\frac{\partial Q}{\partial \varphi} - N = -R \cdot (q(\varphi) - B \cdot w(\varphi)) \quad \text{Gl. 3.14}$$

Die restlichen Differentialbeziehungen bleiben gegenüber dem einfachen Kreisring unverändert und die Gleichungen können auf die gleiche Weise zu einer Differentialgleichung zusammengefasst werden.

Die Differentialgleichung des elastisch gebetteten Kreisrings ergibt sich somit zu:

$$\frac{\partial^4 w(\varphi)}{\partial \varphi^4} + 2 \cdot \frac{\partial^2 w(\varphi)}{\partial \varphi^2} + \left(1 + \frac{B \cdot R^4}{EI}\right) \cdot w(\varphi) = \frac{R^4}{EI} \cdot \left(C + q(\varphi) + \int n(\varphi)\right) \quad \text{Gl. 3.15}$$

Die homogene Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$w_{\text{hom}} = e^{\alpha \cdot \varphi} \cdot (C_1 \cdot \cos \beta \varphi + C_2 \cdot \sin \beta \varphi) + e^{-\alpha \cdot \varphi} \cdot (C_3 \cdot \cos \beta \varphi + C_4 \cdot \sin \beta \varphi) \quad \text{Gl. 3.16}$$

mit

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{\frac{EI + B \cdot R^4}{4EI}} - \frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{\sqrt{\frac{EI + B \cdot R^4}{4EI}} + \frac{1}{2}}$$

Die partikuläre Lösung für die Konstante aus der unbestimmten Integration kann einfach mit

$$w_{\text{part}} = C \quad \text{Gl. 3.17}$$

angesetzt werden. Infolge einer äußeren Belastung der Form:

$$q(\varphi) = \int n(\varphi) = a \cdot \cos(b \cdot \varphi)$$

ergibt sich die partikuläre Lösung der Differentialgleichung zu:

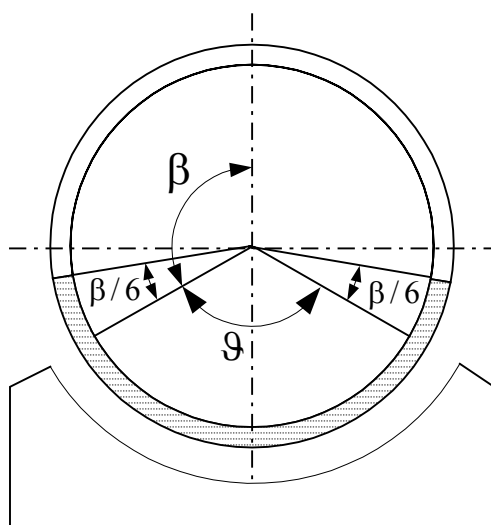
$$w_{\text{Partikulär}} = \frac{a \cdot \cos(b \cdot \varphi)}{b^4 - 2 \cdot b^2 + 1 + \frac{B \cdot R^4}{EI}} \quad \text{Gl. 3.18}$$

Zur endgültigen Lösung von Gl. 3.15 müssen die Konstanten  $C_1$  bis  $C_4$  in Gl. 3.16 und die Integrationskonstante  $C$  in Gl. 3.15 aus Rand- und Übergangsbedingungen bestimmt werden. Wie im Fall des einfachen Kreisrings, sind auch hier Aussagen über die Tangentialverformungen  $v(\varphi)$  notwendig. Der Zusammenhang zwischen der Radial- und der Tangentialverformung kann aus Gl. 3.5 übernommen werden, womit durch Integration von Gl. 3.5 wieder eine zusätzliche Integrationskonstante auftritt. Damit sind insgesamt sechs Randbedingungen zur Bestimmung der endgültigen Lösung notwendig.

## 3.4 Verfahren auf Grundlage von Berechnungen an Kreisringen

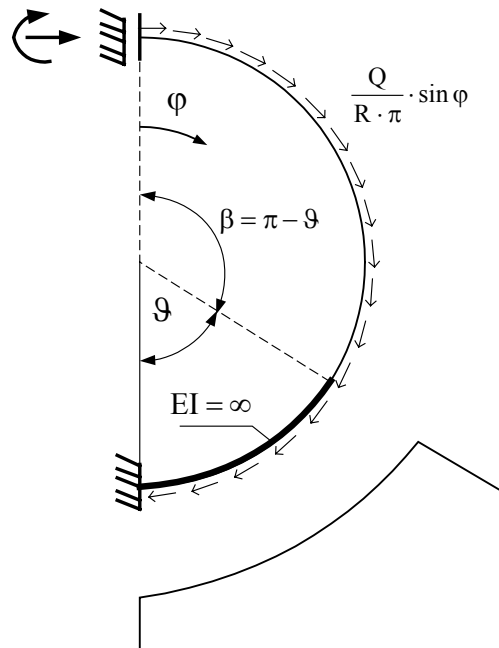
### 3.4.1 Verfahren nach Zick

1951 stellte Zick in [68] einen umfangreichen Vorschlag zur Bemessung von liegenden Behältern vor. Auf Grundlage von Versuchen und Berechnungen an Ersatzsystemen, entwickelte er dabei empirische Formeln zur Bestimmung aller möglichen maßgebenden Spannungen. Hierbei können unausgesteifte Behälter, aber auch Ringaussteifungen berücksichtigt werden. Für die Ermittlung der Spannungen in Längsrichtung betrachtet Zick den Behälter als einen Balken auf zwei Stützen, dessen wirksame Querschnittsfläche sich entlang der Stabachse verändert. In Feldmitte kann der gesamte Kreisring als wirksame Querschnittsfläche angesetzt werden. Am Sattel dagegen nimmt Zick an, dass infolge der Störung des Membranzustandes die wirksame Querschnittsfläche reduziert wird. Dies berücksichtigt Zick in dem er als wirksame Querschnittsfläche nur einen Kreisbogen vom unteren Scheitelpunkt bis zu einem Winkel von  $\beta/6$  oberhalb des Sattelhorns ansetzt.



**Abb. 3.4:** wirksamer Querschnitt über dem Sattel nach Zick

Zur Berechnung der Schnittgrößen in Umfangsrichtung unterscheidet Zick zwischen aussteiften und unausgesteiften Schalen. Zunächst betrachtet er die Schnittgrößen an einem Kreisring, der durch Schubkräfte nach der Balkentheorie für dünnwandige Kreisprofile belastet wird. Diese Belastung in tangentialer Richtung steht mit einer Einzelkraft am unteren Scheitelpunkt im Gleichgewicht. Bei der Berechnung der statisch Unbestimmten berücksichtigt Zick nur die Arbeit, die vom oberen Scheitelpunkt bis zum Sattelhorn gespeichert wird. Mechanisch interpretiert bedeutet dies, dass der Kreisring im Bereich des Sattels als unendlich starr angesehen wird was gleichbedeutend mit einer festen Einspannung des Kreisrings am Sattelhorn ist.



**Abb. 3.5:** Ersatzsystem zur Bestimmung der Biegemomente in Umfangsrichtung

Die Lösung des zweifach statisch unbestimmten Systems nach dem Kraftgrößenverfahren ergibt folgenden Verlauf der Umfangsbiegemomente:

$$M_{\varphi} = \frac{Q \cdot R}{\pi} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos(\varphi) + \frac{\varphi}{2} \cdot \sin(\varphi) - \frac{3 \cdot \sin(\beta)}{2 \cdot \beta} + \frac{\cos(\beta)}{2} \\ -\frac{1}{4} \cdot \left( \cos(\varphi) - \frac{\sin(\beta)}{\beta} \right) \cdot \left( 9 - \frac{4 - 6 \cdot \left( \frac{\sin(\beta)}{\beta} \right)^2 + 2 \cdot \cos^2(\beta)}{\frac{\sin(\beta)}{\beta} \cdot \cos(\beta) + 1 - 2 \cdot \left( \frac{\sin(\beta)}{\beta} \right)^2} \right) \end{array} \right\} \quad \text{Gl. 3.19}$$

Das maximale Biegemoment tritt in Höhe des Sattelhorns auf, so dass sich das maßgebende Umfangsbiegemoment durch Auswertung von Gl. 3.19 für  $\varphi = \beta$  bestimmen lässt. Das oben beschriebene Modell gilt nach Zick nur für über dem Sattelbereich nicht ausgesteifte Behälter. Bei Abständen des Behälterbodens kleiner als  $A/R = 1,0$  geht Zick davon aus, dass sich der Schubfluss mehr zum Sattelhorn hin konzentriert und dadurch das Moment abnimmt. Um diesen Effekt zu berücksichtigen, nimmt Zick für Bodenabstände kleiner als  $A/R = 0,5$  pauschal an, dass sich das Moment aus Gl. 3.19 um den Faktor vier reduziert. Zwischen  $A/R = 0,5$  und  $1,0$  wird linear interpoliert. Darüber hinaus hat der Boden keinen weiteren Einfluss.

Zur abschließenden Berechnung der Spannungen in Umfangsrichtung wird eine mittragende Schalenbreite in Abhängigkeit der Behälterlänge angesetzt:

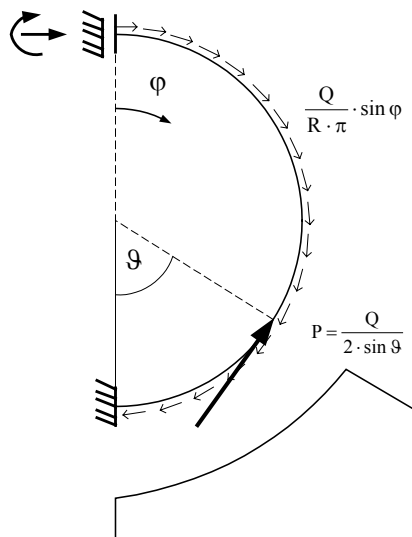
$$\sigma_{M\varphi} = \frac{6 \cdot M}{b_{\text{eff}} \cdot t^2} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} b_{\text{eff}} = 4 \cdot R & \text{für } L \geq 8 \cdot R \\ b_{\text{eff}} = L/2 & \text{für } L \leq 8 \cdot R \end{cases} \quad \text{Gl. 3.20}$$

Zur Ermittlung der Membranspannungen in Umfangsrichtung wird angenommen, dass die Normalkraft ein Viertel der resultierenden Auflagerkraft beträgt und die Sattelbreite zuzüglich dem zehnfachen der Blechdicke als effektive Schalenbreite wirksam ist:

$$\sigma_{N\varphi} = -\frac{Q}{4 \cdot t \cdot (b + 10 \cdot t)} \quad \text{Gl. 3.21}$$

Zur Bemessung von Aussteifungsringen im Sattelbereich wird zwischen Aussteifungsringen in der Sattellebene und Aussteifungsringen in der Nähe des Sattels unterschieden. Zur Bemessung der Ringe in der Sattellebene verwendet Zick das gleiche Ersatzsystem wie für die nicht ausgesteifte Kreiszylinderschale. Die Biegemomente unterscheiden sich in diesem Fall nicht von den zuvor beschriebenen. Die Normalkraft an der Stelle des maximalen Biegemomentes wird, im Gegensatz zum vorherigen Fall, ebenfalls am Ersatzsystem bestimmt. Als effektiven Querschnitt wird neben dem eigentlichen Ringquerschnitt noch ein Schalenanteil vom fünffachen der Blechdicke auf jeder Seite des Rings mit berücksichtigt.

Für den Fall von zwei Aussteifungsringen in der Nähe des Sattels geht Zick davon aus, dass diese gemeinsam wirken und auf den vom Sattel abgewandten Seiten wieder durch einen Schubfluss nach der Balkentheorie beansprucht werden. Im Gegensatz zu den vorherigen Fällen werden die beiden Aussteifungsringe nicht auf dem gesamten Sattelumfangswinkel abgestützt, sondern nur in einem kleinen Bereich am Sattelhorn und dort auch nur in tangentialer Richtung. Um diese Effekte bei der Ermittlung der Schnittgrößen zu berücksichtigen, wird der Kreisring im Sattelbereich nicht mehr als unendlich starr angesehen, sondern zusätzlich eine tangentiale Einzelkraft, die mit der Belastung im vertikaler Richtung im Gleichgewicht steht, angesetzt.



**Abb. 3.6:** Ersatzsystem bei Aussteifungsrings in der Nähe des Sattels

Das maximale Biegemoment tritt für diesen Fall ungefähr bei  $\varphi = \pi/2$  auf. Für den effektiven Ringquerschnitt werden keine näheren Angaben gemacht, aber es ist davon auszugehen, dass dieser analog zum Fall der Ringe in der Sattellebene angesetzt werden kann.

Im Zusammenhang mit den Untersuchungen von Zick ist auch die Veröffentlichung von Brownell & Young [12] zu erwähnen. Im Wesentlichen werden hier die von Zick aufgestellten Formeln noch einmal vorgestellt und deren Herleitung genauer erläutert. Für die effektive Schalenbreite im Zusammenhang mit der Normalkraft in Umfangsrichtung und bei Aussteifungsrings werden zudem neue Ansätze vorgestellt. Im Gegensatz zu Zick geht nicht nur die Blechdicke ein, sondern auch der Radius in folgender Form:

$$b_{\text{eff}} = b + 2 \cdot (0,78 \cdot \sqrt{R \cdot t}) \quad \text{Gl. 3.22}$$

mit  $b$  als die Sattelbreite.

### 3.4.2 Untersuchungen von Mang

Die Berechnung der Spannungen in Umfangsrichtung an einem Kreisring wurde von Mang in [46] und [47] erneut aufgegriffen. Die Untersuchungen von Mang beziehen sich allerdings in erster Linie auf Rohrleitungen und der Einfluss eines Bodens, wie er beim sattelgelagerten Behälter vorhanden ist, wird daher nicht berücksichtigt. Die Untersuchungen von Mang sind deshalb nur bedingt als Grundlage für eine Verbesserung der Ansätze von Zick anzusehen, da nicht alle Randbedingungen des sattelgelagerten Behälters berücksichtigt werden.

Mang untersuchte zunächst verschiedene Ersatzsysteme und variierte dabei insbesondere die Kräfte zwischen dem Kreisring und der Unterkonstruktion.



**Abb. 3.7:** Untersuchte Pressungsansätze von Mang

Die Schnittgrößen der verschiedenen Systeme vergleicht Mang, unter Annahme einer zunächst über den Umfang konstanten mitwirkenden Schalenbreite, mit Messergebnissen von Zwiesele [73], Herber [31] und Wilson & Odon [66]. Er stellt dabei bei den Systemen sechs bis neun qualitative Übereinstimmungen fest. Um eine quantitative Übereinstimmung zu erzielen, muss nach Mang eine detailliertere Betrachtung der mitwirkenden Schalenbreite erfolgen. Er stellt zunächst grundsätzlich fest, dass, im Gegensatz zu Zick und Brownell & Young, der Sattelumschließungswinkel einen Einfluss hat. Weiterhin variiert die mitwirkende Breite über den Umfang und muss für die Biege- und die Membranspannungen getrennt betrachtet werden. Auf Grundlage von System 6 in Abb. 3.7 und den Versuchsergebnissen entwickelt Mang ein Diagramm zur Bestimmung der mitwirkenden Schalenbreite an ausgezeichneten Systempunkten in Abhängigkeit des Sattelumschließungswinkels.

## Kapitel 4      Untersuchungen nach der FE-Methode

### 4.1 Allgemeines

Die analytische Lösung des Schalenproblems bei liegenden Behältern ist insbesondere aufgrund der Interaktion zwischen Schale und Sattel mit einem sehr hohen Rechenaufwand verbunden. Daher wurden in den bisher vorgestellten Lösungswegen hinsichtlich der Sattelpressung Annahmen getroffen, um dieses Problem zu umgehen. Verfahren bei denen sich eine annähernd kontinuierliche Sattelpressung aus den Berechnungen ergibt, sind bisher nur auf Grundlage von numerischen Methoden vorhanden.

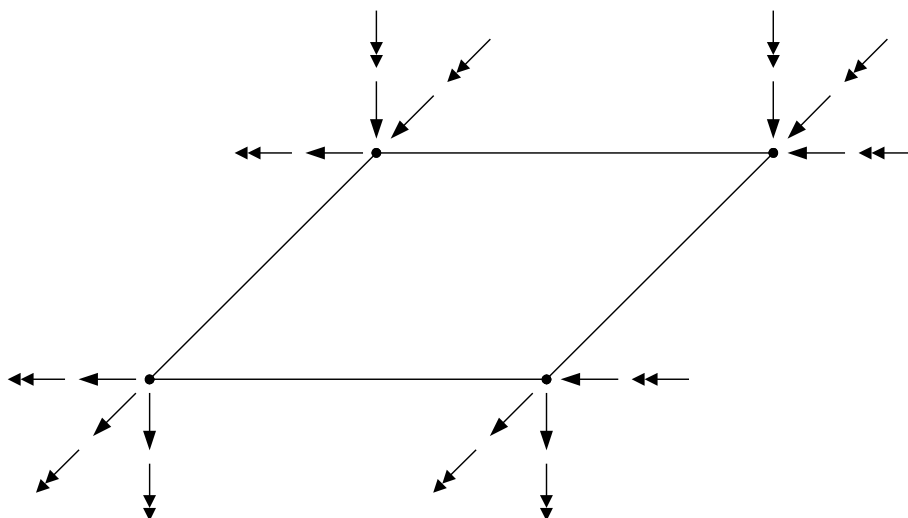
Im Bereich der Festigkeitsberechnung hat sich hierzu in den letzten Jahren die Finite Elemente Methode etabliert. Mit der FE-Methode kann durch die Diskretisierung der Geometrie in kleine endliche Teile jede beliebige Form abgebildet werden. Darüber hinaus können geometrisch oder physikalisch nichtlineare Effekte in der Berechnung berücksichtigt werden. Veröffentlichungen auf Grundlage der FE-Methode sind allerdings bisher kaum vorhanden. Neben den Arbeiten von Stoneking & Sheth [61] und Ladewig [41], in denen es in erster Linie um die Umsetzung der Problematik in der FE-Methode ging, ist die Arbeit von Chouih [19] zu erwähnen. Unter Verwendung eines degenerierten 9-Knoten-Schalenelements und einem Kontaktelement zwischen Behälter und Sattel führte er umfangreiche Parameterstudien durch und entwickelte Formeln zur Bestimmung der zu erwartenden Pressungsverteilung in Abhängigkeit der wichtigsten Behälterparameter. Das von Ahmed et al. [11] 1971 entwickelte degenerierte 9-Knoten-Schalenelement hat sich seitdem insbesondere aufgrund seiner guten Ergebnisse bei beliebig gekrümmten Schalen bewährt und zeichnete sich durch eine bessere Wirtschaftlichkeit gegenüber ebenen Schalenelementen oder Kontinuumelementen aus. Mit der gestiegenen Leistungsfähigkeit und Speicherkapazität der Rechner ist die Wahl der Elemente nach wirtschaftlichen Gesichtspunkten vor allem in Bezug auf einfache Geometrien wie die Kreiszylinderschale nicht ausschlaggebend. In Verbindung mit graphischen Benutzeroberflächen bei

kommerziellen FE-Programmen bieten ebene Schalenelemente Vorteile im Hinblick auf die graphische Eingabe und Darstellung des diskretisierten Systems und bei der Auswertung und graphischen Darstellung der Ergebnisse. Im Rahmen dieser Arbeit wurde aus diesen Gründen ein ebenes Schalenelement nach der diskreten Kirchhoff-Theorie (DKT-Element) in Verbindung mit dem FE-Programm Marc Mentat [48],[49] angewendet. Zur Berücksichtigung eines losen Kontaktes zwischen Behälter und Sattel wurden zweidimensionale Kontakt-Elemente (Gap-Elemente) verwendet.

## 4.2 Elementeigenschaften

### 4.2.1 DKT-Element

Auf die prinzipielle Eignung von ebenen Schalenelementen bei Kreiszy lindern wurde schon durch Zienkiewicz [70] hingewiesen. Bei dem im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Schalenelement handelt es sich um ein 4-Knoten-Element, dessen Geometrie über die drei Koordinaten der vier Eckpunkte definiert wird. Jeder Eckpunkt hat dabei sechs Freiheitsgrade.



**Abb. 4.1:** Freiheitsgrade des DKT-Elements

Eine wesentliche Problematik bei ebenen Schalenelementen, deren Geometrie nur über die räumlichen Koordinaten der Eckpunkte bestimmt wird, liegt in der Wahl von kompatiblen Ansatzfunktionen für die Verformungen. Verwendet man nur die Freiheitsgrade in den Eckpunkten, lassen sich nur kompatible Ansatzfunktionen finden, die nicht die Kirchhoff-Hypothese erfüllen, also die Querschubverzerrungen nicht identisch null sind. In Berechnungen mit Ele-

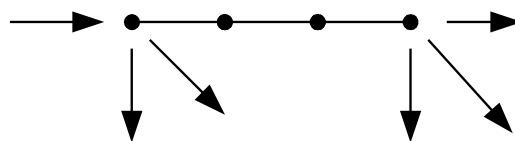
menten die nicht die Kirchhoff-Hypothese erfüllen, kommt es häufig zu einer Überbewertung der Querschubverformungen, dem sogenannten Shear-Locking. In diesen Fällen wird die Verformung infolge Biegung zu klein ermittelt. Ähnliche Probleme treten auch bei höherwertigen Elementen auf, wie dem degenerierten 9-Knoten-Schalenelement. Der Effekt des Shear-Lockings kann bei diesen Elementen durch eine reduzierte oder selektive Integration wie sie in [32],[33] und [71] beschrieben wird, vermieden werden. Zur Vermeidung des Shear-Locking-Effekts bei ebenen Elementen hat sich daneben die diskrete Kirchhoff-Theorie, die in [13],[14] und [55] beschrieben wird, bewährt. Im Rahmen der diskreten Kirchhoff-Theorie werden für die Verschiebungen  $w(x,y)$  und für die Verdrehungen  $\varphi_x$  und  $\varphi_y$  zunächst voneinander unabhängige Ansatzfunktionen aufgestellt. Nach der Kirchhoff-Hypothese sind die Querschubverzerrungen  $\varepsilon_{xz}$  und  $\varepsilon_{yz}$  identisch null und wenn diese erfüllt sein soll, müssen die Ableitungen der Verschiebungen folgende Bedingung erfüllen:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x = 0 \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y = 0 \quad \text{Gl. 4.1}$$

Im Rahmen der diskreten Kirchhoff-Theorie wird diese Bedingung nur punktweise, etwa in den Seitenmittelpunkten, erfüllt. Damit stehen für die Ansatzfunktionen zusätzliche Bedingungen zur Verfügung und es können kompatible Ansätze gewählt werden, bei denen gewährleistet ist, dass die Querschubverformungen punktweise identisch null sind und damit auch bei der Integration die Schubsteifigkeit nicht überschätzt wird.

#### 4.2.2 Gap-Element

Bei dem in der Elementbibliothek von Marc-Mentat zur Verfügung stehenden Kontaktelement Gap handelt es sich um ein Linienelement aus vier Knoten mit dem Kontaktbedingungen zwischen zwei Knoten berücksichtigt werden können.



**Abb. 4.2:** Freiheitsgrade des Gap-Elements

Dem Kontaktelement kann eine Federsteifigkeit zugeordnet werden. Dies führt aber bei einer ungleichmäßigen Netzaufteilung zu unterschiedlichen Steifigkeitsverhältnissen entlang der Sattelfläche, da den einzelnen Knoten anteilig unterschiedliche Flächen zugeordnet sind. Um eine gleichmäßige Steifigkeitsverteilung zu erzielen, empfiehlt es sich, die Kontaktelemente als unendlich starr zu betrachten und auf der von der Schale abgewandten Seite eine zusätzliche Schicht aus Volumenelementen anzuordnen.

### 4.3 Diskretisierung des sattelgelagerten Behälters

Bei der Diskretisierung des sattelgelagerten Behälters werden die Kreiszyinderschale und der Behälterboden über die DKT-Elemente abgebildet. Im Sattelbereich werden zwischen Sattel und Schale zur Berücksichtigung eines losen Kontaktes die Gap-Elemente angeordnet. Der Sattel selbst wird durch eine konstante Schicht aus 8-Knoten-Volumenelementen idealisiert. Diese Idealisierung des Sattels wurde gewählt, um die Steifigkeit im Sattelbereich über eine Bettungszahl, die sich aus der Schichtdicke und den gewählten Materialeigenschaften bestimmt, zu erfassen. Die Netzaufteilung in der Kreiszyinderschale richtet sich nach den zu erwartenden Verformungen und Schnittgrößenverläufen. Besonderes Augenmerk muss daher auf den Bereich am Sattelhorn gelegt werden, da hier aufgrund der Sattelpressung mit den größten Gradienten im Schnittgrößenverlauf zu rechnen ist. Aus der folgenden Abbildung ist der qualitative Verlauf der Spannungen nach Chouihhi in Umfangsrichtung an der Außenseite eines Behälters im Sattelbereich zu erkennen.

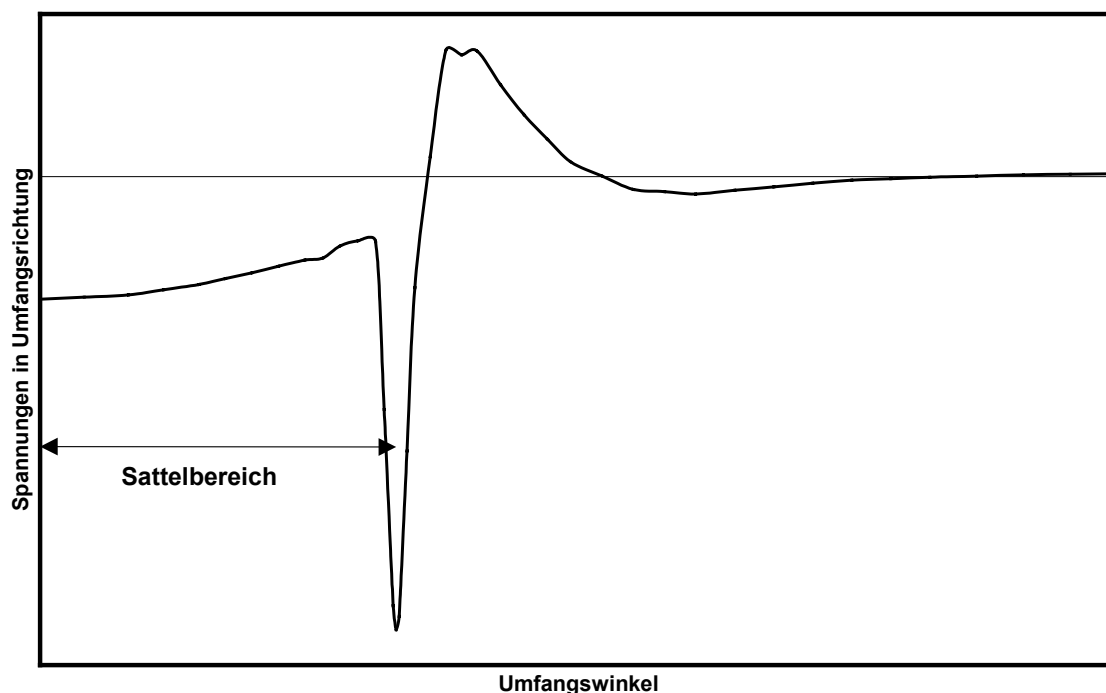
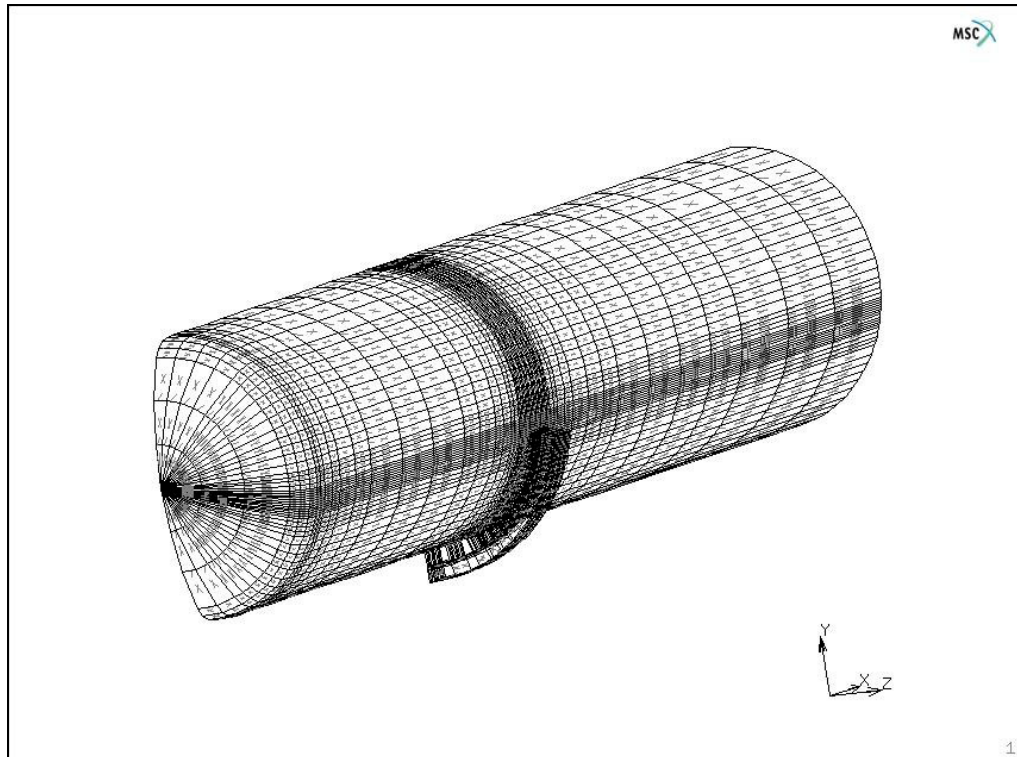


Abb. 4.3: qualitativer Verlauf der Spannungen in Umfangsrichtung über dem Sattel

Es ist deutlich zu erkennen, dass am Sattelhorn die maximalen Spannungen in Umfangsrichtung auftreten und davor, beziehungsweise danach, mit einem deutlichen Abfall der Spannungen zu rechnen ist. Bei Verwendung der ebenen Schalenelemente erfordert dies eine möglichst feine Netzaufteilung am Sattelhorn und in seiner näheren Umgebung. Da die DKT-Elemente den Patch-Test erfüllen, also die Ergebnisse bei immer feiner werdender Diskretisierung gegen das tatsächliche Ergebnis konvergieren, kann die notwendige Netzweite aus Vergleichsberechnungen bestimmt werden. Bei Vergleich der Spannungen oder Verschiebungen in nur einem Punkt zeigt sich, dass die Wahl der Steifigkeit im Sattelbereich entscheidenden Einfluss auf das Konvergenzverhalten hat. Bei Annahme einer praktisch unendlich steifen Bettung ist zu beobachten, dass sich die Schale punktuell an den Ecken des Sattelhorns auflagert und somit auch eine punktuelle Belastung der Kreiszyinderschale auftritt. Dies führt zu einer Singularität im Spannungsverlauf. Messungen der Pressungsverteilung durch Chouih und Zimmermann [72] haben dagegen gezeigt, dass sich eine flächenhaft verteilte Auflagerung einstellt und es ist außerdem davon auszugehen, dass durch ein Plastifizieren des Behälter- oder des Sattelmateriale grundsätzlich eine punktuelle Auflagerung ausgeschlossen ist. Im Sattelbereich muss daher eine gewisse Nachgiebigkeit zugelassen werden, die zwar die realen Verhältnisse möglichst nah, aber auf der sicheren Seite liegend abbildet.

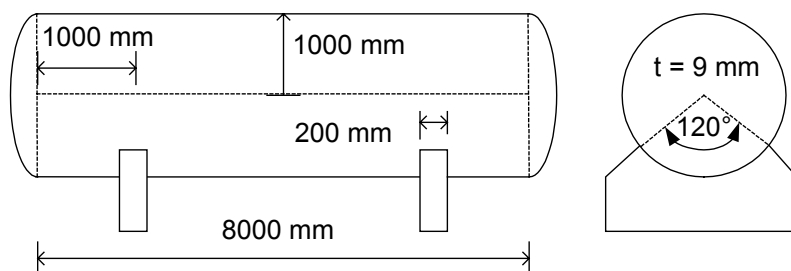


**Abb. 4.4:** Diskretisierung des sattelgelagerten Behälters

Bei Berücksichtigung einer Nachgiebigkeit, deren Festlegung im folgenden Abschnitt eingehender erläutert wird, hat sich gezeigt, dass am Sattelhorn in einer Umgebung von circa  $\pm 5^\circ$  eine Netzweite unter Berücksichtigung des Behälterradius und einem Einschließungswinkel von  $1^\circ$  ausreichend genaue Ergebnisse liefert. Über den weiteren Umfang kann die Netzweite dann sukzessive erweitert werden.

#### 4.3.1 Kriterien zur Beurteilung der maximalen Spannungen bei starrer Lagerung

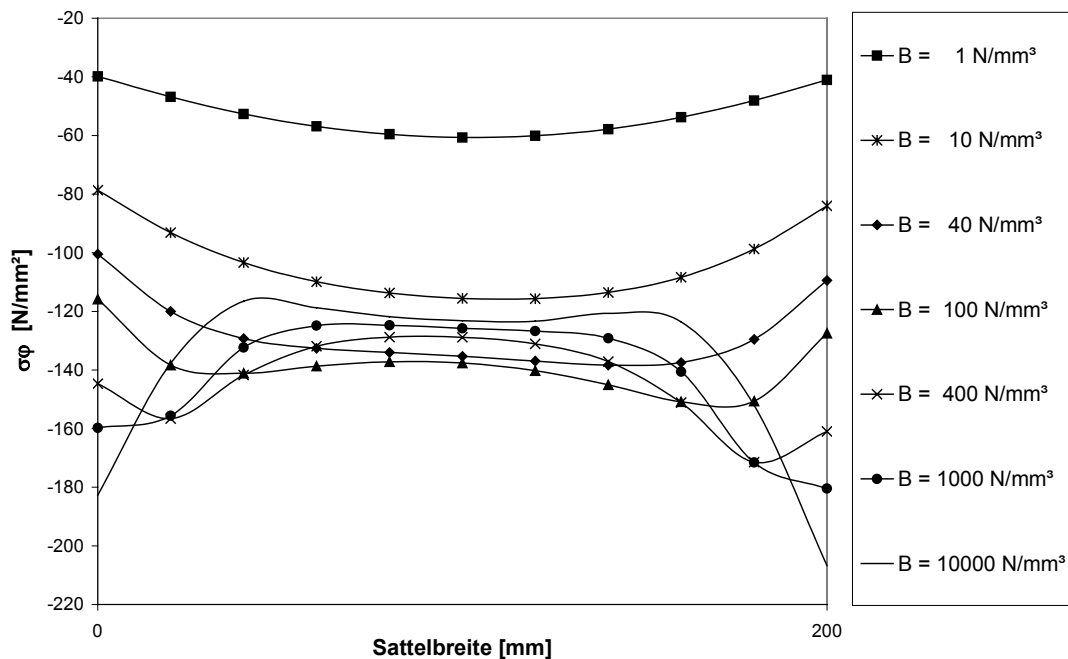
Um eine Aussage über die zu berücksichtigende Steifigkeit im Sattelbereich treffen zu können, wurden am folgenden Behälter für die vertikale Belastung durch eine Flüssigkeitsfüllung, Vergleichsberechnungen unter Berücksichtigung verschiedener Steifigkeiten durchgeführt.



**Abb. 4.5:** Behälterabmessungen für Untersuchungen zum Einfluss der Steifigkeit im Sattelbereich

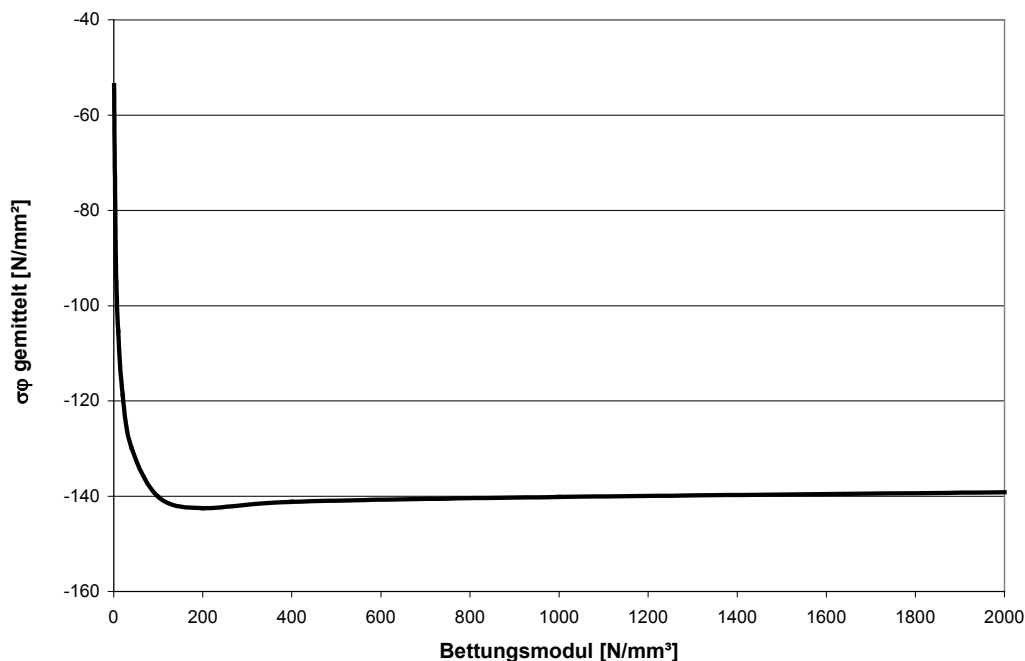
Der Sattel wurde durch eine Schicht mit der Dicke von  $d = 50 \text{ mm}$  idealisiert. Unter der Annahme eines linearelastischen Materialverhaltens wurden durch Variation des E-Moduls verschiedene Steifigkeiten berücksichtigt. Um die berücksichtigten Steifigkeiten allgemein übertragen zu können, wurde die Schichtdicke und der E-Modul in eine Bettungszahl  $B = E/d$  [ $\text{N}/\text{mm}^3$ ] umgerechnet. In Abbildung 4.6 ist der Verlauf der Spannungen in Umfangsrichtung am Sattelhorn über die Sattelbreite unter Variation der Bettungszahl des Sattels dargestellt.

Der Verlauf der Spannungen am Sattelhorn über die Sattelbreite verändert sich bei kleinen Bettungszahlen ( $1-40 \text{ N/mm}^3$ ) zunächst qualitativ gesehen nicht. Bei weiter steigenden Bettungszahlen ist dann eine Umlagerung der maximalen Spannungen von der Sattelmittle zum Sattelrand hin zu beobachten. Der Absolutwert der maximalen Spannungen nimmt ebenfalls mit steigenden Bettungszahlen zu und es ist keine eindeutige Konvergenz zu erkennen.



**Abb. 4.6:** Spannungen in Umfangsrichtung an der Außenseite entlang des Sattelhorns bei unterschiedlichen Bettungszahlen für den Sattel

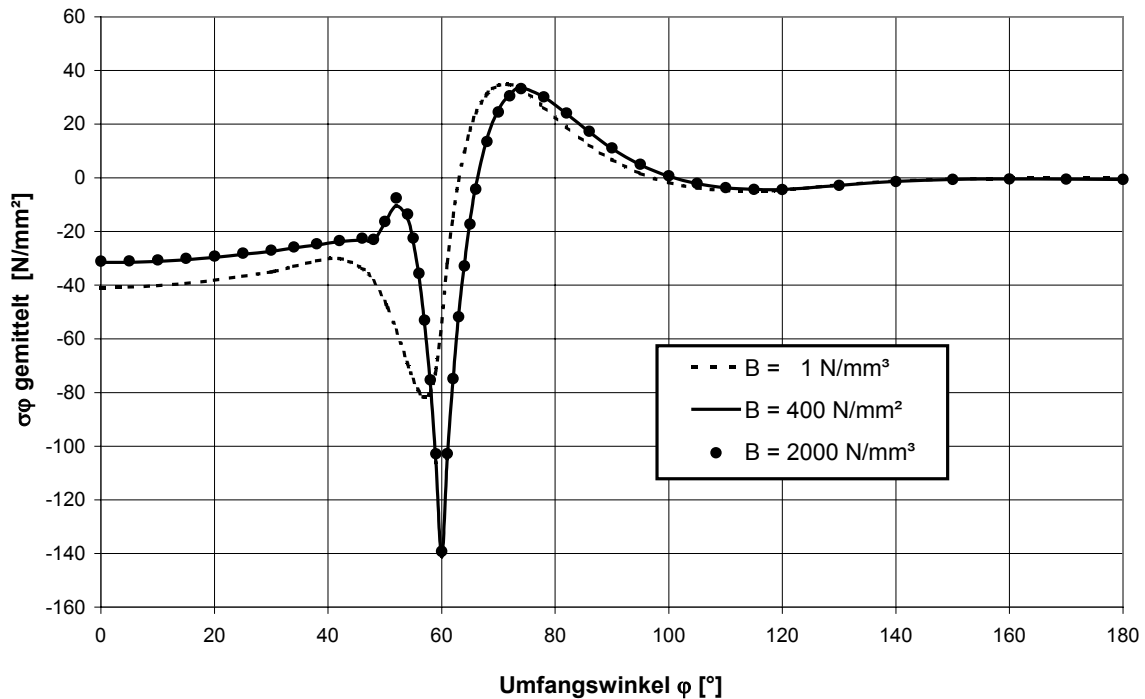
Betrachtet man dagegen die über die Sattelbreite gemittelten Spannungen über die entsprechenden Bettungszahlen in Abb. 4.7, ist zu erkennen, dass, analog zur vorherigen Betrachtung, die Spannungen bei kleinen Bettungszahlen zunächst mit steigender Steifigkeit des Sattels zunehmen, dann aber, ab ca.  $200 \text{ N/mm}^3$ , geringfügig abnehmen und im Weiteren annähernd konstant verlaufen.



**Abb. 4.7:** Entwicklung der über die Sattelbreite gemittelten Spannungen in Umfangsrichtung bei Variation der Bettungszahl für den Sattel

Der Vergleich des Verlaufs der gemittelten Spannungen über den Umfang in Abb. 4.8 zeigt weiter, dass bei einer zu weichen Bettung nicht nur die maximalen Spannungen geringer gegenüber einer steiferen Lagerung sind, sondern sich auch der qualitative Verlauf unterscheidet. Erst ab einer Bettungszahl von 400 N/mm<sup>3</sup> treten im Verlauf in Umfangsrichtung am Sattel, bei größer werdenden Bettungszahlen, keine Veränderungen auf.

Die über die Sattelbreite gemittelten Spannungen als zu beurteilende Größe heranzuziehen ist auch deshalb sinnvoll, da zusätzlich Spannungsspitzen infolge von Imperfektionen in der Behälter- oder Sattelgeometrie auftreten können. Diese Spannungsspitzen werden aber, wie die Spannungsspitzen bei einer sehr steifen Lagerung, nur in kleinen örtlich begrenzten Bereichen auftreten und bei Überschreiten der Fließgrenze erfolgt dann wieder eine Umlagerung zur Sattelmittle hin. Solange diese Umlagerung der Spannungen nicht auch ein Fließen des Materials über die gesamte Sattelbreite bewirkt, kann man davon ausgehen, dass sich dann der sogenannte Shake-Down-Effekt einstellt, der eine Zunahme der plastischen Verformungsanteile bei weiterer Be- und Entlastung verhindert.



**Abb. 4.8:** Über die Sattelbreite gemittelte Spannungen entlang des Umfangs bei unterschiedlichen Bettungszahlen

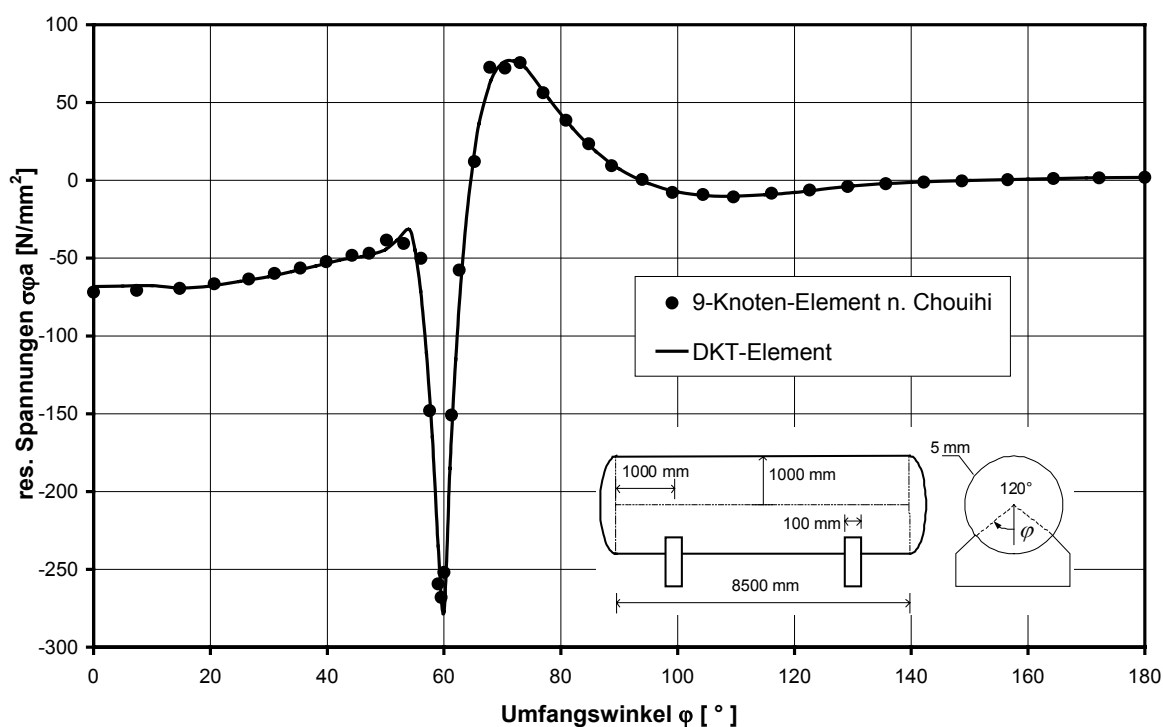
#### Fazit

Auf Grundlage dieser Ergebnisse wird in den weiteren Berechnungen zur Berücksichtigung einer steifen Lagerung eine Bettungszahl von  $600 \text{ N/mm}^3$  angesetzt. Die Wahl von  $600 \text{ N/mm}^3$  ist dabei nicht zwingend vorgegeben, da nach Abb. 4.7 mit steigender Bettungszahl der Einfluss der Bettungszahl auf die maximalen Spannungen verschwindet. Lediglich eine zu weiche Bettung würde die Verhältnisse bei einer starren Lagerung nicht richtig widerspiegeln. Mit einer Bettungszahl von  $600 \text{ N/mm}^3$  liegt man aber nach Abb. 4.7 auf der sicheren Seite. Zusätzlich muss beachtet werden, dass es sich bei den folgenden Spannungsverläufen in Umfangsrichtung um über die Sattelbreite gemittelten Spannungen handelt.

## 4.4 Verifizierung des Berechnungsmodells

### 4.4.1 Vergleich mit Berechnungen nach Chouih

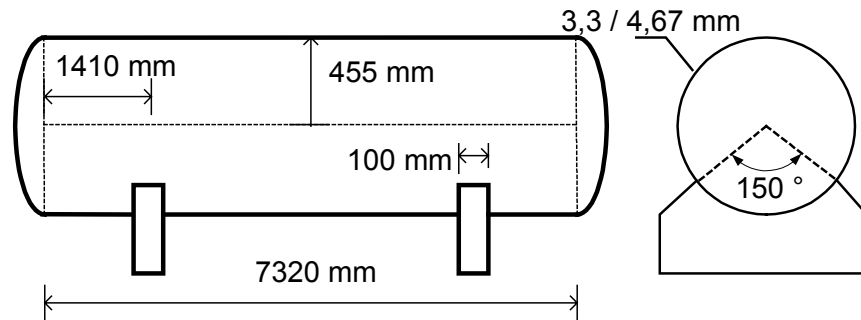
Zunächst erfolgt ein Vergleich der Spannungen unter Verwendung des beschriebenen DKT-Elements mit den Spannungen aus einer Berechnung nach Chouih unter Verwendung des degenerierten 9-Knoten-Schalenelementes. Hierzu muss gesagt werden, dass in der Berechnung nach Chouih im Kontaktelement eine Bettungszahl von  $10 \text{ N/mm}^3$  berücksichtigt wird. In der eigenen FE-Berechnung ist daher auch eine Bettungszahl von  $10 \text{ N/mm}^3$  berücksichtigt worden. Aufgrund der vorangegangenen Feststellungen entsprechen die Absolutwerte der Spannungen nicht denen einer starren Lagerung. Die nahezu übereinstimmenden Verläufe in Abbildung 4.9 bestätigen dennoch die Eignung der Diskretisierung bei Verwendung des DKT-Elements.



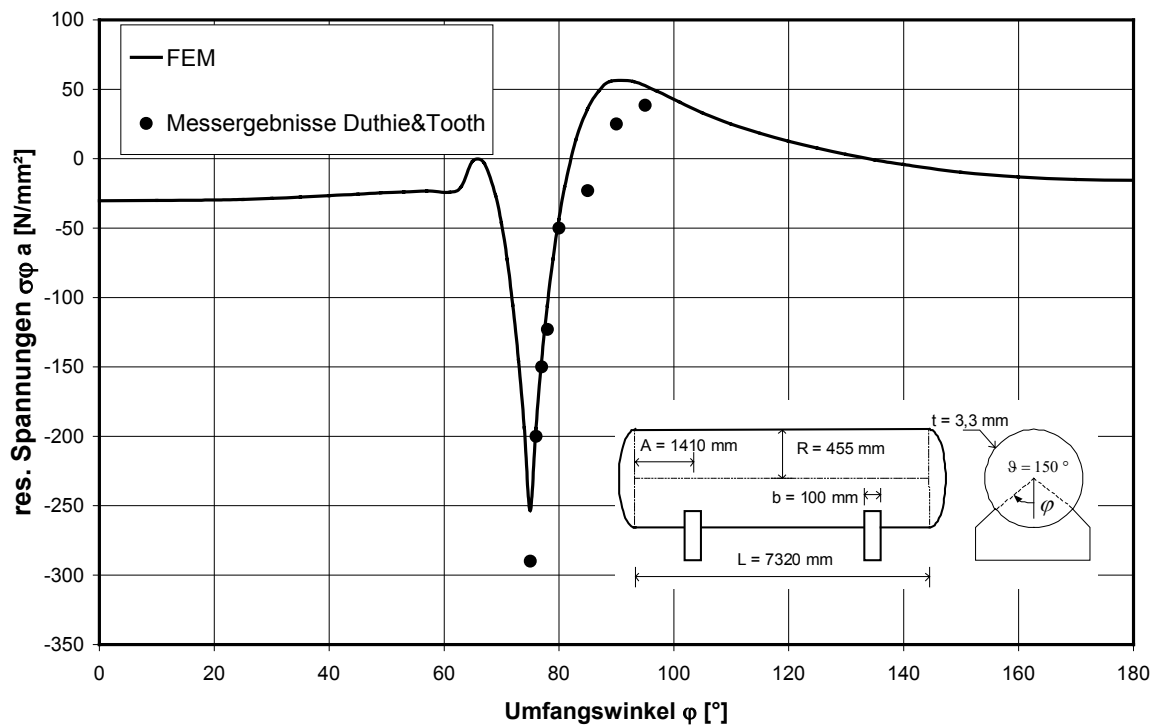
**Abb. 4.9:** Spannungen an der Behälteraussenseite bei Verwendung des DKT-Elementes und des degenerierten 9-Knoten-Schalenelementes nach Chouih.

#### 4.4.2 Vergleich mit Messergebnissen

Zur weiteren Verifikation werden die Berechnungsergebnisse mit Messergebnissen von Duthie und Tooth [25] verglichen. Die Messergebnisse beziehen sich auf zwei Behälter die sich nur in der Blechdicke unterscheiden.

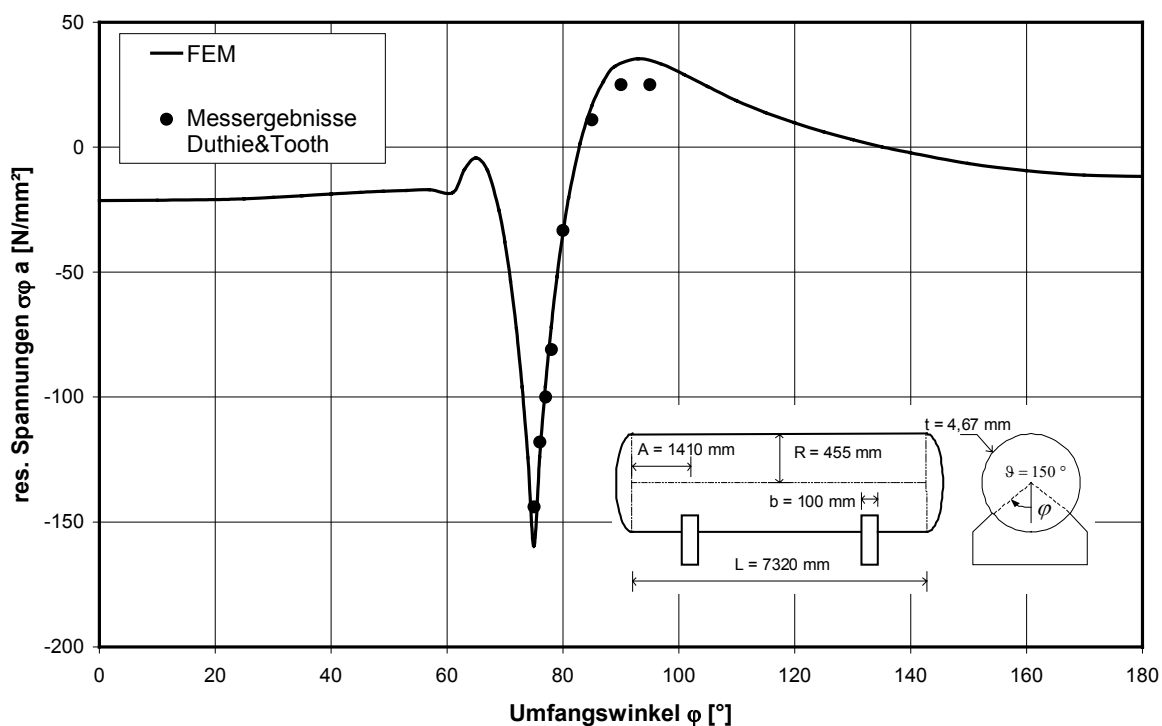


Im Rahmen ihrer Versuchsreihe untersuchten Duthie und Tooth verschiedene Sattelformen um deren Einfluss zu erfassen, wobei hier zum Vergleich nur die Ergebnisse der starren Lagerung berücksichtigt werden. Zunächst erfolgt eine Gegenüberstellung der Ergebnisse für den Behälter mit einer Blechdicke von 3,3 mm, wobei in der FE-Berechnung jetzt wieder eine Bettungszahl von  $600 \text{ N/mm}^3$  berücksichtigt wurde.



**Abb. 4.10:** Vergleich der Messergebnisse von Duthie & Tooth [25] mit der FE-Berechnung für  $t = 3,3 \text{ mm}$

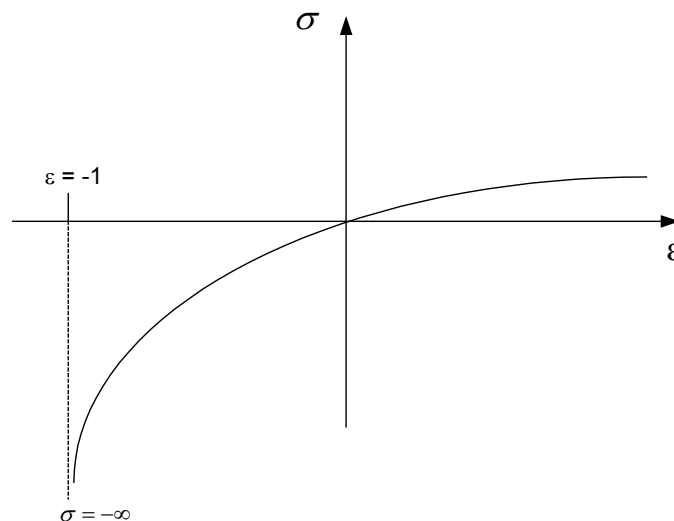
Es zeigt sich, dass die Messwerte vor dem Sattelhorn sehr gut mit den berechneten Spannungen übereinstimmen. Die maximale Spannung am Sattelhorn liegt nach der Messung um ca. 40 N/mm<sup>2</sup> höher. Dieser Unterschied kann mehrere Ursachen haben. Zunächst ist festzuhalten, dass es sich bei den Spannungen nach der FE-Methode um über die Sattelbreite gemittelte Spannungen handelt und bei den gemessenen um die Spannungen in Sattelmittle. Auf die mögliche Variation der Spannungen über die Sattelbreite wurde schon in Kapitel 4.1 hingewiesen. Des weiteren haben Duthie und Tooth schon während ihrer Untersuchung durch Vergleichsmessungen an gegenüberliegenden Sattelhörnern Streuungen festgestellt, die sie auf Imperfektionen in der Behälterschale oder am Sattel zurückführen. Unter Berücksichtigung dieser Aspekte kann von einer ausreichend genauen Übereinstimmung zwischen dem FE-Modell und diesem Versuchsaufbau ausgegangen werden. Der Vergleich für den Behälter mit einer Blechdicke von 4,67 mm bestätigt dies.



**Abb. 4.11:** Vergleich der Messergebnisse von Duthie & Tooth mit der FE-Berechnung für  $t = 4,67$  mm

## 4.5 Untersuchungen zur Erfassung einer planmäßigen weichen Lagerung

Bei Annahme einer zu weichen Bettung treten erheblich reduzierte Spannungen und ein anderer qualitativer Verlauf in Umfangsrichtung auf. Will man diese Spannungsreduktion durch eine planmäßig weichere Bettung ausnutzen, wie etwa durch Anordnung einer elastomeren Schicht zwischen Behälter und Sattel, sind genaue Angaben über die Größenordnung der Bettung erforderlich, da im Bereich niedriger Bettungszahlen mit großen Differenzen zu rechnen ist. Die rechnerische Erfassung des Einflusses einer solchen Schicht kann zunächst nur bedingt auf Grundlage eines linearelastischen Materialgesetzes erfolgen, da bei weichen Schichten Dehnungen in Größenordnungen von mehreren Prozent auftreten können. Bei der Betrachtung einer Last-Verformungskurve einer einachsig belasteten Schicht ist eine deutliche Verfestigung zu erkennen, welche nicht über ein linearelastisches Materialverhalten erfassbar ist.



**Abb. 4.13:** Qualitatives Spannungs-Dehnungsdiagramm einer dünnen elastomeren Schicht

Zur Beschreibung des Materialverhaltens von Elastomeren sind eine Reihe von Materialgesetzen formuliert worden, die auf einer Formulierung der Formänderungsenergiedichte basieren. Liegt die Formänderungsenergiedichte als Funktion  $W$  in Abhängigkeit des Verzerrungszustandes vor, kann der Spannungszustand  $\sigma_{ij}$  durch Differenzieren nach den Verzerrungen bestimmt werden.

Allgemein lautet der Zusammenhang zwischen dem Cauchy'schen Spannungszustand und der Formänderungsdichte wie folgt:

$$\sigma_{ij} = \frac{2}{J} \frac{\partial W}{\partial B_{ik}} B_{ki} \quad \text{Gl. 4.2}$$

mit

$W$  : Funktion der Formänderungsdichte

$\sigma_{ij}$  : Cauchy'scher Spannungstensor

$B_{ki}, B_{ik}$ : linker Cauchy-Green-Tensor

$J$  : Jacobi Determinante =  $\det(B_{ik})^{1/2}$

Die Formänderungsenergiedichte  $W$  wird dabei in einen volumetrischen und einen deviatorischen Anteil aufgeteilt. Im volumetrischen Anteil wird die Formänderungsenergie berücksichtigt, die eine Volumenänderung eines infinitesimalen Elements bewirkt. Der deviatorische Anteil berücksichtigt die infolge einer Gestaltänderung gespeicherte Energie.

$$W = W_{\text{dev}} + W_{\text{vol}} \quad \text{Gl. 4.3}$$

Für den im Rahmen dieser Arbeit vorliegenden Fall einer dünnen Schicht zwischen Behälter und Sattelkonstruktion wurden im Rahmen zweier Diplomarbeiten [24],[56] Untersuchungen und Vergleichsberechnungen hinsichtlich der Eignung von unterschiedlichen Materialgesetzen für Elastomere oder Schaumstoffe durchgeführt. Auf der Grundlage von einachsigen Druckversuchen an fünf Materialien hat sich gezeigt, dass nur Materialgesetze geeignet sind, die eine Volumenänderung berücksichtigen können, wie zum Beispiel das Materialgesetz von Ogden [48] oder das Materialgesetz Foam [48] für Schaumstoffe.

### Materialgesetz Ogden

Das Materialgesetz von Ogden kann eine auf kleine Volumendehnungen beschränkte Kompressibilität berücksichtigen. Nach dem Materialgesetz von Ogden ergibt sich der deviatorische Anteil zu

$$W_{\text{dev}} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} \cdot \left[ J^{\frac{-\alpha_i}{3}} \cdot (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i}) - 3 \right] \quad \text{Gl. 4.4}$$

und der volumetrische Anteil zu

$$W_{\text{vol}} = 4,5 \cdot K \cdot \left( J^{\frac{1}{3}} - 1 \right)^2 \quad \text{Gl. 4.6}$$

$\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  sind die Hauptdehnungsgrade,  $J$  die Jacobi-Determinante des Deformationsgradienten und  $K$  der Kompressionsmodul. Die Koeffizienten  $\mu_i$  und  $\alpha_i$  sind materialabhängige Konstanten die durch Auswertung von Versuchen bestimmt werden müssen.

### Materialgesetz Foam

Das Materialgesetz Foam ist für die Berechnung von Schaumstoffen geeignet. Im Gegensatz zu anderen Materialgesetzen wird die Volumendehnung nicht auf kleine Dehnungen beschränkt, womit auch hochgradig kompressible Materialien berücksichtigt werden können.

Die Formänderungsenergiedichte ist definiert als:

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} \cdot \left[ J^{\frac{-\alpha_i}{3}} \cdot (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i}) - 3 \right] + \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\beta_i} \cdot (1 - J^{\beta_i}) \quad \text{Gl. 4.7}$$

Der deviatorische Anteil ist identisch mit der Formulierung nach dem Materialgesetz von Ogden. Im volumetrischen Anteil entfällt gegenüber Ogden die lineare Verknüpfung der Volumendehnung mit dem hydrostatischen Druck, wodurch die Beschränkung auf kleine Volumendehnungen entfällt. Die Bestimmung der materialabhängigen Parameter erfolgt wieder durch Auswertung von Versuchen.

Die Anwendung dieser Materialgesetze erweist sich allerdings als schwierig, da zur Ermittlung der noch unbekanntenen Materialkoeffizienten Versuche und ein sogenanntes „Experimental

Data Fitting“ durchgeführt werden muss. Im Rahmen dieses „Experimental Data Fitting“ muss vom Bediener die Anzahl der zu berücksichtigenden Reihenglieder und Kriterien für die Ermittlung der Materialparameter festgelegt werden. Eine einheitliche Vorgehensweise kann dabei nicht angegeben werden, da je nach Material und Belastungssituation verschiedene Anforderungen gestellt werden. Umfangreiche Vergleichsrechnungen im Vorfeld sind daher unerlässlich, um auch teilweise unsinnige Ergebnisse auszuschließen. Darüber hinaus können die Materialkoeffizienten nicht bestimmten Elastomereigenschaften zugeordnet werden und somit ist eine einfache überschlägige Zuordnung nicht möglich.

Um das nichtlineare Tragverhalten einer dünnen Schicht bei möglichst einfacher Formulierung der mechanischen Eigenschaften dennoch zu berücksichtigen, wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Materialgesetz entwickelt, welches im Zusammenhang mit der verwendeten Diskretisierung eine nichtlineare elastische Bettung berücksichtigen kann.

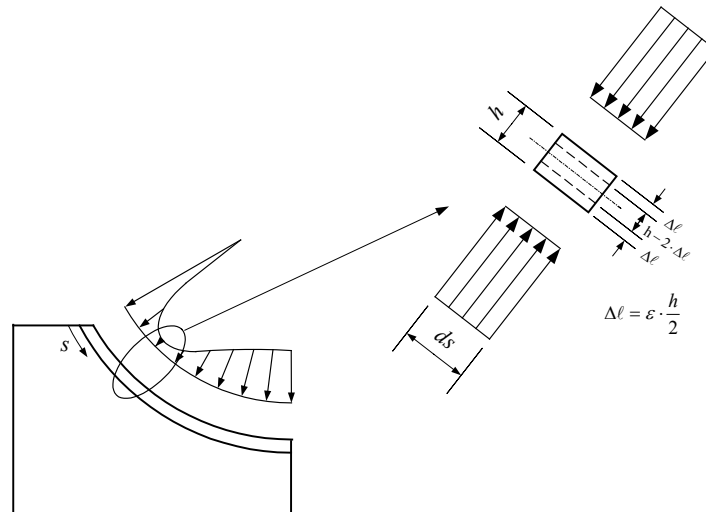
### **Nichtlineare elastische Bettung**

Das entwickelte Materialgesetz soll für dünne elastomere Schichten den Effekt der nichtlinearen Verfestigung berücksichtigen und gleichzeitig kompressibel sein. Hierzu werden folgende Annahmen getroffen:

1. In einen infinitesimalen Volumenelement mit der Grundfläche  $dA$  und der Höhe der elastomeren Schicht stellt sich in radialer Richtung ein eindimensionaler Dehnungs- und Spannungszustand ein.
2. Der Zusammenhang zwischen den Dehnungen und Spannungen nach Abb. 4.13 wird beschrieben durch:

$$\sigma = \frac{E_0}{(1 + \varepsilon)} \cdot \varepsilon \quad \text{Gl. 4.8}$$

Diese Annahmen sind gerechtfertigt, wenn man davon ausgeht, dass zwischen dem Behälter und der elastomeren Schicht keine Reibkräfte, also nur Kräfte in radialer Richtung übertragen werden und die Schicht so dünn ist, dass keine nennenswerte Lastausbreitung innerhalb der Schicht zu erwarten ist.



**Abb. 4.14:** Belastungsbild einer dünnen Zwischenschicht unter der Annahme eines einachsigen Spannungszustandes

Unter den getroffenen Annahmen ergeben sich der Spannungstensor und der Verzerrungstensor bei einer Beschreibung in den Hauptrichtungen zu:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} \quad \text{Gl. 4.9}$$

Da die Richtung der Hauptspannungen, beziehungsweise die der Hauptdehnungen, im voraus nicht bekannt ist, muss eine Formulierung des Materialgesetzes so gewählt werden, dass sie gegenüber einer Drehung des Koordinatensystems invariant ist. Dazu erfolgt zunächst die Beschreibung des Zusammenhangs zwischen der Hauptspannung und der Hauptdehnung unter Berücksichtigung der ersten Invariante des Verzerrungstensors zu:

$$I_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad \text{Gl. 4.10}$$

$$\sigma_3 = \frac{E_0}{(1 + I_1)} \cdot \varepsilon_3 \quad \text{Gl. 4.11}$$

Die Spannungskomponenten in einem gegenüber den Hauptrichtungen gedrehten Koordinatensystem ergeben sich zu:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\angle x,1) & \cos(\angle x,2) & \cos(\angle x,3) \\ \cos(\angle y,1) & \cos(\angle y,2) & \cos(\angle y,3) \\ \cos(\angle z,1) & \cos(\angle z,2) & \cos(\angle z,3) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos(\angle x,1) & \cos(\angle y,1) & \cos(\angle z,1) \\ \cos(\angle x,2) & \cos(\angle y,2) & \cos(\angle z,2) \\ \cos(\angle x,3) & \cos(\angle y,3) & \cos(\angle z,3) \end{vmatrix} \quad \text{Gl. 4.12}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_3 \cdot \cos(\angle x,3)^2 & \sigma_3 \cdot \cos(\angle x,3) \cdot \cos(\angle y,3) & \sigma_3 \cdot \cos(\angle x,3) \cdot \cos(\angle z,3) \\ \sigma_3 \cdot \cos(\angle y,3) \cdot \cos(\angle x,3) & \sigma_3 \cdot \cos(\angle y,3)^2 & \sigma_3 \cdot \cos(\angle y,3) \cdot \cos(\angle z,3) \\ \sigma_3 \cdot \cos(\angle z,3) \cdot \cos(\angle x,3) & \sigma_3 \cdot \cos(\angle z,3) \cdot \cos(\angle y,3) & \sigma_3 \cdot \cos(\angle z,3)^2 \end{vmatrix} \quad \text{Gl. 4.13}$$

Analog ergeben sich die Verzerrungen nach einer Transformation zu

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_3 \cdot \cos(\angle x,3)^2 & \varepsilon_3 \cdot \cos(\angle x,3) \cdot \cos(\angle y,3) & \varepsilon_3 \cdot \cos(\angle x,3) \cdot \cos(\angle z,3) \\ \varepsilon_3 \cdot \cos(\angle y,3) \cdot \cos(\angle x,3) & \varepsilon_3 \cdot \cos(\angle y,3)^2 & \varepsilon_3 \cdot \cos(\angle y,3) \cdot \cos(\angle z,3) \\ \varepsilon_3 \cdot \cos(\angle z,3) \cdot \cos(\angle x,3) & \varepsilon_3 \cdot \cos(\angle z,3) \cdot \cos(\angle y,3) & \varepsilon_3 \cdot \cos(\angle z,3)^2 \end{vmatrix} \quad \text{Gl. 4.14}$$

Man erkennt, dass unter der Voraussetzung eines einachsigen Spannungs- und Dehnungszustandes zwischen einer Spannungskomponente im gedrehten Koordinatensystem und der Hauptspannung der gleiche Zusammenhang besteht, wie zwischen der entsprechenden Verzerrungskomponente und der Hauptdehnung. Einsetzen dieser Zusammenhänge in Gl. 4.11 liefert die allgemeine Formulierung in einem beliebig orientierten kartesischen Koordinatensystem:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \end{vmatrix} = \frac{E_0}{(1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})} \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \end{vmatrix} \quad \text{Gl. 4.15}$$

## Untersuchungen zur nichtlinearen Bettung

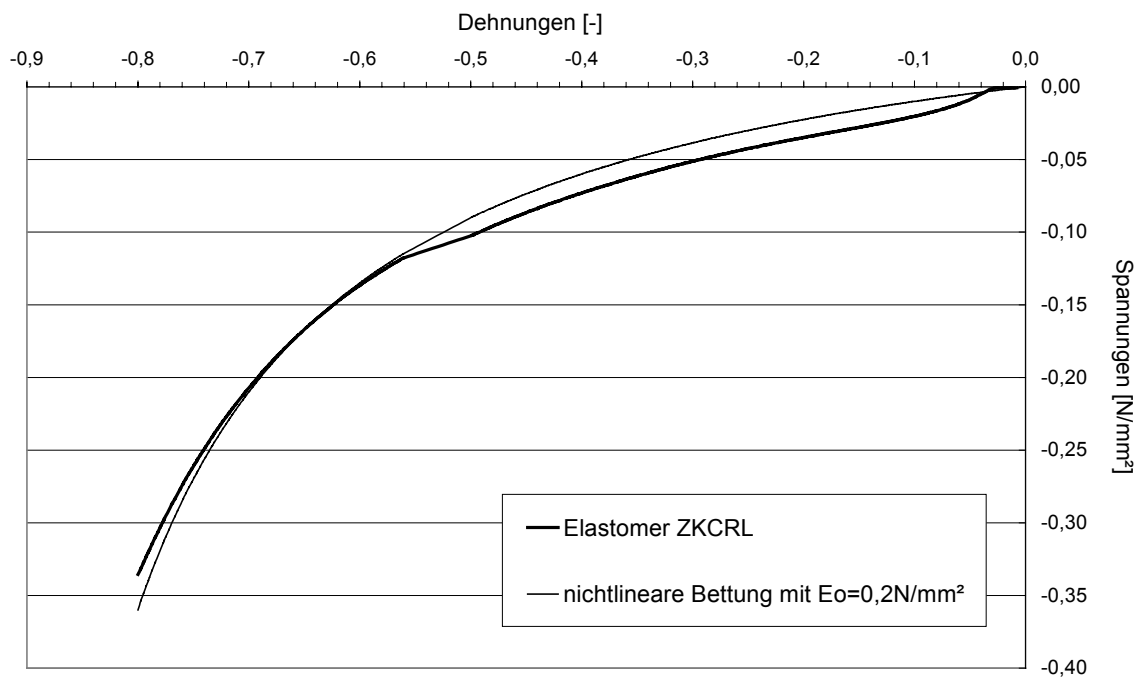
Auf Grundlage des vorgestellten Materialgesetzes zur Berücksichtigung einer nichtlinearen elastischen Bettung sind von Dümpelmann in [24] Untersuchungen und Parameterstudien in Bezug auf horizontale sattelgelagerte Behälter durchgeführt worden. Hauptaugenmerk wurde dabei auf den Einfluss der Zwischenschicht auf die Sattelpressung und damit verbunden auf die Spannungen in Umfangsrichtung gerichtet. Durch Vergleich der Ergebnisse aus Berechnungen unter Berücksichtigung der Materialgesetze Ogden und Foam mit denen nach der nichtlinearen Bettung, wird zunächst die Eignung der nichtlinearen Bettung zur Beschreibung des Tragverhalten von dünnen elastomeren Schichten festgestellt. Der Vergleich erfolgt dabei unter Berücksichtigung von Versuchswerten aus [56]. Des Weiteren wird ein Zusammenhang zwischen der nichtlinearen Bettung und einer in Bezug auf die Schnittgrößen in der Behälterwand, statisch äquivalenten linearen Bettung aufgestellt. Der Zusammenhang lautet:

$$B[\text{N/mm}^3] = 0,55 \cdot \ln\left(\frac{E_0 + 1}{d}\right) + 0,963 \quad \text{Gl. 4.16}$$

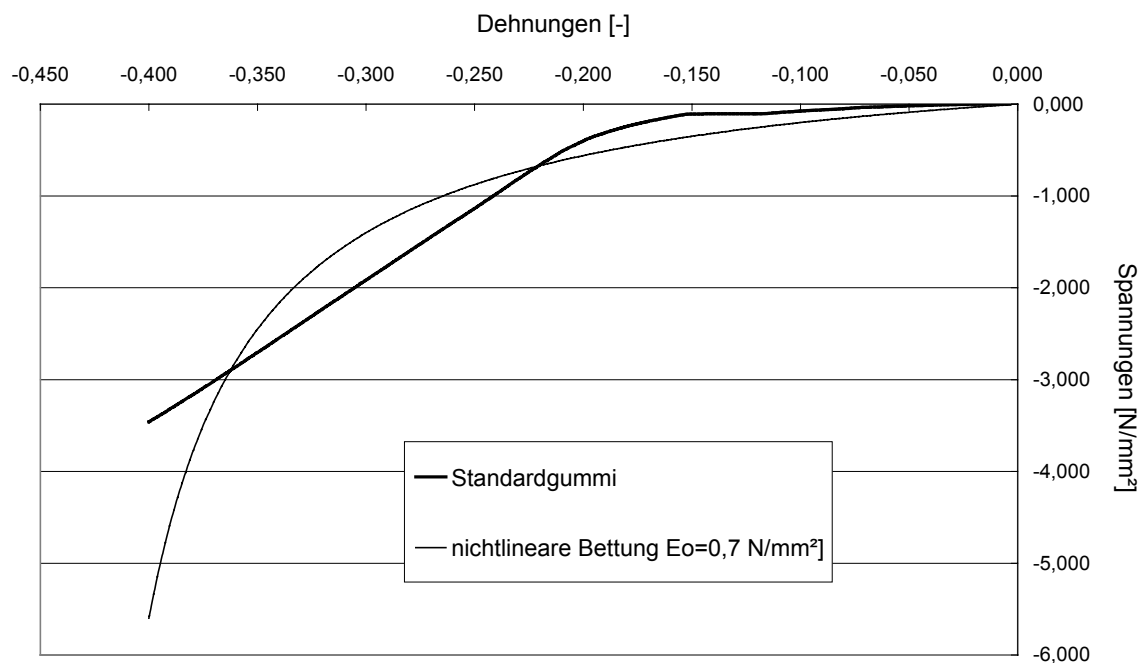
$E_0$ , in  $[\text{N/mm}^2]$  eingesetzt, ist der Tangentenmodul im Nullpunkt der Spannungsdehnungslinie der nichtlinearen Bettung wie sie zum Beispiel in Abb. 4.13 dargestellt ist und  $d$  die Schichtdicke in  $[\text{mm}]$ . Die aus der Formel berechnete Bettungsziffer kann dann im Fall der FE-Berechnung mit einer Schicht aus Volumenelementen als Sattel, über

$$B = \frac{E}{d} \quad \text{Gl. 4.17}$$

bestimmt werden. Für den Fall der linearen Bettung werden auf Grundlage einer Parameterstudie Formeln zur Bestimmung der zu erwartenden Sattelpressungen aufgestellt. Die Formeln werden im Rahmen dieser Arbeit in Kapitel 8 vorgestellt. Die Anwendung und Eignung der Idealisierung als lineare Bettung wird abschließend am Beispiel eines schaumstoffartigen und eines elastomeren Materials mit jeweils einer Schichtdicke von 4 mm gezeigt. Hierzu werden zunächst die Spannungs-Dehnungslinien, die Schlingloff [56] aus einem einachsigen Druckversuch für zwei Materialien mit den Typenbezeichnungen ZK / CRL und Standardgummi ermittelt hat, als nichtlineare Bettung angenähert.



**Abb. 4.15:** Spannungs-Dehnungslinie für ZK / CRL



**Abb. 4.16:** Spannungs-Dehnungslinie für Standardgummi

Für das weiche Material zeigt sich bei Wahl eines Tangentenmoduls von  $0,2 \text{ N/mm}^2$  eine sehr gute Übereinstimmung. Für das steifere elastomere Material kann mit einem Tangentenmodul von  $0,7 \text{ N/mm}^2$  im Mittel eine gute Übereinstimmung erzielt werden. Nach dem Zusammen-

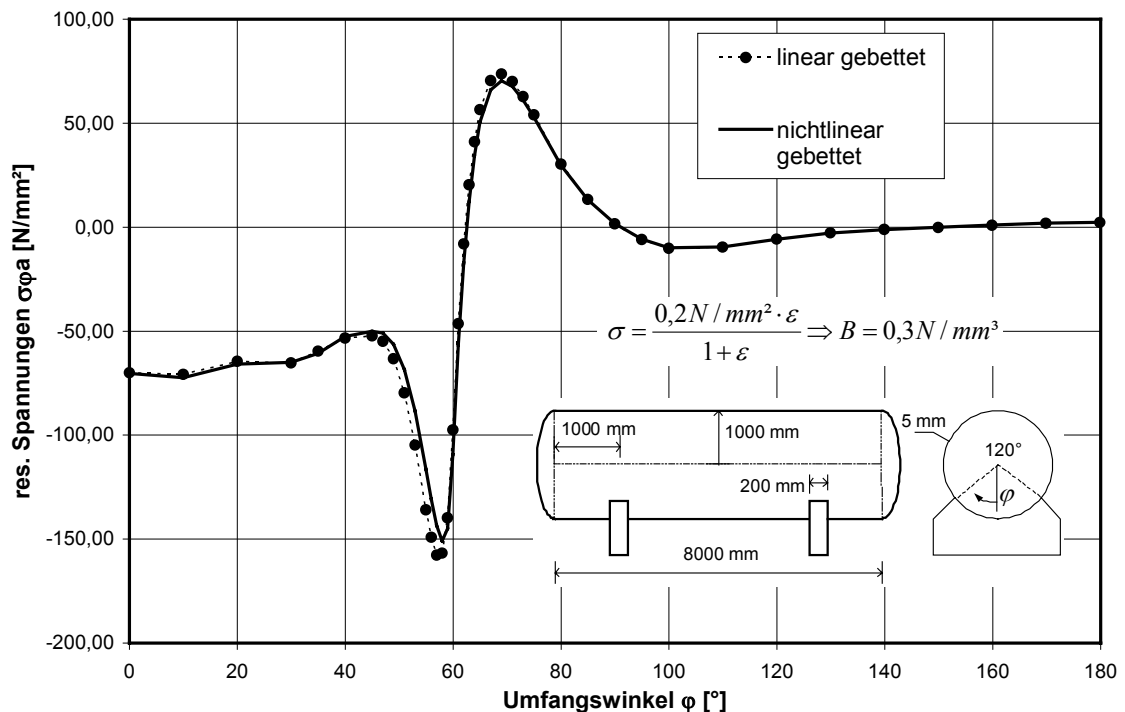
hang aus Gl. 4.16 kann das nichtlineare Tragverhalten der beiden Schichten jeweils durch eine lineare Bettung idealisiert werden. Für die Schicht aus dem Material ZK / CRL ergibt sich:

$$B_{\text{ZKCRL}} = 0,55 \cdot \ln\left(\frac{0,2+1}{4}\right) + 0,963 = 0,3 \text{ N/mm}^3 \quad \text{Gl. 4.18}$$

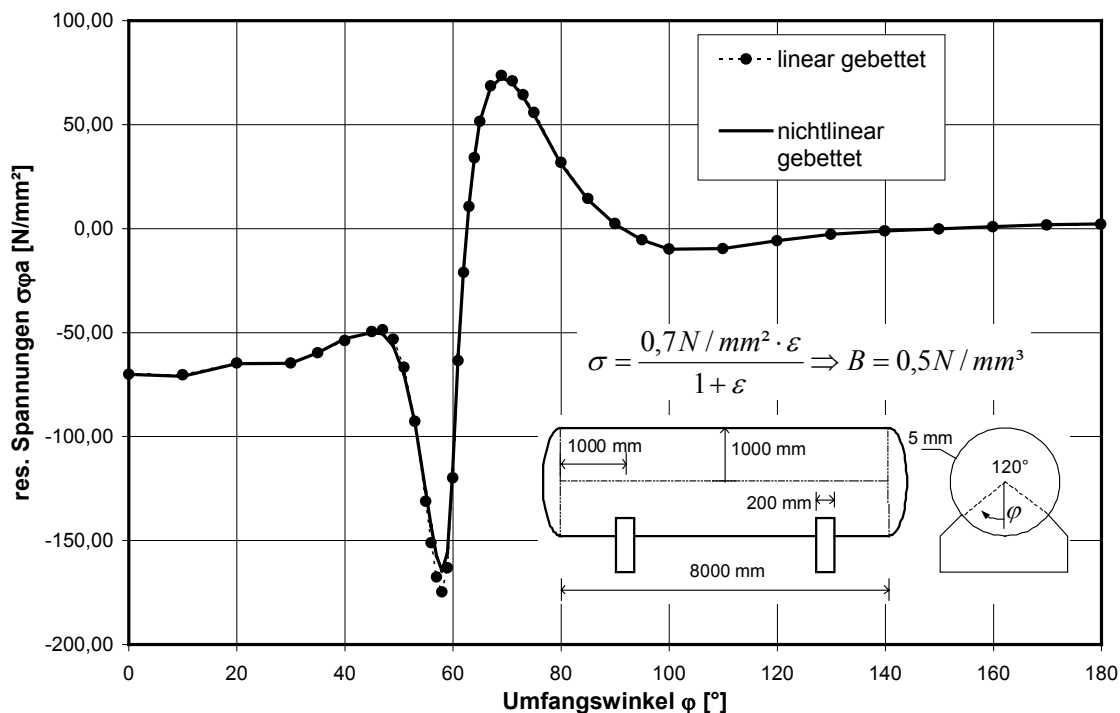
und für die Schicht aus Standardgummi ergibt sich:

$$B_{\text{St-G}} = 0,55 \cdot \ln\left(\frac{0,7+1}{4}\right) + 0,963 = 0,5 \text{ N/mm}^3 \quad \text{Gl. 4.19}$$

In den folgenden beiden Abbildungen 4.17 und 4.18 sind zur abschließenden Überprüfung der Idealisierung einer dünnen Zwischenschicht als linear-elastische Bettung die Ergebnisse einer FE-Berechnung dargestellt. Im Rahmen der FE-Berechnung wurden für einen Behälter die Spannungen in Umfangsrichtung unter Berücksichtigung der zuvor beschriebenen Zwischenschichten aus den Materialien ZK / CRL und Standardgummi ermittelt. Die Berücksichtigung dieser Zwischenschichten erfolgte zum einen als nichtlineare Bettung auf Grundlage der Zusammenhänge nach Abb. 4.15 und Abb. 4.16 und zum anderen als idealisierte linear-elastische Bettung nach Gl. 4.18 und Gl. 4.19.



**Abb. 4.17:** Vergleich der Spannungen in Umfangsrichtung bei Lagerung auf einer Zwischenschicht aus ZK / CRL



**Abb. 4.18:** Vergleich der Spannungen in Umfangsrichtung bei Lagerung auf einer Zwischenschicht aus Standardgummi

Für den Behälter der auf einer Zwischenschicht aus ZK / CRL gelagert wurde, zeigen sich in Abb. 4.17 sehr gut übereinstimmende Spannungsverläufe. Die maximalen Spannungen am Sattelhorn werden bei der linear-elastischen Bettung etwas höher ermittelt, womit diese Idealisierung aber auf der sicheren Seite liegt. Für den Behälter auf einer Zwischenschicht aus Standardgummi ergeben sich analoge Spannungsverläufe wie in Abb. 4.18 zu erkennen ist.

## **Kapitel 5      Wertung der bisherigen Verfahren**

### **5.1 Allgemeines**

In den vorangegangenen Kapiteln wurden schalentheoretische Lösungsansätze, Näherungsverfahren und eine Lösung nach der FE-Methode vorgestellt. Daneben wurden die theoretischen Grundlagen erläutert und die Lösung nach der FE-Methode durch Vergleich mit Messergebnissen verifiziert. Hinsichtlich der Handhabung ist das Näherungsverfahren von Zick am einfachsten und wird daher bis in die heutige Zeit angewendet. Eine unrealistische Erfassung der Beanspruchung wurde allerdings in zahlreichen rechnerischen und messtechnischen Untersuchungen festgestellt, was die Frage nach der tatsächlichen Eignung dieses Verfahrens aufwirft. Als Grundlage für eine differenzierte Beurteilung für den Fall einer starren Lagerung bei losem Kontakt werden in diesem Kapitel zunächst die Ergebnisse nach dem Verfahren von Zick mit denen nach Krupka, als Vertreter eines schalentheoretischen Ansatzes, und mit denen nach der FE-Methode verglichen. Dabei erfolgt auch eine Bewertung der Verfahren. Abschließend erfolgt ein Ausblick auf das neue Berechnungsverfahren.

### **5.2 Vergleich der bisherigen Berechnungsverfahren**

Zunächst werden für einen Sattelwinkel von  $120^\circ$  drei Behälter mit Radien von 500, 1000 und 1500 mm betrachtet und dabei die Behälterlänge  $L$  variiert. Als Bodenabstand wurde der jeweilige Behälterradius angesetzt und die Blechdicke nach den Radien gestaffelt.

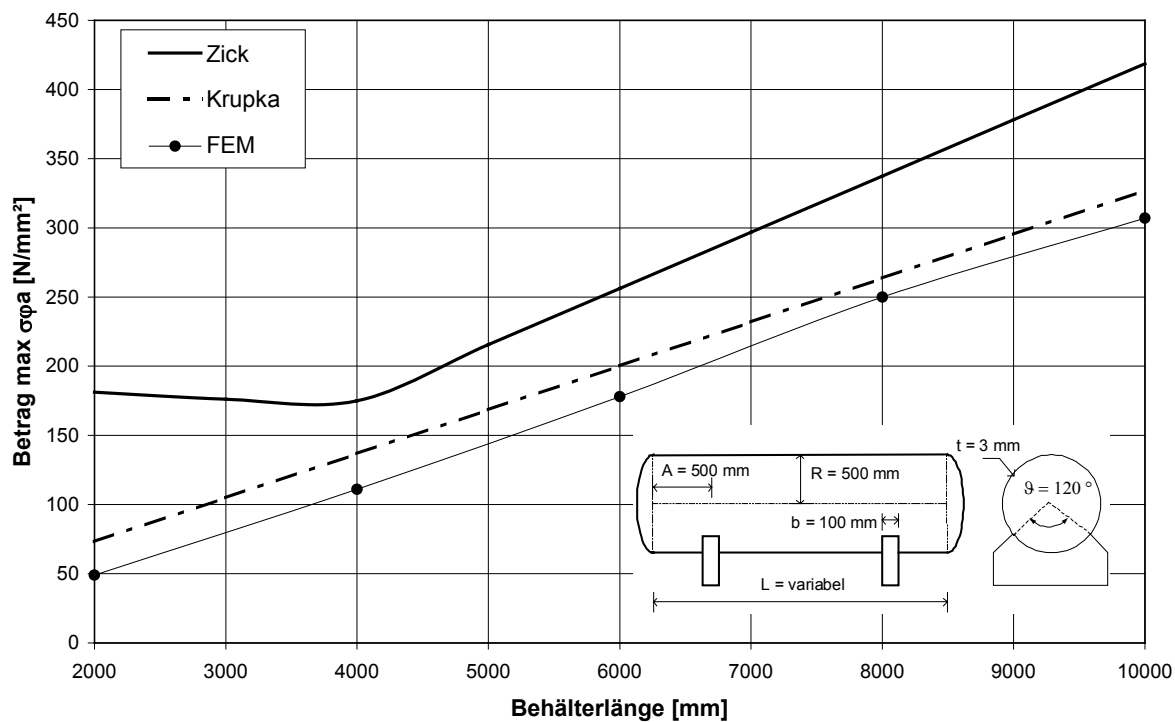


Abb. 5.1: Variation der Behälterlänge für einen Radius von 500 mm

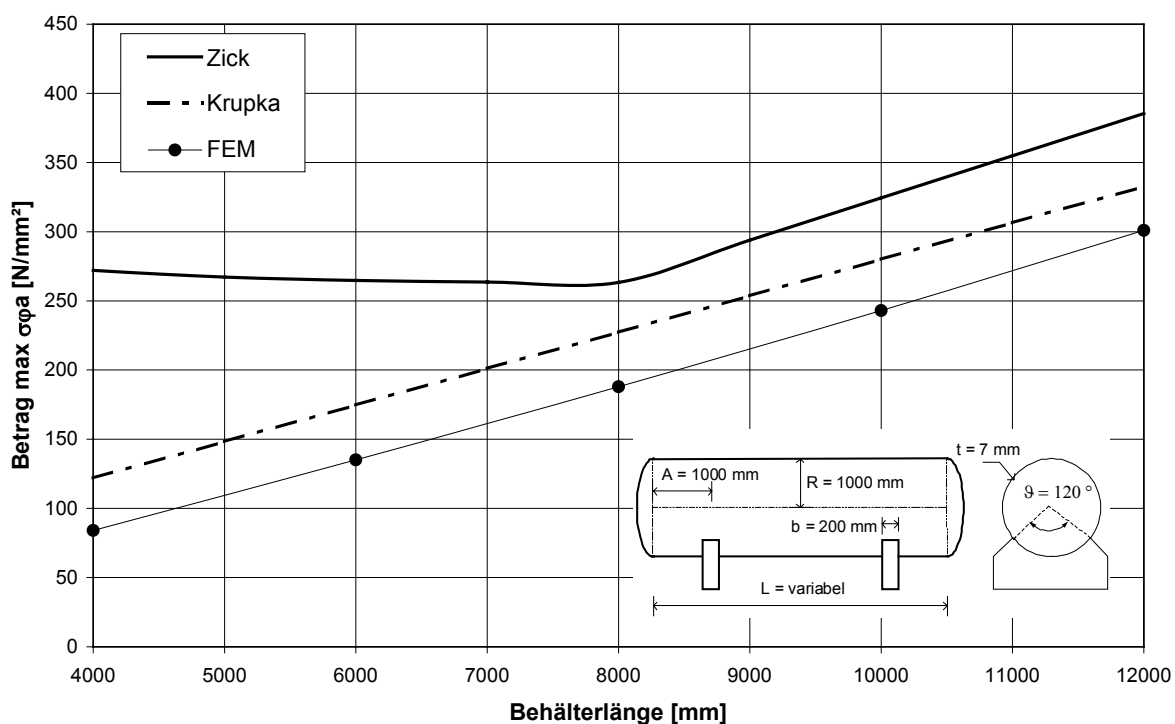
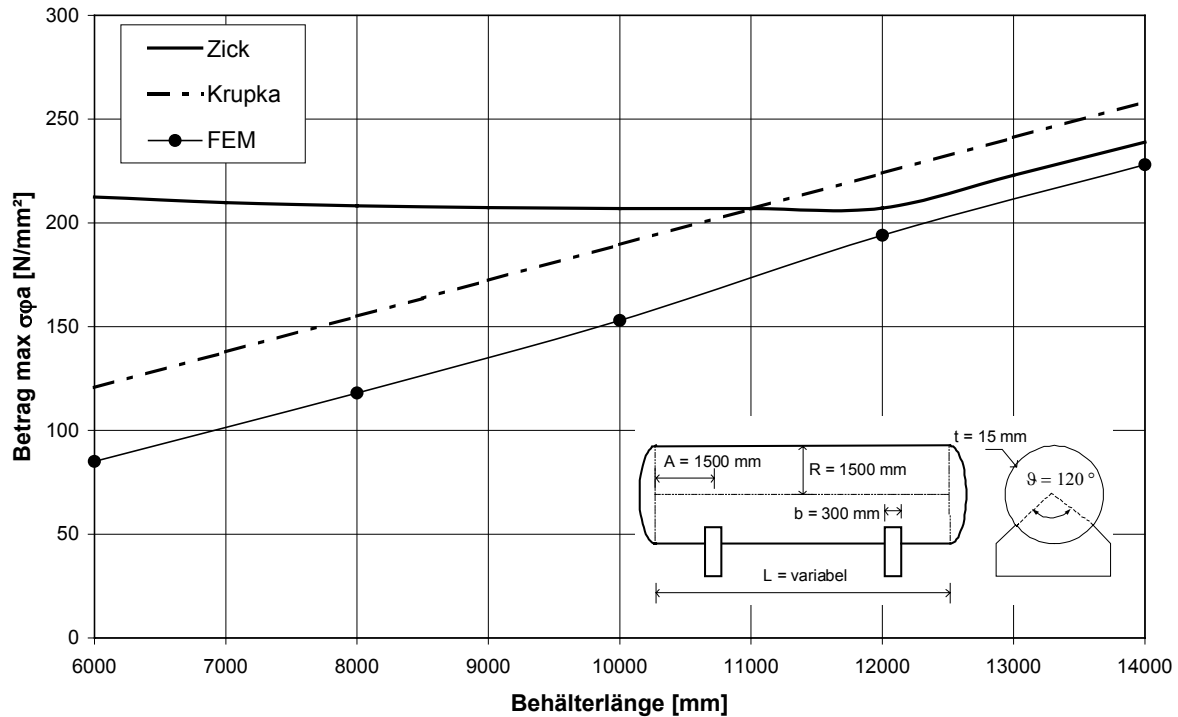


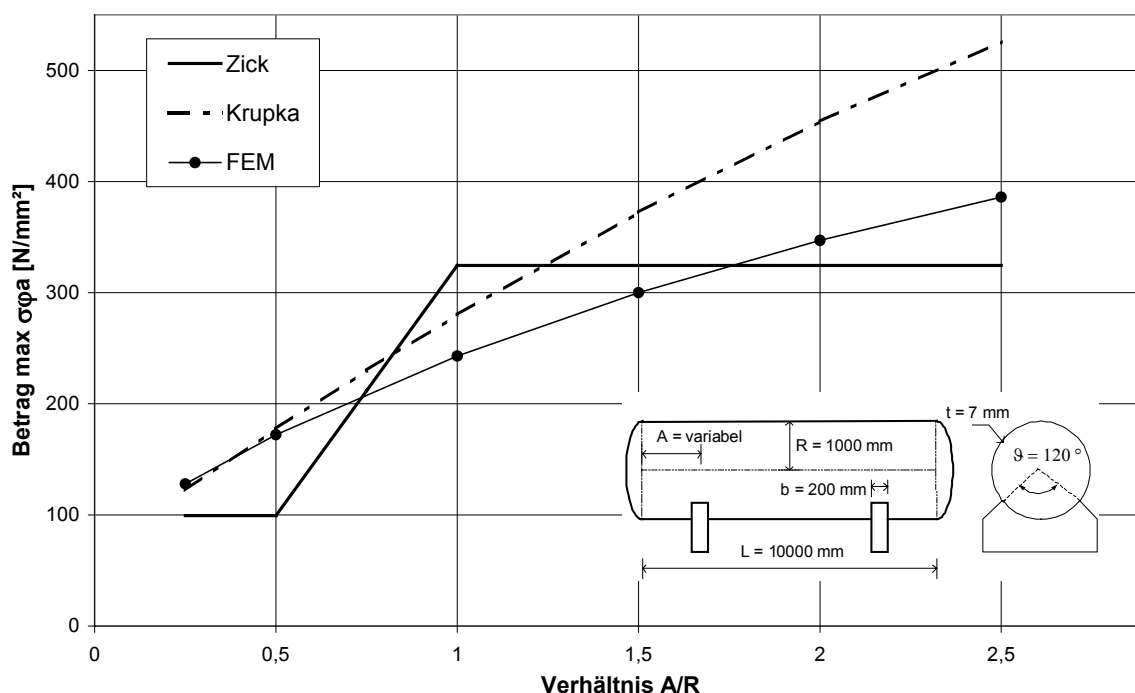
Abb. 5.2: Variation der Behälterlänge für einen Radius von 1000 mm



**Abb. 5.3:** Variation der Behälterlänge für einen Radius von 1500 mm

Bei der Variation der Behälterlänge ist eine erste Anwendungsgrenze des Verfahrens von Zick zu erkennen. Unterhalb einer Behälterlänge von  $8 R$  ist bei Zick kaum eine Veränderung der maximalen Spannungen zu erkennen, obwohl die resultierende Auflagerkraft bei sinkender Behälterlänge abnimmt. Dieser Effekt ist aus dem Ansatz für die mitttragende Schalenbreite nach Zick zu erklären. Unterhalb einer Behälterlänge von  $8 R$  wird die mitttragende Schalenbreite gleich der halben Behälterlänge gesetzt, so dass diese sich proportional zur resultierenden Auflagerkraft verringert und damit den spannungsreduzierenden Effekt einer sinkenden Belastung am Sattel aufhebt. Eine Kompensierung dieses offensichtlichen Fehlers würde den Ansatz einer mitwirkenden Breite erfordern, die über der tatsächlichen Behälterlänge liegt. Die Ansätze für die mitwirkende Schalenbreite von Brownell & Young, beziehungsweise von Mang, stellen in diesem Zusammenhang keine Verbesserung dar. Brownell & Young geben nur einen neuen Ansatz für die mitwirkende Schalenbreite in Bezug auf die Normalkraft an, aus welcher aber, im Verhältnis zur Biegebeanspruchung, nur geringe Spannungen resultieren. Mang berücksichtigt bei seinem Ansatz die Behälterlänge überhaupt nicht. Für kurze Behälter ist damit die Idealisierung von Zick grundsätzlich in Frage gestellt. Bei größeren Behälterlängen zeigen sich bei allen Verfahren eine gleiche qualitative Zunahme der Spannungen, wobei sich vor allem bei großen Radien eine relativ gute Übereinstimmung bei allen Verfahren zeigt. Bei kleineren Radien liegen die Ergebnisse von Zick generell höher.

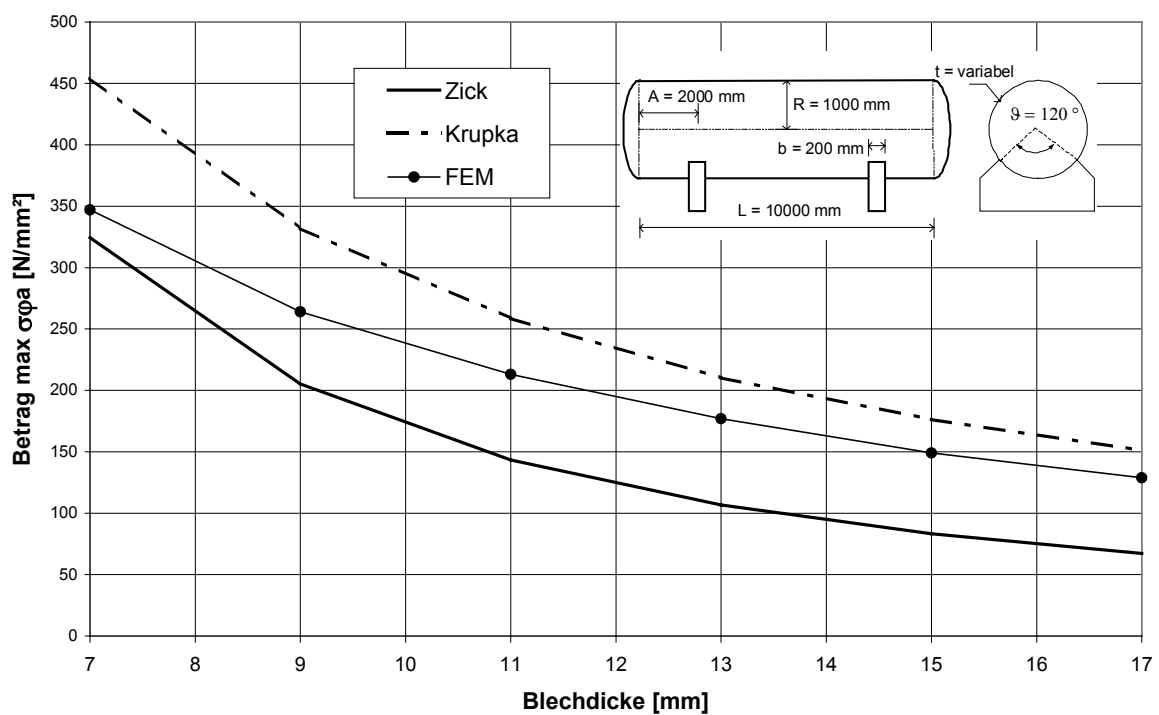
Zum weiteren Vergleich wird bei einem Behälter mit dem Radius 1,0 m und der Länge 10 m der Bodenabstand variiert:



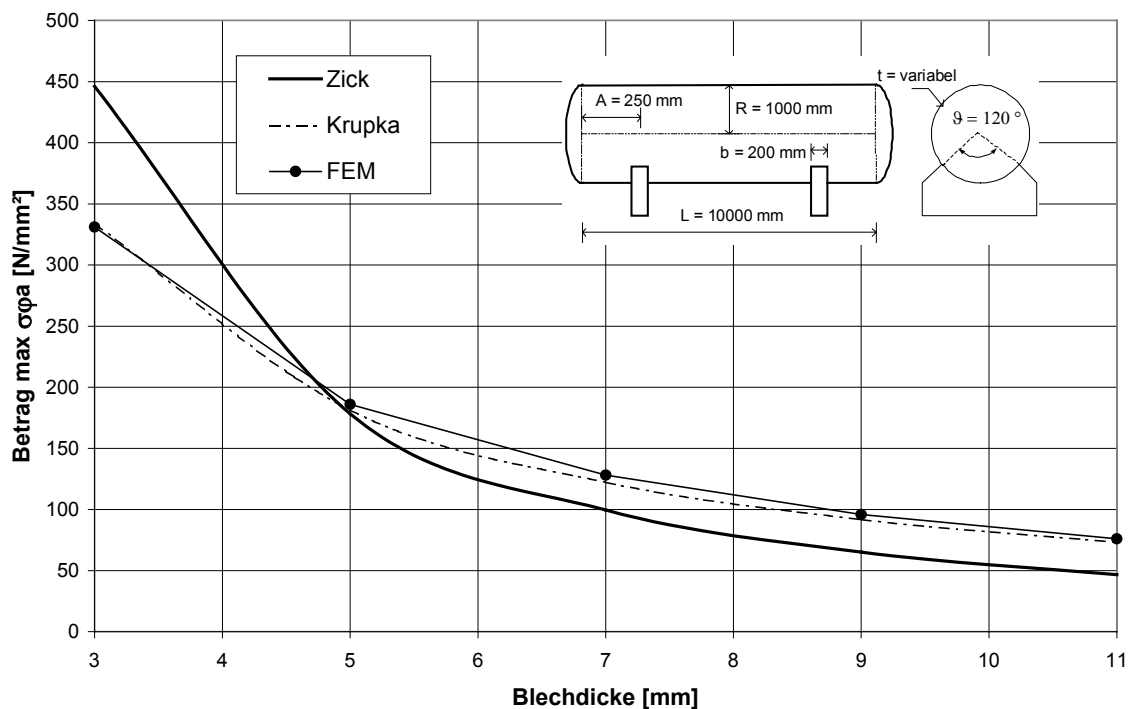
**Abb. 5.4:** Variation des Bodenabstandes für einen Radius von 1000 mm

Hier zeigen sich sowohl bei dem Verfahren von Zick als auch bei dem Verfahren nach Krupka Unterschiede zu den Ergebnissen nach der FE-Methode. Die einfache Berücksichtigung des Einflusses des Bodenabstandes über einen Reduzierungsfaktor und linearer Interpolierung bei Bodenabständen zwischen 0,5 und 1,0 A/R im Verfahren von Zick, spiegelt das Tragverhalten bei größer werdenden Abständen nur ungenau wieder. Unabhängig von den Absolutwerten der Spannungen ist zu erkennen, dass der Boden auch über die Grenze von 1,0 A/R einen Einfluss auf das Tragverhalten hat, was im Verfahren nach Zick nicht berücksichtigt werden kann. In diesem Zusammenhang stehen auch die Feststellungen von Duthie & Tooth, die bei Behältern mit großen Bodenabständen deutliche Unterschätzungen der maximalen Spannungen nach dem Verfahren von Zick belegen. Die Ergebnisse nach dem Verfahren von Krupka zeigen, dass mit einem schalentheoretischen Ansatz der Einfluss qualitativ erfasst werden kann. Die Absolutwerte der Spannungen sind allerdings bei größeren Bodenabständen höher, als nach der FE-Methode. Dieser Unterschied kann durch die Annahmen in der Halbbiegetheorie, die den Berechnungen von Krupka zugrunde lag, begründet werden. Bei geringen Bodenabständen ist die Kreiszylinderschale im Sattelbereich sehr steif und der Bereich der Störung des Membranspannungszustandes durch die Auflagerpressung ist gegenüber einer weicheren Konstruktion kleiner. Die vernachlässigte Lastabtragung über die Biegemomente in Längsrichtung und die

Drillmomente bei der Halbbiegetheorie ist deshalb nur bei relativ steifen Schalen zulässig. Bei weicheren Konstruktionen, wie im Fall des Behälters mit einem großem Bodenabstand, machen sich diese Komponenten bemerkbar, da eine größere Lastausbreitung berücksichtigt werden kann. Dies zeigt auch die Erhöhung der Steifigkeit durch Vergrößerung der Blechdicke, wie sie in den folgenden Abbildungen dargestellt wird.



**Abb. 5.5:** Variation der Blechdicke für einen Radius von 1000 mm und einem Bodenabstand von 2000 mm



**Abb. 5.6:** Variation der Blechdicke für einen Radius von 1000 mm und einem Bodenabstand von 250 mm

Mit zunehmender Schalendicke nimmt die Differenz zwischen den Ergebnissen nach Krupka und nach der FE-Methode ab. Dies belegt weiter die getroffene Aussage, dass die Halbbiegetheorie nur bei steifen Schalen genaue Ergebnisse liefert.

Im Hinblick auf eine optimierte Sattelkonstruktion wird abschließend die Satteltiefe variiert. Nach Krupka und nach der FE-Methode zeigt sich in Abb. 5.7 ein schwächer werdender Einfluss bei steigender Satteltiefe, woraus man schließen kann, dass ab einer bestimmten Satteltiefe ein wirtschaftliches Optimum zwischen Sattel- und Behälterkonstruktion erreicht wird. Im Verfahren von Zick wird der Einfluss der Satteltiefe praktisch nicht erfasst, wodurch die Ermittlung einer wirtschaftlichen Sattelkonstruktion verhindert wird.

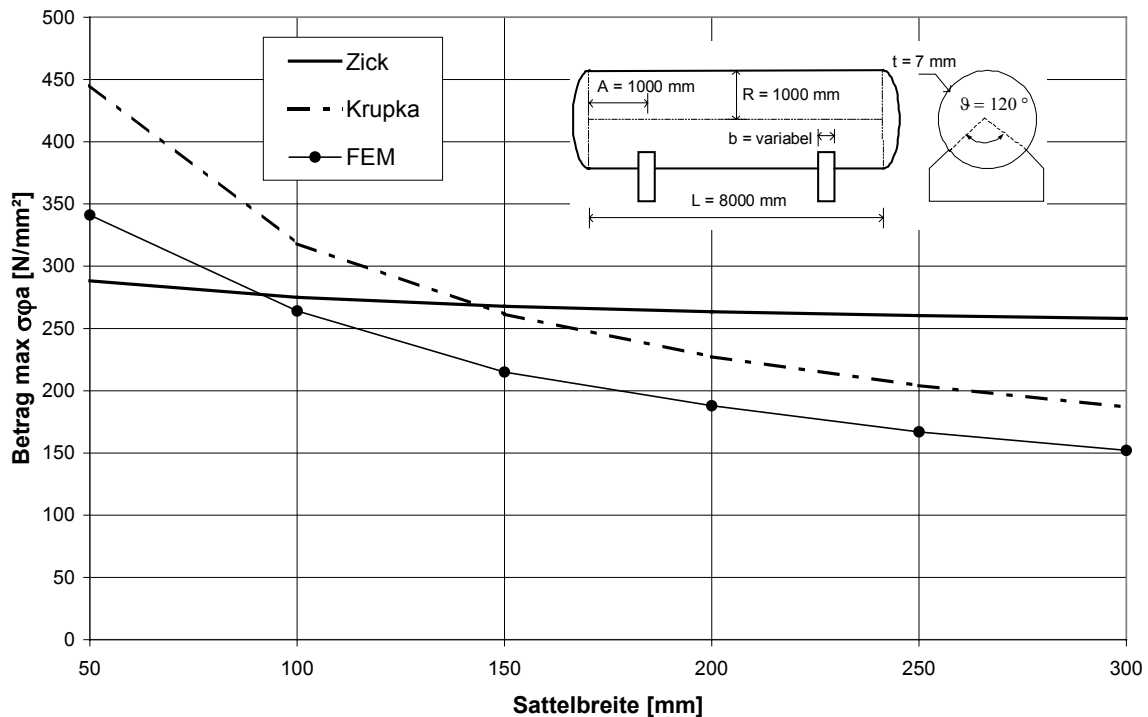


Abb. 5.7: Variation der Sattelbreite für  $R=1000$  mm

### 5.3 Zusammenfassung und Ausblick auf das neue Berechnungsverfahren

Wie in den Vergleichsberechnungen gezeigt wurde, ist das Näherungsverfahren von Zick nicht geeignet, das tatsächliche Tragverhalten des sattelgelagerten Behälters zu erfassen. Die weitergehenden Untersuchungen von Brownell & Young sowie von Mang ergaben keine Verbesserungen, da der Einfluss von Bodenabstand und Behälterlänge auf die maximalen Spannungen nicht in Frage gestellt wurde und daher auch nicht verändert wurde.

Der schalentheoretische Ansatz von Krupka ist besser geeignet, dennoch hat sich gezeigt, dass bei weichen Schalen die Annahmen in der Halbbiegetheorie zu ungenauen Ergebnissen führen. Bei Begrenzung der zulässigen Spannungen auf Werte weit unterhalb der Streckgrenze wird sich dieser Fehler nur gering auswirken, da die Schale relativ steif dimensioniert sein wird. Um wirtschaftlichere Lösungen zu erzielen, kann man auch in Betracht ziehen, dass die maximalen Spannungen am Sattelhorn als Sekundärspannungen bewertet werden. Der einzuhaltende Grenzwert für die Spannungen ist dann zum Beispiel nach dem AD-Merkblatt [1] das zweifache der Streckgrenze und es kommen somit auch weiche Schalen in Betracht.

---

Grundlage für Bewertung der maximalen Spannungen als Sekundärspannungen muss eine eindeutige Bestimmung der auftretenden Beanspruchung sein, die aber mit den bisherigen Berechnungsverfahren nicht oder nur mit einem hohen Aufwand möglich ist. Um die Schwachpunkte der bisherigen Verfahren zu verbessern und gleichzeitig einen einfachen Berechnungsgang zu gewährleisten, wird eine vom Prinzip ähnliche Berechnung wie im Verfahren von Zick angestrebt, bei der aber das spezifische Tragverhalten des sattelgelagerten Behälters durch eine schalentheoretische Betrachtung berücksichtigt wird.

Der Schwachpunkt im Verfahren nach Zick liegt in der Ermittlung der Schnittgrößen und der Definition der mittragenden Schalenbreite. Diese beiden Probleme können umgangen werden, wenn zum einen der Kreisring durch einen Schubfluss belastet wird, der nicht aus der Balkentheorie resultiert, sondern die Schalentragwirkung berücksichtigt und zum anderen, wenn am Ersatzsystem Kreisring die kontinuierliche Lagerung der Schale auf dem Sattel berücksichtigt wird. Zur Ermittlung des Schubflusses steht mit der verallgemeinerten technischen Biegetheorie ein schalentheoretischer Ansatz zur Verfügung, der bei ausreichender Genauigkeit ohne große mathematische Probleme zu lösen ist.

Zur Berücksichtigung realistischer Lagerungsbedingungen am Ersatzsystem Kreisring ist die Betrachtung eines elastisch gebetteten Kreisring sinnvoll und die Lösung ist ebenfalls einfach möglich. Die Schwierigkeit ist, dass der Schubfluss in der Kreiszyinderschale von der Interaktion zwischen Sattel und Behälter abhängt und somit die schalentheoretische Berechnung des Schubflusses von den Lagerungsbedingungen, die aber am elastisch gebetteten Kreisring berücksichtigt würden, abhängt. Eine Lösung, wie diese beiden Berechnungsgänge verknüpft werden können, wird im folgenden Kapitel vorgestellt.

## **Kapitel 6                    Aufbau des neuen Berechnungsverfahrens**

### **6.1 Prinzip des Verfahrens**

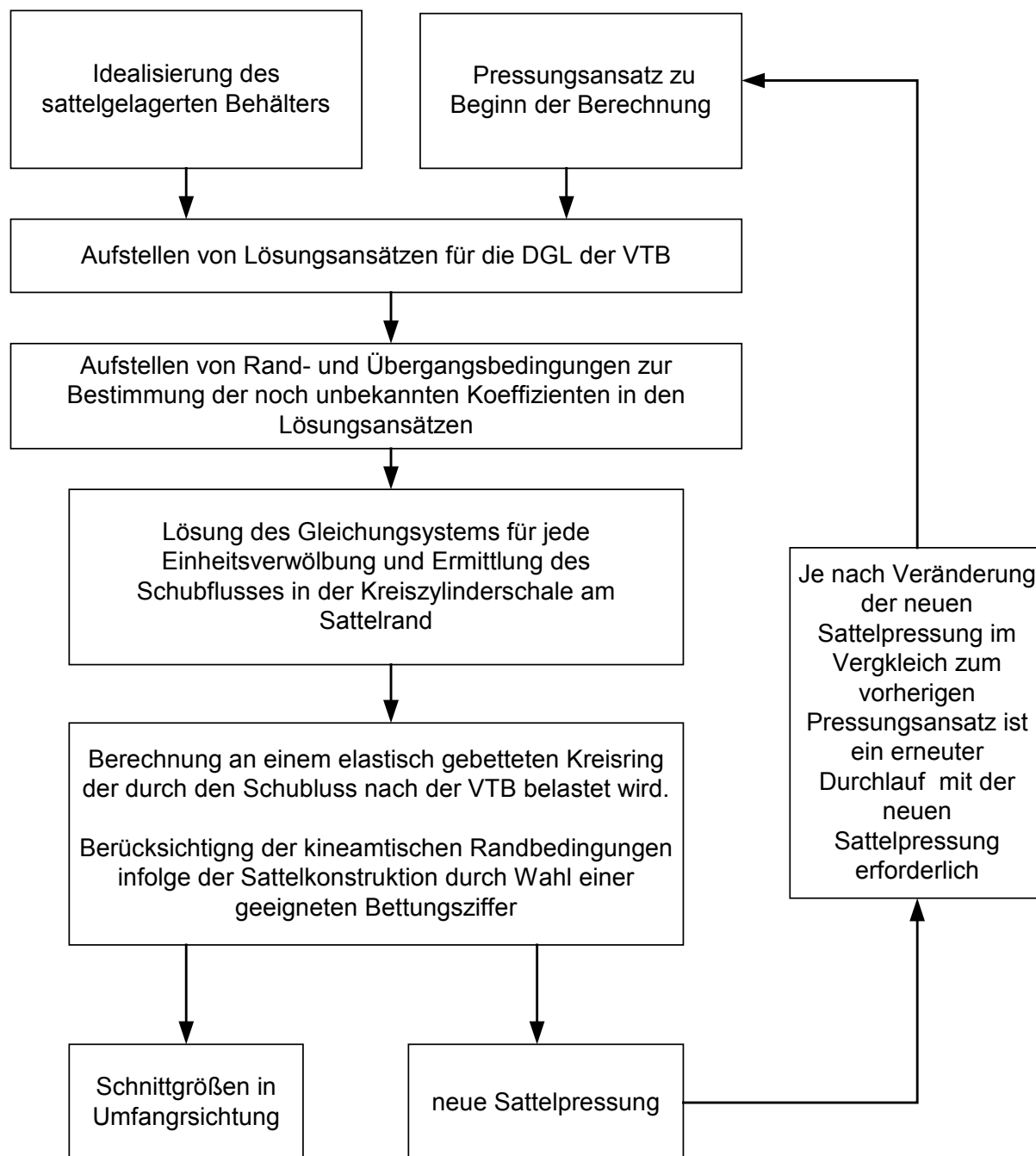
Unter Berücksichtigung der vorangegangenen Feststellungen in Kapitel 5 wurde im Rahmen dieser Arbeit ein neues Berechnungsverfahren entwickelt, das die spezifische Tragwirkung des sattelgelagerten Behälters berücksichtigt und dabei einfach und nachvollziehbar in der Handhabung ist. Das Verfahren gliedert sich in zwei Teilberechnungen und die Lösung erfolgt im allgemeinen Fall iterativ.

Im ersten Berechnungsgang erfolgt die Bestimmung eines Schubflusses, der das Tragverhalten der Behälterschale charakterisiert. Die Berechnung erfolgt auf Grundlage der verallgemeinerten technischen Biegetheorie. Die Interaktion zwischen Behälter und Sattel wird dabei durch äußere Flächenlasten, welche die Sattelpressungsverteilung darstellen sollen, berücksichtigt. Die Ansatzfunktion für diese Flächenlasten ist zu Beginn der Berechnung frei wählbar, da sie im Laufe der iterativen Berechnung durch den folgenden Berechnungsschritt an die tatsächlichen Gegebenheiten angepasst wird.

Im zweiten Berechnungsschritt wird ein elastisch gebetteter Kreisring mit dem im ersten Schritt berechneten Schubfluss in der Zylinderschale belastet und gelöst. Aus dieser Berechnung erhält man eine neue verbesserte Sattelpressung und die Schnittgrößen in Umfangsrichtung.

Durch Vergleich der neuen Sattelpressung mit der in der schalentheoretischen Lösung Angesetzten kann beurteilt werden, ob ein erneuter Berechnungsgang erforderlich ist. Im Optimalfall wird zu Beginn der Berechnung eine so genaue Sattelpressung angesetzt, dass auf eine Iteration verzichtet werden kann.

Die prinzipielle Vorgehensweise ist nachfolgend als Leitfaden für die folgenden ausführlichen Erläuterungen in Form eines Flussdiagramms dargestellt.

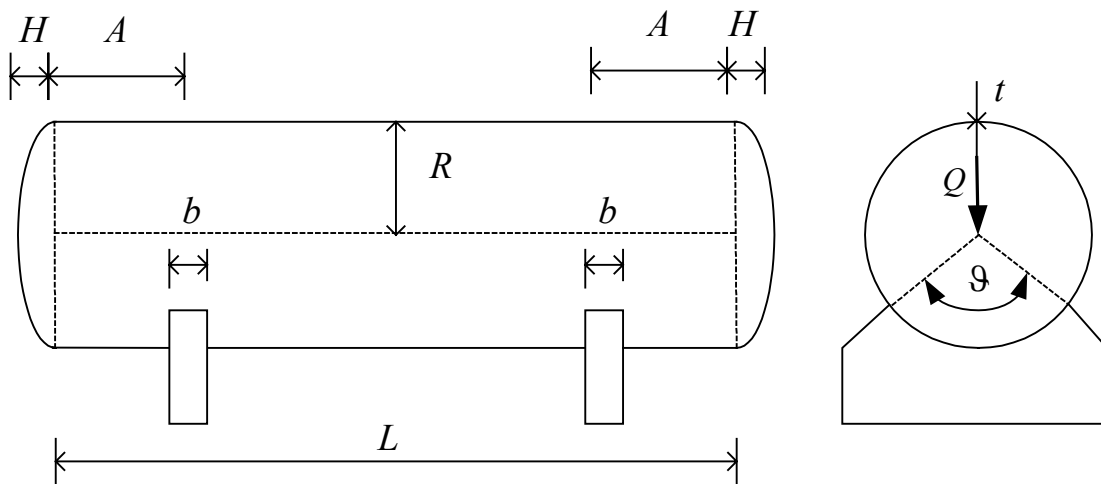


Eine Zusammenfassung aller aufzustellenden Gleichungen für die einzelnen Berechnungsschritte befindet sich für die Fälle einer starren und weichen Lagerung im Anhang dieser Arbeit.

## 6.2 Idealisierung des sattelgelagerten Behälters

Die Umsetzung des statischen Problems des sattelgelagerten Behälters in die verallgemeinerte technische Biegetheorie erfordert zunächst eine Idealisierung des Systems. Die Idealisierung betrifft den Behälterboden und den Sattel. Am Beispiel eines einfachen Behälters auf zwei Satteln soll die Idealisierung des Problems erläutert werden. Die Geometrie des Behälters wird über die folgenden Parameter festgelegt:

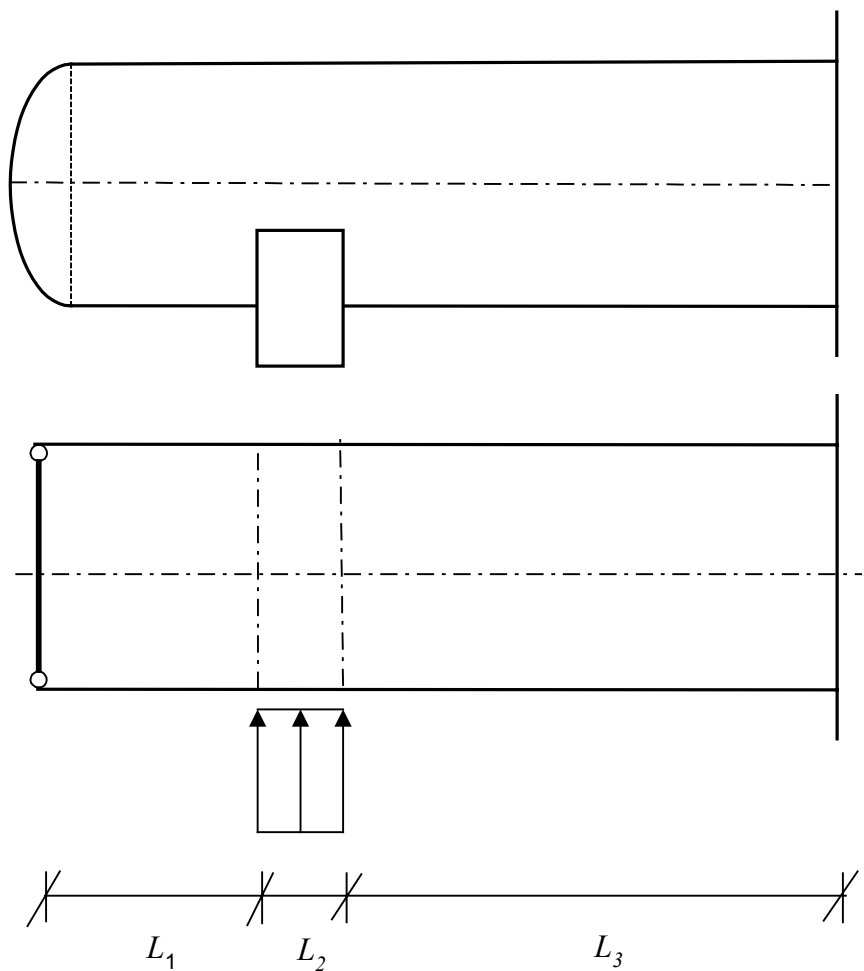
- R     Radius bezogen auf die Schalenmittelfläche
- t     Blechdicke
- L     Länge der Kreiszylinderschale
- H     Tiefe des Bodens
- A     Abstand des Bodens von der Mitte des Sattels
- b     Sattelbreite
- $\vartheta$      Sattelumschließungswinkel
- Q     resultierende vertikale Last pro Sattel



**Abb. 6.1:** Behälterparameter

In Kapitel 5 wurde festgestellt, dass der Boden eine aussteifende Wirkung auf die Behälterschale hat und entsprechend berücksichtigt werden muss. Eine genaue Abbildung der Boden-geometrie ist im Rahmen der verallgemeinerten technischen Biegetheorie nicht möglich. Konzentriert man sich auf die Betrachtung des Sattelbereichs, kann die aussteifende Wirkung des Behälterbodens auch durch ein dehnstarres Schott an entsprechender Stelle berücksichtigt werden. In der verallgemeinerten technischen Biegetheorie ist dies gleichbedeutend mit einer Ver-

hinderung der Verformungen  $v(x,\varphi)$  und  $w(x,\varphi)$  im Bodenbereich. Eine entsprechende Idealisierung wurde auch von Krupka durchgeführt und Vergleichsberechnungen auf Grundlage der FE-Methode haben gezeigt, dass diese Vereinfachung zulässig ist, wenn das dehnstarre Schott bei Klöpperböden nach [5] bei  $2/3$  der Bodentiefe angesetzt wird. Unter Ausnutzung der Symmetriebedingungen wird der Behälter dann in drei Abschnitte aufgeteilt:



**Abb. 6.2:** Aufteilung des Behälters in drei Bereiche

mit

$$L_1 = \frac{2}{3}H + A - \frac{b}{2}$$

$$L_2 = b$$

$$L_3 = \frac{L}{2} - A - \frac{b}{2}$$

Gl. 6.1

Die Belastung infolge einer Flüssigkeitsfüllung wirkt in radialer Richtung und wird im Fall der Vollfüllung über

$$q_F = \gamma_F \cdot R \cdot (1 + \cos \varphi) \quad \text{Gl. 6.2}$$

beschrieben. Die Belastung infolge Eigengewicht wirkt in vertikaler Richtung und müsste für die Anwendung auf die verallgemeinerte technische Biegetheorie in ihre radial und tangential wirkende Anteile aufgeteilt werden. Für die Betrachtung des maßgebenden Falls der Vollfüllung kann das Eigengewicht auch über den hydrostatischen Druck der Flüssigkeit mit berücksichtigt werden, indem eine zum Gesamtgewicht äquivalente spezifische Flüssigkeitswichte angesetzt wird. Dieser, die Berechnung vereinfachender Schritt ist möglich, da der Lastfall Eigengewicht stereostatisch äquivalent zum Lastfall Vollfüllung durch eine Flüssigkeit ist. Die äquivalente Flüssigkeitswichte ist dann:

$$\gamma_{\text{äF}} = \frac{Q_{\text{Fl}} + Q_{\text{EG}}}{\pi \cdot R^2 \cdot (L_1 + L_2 + L_3)} \quad \text{Gl. 6.3}$$

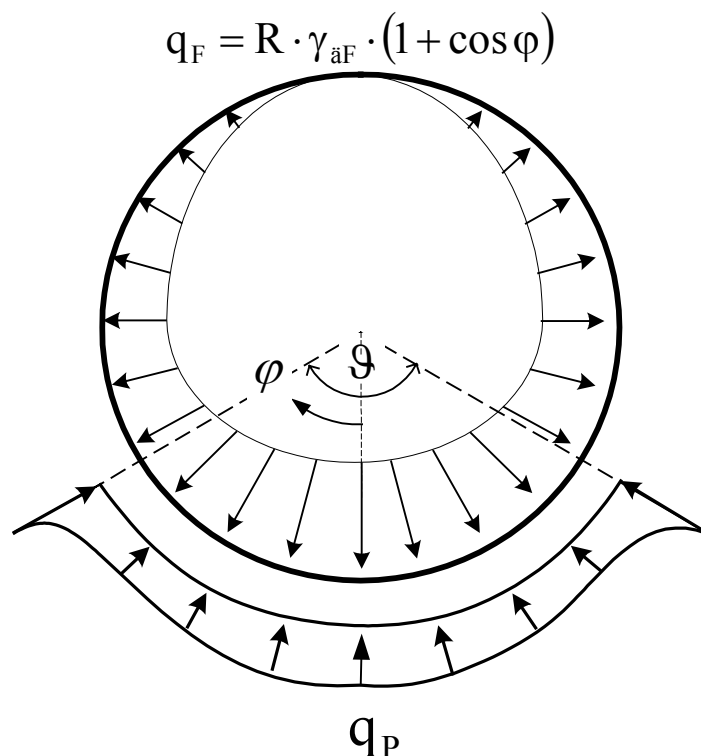
mit  $Q_{\text{Fl}}$  als resultierendes Gewicht der Flüssigkeit und  $Q_{\text{EG}}$  als resultierendes Eigengewicht jeweils pro Sattel.

### 6.3 Pressungsansatz zu Beginn der Berechnung

Die geometrischen Randbedingungen im Bereich des Sattels werden zunächst nicht berücksichtigt und dafür eine am Anfang beliebige Sattelpressung auf den Behälter als äußere Belastung  $q_P$  angesetzt. Die Verteilung der Reaktionskräfte in Längsrichtung wird als konstant angenommen und die Verteilung in Umfangsrichtung kann unter Beachtung der Symmetrie als beliebig angenommen werden. Die einzige Bedingung die erfüllt sein muss ist, dass die resultierende Kraft in vertikaler und horizontaler Richtung mit der resultierenden Kraft infolge Eigengewicht und Wasserfüllung im Gleichgewicht steht.. Durch einen gegenüber der vertikalen Achse symmetrischen Ansatz wird das Gleichgewicht in horizontaler Richtung gewährleistet. Für das Gleichgewicht in vertikaler Richtung muss daher folgende Bedingung erfüllt werden:

$$2 \cdot \int_0^{\vartheta_0/2} q_P \cdot \cos \varphi \cdot b \cdot R \cdot d\varphi = Q \quad \text{mit } Q = Q_{\text{EG}} + Q_{\text{Fl}} \quad \text{Gl. 6.4}$$

Die auf den Behälter einwirkenden äußeren Lasten können damit entsprechend Abb. 6.3 angesetzt werden.



**Abb. 6.3:** Belastungsbild des Behälters

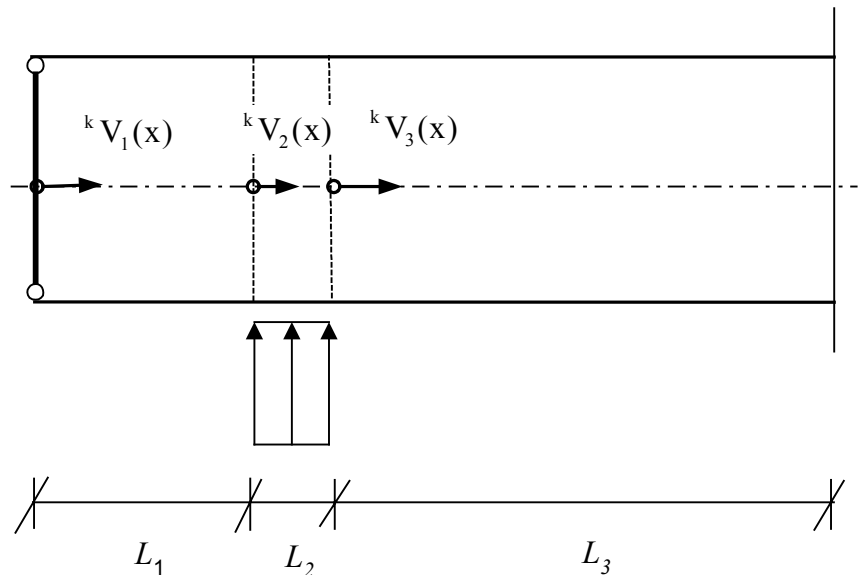
Der Fehler, dass das Gewicht des Bodens über die Gesamtlänge verschmiert angesetzt wird, kann in der Regel vernachlässigt werden, da das Eigengewicht des Bodens im Verhältnis zu den übrigen Lasten sehr klein ist.

## 6.4 Lösungsansätze für die Differentialgleichung der VTB

Zur Berechnung des Schubflusses nach der verallgemeinerten technischen Biegetheorie muss für jeden Bereich nach Gl. 2.68 eine Reihe von entkoppelten Differentialgleichungen 4. Ordnung gelöst werden. Aufgrund des Lastansatzes nach Abb. 6.3 tritt nur eine Belastung in radialer Richtung auf und die zu lösenden Differentialgleichungen haben nach Gl. 2.68 die Form:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( E^k C \cdot \frac{\partial^{4k} V(x)}{\partial x^4} - G^k D \cdot \frac{\partial^{2k} V(x)}{\partial x^2} + {}^k B \cdot V(x) = {}^k q_z \right) \quad \text{Gl. 6.5}$$

Die Funktion  ${}^kV(x)$  in Gl. 6.5 ist die, zu einer bestimmten Einheitsverwölbung zugeordnete, Verformungsfunktion. Im Fall der Kreiszylinderschale sind die Einheitsverwölbungen die Kreisfunktionen  $R \cdot \cos k\varphi$  und  $R \cdot \sin k\varphi$ , wobei in diesem Fall aufgrund der Symmetrie in Umfangsrichtung nur die Kosinus-Terme berücksichtigt werden müssen. Für die in Abb. 6.2 festgelegten drei Bereiche müssen drei Verformungsfunktionen bestimmt werden deren Verlauf entlang des Behälters in der folgenden Abb. 6.4 festgelegt wird.



**Abb. 6.4:** Verformungsfunktionen über die Behälterlänge

Nach Kapitel 2.5.3.5 ergeben sich dann für die Reihenglieder in Gl. 6.5, welche den Einheitsverwölbung  $u = \cos k\varphi$  zugeordnet sind, die folgenden Lösungsansätze mit

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{\frac{{}^k B}{4 \cdot E^k C} + \frac{G^k D}{4 \cdot E^k C}}} \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{\sqrt{\frac{{}^k B}{4 \cdot E^k C} - \frac{G^k D}{4 \cdot E^k C}}}$$

für Bereich 1 mit  $0 \leq x \leq L_1$ :

$${}^1V_1(x) = \frac{{}^1q_1}{24 \cdot E^1 C} \cdot x^4 + C_1 \cdot x^3 + C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x + C_4$$

$${}^kV_1(x) = e^{\alpha \cdot x} \cdot (C_1 \cdot \cos(\beta \cdot x) + C_2 \cdot \sin(\beta \cdot x)) + e^{-\alpha \cdot x} \cdot (C_3 \cdot \cos(\beta \cdot x) + C_4 \cdot \sin(\beta \cdot x)) + \frac{{}^kq_1}{{}^k B}$$

mit  ${}^kq_1 = -\oint \gamma_{aF} \cdot R \cdot (1 + \cos \varphi) \cdot k^2 \cdot R \cdot \cos k\varphi \cdot d\varphi$

für Bereich 2 mit  $0 \leq x \leq L_2$  :

$${}^1V_2(x) = \frac{{}^1q_2}{24 \cdot E^1 C} \cdot x^4 + C_5 \cdot x^3 + C_6 \cdot x^2 + C_7 \cdot x + C_8$$

$${}^kV_2(x) = e^{\alpha \cdot x} \cdot (C_5 \cdot \cos(\beta \cdot x) + C_6 \cdot \sin(\beta \cdot x)) + e^{-\alpha \cdot x} \cdot (C_7 \cdot \cos(\beta \cdot x) + C_8 \cdot \sin(\beta \cdot x)) + \frac{{}^kq_2}{{}^k B}$$

$$\text{mit } {}^kq_2 = -\oint (\gamma_{\text{aF}} \cdot R \cdot (1 + \cos \varphi) + q_p) \cdot k^2 \cdot R \cdot \cos k\varphi \cdot d\varphi$$

für Bereich 3 mit  $0 \leq x \leq L_3$  :

$${}^1V_3(x) = \frac{{}^1q_3}{24 \cdot E^1 C} \cdot x^4 + C_9 \cdot x^3 + C_{10} \cdot x^2 + C_{11} \cdot x + C_{12}$$

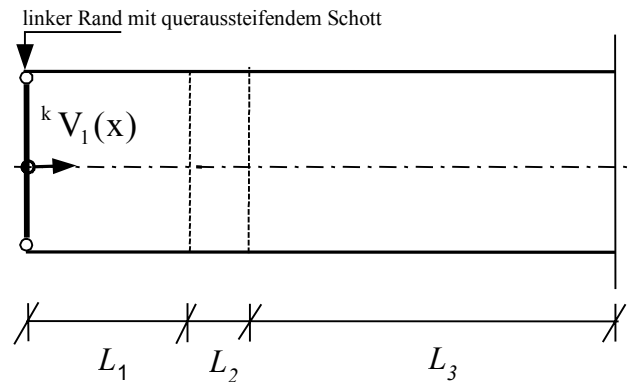
$${}^kV_3(x) = e^{\alpha \cdot x} \cdot (C_9 \cdot \cos(\beta \cdot x) + C_{10} \cdot \sin(\beta \cdot x)) + e^{-\alpha \cdot x} \cdot (C_{11} \cdot \cos(\beta \cdot x) + C_{12} \cdot \sin(\beta \cdot x)) + \frac{{}^kq_3}{{}^k B}$$

$$\text{mit } {}^kq_3 = -\oint \gamma_{\text{aF}} \cdot R \cdot (1 + \cos \varphi) \cdot k^2 \cdot R \cdot \cos k\varphi \cdot d\varphi$$

## 6.5 Rand- und Übergangsbedingungen

In den Lösungsansätzen in Kapitel 6.3.1 treten insgesamt die 12 unbekanntenen Konstanten  $C_1$  bis  $C_{12}$  auf, die aus Rand- und Übergangsbedingungen bestimmt werden müssen. Entscheidend für die Lösung ist dabei, dass die Rand- und Übergangsbedingungen sich unabhängig von der Art der Einheitsverwölbung formulieren lassen. Im Fall der sattelgelagerten Kreiszylinderschale ist dies möglich, unter der Annahme, dass der Boden ein aussteifendes Schott darstellt.

Der Boden behindert eine Verschiebung in radialer und tangentialer Richtung. Bei Betrachtung des Bodens als ein dehnstarres queraussteifendes Schott werden diese Verschiebungen ganz verhindert, so dass am linken Rand in Abb. 6.5 die Verschiebungen null sein müssen.



**Abb. 6.5:** Linker Rand mit queraussteifendem Schott

Nach Gl. 2.52 bestimmen sich die Verschiebungen in radialer und tangentialer Richtung zu:

$$v(x, \varphi) = -\frac{1}{R} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} {}^k V(x) \cdot \frac{\partial^k u(\varphi)}{\partial \varphi} \quad \text{Gl. 6.6 (a,b)}$$

$$w(x, \varphi) = \frac{1}{R} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} {}^k V(x) \cdot \frac{\partial^{2k} u(\varphi)}{\partial \varphi^2}.$$

Da in der Differentialgleichung Gl. 6.5 nur noch die Verformungsfunktion auftritt, ist die Bedingung, dass die Verformungen in Gl. 6.6 am linken Rand null sein müssen, erfüllt, wenn die Verformungsfunktion an der entsprechenden Stelle zu null wird

$${}^k V_1(0) = 0 \quad \text{Gl. 6.7}$$

Am linken Rand kann ebenfalls durch die Betrachtung des Bodens als ein dehnstarres und gelenkig angeschlossenes Schott, am Rand in der Kreiszyinderschale keine Normalspannung  $\sigma_{xx}$  auftreten, womit die Schnittgrößen  $M_x$  und  $N_x$  ebenfalls null sein müssen. Die Schnittgrößen über die Verformungsfunktion und die Einheitsverwölbung ausgedrückt sind nach Gl. 2.79:

$$N_x = E \cdot t \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^{2k} V(x)}{\partial x^2} \cdot {}^k u(\varphi) \quad \text{Gl. 6.8}$$

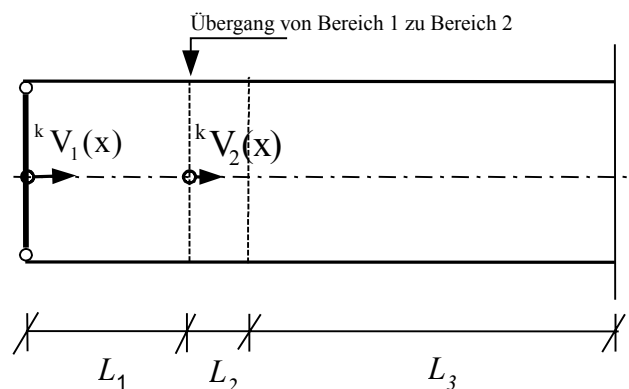
und

$$M_x = \frac{K}{R} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \left( \frac{\partial^{2k} V(x)}{\partial x^2} + \frac{v}{R} \cdot (1-k^2)^k V(x) \right) \cdot {}^k u(\varphi). \quad \text{Gl. 6.9}$$

Da die Verformungsfunktion über die erste Randbedingung in Gl. 6.7 schon zu null gesetzt wurde, ergibt sich die zweite Randbedingung zu:

$$\frac{\partial^{2k} V_1(0)}{\partial x^2} = 0. \quad \text{Gl. 6.10}$$

Im Übergang von Bereich 1 zu Bereich 2 in Abb. 6.6 lassen sich zunächst geometrische Übergangsbedingungen hinsichtlich der Verschiebungen und deren Ableitungen bestimmen.



**Abb. 6.6:** Übergang von Bereich 1 zu Bereich 2

Aus der Forderung, dass im Übergang kein Sprung oder Knick bei den Verschiebungen in radialer und tangentialer Richtung auftreten können, ergeben sich unter Berücksichtigung von Gl. 6.6 die Bedingungen:

$${}^k V_1(L_1) = {}^k V_2(0) \quad \text{Gl. 6.11}$$

$$\frac{\partial {}^k V_1(L_1)}{\partial x} = \frac{\partial {}^k V_2(0)}{\partial x} \quad \text{Gl. 6.12}$$

Mit der zweiten Bedingung ist auch die Kontinuität der Verschiebungen in Längsrichtung im Übergang gewährleistet. Die Stetigkeit der ersten Ableitung der Verschiebungen in Längsrichtung wird mit Gl. 2.52 durch die Bedingung

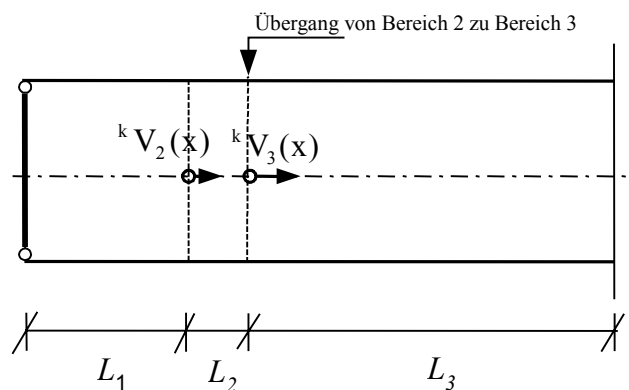
$$\frac{\partial^{2k} V_1(L_1)}{\partial x^2} = \frac{\partial^{2k} V_2(0)}{\partial x^2} \quad \text{Gl. 6.13}$$

erreicht. Mit diesen Bedingungen sind auch gleichzeitig die Forderungen nach der Stetigkeit im Verlauf der Schnittgrößen  $N_x$ ,  $M_x$ ,  $M_\varphi$ ,  $M_{x\varphi}$  und  $Q_\varphi$  erfüllt. Mit Gl. 2.79 wird durch die Bedingung

$$\frac{\partial^{3k} V_1(L_1)}{\partial x^3} = \frac{\partial^{3k} V_2(L_1)}{\partial x^3} \quad \text{Gl. 6.14}$$

die Forderung nach der Stetigkeit im Verlauf der Schnittgrößen  $Q_x$  und  $N_{x\varphi}$  erfüllt. Lediglich die Stetigkeit der Normalkräfte über die Umfangsrichtung  $N_\varphi$  kann nicht erfüllt werden. Dies ist auch über, die der verallgemeinerten technischen Biegetheorie zu Grunde liegenden Annahme zu erklären, dass die Dehnungen der Schalenmittelfläche in Umfangsrichtung zu null gesetzt werden. Durch diese Annahme ist kein Zusammenhang zwischen der Verformung der Schalenmittelfläche und der Normalkraft  $N_\varphi$  gegeben und es kann bei entsprechender Belastung zu Sprüngen im Normalkraftverlauf kommen. Auf daraus folgende Problematiken bei der Beurteilung der Ergebnisse wird in Kapitel 6.4 eingegangen.

Im Übergang von Bereich 2 zu Bereich 3 in Abb. 6.7 ergeben sich analog folgende Übergangsbedingungen:



**Abb. 6.7:** Übergang von Bereich 2 zu Bereich 3

$${}^k V_2(L_2) = {}^k V_3(0)$$

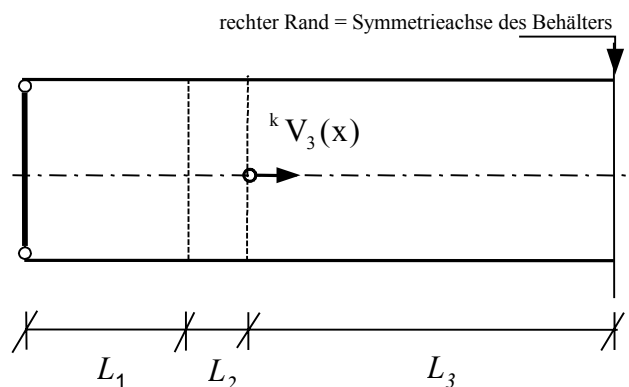
$$\frac{\partial {}^k V_2(L_2)}{\partial x} = \frac{\partial {}^k V_3(0)}{\partial x}$$

Gl. 6.15 (a-d)

$$\frac{\partial^2 {}^k V_2(L_2)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 {}^k V_3(0)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^3 {}^k V_2(L_2)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 {}^k V_3(0)}{\partial x^3}$$

In der Symmetrieachse des Systems in Abb. 6.8 müssen die Verschiebung in Längsrichtung und die Ableitungen der Radial- und Tangentialverschiebungen zu null werden.



**Abb. 6.8:** Rechter Rand mit Symmetrieachse des Behälters

Diese Bedingung wird aus Gl. 2.52 über

$$\frac{\partial {}^k V_3(L_3)}{\partial x} = 0 \quad \text{Gl. 6.16}$$

erfüllt. Als letzte Randbedingung ergibt sich ebenfalls aus Symmetrieüberlegungen, dass die Querkraft  $Q_x$  in der Symmetrieachse zu null gesetzt werden muss, womit sich die letzte Randbedingung aus Gl. 2.79 ergibt zu :

$$\frac{\partial^3 {}^k V_3(L_3)}{\partial x^3} = 0 \quad \text{Gl. 6.17}$$

Die aufgestellten Randbedingungen entstanden aus Überlegungen zur Geometrie der verformten Kreiszylinderschale und den Schnittgrößenverläufen nach der Schalentheorie. Da die Differentialgleichung nach der verallgemeinerten technischen Biegetheorie analog zu der des elastisch gebetteten Balkens ist, können die Randbedingungen auch durch Überlegungen an einem solchen Balken bestimmt werden. Der Boden muss dazu als ein vertikales Auflager betrachtet werden und die Symmetrieachse als eine eingespannte vertikale Führung. In Abb. 6.9 ist dazu das zu einem Behälter äquivalente statische System eines elastisch gebetteten Balkens dargestellt.

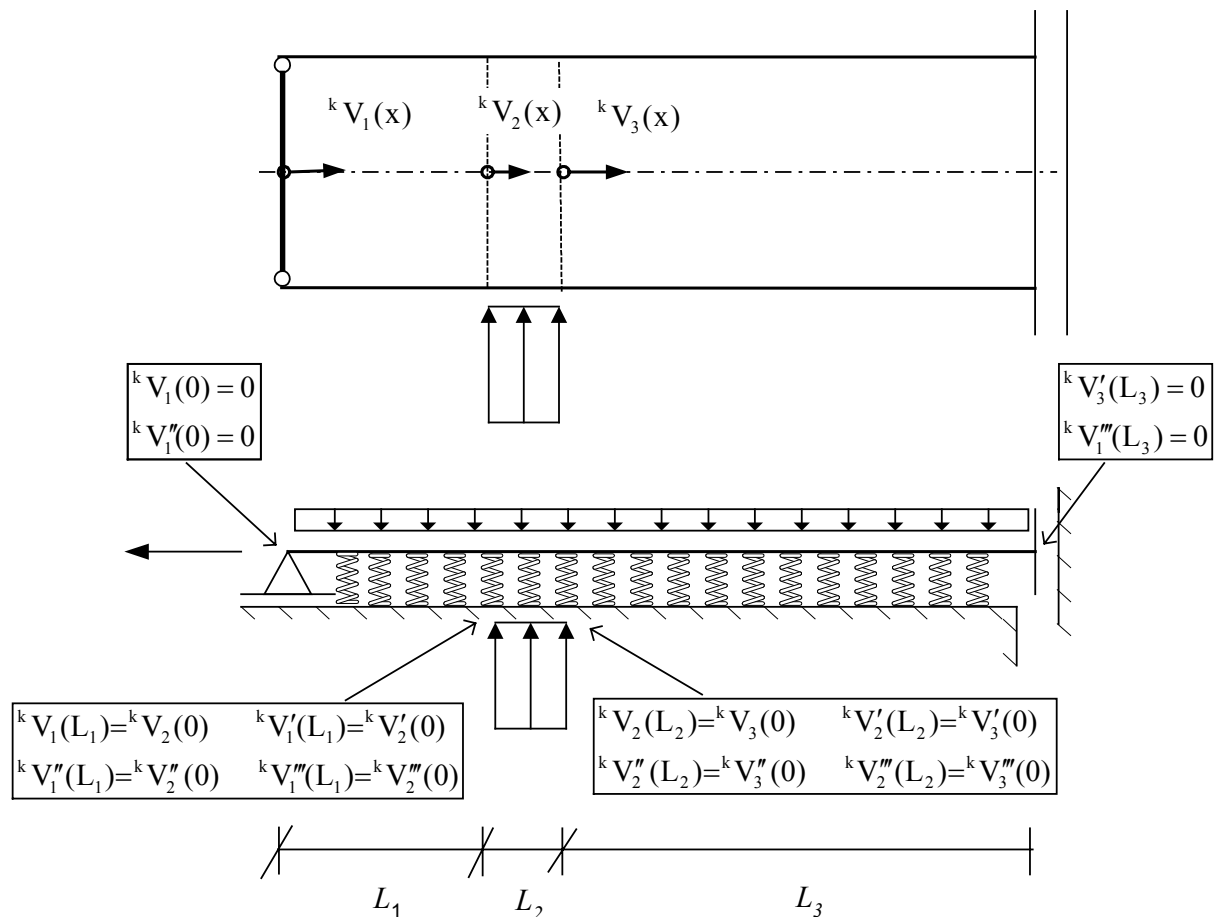
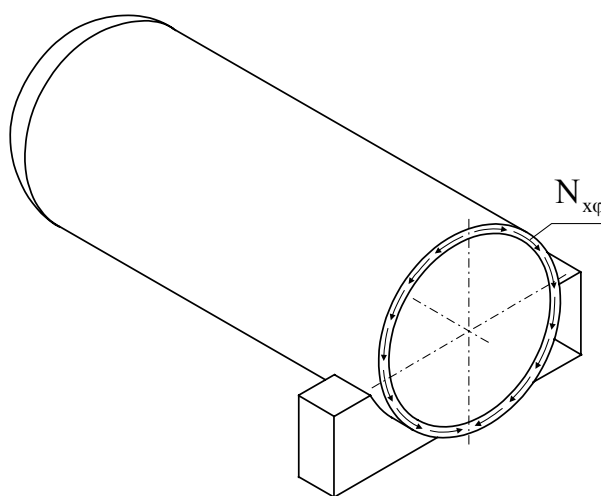


Abb. 6.9 : Äquivalentes Ersatzsystem zur Bestimmung der Randbedingungen

## 6.6 Schubfluss in der Kreiszylinderschale nach der VTB

Nach Lösen der Differentialgleichungen in Gl. 6.5 können alle Verformungen und Schnittgrößen über die Verformungsfunktionen und die Einheitsverwölbungen bestimmt werden. Durch die Auflagerpressungen im Bereich des Sattels wird der Membranspannungszustand in der Kreiszylinderschale gestört und es treten Biegemomente auf. Die Größe dieser Momente ist direkt abhängig von der Verteilung der Auflagerpressungen, welche wiederum abhängig ist von den kinematischen Randbedingungen durch den Sattel und der Steifigkeit des Behälters. Da in der verallgemeinerten technischen Biegetheorie nur kinematische Randbedingungen berücksichtigt werden können, die für den gesamten Kreisquerschnitt gelten, hängt die Genauigkeit der Ergebnisse von der angesetzten Auflagerpressung ab. Im Rahmen dieses Lösungsverfahrens soll deshalb die Lösung des Schalenproblems mit Hilfe der verallgemeinerten technischen Biegetheorie nur zur Erfassung des Tragverhaltens seitlich des Sattels dienen.

Der Einfluss der Sattellagerung auf die Schnittgrößen in Umfangsrichtung wird im folgenden Berechnungsschritt durch Betrachtung des Behälters über dem Sattel als elastisch gebetteter Kreisring erfasst. Als Belastung des Kreisrings wird neben dem hydrostatischen Druck der Flüssigkeit im Ring, der Schubfluss in der Schalenmittelfläche aus der verallgemeinerten technischen Biegetheorie angesetzt. Um das Tragverhalten seitlich des Sattels zu erfassen reicht die ausschließliche Betrachtung des Schubflusses aus, da infolge einer lokalen Lasteinleitung auf eine Schale die Querkräfte sehr schnell abklingen und die Drillsteifigkeit keinen wesentlichen Einfluss hat.



**Abb. 6.10:** Schubfluss in der Kreiszyklinderschale

Der Schubfluss in der Schalenmittelfläche nach der verallgemeinerten technischen Biegetheorie kann über Gl. 2.79 berechnet werden. Da für den hier vorliegenden Fall nur die Einheitsverwölbungen mit den Kosinus-Termen berücksichtigt werden müssen, kann Gl. 2.79 in folgender Form angegeben werden:

$$N_{x\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{E \cdot t \cdot R}{k^2} \cdot \frac{\partial^3 V(x)}{\partial x^3} \right) \cdot k \cdot R \cdot \sin k\varphi \quad \text{Gl. 6.18}$$

Das erste Reihenglied in Gl. 6.18 entspricht dabei dem Schubfluss nach der Balkentheorie für dünnwandige Rohrquerschnitte. Damit ist auch gewährleistet, dass die vertikale Last seitlich des Sattels vollständig berücksichtigt wird. Die weiteren Glieder ergeben sich aus der Störung des Membranzustandes. Hinsichtlich des Ortes an dem der Schubfluss bestimmt wird, sind Überlegungen hinsichtlich des Berechnungsaufwandes und hinsichtlich der Berechnungsgenauigkeit erforderlich. Je geringer der Abstand vom Sattelrand gewählt wird, um so realistischer ist im folgenden Berechnungsschritt die isolierte Betrachtung des Behälterabschnitts im

Sattelbereich als elastisch gebetteter Kreisring. Grundsätzlich muss bei der Berechnung des Schubflusses direkt am Sattelrand, gegenüber einer Berechnung in einer gewissen Entfernung vom Sattelrand, eine höhere Anzahl von Einheitsverwölbungen berücksichtigt werden. Eine zusätzliche Problematik entsteht am Sattelrand durch die Annahme, dass die Umfangsdehnungen in der Schalenmittelfläche zu null gesetzt werden. Diese Annahme hat zu Folge, dass im Sattelbereich die Auflagerpressung in erster Linie in Umfangsrichtung in die Schale eingeleitet wird. Dies macht sich in der Lösung durch eine Konzentration der Normalkräfte in Umfangsrichtung auf den Behälterbereich über dem Sattel bemerkbar. Ein Mitwirken des Behälters seitlich des Sattels wird nicht berücksichtigt, was auch deutlich am Sprung im Normalkraftverlauf in Längsrichtung beim vergleichbaren Fall in Kapitel 2 Abbildung 2.22 zu erkennen ist.

Diese nicht der Realität entsprechende Konzentration macht sich auch im Schubfluss direkt am Sattel bemerkbar und würde bei einer Belastung des elastisch gebetteten Kreisrings zu hohe Schnittgrößen in Umfangsrichtung hervorrufen. Um diesen Fehler in der verallgemeinerten technischen Biegetheorie auszugleichen, muss der Schubfluss in einem bestimmten Abstand vom Sattelrand betrachtet werden. Dieser Abstand muss möglichst klein sein, um das Ergebnis der Berechnung am elastisch gebetteten Kreisrings nicht zu verfälschen, aber auch ausreichend groß, damit die Störung infolge der Unstetigkeit im Normalkraftverlauf abgeklungen ist. Vergleichsberechnungen haben gezeigt, dass der Abstand in erster Linie abhängig ist vom Radius der Schale und der Art der Lagerung. Für den Fall der starren Lagerung wird entsprechend Abb. 6.11 als Abstand

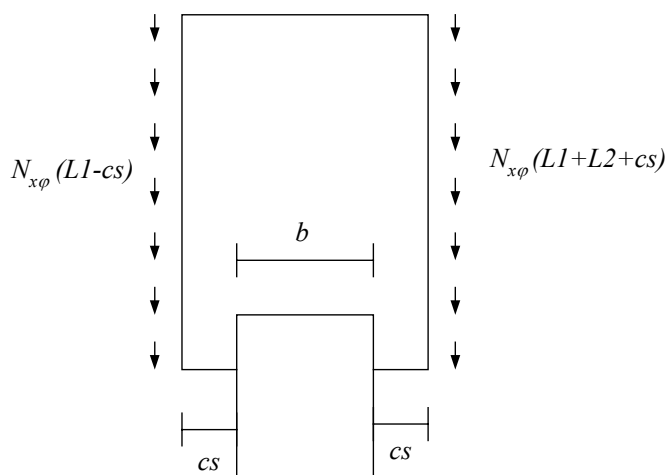
$$cs_{\text{starr}} = \frac{4}{100} \cdot R \quad \text{Gl. 6.19}$$

und für den Fall einer weichen Lagerung

$$cs_{\text{weich}} = \frac{3}{100} \cdot R \quad \text{Gl. 6.20}$$

angesetzt. Der resultierende Schubfluss bei Betrachtung der beiden Sattelränder bestimmt sich unter Berücksichtigung der Vorzeichenregeln nach Gl. 6.18 zu:

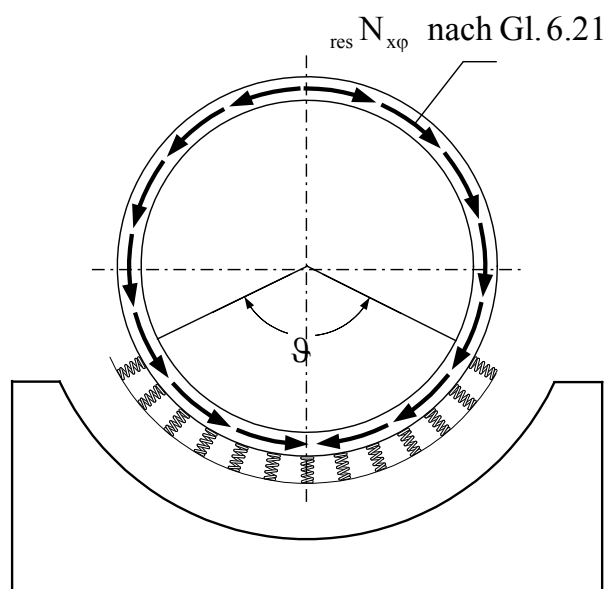
$$N_{x\varphi}^{\text{res}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{E \cdot t \cdot R^2}{k^2} \cdot \left( \frac{\partial^{3k} V_1(L_1 - cs)}{\partial x^3} - \frac{\partial^{3k} V_3(cs)}{\partial x^3} \right) \right) \cdot k \cdot \sin k\varphi \quad \text{Gl. 6.21}$$



**Abb. 6.11:** Orte zur Bestimmung des Schubflusses in der Behälterschale

### 6.7 Berechnung am elastisch gebetteten Kreisring

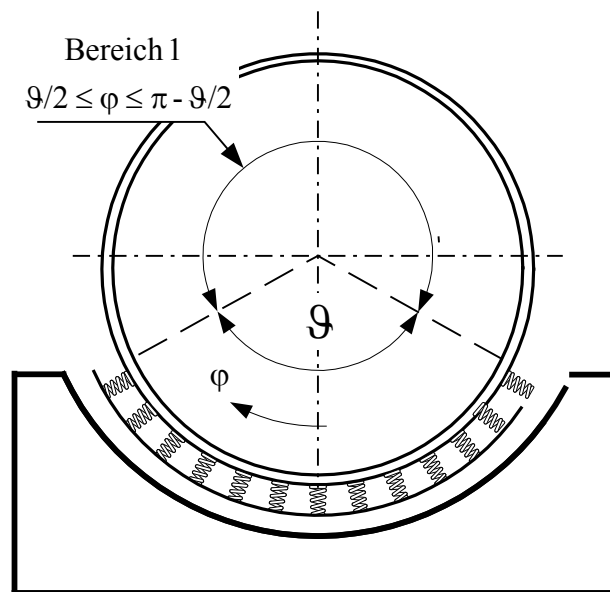
Der aus der vorangegangenen Berechnung resultierende Schubfluss in Gl. 6.21 wird im zweiten Berechnungsschritt als äußere Belastung auf einen elastisch gebetteten Kreisring angesetzt. Die Geometrie des Kreisrings entspricht dabei der tatsächlichen Geometrie des Behälters zwischen den Schnitten, die durch Gl. 6.19 beziehungsweise durch Gl. 6.20 festgelegt werden.



**Abb. 6.12:** Elastisch gebetteter Kreisring mit Schubfluss

Da die elastische Bettung nur im Bereich des Sattels berücksichtigt werden soll, erfolgt die Lösung über zwei Bereiche.

Für den ersten Bereich oberhalb des Sattels wird die Differentialgleichung Gl. 3.10 für den einfachen Kreisring nach Kapitel 3.1 angesetzt.



**Abb. 6.13:** 1. Bereich des elastisch gebetteten Kreisrings

$$\frac{\partial^4 w_1(\varphi)}{\partial \varphi^4} + 2 \cdot \frac{\partial^2 w_1(\varphi)}{\partial \varphi^2} + w_1(\varphi) = \frac{R^4}{EI} \cdot \left( C + q(\varphi) + \int n(\varphi) d\varphi \right) \quad \text{Gl. 6.22}$$

Die Belastung  $q(\varphi)$  ist dabei der hydrostatische Druck der verbleibenden Flüssigkeit innerhalb des verbleibenden Kreisrings.

$$q(\varphi) = \gamma_{\text{fl}} \cdot R \cdot b \cdot (1 + \cos \varphi) \quad \text{Gl. 6.23}$$

Die Belastung  $n(\varphi)$  ist der Schubfluss nach Gl. 6.21 aus der Berechnung nach der verallgemeinerten technischen Biegetheorie.

$$n(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{E \cdot t \cdot R^2}{k^2} \cdot \left( \frac{\partial^{3k} V_1(L_1 - cs)}{\partial x^3} - \frac{\partial^{3k} V_3(cs)}{\partial x^3} \right) \right) \cdot k \cdot \sin k\varphi \quad \text{Gl. 6.24}$$

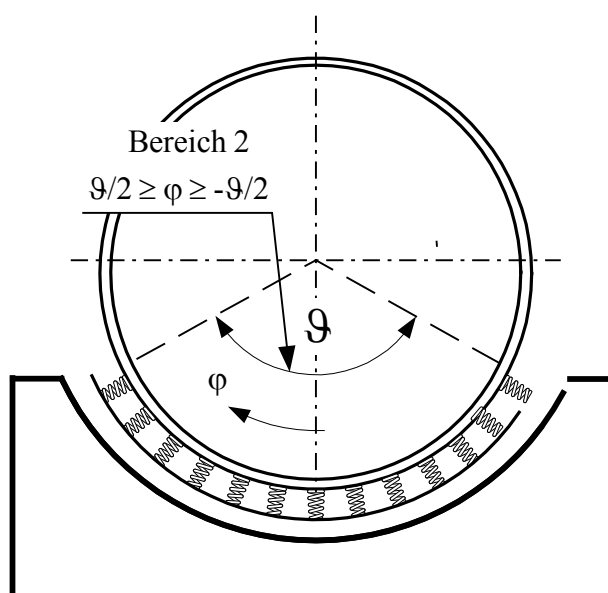
Für die weitere Berechnung muss dieser integriert werden und ergibt sich dann zu

$$\int n(\varphi) d\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{E \cdot t \cdot R^2}{k^2} \cdot \left( \frac{\partial^{3k} V_1(L_1 - cs)}{\partial x^3} - \frac{\partial^{3k} V_3(L_1 + L_2 + cs)}{\partial x^3} \right) \right) \cdot \cos k\varphi \quad \text{Gl. 6.25}$$

Die durch die Integration zu berücksichtigende Integrationskonstante ist dabei schon in der Differentialgleichung 6.22 berücksichtigt. Der Lösungsansatz für den ersten Bereich lautet dann nach Kapitel 3.1 :

$$\begin{aligned} w_1(\varphi) = & C_1 \cdot \cos \varphi + C_2 \cdot \sin \varphi + C_3 \cdot \varphi \cdot \cos \varphi + C_4 \cdot \varphi \cdot \sin \varphi + C_5 \\ & - \frac{R^4}{EI} \cdot \left( E \cdot t \cdot R^2 \cdot \left( \frac{\partial^{3 \cdot 1} V_1(L_1 - cs)}{\partial x^3} - \frac{\partial^{3 \cdot 1} V_3(cs)}{\partial x^3} \right) + \gamma_{aF} \cdot b \cdot R \right) \cdot \frac{1}{8} \cdot \varphi^2 \cdot \cos \varphi \\ & + \frac{R^4}{EI} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} E \cdot t \cdot R^2 \cdot \frac{\left( \frac{\partial^{3k} V_1(L_1 - cs)}{\partial x^3} - \frac{\partial^{3k} V_3(cs)}{\partial x^3} \right) \cdot \cos k\varphi}{k^4 - 2 \cdot k^2 + 1} \end{aligned} \quad \text{Gl. 6.27}$$

Für den zweiten Bereich nach Abb. 6.14, der durch den Sattel begrenzt ist, wird die Differentialgleichung für den elastisch gebetteten Kreisring nach Gl. 3.15 angesetzt:



**Abb. 6.14:** 2. Bereich des elastisch gebetteten Kreisrings

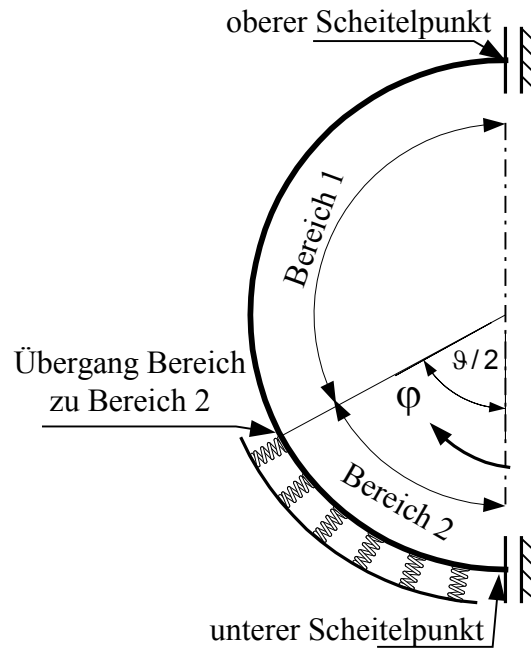
$$\frac{\partial^4 w_2(\varphi)}{\partial \varphi^4} + 2 \cdot \frac{\partial^2 w_2(\varphi)}{\partial \varphi^2} + \left(1 + \frac{B \cdot R^4}{EI}\right) \cdot w_2(\varphi) = \frac{R^4}{EI} \cdot \left( C + q(\varphi) + \int n(\varphi) \right) \quad \text{Gl. 6.28}$$

Die Belastungsterme entsprechen denen des einfachen Kreisrings und nach Kapitel 3.2 ergibt sich folgender Lösungsansatz:

$$w_2(\varphi) = e^{\alpha \cdot \varphi} \cdot (C_6 \cdot \cos \beta \varphi + C_7 \cdot \sin \beta \varphi) + e^{-\alpha \cdot \varphi} \cdot (C_8 \cdot \cos \beta \varphi + C_9 \cdot \sin \beta \varphi) + C_{10} + \frac{R^4}{EI} \cdot \left( \frac{\gamma_{\text{äF}} \cdot b \cdot R \cdot \cos \varphi}{\frac{B \cdot R^4}{EI}} + \sum_{k=1}^{\infty} E \cdot t \cdot R^2 \cdot \frac{\left( \frac{\partial^{3k} V_1(L_1 - cs)}{\partial x^3} - \frac{\partial^{3k} V_3(cs)}{\partial x^3} \right) \cdot \cos k\varphi}{k^4 - 2 \cdot k^2 + 1 + \frac{B \cdot R^4}{EI}} \right) \quad \text{Gl. 6.29}$$

$$\text{mit } \alpha = \sqrt{\sqrt{\frac{EI + B \cdot R^4}{4EI}} - \frac{1}{2}} \quad \text{und } \beta = \sqrt{\sqrt{\frac{EI + B \cdot R^4}{4EI}} + \frac{1}{2}}$$

Zur Bestimmung der noch Unbekannten zehn Konstanten reicht bei entsprechender Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften die Betrachtung des halben Kreisrings nach Abb. 6.15 aus. Berücksichtigt man nur die Verformungen in radialer Richtung  $w(\varphi)$  und die mit ihr nach Gl. 3.1, beziehungsweise für den elastisch gebetteten Kreisring unter Beachtung von Gl. 3.14, zusammenhängenden Schnittgrößen  $N(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$  und  $M(\varphi)$ , können die folgenden Randbedingungen in den Punkten nach Abb. 6.15 aufgestellt werden:



**Abb. 6.15:** Halber elastisch gebetteter Kreisring

Am unteren Scheitelpunkt ( $\varphi = 0$ ):

$$\frac{\partial w_2(0)}{\partial \varphi} = 0 \quad ; \quad Q_2(0) = 0. \quad \text{Gl. 6.30 (a,b)}$$

Im Übergang vom elastisch gebetteten zum einfachen Kreisring ( $\varphi = \vartheta$ ):

$$w_2(\vartheta/2) = w_1(\vartheta/2) \quad ; \quad \frac{\partial w_2(\vartheta/2)}{\partial \varphi} = \frac{\partial w_1(\vartheta/2)}{\partial \varphi} \quad \text{Gl. 6.31 (a-e)}$$

$$M_1(\vartheta/2) = M_2(\vartheta/2) \quad ; \quad Q_1(\vartheta/2) = Q_2(\vartheta/2) \quad ; \quad N_1(\vartheta/2) = N_2(\vartheta/2)$$

Am oberen Scheitelpunkt ( $\varphi = \pi$ ):

$$\frac{\partial w_1(\pi)}{\partial \varphi} = 0 \quad ; \quad Q_1(\pi) = 0. \quad \text{Gl. 6.32 (a,b)}$$

Diese neun Randbedingungen reichen nicht aus, so dass zusätzlich Bedingungen über die Tangentialverformungen berücksichtigt werden müssen. Unter der Annahme, dass die Dehnsteifigkeit gegenüber der Biegesteifigkeit unendlich groß ist, kann die Verschiebungsfunktion in tangentialer Richtung durch Integration der Radialverformungen nach Gl. 3.5 bestimmt werden zu

$$v_1(\varphi) = -\int w_1(\varphi) d\varphi + C_{11}$$

$$v_2(\varphi) = -\int w_2(\varphi) d\varphi + C_{12}$$

Gl. 6.33 (a,b)

Durch die Integration tritt pro Bereich eine zusätzliche Unbekannte auf, aber es lassen sich bezüglich der Tangentialverformungen drei unabhängige Rand- und Übergangsbedingungen formulieren:

$$v_1(0) = 0 \quad v_1(\vartheta/2) = v_2(\vartheta/2) \quad v_2(\pi) = 0 \quad \text{Gl. 6.34 (a-c)}$$

Zur Lösung des im Sattelbereich elastisch gebetteten Kreisrings stehen somit für die 12 Unbekannten Konstanten  $C_1 - C_{12}$  in den Gleichungen Gl.6.27, Gl. 6.29 und Gl. 6.33, mit den Gleichungen Gl. 6.30, Gl. 6.31, Gl. 6.32 und Gl. 6.34 12 Rand- und Übergangsbedingungen zu Verfügung.

## 6.8 Wahl der Bettungsziffer

Die Interaktion zwischen Behälter und Sattel wird in der Berechnung am Kreisring durch die elastische Bettung berücksichtigt. Die Wahl der Bettungszahl hat dabei je nach Problemstellung entscheidenden Einfluss auf die Ergebnisse. Um realistische Ergebnisse zu erzielen, muss in der Bettungszahl nicht nur die Steifigkeit der Sattelkonstruktion berücksichtigt werden, sondern auch das Steifigkeitsverhältnis von Behälter und Sattel. Bettungszahlen für Beton im Bereich von  $1000 \text{ kN/cm}^2$ , wie sie zum Beispiel Schleicher [60] vorschlägt, liefern in der Regel ein zu steifes System. Dies ist vor allem deutlich an dem Verlauf der Sattelpressung erkennbar, wenn unterhalb des Sattelhorns neben hohen Druckspannungen auch signifikante Zugspannungen auftreten. Die exakte Herleitung einer Bettungszahl, welche die realen Steifigkeitsverhältnisse beschreibt, ist nur bedingt möglich. Da bei der elastischen Bettung auch Zugkräfte aufgenommen werden und damit eine Einspannung am Sattelhorn erzeugt werden kann, muss in der Bettungszahl sowohl das Steifigkeitsverhältnis gegenüber einer Verschiebung als auch das Steifigkeitsverhältnis gegenüber einer Verdrehung erfasst werden. Die Steifigkeit der Kreiszylinderschale kann zwar ohne weiteres durch Ansatz einer Einzellast oder eines Einzelmoments mit Hilfe der verallgemeinerten technischen Biegetheorie bestimmt werden, aber durch Variation der Bettungsziffer kann immer nur ein Steifigkeitsverhältnis exakt abgebildet werden. Für den Fall einer losen Lagerung auf einem starren Sattel hat sich auf Grundlage umfangreicher Ver-

gleichsberechnungen gezeigt, dass bei Wahl einer streckenbezogenen Bettungsziffer in Abhängigkeit vom Radius nach der Formel

$$B_{eB} = 3,0 \frac{N}{\text{mm}^3} \cdot R [\text{mm}] \quad \text{Gl. 6.35}$$

ein Mittelwert erzielt wird, der sowohl im Pressungsverlauf als auch im Schnittgrößenverlauf realistische Ergebnisse liefert.

Im Fall einer weichen Lagerung, wie sie in Kapitel 4 beschrieben wurde, kann zunächst die Idealisierung der nichtlinearen Bettung als linear elastische Bettung nach Gl. 4.16

$$B = 0,55 \cdot \ln\left(\frac{E_0 + 1}{d}\right) + 0,963 \quad \left[\text{N}/\text{mm}^3\right] \quad \text{Gl. 6.36}$$

übernommen werden. Die Bettungsziffer nach Gl. 6.36 muss für die Berechnung am elastisch gebetteten Kreisring noch in eine streckenbezogene Bettungsziffer umgerechnet werden, was durch Multiplikation mit der Sattelbreite erfolgt.

## Kapitel 7      Starre Lagerung bei losem Kontakt

### 7.1 Allgemeines

Zur Überprüfung des im vorangegangenen Kapitel vorgestellten Berechnungsverfahrens sollen zunächst Vergleichsberechnungen unter Berücksichtigung einer starren Lagerung bei losem Kontakt vorgestellt werden. Der Vergleich erfolgt dabei zwischen den Ergebnissen einer FE-Berechnung und den Ergebnissen auf Grundlage der verallgemeinerten technischen Biegetheorie mit anschließender Berechnung am elastisch gebetteten Kreisring. Bei der Berechnung auf Grundlage der verallgemeinerten technische Biegetheorie werden zwei Fälle unterschieden. Im ersten Fall wird die Auflagerpressung als noch unbekannt angenommen und es erfolgt eine iterative Berechnung der Auflagerpressungen und damit auch der Schnittgrößen in Umfangsrichtung. Im zweiten Fall wird die Auflagerpressung als bekannt vorausgesetzt und die Berechnung erfolgt ohne Iteration. Der Ansatz für die Auflagerpressungen erfolgt dabei auf Grundlage der Untersuchungen von Chouih [19]. Die Umsetzung der Berechnung erfolgte mit dem Programm Maple.

### 7.2 Iterative Berechnung

Im folgenden Abschnitt werden zunächst die Ergebnisse der iterativen Berechnung für einen Behälter bei Variation des Sattelwinkels dargestellt. Diese werden mit den Ergebnissen einer FE - Berechnung verglichen. Für die Behälterparameter wurden dazu folgende Werte gewählt:

Radius:	1000	mm	Sattelumschließungswinkel:	90/120/150	°
Länge der Zylinderschale:	8000	mm	Sattelbreite:	200	mm
Bodenabstand:	1000	mm	Wichte der Flüssigkeitsfüllung:	$10^{-5}$	N/mm <sup>3</sup>
Blechdicke der Schale:	8	mm			

Zu Beginn der Iteration wurde eine konstante Sattelpressung angesetzt und als Bettungszahl nach Gl. 6.35  $300 \text{ kN/cm}^2$  gewählt. Bei allen folgenden Gegenüberstellungen von Berechnungsergebnissen wird das eigene Berechnungsverfahren mit VTB bezeichnet. Für den Behälter mit einem Sattelumschließungswinkel von  $90^\circ$  ergeben sich folgende Verläufe für die maximalen Spannungen in Umfangsrichtung und die Sattelpressung:

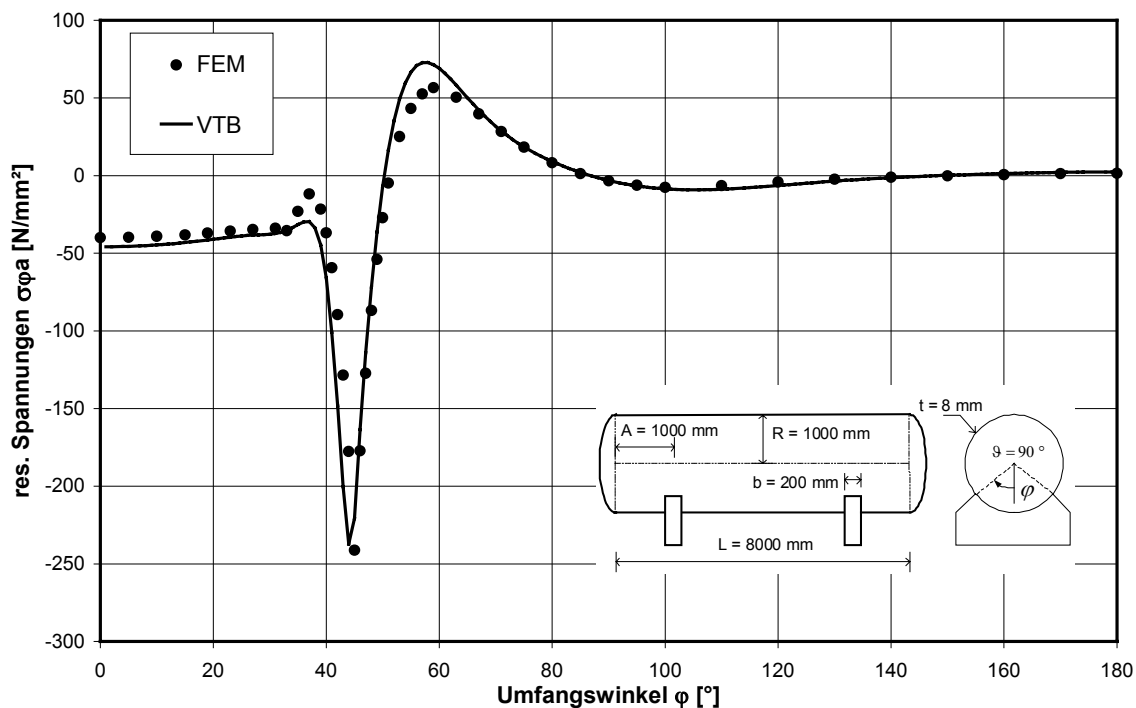


Abb.7.1: Spannungen an der Außenseite für einen Sattelwinkel von  $\vartheta = 90^\circ$

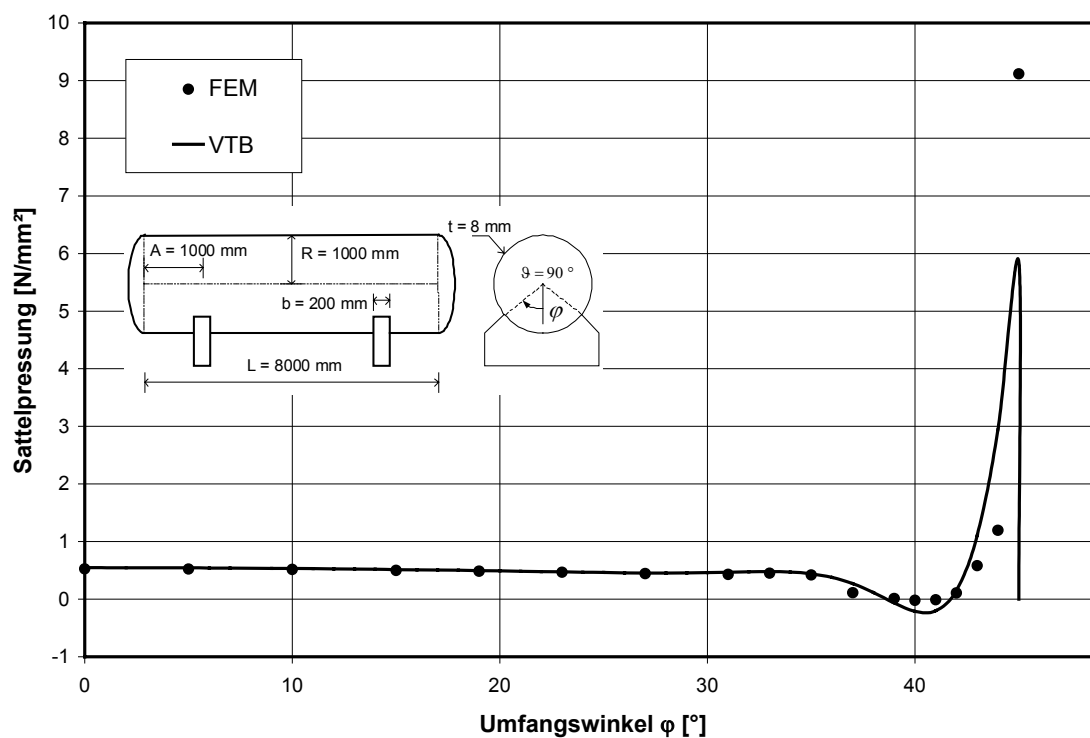


Abb. 7.2: Vergleich der Pressungsverläufe für einen Sattelwinkel von  $\vartheta = 90^\circ$

Die Ergebnisse der Spannungsberechnung nach der FE-Methode und nach dem Verfahren auf Grundlage der VTB zeigen gute Übereinstimmungen. Der qualitative und quantitative Verlauf ist praktisch bei beiden Verfahren identisch. Lediglich vor und nach der Spannungsspitze am Sattelhorn sind Unterschiede in der Spannungsamplitude zu erkennen. Die Sattelpressungen unterscheiden sich, bis auf den Bereich der Pressungsspitze am Sattelhorn, ebenfalls nicht. Am Sattelhorn ist im Verlauf der Sattelpressung nach der FE-Berechnung deutlich das Abheben des Behälters, am Absinken der Pressung bis auf null, zu erkennen. Im Verlauf der Sattelpressung nach dem Verfahren auf Grundlage der VTB, treten in diesem Bereich geringe Zugspannungen auf, da bei der elastischen Bettung die Aufnahme von Zugkräften nicht ausgeschlossen wurde. Um einen Ausfall der Bettung bei Zugbeanspruchung zu berücksichtigen, müsste eine iterative Berechnung am Kreisring durchgeführt werden, womit sich der Berechnungsaufwand erhöhen würde. Solange, wie in diesem Fall, nur geringe Zugspannungen auftreten, kann davon ausgegangen werden, dass diese die Schnittgrößen-verläufe in Umfangsrichtung nicht beeinflussen. Hinsichtlich der maximalen Pressungsordinate treten zwar Unterschiede auf, doch ist auch zu erkennen, dass die Pressung aus der FE-Berechnung stärker abfällt, als nach dem Verfahren nach der VTB. Die resultierende Auflagerkraft am Sattelhorn wird sich daher nach beiden Verfahren nicht unterscheiden. Die gute Übereinstimmung der Verläufe der maximalen Umfangsspannungen bestätigen das.

In den folgenden Abbildungen 7.3 bis 7.6 sind die Ergebnisse für die Sattelumschließungswinkel  $120^\circ$  und  $150^\circ$  dargestellt. Es zeigen sich die selben Übereinstimmungen wie für den Sattelwinkel von  $90^\circ$ .

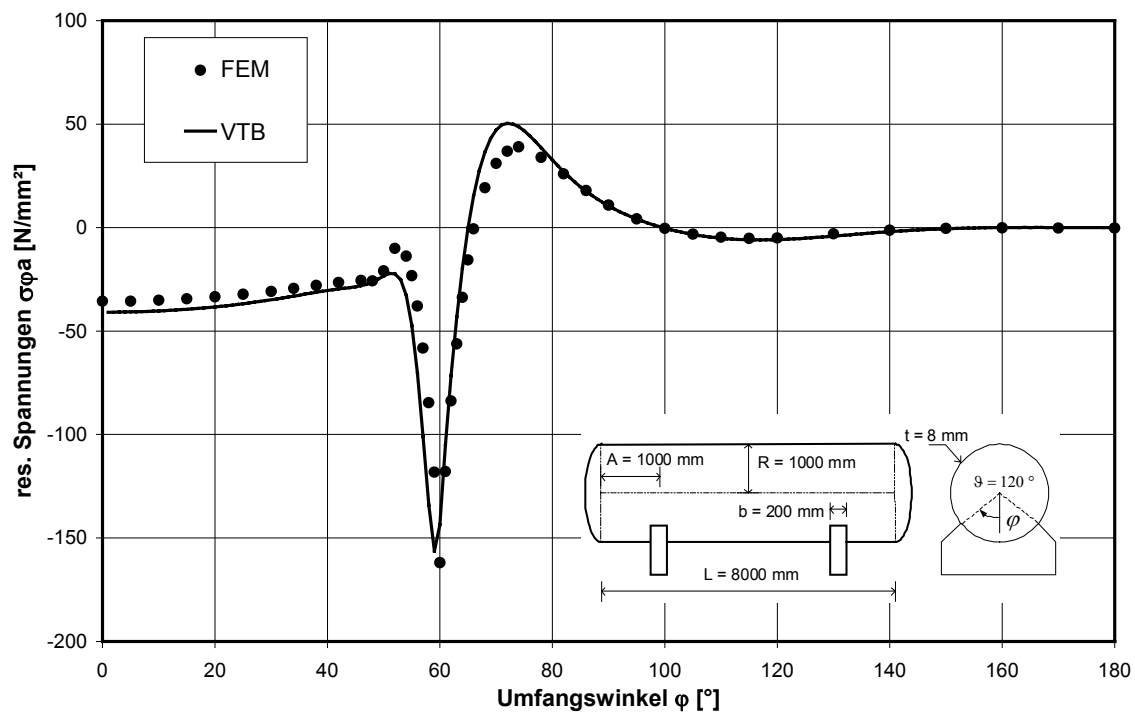


Abb. 7.3: Vergleich der Spannungen an der Außenseite für einen Sattelwinkel von  $\vartheta=120^\circ$

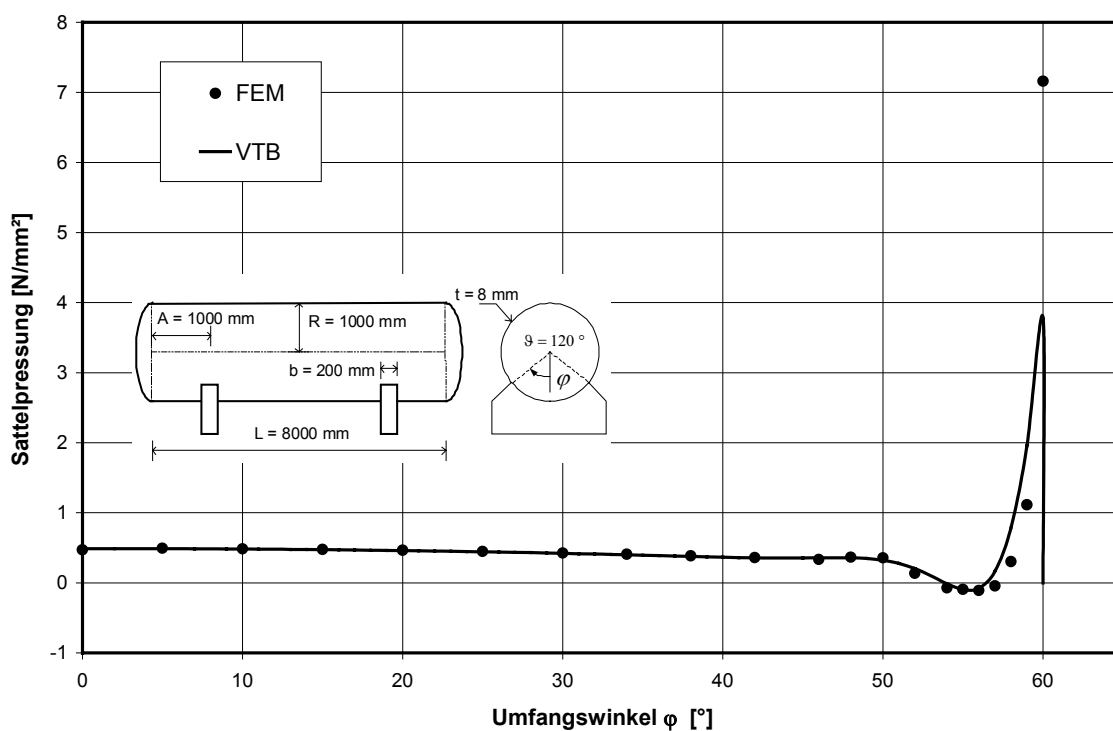


Abb. 7.4: Vergleich der Pressungsverläufe für einen Sattelwinkel von  $\vartheta=120^\circ$

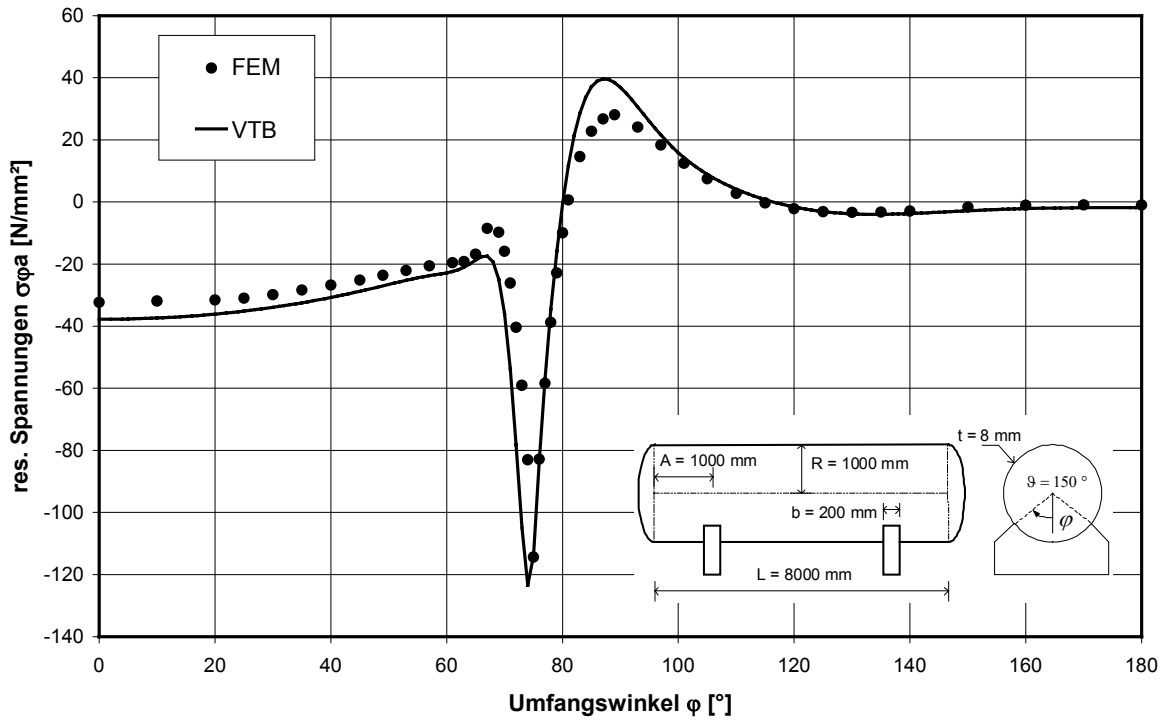


Abb. 7.5: Vergleich der Spannungen an der Außenseite für einen Sattelwinkel von  $\vartheta=150^\circ$

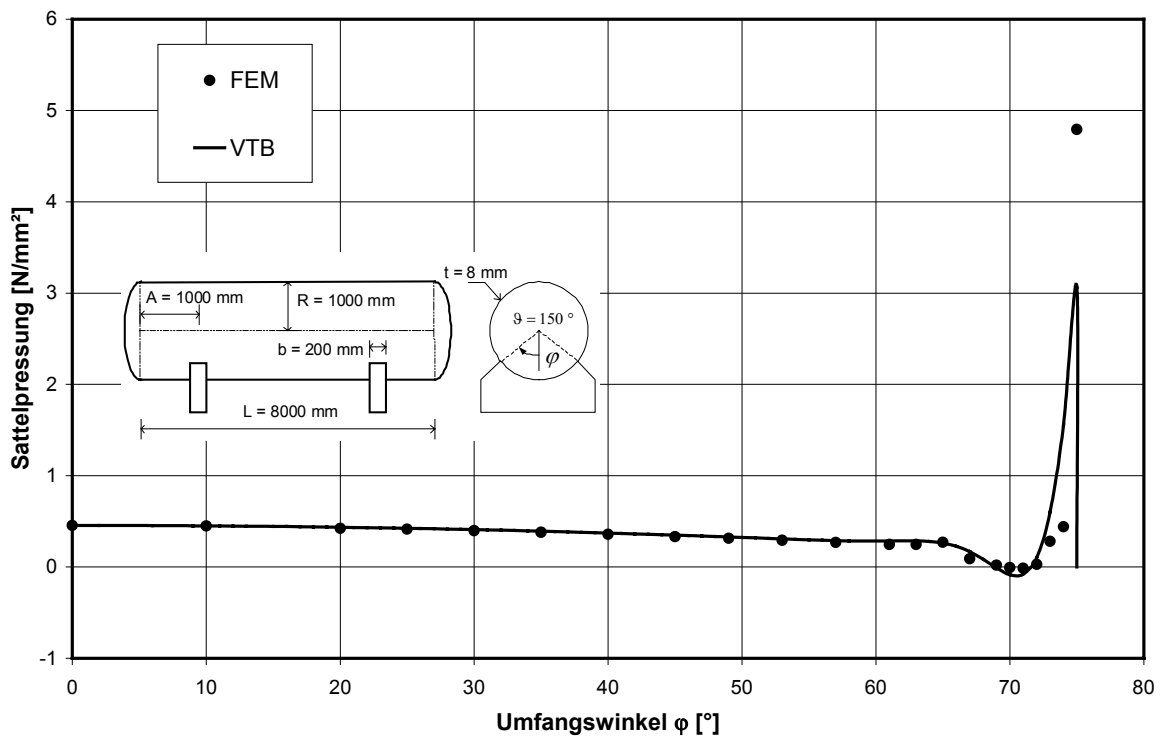
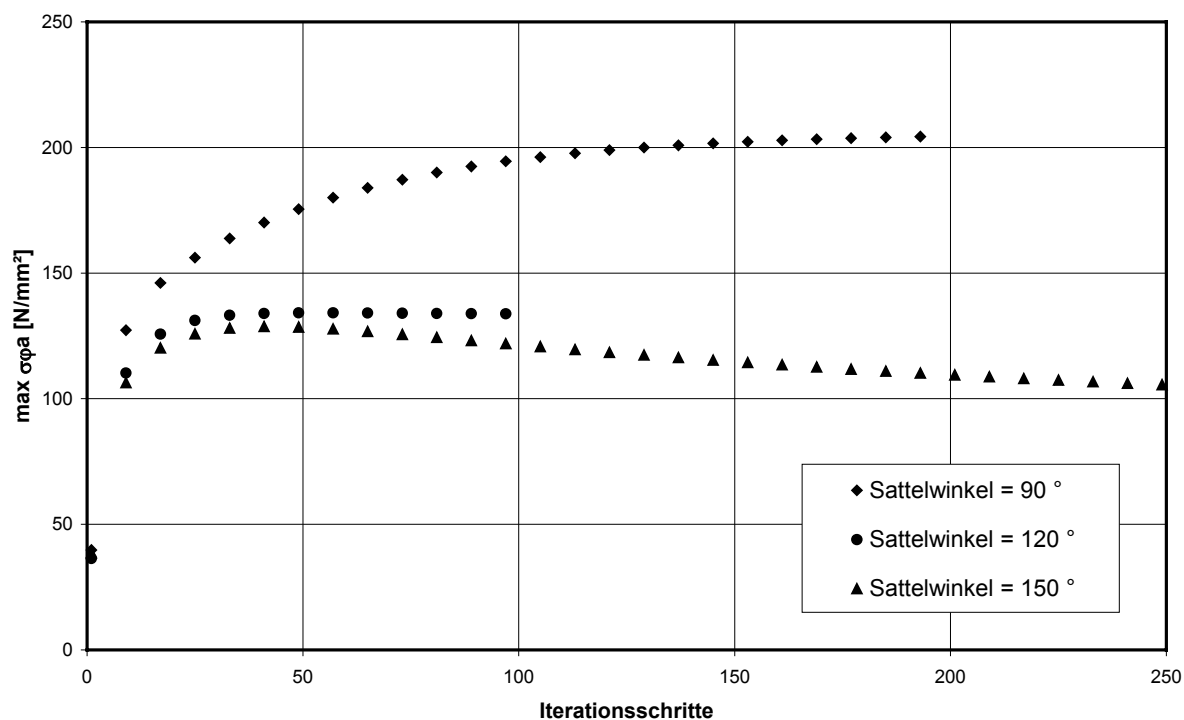


Abb. 7.6: Vergleich der Pressungsverläufe für einen Sattelwinkel von  $\vartheta=150^\circ$

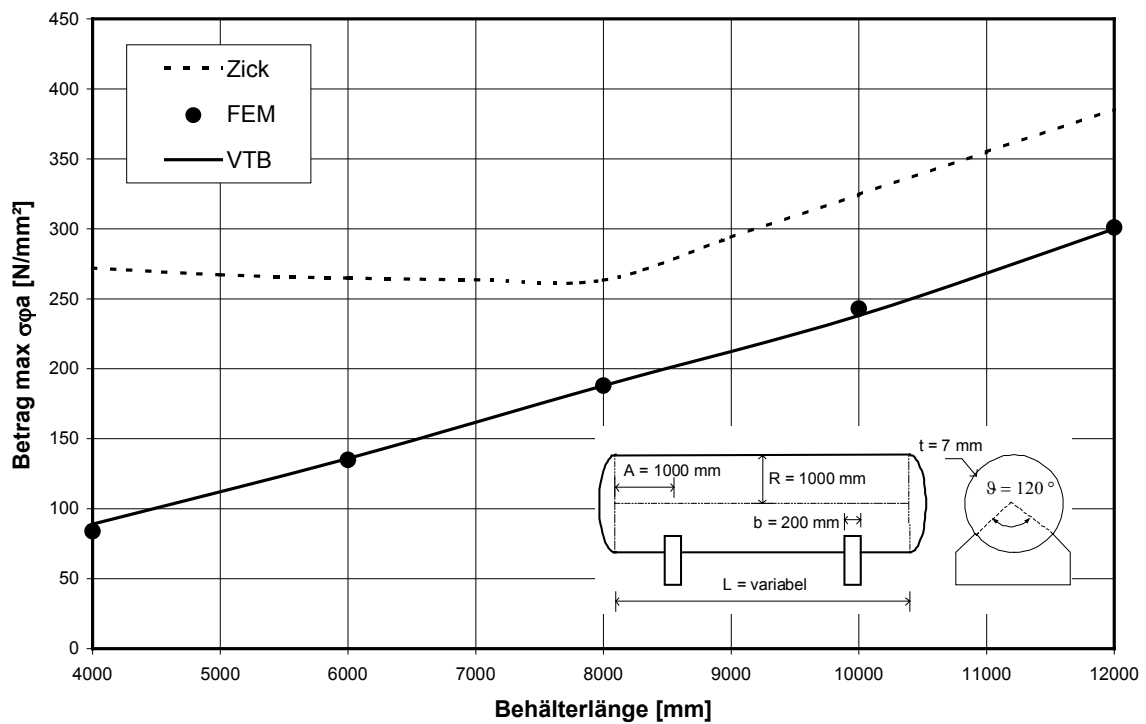
Zum Berechnungsaufwand ist zu sagen, dass dieser je nach Sattelwinkel und erstem Pressungsansatz stark variiert. Der Pressungsansatz zu Beginn der Berechnung kann prinzipiell unter Beachtung der Gleichgewichtsbedingung in vertikaler Richtung beliebig erfolgen. Es hat sich jedoch gezeigt, wenn die Sattelpressung am Satteltiefpunkt zu hoch oder zu niedrig gegenüber der tatsächlichen Pressung am Ende der Iteration angesetzt wird, die erforderlichen Iterationsschritte erheblich ansteigen. Der Grund liegt darin, dass die falsch angesetzten Pressungen vom Satteltiefpunkt zum Sattelhorn, beziehungsweise umgekehrt, umgelagert werden müssen. Mit dem Ansatz einer konstanten Pressung trifft man den sich einstellenden Verlauf im unteren Sattelbereich sehr gut und es ist nur noch eine Umlagerung im Bereich des Sattelhorns erforderlich. Unter Berücksichtigung von vierzig Einheitsverwölbungen sind dann im Schnitt etwa hundert Iterationsschritte erforderlich. Für die ersten drei vorgestellten Berechnungsergebnisse sind in der folgenden Abbildung das Konvergenzverhalten anhand der Entwicklung der maximalen Spannungen dargestellt.



**Abb. 7.7:** Konvergenzverhalten während der Iteration

Zu Beachten ist dabei, dass bei dem großen Sattelwinkel von 150° während der Iteration die Spannungen zunächst über ihren späteren Endwert hinaussteigen und danach erst von oben gegen diesen konvergieren und somit erheblich mehr Rechenaufwand erzeugen.

Abschließend für den Fall der iterativen Berechnung wird in Abb. 7.8 und Abb. 7.9 gezeigt, dass mit dem Berechnungsverfahren die in Kapitel 5 aufgezeigten Schwachpunkte im Verfahren von Zick behoben werden. Das Verfahren von Zick zeigte gegenüber der FE-Berechnung und dem Verfahren nach Krupka deutliche Unterschiede bei der Erfassung des Tragverhaltens von kurzen Behältern und des Einflusses des Bodenabstandes. In den Abbildungen sind deutlich die mit der FE-Berechnung übereinstimmenden Ergebnisse des eigenen Berechnungsverfahrens bei Variation der Behälterlänge und des Bodenabstandes zu erkennen. Im Gegensatz dazu stehen wieder die qualitativ und quantitativ abweichenden Ergebnisse nach Zick.



**Abb. 7.8:** Variation der Behälterlänge

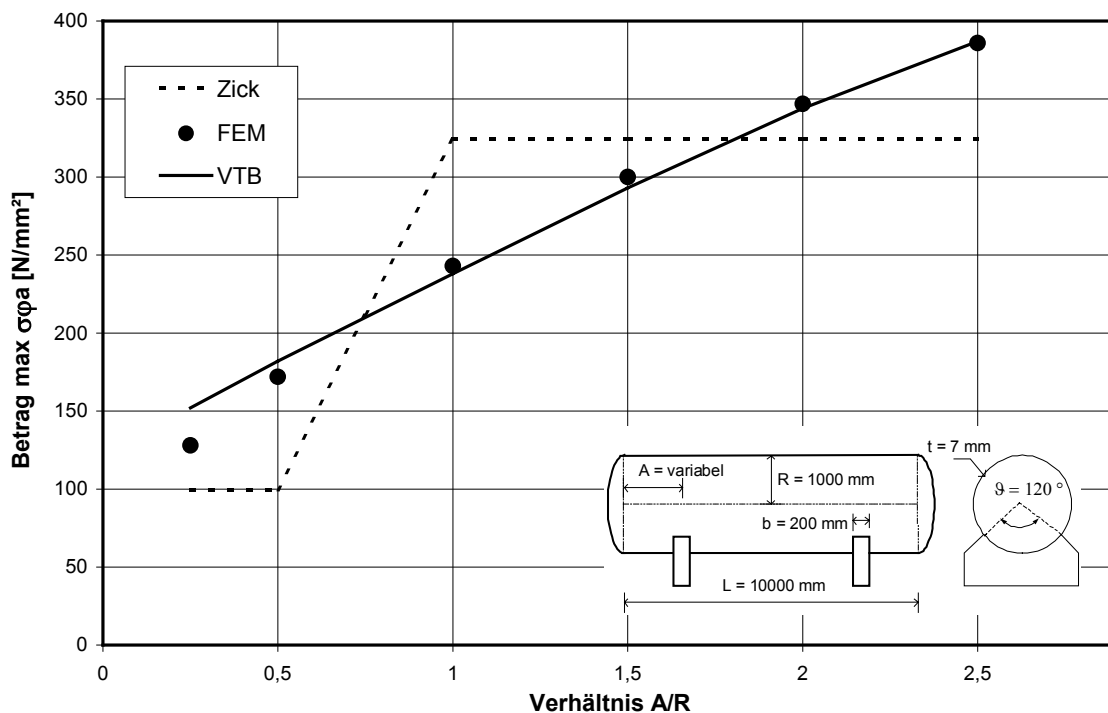


Abb. 7.9: Variation des Bodenabstandes

Zusammenfassend kann zum Fall der iterativen Berechnung des Behälters bei loser Lagerung auf einem starren Sattel festgestellt werden, dass das vorgestellte Verfahren prinzipiell geeignet ist, aber eine Reduzierung der erforderlichen Iterationsschritte und damit verbunden eine Minimierung der Berechnungsdauer für eine praktische Anwendung von Vorteil wäre.

Eine erhebliche Reduzierung des Aufwandes kann durch den Ansatz einer möglichst realistischen Pressung gleich zu Beginn erreicht werden. Dazu wird im folgenden Abschnitt die Berechnung unter dem Ansatz einer Pressung auf Grundlage der Untersuchungen von Chouih [19] vorgestellt.

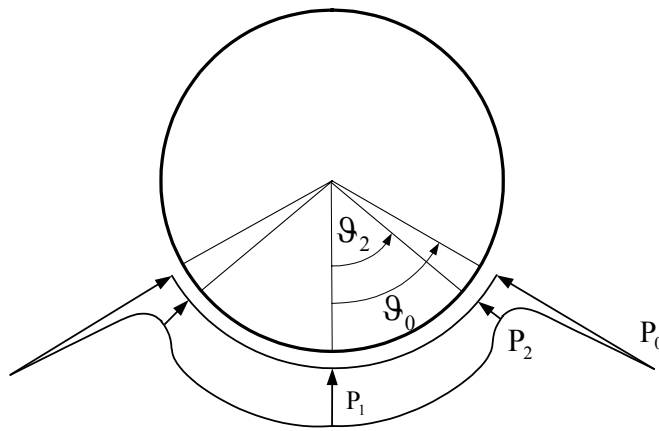
### 7.3 Berechnung unter Ansatz einer Pressungsverteilung nach Chouih

Wie aus den vorangegangenen Berechnungen auf Grundlage des iterativen Berechnungsverfahrens und der FE-Analyse erkennbar war, stellt sich bei einer starren Lagerung eine ungleichmäßige Pressungsverteilung ein. Sie ist gekennzeichnet durch einen nahezu konstanten Anteil im Tiefpunkt des Sattels und einer ausgeprägten Pressungsspitze am Sattelhorn. Setzt man zu Beginn der Berechnung nicht eine konstante Pressung, sondern eine an das erwartete Ergebnis angepasste Pressungsverteilung an, kann die Anzahl der erforderlichen Iterationsschritte erheblich verringert werden, beziehungsweise sogar ganz auf eine Iteration verzichtet werden.

Chouihi entwickelte auf der Grundlage von Parameterstudien an einem FE-Modell Formeln zur Bestimmung der zu erwartenden Pressungsverteilung, die im folgenden kurz vorgestellt werden.

### 7.3.1 Ansatz der Pressungsverteilung nach Chouihi [19]

Kennzeichnend für den Pressungsverlauf nach Chouihi sind drei charakteristische Pressungsordinaten.  $P_1$  ist die Pressungsordinate im Satteltiefpunkt,  $P_2$  die kleinste Pressungsordinate an der Stelle  $\vartheta_2$  und  $P_0$  die Pressungsspitze am Sattelhorn.



**Abb. 7.10:** qualitativer Pressungsverlauf nach Chouihi [19]

Als Ansatzfunktionen für den Verlauf wählt Chouihi vom Satteltiefpunkt bis zum lokalen Minimum in der Pressungsverteilung ein Polynom dritten Grades und für den weiteren Verlauf bis zum Sattelhorn ein Polynom zweiten Grades.

$$P_Z(\varphi) = \begin{cases} a_1 \cdot \varphi^3 + b_1 \cdot \varphi + c_1 & 0 \leq \varphi \leq \vartheta_2 \\ a_2 \cdot \varphi^2 + b_2 \cdot \varphi + c_2 & \vartheta_2 \leq \varphi \leq \vartheta_0 \end{cases} \quad \text{Gl. 7.1 (a,b)}$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten in der ersten Ansatzfunktionen müssen die Bedingungen

$$P_Z(\vartheta = 0) = P_1, \quad \frac{\partial P_Z(\vartheta = 0)}{\partial \varphi} = 0, \quad P_Z(\vartheta = \vartheta_2) = P_2, \quad \text{Gl. 7.2 (a-c)}$$

und für den zweiten Bereich die Bedingungen

$$P_Z(\vartheta = \vartheta_2) = P_2, \quad \frac{\partial P_Z(\vartheta = \vartheta_2)}{\partial \varphi} = 0, \quad P_Z(\vartheta = \vartheta_0) = P_0 \quad \text{Gl. 7.3 (a-c)}$$

erfüllt werden. Der Ort des lokalen Minimums ist nach Chouihhi nur vom Sattelumschließungswinkel und vom Verhältnis Radius zu Dicke der Kreiszylinderschale abhängig. Zur Bestimmung wird von Chouihhi ein Diagramm angegeben, aus dem das Verhältnis des lokalen Minimums zum Sattelumschließungswinkel abgelesen werden kann.

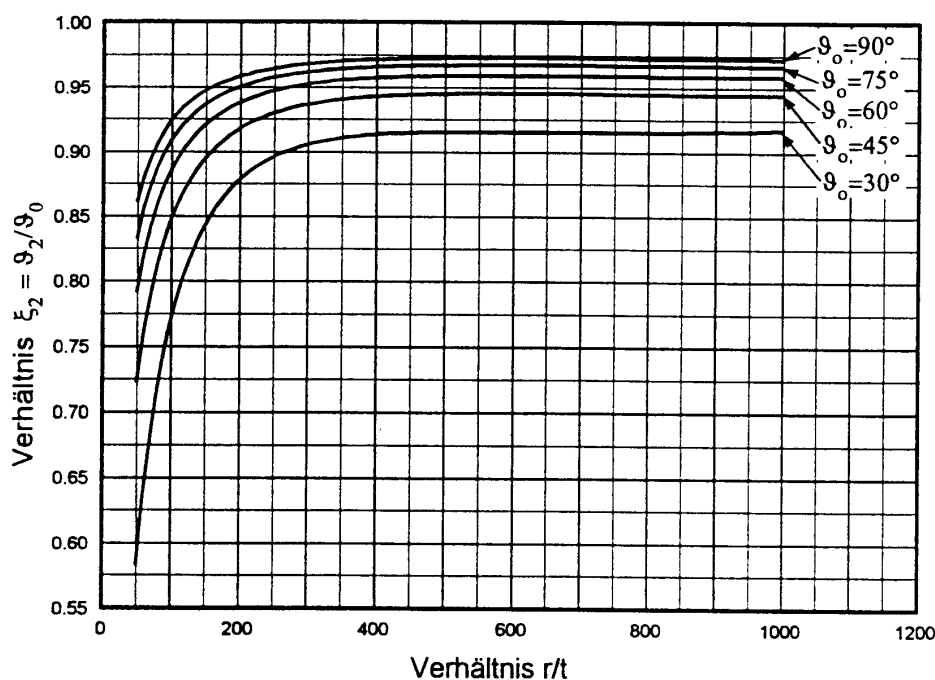


Abb. 7.11: Diagramm zur Bestimmung des Orts des lokalen Minimums [19]

Die Ordinaten  $P_1$  und  $P_2$  werden nicht explizit angegeben, sondern in Abhängigkeit der maximalen Pressung am Sattelhorn als sogenannte bezogene Pressungen:

$$p_1 = \frac{P_1}{P_0} \quad p_2 = \frac{P_2}{P_0} \quad \text{Gl. 7.4 (a,b)}$$

Die bezogene Pressung  $p_1$  in Gl. 7.4 (a) ist dabei abhängig von der Steifigkeit der Kreiszylinderschale, dem Abstand des Bodens zum Sattellager, dem Sattelumschließungswinkel und der Länge der Schale. Der Zusammenhang der einzelnen Parameter mit der bezogenen Pressung wurde durch Vergleichsberechnungen mit einem Referenzsystem bestimmt.

$$p_1 = \frac{0,105 - 0,130 \cdot \left[ \frac{\vartheta_0}{(\vartheta_0)_{\text{ref}}} \right] + 0,150 \cdot \left[ \frac{\vartheta_0}{(\vartheta_0)_{\text{ref}}} \right]^2}{\left[ \frac{\left( \frac{R}{t} \right)}{\left( \frac{R}{t} \right)_{\text{ref}}} \right]^{0,60} \cdot \left[ \frac{\left( \frac{A}{R} \right)}{\left( \frac{A}{R} \right)_{\text{ref}}} \right]^{0,57}} \cdot k_{L,1} \quad \text{Gl. 7.5}$$

$$\text{mit} \quad k_{L,1} = \left[ \frac{\left( \frac{L}{R} \right)}{\left( \frac{L}{R} \right)_{\text{ref}}} \right]^{\frac{1}{3}}$$

Die Referenzwerte des Grundsystems sind dabei:

$$(\vartheta_0)_{\text{ref}} = 60^0 \quad \left( \frac{R}{t} \right)_{\text{ref}} = 200 \quad \left( \frac{A}{R} \right)_{\text{ref}} = 1,0 \quad \left( \frac{L}{R} \right)_{\text{ref}} = 8,5$$

Der Zusammenhang kann nach Chouihl auch vereinfacht angesetzt werden zu:

$$p_1 \approx \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{A}{t} \right)^{-0,57} \cdot (4 - 5 \cdot \vartheta_0 + 6 \cdot \vartheta_0^2) \cdot k_{L,1} \quad \text{Gl. 7.6}$$

Für die bezogene Pressung  $p_2$  in Gl. 7.4 (b) sind dieselben Parameter entscheidend wie für die bezogene Pressung  $p_1$  Gl. 7.4 (a) und durch Vergleichrechnungen mit dem Referenzsystem ermittelt Chouihl folgenden Zusammenhang:

$$p_2 = \frac{1}{50} \cdot \frac{0,700 - 0,093 \cdot \left[ \frac{\vartheta_0}{(\vartheta_0)_{\text{ref}}} \right] + 0,316 \cdot \left[ \frac{\vartheta_0}{(\vartheta_0)_{\text{ref}}} \right]^2}{\left[ \frac{\left( \frac{R}{t} \right)}{\left( \frac{R}{t} \right)_{\text{ref}}} \right]^{1,75} \cdot \left[ \frac{\left( \frac{A}{R} \right)}{\left( \frac{A}{R} \right)_{\text{ref}}} \right]^{\kappa_1}} \cdot k_{L,2} \quad \text{Gl. 7.7}$$

$$\text{mit} \quad \kappa_1 = 0,1 + 0,007 \cdot \left( \frac{R}{t} \right) - 6,5 \cdot 10^{-6} \cdot \left( \frac{R}{t} \right)^2 \quad \text{und} \quad k_{L,2} = \left[ \frac{\left( \frac{L}{R} \right)}{\left( \frac{L}{R} \right)_{\text{ref}}} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\left( \frac{R}{t} \right)}{\left( \frac{R}{t} \right)_{\text{ref}}} \right]$$

Vereinfacht kann der Zusammenhang auch durch

$$p_2 \approx 20 \cdot \left(\frac{R}{t}\right)^{-1,75} \cdot \left(\frac{A}{t}\right)^{-\kappa_1} \cdot (7 - \vartheta_0 + 3 \cdot \vartheta_0^2) \cdot k_{L,2} \quad \text{Gl. 7.8}$$

beschrieben werden.

Mit diesen Angaben lässt sich der Verlauf der Sattelpressung ausschließlich in Abhängigkeit der maximalen Pressung  $P_0$  bestimmen. Zur endgültigen Bestimmung muss die Pressungsordinate  $P_0$  über die Gleichgewichtsbedingung der Kräfte in vertikaler Richtung bestimmt werden.

Hinsichtlich der Verteilung der Sattelpressung in Längsrichtung weist Chouihhi in seiner Arbeit darauf hin, dass diese ungleichförmig ist, aber der vereinfachte Ansatz einer konstanten Pressung in Längsrichtung in der Regel ausreichend genau ist. Kritische Fälle treten höchstens bei sehr dünnen Schalen oder sehr breiten Sätteln auf.

### 7.3.2 Ergebnisse

Für die in Kapitel 7.1 berechneten Behälter ergeben sich mit dem Pressungsansatz nach Chouihhi die folgenden Ergebnisse, die mit den Ergebnissen einer FE-Berechnung verglichen werden. Die Berechnung erfolgte dabei ohne Iteration. Das heißt im ersten Berechnungsschritt wurde der Schubfluss in der Kreiszyinderschale unter Annahme des Sattelpressungsverlaufs von Chouihhi nach der VTB berechnet. Dieser Schubfluss wurde dann als Belastung auf den elastisch gebetteten Kreisring angesetzt. Aus der Lösung des elastisch gebetteten Kreisrings erhält man direkt die Schnittgrößen zur Spannungsberechnung und zusätzlich zur Überprüfung der Sattelpressung von Chouihhi einen neuen verbesserten Pressungsverlauf.

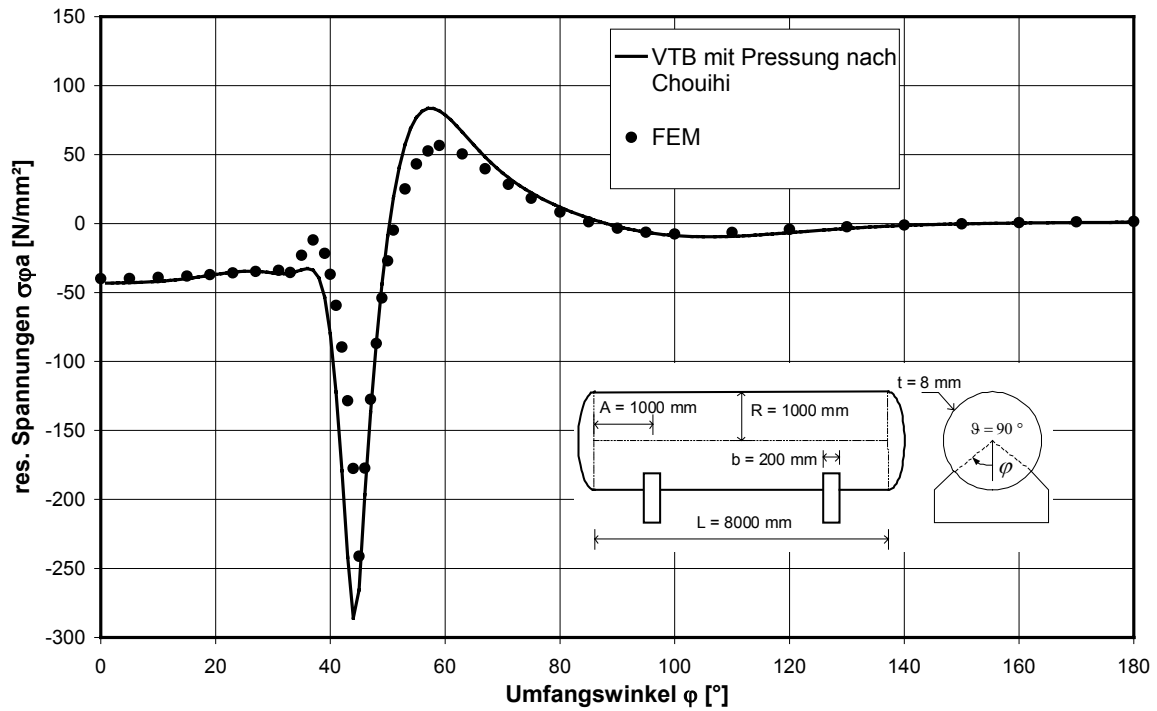


Abb. 7.12: Vergleich der Spannungen an der Außenseite für einen Sattelwinkel von  $\vartheta = 90^\circ$

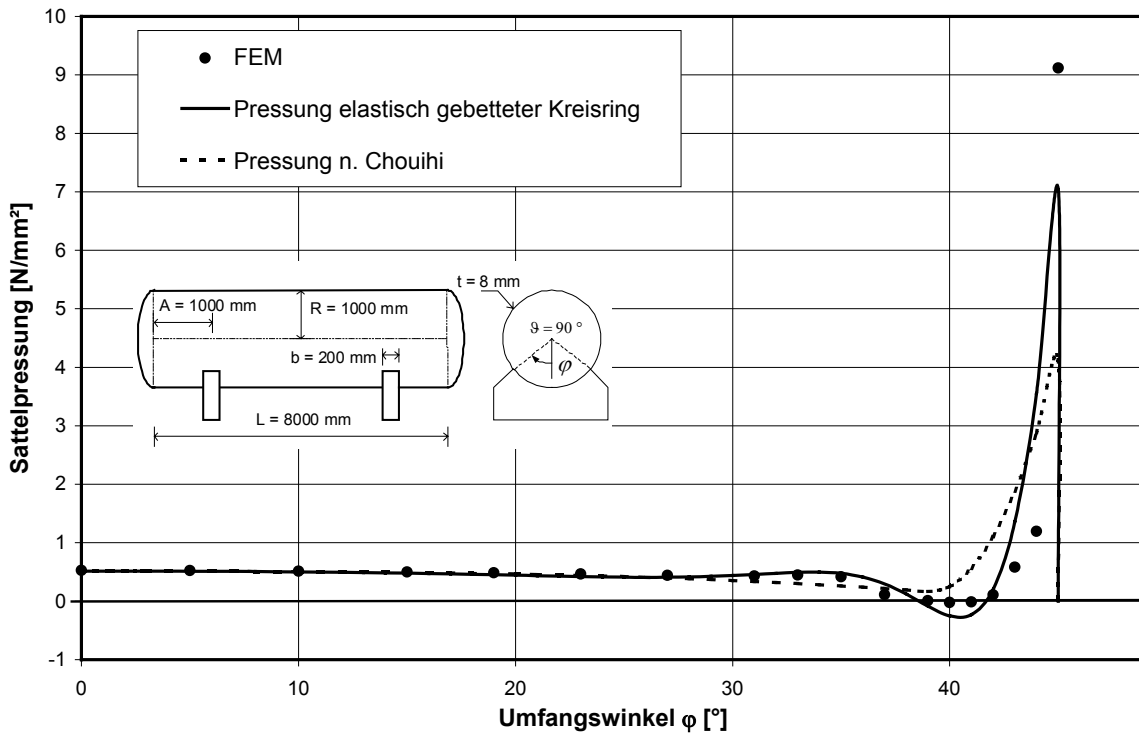


Abb. 7.13 : Vergleich der Sattelpressungen für einen Sattelwinkel von  $\vartheta = 90^\circ$

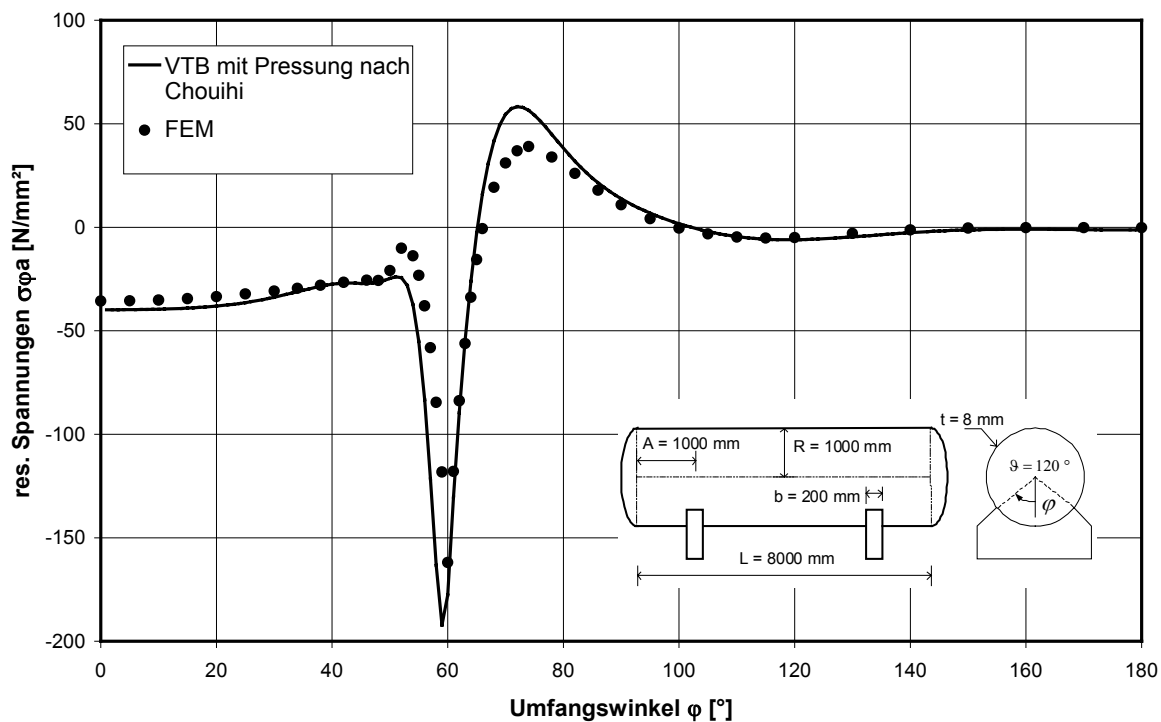


Abb. 7.14 : Vergleich der Spannungen an der Außenseite für einen Sattelwinkel von  $\vartheta = 120^\circ$

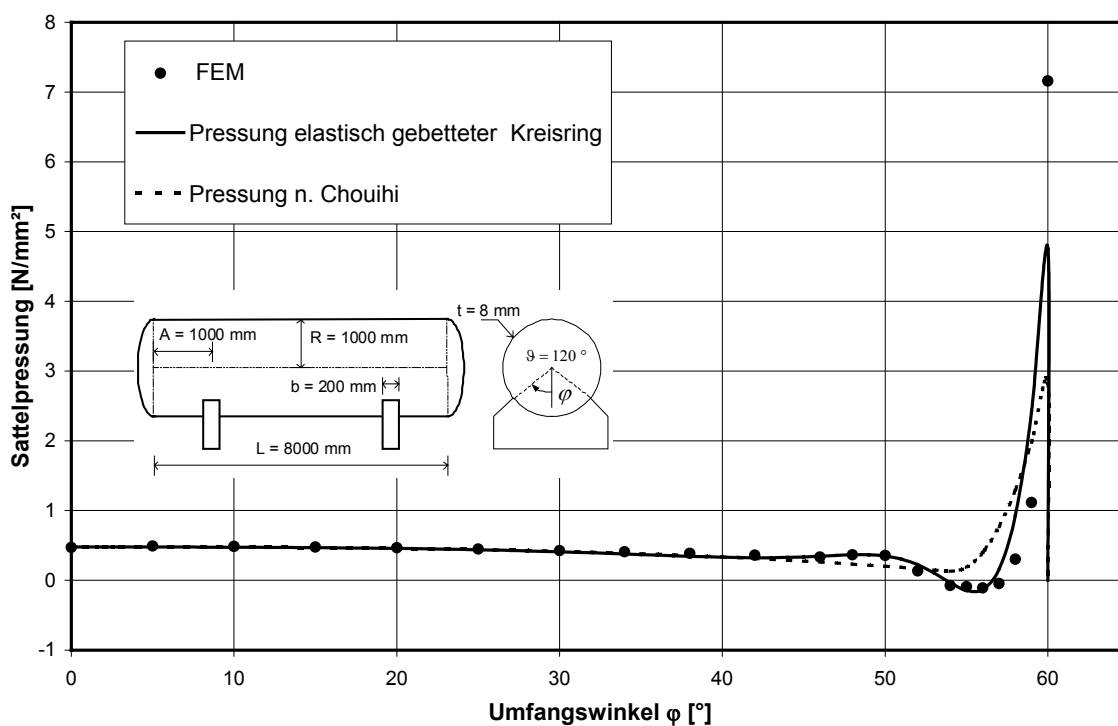


Abb. 7.15 : Vergleich der Sattelpressungen für einen Sattelwinkel von  $\vartheta = 120^\circ$

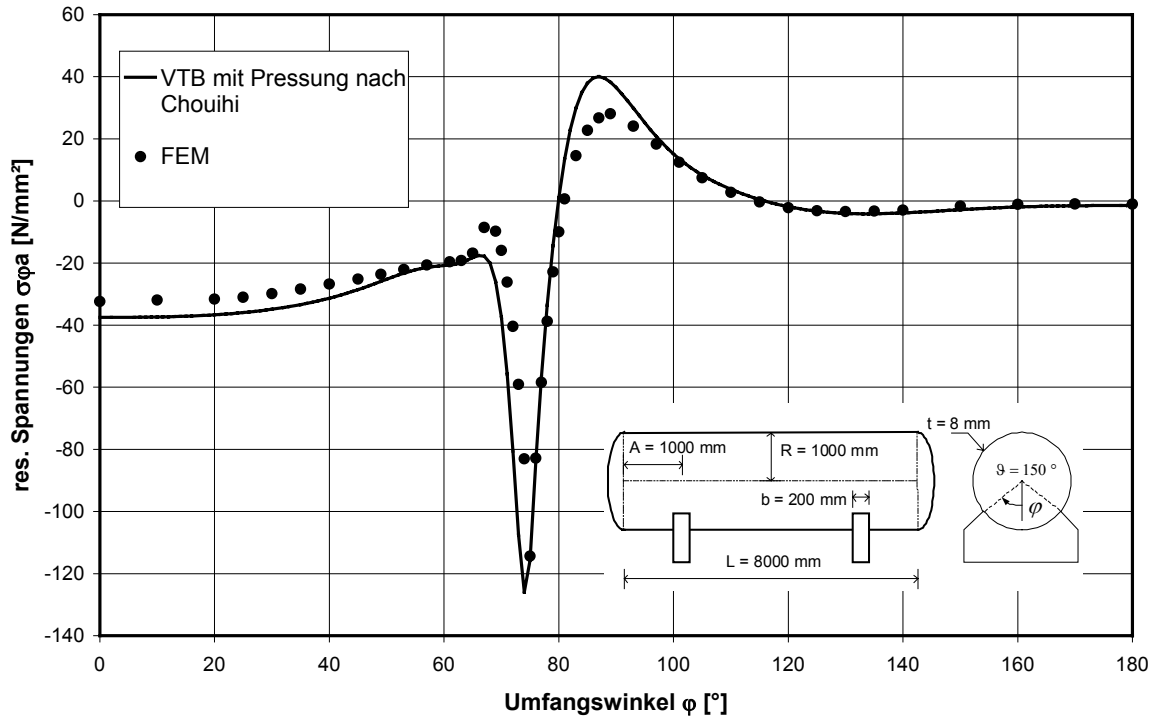


Abb. 7.16 : Vergleich der Spannungen an der Außenseite für einen Sattelwinkel von  $\vartheta = 150^\circ$

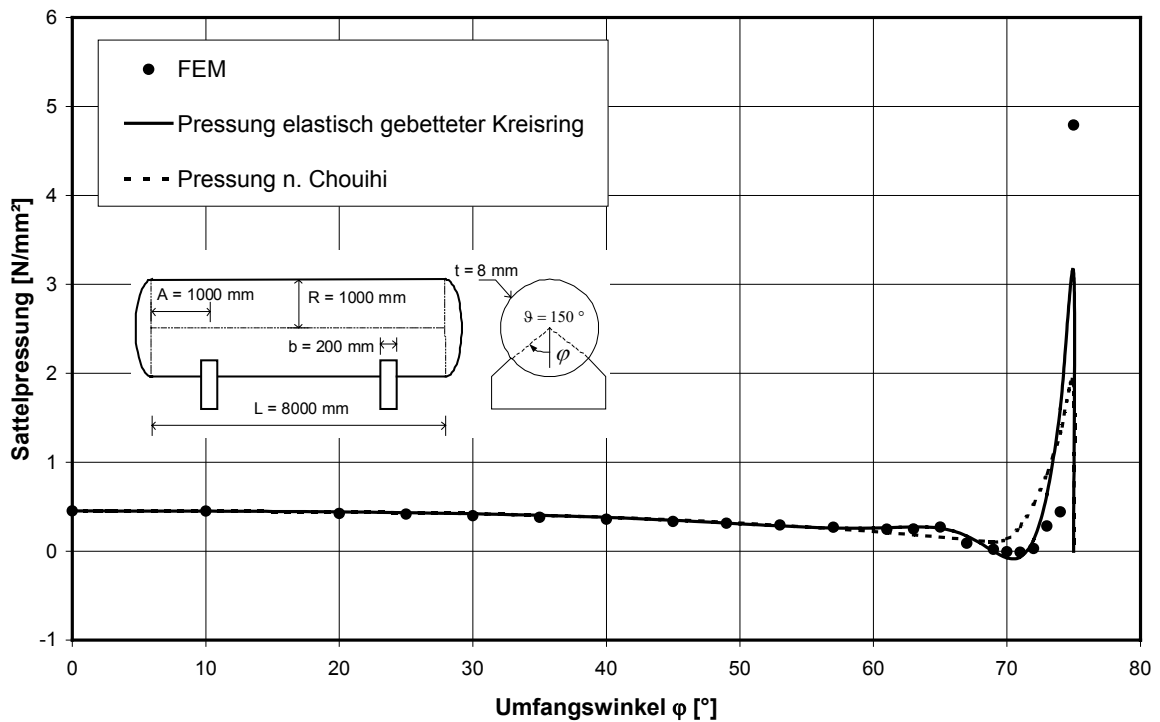


Abb. 7.17: Vergleich der Sattelpressungen für einen Sattelwinkel von  $\vartheta = 150^\circ$

### 7.3.3 Bewertung der Ergebnisse

Die qualitativen Spannungsverläufe in Umfangsrichtung zeigen bei allen drei Behältern gute Übereinstimmungen. Die maximalen Spannungen im Bereich des Sattelhorns liegen ebenfalls in vergleichbaren Bereichen. Die Spannungen mit dem Pressungsansatz nach Chouihi liegen generell etwas höher, aber in Anbetracht der einfachen und schnellen Berechnung ist der Unterschied vertretbar.

Der Vergleich der Verläufe der Sattelpressungen mit Blick auf die auftretenden Spannungsverläufe in der Behälterschale ergeben folgende Schlussfolgerungen. Im unteren Sattelbereich stimmen die Verläufe nach dem Ansatz von Chouihi, nach der FE-Methode und nach der Berechnung am elastisch gebetteten Kreisring nahezu überein. Am Sattelhorn sind deutliche Unterschiede zu erkennen. Die Pressungsspitzen nach Chouihi sind nicht so konzentriert wie die nach der FE-Methode, aber dafür ist auch die maximale Pressungen geringer. Die über einen größeren Bereich verteilte Pressungsspitze nach Chouihi resultiert aus dem Ansatz für die Steifigkeit im Sattelbereich. Im Kontaktelement von Chouihi wurde eine Bettungsziffer von  $10 \text{ N/mm}^3$  berücksichtigt und dem steht in der eigenen FE-Berechnung eine Bettungsziffer von  $600 \text{ N/mm}^3$  gegenüber. Die dennoch guten Übereinstimmungen im Verlauf der Spannungen in Umfangsrichtung zeigen, dass durch die Berechnung am elastisch gebetteten Kreisring dieser Fehler korrigiert wird. Zur Reduzierung des Berechnungsaufwands ist daher nicht der genaue Verlauf der Pressungen am Sattelhorn entscheidend, sondern die Pressung im tieferen Bereich des Sattels sollte genau erfasst werden. Dies ist beim Pressungsansatz von Chouihi gegeben und ist daher geeignet um die Berechnungen zu vereinfachen.

## Kapitel 8                      Fall einer weichen Lagerung

### 8.1 Allgemeines

Ziel der Entwicklung eines neuen Berechnungsverfahrens war, neben der genauen Erfassung der Beanspruchung im Fall einer starren Lagerung bei losem Kontakt, den Einfluss von spannungsreduzierenden Maßnahmen zu berücksichtigen. Zu solchen Maßnahmen zählt eine planmäßige Nachgiebigkeit im Sattelbereich, wie sie zum Beispiel durch Anordnung einer weichen Zwischenschicht erzeugt werden kann. Hierzu wurde im Rahmen der Untersuchungen nach der FE-Methode in Kapitel 4, unter Berücksichtigung der nichtlinearen Verfestigung, eine mögliche Idealisierung einer dünnen elastomeren Schicht vorgestellt. Es wurde gezeigt, dass das nichtlineare Tragverhalten einer dünnen elastomeren Schicht durch eine linear elastische Bettung äquivalent abgebildet werden kann. Der Zusammenhang zwischen den maßgebenden Systemeigenschaften der Zwischenschicht und der linear-elastischen Bettung wurde nach Gl. 4.16 ermittelt zu:

$$B = 0,55 \cdot \ln\left(\frac{E_0 + 1}{d}\right) + 0,963 \quad \left[\text{kN/cm}^3\right] \quad \text{Gl. 8.1}$$

$E_0$  ist dabei der Tangentenmodul in  $[\text{N/mm}^2]$  im Nullpunkt der Spannungs-Dehnungslinie des verwendeten Materials und  $d$  die Schichtdicke in  $[\text{mm}]$ .

Auf Grundlage dieser Idealisierung ist eine Berücksichtigung des Einflusses einer Zwischenschicht mit dem vorgestellten neuen Berechnungsverfahren möglich. Die Berechnung erfolgt analog zum Fall einer starren Lagerung, wobei wieder eine iterative Ermittlung der Auflagerpressung oder eine Berechnung unter Vorgabe der zu erwartenden Pressung in Frage kommt. Der Unterschied zur Berechnung im Fall einer starren Lagerung liegt im Ansatz für die Bettungsziffer des elastisch gebetteten Kreisrings. Im Fall der starren Lagerung musste bei der Wahl der Bettungsziffer die Steifigkeit der Zylinderschale berücksichtigt werden, um die Ef-

fekte eines lokalen Abhebens zu erfassen. Durch die planmäßige weiche Lagerung tritt dieser Fall aber nicht auf und bei Betrachtung der Steifigkeitsverhältnisse zwischen Behälter und Sattel ist nun die Sattelsteifigkeit der maßgebende Einflussfaktor. Für die Berechnung auf Grundlage der verallgemeinerten technischen Biegetheorie hat sich gezeigt, dass die Bettungsziffer nach Gl. 8.1 übernommen werden kann, wobei zu Berechnung am elastisch gebetteten Kreisring noch eine Umrechnung von der flächenbezogenen Bettungsziffer  $B$  auf eine streckenbezogene Bettungsziffer  $B_{eB}$  erforderlich ist. Dies geschieht durch Multiplikation von  $B$  mit der Satteltbreite.

$$B_{eB} = B \cdot b \quad \text{Gl. 8.2}$$

Des Weiteren hat sich gezeigt, dass die Berechnung des Schubflusses nach der verallgemeinerten technischen Biegetheorie näher am Sattel erfolgen muss als im Fall der starren Lagerung. Der Grund liegt in der weicheren Lagerung, die eine gleichmäßigere Pressungsverteilung und damit eine geringere Störung des Membranspannungszustandes erzeugt. Um dem Rechnung zu tragen, wurde für den Ort zur Bestimmung des Schubflusses der Abstand vom Sattelrand nach Abb. 6.11 zu:

$$cS_{\text{weich}} = \frac{3}{100} \cdot R \quad \text{Gl. 8.3}$$

festgelegt.

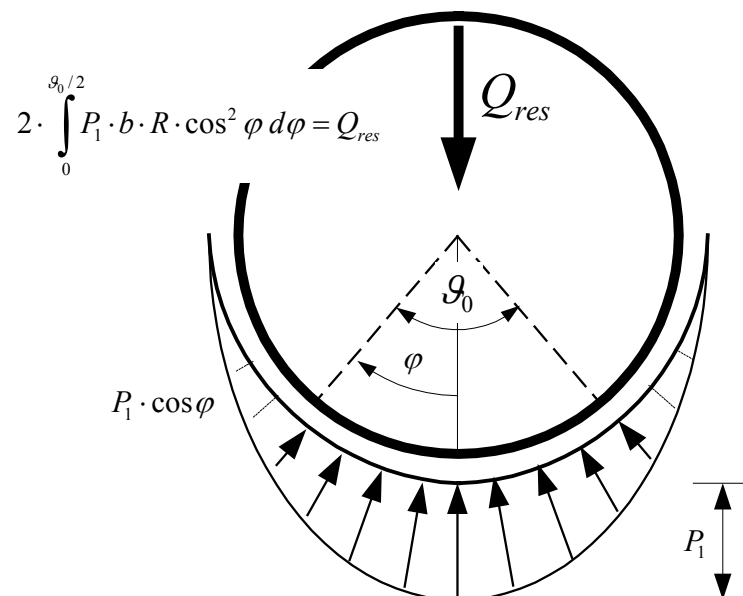
## 8.2 Iterative Berechnung

Die Eignung des Verfahrens bei iterativer Ermittlung der Auflagerpressung wird an einem Behälter mit zwei verschiedenen Zwischenschichten gezeigt. Für diese Zwischenschichten wurden zwei flächenbezogene Bettungsziffern von  $0,2 \text{ N/mm}^3$  und  $0,4 \text{ N/mm}^3$  angesetzt. Diese Werte wurden in Anlehnung an die Untersuchung in Kapitel 4 gewählt. Hierbei wurden die Messwerte aus einem einachsigen Druckversuch für eine Elastomer- und eine Schaumstoffschicht zunächst durch die nichtlineare Bettung nach Kapitel 4 angenähert und dann in eine lineare Bettung umgerechnet.

Entsprechend der bisherigen Vorgehensweise werden die Ergebnisse des Berechnungsverfahrens mit denen nach der FE-Methode verglichen. Für den Behälter wurden folgende Parameter gewählt:

Radius:	1000 mm
Länge der Zylinderschale:	8000 mm
Bodenabstand:	1000 mm
Blechdicke der Schale:	5 mm
Sattelumschließungswinkel:	120 °
Sattelbreite:	200 mm
Wichte der Flüssigkeitsfüllung:	$10^{-5}$ N/mm <sup>3</sup>

Auf den erhöhten Rechenaufwand bei Ansatz einer zu hohen, beziehungsweise zu niedrigen Pressung am Satteltiefpunkt wurde schon bei der iterativen Berechnung im Fall einer starren Lagerung hingewiesen. Gleiches gilt für den Fall einer weichen Lagerung und es hat sich gezeigt, dass sich die Pressung am Satteltiefpunkt im Vorfeld mit dem Ansatz einer kosinusförmigen Sattelpressung einfach und praktisch genau ermitteln lässt.



**Abb. 8.1:** Pressungsansatz zu Beginn der Iteration

In den folgenden Abbildungen werden die Ergebnisse der iterativen Berechnung vorgestellt.

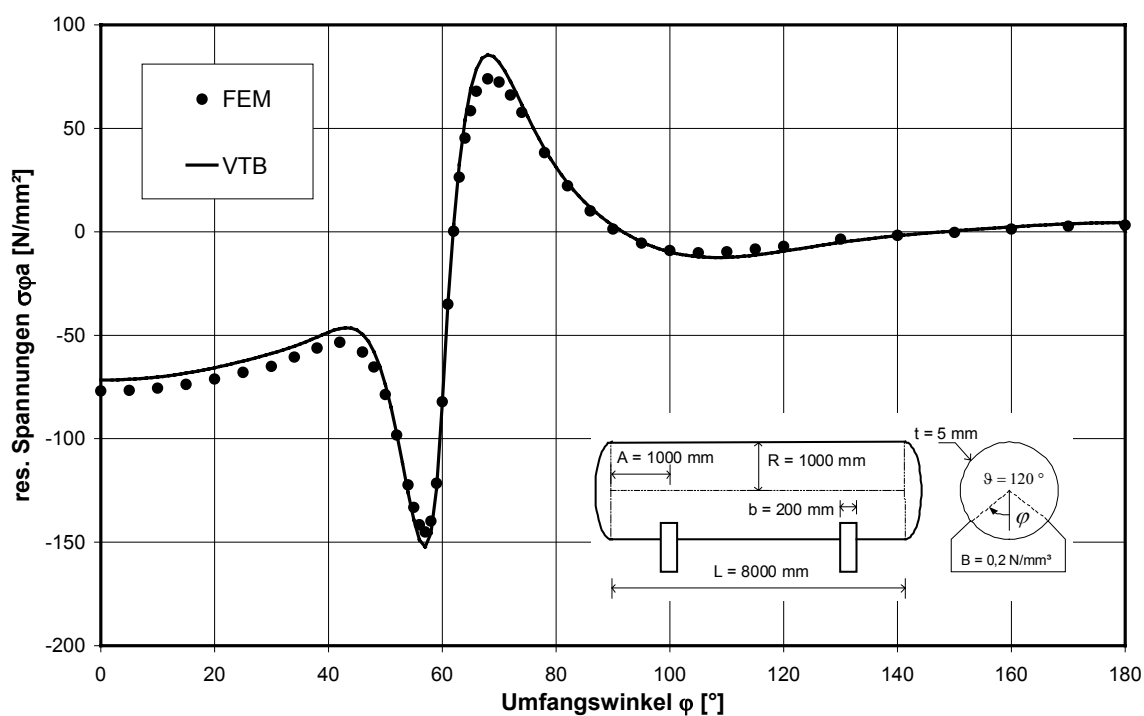


Abb. 8.2: Vergleich der Spannungen an der Außenseite für eine Bettungszahl von  $0,2 \text{ N/mm}^3$

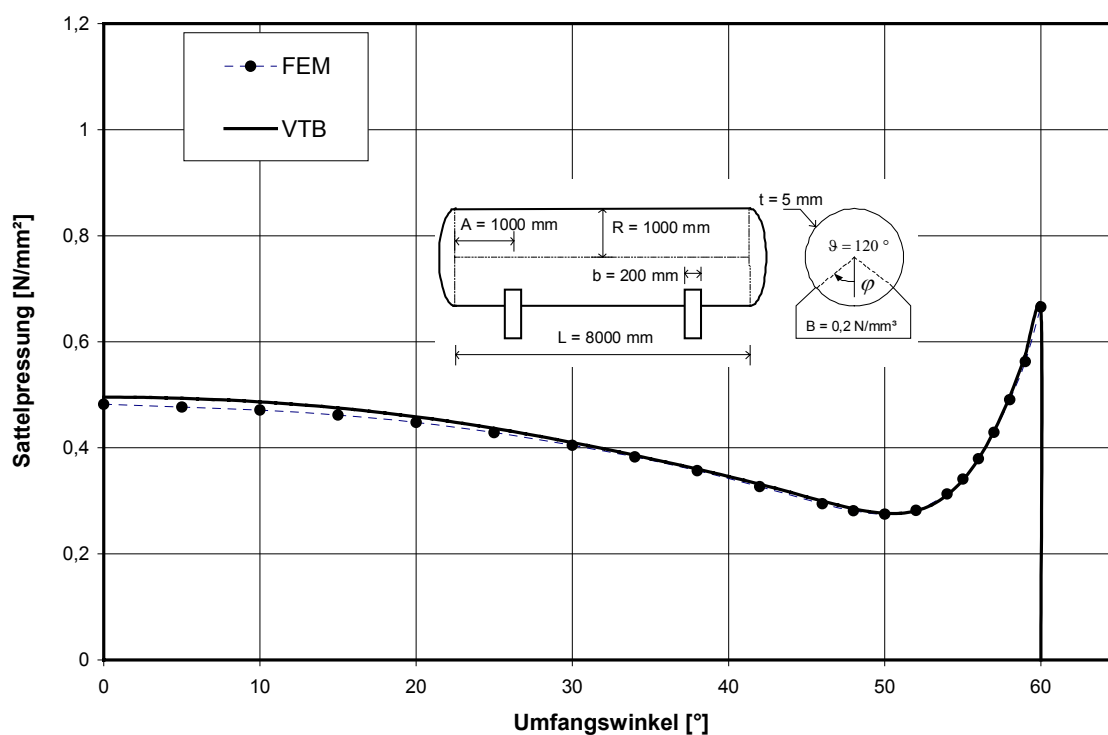


Abb. 8.3: Vergleich der Sattelpressungen für eine Bettungszahl von  $0,2 \text{ N/mm}^3$

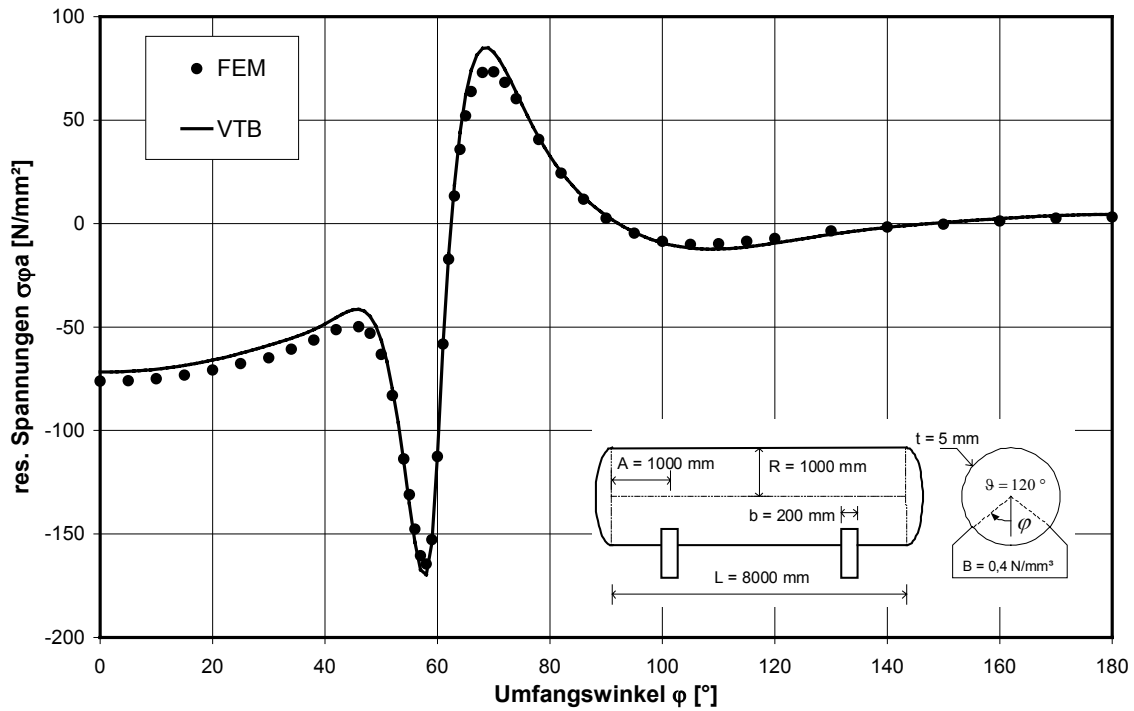


Abb. 8.4: Vergleich der Spannungen an der Außenseite für eine Bettungszahl von  $0,4 \text{ N/mm}^3$

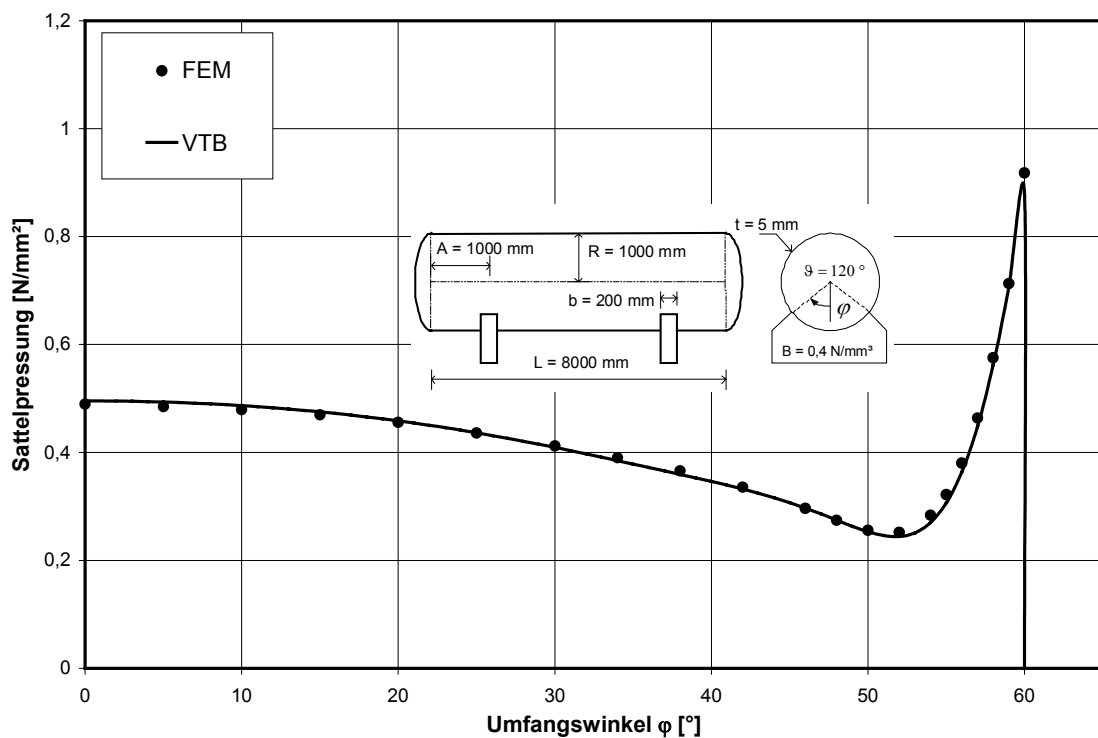


Abb. 8.5: Vergleich der Sattelpressungen für eine Bettungszahl von  $0,4 \text{ N/mm}^3$

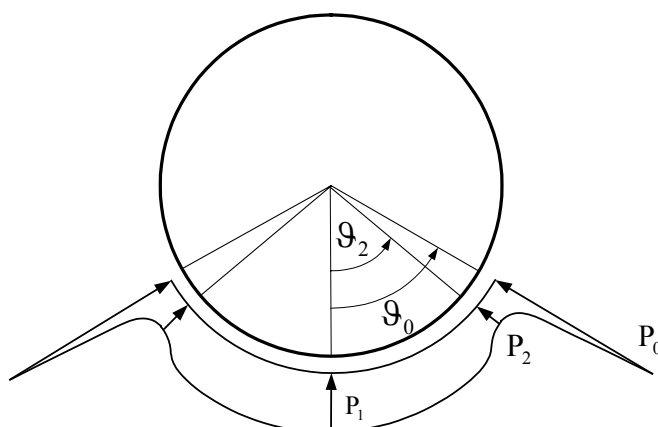
Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung im Verlauf der Spannungen in Umfangsrichtung und der Sattelpressung zwischen den Ergebnissen nach der FE-Methode und denen nach dem

Verfahren auf Grundlage der verallgemeinerten technischen Biegetheorie. Die Sattelpressungen werden praktisch identisch ermittelt. Die maximalen Spannungen am Sattelhorn stimmen ebenfalls überein und lediglich die Spannungen am Satteltiefpunkt und vor dem Sattelhorn werden leicht unterschiedlich erfasst. Damit ist die prinzipielle Eignung des Verfahrens auch für den Fall einer weichen Lagerung belegt.

Der Berechnungsaufwand wird, wie im Fall der starren Lagerung, vom Konvergenzverhalten während der Iteration bestimmt. Die Anzahl der erforderlichen Iterationsschritte liegt in diesem Fall bei circa 100. Für die praktische Anwendung ist daher auch hier eine Reduzierung der erforderlichen Iterationsschritte erforderlich. Analog zum starren Fall kann bei Kenntnis der Auflagerpressung im Vorfeld auf eine Iteration verzichtet werden und der Berechnungsaufwand reduziert sich erheblich. Hierzu sind Parameterstudien auf Grundlage der FE-Methode durchgeführt worden [24], die im folgenden Unterkapitel vorgestellt werden.

### 8.3 Ansatz einer Pressungsverteilung für den weichen Fall

Anhand der Ergebnisse der iterativen Berechnung ist in Abbildung 8.3 und 8.5 zu erkennen, dass die Auflagerpressung, ähnlich zum starren Fall, einen charakteristischen Verlauf aufweist, der durch drei charakteristische Pressungsordinaten und dem Ort eines lokalen Minimums beschrieben werden kann. Die charakteristischen Ordinaten sind wie bei Chouih (vergleiche Kapitel 7.2) die Pressung  $P_1$  am Satteltiefpunkt, das lokale Minimum  $P_2$  vor dem Sattelhorn und die Pressungsspitze  $P_0$  am Sattelhorn.

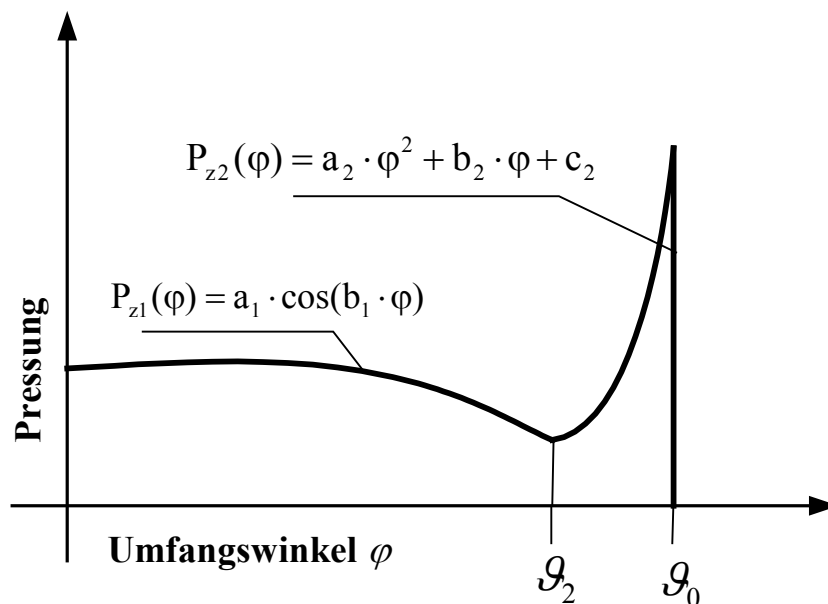


**Abb. 8.6:** qualitativer Pressungsverlauf für den Fall einer weichen Lagerung

Für die mathematische Beschreibung der Verläufe hat sich jedoch gezeigt, dass der Ansatz eines Polynoms 3. Grades vom Satteltiefpunkt bis zum lokalen Minimum, wie bei Chouih, nicht ausreichend genau ist. Im Rahmen der Untersuchung wurde festgestellt, dass im Bereich vom

Satteltiefpunkt bis zum lokalen Minimum ein Kosinus-Ansatz besser geeignet ist. Vom lokalen Minimum bis zum Sattelhorn kann wieder ein quadratisches Polynom gewählt werden. Als Ansatz für die zu erwartende Pressung wurde daher folgende bereichsweise definierte Funktion angesetzt:

$$P_Z(\varphi) = \begin{cases} a_1 \cdot \cos(b_1 \cdot \varphi) & 0 \leq \varphi \leq \vartheta_2 \\ a_2 \cdot \varphi^2 + b_2 \cdot \varphi + c_2 & \vartheta_2 \leq \varphi \leq \vartheta_0 \end{cases} \quad \text{Gl. 8.4 (a,b)}$$



**Abb. 8.7:** Ansatzfunktionen für den Fall einer weichen Zwischenschicht

Die Koeffizienten werden für den ersten Bereich über die Randbedingungen

$$P_Z(\varphi = 0) = P_1 \quad P_Z(\varphi = \vartheta_2) = P_2 \quad \text{Gl. 8.5}$$

und für den zweiten Bereich über die Randbedingungen

$$P_Z(\varphi = \vartheta_2) = P_2 \quad \frac{\partial P_Z(\varphi = \vartheta_2)}{\partial \varphi} = 0 \quad P_Z(\varphi = \vartheta_0) = P_0 \quad \text{Gl. 8.6}$$

bestimmt.

Nach Einsetzen und Lösen ergibt sich für den Pressungsverlauf in Abhängigkeit der charakteristischen Größen:

$$P_z(\varphi) = \begin{cases} P_1 \cdot \cos \left( \varphi \cdot \frac{\arccos \left( \frac{P_2}{P_1} \right)}{\vartheta_2} \right) & 0 \leq \varphi \leq \vartheta_2 \\ \frac{(P_0 - P_2) \cdot \varphi^2 - 2 \cdot \vartheta_2 \cdot (P_0 - P_2) \cdot \varphi + \vartheta_2^2 \cdot P_0 - 2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_2 \cdot P_2 + \vartheta_0^2 \cdot P_2}{-2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_2 + \vartheta_0^2 + \vartheta_2^2} & \vartheta_2 \leq \varphi \leq \vartheta_0 \end{cases} \quad \text{Gl. 8.7 (a,b)}$$

Im Rahmen der Parameterstudie hat sich gezeigt, dass sich die Pressungsordinate  $P_1$  proportional zu der resultierenden vertikalen Belastung und proportional zu der Sattelfläche verändert. Die Steifigkeit der Kreiszylinderschale spielt demnach keine Rolle für die Höhe der Pressung und man kann eine unendlich steife Zylinderschale betrachten, die sich wie ein starrer Körper in eine elastische Zwischenschicht eindrücken würde. Die aus der Starrkörperverschiebung des Kreisquerschnitts resultierende Verschiebung eines beliebigen Punktes auf dem Querschnitt in radialer Richtung wird durch eine Kosinusfunktion mit der Periode  $2\pi$  beschrieben und es stellt sich im Bereich des Sattels ein äquivalenter Pressungsverlauf ein. Ein solcher Pressungsverlauf ist durch die Ordinate am Satteltiefpunkt eindeutig bestimmt und aus einer Gleichgewichtsbetrachtung in vertikaler Richtung kann dieser bestimmt werden zu:

$$P_1 = \frac{Q}{b \cdot R \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \vartheta_0) + \vartheta_0 \right]} \quad \text{Gl. 8.8}$$

Der Ort des lokalen Minimums wird durch den Winkel  $\vartheta_2$  festgelegt und ist abhängig vom Sattelumschließungswinkel, vom Verhältnis Radius zu Dicke und von der Lage des Sattels zum Boden. Der Zusammenhang wird über den Koeffizienten  $K_1$  beschrieben, wobei er das Verhältnis des gesuchten Winkels zum Sattelumschließungswinkel darstellt.

$$\vartheta_2 = K_1 \cdot \vartheta_0 \quad \text{Gl. 8.9}$$

Auf Grundlage der Parameterstudie konnte der Zusammenhang für den Koeffizienten  $K_1$  für drei charakteristische Umschließungswinkel bestimmt werden zu:

für  $\vartheta_0 = 90^\circ$  :

$$K_1 = 7,3 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{A}{R}\right)^{0,32} \cdot \left(\frac{R}{t}\right) + 0,60 \cdot \left(\frac{A}{R}\right)^{-0,14}$$

für  $\vartheta_0 = 120^\circ$  :

$$K_1 = 4,2 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{A}{R}\right)^{0,35} \cdot \left(\frac{R}{t}\right) + 0,74 \cdot \left(\frac{A}{R}\right)^{-0,073} \quad \text{Gl. 8.10}$$

für  $\vartheta_0 = 150^\circ$  :

$$K_1 = 2,0 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{A}{R}\right)^{0,67} \cdot \left(\frac{R}{t}\right) + 0,833 \cdot \left(\frac{A}{R}\right)^{-0,066}$$

Werte für Sattelumschließungswinkel, die zwischen den Angegebenen liegen, können, wie auch in den folgenden Fällen, durch lineare Interpolation bestimmt werden.

Für die Pressungsordinate  $P_2$  wurde eine Abhängigkeit zur Pressungsordinate  $P_1$  festgestellt. Diese lässt sich über 4 Koeffizienten,  $K_2$  bis  $K_5$ , berücksichtigen:

$$P_2 = K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5 \cdot P_1 \quad \text{Gl. 8.11}$$

Der Koeffizient  $K_2$  berücksichtigt die Einflüsse der Sattellage zum Boden, der Steifigkeit der Zylinderschale und des Sattelumschließungswinkels und kann wie folgt bestimmt werden:

für  $\vartheta_0 = 90^\circ$  :

$$K_2 = -5,9 \cdot 10^{-2} \cdot \left(\frac{A}{R}\right) \cdot \left(\frac{R}{t}\right)^{0,15} + 1,25 \cdot \left(\frac{R}{t}\right)^{-0,0868}$$

für  $\vartheta_0 = 120^\circ$  :

$$K_2 = -4,1 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{A}{R}\right) \cdot \left(\frac{R}{t}\right)^{0,457} + 0,92 \cdot \left(\frac{R}{t}\right)^{-0,079} \quad \text{Gl. 8.12}$$

für  $\vartheta_0 = 150^\circ$  :

$$K_2 = -9,5 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{A}{R}\right)^2 \cdot \left(\frac{R}{t}\right)^{0,217} + 2,5 \cdot \left(\frac{A}{R}\right) \cdot \left(\frac{R}{t}\right)^{-0,639} + 0,225 \cdot \left(\frac{R}{t}\right)^{0,066}$$

Über den Koeffizient  $K_3$  werden weitere Einflüsse des Sattelumschließungswinkels, des Durchmessers und der Satteltbreite berücksichtigt:

für  $\vartheta_0 = 90^\circ$  :

$$K_3 = -2,89 \cdot 10^{-5} \cdot \left(\frac{b}{D} \cdot 100\right)^{0,371} \cdot D[\text{mm}] + 1,364 \cdot \left(\frac{b}{D} \cdot 100\right)^{-0,075}$$

für  $\vartheta_0 = 120^\circ$  :

$$K_3 = -1,385 \cdot 10^{-5} \cdot \left(\frac{b}{D} \cdot 100\right)^{0,398} \cdot D[\text{mm}] + 1,193 \cdot \left(\frac{b}{D} \cdot 100\right)^{-0,045} \quad \text{Gl. 8.13}$$

für  $\vartheta_0 = 150^\circ$  :

$$K_3 = -9,17 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{b}{D} \cdot 100\right)^{0,394} \cdot D[\text{mm}] + 1,123 \cdot \left(\frac{b}{D} \cdot 100\right)^{-0,030}$$

Der Koeffizient  $K_4$  berücksichtigt die Länge des Behälters:

für  $\vartheta_0 = 90^\circ$  :

$$K_4 = 2,1 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{L}{R}\right)^2 - 0,0417 \cdot \left(\frac{L}{R}\right) + 1,20$$

für  $\vartheta_0 = 120^\circ$  :

$$K_4 = -8,84 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{L}{R}\right) + 1,073 \quad \text{Gl. 8.14}$$

für  $\vartheta_0 = 150^\circ$  :

$$K_4 = -4,03 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{L}{R}\right) + 1,034$$

Abschließend wird über den Koeffizienten  $K_5$  die Art der elastischen Bettung berücksichtigt:

$$K_5 = -1,37 \cdot \vartheta_0^{-1,924} \cdot B + 1,178 \cdot \vartheta_0^{-0,130} \quad \text{Gl. 8.15}$$

Mit Kenntnis der Pressungsordinaten  $P_1$  und  $P_2$ , sowie der Lage des lokalen Minimums ist der Pressungsverlauf nur noch abhängig von der Pressungsordinate  $P_0$  am Sattelhorn. Die noch unbekannte Pressungsordinate  $P_0$  wird über eine Gleichgewichtsbetrachtung in vertikaler Richtung bestimmt. Die resultierende vertikale Kraft der Auflagerpressung muss mit der vertikalen Last  $Q$ , die aus dem Behältereigengewicht und der Flüssigkeitsfüllung resultiert, im Gleichgewicht stehen.

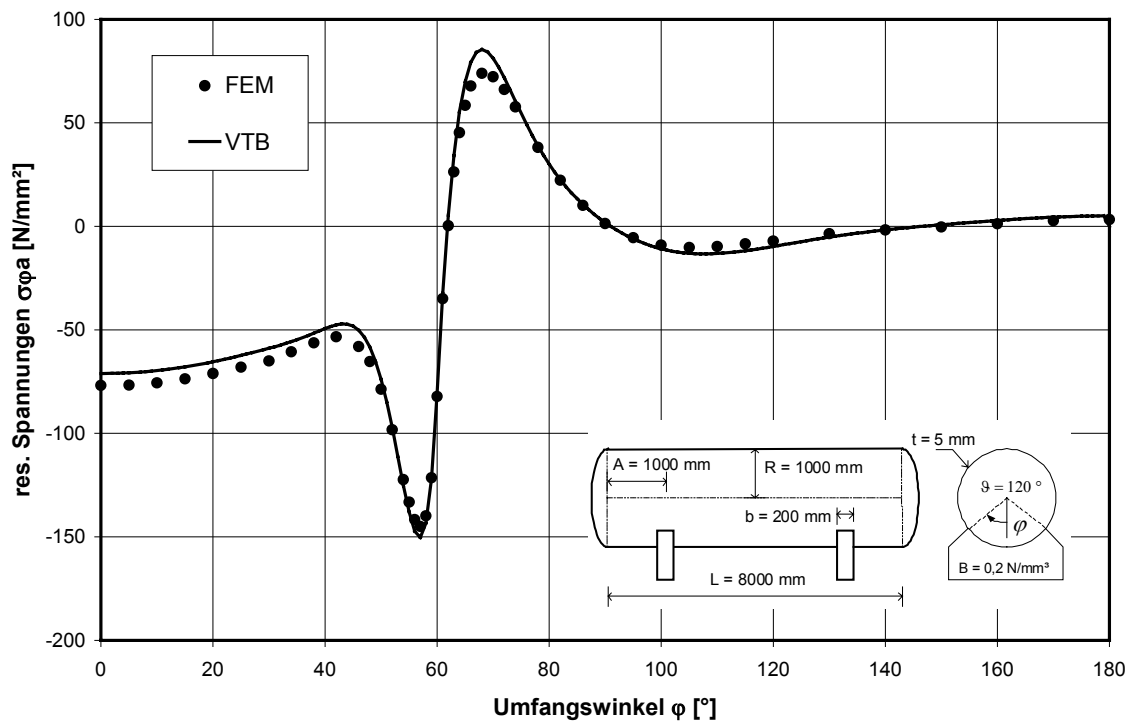
Durch Einsetzen von Gl. 8.7 in die folgende Gleichung :

$$Q = b \cdot R \cdot 2 \cdot \int_0^{\vartheta_0} P_z(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \cdot d\varphi \quad \text{Gl. 8.16}$$

und Auflösen nach  $P_0$  wird das vertikale Gleichgewicht erfüllt.

### 8.3.1 Ergebnisse der Vergleichsberechnungen mit Pressungsansatz

Für den Behälter in Kapitel 8.2 ergeben sich mit dem Pressungsansatz nach Gl. 8.4 ohne Iteration folgende Ergebnisse, die mit den Ergebnissen der FE-Berechnung verglichen werden:



**Abb.8.8:** Vergleich der Spannungen an der Außenseite für eine Bettungszahl von  $0,2 \text{ N/mm}^3$

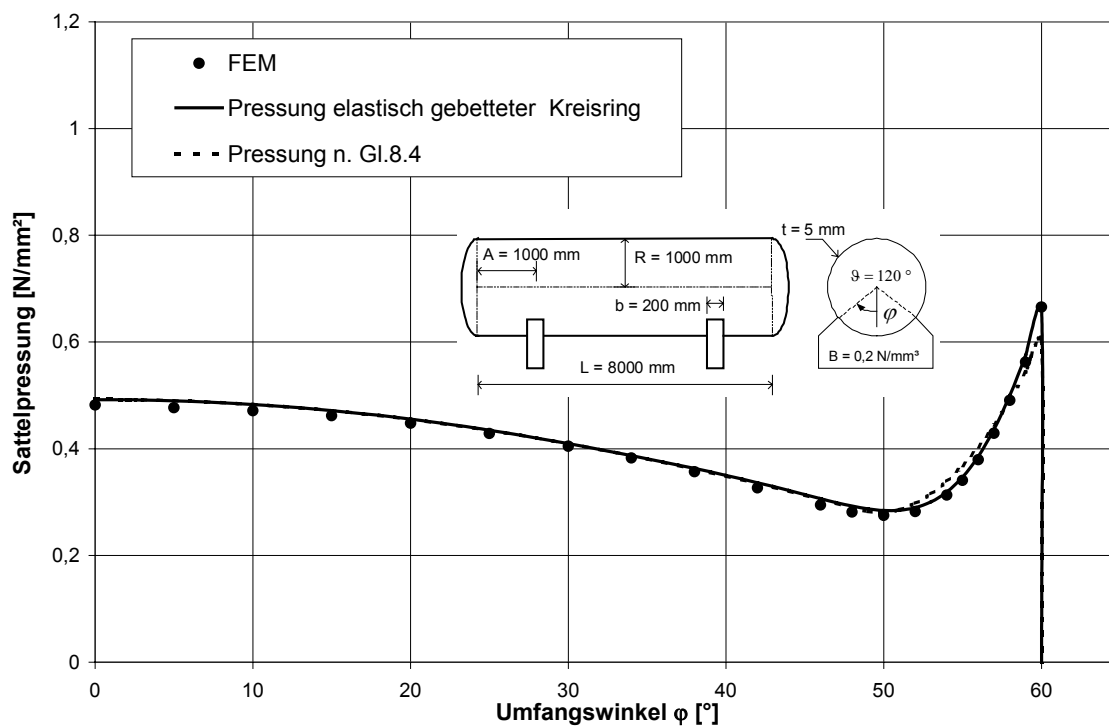


Abb. 8.9: Vergleich der Satteldrücken für eine Bettungszahl von  $0,2 \text{ N/mm}^3$

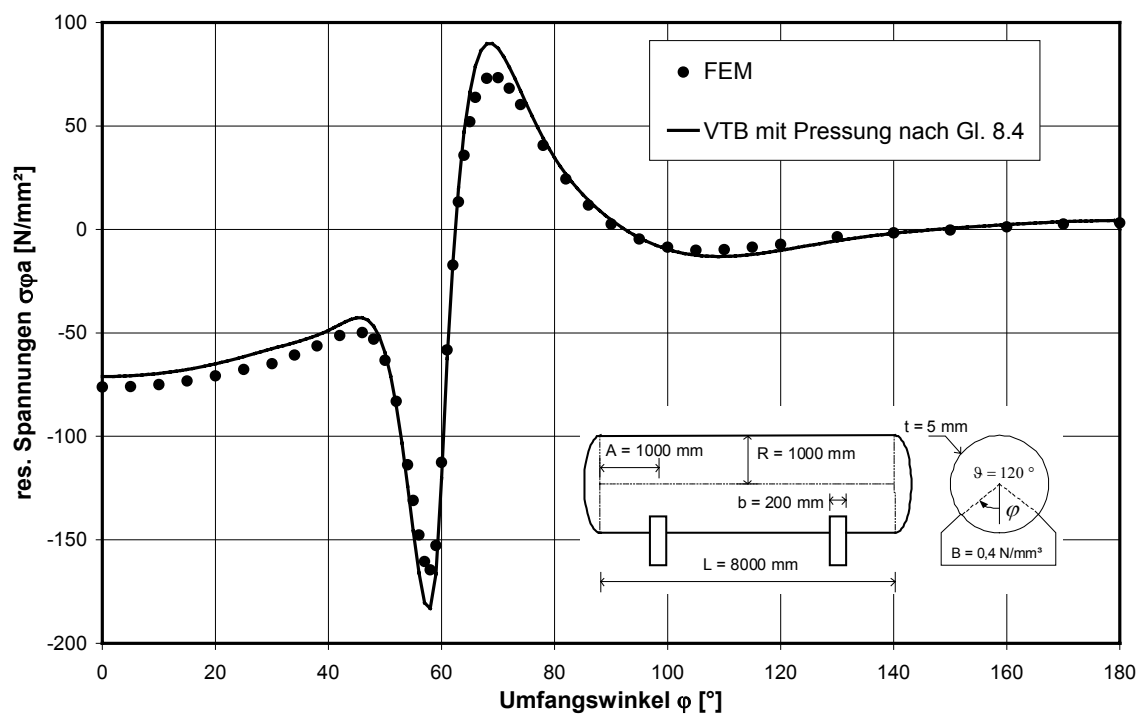
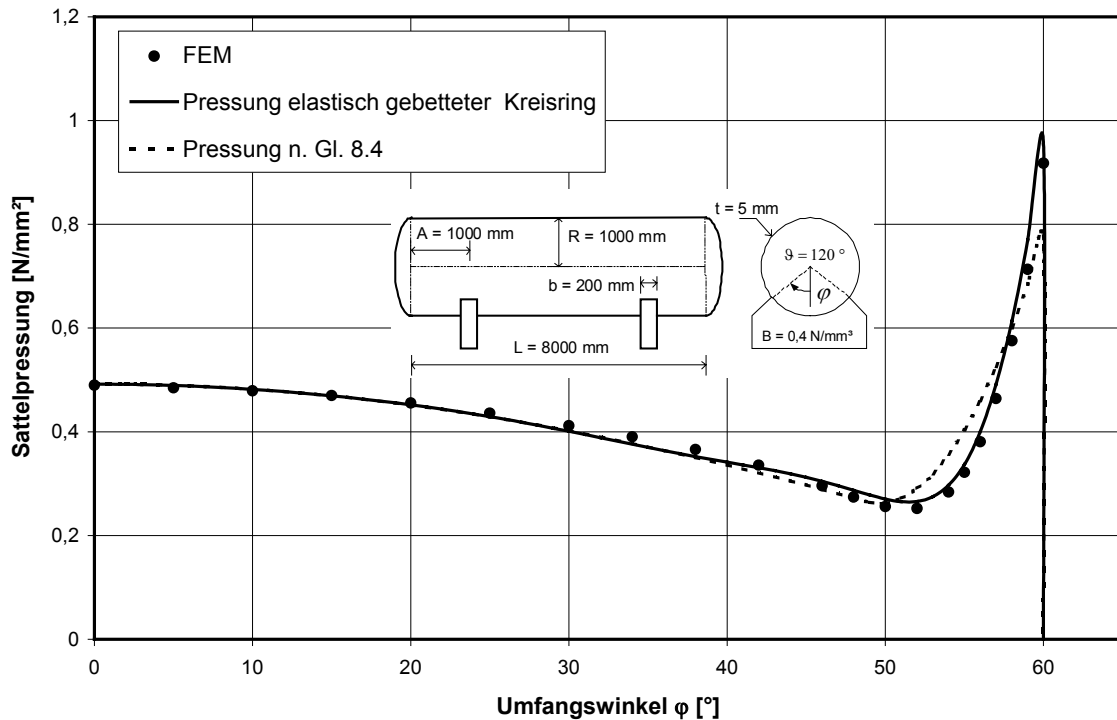


Abb. 8.10: Vergleich der Spannungen an der Außenseite für eine Bettungszahl von  $0,4 \text{ N/mm}^3$



**Abb. 8.11:** Vergleich der Sattelpressungen für eine Bettungszahl von  $0,4$  N/mm<sup>3</sup>

Es zeigt sich, wie im Fall der starren Lagerung, dass bei Kenntnis der zu erwartenden Auflagerpressung der Rechenaufwand erheblich reduziert wird und dennoch im Vergleich zur FEM-Methode sehr gut übereinstimmende Ergebnisse erzielt werden. Im Fall der weichen Lagerung mit  $B = 0,2$  N/mm<sup>3</sup> wird ein praktisch identisches Ergebnis erzielt, was auf den sehr genauen Pressungsansatz zurückzuführen ist.

Für die steifere Lagerung mit  $B = 0,4$  N/mm<sup>3</sup> wird eine leicht höhere maximale Spannungen ermittelt, die aber im vertretbaren Bereich liegt. In diesem Fall zeigt sich auch, dass im Fall eines nicht ganz exakten Pressungsansatzes am Sattelhorn der Fehler in der Berechnung der maximalen Spannungen in Umfangsrichtung nur gering ist. Entscheidend ist, dass die Sattelpressung im tieferen Bereich richtig ermittelt wird und am Sattelhorn die resultierende Kraft im Bereich der Pressungsspitze stimmt. Fehler im qualitativen Verlauf werden dann durch die Berechnung am elastisch gebetteten Kreisring ausgeglichen.

Insgesamt kann festgestellt werden, dass der Pressungsansatz nach Gl. 8.4 ausreichend genau ist und sich im Zusammenhang mit dem Berechnungsverfahren für eine vereinfachte Bestimmung der maximalen Spannungen in Umfangsrichtung eignet.

### 8.3.2 Parametersstudie zur Bestimmung der maximalen Spannungen am Sattelhorn

Da die Berücksichtigung einer weichen Zwischenschicht bisher noch nicht Gegenstand von Untersuchungen war, wurde auf Grundlage der Berechnung unter Verwendung des Pressungsansatzes eine Parameterstudie mit dem Ziel durchgeführt, einen Zusammenhang zwischen den Behälterparametern und den maximal auftretenden Spannungen am Sattelhorn zu ermitteln, der zu einer einfachen Entwurfsformel führt. Die Vorgehensweise zur Erfassung der relevanten Parameter wurde in zwei Teilschritte gegliedert. Zunächst wurde unter Vorgabe einer Sattelkonstruktion der Einfluss der Behältergeometrie ermittelt. Danach wurden die Parameter der Sattelkonstruktion variiert und deren Einflüsse erfasst.

#### 8.3.2.1 Einfluss der Behältergeometrie

Zur Erfassung des Einflusses der Behältergeometrie, die durch Behälterlänge, Radius, Blechdicke und Bodenabstand vom Sattel bestimmt wird, wurden drei Grundbehälter mit den Radien 0,5 m, 1,0 m und 1,5 m betrachtet. Diese Grundbehälter haben als feste Parametergrößen einen Sattelum-schießungswinkel von  $120^\circ$ , eine Sattelbreite von  $0,2 \cdot R$  und eine weiche Lagerung die durch eine Bettungszahl von  $0,2 \text{ N/mm}^3$  gekennzeichnet ist. Als Abschlussböden werden Klöpperböden berücksichtigt, deren Bodentiefe vereinfacht mit  $H = 0,2 R$  angegeben werden kann. Die weiteren Behälterparameter Bodenabstand, Blechdicke und Behälterlänge wurden innerhalb folgender Grenzen variiert:

$$0,25R < A < 2,0R$$

$$R/300 < t < R/100$$

$$4R < L < 12R$$

In den folgenden Abbildungen 8.12 und 8.13 werden zunächst die Veränderungen der maximalen Spannungen bei Variation der Schalendicke und des Bodenabstandes dargestellt.

Die variierten Parameter sind die maßgebenden für die Steifigkeit des Behälters am Sattelhorn. Man erkennt, dass eine Zunahme der Steifigkeit, sei es durch Vergrößerung der Schalendicke oder durch Verringerung des Bodenabstandes, eine Abminderung der maximalen Spannungen zu Folge hat.

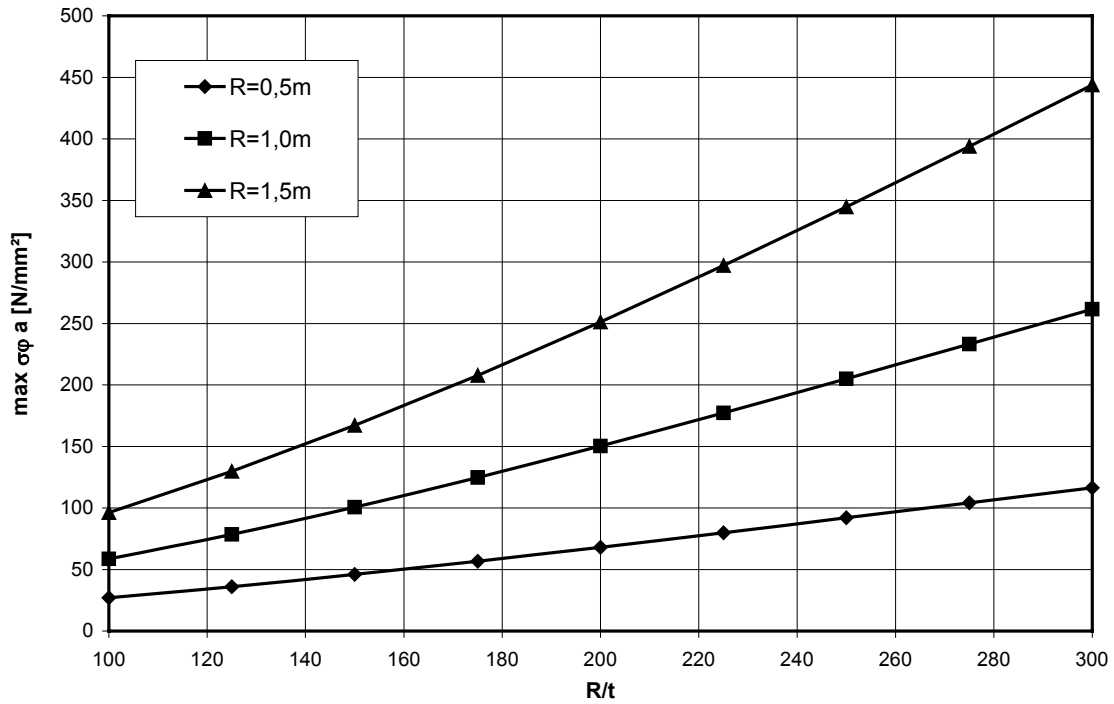


Abb. 8.12: Variation der Blechdicke  $t$  bei  $A/R = 1,0$

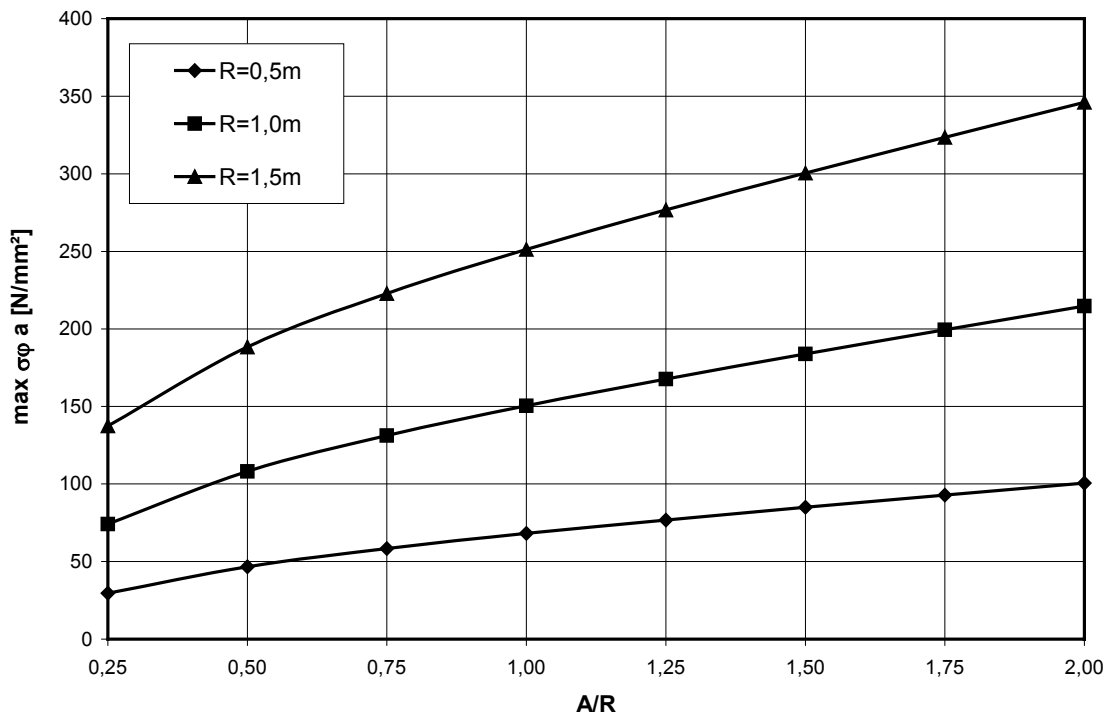


Abb. 8.13: Variation des Bodenabstandes  $A$  bei  $R/t = 200$

Zur Erfassung der Zusammenhänge in Form einer einfach handhabbaren Formel hat sich für den hier vorliegenden Fall einer weichen Lagerung gezeigt, dass eine Ermittlung der Zusammenhänge in Anlehnung an die Vorgehensweise von Krupka zu ausreichend genauen Ergebnissen führt. Dabei wird ausgehend von einer Grundspannung der Einfluss der einzelnen Behälterparameter durch Korrekturfaktoren ermittelt.

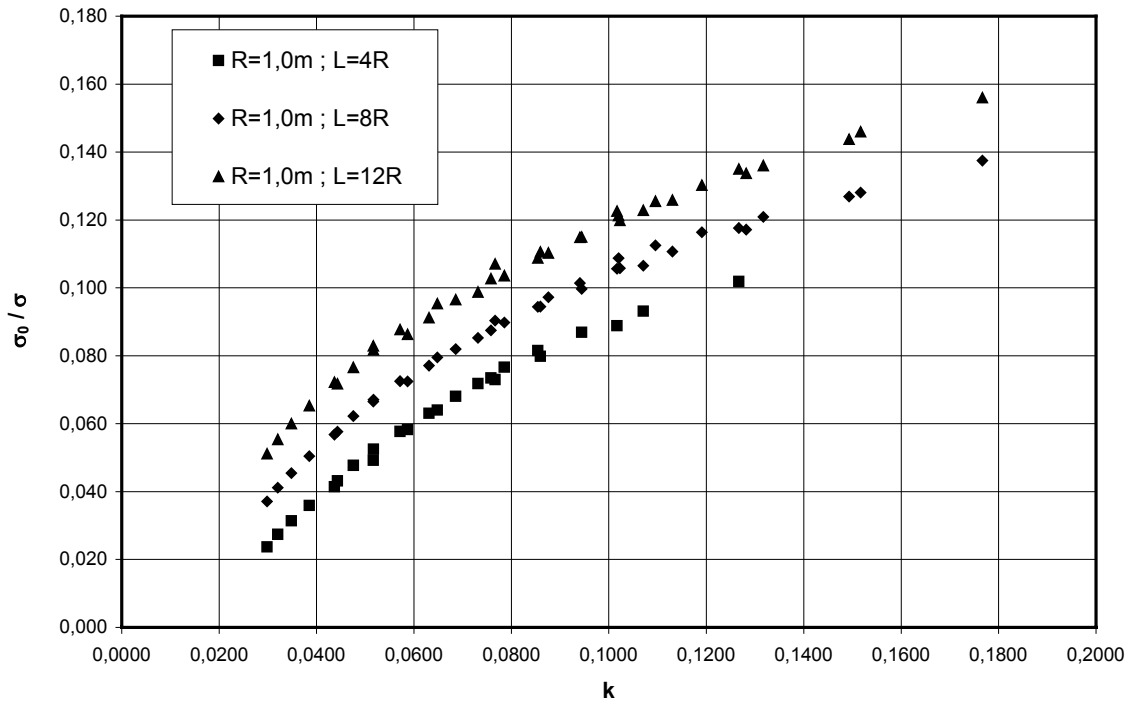
Die Grundspannung wird in diesem Fall aus der resultierenden vertikalen Auflagerkraft, der Blechdicke und dem Behälterradius nach folgender Formel ermittelt:

$$\sigma_0 = \frac{Q}{t^2} \cdot \sqrt[4]{\frac{t}{R}} \quad \text{Gl. 8.17}$$

Um die in den Abb. 8.12 und 8.13 dargestellten Einflüsse des Bodenabstandes und der Blechdicke zu erfassen werden die beiden Behälterparameter zu einem Beiwert  $k$  nach der folgenden Formel zusammengefasst:

$$k = \frac{\bar{A}}{R} \cdot \sqrt{\frac{t}{R}} \quad \text{mit} \quad \bar{A} = A + \frac{2}{3}H \quad \text{Gl. 8.18}$$

Um die in den Abbildungen 8.12 und 8.13 dargestellten Abhängigkeiten über den Beiwert  $k$  nach Gl. 8.18 zu erfassen, ist in der Abbildung 8.14 exemplarisch für den Radius 1,0 m das Verhältnis der Grundspannung nach Gl. 8.17 zur tatsächlichen Spannung über den Beiwert  $k$  abgebildet. Zusätzlich ist in Abbildung 8.14 das Ergebnis nach Variation der Behälterlänge dargestellt:



**Abb. 8.14:** Zusammenhang zwischen Beiwert  $k$  und der Grundspannung

Die in Abbildung 8.14 dargestellten Zusammenhänge gelten auch für die Grundbehälter mit den Radien 0,5 m und 1,5 m und lassen sich mathematisch über eine Logarithmusfunktion der Form:

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = C_1 \cdot \ln(k) + C_2 \quad \text{Gl. 8.19}$$

beschreiben. Es hat sich gezeigt, dass die Koeffizienten  $C_1$  und  $C_2$  linear abhängig sind von der Behälterlänge und dem Radius und damit die Spannungen für die drei Grundbehälter nach folgender Formeln bestimmt werden können:

$$\sigma_1 = \frac{Q}{t^2} \cdot \sqrt[4]{\frac{t}{R}} \cdot f_1(\bar{A}, L, R) \quad \text{Gl. 8.20}$$

mit

$$f_1(\bar{A}, L, R) = \left[ \left( \frac{k_L + 51}{1000} \right) \cdot \ln \left( \frac{\bar{A}}{R} \cdot \sqrt{\frac{t}{R}} \right) \right] + \frac{k_L + 17}{100} \quad \text{Gl. 8.21}$$

$$k_L = \frac{L}{2 \cdot R} + 3 \cdot \frac{R}{R_0}, \quad R_0 = 1000 \text{ [mm]}.$$

Der Index 1 in Gl. 8.20 soll kennzeichnen, dass der bisher aufgestellte Zusammenhang nur für die festen Parametergrößen  $b=0,2R$ ,  $B=0,2 \text{ N/mm}^3$  und einen Sattelumschließungswinkel  $\vartheta_0=120^\circ$  gilt.

### 8.3.2.2 Einfluss der Sattelkonstruktion

Im Fall der Lagerung auf einer weichen Zwischenschicht, ist die Sattelkonstruktion durch die Sattelbreite, den Sattelumschließungswinkel und die Bettungszahl der weichen Zwischenschicht charakterisiert. Die Variation dieser Parameter erfolgte dabei innerhalb folgender Grenzen:

$$0,1R < b < 0,3R$$

$$0,1 \text{ N/mm}^3 < B < 0,4 \text{ N/mm}^3$$

Als zusätzlicher Sattelumschließungswinkel wurde ein Winkel von  $\vartheta_0=90^\circ$  betrachtet.

In der folgenden Abbildung 8.15 ist der Einfluss einer veränderlichen Sattelbreite für die drei Grundbehälter mit  $L = 8 R$  auf die maximalen Spannungen in Umfangsrichtung dargestellt:

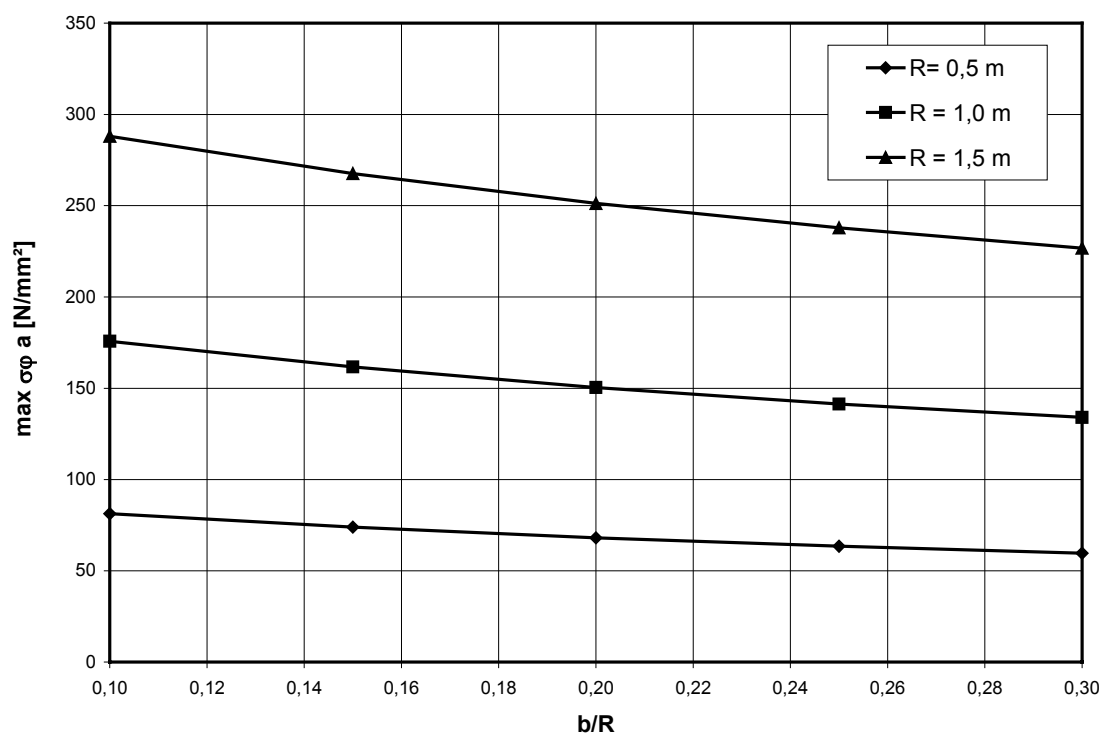


Abb. 8.15: Variation der Sattelbreite

Der Verlauf zeigt einen mit steigendem Radius zunehmenden Einfluss der Sattelbreite. Im Rahmen der bisherigen Vorgehensweise muss die Veränderungen der maximalen Spannung nach Abbildung 8.15 in Bezug zu den bisher ermittelten maximalen Spannungen der Grundbehälter nach Gl. 8.20 gesetzt werden. Dabei zeigt sich eine degressive Abnahme des Einflusses der Sattelbreite, der in Ergänzung zu Gl. 8.20 über folgenden Korrekturfaktor berücksichtigt werden kann:

$$f_2(b, R) = \sqrt[4]{\frac{R}{5 \cdot b}} \quad \text{Gl. 8.22}$$

Für die Variation der Bettungsziffer kann bei gleicher Vorgehensweise ebenfalls ein Korrekturfaktor der Form:

$$f_3(B) = \frac{5}{6 - \frac{B}{B_0}} \quad \text{mit} \quad B_0 = 0,2 \text{ [N/mm}^3\text{]} \quad \text{Gl. 8.23}$$

ermittelt werden.

Für den Sattelumschließungswinkel  $120^\circ$  können damit die maximalen Spannungen in Umfangsrichtung nach folgender Gleichung bestimmt werden:

$$\sigma_{120^\circ} = \frac{Q}{t^2} \cdot \sqrt[4]{\frac{t}{R}} \cdot f_1(\bar{A}, L, R) \cdot f_2(b, R) \cdot f_3(B) \quad \text{Gl. 8.24}$$

mit:  $f_1$  nach Gl. 8.21,  $f_2$  nach Gl. 8.22 und  $f_3$  nach Gl. 8.23

Für den zusätzlich betrachteten Sattelumschließungswinkel von  $90^\circ$  haben sich die gleichen Zusammenhänge wie für  $120^\circ$  gezeigt. Bis zu einer Behälterlänge von ca.  $8R$  kann die maximale Spannung durch einen konstanten Erhöhungsfaktor aus den Spannungen für  $\vartheta_0 = 120^\circ$  bestimmt werden. Für größere Längen hat sich ein geringer werdender Einfluss der Behälterlänge in den Zusammenhängen nach Abbildung 8.14 gezeigt. Um die Formel für den Sattelumschließungswinkel von  $120^\circ$  als Ansatz beizubehalten, ist deshalb neben dem konstanten Erhöhungsfaktor ein weiterer Korrekturwert in Abhängigkeit der Behälterlänge ermittelt worden:

$$f_4(L, R) = 1,7 \cdot \left( \frac{6}{1000} \cdot \left( \left( \frac{L}{R} \right)^2 - 10 \frac{L}{R} \right) + 1,1 \right) \quad \text{Gl. 8.25}$$

Die maximalen Spannungen für den Sattelumschließungswinkel von  $90^\circ$  können damit über Gl. 8.24 und 8.25 bestimmt werden zu:

$$\sigma_{90^\circ} = \sigma_{120^\circ} \cdot f_4(L, R) = \frac{Q}{t^2} \cdot \sqrt[4]{\frac{t}{R}} \cdot f_1(\bar{A}, L, R) \cdot f_2(b, R) \cdot f_3(B) \cdot f_4(L, R) \quad \text{Gl. 8.26}$$

### 8.3.2.3 Zusammenfassung

Um die ermittelten Formeln in übersichtlicher Form darzustellen werden diese hier noch einmal zusammengefasst dargestellt. Die maximale Spannung am Sattelhorn bei Lagerung auf einer weichen Zwischenschicht kann ermittelt werden aus:

$$\sigma = \frac{Q}{t^2} \cdot \sqrt[4]{\frac{t}{R}} \cdot f_1(\bar{A}, L, R) \cdot f_2(b, R) \cdot f_3(B) \cdot f_4(\vartheta, L, R)$$

mit

$$f_1(\bar{A}, L, R) = \left[ \left( \frac{k_L + 51}{1000} \right) \cdot \ln \left( \frac{\bar{A}}{R} \cdot \sqrt{\frac{t}{R}} \right) \right] + \frac{k_L + 17}{100}$$

$$k_L = \frac{L}{2 \cdot R} + 3 \cdot \frac{R}{R_0} \quad \text{wobei} \quad R_0 = 1000 \text{ [mm]}$$

und

$$f_2(b, R) = \sqrt[4]{\frac{R}{5 \cdot b}}$$

und

$$f_3(B) = \frac{5}{6 - \frac{B}{B_0}} \quad \text{wobei} \quad B_0 = 0,2 \text{ [N/mm}^3\text{]}$$

und

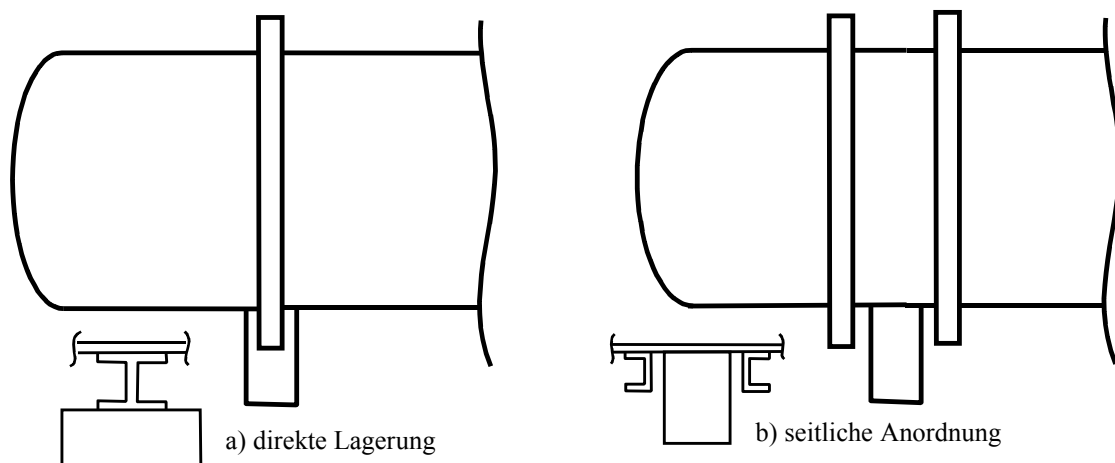
$$f_4(L, R) = \left\{ \begin{array}{ll} 1,0 & \text{für } \vartheta_0 = 120^\circ \\ 1,7 \cdot \left( \frac{6}{1000} \cdot \left( \left( \frac{L}{R} \right)^2 - 10 \frac{L}{R} \right) + 1,1 \right) & \text{für } \vartheta_0 = 90^\circ \end{array} \right\}$$

wobei Zwischenwerte linear interpoliert werden dürfen

## Kapitel 9 Berücksichtigung von Aussteifungsringen

### 9.1 Allgemeines

Das vorgestellte Verfahren auf Grundlage der verallgemeinerten technischen Biegetheorie ist auch anwendbar auf den Fall des durch Ringe ausgesteiften Behälters. Dabei können zwei mögliche Formen der Anordnung von Aussteifungsringen berücksichtigt werden. Der erste Fall ist ein Aussteifungsring direkt über dem Sattel, wodurch nicht mehr die Behälterschale direkt auf dem Sattel aufliegt, sondern der Ring. Dieser Fall ist in der Regel aus statischer und wirtschaftlicher Sicht der günstigste, da hier die Erhöhung der Steifigkeit des Behälters im Sattelbereich am größten und damit am effektivsten ist. Es tritt auch keine lokale Lasteinleitung in die dünnwandige Schale auf, die in den bisherigen Fällen zu hohen Biegespannungen führte. Der zweite Fall ist eine Anordnung von Aussteifungsringen seitlich des Sattels. Hier erfolgt die Lagerung des Behälters weiterhin über die Schale auf dem Sattel und die aussteifende Wirkung der Ringe ist mit der des Behälterbodens vergleichbar. Je nach Abstand der Ringe vom Sattel können die maximalen Spannungen in der Behälterschale am Sattelhorn oder in den äußeren Punkten der Ringe auftreten.

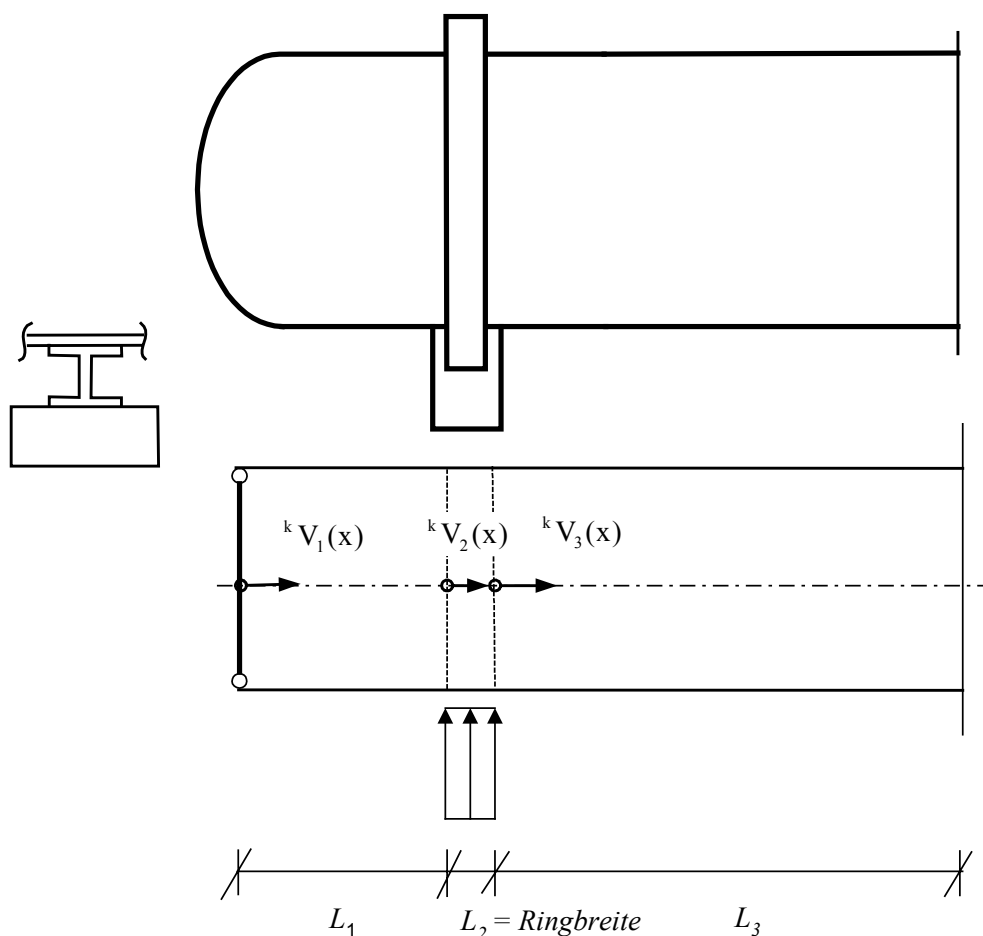


**Abb. 9.1:** mögliche Anordnungen von Aussteifungsringen

In beiden Fällen ist die Steifigkeit des Rings von Bedeutung, so dass diese explizit im Berechnungsverfahren berücksichtigt werden muss. Hierzu wird anhand zweier Beispiele die Vorgehensweise zur Berücksichtigung von Aussteifungsringen vorgestellt und mit Ergebnissen einer FE-Berechnung verglichen. Zusätzlich werden die Ergebnisse nach dem Berechnungsverfahren denen von Zick gegenübergestellt, um auch hier die Schwachpunkte des Näherungsverfahrens von Zick aufzuzeigen.

## 9.2 Aussteifungsringe direkt über dem Sattel

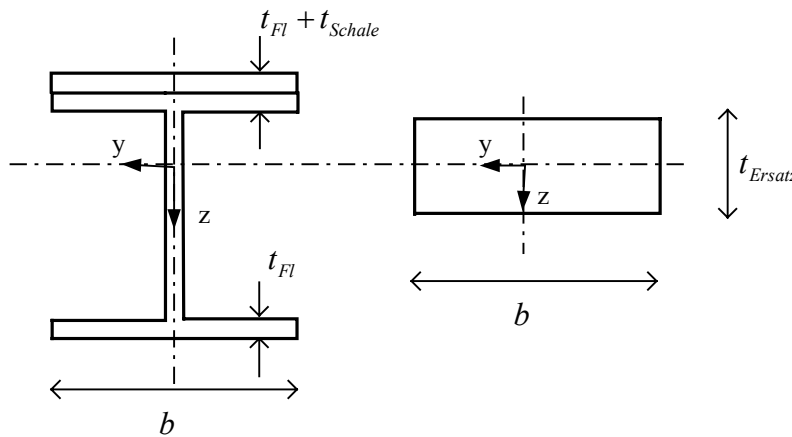
Die Berechnung unter Berücksichtigung des Einflusses von Aussteifungsringen direkt über dem Sattel erfolgt wie im Fall des nicht aussteiften Behälters bei einer starren Lagerung. Zur Berechnung des Schubflusses nach der verallgemeinerten technischen Biegetheorie wird der Behälter nach Abb. 9.2 in drei Bereiche aufgeteilt, wobei der mittlere Bereich nun der Breite des Aussteifungsrings entspricht.



**Abb. 9.2:** Aufteilung in drei Bereiche bei Aussteifungsring direkt über dem Sattel

Um die Steifigkeit des Kreisrings zu berücksichtigen, wird für den mittleren Bereich, im Gegensatz zu der bisherigen Vorgehensweise, nicht die Dicke der Schale, sondern eine Ersatzdicke angesetzt. Diese Dicke wird so gewählt, dass die Behälterschale über die Ringbreite die gleiche Steifigkeit in Umfangsrichtung besitzt wie der Aussteifungsring. Da in der verallgemeinerten technischen Biegetheorie, unabhängig von der Einheitsverwölbung, von einer Spannungsverteilung über die Schalendicke nach der klassischen Biegetheorie ausgegangen wird, kann die Steifigkeit über das klassische Flächenträgheitsmoment berücksichtigt werden. Die Ersatzdicke bestimmt sich dann über das Flächenträgheitsmoment eines Rechteckquerschnitts, welches dem des Kreisringquerschnitts entsprechen muss.

$$\frac{b \cdot t_{\text{Ersatz}}^3}{12} = I_{yy} \quad \Rightarrow \quad t_{\text{Ersatz}} = \sqrt[3]{\frac{I_{yy} \cdot 12}{b}} \quad \text{Gl. 9.1}$$



**Abb. 9.3:** Ringquerschnitt und Ersatzquerschnitt für die Berechnung nach der VTB

Der Schubfluss in der Behälterschale wird, wie im Fall der starren Lagerung in Kapitel 7, im Abstand

$$cs_{\text{starr}} = \frac{4}{100} \cdot R \quad \text{Gl. 9.2}$$

vom Sattelrand bestimmt. In der Berechnung des elastisch gebetteten Kreisrings wird als Ringquerschnitt der Aussteifungsring samt Behälterschale bis zum Schnitt in dem der Schubfluss bestimmt wurde, berücksichtigt.

Für die Wahl der Bettungsziffer hat sich durch Vergleichsrechnungen gezeigt, dass der Ansatz ebenfalls analog zu Kapitel 7 über:

$$B = 3,0 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^3} \cdot R [\text{cm}] \quad \text{Gl. 9.3}$$

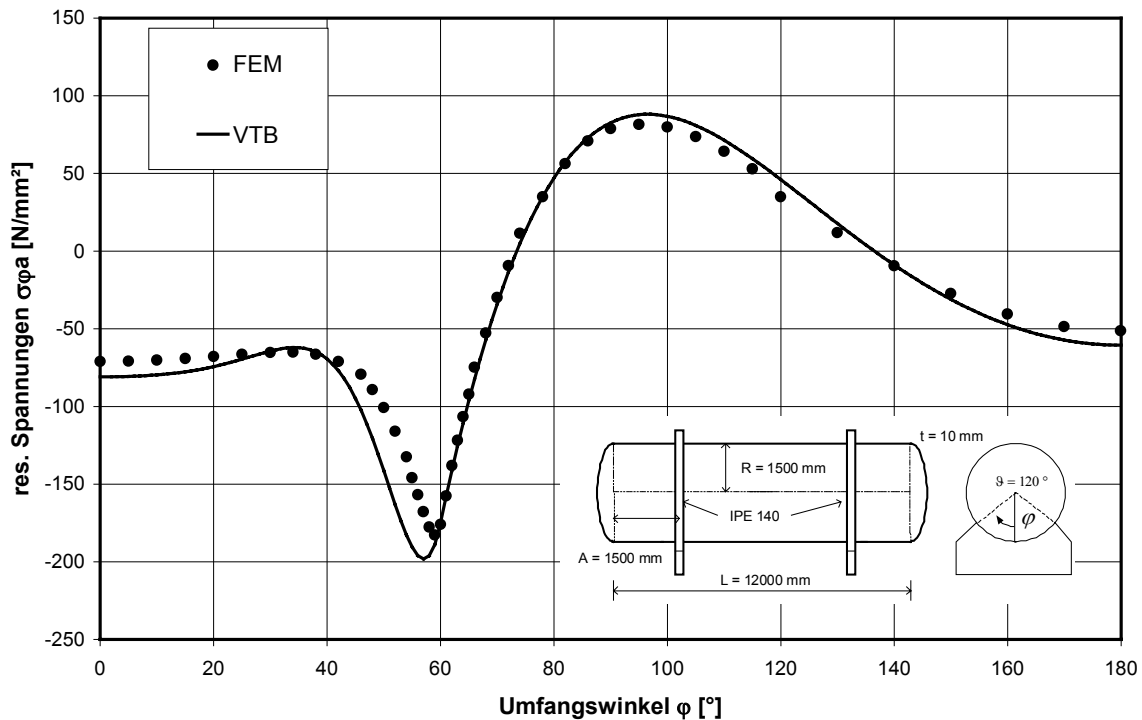
erfolgen kann. Als Pressungsansatz zu Beginn der iterativen Berechnung wird ein in Umfangsrichtung konstanter Verlauf verwendet.

Da in der Regel die Verwendung von Aussteifungsringen bei großen Behältern in Betracht kommt, wird zur Demonstration der Eignung des Verfahrens für diesen Fall ein Behälter mit folgenden Abmessungen betrachtet:

Radius:	1500 mm
Länge der Zylinderschale:	12000 mm
Bodenabstand:	1500 mm
Blechdicke der Schale:	10 mm
Sattelumschließungswinkel:	120 °
Wichte der Flüssigkeitsfüllung:	$10^{-5}$ N/mm <sup>3</sup>

Aussteifungsring: IPE-140 über dem Sattel

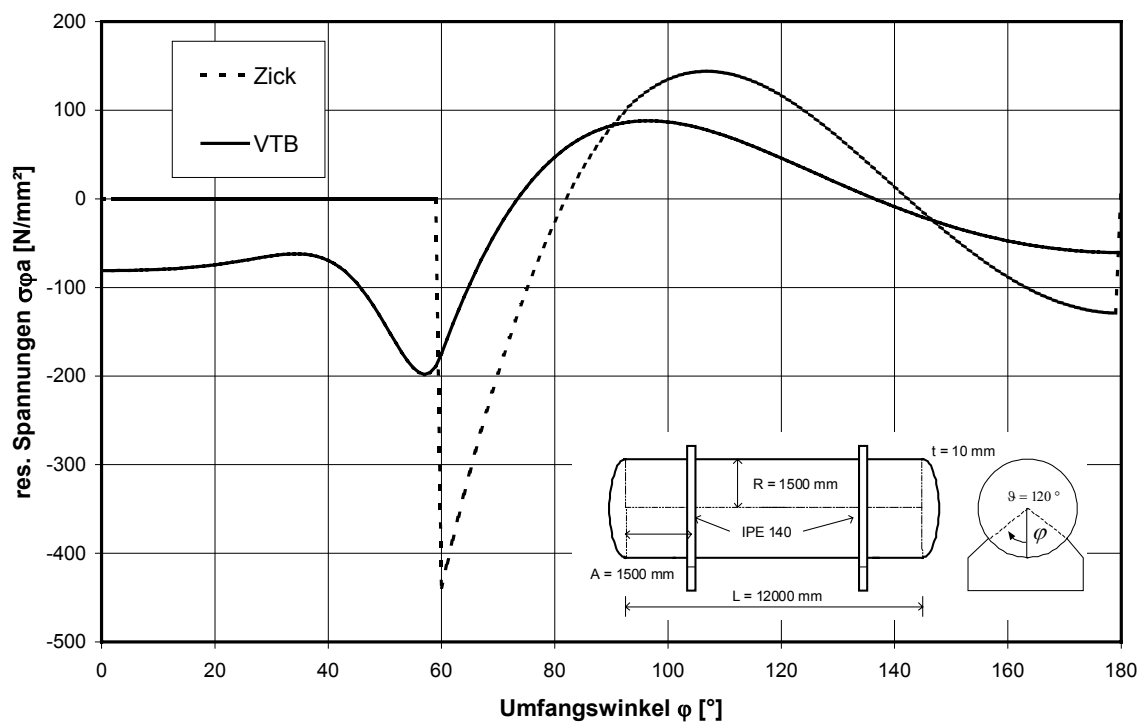
Bei diesem Behälter treten die maximalen Spannungen an den außen liegenden Flanschen des IPE-Ringträgers auf, die in der folgenden Abbildung 9.4 im Vergleich zu den Ergebnissen der FE-Methode dargestellt werden.



**Abb. 9.4:** Spannungsverlauf im äußeren Flansch des IPE140 - Aussteifungsrings

Der Vergleich zeigt durch den übereinstimmenden qualitativen Verlauf, dass mit dem Berechnungsverfahren das Tragverhalten prinzipiell richtig erfasst wird. Die Absolutwerte der Spannungen zeigen vor und nach dem Sattelhorn ebenfalls eine gute Übereinstimmung. Die maximalen Spannungen am Sattelhorn werden mit dem Berechnungsverfahren etwas höher erfasst als in der FE-Berechnung und der Ort des Maximums liegt auch mehr zum Satteltiefpunkt hin. Durch Variation der Bettungsziffer könnte hier eine bessere Übereinstimmung erzielt werden. Im Rahmen von weiteren Vergleichsberechnungen konnte aber kein einheitlicher Ansatz für die Bettungsziffer festgestellt werden, und in Anbetracht der geringen Abweichung bei der Ermittlung der maximalen Spannungen mit dem einfachen Ansatz nach Gl. 9.3 ist dies auch nicht notwendig.

Im Vergleich zu den Ergebnissen von Zick, die in Abb. 9.5 dargestellt sind, zeigt sich ebenfalls, dass mit dem gewählten einfachen Ansatz eine wesentlich genauere Erfassung der Beanspruchung gegeben ist.



**Abb. 9.5:** Vergleich der Spannungen nach Zick und nach dem eigenen Berechnungsverfahren

Mit dem Ersatzsystem von Zick, für den Fall eines Aussteifungsrings über dem Sattel (siehe Kapitel 3.4.1) wird zwar der qualitative Spannungsverlauf prinzipiell erfasst, aber, wie im Fall der starren Lagerung, wird mit dem Ansatz des Schubflusses nach der Balkentheorie das Tragverhalten des Behälters nicht ausreichend genau abgebildet, was am deutlichen Unterschied in den Absolutwerten der Spannungen zu sehen ist. Eine Vergrößerung der mittragenden Schalenbreite im Ansatz von Zick oder in dem von Brownell & Young, würde zwar für diesen Fall eine bessere Übereinstimmung erzielen, aber es würde weiterhin eine Abhängigkeit von der Steifigkeit des Ringes fehlen.

Beim Berechnungsaufwand zeigt sich, im Gegensatz zu den bisher vorgestellten Fällen, dass die Ergebnisse sehr schnell konvergieren. In diesem Fall wird schon nach 5 Iterationsschritten ein genaues Ergebnis erreicht. Ein genauerer Pressungsansatz, um den Berechnungsaufwand zu reduzieren, ist daher nicht notwendig und mit dem vorgestellten Verfahren liegt eine einfache und genaue Möglichkeit zur Berücksichtigung von Aussteifungsrings über dem Sattel vor.

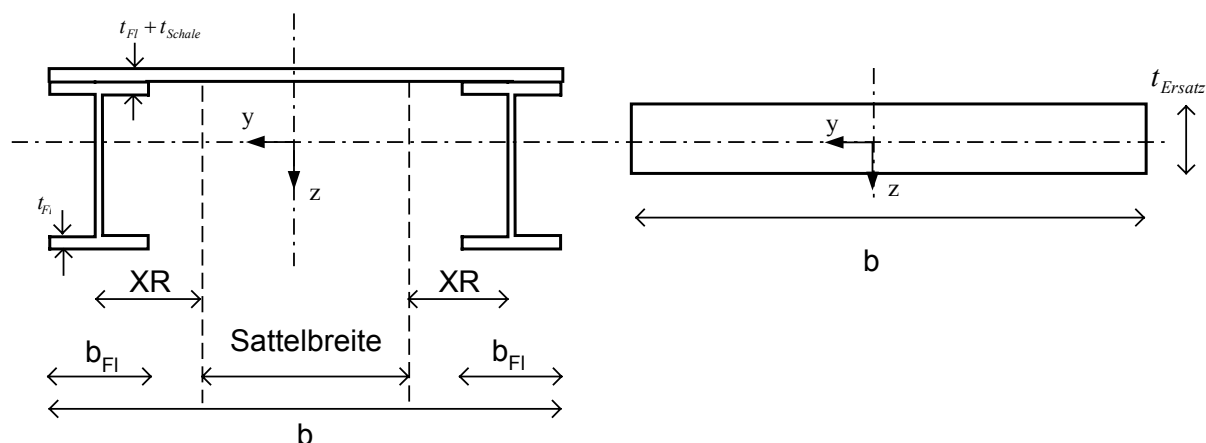
### **9.3 Aussteifungringe seitlich des Auflagers**

Für den Fall einer Aussteifung der Kreiszylinderschale durch seitlich des Sattels angeordnete Ringe müssen, je nach Abstand der Ringe vom Sattel, zwei Fälle unterschieden werden. Sind die Ringe direkt oder sehr nah am Sattel angeordnet, wirken die Ringe und die Schale über dem Sattel als ein Querschnitt und die maximalen Spannungen treten an den Flanschen der Ringe auf. Mit zunehmender Entfernung vom Sattelrand nehmen die Spannungen in den Flanschen ab und die maximalen Spannungen treten in der Behälterschale am Sattelhorn auf. Die aussteifende Wirkung der Ringe ist dann mit der des Behälterbodens vergleichbar.

Die Grenze, ab wann welcher Fall maßgebend wird, hängt sowohl von der Steifigkeit der Ringe als auch von den übrigen Behälterparametern ab und kann nicht eindeutig festgelegt werden. Um beide Fälle im Rahmen des Berechnungsverfahrens zu erfassen, werden zwei unterschiedliche Berechnungen vorgeschlagen. Zur Erfassung der maximalen Spannungen in den Ringflanschen erfolgt ein Nachweis analog zum Fall des Aussteifungsrings über dem Sattel, wie in Kapitel 9.1. Bei der Ermittlung der maximalen Spannungen in der Behälterschale muss die Steifigkeit und die Lage der Ringe berücksichtigt werden. Dies erfordert eine Erweiterung gegenüber den bisherigen Idealisierungen und wird in Kapitel 9.3.2 vorgestellt.

#### **9.3.1 Berechnung der maximalen Spannungen in den Ringflanschen**

Die Berechnung der auftretenden Spannungen in den Flanschen der Aussteifungsringe erfolgt im Prinzip wie in Kapitel 9.1. Da in diesem Fall angenommen wird, dass beide Ringe zusammen mit der Behälterschale über dem Sattel als ein Querschnitt wirken, muss dies auch in der Berechnung des Schubflusses nach der verallgemeinerten technischen Biegetheorie entsprechend berücksichtigt werden. Dazu wird die Länge des mittleren Bereichs durch den Abstand zwischen den äußeren Eckpunkten der Ringflansche entsprechend Abbildung 9.6 bestimmt. Die Ersatzdicke zur Berücksichtigung der Steifigkeit der Ringe, wird über das Flächenträgheitsmoment der Ringe im Verbund mit dem Steineranteil der Behälterschale und Umrechnung auf einen äquivalenten Rechteckquerschnitt bestimmt.



**Abb. 9.6:** Ringquerschnitte mit Behälterschale und äquivalenter Querschnitt für die Berechnung nach der VTB

Der Bettungsmodul und der Ort zur Bestimmung des Schubflusses nach der verallgemeinerten technischen Biegetheorie werden, wie in Kapitel 9.1, nach Gl. 9.2 und 9.3 angesetzt.

Wie im Fall der Aussteifung durch einen Ring über dem Sattel, kommt die Aussteifung durch Ringe seitlich des Sattels in erster Linie für große Behälter in Betracht. Hierzu wird ein Behälter mit folgenden Abmessungen betrachtet:

Radius:	1500 mm
Länge der Zylinderschale:	16000 mm
Bodenabstand:	3000 mm
Blechdicke der Schale:	18 mm
Sattelumschließungswinkel:	120 °
Wichte der Flüssigkeitsfüllung:	$10^{-5}$ N/mm <sup>3</sup>

Die Aussteifung erfolgt je Sattel durch zwei Ringe mit einem IPE-120 Profil. Als Abstand der Ringe vom Sattelrand wird für diesen Fall ein kleiner Wert von  $XR = 50$  mm gewählt. Bei diesem Abstand treten die maximalen Spannungen in den äußeren Flanschen der Ringe auf. In Abbildung 9.7 sind die Ergebnisse direkt im Vergleich zu den Ergebnissen nach der FE-Methode und nach dem Verfahren von Zick dargestellt.

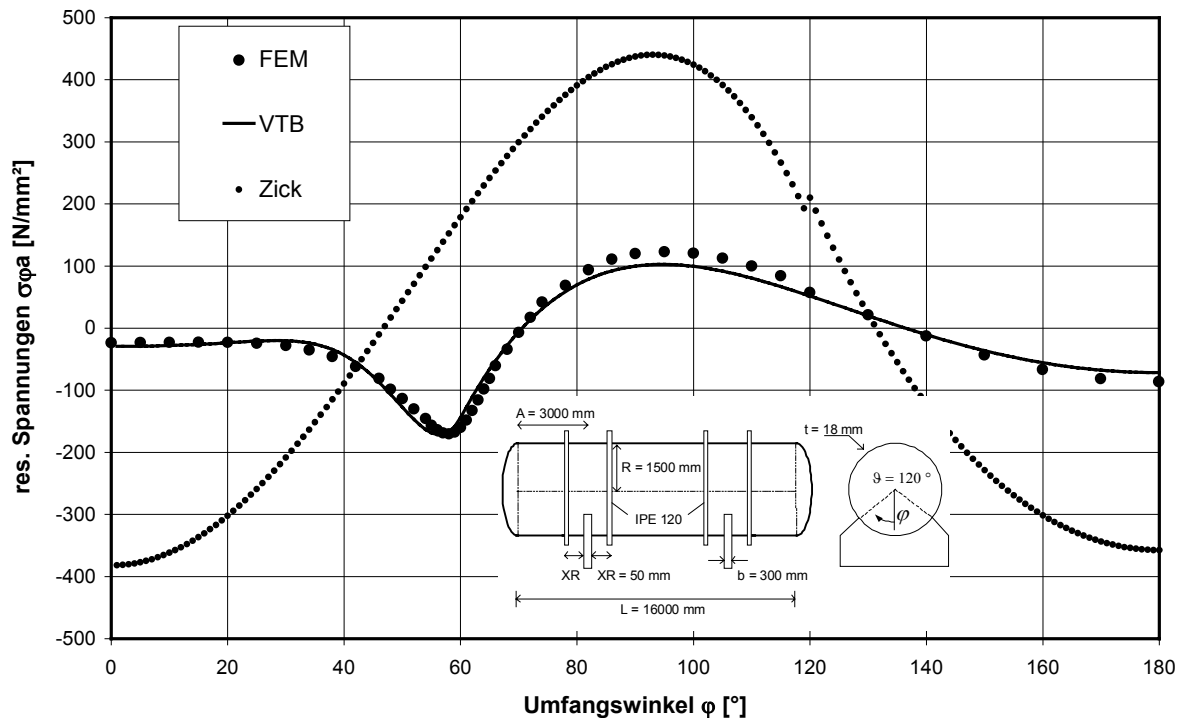


Abb. 9.7: Spannungen in den äußeren Flanschen der Ringe

Es zeigen sich wieder qualitativ und quantitativ übereinstimmende Verläufe für die Ergebnisse des eigenen Berechnungsverfahrens und der nach der FE-Methode. Im Vergleich zu Zick zeigt unabhängig vom Absolutwert der auftretenden Spannungen, der grundsätzlich andere Verlauf, dass das dem Verfahren von Zick zu Grunde liegende Ersatzsystem (siehe Kapitel 3.4.1), die realen Verhältnisse nicht widerspiegelt. Das Verfahren von Zick für Ringe seitlich des Sattels ist demnach nicht geeignet.

Das Konvergenzverhalten während der Iteration entspricht dem beim Fall der Ringe direkt über dem Sattel. Somit sind nur ca. 5 bis 10 Iterationsschritte erforderlich und ein genauerer Pressungsansatz ist nicht notwendig. Damit wurde gezeigt, dass für den Fall der seitlichen Anordnung von Aussteifungsringen der Spannungsverlauf in den Ringen mit dem neuen Verfahren realistisch erfasst werden kann.

### 9.3.2 Berechnung der Spannungen in der Behälterschale

Wie zu Beginn in Kapitel 9.1 erwähnt wurde, ist für den Nachweis der Spannungen in der Behälterschale für den Fall von Aussteifungsringen seitlich des Sattels eine Erweiterung der bisherigen Idealisierung erforderlich. Die Erweiterung betrifft die Einbeziehung der Aussteifungsringe unter Berücksichtigung ihrer Lage und Steifigkeit. Hierzu ist zunächst eine Betrachtung

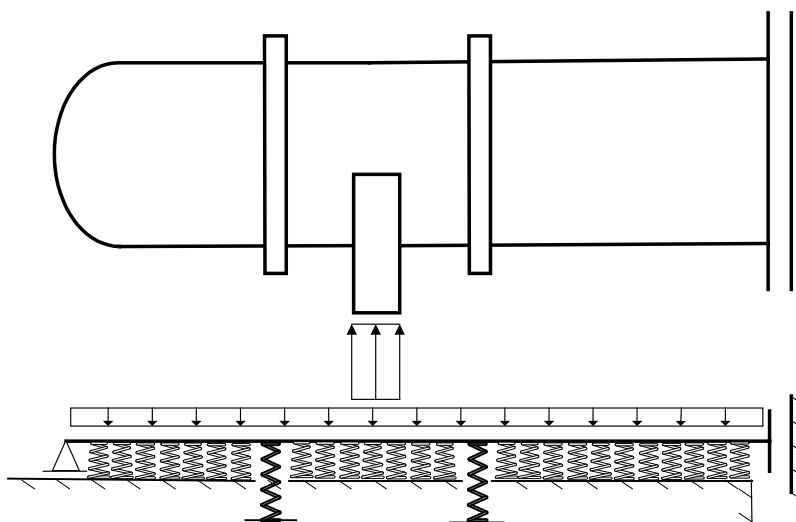
der Differentialgleichung der verallgemeinerten technischen Biegetheorie notwendig. Nach Kapitel 2.5.3.4, Gl. 2.68 ergab sich die Differentialgleichung für die Kreiszylinderschale zu:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( E^k C \cdot \frac{\partial^{4k} V(x)}{\partial x^{4k}} - G^k D \cdot \frac{\partial^{2k} V(x)}{\partial x^{2k}} + {}^k B \cdot V(x) = {}^k q_z \right) \quad \text{Gl. 9.4}$$

Die Herleitung dieser Differentialgleichung erfolgte über eine Variation des inneren und äußeren Potentials, wobei in Umfangsrichtung nur die Tragwirkung über die Biegemomente berücksichtigt wird. Aus der Variation des Potentials infolge dieser Biegemomente resultiert in der Differentialgleichung der Ausdruck:

$${}^k B \cdot V(x). \quad \text{Gl. 9.5}$$

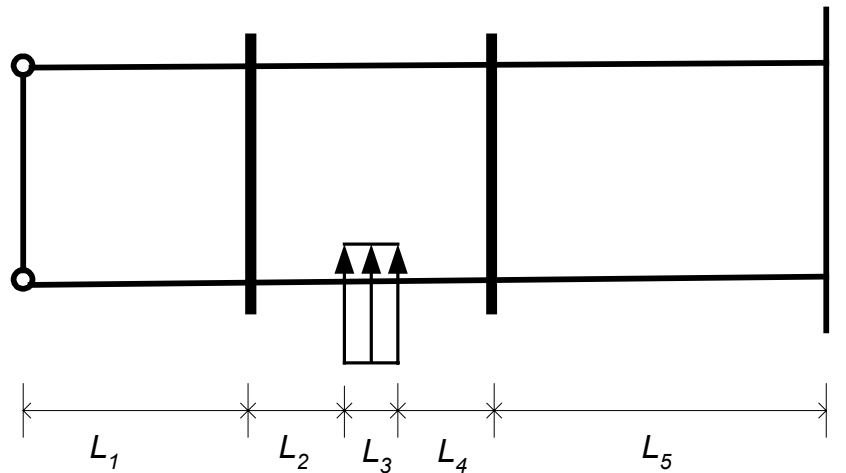
Unter Verwendung der Analogie zwischen der Differentialgleichung der verallgemeinerten technischen Biegetheorie und der des elastisch gebetteten Balkens, kann der Wert  ${}^k B$  auch als eine Bettungsziffer interpretiert werden. Die Wirkung eines Aussteifungsrings liegt in einer lokalen Erhöhung der Steifigkeit in Umfangsrichtung und ein Aussteifungsring wird sich nach dieser Analogie in erster Linie in einer Erhöhung dieser Bettungsziffer über eine kurze Länge ausdrücken. Fasst man diese erhöhte Bettungsziffer zu einer Federsteifigkeit zusammen, kann der Einfluss des Aussteifungsrings durch ein elastisch gefedertes Auflager berücksichtigt werden.



**Abb. 9.8:** Idealisierung der Aussteifungsringe in Form von Federn

Die Bestimmung der Federsteifigkeit erfolgt durch Ermittlung einer Ersatzdicke, wie im Fall des Aussteifungsrings direkt über dem Sattel in Kapitel 9.2, durch Berechnung der Bettungsziffer  ${}^k B$  für diese Ersatzdicke nach der verallgemeinerten technischen Biegetheorie und durch

Multiplikation dieser Bettungsziffer mit der Ringbreite. Die Berücksichtigung der Ringe in Form von gefederten Auflagern erfordert eine Aufteilung des Behälters in fünf Bereiche und die Formulierung weiterer Randbedingungen. Die Lösungsansätze werden aus Kapitel 6.4 übernommen.



**Abb. 9.9:** Aufteilung des Behälters in fünf Bereiche

Die Randbedingungen links und rechts, sowie die Übergangsbedingungen im Sattelbereich ändern sich gegenüber den in Kapitel 6.5 vorgestellten nicht. Im Übergang, an dem die Ringe angeordnet sind, sind die ersten drei Bedingungen ebenfalls identisch mit den bisherigen Übergangsbedingungen. Die letzte fehlende Bedingung lässt sich über die Analogie zum elastisch gebetteten Balken und der Forderung nach Gleichgewicht zwischen Querkraft und Auflagerkraft im elastisch gefederten Lager bestimmen:

$$E^k C \cdot \frac{\partial^3 V_1(L_1)}{\partial x^3} - E^k C \cdot \frac{\partial^3 V_2(L_1)}{\partial x^3} = C_F \cdot V_1(L_1) \quad \text{Gl. 9.6}$$

Zur endgültigen Lösung wird der Schubfluss wie in den vorangegangenen Fällen bei

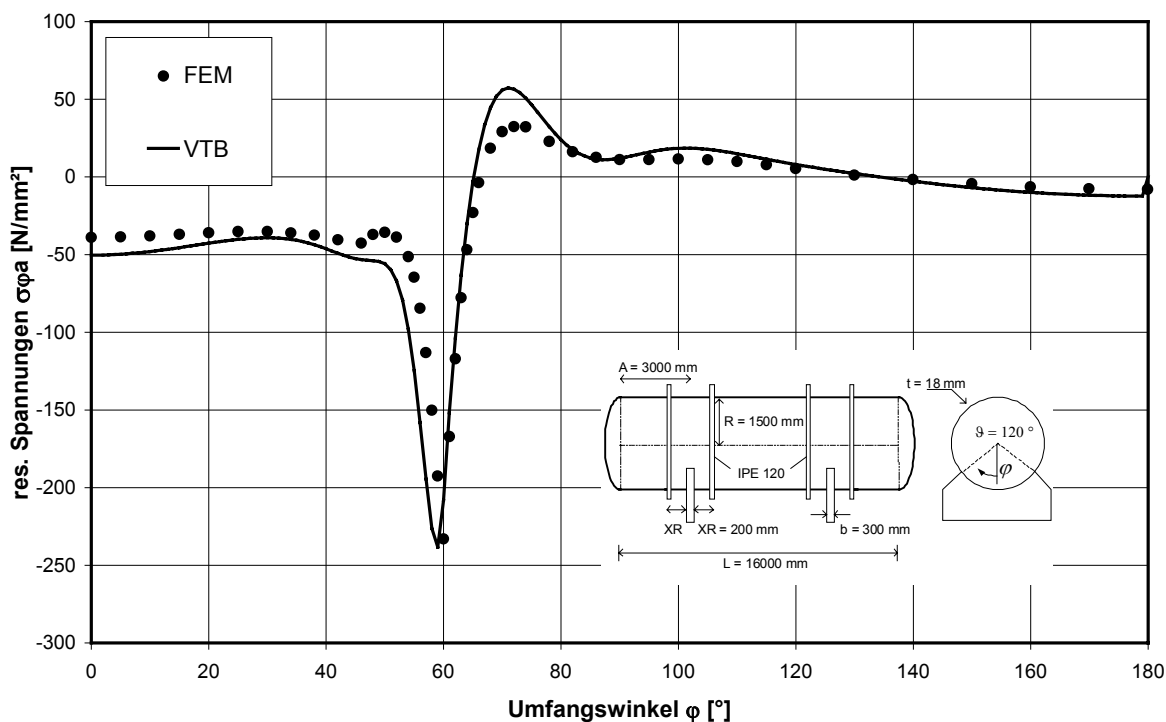
$$c s_{\text{starr}} = \frac{4}{100} \cdot R \quad \text{Gl. 9.7}$$

bestimmt und als Bettungsziffer für den elastisch gebetteten Kreisring:

$$B = 3,0 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^3} \cdot R \text{ [cm]} \quad \text{Gl. 9.8}$$

verwendet. Zu Beginn der Iteration wird wieder eine konstante Pressung angesetzt. Bei dem Behälter in Kapitel 9.3.1 wird der Abstand der Aussteifungsringe vom Sattelrand auf  $XR = 200$  mm vergrößert, womit in diesem Fall der Nachweis der Spannungen in der Behälterschale maßgebend wird.

In der folgenden Abbildung ist der Spannungsverlauf in der Behälterschale im Vergleich zu den Ergebnissen nach der FE-Methode dargestellt:



**Abb. 9.10:** Verlauf der Spannungen in der Behälterschale für einen Ringabstand vom Sattel von  $XR=200$  mm

Der Vergleich zu den Ergebnissen nach der FE-Methode zeigt, dass mit der gewählten Idealisierung der Einfluss der Aussteifungsringe ausreichend genau erfasst wird und somit das Berechnungsverfahren auch für diesen Fall anwendbar ist. Die erforderliche Anzahl an Iterationsschritten ist in diesem Fall allerdings sehr hoch (ca. 250), was eine lange Rechenzeit zu Folge hat. Zur Reduzierung der Berechnungsdauer, analog zur starren oder weichen Lagerung, wären weitergehende Untersuchungen erforderlich, um Kenntnis über die zu erwartenden Sattelpressungen zu erhalten. Da aber in der Regel eine Anordnung der Aussteifungsringe direkt am Sattel die wirtschaftlichste Lösung darstellt, wird auf diese Untersuchung im Rahmen dieser Arbeit verzichtet.

## **Kapitel 10 Zusammenfassung und Ausblick**

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eines praxisorientierten Berechnungsverfahrens, mit dem ohne Einschränkung der möglichen Behälterparameter die in der Regel maßgebenden maximalen Spannungen in Umfangsrichtung unter Berücksichtigung des schalenspezifischen Tragverhaltens bestimmt werden können.

Im ersten Teil der Arbeit wurden aufbauend auf den theoretischen Grundlagen die bisherigen Berechnungsverfahren eingehend analysiert. Es wurden dabei sowohl schalentheoretische Lösungsansätze als auch vereinfachte Ansätze auf Grundlage der Biegetheorie von Ringträgern betrachtet. Als Maßgabe für eine realistische Erfassung wurde eine Lösung nach der FE-Methode entwickelt und verifiziert. Hierbei wurde festgestellt, dass für den Fall der starren Lagerung die Annahme eines unendlich steifen Sattels zu einer Singularität im Spannungsverlauf am Sattelhorn führt. Diese Problematik, die in bisherigen Untersuchungen nicht ausreichend berücksichtigt wurde, kann umgangen werden wenn die über die Sattelbreite gemittelten Spannungen betrachtet werden.

Der Vergleich der Ergebnisse nach verschiedenen Berechnungsverfahren zeigt, dass die bisherigen praxisorientierten Verfahren zum Teil erhebliche Schwachpunkte bei der Abbildung des realen Tragverhalten haben. Insbesondere werden nach dem Verfahren von Zick die maximalen Spannungen deutlich über- als auch unterschätzt. Trotz der Defizite ist das Verfahren von Zick aufgrund seiner einfachen Handhabung und der mechanisch nachvollziehbaren Idealisierung noch heute gebräuchlich. Das Ausbleiben einer ausgeprägten Versagenhäufigkeit, die in der Literatur mit den plastischen Tragreserven begründet wird, zeigt das hohe Potenzial für eine Optimierung der Bemessung.

Um eine einfache Handhabung zu gewährleisten, orientiert sich deshalb das neu entwickelte Berechnungsverfahren an der Idealisierung von Zick in Form eines Kreisrings, der durch einen

Schubfluss belastet wird. Um die Defizite im Verfahren von Zick auszugleichen, war eine schalentheoretische Berechnung des Schubflusses in der Kreiszyinderschale notwendig. Der Vergleich verschiedener Schalentheorien zeigt, dass mit der verallgemeinerten technischen Biegetheorie ein Lösungsansatz zur Verfügung steht, der ohne mathematische Schwierigkeiten verwendet werden kann und zudem durch seine Analogie zum Tragverhalten eines elastisch gebetteten Balkens auch nachvollziehbar ist. Eine weitere Verbesserung des Verfahrens von Zick stellt die Betrachtung eines elastisch gebetteten Kreisrings zur Berechnung der Schnittgrößen in Umfangsrichtung dar, da dadurch eine über den Umfang kontinuierliche Berücksichtigung der kinematischen Randbedingungen durch den Sattel erfolgt.

Im zweiten Teil der Arbeit wird gezeigt, wie die Berechnung des Schubflusses nach der verallgemeinerten technischen Biegetheorie mit der Berechnung am elastisch gebetteten Kreisring verknüpft werden kann. Hierzu erfolgt eine ausführliche Darstellung und Erläuterung aller aufzustellenden Gleichungen und deren Lösung. Das Resultat ist ein iteratives Berechnungsverfahren, mit dem ohne Annahmen bezüglich der Interaktion zwischen Sattel und Behälter eine realistische Abbildung des Tragverhalten in Umfangsrichtung ermöglicht wird.

Durch mehrere Vergleichsrechnungen mit Ergebnissen nach der FE-Methode wurde die Eignung des neuen Verfahrens gezeigt. Zunächst erfolgte ein Vergleich für den Fall einer starren Lagerung. Die Ergebnisse der iterativen Berechnung stimmen dabei sehr gut mit denen nach der FE-Methode überein. In diesem Zusammenhang wurde auch gezeigt, dass bei Verwendung bekannter Ansätze für die Auflagerpressung auf eine Iteration verzichtet werden kann und die Berechnung erheblich vereinfacht wird. In dieser Form ist es für eine praktische Anwendung geeignet.

Mit der Darstellung der Vorgehensweise und der Ergebnisse für den Fall einer Lagerung auf einer weichen Zwischenschicht wurde eine mögliche Erweiterung des neuen Verfahrens gezeigt. Der Fall einer weichen Lagerung erforderte hierbei im Vorfeld Untersuchungen zur Idealisierung des eigentlich nichtlinearen Tragverhalten einer elastomeren Zwischenschicht. Diese Untersuchungen auf Grundlage der FE-Methode wurden im ersten Teil der Arbeit im Zusammenhang mit der Entwicklung des FE-Models beschrieben. Ergebnis dieser Untersuchung ist ein Vorschlag, wie das nichtlineare Tragverhalten durch eine elastische Bettung idealisiert werden kann. Ein in diesem Zusammenhang ermittelter Ansatz für die zu erwartenden Sattelpressungen kann genutzt werden, um die Berechnung, wie im starren Fall, weiter zu vereinfachen.

chen. Damit ist die Möglichkeit gegeben verschiedene Ausführungsformen der Sattelkonstruktion in einem Berechnungsverfahren zu berücksichtigen, was eine Verbesserung gegenüber bisherigen Verfahren darstellt

Das neue Berechnungsverfahren wurde auch genutzt, um für den Fall einer Lagerung auf einer weichen Zwischenschicht, der bisher noch nicht Gegenstand von Untersuchungen war, eine einfache Entwurfsformel aufzustellen. Diese Formel ermöglicht eine einfache Vordimensionierung unter Berücksichtigung aller wesentlicher Behälterparameter.

Abschließend wurde gezeigt, dass mit dem neuen Berechnungsverfahren auch die Wirkung von Aussteifungsringen berücksichtigt werden kann. Gegenüber bisherigen Verfahren wird dabei die Steifigkeit des Rings mit berücksichtigt und es kann zwischen der Anordnung eines Rings direkt über dem Sattel und der Anordnung von mehreren Ringen seitlich des Sattels unterschieden werden. Darüber hinaus werden sowohl die maximalen Spannungen in der Behälterschale als auch in den Aussteifungsringen ermittelt, wodurch eine optimale Ausnutzung der aussteifenden Wirkung eines Rings ermöglicht wird.

Neben den vorgestellten Fällen sind weitere Anwendungsmöglichkeiten für das Verfahren vorstellbar wie zum Beispiel die Berücksichtigung der Flexibilität von Sattelkonstruktionen aus Stahl. Hierzu sind, analog zum vorgestellten Fall einer weichen Lagerung, weitergehende Untersuchungen notwendig, wie die Sattelflexibilität in der elastischen Bettung berücksichtigt werden kann. Die einfache Erfassung von dynamischen Einflüssen stellt insbesondere bei einer horizontalen Belastung weiter ein ungeklärtes Problem dar. Da das vorgestellte Verfahren auch auf den Fall einer horizontalen Belastung anwendbar ist, kann dieser Fall mit der Kenntnis von Ersatzlasten ebenfalls gelöst werden. Der Ansatz einer horizontalen Einzellast nach der GGVS ist aber nicht realistisch, so dass hier weitere Untersuchungen notwendig sind. Außer den möglichen Erweiterungen der Anwendungsfälle wären noch weitere Vereinfachungen der Berechnung von Vorteil. Die größte mathematische Schwierigkeit innerhalb des Berechnungsverfahrens liegt in der Lösung der Gleichungssysteme mit 12 Unbekannten. Bei Ansatz von bekannten Pressungsansätzen hat sich in den Berechnungen angedeutet, dass der Einfluss der angesetzten Bettungsziffer geringer wird und es ist zu untersuchen, ob für diesen Fall vereinfachte Ersatzsysteme in Frage kommen. Die Idealisierung des Behälters im Rahmen der verallgemeinerten technischen Biegetheorie ist ebenfalls sehr genau und kann möglicherweise weiter vereinfacht werden.

## Vorschriften- und Literaturverzeichnis

### Vorschriften:

- [1]        **AD-Merkblätter:**  
Beuth Verlag, 1966
- [2]        **British Standard Instituton:**  
Specification for unfired fusion welded pressure vessels, BS 5500, Appendix G, 1991
- [3]        **BR-B2:**  
Behälter auf Sattellagern, Richtlinie ehem. DDR
- [4]        **CODAP-C10:**  
Französische Bauvorschrift für unbefeuerte Druckbehälter, 1980
- [5]        **DIN 28011:**  
Gewölbte Böden: Klöpperform, 1987
- [6]        **DIN 28012:**  
Gewölbte Böden: Klöpperform mit hohem zylindrischen Bord, 1970
- [7]        **DIN 28013:**  
Gewölbte Böden: Korbbogenform, 1987
- [8]        **DIN 28020:**  
Liegende Druckbehälter, 1987
- [9]        **DIN 28080:**  
Sättel für liegende Apparate, 1986
- [10]      **GGVS:**  
Gefahrgutverordnung Straße Anhang B 1b. Vorschrift für Tankcontainer, 1987

### Literatur:

- [11]      **Ahmad, S., Irons, B.M. Zienkiewicz, O.C. :**  
Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. Int. J. Num. Meth. Eng. 2 , S 419-451, 1970
- [12]      **Brownell L.E. und Young E.H.:**  
Process Equipment Design, Kapitel 11. John Wiley & Sons, New York, 1959
- [13]      **Bathe, K.J.:**  
Finite Elemente Methoden. Springer Verlag , Berlin, 1986
- [14]      **Batoz , F-L., Bathe, K.J. Lee-Wing Ho:**  
A study of three-node rtiangular plate Bendign elements, Int. J. f. numerical methods in engineering Vol. 15, S. 1771-1812 , 1980

- [15] **Bijlaard, R.P.:**  
Stress from radial loadings in cylindrical pressure vessels. *The Welding Journal* 33, S. 615 – 623, 1954
- [16] **Bijlaard, R.P.:**  
Stress from local loadings in cylindrical pressure vessels. *Transaction A.S.M.E.* 77, S. 805 –816, 1955
- [17] **Bijlaard, R.P.:**  
Stress from radial loads and external moments in cylindrical pressure vessels. *Welding Research Supplement*, S. 608-617, 1955
- [18] **Brandes, K.:**  
Die Lagerung des Kreiszyylinderrohres auf einem starren Linienlager. Beitrag zur praktischen Berechnung der Kontaktkräfte. *Stahlbau* 40, S. 298-310, 1971
- [19] **Chouihi, M.:**  
Beitrag zur numerischen und experimentellen Untersuchung von liegenden Kreiszyinderschalen auf Sattellagern. Diss. RWTH-Aachen, 1999
- [20] **Del Gazio, R.I.:**  
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite. Diss. Uni. Stuttgart, 1980
- [21] **Del Gazio, R.I.:**  
Einflüsse der Parameter des Sattellagers auf die Beanspruchungen liegender Behälter. *Bautechnik* 63, S244-248, 1986
- [22] **Del Gazio, R.I.:**  
Schalendicke und Beanspruchungen liegender Behälter auf Sattellagern. *Stahlbau* 65, S. 312-315, 1996
- [23] **Del Gazio, R.I.:**  
Form des Sattellagers für einen konstanten Verlauf der Kontaktpressungen bei liegenden Behältern. *Bautechnik* 74, S. 153-157, 1997
- [24] **Dümpelmann, C.:**  
Untersuchungen zum Einsatz elastomerer Zwischenschichten bei lose aufgelagerten Behältern mit Hilfe der FE-Methode, Dipl.-Arb. Lehrstuhl für Mechanik und Baukonstruktionen RWTH-Aachen, 2002
- [25] **Duthie, G. und Tooth, A.S.:**  
An analysis of horizontal cylindrical vessels supported by saddles welded to the vessel – a comparison of theory and experiment. In 3<sup>rd</sup> Int. Conf. on Pressure Vessels Technology, Part I: Analysis and Design S. 25 -38, Tokyo 1977
- [26] **Duthie, G., White, G.C. und Tooth, A.S.:**  
An analysis for cylindrical vessels under local loading - application to saddle supported vessel problems. *Journal of Strain Analysis*, Vol. 17 No. 3 ,S. 157 –167, 1982
- [27] **Duthie, G. und Tooth, A.S.:**  
Local Loads on cylindrical vessels : A Fourier series solution. In J. Rhodes und J. Spence , Herausgeber, *Behaviour of thin walled Structures*. Kapitel 13 S. 235-272. Elsevier Applied Science Publisher, London, 1984.
- [28] **Flügge, W.:**  
Statik und Dynamik der Schalen. Springer Verlag, Berlin, 1962
- [29] **Forbes P.D. und Tooth, A.S.:**  
An analysis for twin saddle supported unstiffened cylindrical vessels. *Int. Conf. on Recent Advance in Stress Analysis*. S. 47-59. Royal Aeronautical Society, 1968

- 
- [30] **Girkmann, K.:**  
Berechnung eines Rohrstranges mit Gleitblechlagerung. Öster. Ing. Archiv, 1954
- [31] **Herber, K.H.:**  
Spannungen an den Lagerstellen liegender zylindrischer Flüssigkeitsbehälter. Technische Mitteilungen aus dem Dampfkessel-, Behälter- und Rohrleitungsbau. GWK-Verband, Düsseldorf 1958
- [32] **Huang, H.C.:**  
Implementation of assumed strain degenerated shell elements. *Comp. & Struct.* Vol. 25, S. 147-155, 1987
- [33] **Huang, H.C.:**  
Membrane locking and assumed strain shell elements. *Comp. & Struct.* Vol. 27, S. 671-677, 1987
- [34] **Krupka, V.:**  
Thin cylindrical Shell subjected to a line-Load around a circumference. *Proceedings of the Symp. IASS on tower—shaped structures.* Bratislava, S. 83-94, 1966
- [35] **Krupka, V.:**  
An analysis of lug or saddle-supported cylindrical pressure vessels. 1<sup>st</sup> Int. Conf. on Pressure Vessel Technology (ASME), Delft, Part I S. 491-500, 1969
- [36] **Krupka, V.:**  
Kreisförmige Behälter auf Sattellagern. In *Előregyartás a Melyepitesben Konferencia.* Budapest, S. 91-100. 1973
- [37] **Krupka, V.:**  
Saddle supported unstiffened horizontal vessels. *ACTA Techniica CSAV*, 4. S. 472-492, 1988
- [38] **Krupka, V.:**  
The background to a new design Proposal for saddle-supported Vessels. *Int. J. Ves. & Piping*, S. 51-65. 1991
- [39] **Krupka, V.:**  
Beulen von dünnwandigen Stahlbehältern und Rohren in der Umgebung lasteinleitender Ringrippen. *Stahlbau* 61, Heft 12, S. 377–383, 1992
- [40] **Krupka, V.:**  
Zur Berechnung von sattelgelagerten unversteiften Rohren und Behältern. *Stahlbau* 67, Heft 6, S. 473–477, 1998
- [41] **Ladewig, D.:**  
Beitrag zur statischen und dynamischen Berechnung liegender Flüssigkeitsbehälter. *Diss. RWTH Aachen, FKI-Mitteilungen*, 1994
- [42] **Lakis A.A. und Doré, D.:**  
Analysis of pressurized vessels and it's support. *Technischer Bericht, Dep. of Mechanical Engineering, ASME 75-PVP-64*, 1975.
- [43] **Lakis A.A. und Doré, D.:**  
General method for analysing contact stresses on cylindrical vessels. *Int. J. Solids Structures* 14 , S. 4999-516, 1978.
- [44] **Link, H.:**  
Beitrag zum Knickproblem des elastisch gebetteten Kreisbogenträgers. *Stahlbau* 32, S.199-203, 1963
- [45] **Link, H.:**  
Zur Stabilität des elastisch gebetteten Kreisbogenträgers bei tangential gerichteten Bettungskräften. *Stahlbau* 33, S. 147–152, 1964

- [46] **Mang, F.**  
Baustatische Untersuchung der Auflageringe stählerner Druckrohrleitungen. Diss. Karlsruhe, 1965
- [47] **Mang, F.**  
Großrohre und Stahlbehälter – Festigkeits- und Konstruktionsprobleme. Rohre – Rohrleitungsbau – Rohrleitungstransport, Bd. 6, 1971
- [48] **MARC, Theory and User Information, Volume A**  
MARC Analysis Research Corporation 1997
- [49] **Marc, Element Library, Volume B**  
MARC Analysis Research Corporation 1997
- [50] **Ong, L.S.:**  
A computer program for cylindrical shell analysis. Int. J. Pres. Ves. & Piping, 30 S.131 –149, 1987
- [51] **Ong, L.S.:**  
Analysis of twin-saddle-supported Vessels subjected ton non-symmetric loadings. Int. J. Pres. Ves. & Piping 35, S.423 –437, 1988
- [52] **Ong, L.S.:**  
Parametric study of peak circumferential stress at the saddle support. Int. J. Pres. Ves. & Piping, 46 S.183 –207, 1991
- [53] **Ong, L.S.:**  
Effectiveness of wear plate at the saddle support. ASME Vol. 114, S. 12 – 18, 1992
- [54] **Petersen, C.P.:**  
Statik und Stabilität der Baukonstruktionen. Vieweg Verlag, 1982
- [55] **Rohwer, K.:**  
Vergleich neu entwickelter finite Schalenelemente, Kolloquium über Strukturmechanik, Sonderheft der Deutschen Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt E.V., S.53-86, 1979
- [56] **Schlingloff, J.:**  
Untersuchungen zum Einsatz elastomerer Zwischenschichten bei lose aufgelagerten Behältern mit Hilfe der FE-Methode, Dipl.-Arb. Lehrstuhl für Mechanik und Baukonstruktionen RWTH-Aachen, 2001
- [57] **Schardt, R.:**  
Eine Erweiterung der technischen Biegelehre für die Berechnung biegesteifer prismatischer Falwerke. Der Stahlbau, S. 161 , 1966
- [58] **Schardt, R. und Steingäß, J.:**  
Eine Erweiterung der Technischen Biegelehre für die Berechnung dünnwandiger geschlossener Kreiszyinderschalen. Der Stahlbau, S. 65 –73, 1970
- [59] **Schardt, R.:**  
Verallgemeinerte Technische Biegetheorie. Springer Verlag, 1989
- [60] **Schleicher, F.:**  
Kreisplatten auf elastischer Unterlage. Springer Verlag, 1926.
- [61] **Stoneking J.E. und Sheth H.**  
Analysis of a large saddle supported horizontal pressure vessels. Technischer Bericht, Departement of Engineering Science and Mechanics. ASMR 77-PVP-18 1978
- [62] **Tooth, A.S., Duthie, G., White, G.C. und Carmichael, J.**  
Stresses in horizontal storage vessels – a comparison of theory and experiment. Journal of Strain Analysis, Vol. 17 No. 3 ,S. 169 –176, 1982

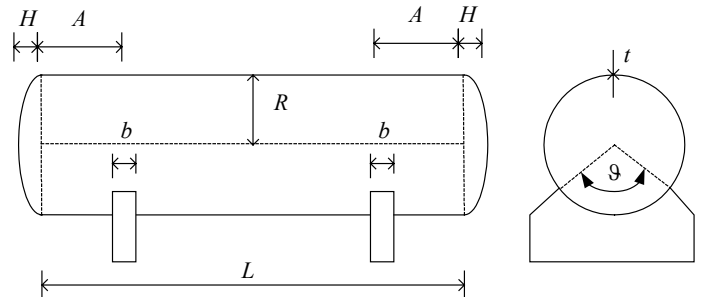
- 
- [63] **Uhr, K.:**  
Schalentheoretische Untersuchungen zur Beurteilung der Steifigkeit von kreiszylindrischen Behältern. Dipl.-Arb. Lehrstuhl für Mechanik und Baukonstruktionen RWTH-Aachen, 2001
- [64] **Vinet, R. und Dore R.**  
Contact between a cylindrical shell and a rigid Ring. Proceedings of the 2<sup>nd</sup> Int. Conf. on Pressure Vessel Technology. San Antonio Texas, S. 183 –188, 1973
- [65] **Wilson J.D. und Tooth S.T.:**  
The support of unstiffened cylindrical vessels. In 2<sup>nd</sup> Int. Conf. on Pressure Vessel Technology. San Antonio Texas, S. 67 –83, 1973
- [66] **Wilson W.M. und Olson E.D.:**  
Tests of cylindrical shells. Univ. of Illinois. Eng. experiments station. Bull. Nr. 331, 71, S.79-108, 1941
- [67] **Wlassow , W. S.:**  
Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Akademie Verlag, Berlin, 1958
- [68] **Zick, L. P.:**  
Stresses in large horizontal cylindrical pressure vessels on two supports. Welding Research Supplement, 51, S. 435-445, 1951
- [69] **Ziegenbalg, G.:**  
Beanspruchungen zylindrischer Apparatewandungen durch örtliche Lasten. Diss. TU Dresden, 1968
- [70] **Zienkiewicz, O. C.:**  
Methode der finiten Elemente. Carl Hanser Verlag, München Wien, 1975
- [71] **Zienkiewicz, O. C., Taylor R.L. und Too, J.M.:**  
Reduced Integration techniques in general analysis of plates and shells. Int. J. f. numerical methods in engineering Vol. 3, S. 275-290 , 1971
- [72] **Zimmermann, T.:**  
Beitrag zur numerischen und experimentellen Untersuchung von liegenden, sattelgelagerten Zylinderschalen unter vertikaler dynamischer Belastung. Diss. RWTH Aachen, 2003
- [73] **Zwiesele, R.:**  
Spannungsuntersuchungen an kreiszylindrischen Behältern auf Sattellagern. Diss. Uni. Stuttgart, 1967

## Anhang

### Vorgaben für die Berechnung

#### Systemwerte vom Anwender festzulegen

R	Radius	[mm]
A	Bodenabstand	[mm]
t	Behälterdicke	[mm]
L	Behälterlänge	[mm]
b	Sattelbreite	[mm]
$\vartheta$	Sattelwinkel	[°]



$H = 0,4 \cdot R$  Bodentiefe nach DIN 28012 (Klöpferböden)

E	E-Modul	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\nu$	Querkontraktionszahl	[-]
$G = E / (2 \cdot (1 + \nu))$	Schubmodul	[N/mm <sup>2</sup> ]

Q resultierende Last pro Sattel aus Eigengewicht und Flüssigkeit

k Anzahl der zu berücksichtigenden Einheitsverwölbungen  
(mit 40 liegt man auf der sicheren Seite)

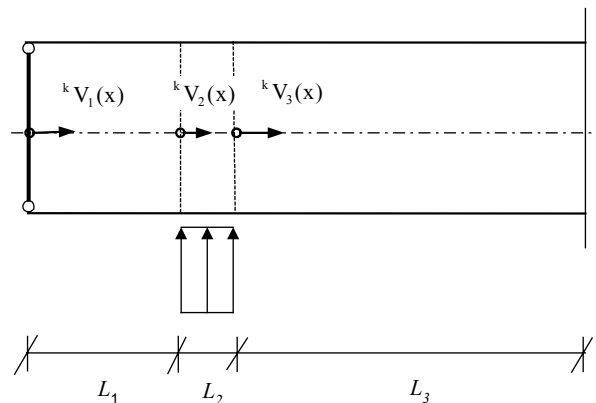
#### weitere Systemwerte werden automatisch festgelegt

#### Idealisierung des Behälters und Pressungsansatz zu Beginn der Berechnung (Kap. 6,2 und 6.3)

$$L1 = A + H \cdot 2/3 - b/2$$

$$L2 = b$$

$$L3 = L/2 - A - b/2$$



$$\gamma_{aF} = Q / (\pi \cdot R^2 \cdot (L1 + L2 + L3))$$

äquivalente Flüssigkeitswichte

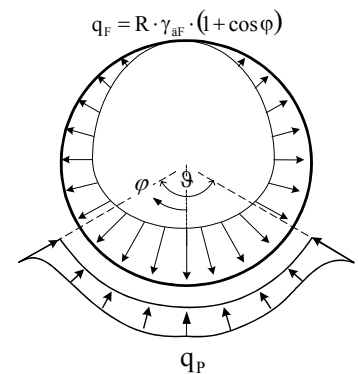
$$q_P = \frac{Q}{2 \cdot b \cdot R \cdot \sin \vartheta / 2}$$

konstanter Pressungsansatz bei starrer Lagerung

$$q_P = \frac{Q}{b \cdot R \cdot (\sin \vartheta / 2 \cdot \cos \vartheta / 2 + \vartheta / 2)} \cdot \cos \varphi$$

kosinusförmiger Pressungsansatz bei weicher Lagerung

mit Pressungsansätzen nach Kap.7.3 und Kap. 8.3 kann auf eine Iteration verzichtet werden



## Beginn der iterativen Berechnung

### Querschnittswerte in Abhängigkeit der Einheitsverwölbung ' k '

$${}^k C = \pi \cdot t \cdot R^3 \cdot (1 + t^2/R^2 \cdot k^4 / (12 \cdot (1 - \nu^2))) \quad ; \quad {}^k D = \pi \cdot t^3 / (3 \cdot R) \cdot k^2 \cdot (k^2 - 1) \cdot (k^2 / (1 - \nu) - 1)$$

$${}^k B = (\pi \cdot K / R^3) \cdot k^4 \cdot ((k^2 - 1)^2) \quad \text{mit} \quad K = E \cdot t^3 / (12 \cdot (1 - \nu^2))$$

### Lastterme

$${}^k q_1 = {}^k q_3 = - \int \gamma_{af} \cdot R \cdot (1 + \cos \varphi) \cdot k^2 \cdot R \cdot \cos k \varphi \, d\varphi \quad ; \quad {}^k q_2 = - \int (\gamma_{af} \cdot R \cdot (1 + \cos \varphi) + q_p(\varphi)) \cdot k^2 \cdot R \cdot \cos(k \cdot \varphi) \, d\varphi$$

### Lösungsansätze für die Differentialgleichung der VTB (Kap. 6.4)

für die erste Einheitsverwölbung  $k=1$

$${}^1 V_1(x) = \frac{{}^1 q_1}{24 \cdot E^1 C} \cdot x^4 + C_1 \cdot x^3 + C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x + C_4$$

$${}^1 V_2(x) = \frac{{}^1 q_2}{24 \cdot E^1 C} \cdot x^4 + C_5 \cdot x^3 + C_6 \cdot x^2 + C_7 \cdot x + C_8$$

$${}^1 V_3(x) = \frac{{}^1 q_3}{24 \cdot E^1 C} \cdot x^4 + C_9 \cdot x^3 + C_{10} \cdot x^2 + C_{11} \cdot x + C_{12}$$

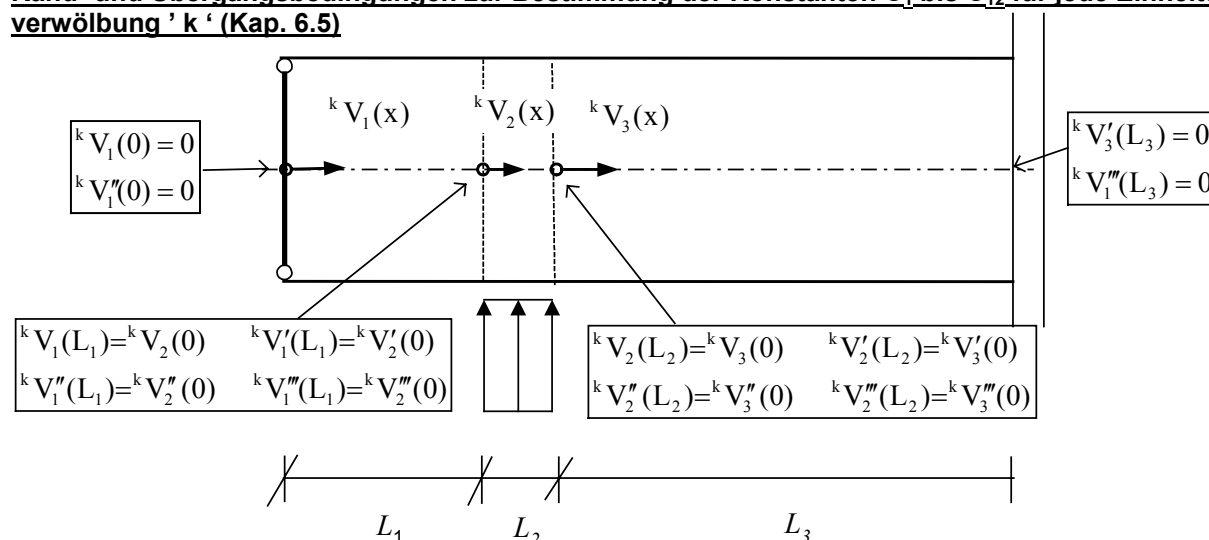
für alle weiteren Einheitsverwölbungen  $k > 1$  mit  $\alpha = \sqrt{\frac{{}^k B}{4 \cdot E^k C} + \frac{G^k D}{4 \cdot E^k C}}$  und  $\beta = \sqrt{\frac{{}^k B}{4 \cdot E^k C} - \frac{G^k D}{4 \cdot E^k C}}$

$${}^k V_1(x) = e^{-\alpha x} \cdot (C_1 \cdot \cos \beta x + C_2 \cdot \sin \beta x) + e^{-\alpha x} \cdot (C_3 \cdot \cos \beta x + C_4 \cdot \sin \beta x) + \frac{{}^k q_1}{{}^k B}$$

$${}^k V_2(x) = e^{-\alpha x} \cdot (C_5 \cdot \cos \beta x + C_6 \cdot \sin \beta x) + e^{-\alpha x} \cdot (C_7 \cdot \cos \beta x + C_8 \cdot \sin \beta x) + \frac{{}^k q_2}{{}^k B}$$

$${}^k V_3(x) = e^{-\alpha x} \cdot (C_9 \cdot \cos \beta x + C_{10} \cdot \sin \beta x) + e^{-\alpha x} \cdot (C_{11} \cdot \cos \beta x + C_{12} \cdot \sin \beta x) + \frac{{}^k q_3}{{}^k B}$$

### Rand- und Übergangsbedingungen zur Bestimmung der Konstanten $C_1$ bis $C_{12}$ für jede Einheitsverwölbung ' k ' (Kap. 6.5)



### Schubfluss in der Behälterschale (Kap. 6.6)

$${}^{\text{res}} N_{x\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} {}^k T \cdot \frac{1}{k} \cdot \sin k \varphi \quad \text{mit} \quad {}^k T = E \cdot t \cdot R^2 \left( \frac{\partial^3 {}^k V_1(L_1 - cs)}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 {}^k V_3(cs)}{\partial x^3} \right)$$

im Fall einer starren Lagerung:  $cs = 4 \cdot R / 100$  im Fall einer weichen Lagerung:  $cs = 3 \cdot R / 100$

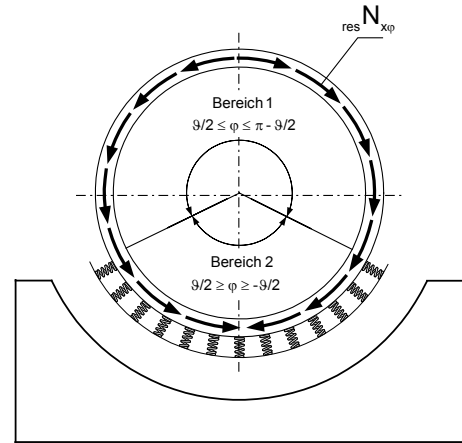
**Berechnung am elastisch gebetteten Kreisring**

$bm = b+2 \cdot cs$                       Breite Kreisrings  
 $EI = E \cdot bm \cdot t^3 / 12$               Biegesteifigkeit des Kreisrings

**Bettungsziffer 'Be' des elastisch gebetteten Kreisrings**

im Fall einer starren Lagerung  $Be = 30 \text{ N/mm}^3 \cdot R$   
 im Fall einer weichen Lagerung  $Be = b \cdot B$  mit

$$B = 0,55 \cdot \ln\left(\frac{E_0 + 1}{d}\right) + 0,963 \quad [\text{N/mm}^3]$$



**Lösungsansätze für die Differentialgleichungen des Kreisrings (Kap.6.7)**

$$w_1(\varphi) = C_1 \cdot \cos \varphi + C_2 \cdot \sin \varphi + C_3 \cdot \varphi \cdot \cos \varphi + C_4 \cdot \varphi \cdot \sin \varphi + C_5 - \frac{R^4}{EI} \cdot \left( (1 + \gamma_{af} \cdot b \cdot R) \cdot \frac{1}{8} \cdot \varphi^2 \cdot \cos \varphi - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k T \cdot \cos k \varphi}{k^4 - 2 \cdot k^2 + 1} \right)$$

$$w_2(\varphi) = e^{\alpha \cdot \varphi} \cdot (C_6 \cdot \cos \beta \varphi + C_7 \cdot \sin \beta \varphi) + e^{-\alpha \cdot \varphi} \cdot (C_8 \cdot \cos \beta \varphi + C_9 \cdot \sin \beta \varphi) + C_{10} + \frac{R^4}{EI} \cdot \left( \frac{EI \cdot \gamma_{af} \cdot b \cdot \cos \varphi}{Be \cdot R^3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k T \cdot \cos k \varphi}{k^4 - 2 \cdot k^2 + 1 + \frac{Be \cdot R^4}{EI}} \right)$$

$$\text{mit } \alpha = \sqrt{\frac{EI + Be \cdot R^4}{4EI} - \frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{\frac{EI + Be \cdot R^4}{4EI} + \frac{1}{2}}$$

$$v_1(\varphi) = -\int w_1(\varphi) d\varphi + C_{11}$$

$$v_2(\varphi) = -\int w_2(\varphi) d\varphi + C_{12}$$

$$M_1(\varphi) = -\frac{EI}{R^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 w_1(\varphi)}{\partial \varphi^2} + w_1(\varphi) \right)$$

$$M_2(\varphi) = -\frac{EI}{R^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 w_2(\varphi)}{\partial \varphi^2} + w_2(\varphi) \right)$$

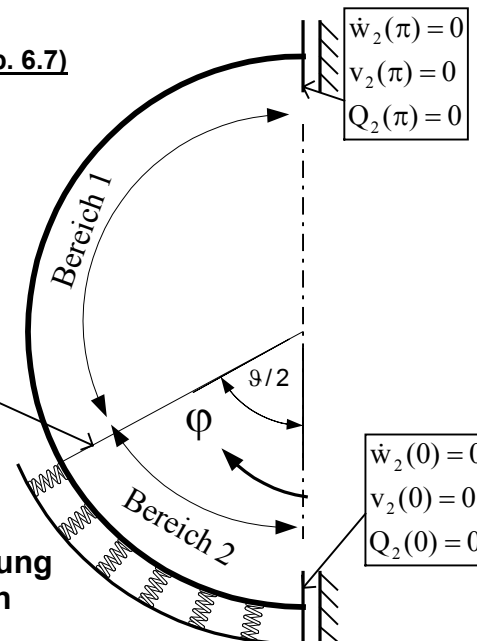
$$Q_1(\varphi) = -\frac{\partial M_1(\varphi)}{R \cdot \partial \varphi}$$

$$Q_2(\varphi) = -\frac{\partial M_2(\varphi)}{R \cdot \partial \varphi}$$

$$N_1(\varphi) = -\frac{\partial Q_1(\varphi)}{\partial \varphi} + R^2 \cdot \gamma_{af} \cdot b \cdot (1 + \cos \varphi)$$

$$N_2(\varphi) = -\frac{\partial Q_2(\varphi)}{\partial \varphi} + R^2 \cdot \gamma_{af} \cdot b \cdot (1 + \cos \varphi) - R \cdot Be \cdot w_2(\varphi)$$

**Randbedingungen zur Bestimmung der Konstanten C<sub>1</sub> bis C<sub>12</sub> (Kap. 6.7)**



$$\begin{aligned}
 w_2(9/2) &= w_1(9/2) \\
 \dot{w}_2(9/2) &= \dot{w}_1(9/2) \\
 v_2(9/2) &= v_1(9/2) \\
 M_2(9/2) &= M_1(9/2) \\
 Q_2(9/2) &= Q_1(9/2) \\
 N_2(9/2) &= N_1(9/2)
 \end{aligned}$$

**verbesserte Sattelpressung**

$$qp = Be \cdot w_2(\varphi) / b$$

ggfs. erneute Berechnung mit verbesserter Sattelpressung ansonsten Spannungen aus Schnittgrößen am elastisch gebetteten Kreisring bestimmen

## Lebenslauf

Jan Alexander Keppler

\*28.03.1971 in München

### Schulbildung

1977 – 1982	Grundschulen in Sigmaringen, Watchfield (England) und Bonn
1982 - 1990	Gymnasien in Bonn, Nienburg, Diez
1990	allgemeine Hochschulreife am städtischen Gymnasium in Rheinbach

### Wehrdienst

1990 - 1992	Zeitsoldat beim Gebirgsjägerbataillon 234 in Mittenwald
-------------	---------------------------------------------------------

### Hochschulbildung

1992 -1998	Studium des Bauingenieurwesens an der RWTH Aachen
1995/96	Auslandsstudium an der INSA Lyon

### Berufstätigkeit

1998 - 2003	wissenschaftlicher Angestellter am Lehrstuhl für Mechanik und Baukonstruktionen der RWTH Aachen,
2003 -	leitender Bauingenieur im Ingenieurbüro vom Felde in Aachen