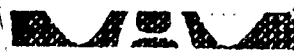


Sz

MITTEILUNGEN

99

13 539=2


RWTH
AACHEN

INSTITUT FÜR WASSERBAU
UND WASSERWIRTSCHAFT

Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen

Herausgeber: Univ.-Professor Dr.-Ing. Jürgen Königler

Markward Hoffmann

**Automatische Generierung von
FE-Netzen für Scheibenkonstruktionen
am Beispiel von Gewichtsstaumauern**

ACADEMIA

**“ Automatische Generierung von FE- Netzen für Scheibenkonstruktionen
am Beispiel von Gewichtsstaumauern“**

Von der Fakultät
für Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Ingenieurwissenschaften
genehmigte Dissertation

vorgelegt von
Dipl.-Ing. Markward Hoffmann
aus Ratingen

Referent: Universitätsprofessor Dr.-Ing. G. Rouvé
Korreferent: Universitätsprofessor Dr.-Ing. F. G. Rohde
Tag der mündlichen Prüfung: 25.4.1995

D82 (Diss. RWTH Aachen)

D 82 (Diss. RWTH Aachen)

Diese Dissertation erscheint gleichzeitig als Heft 99 in

„Mitteilungen, Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft,
Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen,
ISSN 0343-1045“

Markward Hoffmann

Automatische Generierung von FE-Netzen für Scheibenkonstruktionen
am Beispiel von Gewichtsstaumauern

MITTEILUNGEN
DES
INSTITUTS
FÜR WASSERBAU UND WASSERWIRTSCHAFT

der
Rheinisch-Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen

herausgegeben
von

Univ.-Professor Dr.-Ing. Jürgen Köngeter

Band 99



Sz 13539 = 2

Markward Hoffmann

**Automatische Generierung
von FE-Netzen für Scheibenkonstruktionen
am Beispiel von Gewichtsstaumauern**



Academia Verlag  Sankt Augustin

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Hoffmann, Markward:

Automatische Generierung von FE-Netzen für Scheibenkonstruktionen
am Beispiel von Gewichtsstaumauern /

Markward Hoffmann. – Sankt Augustin : Academia-Verl., 1995

(Mitteilungen des Instituts für Wasserbau und Wasserwirtschaft
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen ; Bd. 99)

ISBN 3-88345-686-1

Zugl.: Aachen, Techn. Hochsch., Diss., 1995

NE: Technische Hochschule < Aachen > / Lehrstuhl für Wasserbau und
Wasserwirtschaft und Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft:
Mitteilungen des Instituts ...

D 82 (Diss. RWTH Aachen)

1. Auflage 1995

© Academia Verlag

Postfach 16 63, D-53734 Sankt Augustin

Printed in Germany

Alle Rechte vorbehalten

Ohne schriftliche Genehmigung des Verlages ist es nicht gestattet, das Werk unter Verwendung mechanischer, elektronischer und anderer Systeme in irgendeiner Weise zu verarbeiten und zu verbreiten. Insbesondere vorbehalten sind die Rechte der Vervielfältigung – auch von Teilen des Werkes – auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der tontechnischen Wiedergabe, des Vortrags, der Funk- und Fernsehendung, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, der Übersetzung und der literarischen und anderweitigen Bearbeitung.

Herstellung: Richarz Publikations-Service GmbH, Sankt Augustin

Vorwort

Finite-Elemente-Berechnungen von Gewichtsstaumauern waren bislang aufwendig und kompliziert, so daß sie sich erst allmählich in der Praxis durchsetzen. Sie werden aber benötigt, um aussagekräftigere Ergebnisse zu erhalten als mit althergebrachten Berechnungsmethoden, insbesondere wenn die Wechselwirkung mit dem Untergrund einbezogen werden muß.

Mit dieser Arbeit möchte ich einen Beitrag dazu leisten, zweidimensionale FE-Berechnungen von Scheiben zu optimieren, um schneller und genauere Ergebnisse zu erzielen. Die dafür nötigen leistungsfähigen Arbeitsplatzrechner (Personal Computer) stehen heute zur Verfügung.

Die Grundlagen für die vorliegende Arbeit beruhen auf meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Wasserbau und Wasserwirtschaft, während die Arbeit selbst in meiner Zeit im Ingenieurbüro Salveter entstand, in der ich eine Vielzahl von Berechnungen von Staumauern durchgeführt habe.

Herrn em. Prof. Dr.-Ing. G. Rouvé danke ich an dieser Stelle ganz herzlich für die großzügige Unterstützung und für die Übernahme des Hauptreferates.

Herrn Prof. Dr.-Ing. F.G. Rohde danke ich für seine wertvollen Anregungen und die Übernahme des Korreferates.

Sehr herzlicher Dank gilt auch Herrn Dipl.-Ing. AOR W. Nelihsen vom Lehrstuhl für Wasserbau für sein persönliches Interesse, seine Unterstützung, kritischen Hinweise und stetigen Ansporn.

Herrn Dipl.-Ing. G. Salveter danke ich dafür, daß er mir Gelegenheit gegeben hat, neben meiner täglichen Arbeit im Ingenieurbüro diese Arbeit fertigzustellen.

Abstract

Automatic generation of FE meshes for slab constructions by example of a gravity dam

Up to the present time, finite element (FE) analyses of gravity dams have not always been performed routinely because of uncertainties and complications in practice as a result of hardware and software restrictions. FE calculations, however, are needed to get more efficient results than with classic calculation methods, especially when underground interaction has to be considered.

The purpose of this dissertation is to improve two dimensional plain strain analyses of slab constructions as needed, for example, for calculations of cross sections of gravity dams. An algorithm based on accuracy estimates is developed. It allows automatic generation and adaptive refinement of FE meshes. The refinement method uses fuzzy logic techniques. The results are more accurate and require less computer time than before. It is shown that the remaining global error estimator can be reduced to less than 1%.

Some more results of this dissertation are:

- quadrilateral elements should be preferred to triangular elements,
- regular element shapes yield better results than distorted shapes,
- stresses should be calculated in FE nodes instead of element centres or Gaussian points and should be weighed with element energies.

In an application model several construction variants for the rehabilitation of a gravity dam are introduced and compared with each other. By this way, the best variant can be found in a short time.

Also computer hardware limitations for two dimensional analyses no longer exist as modern personal computers are available. So finite elements will substitute classical cantilever theory with trapezoidal stress distribution soon.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
1.1 Aufgabenstellung, Zielsetzung	2
1.2 Literaturübersicht und Stand von Wissenschaft und Forschung	4
1.2.1 Grundlagen der Fehlertheorie bei FE-Methoden	5
1.2.2 Praktische Anwendung	9
1.2.3 Gegenwärtiger Stand bei der Anwendung von FE-Methoden	12
1.2.3.1 FE-Programme	12
1.2.3.2 Normen und Vorschriften für FE-Berechnungen	17
1.3 Lösungsweg, Vorgehensweise	18
2 Berechnungsverfahren	20
2.1 Numerische Berechnungsverfahren	20
2.1.1 Finite-Differenzen-Methode (FDM)	20
2.1.2 Finite-Elemente-Methode (FEM)	20
2.1.3 Randintegralverfahren (BEM)	21
2.1.4 Distinct Element-Methode (DEM)	22
2.1.5 Stufenkörpermethode (SKM)	24
2.1.6 FEM in verschiedenen Fachgebieten	24
2.2 Fehlerindikator für Elastizitätsprobleme	29
2.2.1 Lösungsweg	29
2.2.2 Erläuterungen	33
2.3 Genauigkeit einer FE-Berechnung	37
3 Finite-Elemente-Netze	41
3.1 Elementeigenschaften	41
3.1.1 Elementarten	41
3.1.1.1 Isoparametrische Elemente	42
3.1.1.2 Konforme Elemente	43

3.1.1.3 Höhergradige Elemente	43
3.1.1.4 Dreidimensionale Elemente	44
3.1.1.5 Genaue und Näherungselemente	44
3.1.1.6 Weitere Elementarten und Sonderelemente	45
3.1.2 Spannungsberechnung in Dreieck- und Viereckelementen	46
3.1.3 Vergleich von Dreieck- und Viereckelementen	51
3.1.4 Einfluß des Seitenverhältnisses von Viereckelementen	61
3.1.5 Form der Elemente	63
3.2 Netzformen	65
3.2.1 Regelmäßigkeit des Netzes	65
3.2.2 Symmetrie des Netzes	69
3.2.3 Größenverhältnis der Elemente	73
3.3 Berechnungsraum	76
4 Generierung optimaler Netze	77
4.1 Netzglättung	77
4.2 Bandbreitenoptimierung	86
4.3 Adaptive Netzverfeinerung	90
4.3.1 Die h-Version der Verfeinerung	90
4.3.2 Die p-Version der Verfeinerung	90
4.3.3 Kombination von h- und p-Version	91
4.3.4 Verfeinerungskriterien	92
4.3.5 Kombination mittels Fuzzy-Logik	95
4.3.6 Datenaufbereitung	102
4.3.7 Geschwindigkeit der Verfeinerung	107
4.3.8 Verfeinerung mit und ohne Glättung	111
4.4 Spannungsberechnung	112
4.5 Rechengenauigkeit	120
4.5.1 Einfache Genauigkeit (single precision)	121
4.5.2 Doppelte Genauigkeit (double precision)	121
4.5.3 Vergleich	122

4.5.4 Konditionszahl des Gleichungssystems	126
4.5.4.1 Konditionszahl nach HADAMARD	126
4.5.4.2 Konditionszahl nach der Euklidischen Matrixnorm	127
4.5.4.3 Konditionszahl aus Eigenwerten	127
4.5.4.4 Bewertung der Konditionszahl	128
4.6 Rechenzeitbedarf	129
5 Fallbeispiel: Staumauer mit Dreieckprofil.....	133
5.1 Lösung mit der Airy'schen Spannungsfunktion (Scheibentheorie)	133
5.2 Ergebnisse nach Balken- bzw. Elastizitätstheorie.....	134
5.2.1 Formänderungen	134
5.2.2 Spannungen.....	136
5.3 Berechnungsraum für die Staumauer.....	137
5.3.1 Berechnung einer Staumauer mit Dreieckquerschnitt	137
5.3.2 Bestimmung der notwendigen Untergrundtiefe	138
5.4 Finite-Elemente-Lösung mit Netzverfeinerung.....	143
5.4.1 Netzgenerierung.....	143
5.4.2 Konvergenz der maßgebenden Ergebnisse	147
5.4.3 Spannung am wasserseitigen Mauerfuß.....	149
6 Zusammenfassung und Ausblick.....	154
Anhang: Anwendungsvorschlag (Staumauer mit vorgesetzter Dichtwand)	156
A.1 Materialbereiche	158
A.2 Netzverfeinerung.....	162
A.3 Spannungen.....	163
A.4 Konstruktionsvarianten.....	164
A.4.1 Gemeinsames.....	171
A.4.2 Varianten mit "Fuelbecke"-Fugen (1A - 1C)	172
A.4.3 Varianten mit "Heilenbecke"-Fugen (2A - 2D).....	173

A.4.4 Sonstige Varianten	173
A.4.4.1 Tiefer gelegter Kontrollgang	174
A.4.4.2 Breitere Verstärkung	174
A.4.4.3 Sohlbalken mit senkrecht durchlaufender Wasserseite	175
A.4.5 Ausgeführte Lösung	175
 Glossar	 180
 Literaturverzeichnis	 191

Abbildungs- und Tabellenverzeichnis

Seite

Abb. 1.1:	Entwicklungsphasen für Modelle technischer Probleme (aus HEIDERMAN, 1986, nach DUDDECK, 1978) (ca. -Jahreszahlen ergänzt für FEM).....	3
Abb. 1.2:	Ausgangsnetz und verbessertes Netz nach DIAZ, KIKUCHI, TAYLOR (1983).....	5
Abb. 1.3:	Netz nach 6 Verfeinerungsschritten (aus RANK, 1985).....	6
Abb. 1.4:	Verfeinertes Netz (aus ODEN, DEMKOWICZ, STROUBOLIS, DEVLOO, 1986).....	7
Abb. 1.5:	Unterteilung eines Dreieck-Elements (aus ROBERTI, MELKANOFF, 1987).....	8
Abb. 1.6:	Folge von Unterteilungen für Vierecke (aus ZIENKIEWICZ, LIU, HUANG, 1988).....	9
Tab. 1.7:	Auswahl von auf dem Markt befindlichen FE-Programmen.....	13/14
Abb. 1.8:	Auswahl aus der Elementbibliothek von COSMOS/M (Abb. aus dem Handbuch).....	16
Abb. 2.1:	Finite Differenzen- (a) und Finite Elemente-Diskretisierung (b) (aus PINDER, GRAY, 1977).....	21
Abb. 2.2:	Kopplung finite Elemente - Randelemente (aus WUNDERLICH, 1987).....	22
Abb. 2.3:	Zusammenhang zwischen den drei wichtigsten Diskretisierungsverfahren (aus BODARWÉ, 1991, nach KNOTHE, WESSELS, 1991).....	23
Tab. 2.4:	Sich entsprechende Größen der FEM in einigen Fachgebieten.....	25
Abb. 2.5:	Kollokationspunkte (aus HUYAKORN, PINDER 1983).....	26
Abb. 2.6:	Numerische Berechnungsverfahren im Ingenieurwesen.....	28
Abb. 2.7:	Teilenergien am Knoten k	31
Abb. 2.8:	Stab in der x/y -Ebene.....	35
Abb. 2.9:	Elementeigenes r,s -Koordinatensystem.....	37
Abb. 2.10:	Schematische Unterscheidung der Fehlerarten in einer FE-Berechnung.....	38
Abb. 3.1.1:	Schematische Ebenen beim Vorgang einer Diskretisierung.....	41

Abb.3.1.2: Charakteristik eines iso-, super- und subparametrischen Elementes (aus ZIENKIEWICZ, 1984)	42
Abb.3.1.3: Verschiedengradige Elemente	44
Abb.3.1.4: Beispiel für Sonderelemente (aus WUNDERLICH, 1987)	45
Abb.3.1.5: Koordinaten der Gaußpunkte	47
Abb.3.1.6: Verschiebungen eines Dreiecks	49
Abb.3.1.7: Verschiebungen eines Vierecks	49
Abb.3.1.8: Spannungsverlauf in parabolischen Elementen (ZIENKIEWICZ, 1984, Zeichnung korrigiert)	50
Tab.3.1.9: Vergleichsergebnisse am Kragarm nach der Balkentheorie	51
Abb.3.1.10: Vergleichsergebnisse am Kragarm nach ZIENKIEWICZ (1984) (Zeichnung korrigiert): Mittels verschiedener Elemente berechneter ebener Spannungs- zustand in einem Kragbalken. Genauigkeitsverbesserung durch Elemente höherer Ordnung	52
Abb.3.1.11a: Systemskizze einschließlich FE-Netz	53
Abb.3.1.11b: Spannungsverlauf σ_x nach FE in einem Kragarm (in Schnitten)	53
Abb.3.1.11c: Spannungsverlauf σ_x nach FE in einem Kragarm (Isolinien)	54
Abb.3.1.11d: Spannungsverlauf τ_{xy} nach FE in einem Kragarm	54
Abb.3.1.12: Dimensionslose Absenkung δ bei $x=L$ bei wachsenden Knotenzahlen infolge einer vertikalen Last ($V=1$) am Ende des Kragarms (Balkentheorie=1)	56
Abb.3.1.13: Dimensionslose Spannung σ_x bei wachsenden Knotenzahlen infolge einer vertikalen Last ($V=1$) am Ende des Kragarms (Balkentheorie=1)	56
Abb.3.1.14: Dimensionslose Innere Energie (Balkentheorie=1) und Restfehler bei wachsenden Knotenzahlen infolge einer vertikalen Last ($V=1$) am Ende des Kragarms	57
Abb.3.1.15: Dimensionslose Absenkung δ bei $x=L$ bei wachsenden Knotenzahlen infolge eines Moments ($M=1$) am Ende des Kragarms (Balkentheorie=1)	57
Abb.3.1.16: Dimensionslose Spannung σ_x bei wachsenden Knotenzahlen infolge eines Moments ($M=1$) am Ende des Kragarms (Balkentheorie=1)	58

Abb.3.1.17: Innere Energie (Balkentheorie=1) und Restfehler bei wachsenden Knotenzahlen infolge eines Moments ($M=1$) am Ende des Kragarms	58
Abb.3.1.18: Verformungszustände in Dreiecken	60
Abb.3.1.19: Dimensionslose Absenkung δ am Ende des Kragarms infolge einer vertikalen Last ($V=1$) in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis 1:n der Vierecke (Balkentheorie=1)	62
Abb.3.1.20: Dimensionslose maximale Spannung σ_x an der Einspannstelle infolge einer vertikalen Last ($V=1$) in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis 1:n der Vierecke (Balkentheorie=1)	62
Abb.3.1.21: Definition der Form parallelogrammförmiger Elemente	63
Abb.3.1.22: Dimensionslose Absenkung δ am Ende des Kragarms in Abhängigkeit von der Form der Elemente (Balkentheorie=1)	64
Abb.3.1.23: Dimensionslose Spannung σ_x und Restfehler in Abhängigkeit von der Form der Elemente (Balkentheorie=1)	64
Abb.3.2.1: Netzformen	65
Abb.3.2.2: Beispiel für ein regelmäßiges (a) und ein unregelmäßiges (b) Netz	65
Abb.3.2.3: Restfehler in Abhängigkeit von der (Un-)Regelmäßigkeit ("Un") des FE-Netzes	67
Abb.3.2.4: Übergang zwischen verschiedenen Rastern	67
Abb.3.2.5: Für Abb.3.2.3 verwendete Diskretisierungen	68
Abb.3.2.6: Symmetrisches (a) und unsymmetrisches (b) FE-Netz	69
Abb.3.2.7: Definition des Maßes für die Unsymmetrie des FE-Netzes	69
Abb.3.2.8: Dimensionslose Absenkung δ am Ende des Kragarms in Abhängigkeit von der Unsymmetrie des Netzes (Balkentheorie=1)	70
Abb.3.2.9: Dimensionslose Spannung σ_x an der Einspannstelle in Abhängigkeit von der Unsymmetrie des Netzes (Balkentheorie=1)	71
Abb.3.2.10: Dimensionslose Innere (E_i) bzw. Äußere Energie (E_e) in Abhängigkeit von der Unsymmetrie des Netzes (Balkentheorie=1)	71
Abb.3.2.11: Restfehler in Abhängigkeit von der Unsymmetrie des Netzes	72
Abb.3.2.12: Gleich große (a) und unterschiedlich große (b) Elemente	73

Abb.3.2.13: Definition des Größenverhältnisses der Elemente.....	73
Abb.3.2.14: Dimensionslose Absenkung δ am Ende des Kragarms in Abhängigkeit vom Größenverhältnis 1:m der Elemente (Balkentheorie = 1)	74
Abb.3.2.15: Dimensionslose Spannung σ_x an der Einspannstelle in Abhängigkeit vom Breitenverhältnis 1:m der Elemente (Balkentheorie=1).....	75
Abb.3.2.16: Dimensionslose Innere bzw. Äußere Energie in Abhängigkeit vom Größenverhältnis 1:m der Elemente (Balkentheorie=1).....	75
Abb.3.2.17: Restfehler in Abhängigkeit vom Größenverhältnis 1:m der Elemente.....	76
Abb.4.1.1: Knotenverschiebung zur Netzglättung	77
Abb.4.1.2: Wiederfinden der idealen Topologie beim Glätten.....	78
Abb.4.1.3: Netzveränderung bei verschiedenen Form- und Determinantenfaktoren.....	81
Abb.4.1.4: Winkelfaktoren w_i für Innenwinkel.....	83
Abb.4.1.5: Formfaktoren F_D für Dreiecke	83
Abb.4.1.6: Nicht beabsichtigte, nachteilige Netzglättung.....	84
Abb.4.1.7: Restfehler im Kragarm mit und ohne Netzglättung.....	85
Abb.4.1.8: Dimensionslose Innere bzw. Äußere Energie E_i (E_a) im Kragarm mit und ohne Netzglättung (Balkentheorie = 1).....	86
Abb.4.2.1: Numerierung nach dem Algorithmus von CUTHILL, MCKEE (aus SCHWARZ, 1984).....	88
Abb.4.2.2: Zusammenhang von Bandbreite, Matrixgröße und Freiheitsgraden am Kragarm bei regelmäßiger bzw. unregelmäßiger Diskretisierung	88
Abb.4.2.3: Zusammenhang von Bandbreite, Matrixgröße und Freiheitsgraden am Grunddreieck bei regelmäßiger bzw. unregelmäßiger Diskretisierung.....	89
Abb.4.2.4: Zusammenhang von Bandbreite, Matrixgröße und Freiheitsgraden an realistischen Staumauerquerschnitten	89
Abb.4.3.1: Möglichkeiten der Netzverfeinerung (nach RANK, 1985).....	91
Abb.4.3.2: Verteilung des Restfehlers in einem Kragarm.....	92
Abb.4.3.3: Spannungen σ_x in einem Kragarm	93
Abb.4.3.4: Prognostizierte Entwicklung der Fuzzy-Logik (aus IIR, 1992).....	96
Tab.4.3.5: Fuzzy-Kriterien	96
Abb.4.3.6: Fuzzy-Funktionen.....	97

Tab.4.3.7:	Dringlichkeitsstufen für die Unterteilung.....	98
Tab.4.3.8	Die logischen Operatoren in der Fuzzy-Logik.....	98
Tab.4.3.9a:	Fuzzy-Regeln.....	98
Tab.4.3.9b:	Fuzzy-Regeln.....	99
Abb.4.3.10:	Auswertung der Fuzzywerte für die Unterteilung einer Kante.....	99
Abb.4.3.11:	Teilungsmöglichkeiten für Vierecke.....	100
Abb.4.3.12:	Teilungsmöglichkeiten für Dreiecke.....	101
Abb.4.3.13:	Aufteilungsmöglichkeiten für ein Viereck-Dreieck-Paar.....	103
Abb.4.3.14:	Netzformen ohne und mit Kantenfaktor.....	105
Tab.4.3.15:	Beispielhafte Anteile der verfeinerten Elementkanten pro Verfeinerungsschritt.....	107
Abb.4.3.16:	FE-Netze für drei Verfeinerungsfolgen.....	109
Abb.4.3.17:	Konvergenz der dimensionslosen Absenkung δ bei verschiedenen Ge- schwindigkeiten der Verfeinerung (Balkentheorie=1).....	110
Abb.4.3.18:	Konvergenz des Restfehlers bei verschiedenen Geschwindigkeiten der Verfeinerung.....	110
Abb.4.4.1:	Spannungsverlauf in einem beliebigen Element.....	113
Abb.4.4.2:	Spannungsermittlung FE-Methode: Schwerpunktspannung (SALVETER, 1989).....	114
Abb.4.4.3:	Spannungsermittlung FE-Methode: Stützpunktspannung (SALVETER, 1989).....	114
Abb.4.4.4:	Spannungsermittlung FE-Methode: Eckpunktspannung (SALVETER, 1989).....	115
Abb.4.4.5:	Dimensionslose Spannung σ_x im rechten Drittelspunkt eines Kragarms bei verschiedenen Berechnungsarten (Balkentheorie=1).....	117
Abb.4.4.6:	Dimensionslose Spannung σ_x im linken Drittelspunkt eines Kragarms bei verschiedenen Berechnungsarten (Balkentheorie=1).....	117
Abb.4.4.7:	Dimensionslose Spannung σ_x an der Einspannstelle eines Kragarms bei verschiedenen Berechnungsarten (Balkentheorie=1).....	118
Abb.4.4.8:	Gleichgewichtskontrolle ΣH in Abh. von Wichtung und Ort der Spannungen.....	119

Abb.4.4.9:	Gleichgewichtskontrolle ΣV in Abh. von Wichtung und Ort der Spannungen	120
Abb.4.4.10:	Restfehler in Abh. von Wichtung und Ort der Spannungen.....	120
Abb.4.5.1:	Zahlendarstellung bei single und double precision	121
Abb.4.5.2:	Horizontalverschiebung δ_x der Mauerkrone bei einfacher bzw. doppelter Genauigkeit	122
Abb.4.5.3:	Horizontalverschiebung δ_x der Mauerkrone und Energie in Abhängigkeit vom E-Modul-Verhältnis.....	123
Abb.4.5.4:	Spannungen σ_y an Wasserseite und Luftseite in Abhängigkeit vom E-Modul-Verhältnis	124
Abb.4.5.5:	Restfehler und Fehler bei E_i (E_a) in Abhängigkeit vom E-Modul-Verhältnis	125
Abb.4.5.6:	Fehler bei der Horizontalverschiebung δ_x der Mauerkrone bei verschiedenen Staumauerberechnungen.....	125
Abb.4.5.7:	Rechenzeitvergleich Einfache-Doppelte Genauigkeit.....	126
Abb.4.6.1:	Rechenzeitanteile beim Kragarm (elastostatische Berechnung).....	130
Abb.4.6.2:	Rechenzeitanteile beim Dreieckquerschnitt (elastostatische Berechnung) .	131
Abb.4.6.3:	Rechenzeitanteile bei realistischen Staumauern (elastostatische Berechnung)	131
Abb.4.6.4:	Absolute Rechenzeiten (elastostatische Berechnung auf einem PC 386-33)	132
Abb.5.2.1:	Lastfall Eigengewicht	135
Abb.5.2.2:	Lastfall Wasserdruck	135
Tab.5.2.3:	Verschiebungen nach Elastizitätstheorie.....	136
Abb.5.3.1:	Diskretisierung zur Bestimmung der notwendigen Untergrundtiefe (Ausschnitt).....	138
Abb.5.3.2:	Dimensionslose Horizontalverschiebung δ_x der Mauerkrone im Lastfall Eigengewicht in Abhängigkeit von Untergrundtiefe und E-Modul-Verhältnis E_m/E_a (Scheibentheorie=1)	140

Abb.5.3.3:	Dimensionslose Horizontalverschiebung δ_x der Mauerkrone im Lastfall Wasserdruck in Abhängigkeit von Untergrundtiefe und E-Modul- Verhältnis E_m/E_u (Scheibentheorie=1)	140
Abb.5.3.4:	Dimensionslose Vertikalverschiebung δ_y der Mauerkrone im Lastfall Eigengewicht in Abhängigkeit von Untergrundtiefe und E-Modul- Verhältnis E_m/E_u (Scheibentheorie=1)	141
Abb.5.3.5:	Dimensionslose Vertikalverschiebung δ_y der Mauerkrone im Lastfall Wasserdruck in Abhängigkeit von Untergrundtiefe und E-Modul- Verhältnis E_m/E_u (Scheibentheorie=1)	141
Abb.5.3.6:	Dimensionslose Spannung σ_y am Mauerfuß im Lastfall Eigengewicht in Abhängigkeit von Untergrundtiefe und E-Modul-Verhältnis E_m/E_u (Scheibentheorie=1)	142
Abb.5.3.7:	Dimensionslose Spannung σ_y am Mauerfuß im Lastfall Wasserdruck in Abhängigkeit von Untergrundtiefe und E-Modul-Verhältnis E_m/E_u (Scheibentheorie=1)	142
Abb.5.4.1:	FE-Netze in 8 Verfeinerungsschritten für eine beispielhafte Verfeinerungsfolge	144
Abb.5.4.2:	Dimensionslose Verschiebung δ_x der Mauerkrone in Abhängigkeit von der Verfeinerungsfolge (Scheibentheorie = 1)	145
Abb.5.4.3:	Dimensionslose Absenkung δ_y der Mauerkrone in Abhängigkeit von der Verfeinerungsfolge (Scheibentheorie = 1)	145
Abb.5.4.4:	Dimensionslose Innere bzw. Äußere Energie in Abhängigkeit von der Verfeinerungsfolge (Scheibentheorie = 1)	146
Abb.5.4.5:	Restfehler in Abhängigkeit von der Verfeinerungsfolge	146
Abb.5.4.6:	Dimensionslose Spannung σ_y am wasserseitigen Mauerfuß in Abhängigkeit von der Verfeinerungsfolge (Scheibentheorie = 1)	147
Abb.5.4.7:	Günstige Folge von Verfeinerungs-Prozentsätzen	148
Abb.5.4.8:	Dimensionslose Spannungen σ_y am wasserseitigen Mauerfuß in Abhängigkeit von der Elementgröße (Scheibentheorie = 1)	149
Abb.5.4.9:	Erstes Element in der Sohlfuge an der Wasserseite	150

Abb.5.4.10:	Komponenten der Spannung σ_y am wasserseitigen Mauerfuß	151
Abb.5.4.11:	Sohldruckverteilung nach BOUSSINESQ (aus WITTKE, 1979)	151
Abb.5.4.12:	Abhängigkeit der maximalen Hauptspannungen von der Genauigkeit der Diskretisierung (aus ROUVÉ et al., 1987)	152
Abb. A. 1:	Regelquerschnitt (1. Entwurf)	157
Abb. A. 2:	Rand und Materialbereiche des gesamten Berechnungsausschnitts	158
Abb. A. 3:	Rand und Materialbereiche, Ausschnitt	159
Abb. A. 4:	Rand und Materialbereiche des gesamten Berechnungsausschnitts mit Innenknoten	160
Abb. A. 5:	Rand und Materialbereiche mit Innenknoten, Ausschnitt	160
Abb. A. 6:	Ausgangs-FE-Netz, gesamter Berechnungsausschnitt	161
Abb. A. 7:	Ausgangs-FE-Netz, Ausschnitt	161
Tab. A. 8:	Verfeinerungsparameter	162
Tab. A. 9:	Knoten- und Elementezahlen der FE-Netze in den Verfeinerungsschritten	163
Tab. A. 10:	Maximale Spannungen σ_y in den Verfeinerungsschritten	163
Abb. A. 11:	Gesamtes FE-Netz nach dem 1. Verfeinerungsschritt	165
Abb. A. 12:	FE-Netz nach dem 1. Verfeinerungsschritt, Ausschnitt	165
Abb. A. 13:	FE-Netz nach dem 2. Verfeinerungsschritt, gesamt	166
Abb. A. 14:	FE-Netz nach dem 2. Verfeinerungsschritt, Ausschnitt	166
Abb. A. 15:	FE-Netz nach dem 3. Verfeinerungsschritt, gesamt	167
Abb. A. 16:	FE-Netz nach dem 3. Verfeinerungsschritt, Ausschnitt	167
Abb. A. 17:	Vertikalspannungen bei der Ausgangsdiskretisierung (258 Knoten)	168
Abb. A. 18:	Vertikalspannungen im 1. Verfeinerungsschritt (863 Knoten)	168
Abb. A. 19:	Vertikalspannungen im 2. Verfeinerungsschritt (2706 Knoten)	169
Abb. A. 20:	Vertikalspannungen im 3. Verfeinerungsschritt (4360 Knoten)	169
Abb. A. 21:	Acht Varianten mit verschiedenen Fugenanordnungen am Kontrollgang	170
Abb. A. 22a:	Vertikalspannungen bei den acht Entwurfsvarianten (1. Teil)	176
Abb. A. 22b:	Vertikalspannungen bei den acht Entwurfsvarianten (2. Teil)	177
Abb. A. 23a:	Gerissene Bereiche bei den acht Entwurfsvarianten (1. Teil)	178
Abb. A. 23b:	Gerissene Bereiche bei den acht Entwurfsvarianten (2. Teil)	179

1 Einleitung

Die Entwicklung immer leistungsfähigerer Computer hat dazu geführt, daß sich mathematisch-numerische Berechnungsverfahren wie die Finite-Elemente-Methode (FEM) in vielen Bereichen des Ingenieurwesens verbreitet haben. Während diese Verfahren in der Wissenschaft schon seit Jahrzehnten angewendet werden, beginnen sie erst allmählich, sich auch in der Praxis der Ingenieurarbeit durchzusetzen.

Dort sind sie aus folgenden Gründen immer noch nicht die Regel:

Seitens der Anwender:

- Erfahrene Ingenieure haben noch zu wenig vertiefte Kenntnisse im Umgang mit Rechnern und der elektronischen Datenverarbeitung (EDV). Deshalb gibt es psychologische Vorbehalte gegen den Computer. Man schenkt den neuen, teilweise noch zu komplizierten Berechnungsmethoden nicht immer Vertrauen.
- Für die Anwendung der von der Wissenschaft zur Verfügung gestellten FE-Programme ist ein Spezialist erforderlich, der durch seine Ausbildung über umfangreiches theoretisches Hintergrundwissen und EDV-Erfahrung verfügt. Er muß neben dem Praktiker arbeiten und diesen beraten.
- Dem nicht geschulten Anwender fehlen Kenntnisse über die inneren Zusammenhänge. Er benötigt deshalb lange Zeit zur Einarbeitung. Die Ergebnisse sind für den Praktiker nicht nachvollziehbar und oft ohne Bezug auf vergleichbare Ergebnisse. Sie können durch zahlreiche Faktoren selbst bei scheinbar richtiger Anwendung falsch sein.

Seitens der Programme:

- Die Rechenprogramme sind häufig noch nicht voll ausgereift, was Installation, Bedienung, Dateneingabe, Parameterwahl, Datenauswertung, Programmwartung und besonders die Prüfbarkeit angeht und damit kompliziert, zeitaufwendig und fehleranfällig, besonders, wenn der Benutzer nur gelegentlich mit einem Programm arbeitet.
- Programme auf Großrechenanlagen werden für Ingenieurbüros praktisch erst dann wirtschaftlich, wenn sie täglich in Planungsprozessen eingesetzt werden, nicht aber für nur gelegentlich anfallende Problemstellungen.
- Investitionen in Finite-Elemente-Programme haben sich, wie die Erfahrung zeigt, häufig nicht bezahlt gemacht. Angeschaffte Programme werden manchmal nur wenig be-

nutzt. Von den Möglichkeiten des Programms wird nur ein geringer Teil in Anspruch genommen.

Dies gilt auch für das Bauingenieurwesen, speziell für die Spannungsberechnung von Staumauern mit Berücksichtigung des Untergrundes. Der Wissenschaft standen schon früh die erforderlichen Großrechner zur Verfügung, um mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode Gewichtsstaumauern und auch Bogenstaumauern zu berechnen. Der Aufwand hierzu war hoch und die Computerprogramme nur mit grundlegendem theoretischen Wissen anwendbar. Praktisch konnte nur der jeweilige Programmentwickler damit umgehen.

In der Ingenieurpraxis dagegen geht es um den Standsicherheitsnachweis bei der Planung bzw. heute auch bei der Sanierung bestehender Staumauern. Es werden hier meist altbekannte Berechnungsverfahren angewandt (Balkentheorie), mit denen der Spannungsverlauf zwar generell, im Detail aber nur unbefriedigend erfaßt werden kann. Die Randbedingung "Ebenbleiben der Querschnitte" ergibt zu ungenaue Spannungen an den Rändern großer Querschnitte. Die abgefragte Spannung ist daher nicht in allen Bauwerksbereichen ausreichend genau definiert.

1.1 Aufgabenstellung, Zielsetzung

In dieser Arbeit wird ein vom Autor entwickelter Algorithmus für die Optimierung der Berechnung von zweidimensionalen Querschnitten wie z.B. der einer Gewichtsstaumauer vorgestellt. Das Ziel ist dabei die Optimierung sowohl des FE-Netzes wie des gesamten Berechnungsablaufs, um genauere Ergebnisse zu erhalten, und in zweiter Linie der Einsatz auf kostengünstigen Computern in der Praxis. Die Ergebnisse der Berechnung sollen beurteilt und ihre Aussagefähigkeit verbessert werden.

Früher mußte man bei einer FE-Berechnung das FE-Netz vollständig von Hand und die Knoten und Elemente einzeln eingeben. Die Rechnerkapazität beschränkte die Größe der FE-Netze und die erzielte Genauigkeit war nicht abzuschätzen. Der Aufwand an Arbeits- und Rechenzeit war hoch.

Im Laufe der Zeit konnte die FE-Methode immer mehr verbessert werden. Die Rechenzeiten wurden kürzer, weil die Rechner schneller und die Programme leistungsfähiger wurden. In dieser Arbeit soll das FE-Verfahren für Spannungs- und Verformungsberechnun-

gen noch weiter verbessert werden. Damit soll ein Beitrag zur Etablierung der FE-Methode in der Ingenieurpraxis geleistet werden. Nach theoretischen Überlegungen wird der entwickelte Algorithmus beispielhaft für die Spannungsberechnung einer zu sanierenden Gewichtsstaumauer (Ennepe-Talsperre) angewandt und getestet. Die bei dieser Aufgabe auftretenden Probleme werden herausgearbeitet und ihre Lösung mittels eines Programms erläutert.

Das Schaubild (Abb.1.1) zeigt die Entwicklungsphasen für Lösungsverfahren technischer Probleme. Die FEM befindet sich zur Zeit in der dritten Phase. Die Hauptentwicklung ist abgeschlossen. Um aber noch zu einem anerkannten, praxisnahen, prüfaren und einfachen Werkzeug zu werden, müssen eine Reihe von Voraussetzungen erfüllt werden.

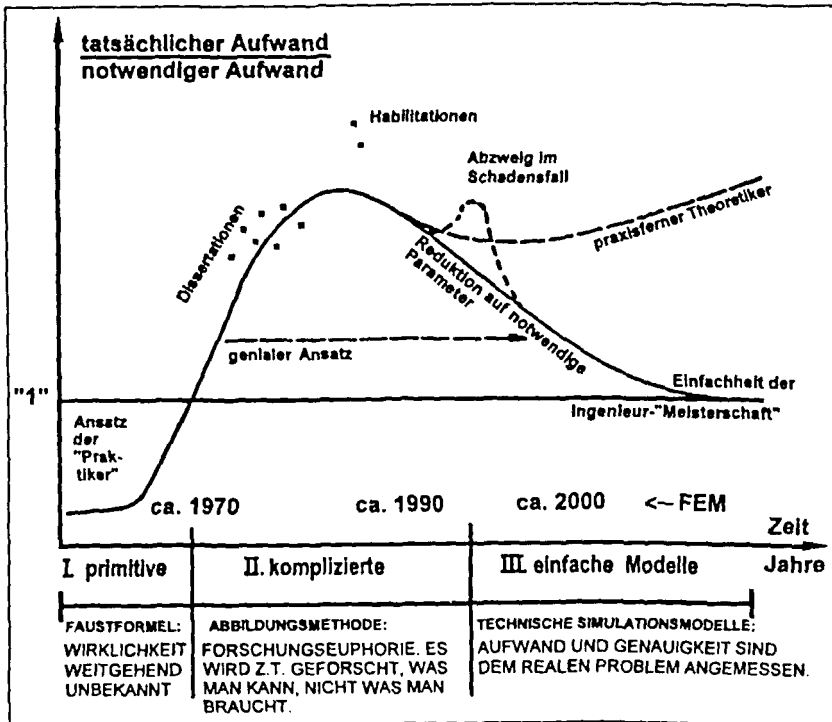


Abb.1.1: Entwicklungsphasen für Modelle technischer Probleme (aus HEIDERMAN, 1986, nach DUDDECK, 1978) (ca.-Jahreszahlen ergänzt für FEM)

- Die Programme müssen so einfach und benutzerfreundlich aufgebaut sein, daß der Bauingenieur ohne Programmiererfahrung, jedoch mit Hintergrundwissen über die mathematisch-physikalischen Grundlagen, ein solches Programm schnell und unkompliziert anwenden kann.
- Die Dateneingabe muß weitgehend automatisiert sein. Das statische System und alle Lasten müssen systematisch eingegeben werden können. Das FE-Netz selbst sollte dann weitgehend automatisch vom Programm aufgebaut und optimiert werden können.
- Der Typ der finiten Elemente muß so gewählt sein, daß er dem Problem angepaßt ist und zuverlässige Ergebnisse liefert.
- Ein Programm sollte Eingabefehler automatisch entdecken bzw. gar nicht erst entstehen lassen.
- Da das FE-Verfahren letztlich nur ein Näherungsverfahren ist, sollte die numerische Genauigkeit der Ergebnisse automatisch abgeschätzt werden. Es sollten nicht genauere Ergebnisse vorgetäuscht werden als die eingegebenen Randbedingungen erlauben.
- Die Ergebnisse müssen prüfbar sein. Dafür sollte das Programm nachvollziehbare Zwischenergebnisse liefern und Plausibilitätskontrollen ermöglichen.
- Die Programme sollten auf kostengünstigen, allgemein verfügbaren Rechnern einzusetzen sein, d.h. auf Personal Computern des Industriestandards (IBM-kompatible PC), die mit ausreichend großem Speicher bestückt sind, z.B. ein 486-PC.

1.2 Literaturübersicht und Stand von Wissenschaft und Forschung

Die folgende Literaturübersicht nach den Ziffern 1.2.1 und 1.2.2 gibt einen Überblick über bisherige Arbeiten zu Genauigkeitsabschätzungen, Kontrollen, Fehlerindikatoren und Verfeinerungsstrategien für FE-Berechnungen. Der Stand der Anwendungstechnik wird unter Ziffer 1.2.3 erläutert. Einen schematischen Überblick über die Fehlerarten, die im folgenden angesprochen werden, gibt Kap.2.3 mit der Abb.2.10. Weitere Literaturhinweise werden an passender Stelle im Text gegeben.

1.2.1 Grundlagen der Fehlertheorie bei FE-Methoden

Die folgenden Veröffentlichungen behandeln die theoretischen Grundlagen:

ARGYRIS, JOHNSON, ROSANOFF, ROY (1975) behandeln den Fehler in FE-Berechnungen, der durch einfache Rechengenauigkeit (single Precision) und Rundungsfehler entsteht. Die Autoren entwickeln einen Iterationsalgorithmus zur Verbesserung der Genauigkeit.

BABUSKA et al. (1972, 1976, 1978) beschreiben in mehreren grundlegenden Arbeiten eine mathematische Ableitung der Fehlerbestimmung von FE-Berechnungen mit Hilfe der Energienorm, ohne allerdings die praktische Anwendbarkeit zu zeigen.

DIAZ, KIKUCHI, TAYLOR (1983) benutzen einen lokalen Interpolationsfehler, um das FE-Netz durch iterative Knotenverschiebungen zu optimieren. Abb.1.2 zeigt beispielhaft das Ausgangsnetz und das verbesserte Netz, das um den Schlitz in der Mitte herum verfeinert ist.

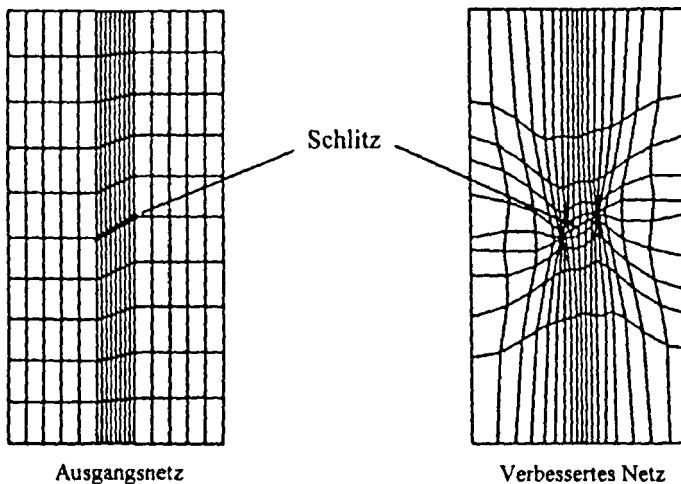


Abb.1.2: Ausgangsnetz und verbessertes Netz nach DIAZ, KIKUCHI, TAYLOR (1983)

RANK (1985) leitet einen Fehlerindikator mathematisch ab und kommt zu dem Ergebnis, daß der Spannungssprung zwischen den Elementen in der Praxis als Indikator verwendet werden kann. Der Vorteil liegt darin, daß bei praktischen Berechnungen Spannungen oft die wichtigsten Ergebnisse darstellen und damit mehr physikalische Information im Fehlerindikator enthalten ist. Er verfeinert das Netz mit geometrisch inkompatiblen Elementen, so daß irreguläre Knoten mit neuen Randbedingungen entstehen (Abb. 1.3).

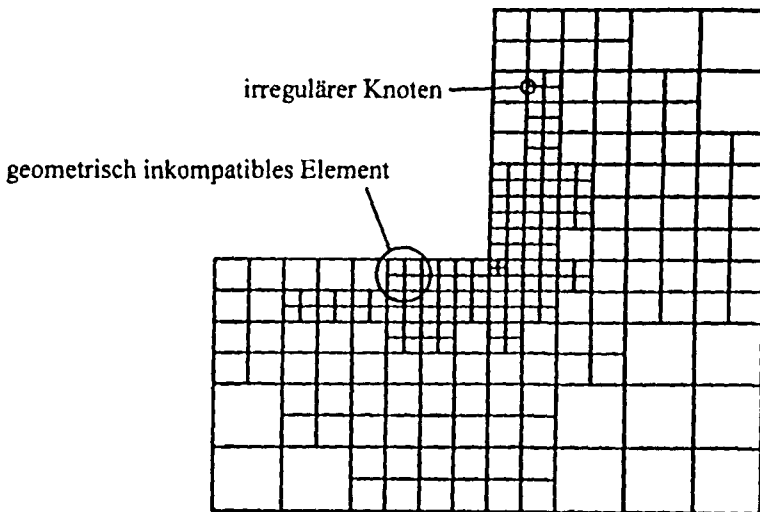


Abb. 1.3: Netz nach 6 Verfeinerungsschritten (aus RANK, 1985)

HARTMANN, PICKARDT (1985) schlagen Fehlerlasten als Indikator vor. Die Fehlerlasten sind dabei die Differenz zwischen den angesetzten Lasten und den Lasten, die man aus der FE-Lösung zurückrechnen kann. Diesem Vorschlag liegt zugrunde, daß die FE-Lösung für die rückgerechneten Lasten tatsächlich das genaue Gleichgewicht beschreibt. Dieser eher empirisch-ingenieurmäßige Gedanke führt zweifellos auch zu einer sinnvollen Verfeinerung von FE-Netzen.

ODEN, DEMKOWICZ, STROUBOLIS, DEVLOO (1986) berechnen einen a-posteriori-Fehlerestimator (d.h. eine Schätzung des Fehlers im Nachhinein) und verfeinern damit das Netz wie RANK unter Bildung von irregulären Knoten. Gleichzeitig kann der

Funktionsansatz erhöht werden, so daß sich ein verfeinertes Netz - wie in Abb.1.4 dargestellt - ergibt, in dem einzelne Elemente unterteilt sind und andere einen erhöhten Funktionsansatz haben.

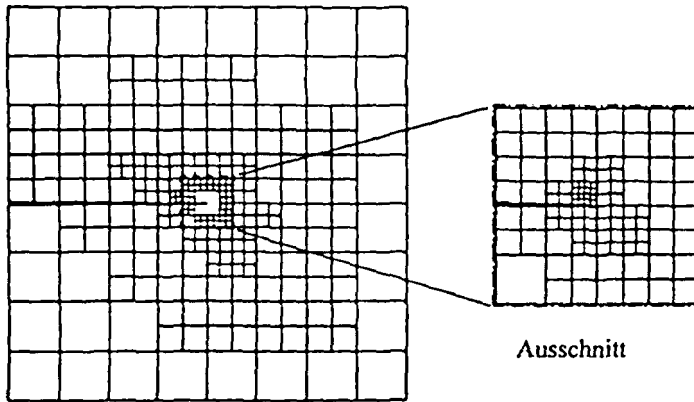


Abb.1.4: Verfeinertes Netz (aus ODEN, DEMKOWICZ, STROUBOULIS, DEVLOO, 1986)

ROBERTI, MELKANOFF (1987) benutzen die Spannung als Fehlerindikator, indem sie die Spannungsänderung zwischen zwei Verfeinerungsschritten als Kriterium verwenden. Dies hat den Vorteil, daß das FE-Netz anhand der letztlich benötigten Größen beurteilt wird. Mit diesem Kriterium kann man sogar als Anwender eines FE-Programms ohne Eingriff in das Programm eine Netzverfeinerung durchführen. Eine typische Verfeinerung eines Dreieckselements mit einer eingezeichneten Spannungskomponente zeigt Abb.1.5.

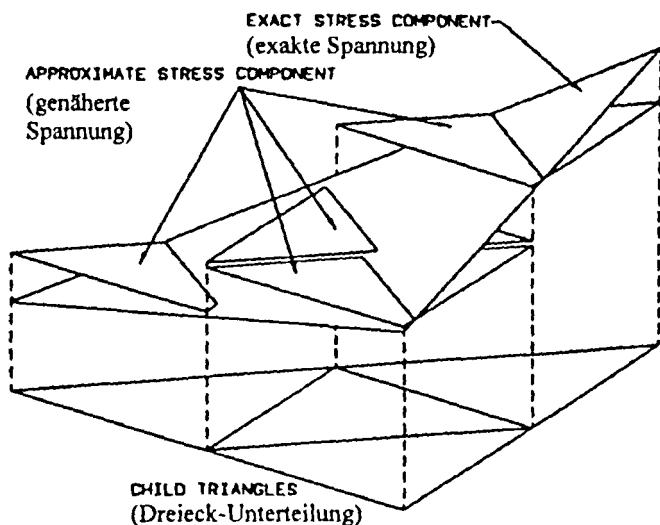


Abb. 1.5: Unterteilung eines Dreieck-Elements (aus ROBERTI, MELKANOFF, 1987)

STEIN, PLANK (1988) leiten einen Fehlerindikator her, der die "Fehlkraft" im Elementinneren und am Rand des Berechnungsgebietes sowie die Spannungssprünge zwischen den Elementen enthält. Dieser Indikator liefert eine Abschätzung durch die Energienorm.

BREMER (1988) verwendet die Verzerrungsenergiedichte als Verdichtungsindikator und die Verzerrungsenergiedichtendifferenz als Maß für die Verteilung des Approximationsfehlers. Das Netz wird regulär verfeinert, d.h. die Knoten- und Elementzahl wird erhöht. Dieser Weg ist sowohl mathematisch abgesichert wie praktisch nachvollziehbar.

PALLACKS (1988) benutzt die maximale Spannung als Indikator, um den Fehler in kritischen, wichtigen Bereichen, z.B. Kerbstellen, gering zu halten und dort diese Spannung möglichst genau zu berechnen. Um einige praktische Nachteile auszuschalten, kombiniert er diese Methode mit der Kontrolle des globalen Fehlers.

BELLMANN, HOLZER, WERNER (1988) verwenden ebenfalls die Energienorm, indem sie mit Hilfe der Spannungssprünge an den Elementkanten das FE-Netz adaptiv verfeinern. Die Unterteilung von Elementen und die Erhöhung des Ansatzfunktionsgrades werden kombiniert.

Auch ZIENKIEWICZ, LIU, HUANG (1988) definieren einen Fehlerestimator mit Hilfe der Energienorm. Statt der (nicht bekannten) exakten Lösung wird eine FE-Lösung höherer Ordnung als Bezug gewählt. Netzverfeinerungen für Drei- und Viereckdiskretisierungen werden vorgeschlagen. Ein Viereck wird wie bei Rank (1985) dabei ausschließlich in vier neue Vierecke mit irregulären Randknoten aufgeteilt (Abb.1.6 mit: D.O.F.=degree of freedom (Freiheitsgrade), η =Fehlermaß).

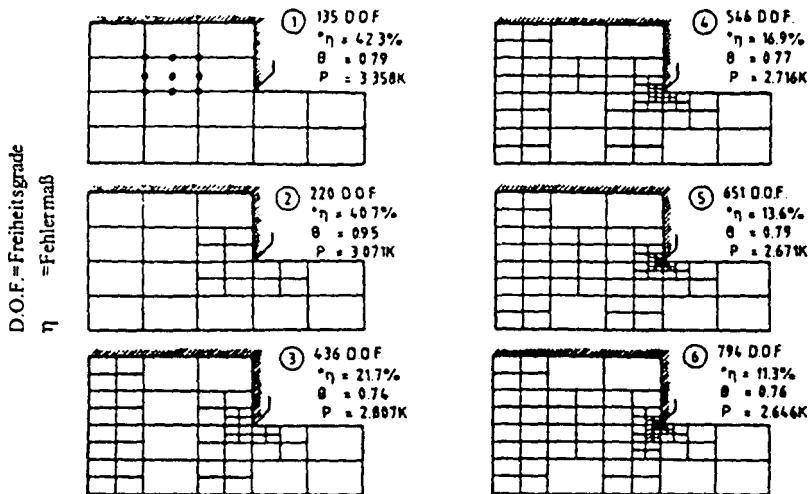


Abb.1.6: Folge von Unterteilungen für Vierecke (aus ZIENKIEWICZ, LIU, HUANG, 1988)

1.2.2 Praktische Anwendung

Die folgenden Beiträge beschäftigen sich mit der praktischen Anwendung von Kontrollen bei FE-Berechnungen:

Nach POLONYI, REYER (1975) sind Eingabefehler die hauptsächlichen Fehlerquellen numerischer Berechnungen. Sie lassen sich durch Strukturdarstellungen (Plots) grafisch erkennen (Eingabekontrolle). Weitere Kontrollen sind als Teilkontrollen oder Gesamtkontrollen möglich. Teilkontrollen sind notwendig, nicht aber hinreichend für die Ge-

samtgenauigkeit. Gesamtkontrollen kann man durch genaue Vergleichsberechnungen (z.B. zweites Programm) oder mit einem groben Netz durchführen, oder gegebenenfalls über experimentelle Kontrollen am Bauwerk oder am Modell.

Hier findet sich auch die Aussage, daß gegen eine FEM-Näherungslösung in der Praxis nichts einzuwenden ist, da jedes Tragwerk ohnehin idealisiert wird. Auch sogenannte exakte Lösungen sind in Wirklichkeit eine Näherung. Es komme nur auf die Qualität der Näherung an.

Die Autoren sprechen im wesentlichen "äußere" Fehlereinflüsse an, nicht aber die "innere" Genauigkeit der Berechnung.

STEIN (1978) stellt eine Reihe von Forderungen an kommerzielle FE-Programme aus der Sicht prüfbarer Berechnungen:

1. Das Handbuch muß präzise Informationen über Theorie, Elementmodelle und Rechenprozeß liefern.
2. Die Eingabe muß einfach und problemorientiert sein. Die Eingabebeschreibung muß vollständig und klar sein und an Beispielen erläutert werden. Ein Echo- oder Kontrollplot des Netzes muß abrufbar sein.
3. Die Ausgabe soll flexibel, selektiv und grafisch sein.
4. Die fiktiven inneren und äußeren Knotenkräfte müssen ausgedruckt werden können.
5. Die Konditionszahl des Gleichungssystems (s.u.) muß berechnet werden können.
6. Gleichgewichtskontrollen am Gesamtsystem mit den fiktiven Knotenkräften müssen möglich sein. Gleichgewichtskontrollen sind auch in wählbaren Schnitten mit den Schnittgrößen und der Belastung möglich, z.B. für Auflagerreaktionen. Der Fehler wird prozentual mit Bezugsgröße angegeben.
7. Nachlaufprogramme für Postprocessing müssen möglich sein.
8. Mehrere Elementmodelle gleicher Struktur müssen verfügbar und kombinierbar sein.
9. Netzgenerierung muß möglich sein.
10. Automatische Netzverfeinerung (Adaption) wäre wünschenswert.
11. Restart- und Dialogmöglichkeiten wären wünschenswert.

Nach Stein ist die Abschätzung des Diskretisierungsfehlers und auch von Singularitäten stets problematisch. Singularitäten (z.B. scharfkantige Ecken und Auflager) sind allerdings in der Realität weniger bedeutend als angenommen, besonders im Vergleich zu den Unsicherheiten des Baustoffverhaltens (Materialeigenschaften), bei den Systemeigenschaften (Idealisierung) und bei der tatsächlichen Belastung (siehe hierzu Kap.5.4.3). Stein erwartet noch sogenannte a-posteriori-Abschätzungen mit Hilfe berechenbarer lokaler Fehler und sieht die Punkte 10 und 11 der obigen Aufstellung noch nicht in naher Zukunft.

Nach WILDERMUTH (1980) können Finite Elemente nicht rein formal angewandt werden, der Anwender muß vielmehr theoretische Grundkenntnisse sowie Erfahrung haben und (selbstverständlich) sorgfältig arbeiten. Kontrollen seien möglich durch Überprüfen der Hauptschnittkräfte, Gleichgewichtskontrollen und durch die Konditionszahl.

Nach PFAFFINGER (1980) gibt es folgende Kontrollen für FE-Berechnungen:

1. Gleichgewichtskontrollen (lokal und global)
2. Erfüllung der geometrischen und statischen Rahmenbedingungen
3. Energieverteilung
4. Kondition der Systemmatrizen
5. Erfüllung von Konvergenzkriterien
6. Vergleichsrechnungen
7. Messungen
8. Vergleich mit erwarteten Ergebnissen aus ähnlichen Berechnungen oder Überschlagsberechnungen
9. grafische Überprüfung des Netzes, der Konnektivitäten (Element-Knoten-Verbindungen), der Verwindung ebener Elemente, Seitenverhältnisse und dgl.

Es wird hier empfohlen, den Lastfall Eigengewicht als Kontrolle immer zu berechnen, da er leichter überschaubar ist und die Plausibilität der Ergebnisse leicht zu beurteilen ist.

WERNER, KATZ (1980) empfehlen vergleichende Berechnungen mit verschiedenen und verschieden feinen Netzen (mit Vierecken und Dreiecken). Damit lassen sich Konvergenzbetrachtungen anstellen für Verformung, Normalkraft und Biegemoment. Sie stellten fest, daß Vierecke schneller gegen das Endergebnis konvergieren als Dreiecke.

Diese Bemerkungen zielen eher auf die Genauigkeitsbetrachtungen eines Anwenders ab, der ein fertiges Programm benutzt.

HEES (1987) behandelt neben Kontrollen von allgemeinen statischen Berechnungen auch Besonderheiten von FE-Berechnungen. Er stellt dabei den Einfluß der Diskretisierung auf das Ergebnis heraus. Bei zu groben oder ungünstig angeordneten Elementen gibt es danach zu große Abweichungen von der genauen Lösung. Dies gilt insbesondere für Dreiecke, wenn ein symmetrisches statisches System unsymmetrisch diskretisiert wird.

In der "RICHTLINIE für das Aufstellen und Prüfen EDV-unterstützter Standsicherheitsnachweise" (Entwurf 1987) werden einige Möglichkeiten zur Kontrolle und Prüfung von EDV-Berechnungen genannt. Alle Angaben gelten auch für FE-Berechnungen, beziehen

sich aber mehr auf die äußere, formale Gestaltung der Nachweise. Kriterien zur Beurteilung der (inneren) Genauigkeit einer FE-Berechnung sind nicht das Thema dieser Richtlinie.

Die Richtlinie gliedert sich in:

1. Geltungsbereich und Zweck der Richtlinie
2. Allgemeine Anforderungen
3. Formale Anforderungen
4. Inhalt
5. Prüfen

RANK, BABUSKA (1987) haben mit der Entwicklung eines einfachen Expertensystems zum Aufbau eines optimalen FE-Netzes begonnen.

Dieses sicher noch entwicklungsfähige Expertensystem führt den Benutzer bei den Verfeinerungsschritten in Dialogform und gibt auch Auskunft über die erreichte Genauigkeit.

TISSERA, MÜLLER (1990) ziehen aus der grafischen Auswertung von FE-Ergebnissen Rückschlüsse auf die Modellierung und somit die Qualität des Rechenmodells. Ergebnisse (Spannungen, Temperaturen) werden elementweise farbig geplottet. Unstetigkeiten, die an Elementgrenzen auftreten, deuten auf eine mangelhafte Modellierung hin.

Der ARBEITSAUSSCHUß "UFEREINFASSUNGEN" hat im Jahr 1990 Empfehlungen zur Anwendung elektronischer Berechnungen gegeben. Diese geben einige allgemeine Hinweise zur Gestaltung von FE-Berechnungen.

1.2.3 Gegenwärtiger Stand bei der Anwendung von FE-Methoden

Der gegenwärtige Stand läßt sich an den FE-Programmen erkennen, die es auf dem Markt gibt, sowie in den Normen und Vorschriften, die ihre Anwendung regeln.

1.2.3.1 FE-Programme

Heute ist in der Regel für jede höhere Staumauer, für die auch der Untergrund berücksichtigt werden muß (Neubau oder Sanierung), eine FE-Berechnung erforderlich. Auf dem Markt gibt es eine Vielzahl von FE-Programmen für diesen speziellen und allgemeine Zwecke. Tab. 1.7 zeigt eine Auswahl von auf dem Markt befindlichen FE-Programmen mit

Angabe des Verfassers und Vertreibers, soweit bekannt. Fast alle stammen ursprünglich aus dem wissenschaftlichen Bereich, d.h. wurden an Forschungseinrichtungen entwickelt und nicht von einem Softwarehaus.

Programmname	Verfasser/Vertreiber	Verfügbarkeit
ABAQUS	Hibbitt, Carlsson	Großrechner
ADINA	ADINA R&D Inc., USA BTE GmbH, Nürnberg	Großrechner, Workstation, Personal Computer
ALGOR	Algor Interactive Systems, Inc., USA Gerhard Benneck, Düsseldorf	Personal Computer
ALLFEM	Nemetschek Programmsystem GmbH, München	Workstation, Personal Computer
ANSYS	Swanson Analysis Systems, USA CAD-FEM GmbH, Ebersberg	Großrechner, Workstation, Personal Computer
COSAR	TU Magdeburg FEM COS GmbH, Magdeburg	Personal Computer
COSMOS/M	Structural Research and Analysis Corporation, USA (SRAC), CAE Partner, Marburg	Workstation, Personal Computer
CS-FEAM, CS-FEBA	CSI GmbH, Dortmund	Workstation, Personal Computer
DISKUS	RIB/RZB, Dortmund	Personal Computer
FEST03	Inst. f. Grundbau, Bodenmechanik, Felsmechanik und Verkehrswasserbau, RWTH Aachen Ing.-Büro Prof. Dr.-Ing. Wittke, Aachen	Workstation
FLAIR	SC-Softcomp GmbH, Nürnberg	Personal Computer
HOFE	Dipl.-Ing. M. Hoffmann, Netphen Ing.-Büro Salveter GmbH, Netphen	Personal Computer
INFOSTATIK	Infograph GmbH, Aachen	Personal Computer
MEANS V3	HTA-Software, Friesenheim	Personal Computer
MICADO	Gerkhardt Software GmbH, Worms	Personal Computer
NASTRAN	National Aeronautics & Space Administration, USA (NASA)	Großrechner

PAFEC	(GB) KED, Rodenbach	Personal Computer
PATRAN	(USA)	Großrechner
PLAFEM	Hochtief Software, Frankfurt/Main	Personal Computer
PLAXIS	Technische Universität Delft A. A. Balkema Publishers, Rotterdam	Personal Computer
PRAKSI	RIB/RZB, Dortmund	Personal Computer
SAP IV/SAP6/ SAP7	Structural Analysis, Inc., USA	Großrechner
SAP86	Structural Analysis, Inc., USA KED, Rodenbach	Personal Computer
SET	TH München	Großrechner
SPRE	Abacus Computer GmbH, Korntal	Personal Computer
STARDYNE	General Microelectronics Corporation, USA Wölfel Beratende Ingenieure, Höchberg	Großrechner, Workstation, Personal Computer
4H-ALFA	pcae GmbH, Hannover	Personal Computer

Tab. 1.7: Auswahl von auf dem Markt befindlichen FE-Programmen

Einige Programme sind nicht kommerzialisiert und werden nur vom Programmentwickler selbst benutzt (**spezielle FE-Programme**). Sie sind ursprünglich auf eng begrenzte Aufgaben spezialisiert, weil sie nur für einen bestimmten Zweck programmiert worden sind. Der Programmierer kennt die mathematisch-numerischen Grundlagen und sollte die Ergebnisse richtig beurteilen können. In der Anwendung sind diese Programme meistens kompliziert, denn sie sind nicht für den allgemeinen Gebrauch konzipiert. Häufig existiert nicht einmal eine Programmbeschreibung.

Andererseits gibt es kommerzielle Programme, die allgemeingültig und auch sehr komfortabel sind (**allgemeine FE-Programme**). Die Kopplung mit einem CAD-System ist heute allgemein üblich. Der FE-Programmteil verfügt meist über eine große Anzahl verschiedenster Elementtypen (Platten-, Schalen-, Volumen-, Stab-, Fluid-, Rißelemente usw.), mit denen Aufgaben aus einer Vielzahl von Fachbereichen lösbar sind. Mit vielen ist auch die Berechnung von Gewichtsstauauern möglich. Diese Programme werden von erfahrenen Ingenieuren als Anwender benutzt. Diesen Ingenieuren, die nicht EDV-Experten sein müssen, fehlt oft der Einblick in die mathematischen Grundlagen des FE-Verfahrens.

Stellvertretend für derartige Programme sollen hier kurz einige Fähigkeiten von COSMOS/M, einem FE-Programm für Workstations und für Personal Computer, beschrieben werden (siehe Abb. 1.8).

COSMOS/M ist ein FEM-System zur Berechnung beliebiger Bauteile unter statischer, dynamischer oder thermodynamischer Belastung und unter Berücksichtigung von Nicht-linearitäten (Geometrie, Material, Temperatur). Es besteht aus verschiedenen Modulen mit einer gemeinsamen Datenbasis. Diese werden über eine Benutzeroberfläche gesteuert. Mit einem CAD-ähnlichen Präprozessor wird die Geometrie der zu berechnenden Objekte zwei- oder dreidimensional modelliert. Das FE-Netz kann mit einem Netzgenerator grafisch-interaktiv erzeugt werden. Automatisch generierte Gitter in Teilbereichen müssen an Übergängen z.Z. noch von Hand verknüpft werden, bei anderen Programmen geht sogar das selbsttätig. Man kann z.B. auch ein Punktraster über eine Oberfläche legen und automatisch - unter Berücksichtigung des Randes - die Elemente erzeugen lassen. Alle Befehle können interaktiv in einer Befehlszeile oder mit einer Maus über Pulldown-Menüs gegeben werden. Belastungen und Randbedingungen können ebenfalls grafisch aufgebracht werden.

Abb. 1.8 zeigt eine Auswahl aus der Elementbibliothek von COSMOS/M.

Das COSMOS-Hauptprogramm umfaßt Module zur Berechnung von linearer und nicht-linearer Statik und Dynamik einschließlich z.B. Kriechen, Knicken, Plastizität, Reibung, Eigenschwingungen usw., stationärem und instationärem Wärmefluß, stationärer, instationärer und turbulenter Strömung, elektromagnetischen Feldern einschl. Stromquellen und Magneten, außerdem Modalanalyse und Antwortspektrum z.B. für Erdbebenbelastung und Vibrationen, und Optimierung von Parametern. Einige Module können kombiniert werden, z.B. können Kräfte aus Temperatur und aus Elektromagnetismus berechnet werden. Die Berechnung von Strömungskräften und ihre Verknüpfung mit dem statischen Modul (wie für Staumauern wünschenswert) fehlt bislang noch. Adaptive Netzverfeinerung nach der h- und p-Methode (s.Kap.4.3) ist seit kurzem ebenfalls vorgesehen. Ein Postprozessor stellt alle Resultate grafisch auf Drucker, Plotter oder Bildschirm dar. Wie im Präprozessor ist eine große Zahl von Grafik-Funktionen verfügbar (Zoomen, Fenster-technik, Schnittführung, Animation).

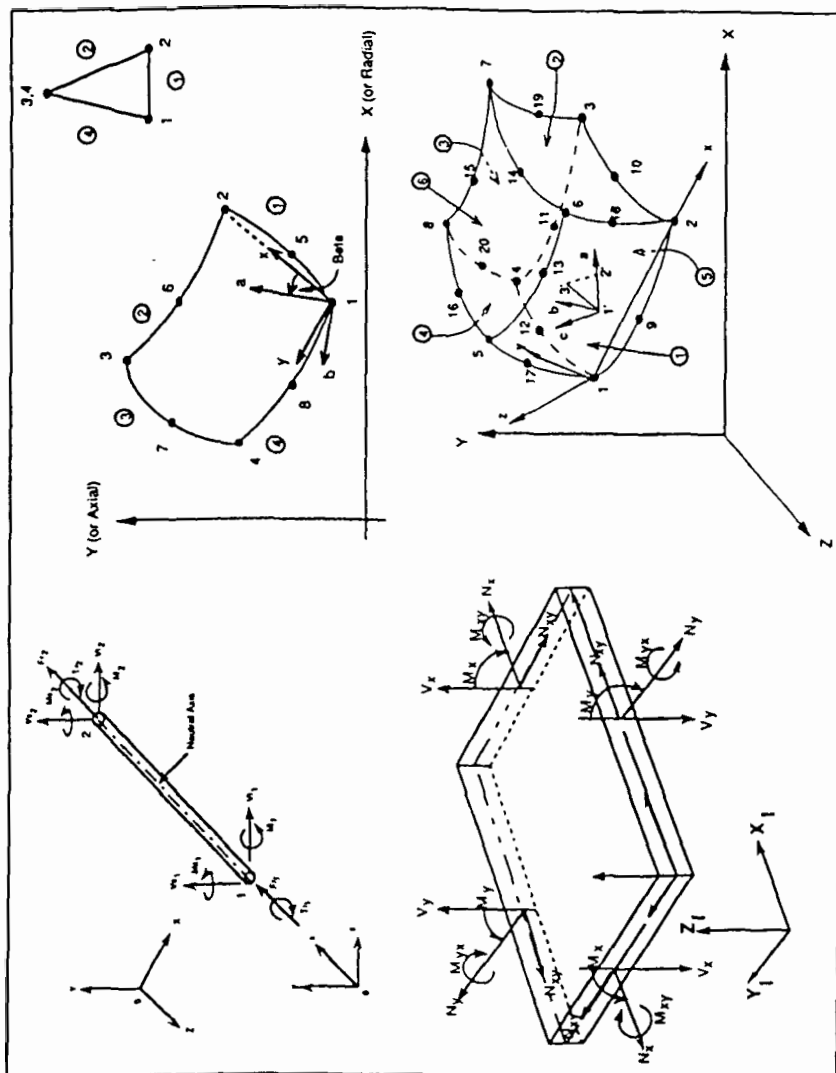


Abb.1.8: Auswahl aus der Elementbibliothek von COSMOS/M (aus dem Handbuch)

Trotz der vielfältigen Möglichkeiten, die solche kommerzielle Programme bieten, darf eine wesentliche Einschränkung nicht übersehen werden: Der Benutzer ist auf das festgelegt,

was im Programm vorgesehen ist. Eine Eingriffsmöglichkeit in die Algorithmen hat er nicht. Die wissenschaftliche Untersuchung einer Problemstellung, die über die Möglichkeiten des Programms hinausgeht, ist ihm nicht möglich. Nicht zuletzt enthält jedes, auch noch so ausgereiftes Programm immer wieder Fehler. Der Benutzer entdeckt diese zwar u.U., kann sie aber nicht korrigieren, sondern er muß mindestens bis zur Freigabe der nächsten Programmversion warten. (Einige Softwarehäuser ersetzen fehlerhafte Programme allerdings auch umgehend).

1.2.3.2 Normen und Vorschriften für FE-Berechnungen

In dem Regelwerk der DIN-Normen ist die FE-Methode bisher noch nicht verankert. In den Normen, die für die Standsicherheitsberechnung von Staumauern maßgebend sind, wird die "Finite-Elemente-Methode" nicht berücksichtigt. Selbst in der DIN 19702 (Standsicherheit von Massivbauwerken im Wasserbau) vom Oktober 1992 wird der Begriff "Finite Elemente" nicht einmal erwähnt. Berechnungsergebnisse nach der FE-Methode müssen anders bewertet werden und unterscheiden sich grundsätzlich von Ergebnissen nach klassischen Berechnungsverfahren. Beispielsweise können die Ergebnisse einer detaillierten FE-Berechnung mit örtlichen Spannungsspitzen als Grundlage der Bemessung nicht einfach übernommen werden, sondern müssen den Gegebenheiten des FE-Verfahrens angepaßt werden.

Einige Hinweise allgemeiner Art für die Prüfung von FE-Berechnungen gibt es in folgenden Regelwerken:

- Betonkalender (1969): Vorläufige Richtlinien für das Aufstellen und Prüfen elektronischer Standsicherheitsberechnungen
- DIN 66230: Programmdokumentation (1981)
- Richtlinie für das Aufstellen und Prüfen EDV-unterstützter Standsicherheitsnachweise (Entwurf 1987)
- Empfehlungen des Arbeitsausschusses "Ufereinfassungen" (1990)

Die DIN 66230 (1981) beschäftigt sich mit Programmdokumentationen. Sie stellt ein Formblatt für Programmkenndaten und alle erforderlichen Angaben zur Verfügung. Diese DIN erwähnt FE-Programme aber nicht und ist überdies veraltet, weil sie nur auf Großrechner eingeht, nicht aber auf den inzwischen viel bedeutenderen Anwendungsbereich für PC-Programme.

Die Bemessung eines Bauwerks oder Bauteils nach Ergebnissen der FE-Methode ist in den entsprechenden Normen nicht erwähnt und wird auch dadurch erschwert, daß eine FE-Berechnung mit einem allgemeinen FE-Programm zwar Spannungen liefert, nicht aber die in der konventionellen Statik üblichen Biegemomente, Quer- und Normalkräfte. Dies können nur einige wenige speziell für den Bauingenieurbereich angepaßte FE-Programme wie z.B. InfoStatik, das auf diesem Gebiet wahrscheinlich führend ist.

In der Praxis bleibt es schwierig, eine vorliegende FE-Berechnung als Ganzes oder Teilergebnisse daraus zu bewerten. Z.Z. kann man den Stellenwert einer FE-Berechnung im Verhältnis zu der gesamten Statik kaum einordnen. Man geht jetzt - auf dem Gebiet der Staumauersanierungen - immerhin dazu über, für die Bemessung einer Staumauer bzw. der Verstärkung die Ergebnisse der FE-Berechnung heranzuziehen. Vor kurzer Zeit noch hat man die Staumauer nach der Balkentheorie-Berechnung allein bemessen und danach einzelne Punkte nach der FE-Methode nachgewiesen, die naturgemäß mit der Balkentheorie nicht nachweisbar sind, wie z.B. die Verbundspannungen in der Fuge zwischen altem Mauerwerk und Beton oder den Einfluß der unterschiedlichen Durchlässigkeiten der Bauteile mit Hilfe der Sickerströmungsberechnung. Im übrigen wurde die FE-Berechnung oft nur zur Bestätigung der Balkentheorie verwendet.

Demnach kann die FE-Methode für die Berechnung von Staumauern derzeit wohl noch nicht als "allgemein anerkannte Regel der Technik (a.a.R.d.T.)" angesehen werden, wohl aber als "Stand der Technik" und erst recht als "Stand der Wissenschaft" (zu diesen Begriffsbestimmungen siehe z.B. ROUVÉ, HOFFMANN, 1987). Eine allmähliche Verschiebung der Grenzen zwischen diesen Niveaus ist zu erwarten. Es ist hier aber noch einige Überzeugungsarbeit zu leisten. Aus diesen Gründen hat die Anwendung der FE-Methode in den DIN-Normen auch noch nicht geregelt werden können.

1.3 Lösungsweg, Vorgehensweise

Gesucht ist eine Antwort auf die Frage, wie das FE-Netz und die Ergebnisse einer FE-Berechnung beurteilt und die Aussagefähigkeit verbessert werden können.

Um die Lösung eines allgemeinen Problems optimieren zu können, braucht man einen Indikator für die Qualität der Lösung (Optimalitätskriterium). Bei einer FE-Berechnung könnten das folgende Kriterien sein:

- Vergleich mit der genauen, auf anderen Rechenmethoden basierenden analytischen Lösung
- Konvergenz markanter Ergebnisgrößen bei Verfeinerung der Diskretisierung
- Fehlerverteilung und Gesamtfehler der Lösung

Die genaue Lösung ist nur dann bekannt, wenn es sich um ein einfaches Problem handelt, das analytisch lösbar ist. Beispiele: Kragarm, Platte, dreieckige Scheibe. Anhand solcher Standardaufgaben kann (und muß) man ein FE-Programm während der Erstellungsphase testen und die Ergebnisse mit der Lösung einer Methode nach den a.a.R.d.T. vergleichen. Für eine komplexe Aufgabe ist die genaue analytische Lösung nicht bekannt. Dies ist z.B. bei einer Stauwand mit einer elastischen Gründung der Fall.

Die Konvergenz markanter Ergebnisgrößen bei einer Verfeinerung des FE-Netzes ist eine notwendige Bedingung für die Gültigkeit der Lösung. Die Konvergenz ist allein nicht hinreichend. Das Ergebnis könnte gegen einen falschen Wert konvergieren. Außerdem könnten andere Ergebnisgrößen ungenau sein.

Hinreichend und drittes Kriterium ist der verbleibende Fehler in einer FE-Berechnung. Man bezeichnet die Verteilung des Fehlers über der FE-Diskretisierung als **Fehlerindikator**, lokalen (örtlichen) Fehler oder Approximationsfehler (Näherungsfehler), und den Gesamtfehler als **Fehlerestimator**. Das Ergebnis ist dann genau, wenn die Fehlerverteilung gleichmäßig und der Gesamtfehler möglichst klein ist. "Globaler Fehler", "Restfehler", "Diskretisierungsfehler" und "innerer Fehler" sind andere Bezeichnungen für den Gesamtfehler, die, aus verschiedenen Blickwinkeln betrachtet, gleiches bedeuten.

Während das Verfahren der Finiten Elemente selbst schon seit Jahrzehnten bekannt ist, werden Fehlerkontrollen, Genauigkeitsangaben und eine vom Fehlermaß gesteuerte Netzverfeinerung in der Praxis noch kaum verwendet und sind in Deutschland im Wasserbau bei der Spannungsberechnung von Stauwänden noch gar nicht bekannt.

Ein geeigneter Fehlerindikator und -estimator als Optimalitätskriterium soll in dieser Arbeit gefunden werden. Mit diesem Fehlerindikator und -estimator wird die FE-Diskretisierung von Scheibenkonstruktionen wie z.B. Stauwänden optimiert. Gleichzeitig wird mit dem Fehlerestimator eine bedingte Kontrolle (Prüfung) der Berechnungen möglich gemacht.

2 Berechnungsverfahren

Die FEM ist eines von mehreren numerischen Berechnungsverfahren im Bauingenieurwesen, hier insbesondere im Talsperrenbau.

2.1 Numerische Berechnungsverfahren

Numerische Berechnungsverfahren basieren normalerweise auf einem der folgenden mathematischen Ansätze:

- Finite-Differenzen-Methode (**FDM**)
- Finite-Elemente-Methode (**FEM**)
- Boundary Element-Methode (**BEM**) (auch Randelementemethode (**REM**); Randintegralverfahren)
- Distinct Element-Methode (**DEM**)
- Stufenkörpermethode (**SKM**)

Die Vor- und Nachteile dieser Verfahren sollen hier kurz erläutert werden.

2.1.1 Finite-Differenzen-Methode (FDM)

Die **FDM** ist in vielerlei Hinsicht die einfachste. Sie war früher an ein regelmäßiges Rechteck- oder Quadratraster gebunden, heute sind auch schiefwinklige Raster erlaubt (vgl. Abb.2.3). Es ist nicht möglich, irreguläre Gebiete mit Netzverdichtungen an bestimmten Stellen zu behandeln. Aufgrund seiner Einfachheit wurde die FDM z.B. für die ersten mathematisch-numerischen Grundwassermodelle verwendet. Inzwischen ist sie dort von der FE-Methode abgelöst worden. Sie hat nur noch wenig praktische Bedeutung für das Bauingenieurwesen.

2.1.2 Finite-Elemente-Methode (FEM)

Die **FEM** wurde in den 50er Jahren ursprünglich für die Festkörpermechanik entwickelt. Der Ausdruck "Finite Elemente" wurde allerdings erst später geprägt. Die FEM ist deswegen für die Probleme der Festkörpermechanik prädestiniert, weil hier ein natürliches Extremalprinzip existiert (das Prinzip des Minimums der potentiellen Energie bzw. der

virtuellen Arbeit). Dieses läßt sich mit einem Finite-Elemente-Ansatz sehr gut formulieren. Im Gegensatz zur FDM läßt sich ein FE-Netz sehr gut an geometrische Gegebenheiten sowie komplexe Gebiete mit Inhomogenitäten anpassen. Die FEM ist daher auch für die Berechnung von Staumauern gut geeignet.

Abb.2.1 zeigt schematisch den Unterschied zwischen einer FD- und einer FE-Diskretisierung.

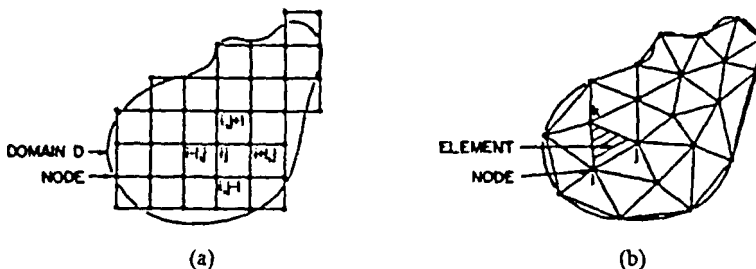


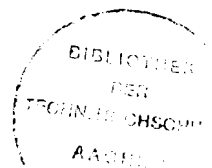
Abb.2.1: Finite Differenzen- (a) und Finite Elemente-Diskretisierung (b) (aus PINDER, GRAY, 1977)

2.1.3 RandIntegralverfahren (BEM)

Die BEM läßt sich vorteilhaft bei linearen Problemen mit homogenem Gebiet und komplexen Rändern anwenden. Typisch für diese Methode ist, daß nicht wie bei FDM und FEM das Gebiet, sondern der Rand diskretisiert wird. Die Lösung wird aus Randintegralen gewonnen. Die analytische Lösung der maßgebenden Differentialgleichung muß bekannt sein.

Bei Tunnel, Staumauern usw. ist der unendlich weit ausgedehnte Halbraum zu berücksichtigen. In diesen Fällen bietet sich die Kopplung der Randelement- und der Finite-Elemente-Methode an. Der Halbraum kann dabei als eine Art finites Element mit Sondereigenschaften behandelt werden. Abb.2.2 zeigt eine solche Kopplung für eine Staumauer.

Die Charakteristiken dieser drei wichtigsten Verfahren zeigt Abb.2.3.



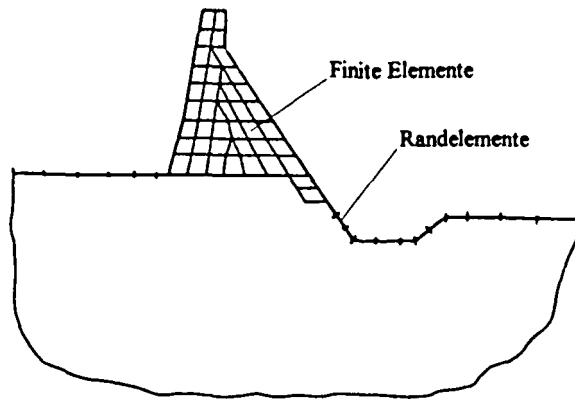


Abb.2.2: Kopplung finite Elemente - Randelemente (aus WUNDERLICH, 1987)

Zusätzlich zu diesen drei Hauptverfahren gibt es noch zwei weitere, die hier nur kurz erwähnt werden sollen. Beide sind noch wenig bekannt, zumindest ist die Zahl der Veröffentlichungen darüber sehr gering.

2.1.4 Distinct Element-Methode (DEM)

Die Distinct Element-Methode (DEM) wird in der Felsmechanik benutzt, um mechanische und kinematische Charakteristiken des geklüfteten Gebirges zu simulieren. Sie ist geeignet, die Wechselwirkungen zwischen Körpern zu berechnen, wobei jedes Objekt als eine diskrete Einheit behandelt wird. Die Interaktion zwischen den einzelnen Körpern geschieht über Kontakte. Klüfte werden explizit als verformbare Kontakte modelliert (CARTER et al, 1991). Die Einheiten (z.B. intakte Felsblöcke) werden ihrerseits als finite Elemente bzw. finite Differenzen-Bereiche diskretisiert.

Die DEM wird möglicherweise in der Zukunft größere Bedeutung erlangen.

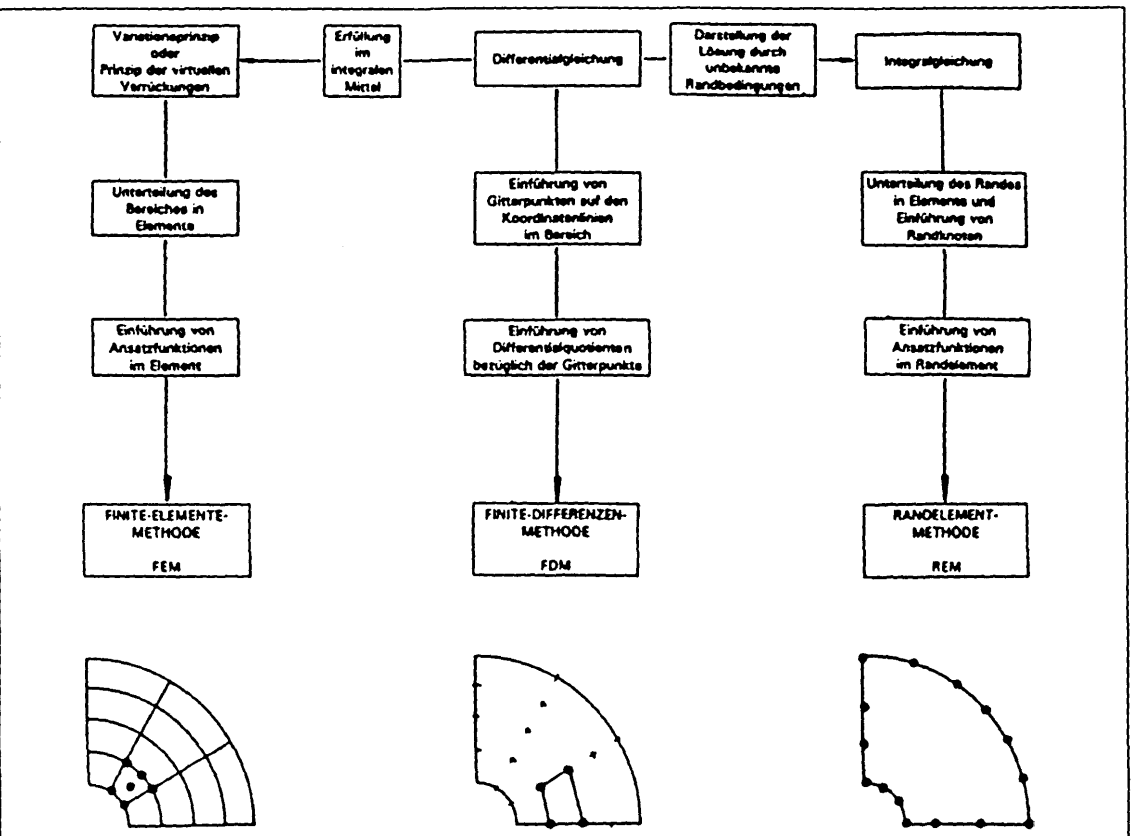


Abb. 2.3: Zusammenhang zwischen den drei wichtigsten Diskretisierungsverfahren (aus BODARWÉ, 1991, nach KNOTHE, WESSELS, 1991)

2.1.5 Stufenkörpermethode (SKM)

Die Stufenkörpermethode (SKM) ist prädestiniert für rotationssymmetrische Strukturen und wurde in der Kerntechnik angewandt. Ähnlich wie bei den anderen Verfahren wird die Gesamtstruktur in Elemente, "Stufenkörper" genannt, eingeteilt, zwischen denen ein Zusammenhang zwischen ihren Verformungen, Belastungen und Schnittgrößen formuliert wird (siehe Kerntechnische Anlagen, KTA). Diese Methode ist wenig leistungsfähig und heute veraltet.

2.1.6 FEM In verschiedenen Fachgebieten

Von den genannten Verfahren hat die FEM bei statischen Berechnungen eindeutig das Übergewicht gewonnen, auch in Kombination mit der BEM. Sie wird darüberhinaus in sehr vielen Bereichen aus der Physik und der Technik angewandt. Das sind neben der Festkörpermechanik und der Grundwasserströmung auch die Temperaturverteilung bei Wärmeleitungsproblemen, Magnetfelder und andere Felder in der Elektrotechnik, wirbelfreie und turbulente Strömungen in der Hydraulik (z.B. SCHULTE, 1989), Schwingungen in der Physik u.a. Die sich entsprechenden Größen aus einigen Wissensbereichen sind in Tab.2.4 einander gegenübergestellt.

Bei allen diesen Aufgaben läßt sich die Lösung durch eine Differentialgleichung mit bestimmten Randbedingungen beschreiben. Für viele dieser Aufgaben läßt sich ein Extremalprinzip formulieren, d.h. die gesuchte Lösung (z.B. Verschiebungen) macht ein bestimmtes Funktional (z.B. die potentielle Energie) extremal.

Dann kann man das Problem mit dem RITZ'schen **Variationsverfahren** lösen (RITZ, 1908/9, RAYLEIGH). Hierzu zählen z.B. alle Aufgaben der Elastostatik (Festkörpermechanik), für die das Prinzip des Minimums der potentiellen Energie gilt, und die Strömungsmechanik, in der das Prinzip der geringsten Energiedissipation herrscht (ZIENKIEWICZ, 1984). Ein wesentliches Kennzeichen ist, daß die auftretenden Matrizen immer symmetrisch sind, was einen enormen Rechenvorteil bedeutet.

	Festigkeit	Grundwasserströmungen	Wärmeleitung	Elektrizität	Magnetostatik /Elektrostatik
Dirichlet'sche Randbedingung	Verschiebung	Standrohrspiegelhöhe (Potential)	Temperatur	Spannung	Vektorfeld /Potential
Neumann'sche Randbedingung	Kräfte	Zu-/Abfluß	Wärmequelle, -senke	Stromstärke	Erregerstrom /Ladung
Materialparameter	Steifigkeit (E, ν)	Durchlässigkeit (k_f)	Wärmeleitfähigkeit (λ_T)	elektr. Widerstand (Ω)	Permeabilität /Dielektrizität
Resultat	Verschiebungen	Potentiallinien	Isothermen		Magnetfeld/ elektrisches Feld

Tab.2.4: Sich entsprechende Größen der FEM in einigen Fachgebieten

Bei manchen dieser Aufgaben existiert ein natürliches Extremalprinzip nicht (z.B. Grundwassermodelle). In diesen Fällen kann man ein künstliches Extremalprinzip konstruieren, indem man den Fehler minimiert, der beim Einsetzen der Näherungslösung in die Differentialgleichung entsteht (**Verfahren der Gewichteten Residuen**). Je nachdem, in welcher Weise der Fehler gewichtet wird, unterscheidet man verschiedene Verfahren. Die bedeutendsten sind:

- das Verfahren nach **GALERKIN** (1915)
- das **Kollokationsverfahren** (collocation point method, punktweise oder im Teilbereich)

Von diesen wird fast ausschließlich das **Galerkin-Verfahren** angewandt. Es ist dadurch gekennzeichnet, daß für die Wichtungsfunktionen der Fehler (Residuen) die gleichen Funktionen benutzt werden wie für den Ansatz der Näherungslösungen. Die auftretenden Matrizen können symmetrisch, aber auch unsymmetrisch sein.

Beim **Kollokationsverfahren** wird der Fehler innerhalb des Elements an bestimmten Punkten minimiert. Zweckmäßigerweise wählt man die Gaußpunkte. Abb.2.5 zeigt die Kollokationspunkte eines FE-Gebietes.

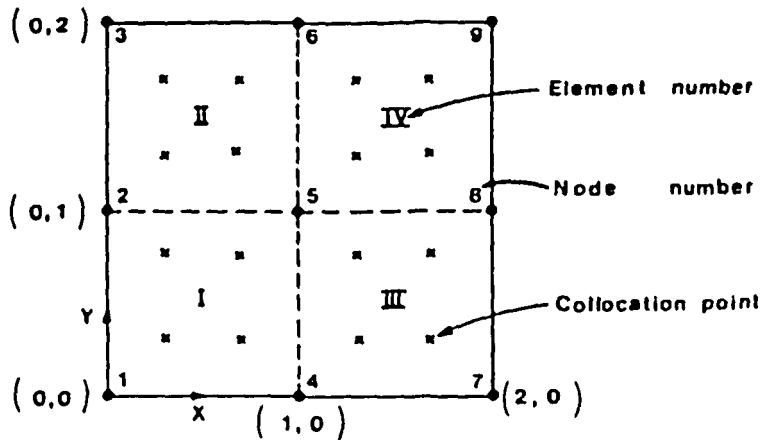


Abb.2.5: Kollokationspunkte (aus HUYAKORN, PINDER 1983)

Das Variationsprinzip und das Verfahren der Gewichteten Residuen sind miteinander verwandt. Für ein natürliches Variationsprinzip ist die Lösung sogar identisch mit der Galerkin-Lösung. Der Beweis hierzu findet sich bei ZIENKIEWICZ (1984). Dem Charakter nach ist die aus dem Verschiebungsansatz gewonnene FE-Approximation für das elastische Kontinuum ein auf die Gleichgewichtsbeziehungen angewandtes Galerkinschen Verfahren.

Das bedeutet, daß man mit derselben Differentialgleichung arbeiten kann, wenn man eine Sickerströmungsberechnung bzw. eine elastostatische Berechnung durchführen will. Der Unterschied besteht nur in der Anzahl der Unbekannten an jedem Knoten. Bei der Sickerströmungsberechnung hat man eine Unbekannte, das Potential bzw. die Standrohrspiegelhöhe. Bei der elastostatischen Berechnung zweidimensionaler Scheiben sind es zwei Unbekannte, nämlich die Verschiebungen in x-Richtung und in y-Richtung. Bei Platten- und Schalenelementen kommen die Verdrehungen um die drei Raumachsen und die Verschiebung in z-Richtung dazu.

Aus diesem Grund sind die aufzustellenden Matrizen bei der elastostatischen Berechnung größer als bei der Sickerströmungsberechnung. Bis auf diese Fallunterscheidung kann man für beide Aufgaben die gleichen Unterprogramme verwenden. Dies geschieht z.B. auch in dem Finite-Elemente-Programm des Autors, mit dem sowohl Sickerströmungsberechnungen wie elastostatische Berechnungen und Temperaturberechnungen durchgeführt werden können.

In Abb.2.6 sind die Verwandtschaftsbeziehungen zwischen den vorgenannten Berechnungsverfahren thematisch dargestellt.

2.2 Fehlerindikator für Elastizitätsprobleme

Wie unter 1.3 angekündigt, ist ein Fehlerindikator gesucht. Er läßt sich für Probleme der Elastizitätstheorie aus der Energienorm der Grundgleichungen der FEM herleiten.

2.2.1 Lösungsweg

Mathematisch genau sind die Spannungen bei einer FE-Berechnung nur in den Gaußpunkten der Elemente. Im konstruktiven Wasserbau erforderlich und ingenieurmäßig vertretbar ist es aber, die Spannungen auch an den Eckknoten zu berechnen. An den Rändern und insbesondere an den Knotenpunkten erhält man unterschiedliche Spannungen, je nachdem, von welchem der benachbarten Elemente man sie berechnet. (Ein einem Knoten benachbartes Element ist jedes Element, das den Knoten enthält). Diese Spannungssprünge sind charakteristisch für die Verschiebungsmethode der FEM. Der überwiegende Teil aller FE-Programme für die Elastostatik arbeitet nach dieser Methode, bei der die Verschiebungen die unabhängigen Variablen sind.

Die Spannungssprünge sind umso größer, je gröber und unangepaßter die Diskretisierung ist. Aus ihrer Größe läßt sich der Fehler einer FE-Berechnung abschätzen.

Die Spannungssprünge (Differenzspannungen) $\Delta\sigma_{k,j}$ kann man definieren als:

$$\{\Delta\sigma_{k,j}\} = \{\sigma_{k,j}\} - \{\sigma_{k,m}\} \quad (2.1)$$

d.h. an jedem Knoten existieren so viele verschiedene $\Delta\sigma_{k,j}$, wie Elemente beteiligt sind.

$\{\sigma\}$ besteht aus σ_x , σ_y und τ_{xy} als unabhängigen Variablen.

$\sigma_{k,j}$ = Knotenspannung an einer beteiligten Elementecke j

$\sigma_{k,m}$ = gemittelte Knotenspannung aus allen am Knoten k beteiligten Elementen

j = Laufindex für beteiligte Elementecken

k = Laufindex für Knoten

Von der Differenzspannung $\Delta\sigma_{k,j}$ an den FE-Knoten geht man zur Differenzenergie $\Delta\Pi_{k,j}$ über:

$$\begin{aligned}\Delta\Pi_{kj} &= \frac{1}{2} * \{\varepsilon_{kj}^T\} * \{\Delta\sigma_{kj}\} * V \\ &= \frac{1}{2} * ([B_{kj}] * \{d_{kj}\})^T * \{\Delta\sigma_{kj}\} * V\end{aligned}\quad (2.2)$$

$\{\varepsilon\}$ = Vektor der Verzerrungen

$[B]$ = Matrix aus Koordinatendifferenzen und Ableitungen der Formfunktionen, s.u.

$\{d_{kj}\}$ = Vektor der Knotenverschiebungen im Element

V = Volumen bzw. Fläche

Man erhält also für jeden Knoten (Index k) genau so viele Differenzenergien (Unterschiede in den Energien), wie Elemente diesen Knoten enthalten (Index j). Benötigt wird der Indikator an den Knoten. Daher müssen die Differenzenergien (Index k,j) an jedem Knoten gemittelt werden. Als Wichtungsfaktor eignen sich

- die Elementfläche A_e

- der Betrag der Elementenergie $\Pi_{e,j}$.

Wie später für die Wichtung von Spannungen gezeigt wird (Kap.4.4), ist die Elementenergie für Knotenwichtungen besser geeignet als die Elementfläche. Hierdurch erhalten diejenigen Elemente mehr Gewicht, die durch ihre Größe (Fläche), ihren E-Modul oder ihre Verformung eine größere Energie beinhalten.

$$\Delta\Pi_{k,m} = \sum_{j=1}^I |\Delta\Pi_{k,j}| * \frac{\Pi_{e,j}}{\Pi_k}\quad (2.3)$$

$\Delta\Pi_{k,m}$ = mittlere Differenzenergie am Knoten k

$\Pi_{e,j}$ = Teilenergie eines Elements in der Ecke j am Knoten k

Π_k = Summe der Teilenergien aller Elemente, die den Knoten k enthalten.

n_V = Anzahl Vierecke

n_D = Anzahl Dreiecke

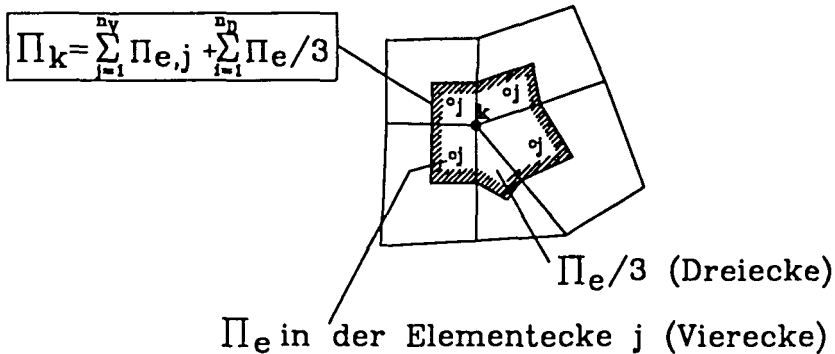
k = "Knoten"

e = "Element"

m = Mittel

j = Laufindex für am Knoten k beteiligte Elementecken

I = Anzahl Elemente am Knoten k

Abb. 2.7: Teilenergien am Knoten k

Einen Beitrag der Stabelemente gibt es bei der Summation der Teilenergien am Knoten nicht.

Die Differenzenergien an den Knoten müssen nun noch zu einer geeigneten Größe ins Verhältnis gesetzt werden, damit man einen aussagekräftigen Fehlerindikator erhält. Dies könnten sein:

1. Knotenenergie:

Dies ist die von Nachbarelementen am Knoten aufsummierte Energie. Vorteilhaft wäre, daß man einen echten prozentualen Fehler erhält. Dieser könnte jedoch auch in objektiv unwichtigen Bereichen (z.B. unbelastete Bereiche, Staumauerkrone, Bereich des Intze-Keils) einen großen Wert annehmen, nämlich dann, wenn die Energie in diesem Bereich sehr klein ist. In diesem Fall würde die Differenzenergie durch eine Zahl nahe Null geteilt. Deswegen ist diese Größe nicht geeignet.

2. Gesamtenergie aller Elemente

Dies hat den Vorteil, daß nur Bereiche mit großen Differenzenergien tatsächlich einen großen Fehler aufweisen. Nachteilig ist jedoch, daß nicht für jeden Knoten der prozentuale Fehler angegeben wird. Der Gesamtfehler in Prozent ließe sich angeben. Deshalb wäre die Gesamtenergie als Bezugsgröße besser geeignet als die Knotenenergie.

3. Auf den Knoten bezogener Anteil der Energie

Noch vorteilhafter als 1. und 2. ist allerdings der auf die Elementgröße bezogene Anteil der Gesamtenergie, genauer: der Anteil, der auf die dem Knoten benachbarte Fläche bezogen ist. Dies verbindet die Vorteile der vorgenannten Bezugsgrößen. Es wird ein prozentualer Fehler berechnet, der nur dort groß ist, wo tatsächlich große Differenzenergien auftreten.

Der Fehlerindikator e_k berechnet sich damit für den 3. Fall zu:

$$e_k = \frac{\Delta\Pi_{k,m}}{\Pi_{\text{ges}} + \frac{A_k}{A_{\text{ges}}}} \quad (2.4)$$

$\Delta\Pi_{k,m}$ = mittlere Differenzenergie am Knoten k

Π_{ges} = Gesamtenergie im System

A_k = Knotenfläche (die einem Knoten zugehörige Fläche)

A_{ges} = Gesamtfläche der Diskretisierung

Der Gesamtfehler (Fehlerestimator) ist die Summe der Beträge der Differenzenergien an den Knoten, bezogen auf die Gesamtenergie:

$$e_{\text{gcs}} = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta\Pi_{k,m}}{\Pi_{\text{ges}}} \quad (2.5)$$

n = Gesamt-Knotenanzahl

Dieser Gesamtfehler ist ein prozentualer Fehler. Er konvergiert gegen Null, wenn das Netz immer weiter verfeinert wird. Er ist damit zur Beurteilung der Genauigkeit geeignet.

2.2.2 Erläuterungen

Bei der Herleitung des Fehlerindikators wurden einige Größen verwendet, für die hier eine Erläuterung notwendig wird.

Die innere (potentielle) Energie eines Elements ist gegeben durch die Beziehung:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} * \int_V \{\epsilon\}^T * \{\sigma\} * dV \quad (2.6)$$

e = Index für Element

$\{\epsilon\}$ = Vektor der Verformungen

$\{\sigma\}$ = Vektor der Spannungen

V = Volumen bzw. Fläche

$\{d_e\}$ = Vektor der Knotenverschiebungen im Element

Mit $\{\epsilon\} = [B] * \{d_e\}$ und

$\{\sigma\} = [D] * [B] * \{d_e\}$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Pi_e &= \frac{1}{2} * \int_V ([B] * \{d_e\})^T * [D] * [B] * \{d_e\} dV \\ &= \frac{1}{2} * [K_e] * \{d_e\}^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$[K_e]$ ist die Elementsteifigkeitsmatrix.

Die Matrix $[B]$ enthält die Koordinaten der Elementknoten und wird mit Hilfe der Formfunktionen gebildet (siehe Kap.3.1.2). Die Matrix $[D]$ enthält die Materialparameter in Abhängigkeit vom ebenen Verformungszustand bzw. ebenen Spannungszustand.

Die Gesamtenergie setzt sich aus den inneren Energien der Elemente zusammen. In einem isoparametrischen, linearen 4-Knoten-Element (Index "4") berechnet man die innere Energie durch numerische Integration, d.h. Summation der Funktionswerte an den Gaußpunkten:

$$\Pi_{e,4} = \frac{1}{2} * \sum_{n=1}^4 \frac{1}{2} ([B(n)] * \{d_e\})^T * [D] * [B(n)] * \{d_e\} * \det J \quad (2.8)$$

$$= \frac{1}{2} * \sum_{n=1}^4 [K_4(n)] * \{d_e\}^2 \quad (2.9)$$

det J = Determinante der Jacobi-Matrix (siehe Kap. 3.1.2)

Die innere Energie eines linearen Dreieckelements (Index "3") kann man direkt berechnen:

$$\begin{aligned} \Pi_{e,3} &= \frac{1}{2} * ([B] * \{d_e\})^T * [D] * [B] * \{d_e\} * A_3 \\ &= \frac{1}{2} * [K]_3 * \{d_e\}^2 * A_3 \end{aligned} \quad (2.10)$$

A_3 = Dreiecksfläche

Die innere Energie von Stabelementen wird für die Berechnung des Fehlerindikators zwar nicht benötigt. Sie ist jedoch in der Summe der inneren Energie enthalten. Als Kontrolle kann die Übereinstimmung der inneren Energie mit der Arbeit der äußeren Kräfte überprüft werden. Die innere Energie eines Stabelements ist:

$$\begin{aligned} \Pi_{e,St} &= \frac{1}{2} * \{S\} * \{d_e\} \\ &= \frac{1}{2} * \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \end{Bmatrix}^T * \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} * (S_x * dx + S_y * dy) \\ &= \frac{1}{2} * \frac{E * A}{l} * (dx^2 + dy^2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

E = E-Modul

A = Querschnittsfläche des Stabes

l = Länge des Stabes

Dabei ist im allgemeinen Fall des schräg in der Ebene liegenden Stabes die Stabkraft S:

$$S = \frac{E * A}{l} * dl \quad (2.12)$$

Die Komponenten der Stabkraft sind:

$$S_x = S \cdot \cos \alpha, \quad (2.13)$$

$$S_y = S \cdot \sin \alpha$$

α = Neigungswinkel des Stabes in x/y- Koordinatensystem

Die Längenänderungen des Stabes sind:

$$dl = dx \cdot \cos \alpha + dy \cdot \sin \alpha \quad (2.14)$$

$$dx = x_2 + dx_2 - x_1 - dx_1$$

$$dy = y_2 + dy_2 - y_1 - dy_1$$

Wenn der Stab nicht im 1. Quadranten liegt, muß sorgfältig auf die Vorzeichen geachtet werden.

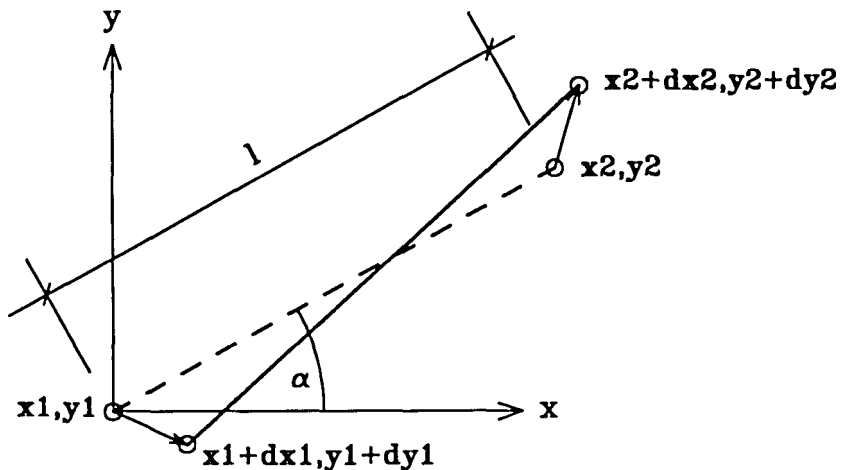


Abb. 2.8: Stab in der x/y-Ebene

Die Elementsteifigkeitsmatrizen K_e aller Vierecke und Dreiecke bilden zusammen mit den Anteilen der Stäbe die Gesamtsteifigkeitsmatrix K . Die Knotenverschiebungen im Element $\{d_e\}$ lassen sich zusammenfassen zum Vektor $\{d\}$ der Gesamtverschiebungen. Damit ist die Verbindung der einzelnen Elemente zum Gesamtsystem hergestellt.

Das Gesamtpotential Π ist die Differenz der inneren Energie Π_e und der äußeren Arbeit W :

$$\Pi = \sum_{\text{Dreiecke}} \frac{1}{2} [K_e] \{d\}^2 + \sum_{\text{Vierecke}} \frac{1}{2} [K_e] \{d\}^2 + \sum_{\text{Stäbe}} \frac{1}{2} \frac{E \cdot A}{l} \{d\}^2 - \{F\} \cdot \{d\} \quad (2.15)$$

$\{F\}$ = Kraftvektor der äußeren Kräfte

$\{d\}$ = Vektor der Gesamtverschiebungen

Das Gesamtpotential muß im Gleichgewichtszustand ein Minimum haben. Deshalb erhält man durch partielle Differentiation des Gesamtpotentials nach den Variablen $\{d\}$ die Grundgleichungen der FEM:

$$\delta \Pi = \delta(\Pi_e - W) \quad (2.16)$$

Die Änderung des Gesamtpotentials ist wegen der Minimalbedingung Null (deshalb sind auch die Änderungen der inneren Energie und der äußeren Arbeit gleich):

$$\delta(\Pi_e - W) = 0 \quad (2.17)$$

Daraus ergibt sich durch Zusammenfassung aller Anteile:

$$[K] \cdot \{d\} - \{F\} = 0 \quad (2.18)$$

$[K]$ = Gesamtsteifigkeitsmatrix

Durch Lösung dieses Gleichungssystems erhält man die unbekannten Verschiebungen $\{d\}$. Damit lassen sich mit:

$$\{\sigma\} = [D] \cdot [B] \cdot \{d\} \quad (2.19)$$

die Spannungen als Derivat (Ableitung) der Verschiebungen gewinnen.

Die Spannungen erhält man elementweise. Man kann sie für jeden Punkt eines Elementes ermitteln, indem man in die B-Matrix (vgl. 3.1.2) jedes beliebige Wertepaar aus dem elementeigenen Koordinatensystem (r,s) (Abb. 2.9) einsetzt.

Aus den so berechneten Spannungen läßt sich der Fehlerindikator ableiten, wie oben beschrieben.

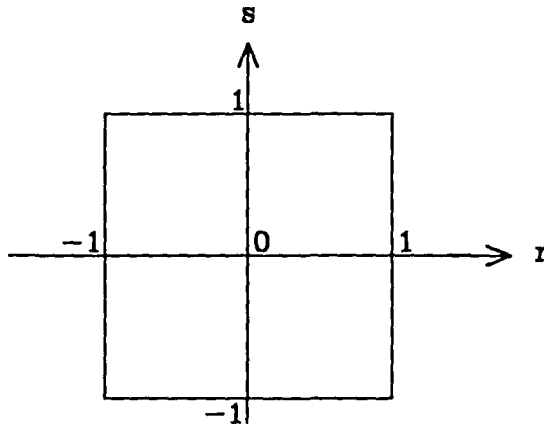


Abb.2.9: Elementeigenes r,s -Koordinatensystem

2.3 Genauigkeit einer FE-Berechnung

Das Ergebnis einer FE-Berechnung ist nicht so eindeutig wie das Ergebnis eines analytischen Rechenverfahrens. Es gibt viele Ausgangsparameter, deren Ansatz und Größe nicht genau faßbar und deswegen diskutierbar sind. Die Ausgangsparameter beeinflussen das Rechenergebnis aber maßgeblich, z.B. die

- Steifigkeitsverhältnisse (E-Moduln)
- Durchlässigkeitsverhältnisse (k_F -Werte)
- Größe, Form, Art und Anzahl der finiten Elemente
- Netzform und Berechnungsausschnitt

Durch ungeschickte oder gar falsche Wahl der Ausgangsparameter können verzerrte oder auch falsche Ergebnisse entstehen. Die Richtigkeit von Materialparametern (E-Modul, k_F -Wert) soll hier nicht beurteilt werden. Sie bleiben einer Kalibrierung in den einzelnen Projekt-Berechnungen vorbehalten. Ihr Einfluß ist allerdings groß. Die Wahl des E-Moduls z.B. kann alle anderen Einflüsse auf die Genauigkeit übersteigen. Daher ist es empfehlenswert, mit einer Bandbreite verschiedener E-Moduln zu arbeiten, alle Ergebnisse in Grenzen zu sehen und auch eine Empfindlichkeitsstudie (Sensitivitätsstudie)

anzuschließen. Diese Studie muß auch Störungen im Untergrund und mögliche Unregelmäßigkeiten im Bauwerk selbst berücksichtigen.

Bei einer FE-Berechnung muß man - wie bei anderen Berechnungen auch - einen Kompromiß finden zwischen der erforderlichen Genauigkeit und dem dafür nötigen und angemessenen Aufwand.

In der Baustatik gibt es Ungenauigkeiten bzw. Fehler durch (siehe Abb.2.10):

- Lastannahmen
- Idealisierung
- Approximation
- Rechenungenauigkeit (Rundungsfehler)

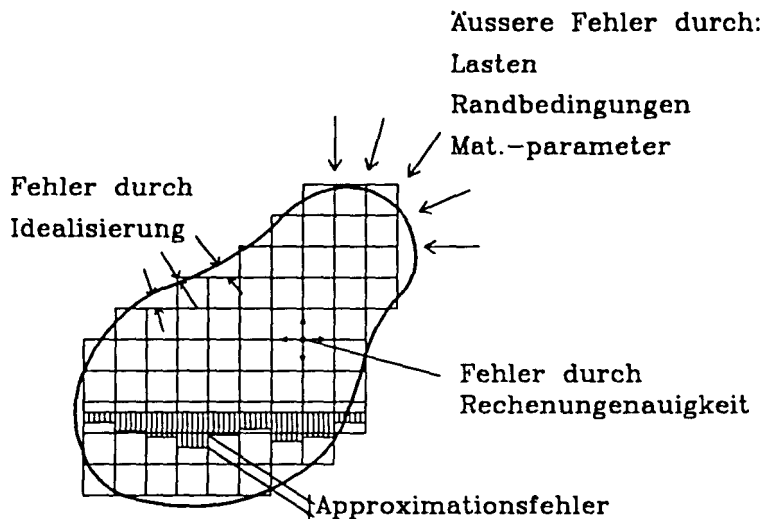


Abb.2.10: Schematische Unterscheidung der Fehlerarten in einer FE-Berechnung

Die Ungenauigkeiten in den Lastannahmen bergen die größten Fehler in sich. Durch die Idealisierung des Tragwerks in ein statisches System entsteht zusätzlich ein Idealisierungsfehler. In der Regel beurteilt man in der Baustatik nur die Genauigkeit der Zahlenrechnung (Rechenungenauigkeit). Im allgemeinen wird dieser Fehler kleiner sein als die vorgenannten Fehler (Lastannahmen, Idealisierung). Alle diese Fehler werden dadurch berücksichtigt, daß man bestimmte, teilweise sehr große, Sicherheitsbeiwerte einführt. In der Zahlenrechnung werden Rechenergebnisse akzeptiert, wenn sie noch Fehler, bezogen auf das rechnerisch genaue Endergebnis, von bis zu 5% - je nach Aufgabenstellung - enthalten. Der Fehler läßt sich feststellen, wenn ein Vergleichsergebnis vorliegt oder man eine Gleichgewichtsprobe machen kann.

Eine FE-Berechnung enthält alle Fehlerarten.

Die Fehler durch die Lastannahmen und durch die Rechenungenauigkeit entsprechen weitgehend denen einer konventionellen Statik. Das Tragwerk wird idealisiert, indem es in finite Elemente eingeteilt wird. Seine Geometrie sollte selbstverständlich so genau wie möglich nachgebildet werden, um den Fehler durch die Idealisierung klein zu halten. Dann ist der Idealisierungsfehler kleiner als in der konventionellen Statik, weil die Struktur wesentlich genauer nachgebildet werden kann. Ein zusätzlicher Fehler entsteht durch die eigentliche Aufteilung in die Elemente. Für diesen Fehler (Approximationsfehler) gibt es eine Entsprechung in der Baustatik nicht. Er wird mit größerer Elementezahl kleiner und sollte bei einer optimalen Diskretisierung einige Prozent nicht übersteigen.

Hier soll die Richtigkeit und Genauigkeit in Abhängigkeit von der Diskretisierung untersucht werden. Hierzu wird der Fehler der FE-Berechnung und dessen Konvergenz bei steigender Elementezahl beurteilt. Der aus der Energienorm nach Kap.2.2 berechnete Restfehler oder Diskretisierungsfehler ist insbesondere auch für die Prüfung einer FE-Berechnung wichtig.

Mit Fehlerindikator und -estimator läßt sich die Genauigkeit einer FE-Diskretisierung abschätzen und die Diskretisierung verfeinern. Mit diesem Kriterium sollen u.a. die folgenden Fragen beantwortet werden:

1. Wie genau ist das Ergebnis ?
2. Wie groß sollte bei vorgegebener Genauigkeit die Element- und Knotenzahl sein, damit das Ergebnis genau genug ist ?
3. Welche Art von finiten Elementen ist besser geeignet: drei- oder viereckige Elemente ?
4. Welche Elementform ist günstig, welche ungünstig ?
5. Muß ein Elementenetz regelmäßig sein oder kann es auch unregelmäßig sein ?
6. Wie läßt sich ein Elementenetz mit Hilfe des Fehlerindikators verfeinern ?

Speziell für die Berechnung von Staumauern schließen sich folgende Fragen an:

7. Welche Art der Spannungsermittlung aus den Verformungen ist problemangepaßter ?
8. Wie groß sollte der Untergrundausschnitt sein, der mit erfaßt wird ?
9. Wie sollten die Übergänge zwischen den Materialbereichen elementiert sein ?
10. Welche Besonderheiten gibt es bei der Berechnung einer Staumauer zu beachten ?

Diese Fragen sollen im dritten und vierten Kapitel beantwortet werden. Dort wird zunächst die Genauigkeit der FE-Berechnung eines Kragarms untersucht, danach die einer Staumauer. In beiden Untersuchungen werden die FE-Netze zur Steigerung der Genauigkeit verfeinert. Im dritten Kapitel wird der Aufbau der Diskretisierung aus den Elementen beschrieben. Die Elementeigenschaften und die Netzform werden optimiert. Die Verfeinerungsstrategie wird im vierten Kapitel erläutert. Die optimale Art der Spannungsberechnung wird ermittelt und die Genauigkeit der Berechnung betrachtet.

Im fünften Kapitel wird die Berechnung einer Staumauer mit Dreieckprofil optimiert und mit anderen Berechnungsverfahren verglichen.

Nach Zusammenfassung und Ausblick im sechsten Kapitel wird im Anhang ein Anwendungsvorschlag für eine Staumauer mit vorgesetzter Dichtwand vorgestellt. Dabei wird aus mehreren Konstruktionsvarianten die statisch günstigste ermittelt. In das Ergebnis gehen eine Reißberechnung nach einem "verschmierten" Reißmodell, eine Sickerströmungsberechnung und eine Temperaturberechnung ein.

Für die Berechnungen wird ein FE-Programm benutzt, in dem die beschriebenen Rechenverfahren realisiert sind.

3 Finite-Elemente-Netze

Der Vorgang einer Diskretisierung (Erzeugung eines FE-Netzes) vollzieht sich auf drei Ebenen: die Wahl der Elemente mit ihren Eigenschaften, die Anordnung der Elemente zu einem Netz mit einer bestimmten Form und die Begrenzung des Berechnungsraums, den das Netz ausfüllt (Berechnungsausschnitt).

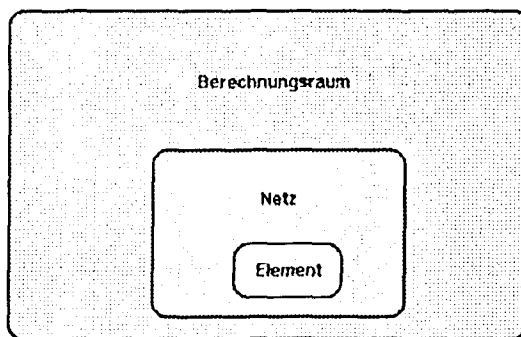


Abb.3.1.1: Schematische Ebenen beim Vorgang einer Diskretisierung

3.1 Elementeigenschaften

Die hier betrachteten Elementeigenschaften sind Art, Seitenverhältnis und Form der Elemente.

3.1.1 Elementarten

Je nach Anwendungszweck unterscheidet man verschiedene Elementarten und -typen:

- isoparametrische/nicht isoparametrische Elemente
- kompatible/nicht kompatible Elemente
- lineare/höhergradige Elemente
- zwei-/dreidimensionale Elemente
- drei-/viereckige Elemente

3.1.1.1 Isoparametrische Elemente

Die Bezeichnung **isoparametrisch** besagt, daß für die Transformation der Elementkoordinaten auf die Globalkoordinaten dieselben Formfunktionen benutzt werden wie für die Interpolation der Verschiebungen innerhalb eines Elementes in Abhängigkeit von den Verschiebungen der Knotenpunkte. Bei **nicht isoparametrischen** Elementen werden hierfür Funktionen mit höherem oder niedrigerem Funktionsansatz gewählt. Die meisten in der Praxis verwendeten Elemente sind isoparametrisch. Sie haben einige rechentechnische Vorteile. Abb.3.1.2 zeigt ein iso-, ein super- und ein subparametrisches Element.

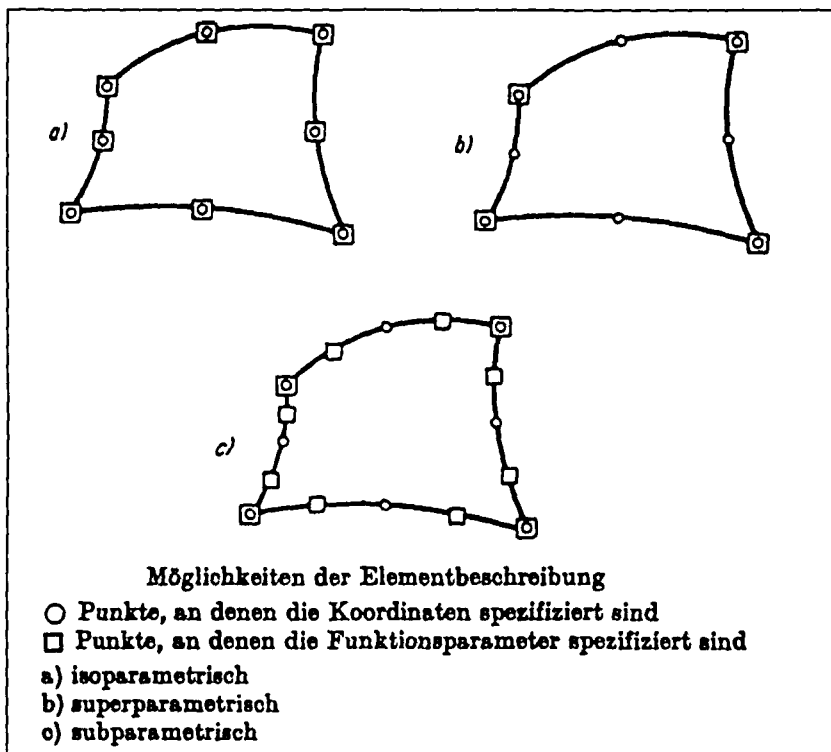


Abb.3.1.2: Charakteristik eines iso-, super- und subparametrischen Elementes (aus ZIENKIEWICZ, 1984)

3.1.1.2 Konforme Elemente

Konforme und nicht konforme Elemente unterscheidet man bei Platten und Scheiben. Die Bezeichnung "kompatibel", die in diesem Zusammenhang auch verwendet wird, ist gleichbedeutend mit "konform".

Bei einer Platte muß die Durchsenkung rechnerisch stetig sein und sollte nicht Knicke haben. Elemente, die diese Bedingungen erfüllen, sind konform. Es gibt auch Elemente mit Ansatzfunktionen, die an den Elementübergängen (nicht an den Knoten) Knicke aufweisen. Diese nicht konformen Elemente können rechentechnisch aber vorteilhafter sein als konforme Elemente. Es ist sehr aufwendig, die Stetigkeitsanforderungen an den Elementübergängen zu erfüllen. Wenn man diese Forderung fallen läßt, wird die Berechnung sehr viel einfacher. Die Ergebnisse rechtfertigen dieses Vorgehen (SCHWARZ, 1984).

Ähnliches gilt für Scheibenelemente, die bei zweidimensionalen Berechnungen von Stau-mauern ausschließlich Verwendung finden. Mit kompatiblen (bi-)linearen Elementen lassen sich gekrümmte Biegeformen nicht darstellen, weil die Elementkanten bei einer Verformung immer gerade bleiben. Durch Einführung weiterer Freiheitsgrade an den Rändern entstehen nicht konforme Elemente, bei denen zwar die Verformungen am Rand nicht mehr mit dem Nachbarelement übereinstimmen, die aber das Biegeproblem besser lösen können. Diese Elemente erfüllen den Patch-Test oft nicht (ZIENKIEWICZ, 1984).

3.1.1.3 Höhergradige Elemente

Die Zahl der Knoten in einem Element, insbesondere an den Elementkanten, gibt den **Grad des Elements** an. Besteht eine Elementkante aus n Punkten, so ist ein Funktionsansatz mit einem Grad von $n-1$ erforderlich, um die Kante abzubilden.

Je höher der Grad des Elements ist, desto höherwertiger und genauer ist es auch. Mit höhergradigen Elementen können auch krummlinige Ränder nachgebildet werden, was mit linearen Elementen nur stückweise (abschnittsweise) möglich ist. Der Rechenaufwand steigt allerdings überproportional. Ein höherer Grad verlängert die Rechenzeit wie eine höhere Knotenzahl der Diskretisierung, wenn auch nicht in gleichem Maße.

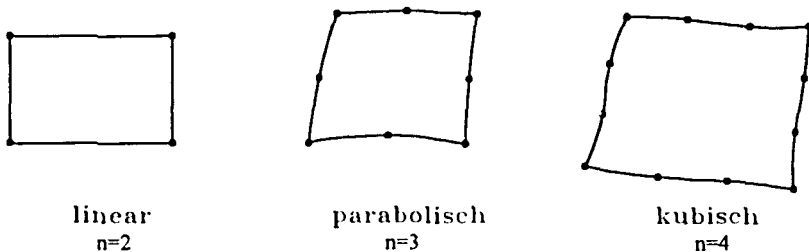


Abb.3.1.3: Verschiedengradige Elemente

Diese Arbeit beschränkt sich auf die Behandlung linearer Elemente, die eine einfachere Programmstruktur erlauben. Die geringere Genauigkeit gegenüber höhergradigen Elementen wird durch eine größere Knotenzahl ausgeglichen. Die Zahl der Knoten kann an den Orten der Diskretisierung erhöht werden, wo es angemessen erscheint.

3.1.1.4 Dreidimensionale Elemente

Dreidimensionale Elemente unterscheiden sich mathematisch durch die Erweiterung der Differentialgleichungen und der Materialgesetze sowie durch den überproportional steigenden Rechenaufwand, der durch die dritte Dimension gegenüber **zweidimensionalen** Elementen hinzukommt. Auf Personal Computern sind dreidimensionale Berechnungen deshalb beim jetzigen Stand der Hardwaretechnik nur eingeschränkt lösbar. Daher wird hier auf die Behandlung dreidimensionaler Elemente verzichtet. Die dargestellten Rechenverfahren ließen sich aber uneingeschränkt auf dreidimensionale Berechnungen übertragen. Auch bezüglich der Genauigkeit der Diskretisierung, der Netzoptimierung usw. können entsprechende Ergebnisse erwartet werden.

3.1.1.5 Genaue und Näherungselemente

Gelegentlich wird zwischen "genauen Elementen" und "Näherungselementen" unterschieden. Die Struktureigenschaften **genauer Elemente** bildet das Modell numerisch genau nach. Das ist der Fall, wenn sich das Problem auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückführen läßt. Die Ansätze von **Näherungselementen** enthalten entsprechende Fehler: im allgemeinen zwei- und dreidimensionalen Fall sind die Elementeigenschaften meist

nur näherungsweise zu bestimmen. Deswegen erhält man im Falle der Konvergenz die genaue Lösung erst bei einer unendlichen Zahl von Elementen.

3.1.1.6 Weitere Elementarten und Sonderelemente

Als weitere Elementarten, die hier aber nicht näher erläutert zu werden brauchen, werden noch unterschieden: Serendipity-Elemente und Lagrange-Elemente, Elemente im ebenen Verzerrungszustand und im ebenen Spannungszustand, Platten- und Scheibenelemente, usw.

Als **Sonderelemente** können darüberhinaus Elemente bezeichnet werden, die aus anderen Elementen hervorgegangen sind, um bestimmte Forderungen zu erfüllen. Z.B. wird ein 5-Knoten-Element mit einer besonderen Randbedingung für den 5. Knoten benötigt, um den Übergang zwischen einem unterteilten Element und einem nicht unterteilten herzustellen. Ein Rißelement ("No Tension" oder "Gap-Element") wäre ein Element, das im Bereich von Singularitäten wie einspringenden Ecken und Kerben eingesetzt werden kann. Es nimmt nur Druckspannungen, aber nicht Zugspannungen auf.

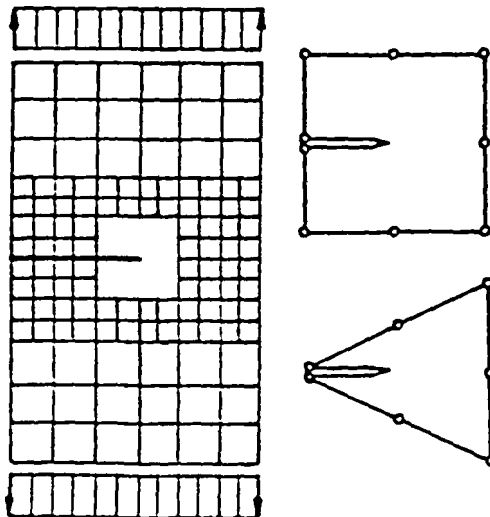


Abb. 3.1.4: Beispiel für Sonderelemente (aus WUNDERLICH, 1987)

Abb.3.1.4 zeigt solche Elemente beispielhaft. Diese Elemente sind mit problemspezifischen analytischen Ansatzfunktionen ausgestattet, die die Differentialgleichungen und die Randbedingungen erfüllen. Ihre Teillösungen werden als Spannungsansätze in das Funktional der hybriden Kraftgrößenmethode oder als Verschiebungsansätze in das Funktional der Weggrößenmethode eingesetzt (WUNDERLICH, 1987).

3.1.2 Spannungsberechnung in Dreieck- und Viereckelementen

Der Unterschied zwischen **dreieckigen** und **viereckigen** Elementen soll im folgenden aufgezeigt werden. Die verschiedene Knotenzahl bewirkt einen einschneidenden Unterschied in der mathematischen Behandlung und in den Ergebnissen der FE-Berechnungen.

Die beiden einfachsten Flächenelemente sind das Dreieck und das Viereck mit 3 bzw. 4 Eckpunkten (Knoten). Zum Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix wird die Elementsteifigkeitsmatrix jedes Elements benötigt. Die folgenden Ausführungen gelten für elastostatische Berechnungen. Bei Sickerströmungsberechnungen sind die Formeln prinzipiell gleich (vgl. Kap.2.1.6), aber die Matrizen sind kleiner. Beim **Dreieck** läßt sich die Elementsteifigkeitsmatrix direkt aus einer Gleichung berechnen:

$$[k]_e = [B]^T * [D] * [B] * A \quad (3.1)$$

$[D]$ ist die Materialmatrix, in der die Materialkennwerte stehen (bei der elastostatischen Berechnung der E-Modul und die Querdehnzahl, bei der Sickerströmungsberechnung die k_f -Werte):

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & 0 \\ D_{2,1} & D_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & D_{3,3} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$[B]$ ist die Matrix aus Koordinatendifferenzen und den Ableitungen der Formfunktionen. In ihr stehen letztlich nur Größen, die von der Geometrie des Elements abhängen:

$$B_3 = \frac{1}{2A_3} * \begin{bmatrix} y_2-y_3 & 0 & y_3-y_1 & 0 & y_1-y_2 & 0 \\ 0 & x_3-x_2 & 0 & x_1-x_3 & 0 & x_2-x_1 \\ x_3-x_2 & y_2-y_3 & x_1-x_3 & y_3-y_1 & x_2-x_1 & y_1-y_2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

A_3 = Fläche des Dreiecks

Beim Viereck wird die Elementsteifigkeitsmatrix durch Integration über die vier Gaußpunkte berechnet:

$$K_e = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [B(r_i, s_j)]^T * [D] * [B(r_i, s_j)] * \det J(r_i, s_j) \quad (3.4)$$

r_i und s_j sind die Koordinaten der Gaußpunkte im Element-Koordinatensystem:

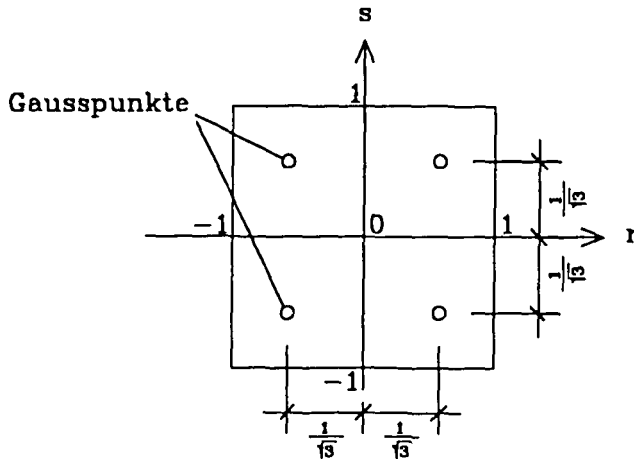


Abb.3.1.5: Koordinaten der Gaußpunkte

$[B]$ setzt sich hier aus den partiellen Ableitungen der Formfunktionen N_i zusammen:

$$[B(r,s)] = \begin{bmatrix} dN_1/dx & 0 & \dots \\ 0 & dN_1/dy & \dots \\ dN_1/dy & dN_1/dx & \dots \text{ usw.} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$N_1 = \frac{1}{4} (1+r) (1+s)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1-r) (1+s)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1-r) (1-s)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1+r) (1-s)$$

(3.6)

Die Formfunktionen sind für die Transformation der elementbezogenen Koordinaten auf die Globalkoordinaten nötig. Bei der Ableitung der Formfunktionen wird zusätzlich noch die Jacobi-Matrix und deren Determinante benötigt:

$$J = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \det J = A_{11} * A_{22} - A_{12} * A_{21} \quad (3.7)$$

Wie man sieht, ist die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix beim Viereck wesentlich aufwendiger als beim Dreieck.

Ein Dreieck kann man auch als degeneriertes Viereck behandeln, bei dem zwei Knoten zusammenfallen. Es läßt sich aber zeigen, daß sich in diesem Fall genau die gleiche Elementsteifigkeitsmatrix ergibt wie bei der direkten Berechnung als Dreieck. Somit gibt es beim Aufbau der Steifigkeitsmatrix einen prinzipiellen Unterschied zwischen Drei- und Vierecken nicht.

Nach dem Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix sind die weiteren Berechnungsschritte bei Dreiecken bzw. Vierecken zunächst gleich. Das Haupt-Gleichungssystem muß gelöst werden:

$$\{K\} * \{d\} = \{F\} \quad (3.8)$$

$\{K\}$ = Gesamtsteifigkeitsmatrix
 $\{d\}$ = Verschiebungsvektor im Gesamtsystem
 $\{F\}$ = Kraftvektor

Als Resultat der Lösung erhält man die Knotenpunktverschiebungen $\{d\}$. Aus diesen werden elementweise die Spannungen berechnet:

$$\{\sigma\} = [D] * [B] * \{d\}_e \quad (3.9)$$

$\{\sigma\}$ = Spannungsvektor
 $[D]$ = Materialmatrix
 $[B]$ = Matrix aus Koordinatendifferenzen und Ableitungen der Formfunktionen
 $\{d\}_e$ = Verschiebungsvektor auf Elementebene

Dabei unterscheiden sich Drei- und Vierecke wieder voneinander. Im Dreieck sind die Spannungen an jedem Punkt des Elements gleich. Dies ergibt sich daraus, daß die Span-

nungen die Ableitung der Verformungen sind. Die Verformungen der drei Eckpunkte spannen eine Ebene auf, deren Neigung überall gleich ist.

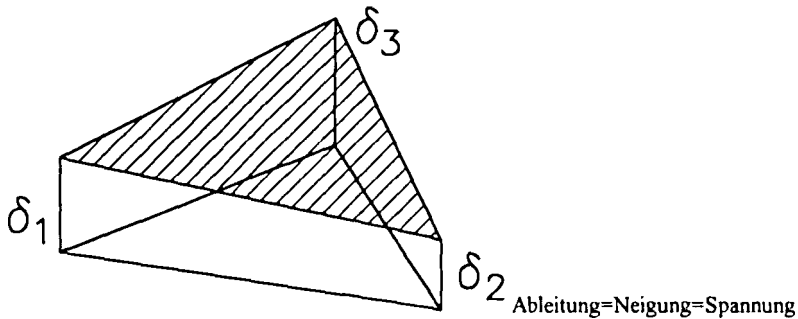


Abb.3.1.6: Verschiebungen eines Dreiecks

Andererseits sieht man, daß in der Matrix B die Element-Koordinaten r und s nicht auftauchen. Die Matrizen D und B sind also im ganzen Dreieck konstant und die Spannungen daher ortsunabhängig. Zweckmäßigerweise rechnet man die Spannungen einmal aus und ordnet sie allen drei Eckpunkten zu, wenn man die Knotenspannungen benötigt.

Im Viereck ist B ortsabhängig. Man kann für r und s jedes beliebige Wertepaar zwischen -1 und 1 einsetzen und so für jeden Punkt des Elements die Spannungen ausrechnen. Die von den Verformungen der Eckpunkte aufgespannte Fläche ist gekrümmt; ihre Neigung ist in jedem Punkt verschieden und somit auch die Spannungen.

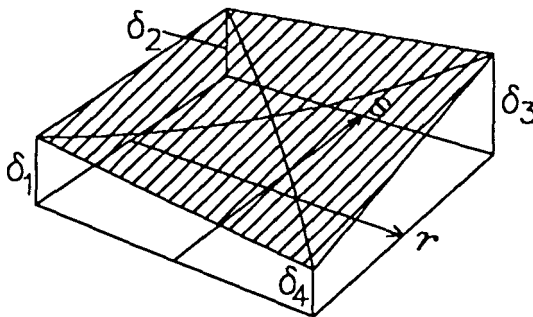


Abb.3.1.7: Verschiebungen eines Vierecks

Nur an den Gaußpunkten ($r = s = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$) sind die Spannungen genau. Die Gaußpunkte sind die Stützstellen für die numerische Integration. Zweckmäßigerweise berechnet man aber trotzdem die Spannungen in den Eckpunkten, weil man nur so die in der Regel benötigten Spannungen an den Rändern des statischen Systems erhält. Entweder setzt man direkt die entsprechenden r - und s -Koordinaten ein ($r=s=\pm 1,0$), oder man extrapoliert die Spannungen der Gaußpunkte auf die Ecken. Bei manchen Arten von *quadratischen* finiten Elementen eignen sich Extrapolationen von den Gaußpunkten aus hervorragend als Näherung, während die direkten Eckpunktwerte außerordentlich schlecht den richtigen Wert wiedergeben (ZIENKIEWICZ, 1984).

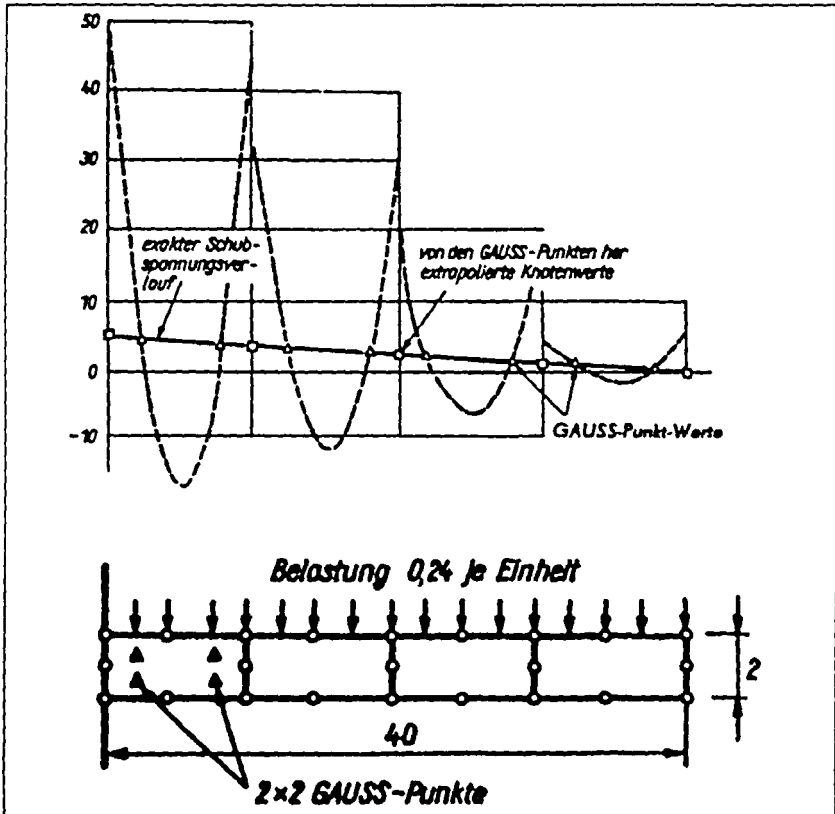


Abb.3.1.8: Spannungsverlauf in parabolischen Elementen (ZIENKIEWICZ, 1984, Zeichnung korrigiert)

Aus der beschriebenen Art der Spannungsberechnung ergibt sich, daß bei einer Dreieck-Diskretisierung ein weniger ausgeglichener Spannungsverlauf zu erwarten ist als bei einer Viereckdiskretisierung.

3.1.3 Vergleich von Dreieck- und Viereckelementen

Die Genauigkeit der FE-Berechnung wird zunächst am Beispiel eines eingespannten Kragarms untersucht und das Verfahren zur Bestimmung der Spannungen optimiert. Hier läßt sich die Genauigkeit gut beurteilen, weil es eine genaue analytische Lösung gibt und weil Vergleichsberechnungen verschiedener Autoren vorliegen. Der Kragarm bietet sich auch deswegen als Beispiel an, weil eine Staumauer im Prinzip ein um 90° gedrehter eingespannter Kragarm ist. Die Vergleichsergebnisse nach der Balkentheorie sind im folgenden aufgeführt.

Anschließend wird in Kap.5 die FE-Berechnung einer Staumauer unter gleichen Gesichtspunkten wie der Kragarm untersucht. Eine Staumauer läßt sich nicht exakt mit einem analytischen Verfahren lösen, weder mit der Balkentheorie noch mit der Scheibentheorie. Hier kann die Güte der Berechnung über den Diskretisierungsfehler beurteilt werden. Bei der Staumauer gibt es - gegenüber dem einfachen Kragarm - eine Vielzahl von zusätzlichen Einflußgrößen, welche die Genauigkeit und die Netzoptimierung beeinflussen.

	Lastfall V=1 am Ende des Kragarms	Lastfall M=1 am Ende des Kragarms
Absenkung am Ende des Kragarms	$0,1166 \cdot 10^{-3}$	$0,054 \cdot 10^{-3}$
davon durch Biegung	$0,1080 \cdot 10^{-3}$	
durch Schub (ca.)	$0,0086 \cdot 10^{-3}$	
σ_x an der Einspannstelle	18,00	6,00
Innere Energie	$583 \cdot 10^{-7}$	$180 \cdot 10^{-7}$

Tab.3.1.9: Vergleichsergebnisse am Kragarm nach der Balkentheorie

Die Ergebnisse einer Berechnung des gleichen Kragarms von ZIENKIEWICZ (1984) sind in Abb.3.1.10 dargestellt. Die Abmessungen (3m * 1m) sind die gleichen wie bei dem hier berechneten Kragarm. Einige weitere Parameter sind jedoch nicht dokumentiert:

- Lagerungsbedingungen an der Einspannstelle (Fest- oder Loslager ?)
- Einleitung der Kraft bzw. des Momentes (Last an *einem* Knoten oder auf mehrere aufgeteilt; Kräftepaar ?)
- Exaktes Vergleichsergebnis (mit oder ohne Schubverformung ?)
- Ort der Spannungsberechnung im Element (Eck- oder Gaußpunkte ?)
- Wahl der Materialparameter ?

Element-Typ	Vertikale Last bei A		Moment bei AA'	
	Max Durchbiegung bei AA	Max Spannung bei BB	Max Durchbiegung bei AA'	Max Spannung bei BB'
	0,26	0,19	0,22	0,22
	0,65	0,56	0,67	0,67
	0,53	0,51	0,52	0,55
	0,99	0,99	1,00	1,00
	1,00	1,00	1,00	1,00
EXAKT	1,00	1,00	1,00	1,00

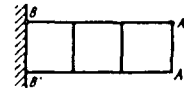


Abb.3.1.10: Vergleichsergebnisse am Kragarm nach ZIENKIEWICZ (1984) (Zeichnung korrigiert): Mittels verschiedener Elemente berechneter ebener Spannungszustand in einem Kragbalken. Genauigkeitsverbesserung durch Elemente höherer Ordnung

Die Vergleichsergebnisse sind in Abb.3.1.12, 3.1.13, 3.1.15 und 3.1.16 als Einzelpunkte zusätzlich eingetragen. Sie weichen geringfügig von den Ergebnissen dieser Arbeit ab, was sich durch die genannten unbekannten Parameter erklären läßt. Die Abweichungen sind letztlich so gering, daß alle Ergebnisse gleichermaßen als richtig angesehen werden können.

In Abb.3.1.11 ist zunächst das Ergebnis einer Spannungsberechnung mit Viereckselementen an einem einfachen Kragarm dargestellt. Es wurde ein gleichmäßiges Netz mit 2821 Knoten und 2700 quadratförmigen Elementen verwendet. An der Einspannstelle ist

der Balken auf in Y-Richtung verschieblichen Lagern gelagert; nur in der Mitte befindet sich ein Festlager. Diese Art der Lagerung bewirkt den geringstmöglichen Einfluß auf den Spannungsverlauf durch die Lagerung selbst.

Die vertikale Last $V=1$ wird auf die Knoten am Ende des Kragarms ($x=L$) verteilt und als konstante Streckenlast entsprechend den Knotenabständen angesetzt. Als Gegenkraft wirkt eine Last $V=-1$ an der Einspannstelle. Diese Last wird sehr gleichmäßig eingeleitet und beeinflusst den Spannungsverlauf am wenigsten. Eine Lastenleitung an einem einzigen Knoten würde dort eine Spannungskonzentration bewirken.

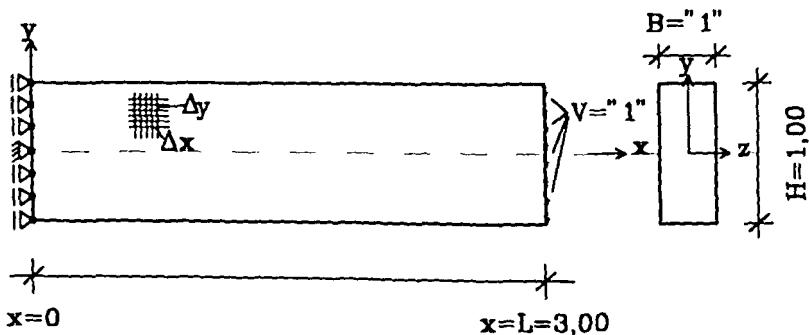


Abb.3.1.11a: Systemskizze einschließlich FE-Netz

Extremwerte für Sigma X:
 Zug: $+20,6 \text{ kN/m}^2$
 Druck: $-20,6 \text{ kN/m}^2$

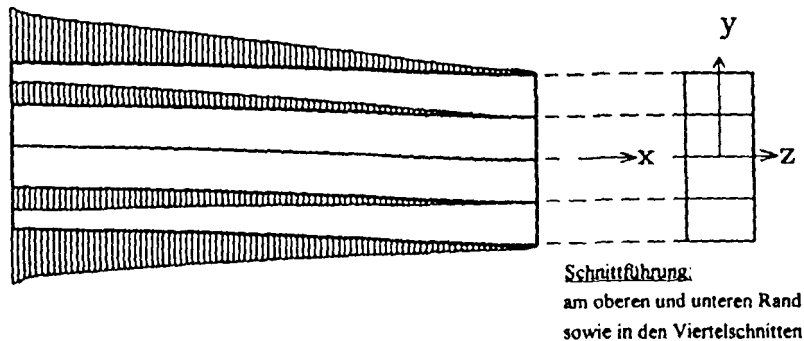


Abb.3.1.11b: Spannungsverlauf σ_x nach FE in einem Kragarm (in Schnitten)

Extremwerte für Sigma X:

Zug: $+20.6 \text{ kN/m}^2$

Druck: -20.6 kN/m^2

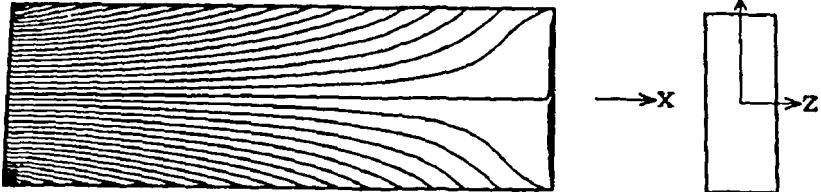


Abb. 3.1.11c: Spannungsverlauf σ_x nach FE in einem Kragarm (Isolinien)

Extremwerte für Tau XY:

Plus: $+1.8 \text{ kN/m}^2$

Minus: 0.0 kN/m^2

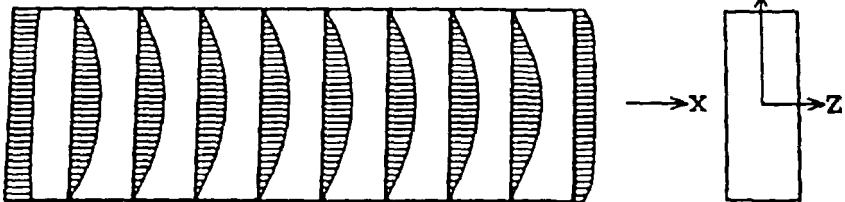


Abb. 3.1.11d: Spannungsverlauf τ_{xy} nach FE in einem Kragarm

Die Berechnung nach der Balkentheorie liefert im Lastfall "Vertikallast $V=1 \text{ kN}$ am Ende des Kragarms " an der Einspannstelle eine Spannung σ_x von $\pm 18 \text{ kN/m}^2$.

Der Spannungsverlauf σ_x an der oberen bzw. unteren Kante nach FE-Berechnung stimmt nur für $x > 0,05 L$ mit dem Ergebnis der Balkentheorie überein. In der Nähe der Einspannstelle wird die Spannung größer als im Balkentheorie-Ergebnis. Sie konvergiert auch nicht bei zunehmender Knotenzahl (bzw. abnehmender Elementgröße) gegen einen Grenzwert. Die Einspannstelle ist eine Extremalstelle, an der sich je nach Feinheit der Diskretisierung sehr hohe, stark voneinander abweichende Spannungen errechnen lassen, weil der Spannungsgradient sehr steil ist. In der Praxis gibt es solche Stellen z.B. in der Sohlfuge einer Stauwand. Näher untersucht wird dies in Kap. 5.4.2.

Durch Aufteilen der Vierecke in je zwei Dreiecke lassen sich verschiedene Dreieckdiskretisierungen erzeugen, nämlich eine solche mit steigenden Diagonalen oder mit fallenden Diagonalen und beliebige Kombinationen davon. Für diese beiden Fälle wurden zwei Lastfälle berechnet ($V=1$ und $M=1$) und die Konvergenz der Ergebnisse in Abb.3.1.12 bis 3.1.17 aufgetragen.

Das Moment wurde als ein Paar horizontaler Kräfte ($H=1$ und $H'=-1$) an der oberen und unteren Seite des Endes des Kragarms aufgebracht. Abb.3.1.12 bis Abb.3.1.17 zeigen die Ergebnisse von FE-Berechnungen mit Vier- und Dreiecken sowie mit verschiedenen Knotenzahlen.

Im Lastfall Vertikallast $V=1$ konvergieren (im Gegensatz zur Spannung) die Absenkung des Endpunktes bei $x=L$ (Abb.3.1.12) und die Gesamtenergie (Abb.3.1.14) gegen den theoretischen Grenzwert nach Balkentheorie und der Fehler gegen Null (Abb.3.1.14) (Fehler definiert in Kap.2.2).

Im Lastfall Moment $M=1$ am Ende des Kragarms stimmen alle Ergebnisse der FE-Berechnung außer der Energie bei ausreichender Elementezahl genau mit dem der Balkentheorie überein. Abb.3.1.15 - 3.1.17 zeigen die Konvergenz der Ergebnisse für die maßgebenden Größen.

Viereck- und Dreieckelemente

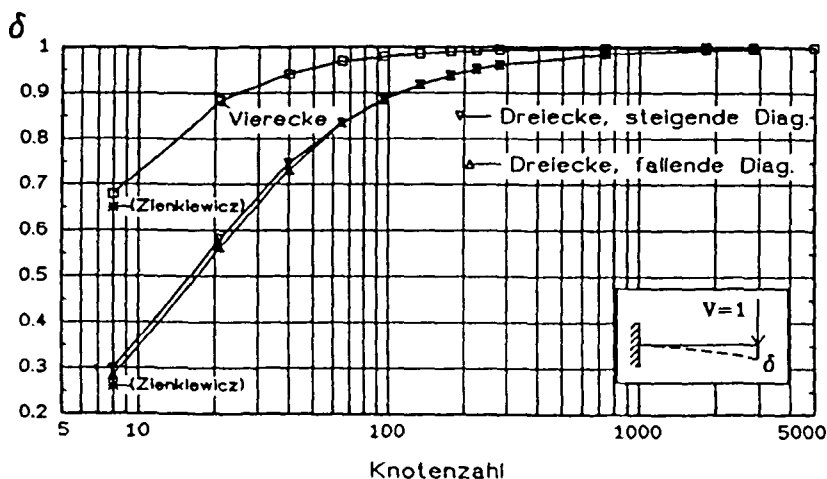


Abb.3.1.12: Dimensionslose Absenkung δ bei $x=L$ bei wachsenden Knotenzahlen infolge einer vertikalen Last ($V=1$) am Ende des Kragarms (Balkentheorie=1)

Viereck- und Dreieckelemente

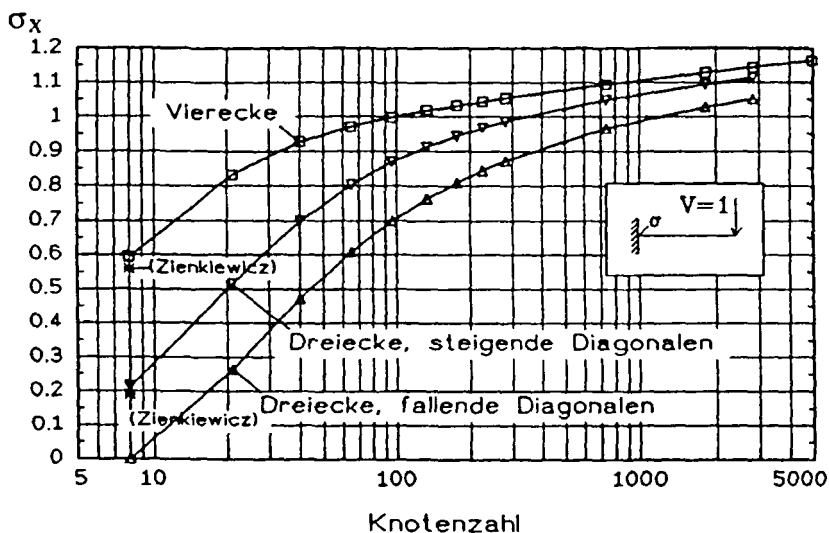


Abb.3.1.13: Dimensionslose Spannung σ_x bei wachsenden Knotenzahlen infolge einer vertikalen Last ($V=1$) am Ende des Kragarms (Balkentheorie=1)

Viereck- und Dreieckelemente

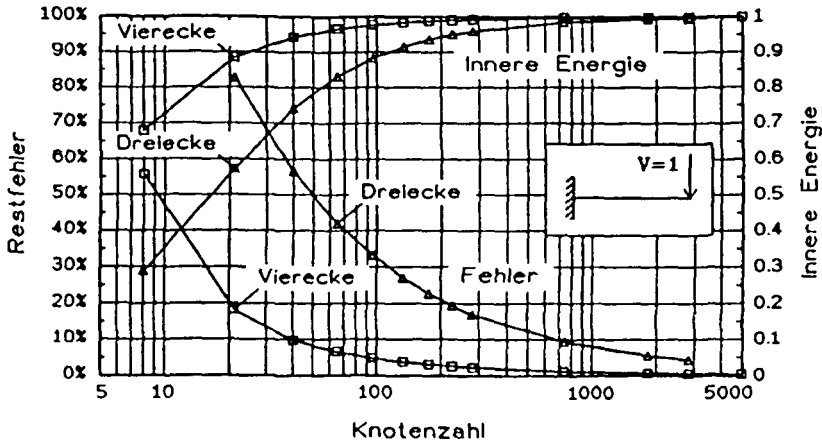


Abb.3.1.14: Dimensionslose Innere Energie (Balkentheorie=1) und Restfehler bei wachsenden Knotenzahlen infolge einer vertikalen Last ($V=1$) am Ende des Kragarms

Viereck- und Dreieckelemente

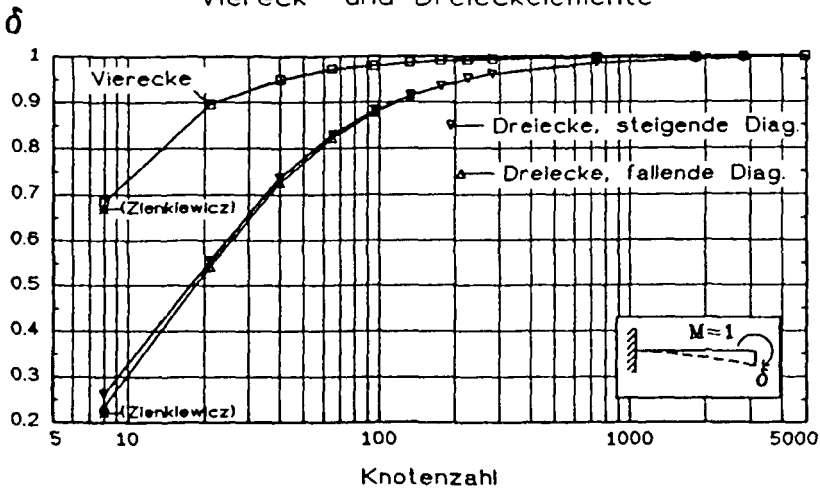


Abb.3.1.15: Dimensionslose Absenkung δ bei $x=L$ bei wachsenden Knotenzahlen infolge eines Moments ($M=1$) am Ende des Kragarms (Balkentheorie=1)

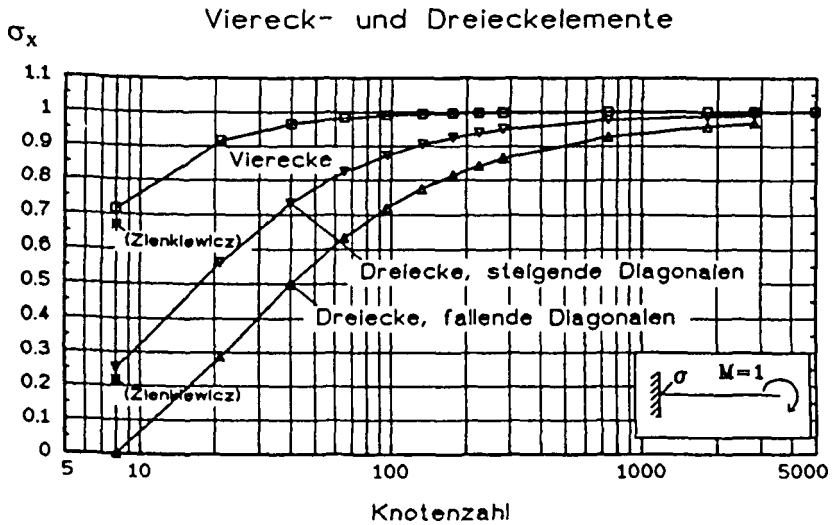


Abb.3.1.16: Dimensionslose Spannung σ_x bei wachsenden Knotenzahlen infolge eines Moments ($M=1$) am Ende des Kragarms (Balkentheorie=1)

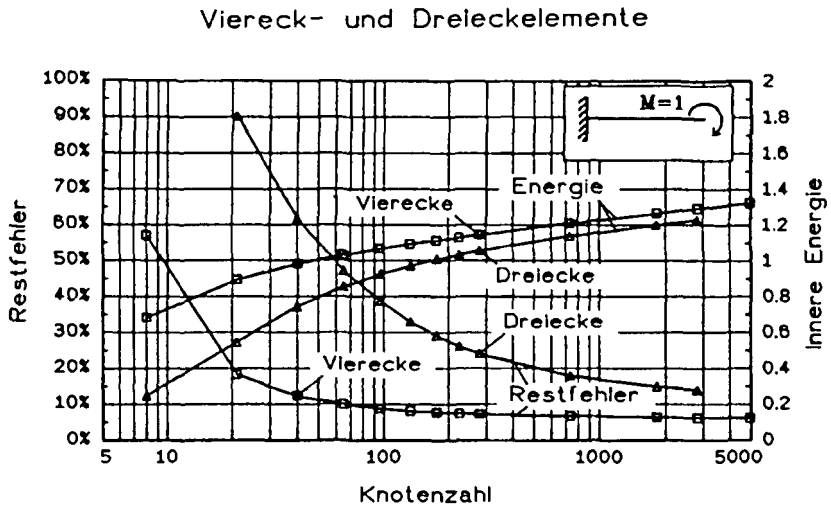


Abb.3.1.17: Dimensionslose Innere Energie (Balkentheorie=1) und Restfehler bei wachsenden Knotenzahlen infolge eines Moments ($M=1$) am Ende des Kragarms

Die Vorteile der verwendeten Viereck-Diskretisierungen für die Berechnungen sind:

- regelmäßiges Viereckraster, dadurch:
- kurze, leichte Eingabe der Knoten- und Elementdaten durch Generierung im Programm
- gleichgroße, quadratförmige Elemente (Idealform)
- symmetrisches Netz
- kleine Bandbreite des Gleichungssystems, dadurch geringer Speicherplatzbedarf
- regelmäßiger, gleichmäßiger und symmetrischer Spannungsverlauf (Isolinien ohne Knicke)
- Extremwerte der Spannungen an den Bauteilkanten werden erfasst

Die Nachteile der verwendeten Diskretisierung für die obigen Berechnungen sind:

- an Extremstellen ist die Diskretisierung nicht verfeinert
- zu einer genauen Erfassung der Spannungen sind relativ viele Elemente notwendig

Für Dreieckdiskretisierungen ist im Vergleich zu den Berechnungen mit Vierecken festzustellen:

- Die Spannung an der Einspannstelle konvergiert für den Lastfall $V=1$ mit steigender Knotenzahl ebenfalls nicht. Für beide Lastfälle ($V=1$, $M=1$) steigt sie langsamer an und ist bei jeder Knotenzahl deutlich kleiner als bei Vierecken.
- Die Spannung wird nie direkt an der Bauteilkante berechnet, sondern immer nur in der Mitte des randnächsten Elements. Diese Mitte rückt bei kleiner werdenden Elementen zwar immer näher an den Rand heran, erreicht ihn aber nie. Daher ist die Genauigkeit nicht so groß wie bei Viereckelementen.
- Die Absenkung konvergiert gegen den theoretischen Grenzwert, aber wesentlich langsamer. Es kommt die bekannte Tatsache zum Ausdruck, daß Dreieckelemente sich im Verhältnis zu Viereckelementen zu steif verhalten.
- Die innere bzw. äußere Energie konvergiert gegen den theoretischen Grenzwert, aber langsamer als bei Viereckelementen. - Der Fehler konvergiert gegen Null, aber deutlich langsamer. Er ist - selbst bei sehr großer Knotenzahl - im Lastfall $M=1$ noch größer als 10%.
- Die Spannungen sind unsymmetrisch entsprechend der Diagonalenrichtung (steigend oder fallend), d.h. Druck- und Zugzone sind nicht spiegelbildlich zueinander. Der Grund dafür liegt in der Beanspruchung eines Dreiecks bei einer Knotenverschiebung (HEES, 1987): Je nach Richtung der Verschiebung eines Knotens können in dem Dreieck entweder nur Längsspannungen, nur Schubspannungen oder beide zusammen vorhanden sein. Der Spannungszustand hängt also von Lage und Form des Dreiecks

ab. Man betrachte zwei Dreiecke, die zusammen ein Viereck bilden (Abb.3.1.18). Knoten i soll eine Verschiebung in x -Richtung erfahren. Dabei entstehen in Dreieck 1 nur Längsspannungen in x -Richtung (bei Querdehnung auch Spannungen in y -Richtung), und in Dreieck 2 nur Schubspannungen. In dem aus beiden Dreiecken zusammengesetzten Viereck gäbe es Längs- und Schubspannungen.

Daher entstehen unsymmetrische Ergebnisse, wenn symmetrische Bauteile unsymmetrisch diskretisiert werden. Die Zug- bzw. Druckspannungen weichen bei dem Kragarm um 21 Prozentpunkte voneinander ab (bei der kleinsten Knotenzahl; Abstand zwischen den Linien "steigende" und "fallende Diagonalen"). Auch bei 2500 Knoten beträgt die Abweichung noch 6% (Abb.3.1.13).

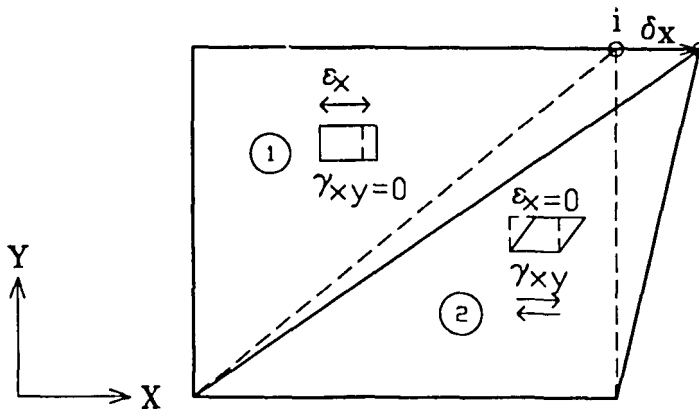


Abb.3.1.18: Verformungszustände in Dreiecken

3.1.4 Einfluß des Seitenverhältnisses von Viereckelementen

Nach allgemeiner Auffassung sollte ein finites Element möglichst wenig verzerrt sein. Das heißt, daß ein Viereck einem Quadrat möglichst nahe kommen soll und ein Dreieck möglichst gleichseitig sein soll. In diesem Kapitel soll untersucht werden, wie sich die Form eines Vierecks (Rechtecks) auf die Berechnungsergebnisse auswirkt. Die Form wird durch das Längenverhältnis der Rechteckseiten ausgedrückt.

Untersucht wurde der gleiche Kragarm wie in den obigen Berechnungen. Abb.3.1.19 zeigt die Konvergenz der Absenkung, Abb.3.1.20 die Konvergenz der maximalen Spannung bei wachsender Knotenanzahl. Das genaueste Ergebnis gibt es bei hochkant stehenden Rechtecken mit dem Seitenverhältnis 2:1. Die Absenkung strebt hier dem Grenzwert am schnellsten zu; die maximale Spannung erreicht hier die höchsten Werte. Zu erwarten wäre die größte Genauigkeit bei quadratischer Elementform gewesen. Insgesamt schneiden aber diejenigen Elementformen besser ab, bei denen die schmalere Seite in der Richtung der Belastung und der gesuchten Spannung liegt. Diese Richtung ist dadurch vergleichsweise feiner unterteilt. Im Beispiel des Kragarms ist das die X-Richtung; hochkant stehende Elemente mit etwa dem Seitenverhältnis 2:1 sind am günstigsten.

Bei einer Netzverfeinerung ist es also sinnvoll, eine Richtung schneller zu unterteilen als die andere. Der Faktor, mit dem die X-Richtung gegenüber der Y-Richtung (oder umgekehrt) bevorzugt werden kann, sollte daher wählbar sein.

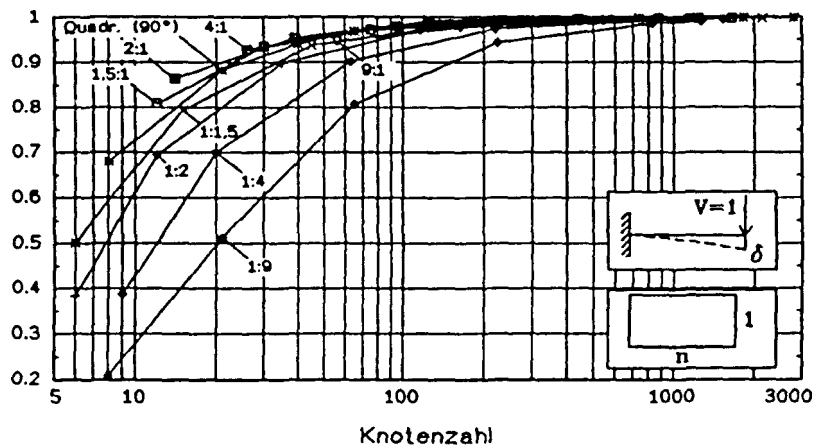
δ 

Abb.3.1.19: Dimensionslose Absenkung δ am Ende des Kragarms infolge einer vertikalen Last ($V=1$) in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis $1:n$ der Vierecke (Balkentheorie=1)

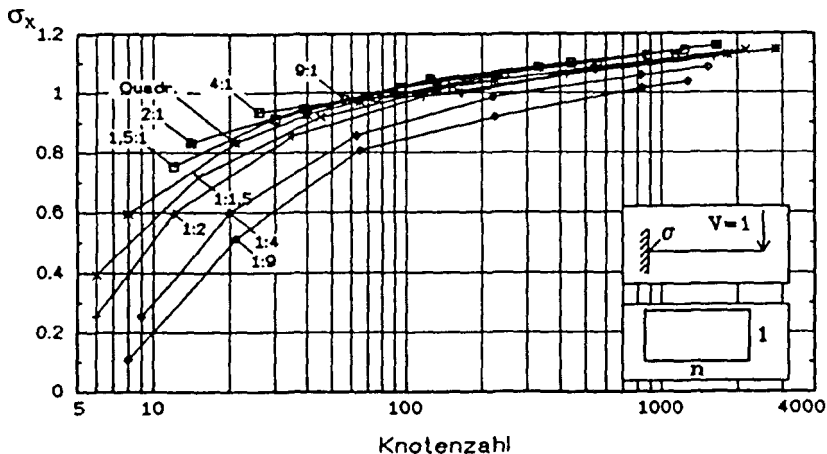


Abb.3.1.20: Dimensionslose maximale Spannung σ_x an der Einspannstelle infolge einer vertikalen Last ($V=1$) in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis $1:n$ der Vierecke (Balkentheorie=1)

3.1.5 Form der Elemente

Ein Element ist dann deformiert, wenn die Innenwinkel sehr stark von 90° (Viereck) bzw. 60° (Dreieck) abweichen. In diesem Abschnitt werden parallelogrammförmige Elemente mit verschiedenen Neigungen untersucht und mit quadratförmigen Elementen verglichen. Abb.3.1.21 zeigt die Definition der Form parallelogrammförmiger Elemente. - Leider lassen sich noch weiter deformierte Elemente schlecht klassifizieren, so daß hier darauf verzichtet wurde, noch weitere Elementformen zu untersuchen.

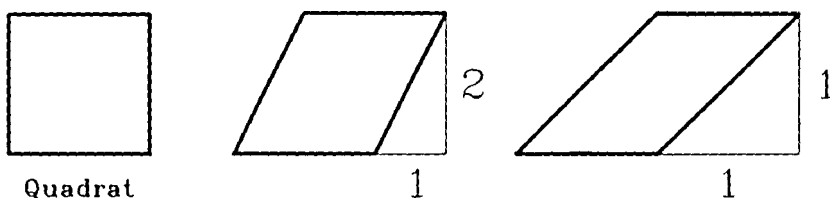


Abb.3.1.21: Definition der Form parallelogrammförmiger Elemente

Bei der Diskretisierung des Kragarms mit Parallelogrammen entstehen unvermeidlich Dreieckelemente am Rand (siehe Abb.3.1.21). Deshalb kann die ermittelte maximale Spannung an der Einspannstelle von Dreiecken beeinflusst und nicht uneingeschränkt mit den Spannungen bei quadratförmigen Elementen vergleichbar sein. Direkt vergleichbar sind aber Absenkung und Fehler. Die Abb.3.1.22 zeigt die Konvergenz der Absenkung am Ende des Kragarms bei verschieden stark deformierten Parallelogrammen, Abb.3.1.23 zeigt entsprechend Spannung und Fehler.

Es ist zu sehen, daß die Konvergenz der maßgebenden Größen bei einer Abweichung von der Idealform (Quadrat) für kleine und mittlere Knotenzahlen wesentlich schlechter wird. Erst bei ausreichend großen Knotenzahlen wird der Unterschied geringer. Bei dem Aufbau einer Diskretisierung ist es also wichtig, auf die Form der Elemente zu achten. Nur bei einer großen Zahl von Knoten und Elementen kann man gering verzerrte Elemente in Kauf nehmen.

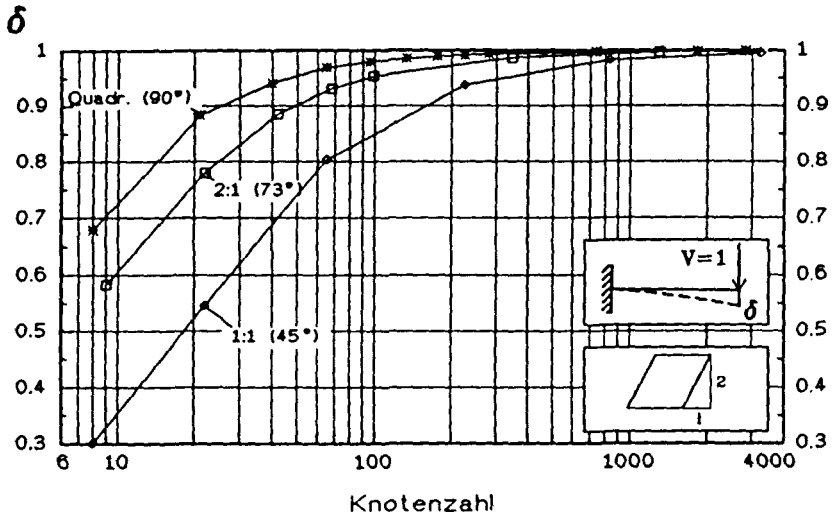


Abb.3.1.22: Dimensionslose Absenkung δ am Ende des Kragarms in Abhängigkeit von der Form der Elemente (Balkentheorie=1)

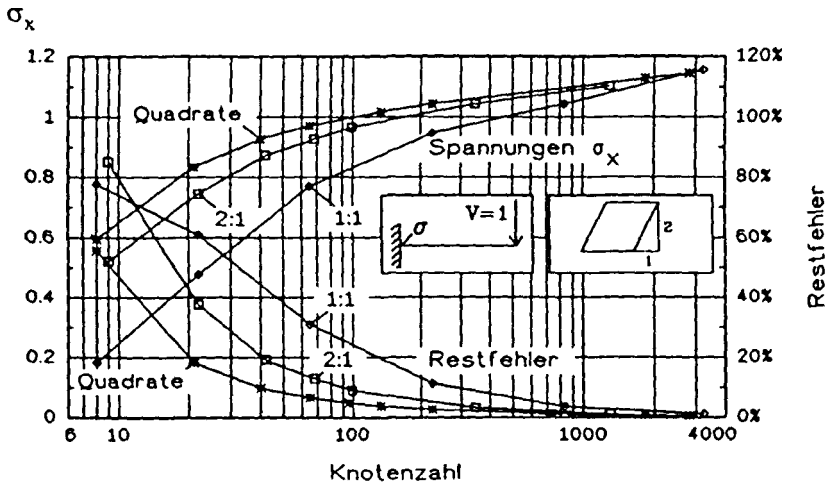


Abb.3.1.23: Dimensionslose Spannung σ_x (Balkentheorie=1) und Restfehler in Abhängigkeit von der Form der Elemente

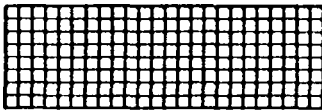
3.2 Netzformen

Unter Netzform soll verstanden werden, wie die Gesamtstruktur aus den einzelnen Elementen zusammengesetzt ist. Die Netzform läßt sich charakterisieren durch:

- Regelmäßigkeit
- Symmetrie
- Größenverhältnis der Elemente



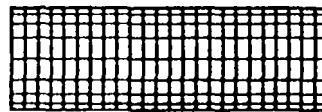
unregelmäßig



regelmäßig



unsymmetrisch

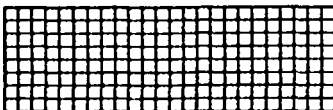


ungleich groß

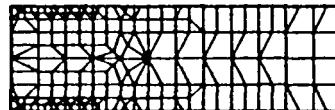
Abb.3.2.1: Netzformen

3.2.1 Regelmäßigkeit des Netzes

Bei genügender Knotenzahl liefert ein regelmäßiges Netz mit gleich großen Elementen für Absenkung, Innere bzw. Äußere Energie und Spannung außer an der Einspannstelle das genaue Ergebnis. Durch Verfeinerung, egal nach welcher Strategie, entstehen mehr oder weniger unregelmäßige Netze.



(a)



(b)

Abb.3.2.2: Beispiel für ein regelmäßiges (a) und ein unregelmäßiges (b) Netz

In der folgenden Abbildung 3.2.3 werden verschiedene unregelmäßige, zur Mittelachse meist symmetrische Netze mit regelmäßigen Netzen verglichen. Die zugrunde liegenden FE-Netze sind in Abb.3.2.5 dargestellt.

Der Grad der Unregelmäßigkeit läßt sich für ein Element durch den empirisch hergeleiteten Faktor "U_e" charakterisieren:

$$U_e = \frac{F_r + D_r + K_n}{3} \quad (3.10)$$

$$\text{mit: } F_r = \frac{A_e}{U^2 \cdot 0,0625} \quad (\text{Formfaktor nach Kap. 4.1})$$

D_r = kleinster relativer Determinantenfaktor im Element nach Kap. 4.1

K_n = Kantenfaktor mit Berücksichtigung der Anzahl der horizontalen oder vertikalen Kanten des Elements nach Kap.4.3.6 (≡ Gleichung 4.17):

$$K_n = \sum_{i=1}^4 K_i$$

A_e = Fläche des Elements

U = Umfang des Elements

Ein Maß für die durchschnittliche Unordnung eines FE-Netzes erhält man durch Wichtung der Elementwerte U mit der Elementfläche. Man erhält die globale Unordnung U_n :

$$U_n = \sum U_e \cdot \frac{A_e}{A_{\text{ges}}} \quad (3.11)$$

mit: A_{ges} = Gesamtfläche der Diskretisierung

Zwischen Knotenzahl, Restfehler und Unregelmäßigkeit besteht ein Zusammenhang, der aber nicht genau funktional ist, sondern innerhalb gewisser Bandbreiten zu sehen ist (Abb.3.2.3). Regelmäßige Netze mit der Unregelmäßigkeit $U_n=1$ haben die größte Genauigkeit. Je unregelmäßiger ein Netz ist ($U_n<1$), desto größer ist der Restfehler bei gleicher Knotenzahl. Aus der doppelt logarithmischen Darstellung wird klar, daß der Restfehler mehr als doppelt so groß sein kann wie bei regelmäßigem Netz. Mit Hilfe von U_n kann man für eine bestimmte Knotenzahl die zu erwartende Genauigkeit bereits vor der eigentlichen Berechnung abschätzen und von Anfang an von einem Startnetz ausgehen, das einen geringen Restfehler erwarten läßt.

Aus Abb.3.2.3 ergibt sich auch, daß man Netze möglichst rasterförmig einteilen sollte. Übergänge zwischen verschiedenen Rasterbereichen haben zwangsläufig schräge Kanten; sie sollten nicht weiter unterteilt werden (siehe Abb.3.2.4).

Regelmäßigkeit der Diskretisierung

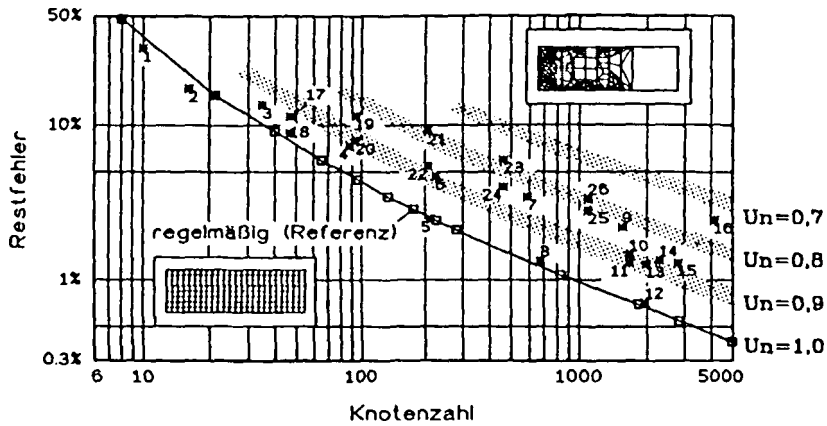


Abb.3.2.3: Restfehler in Abhängigkeit von der (U_n -)Regelmäßigkeit (" U_n ") des FE-Netzes

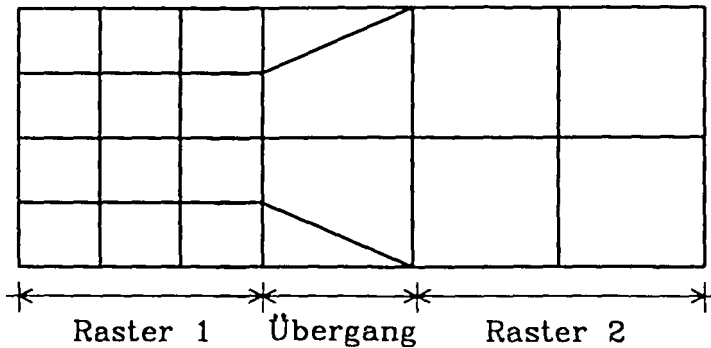


Abb.3.2.4: Übergang zwischen verschiedenen Rastern

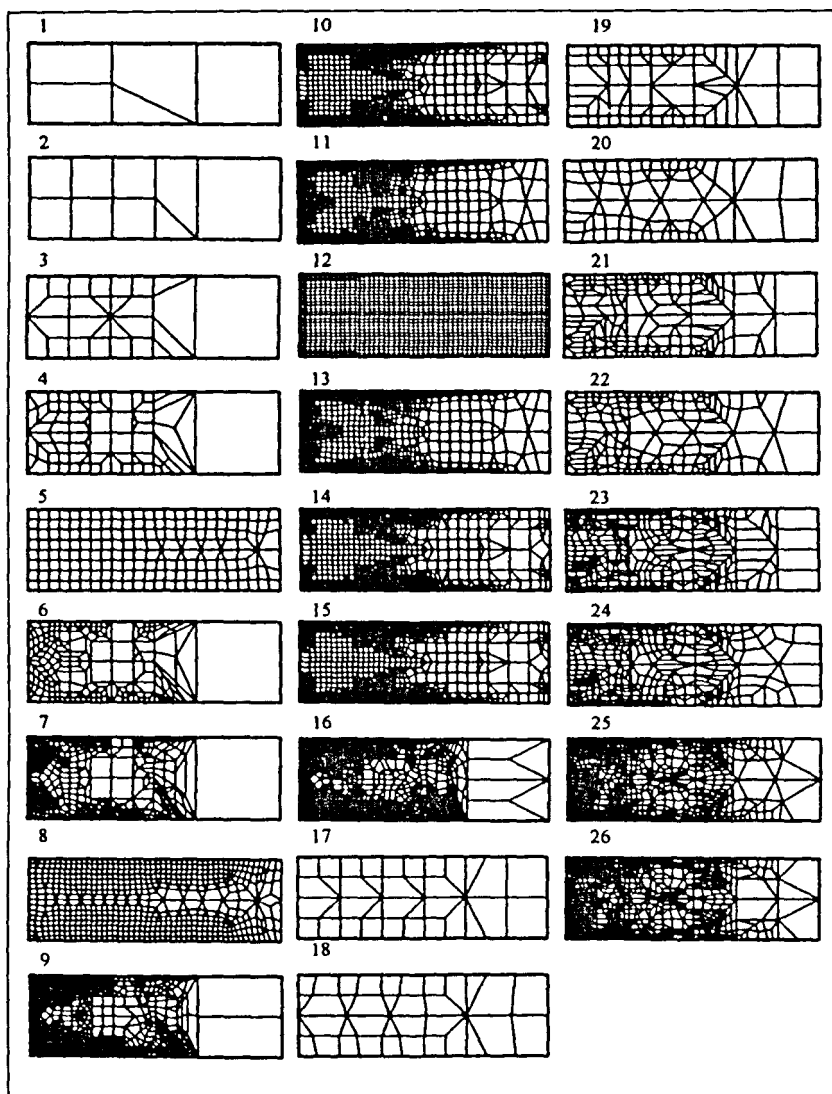


Abb.3.2.5: Für Abb.3.2.3 verwendete Diskretisierungen

Die Spannung an der Einspannstelle oder auch an anderen Stellen wird fast nur von der Größe des Elements an dieser Stelle beeinflusst und weniger von der Regelmäßigkeit des Netzes. Die Verformung des Kragarms ist im wesentlichen nur von der Anzahl der Knoten abhängig. - Beides ist deshalb hier nicht dargestellt.

3.2.2 Symmetrie des Netzes

Die Unsymmetrie des Netzes infolge Dreieckelementen ist unter Kap.3.2.3 bereits abgehandelt. Zu untersuchen ist hier die Auswirkung einer unsymmetrischen Einteilung mit Viereckelementen.

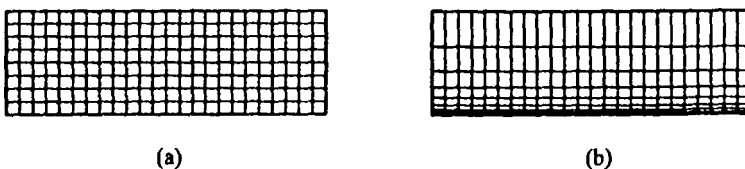
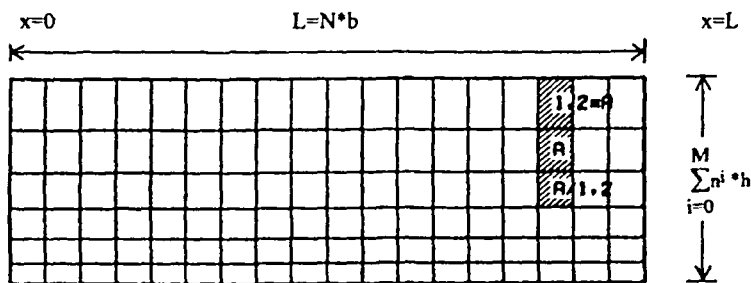


Abb.3.2.6: Symmetrisches (a) und unsymmetrisches (b) FE-Netz



- B = Breite des Balkens, H =Höhe des Balkens
- b, h = Abmessungen des kleinsten Elements
- N = Anzahl Elemente in horizontaler Richtung,
- M = Anzahl Elemente in vertikaler Richtung

Abb.3.2.7: Definition des Maßes für die Unsymmetrie des FE-Netzes

Zu diesem Zweck wird der Kragarm in Elemente eingeteilt, deren Abmessungen sich über der Höhe des Balkens verändert. Dadurch erhält der Kragarm oben höhere Elemente als unten. Das Verhältnis der Höhen von übereinander liegenden Elementen wird von $n=1,0$ über 1,2 und 1,5 bis 2,0 variiert. Dieses Verhältnis ist ein Maß für die Unsymmetrie der Diskretisierung (siehe Abb.3.2.7).

Die Konvergenz der maßgebenden Größen bei wachsenden Knotenzahlen ist in den folgenden Abbildungen dargestellt. Bezogen auf die symmetrische Diskretisierung (1:1) konvergieren Absenkung und Innere/Äußere Energie schlechter bzw. sogar gegen einen zu kleinen Wert.

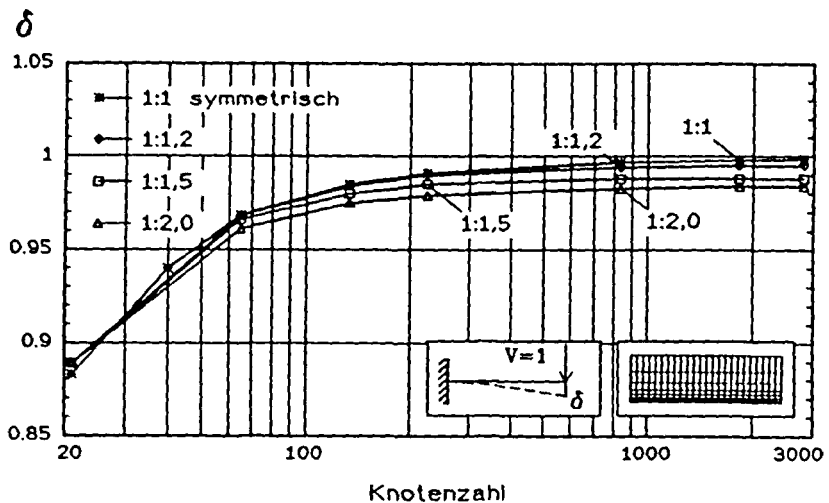


Abb.3.2.8: Dimensionslose Absenkung δ am Ende des Kragarms in Abhängigkeit von der Unsymmetrie des Netzes (Balkentheorie=1)

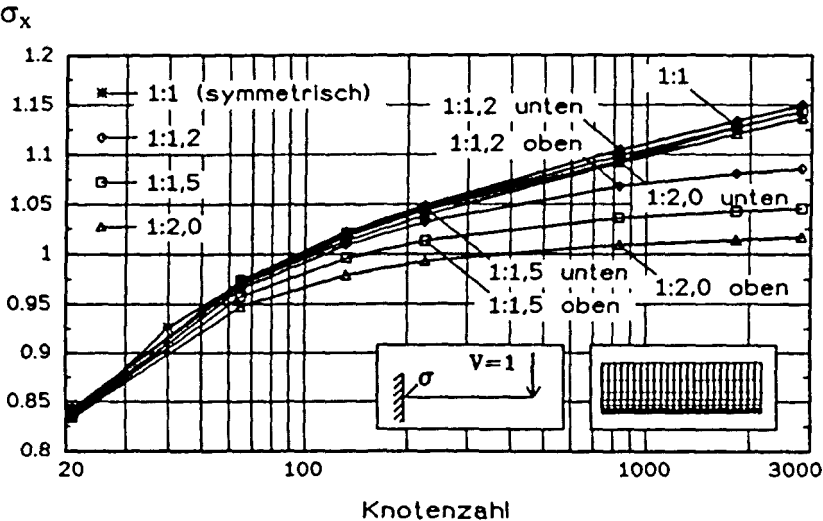


Abb.3.2.9: Dimensionslose Spannung σ_x an der Einspannstelle in Abhängigkeit von der Unsymmetrie des Netzes (Balkentheorie=1)

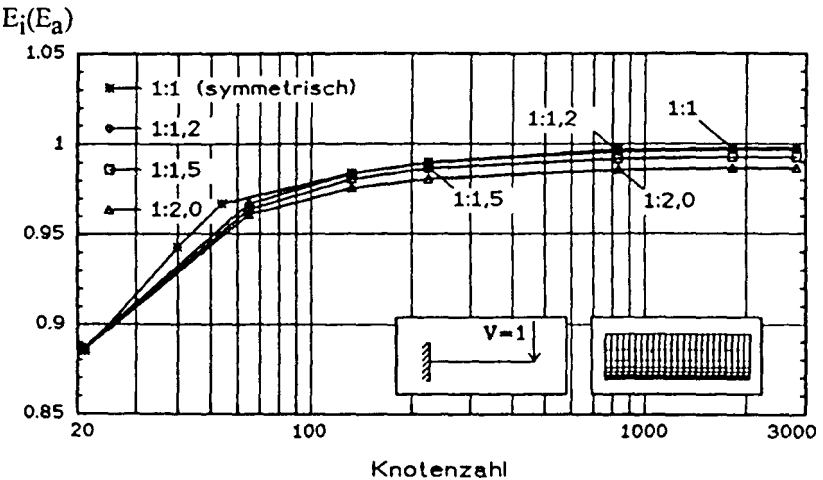


Abb.3.2.10: Dimensionslose Innere (E_i) bzw. Äußere Energie (E_a) in Abhängigkeit von der Unsymmetrie des Netzes (Balkentheorie=1)

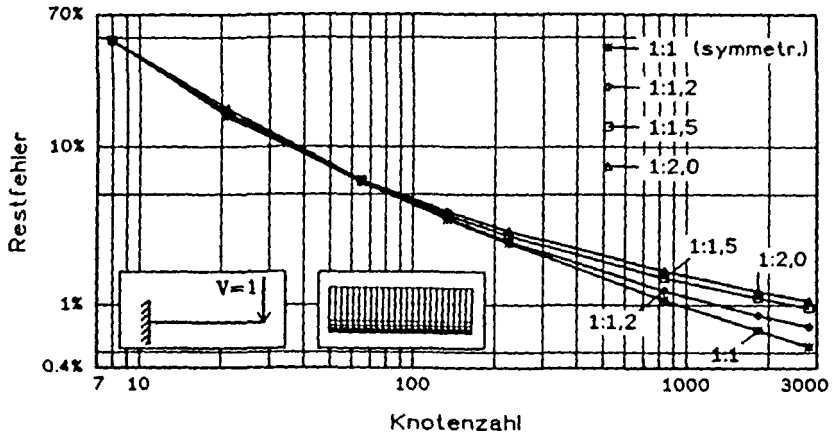


Abb.3.2.11: Restfehler in Abhängigkeit von der Unsymmetrie des Netzes

Die Spannung σ_x an der Einspannstelle ist oben und unten verschieden. Das liegt aber mehr an der Größe der Elemente, die durch die Unsymmetrie in der unteren Faser wesentlich kleiner sind als in der oberen. Die unterschiedliche Spannung oben und unten ist erst in zweiter Linie vom Grad der Unsymmetrie abhängig.

Auf den mittleren Gesamtfehler hat die Unsymmetrie bei kleinen Knotenzahlen kaum einen Einfluß. Erst bei mehr als 1000 Knoten werden unsymmetrische Netze merklich ungenauer.

Die Unsymmetrie bei gleich großen Elementen ließe sich mit Parallelogrammelementen untersuchen. Am Rand würden dann Dreieckselemente als Ausgleich benötigt mit der Folge, daß diese Dreieckselemente den Spannungsverlauf mehr beeinflussen würden als die Parallelogramme. Daher wurde auf eine solche Untersuchung verzichtet.

Es bleibt festzuhalten, daß eine symmetrische Struktur auch symmetrisch diskretisiert werden sollte, wenn man nicht sogar auf die Diskretisierung einer Hälfte aus Symmetriegründen ganz verzichten kann.

3.2.3 Größenverhältnis der Elemente

Die einander benachbarten Elemente in einer FE-Diskretisierung sollen nach Möglichkeit nicht zu sehr unterschiedliche Größe haben. Überall gleich große Elemente sind selbstverständlich auch nicht sinnvoll, weil man dann Bereiche nicht verfeinern würde. Der Einfluß des Größenverhältnisses wird anhand eines Kragarms untersucht, bei dem die Elementgröße von links nach rechts und von der Ober- und Unterkante zur Mittelachse kontinuierlich in einem bestimmten, variierten Verhältnis zunimmt.

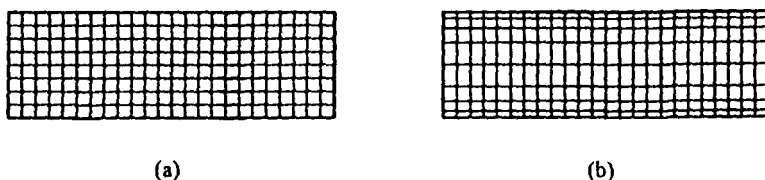
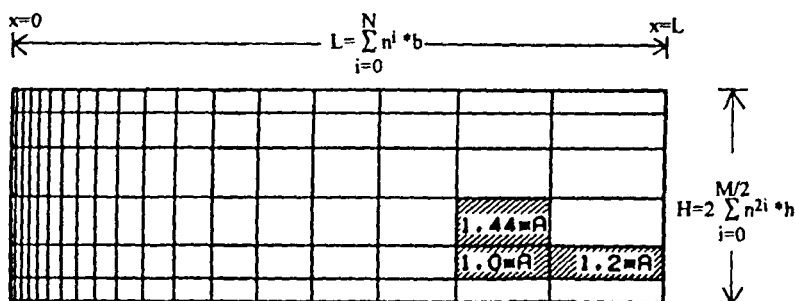


Abb.3.2.12: Gleich große (a) und unterschiedlich große (b) Elemente



B = Breite des Balkens , H =Höhe des Balkens

b, h = Abmessungen des kleinsten Elements

N = Anzahl Elemente in horizontaler Richtung

M = Anzahl Elemente in vertikaler Richtung

Abb.3.2.13: Definition des Größenverhältnisses der Elemente

Von links nach rechts ist das nächste Element jeweils um den Faktor 1,2, 1,5 bzw. 2,0 größer als das benachbarte. Zu seiner Mittelachse ist der Kragarm symmetrisch. Von der Mittelachse nach außen nimmt die Elementgröße nicht mit demselben Faktor, sondern mit seinem Quadrat ab, damit die Seitenverhältnisse der Elemente nicht zu ungünstig werden. Zur Definition des Maßes des Größenverhältnisses siehe Abb.3.2.13. Die Ergebnisse sind in Abb.3.2.14 - 3.2.17 dargestellt.

Bei einer unterschiedlichen Breite von $1:m = 1:1,2$ stimmen Absenkung, Innere bzw. Äußere Energie und Restfehler noch sehr gut mit dem Ergebnis für gleich große Elemente ($1:1,0$) überein. Erst bei größeren Größenunterschieden werden alle Ergebnisse deutlich schlechter. Beispielsweise erreichen Absenkung und Energie nur noch 85% ihres tatsächlichen Wertes, wenn das Größenverhältnis der Elemente $1:2,0$ ist. Der mittlere Fehler liegt oberhalb von 5%, wenn das Größenverhältnis größer als ca. 1,2 ist.

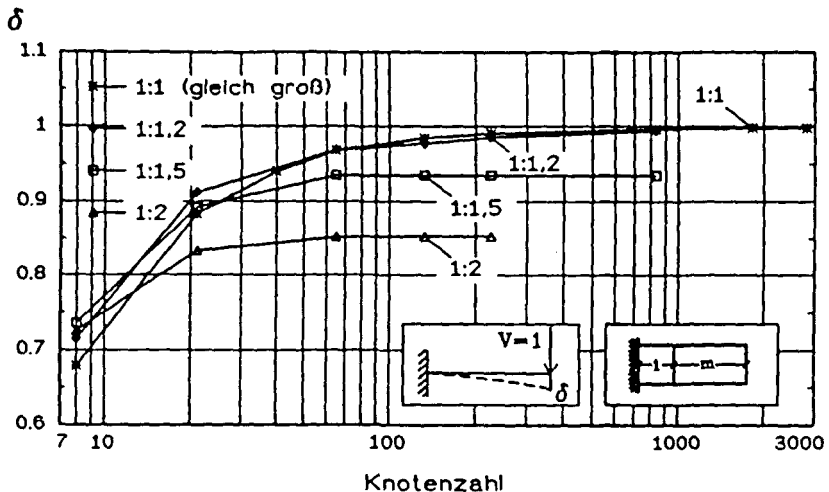


Abb.3.2.14: Dimensionslose Absenkung δ am Ende des Kragarms in Abhängigkeit vom Größenverhältnis $1:m$ der Elemente (Balkentheorie = 1)

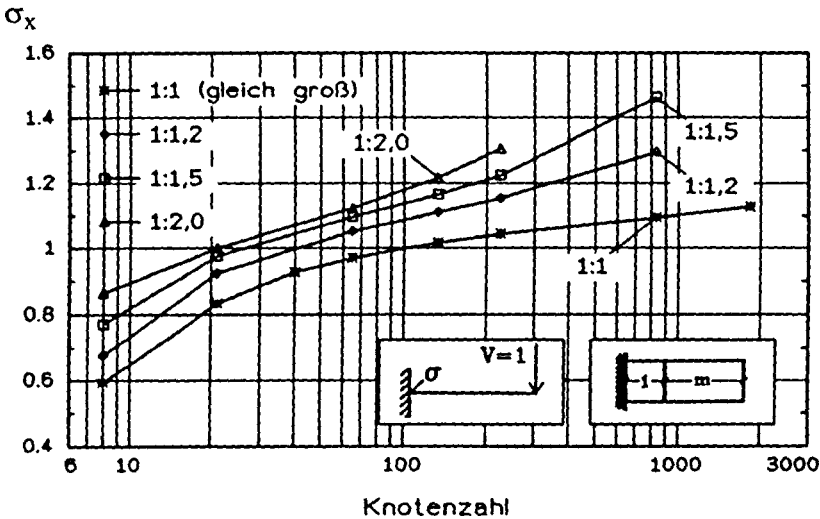


Abb.3.2.15: Dimensionslose Spannung σ_x an der Einspannstelle in Abhängigkeit vom Breitenverhältnis $1:m$ der Elemente (Balkentheorie=1)

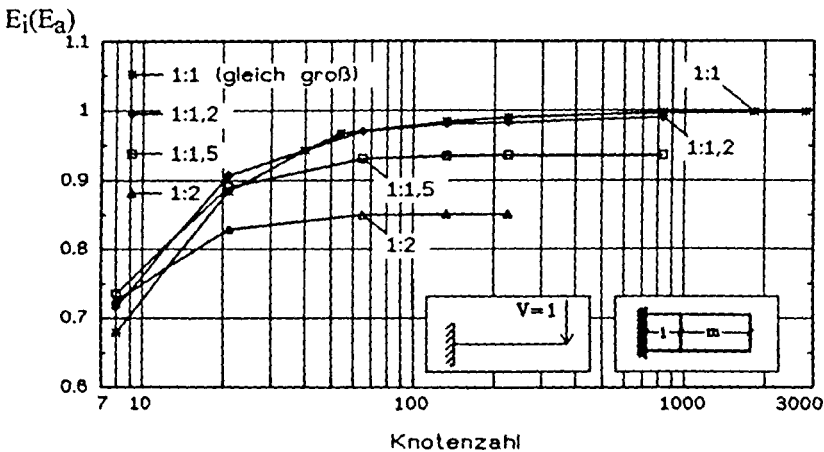


Abb.3.2.16: Dimensionslose Innere (E_i) bzw. Äußere Energie (E_a) in Abhängigkeit vom Größenverhältnis $1:m$ der Elemente (Balkentheorie=1)

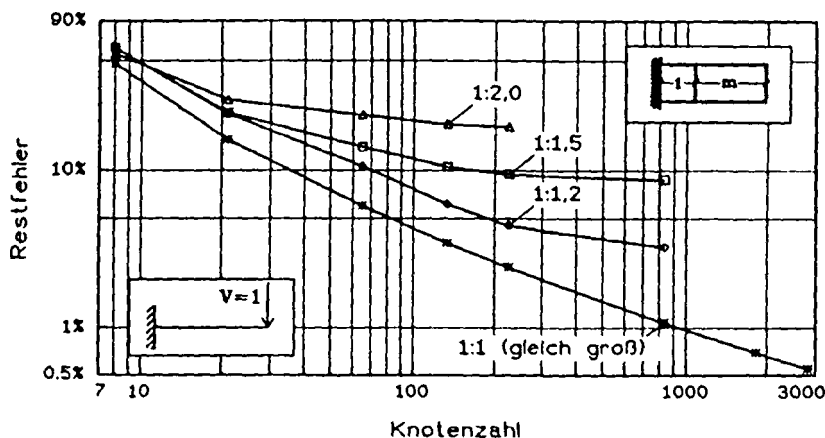


Abb.3.2.17: Restfehler in Abhängigkeit vom Größenverhältnis 1:m der Elemente

Bei der Spannung σ_x an der Einspannstelle ist der Einfluß der absoluten Elementgröße - wie auch sonst - bedeutender als das Größenverhältnis. σ_x wächst zwar scheinbar um so stärker, je unterschiedlicher die Elementgröße ist. Das liegt aber nur daran, daß die Elemente an der Einspannstelle umso schneller kleiner werden.

3.3 Berechnungsraum

Die letzte Ebene beim Aufbau der Diskretisierung nach dem Element und dem Netz ist der Berechnungsraum (Ausschnitt aus dem realen Tragwerk). Beim Balken ist der Berechnungsraum nicht unbedingt auf den auskragenden Teil beschränkt. Die Einspannung könnte durch weitere Elemente modelliert werden. Darauf wird hier jedoch verzichtet, weil dies anhand einer Staumauer sinnvoller zu untersuchen ist. Der Einspannbereich des Balkens entspricht bei einer Staumauer dem Gründungsbereich auf dem Felsen. Die notwendige Modellausdehnung im Untergrund wird in Kap.5.3.2 untersucht.

4 Generierung optimaler Netze

Die im folgenden beschriebenen Verfahren können dazu dienen, aus geeigneten Elementen FE-Netze mit günstigen Formen zu erzeugen. Dazu zählen:

- Netzglättung
- Bandbreitenoptimierung
- Netzverfeinerung

4.1 Netzglättung

Die Elemente in einem von Hand erstellten FE-Netz haben in der Regel nicht optimale Proportionen und Größenverhältnisse. Auch Netzgeneratoren erzeugen an den Übergängen verschiedener Elementbereiche ungünstige Elementformen. Das Netz kann durch Verschieben der Knoten zu günstigeren Formen verbessert werden (Netzglättung). Dadurch werden die Elementproportionen und ihre Größenverhältnisse günstiger. Ein üblicher Algorithmus zur Netzglättung ist, jeden Knotenpunkt so zu verschieben, daß er die gemittelten Koordinaten seiner Nachbarknoten bekommt (Laplace-Interpolation). Da die Knoten nacheinander verschoben werden, ist dieser Prozeß für jeden Knoten iterativ bis zu einer vorgegebenen Genauigkeitsgrenze zu wiederholen.

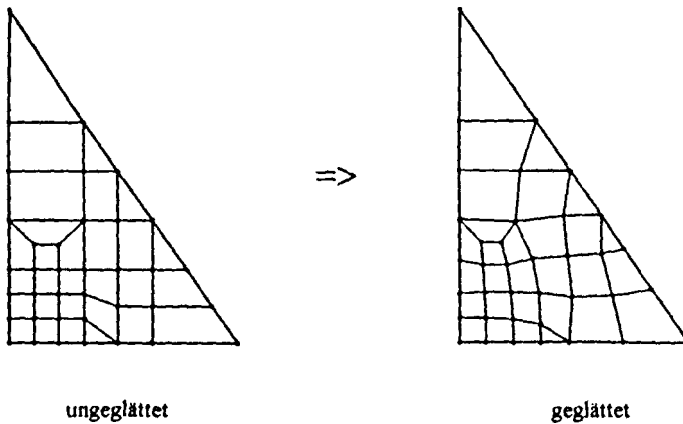


Abb. 4.1.1: Knotenverschiebung zur Netzglättung

Die einfache Laplace-Interpolation hat gravierende Mängel (BREMER, 1988): Bei einspringenden Ecken im Berechnungsgebiet können unmögliche Elementformen entstehen, weil Knoten danach u. U. außerhalb der Netzkontur liegen würden. Außerdem werden die Elementproportionen nicht berücksichtigt und bleiben daher dem Zufall überlassen, auch wenn sie sich im allgemeinen tatsächlich verbessern.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Laplace-Interpolation zu modifizieren. BREMER verschiebt einen Knoten nur dann, wenn sich die Form des am schlechtesten proportionierten Elements der Interpolationszelle dadurch verbessert. Durch Proportionskontrollen ist dort gewährleistet, daß sich Elemente nur in Richtung zu gleichseitigen Dreiecken bzw. Quadraten hin ändern. Als Kontrolle gilt, daß bei jeder Art von Netzglättung ideale Strukturen wieder erreicht werden müssen, die vorher beliebig verzerrt waren. So wird aus den verzerrten Netzen a-d das regelmäßige Netz e:

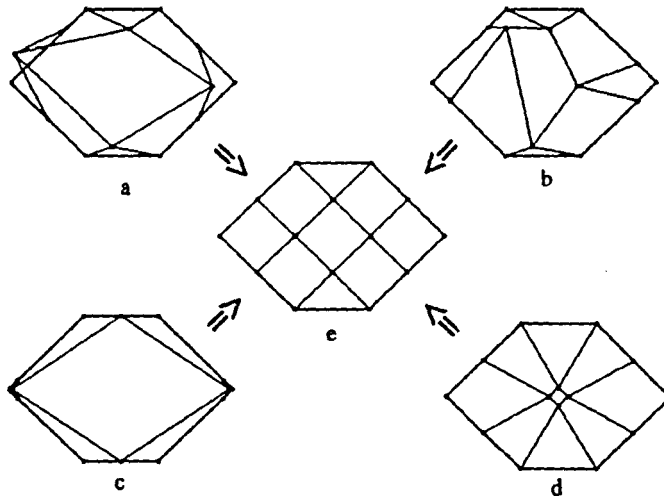


Abb.4.1.2: Wiederfinden der idealen Topologie beim Glätten

Bei Dreiecken ist die Netzglättung sehr einfach, weil man nur die Innenwinkel in Richtung zu 60° -Winkeln ändern muß. Deshalb lassen sich Dreiecknetze fast mühelos optimieren. Bei Vierecken sind viel mehr Kriterien zu berücksichtigen.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Knoten zur Netzglättung nur dann verschoben, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

Für Vierecke gilt:

1. Der Formfaktor F muß größer als ein vorzugebender Wert sein; falls nicht möglich, dann mindestens so groß wie vorher. Er wird wie folgt definiert:

$$F = \frac{A}{U^2} \quad (4.1)$$

A = Fläche,

U = Umfang des Elements

Der Formfaktor gibt - ähnlich wie der hydraulische Radius im Wasserbau - Auskunft darüber, wie groß die erreichte Fläche bei einem bestimmten Umfang ist. Ein Kreis hat den idealen Formfaktor aller Flächen:

$$F_K = \frac{\pi \cdot r^2}{(2\pi \cdot r)^2} = \frac{1}{4\pi} = 0,0796 \quad (4.2)$$

Ein Quadrat hat den Formfaktor:

$$F_Q = \frac{a^2}{(4a)^2} = \frac{1}{16} = 0,0625 \quad (4.3)$$

Die ideale Elementform für viereckige Elemente ist das Quadrat. Der relative Formfaktor F_r wird bezogen auf das Quadrat und ist entsprechend:

$$F_r = \frac{F}{F_Q} = \frac{A}{U^2 \cdot 0,0625} \quad (0 < F_r < 1) \quad (4.4)$$

Je größer der relative Formfaktor vorgegeben wird, desto weniger werden die Knoten bei der Netzglättung verschoben. Wird er zu 1 gewählt, bleiben die meisten Elemente erhalten, da jedes einzelne Element nur verbessert werden darf. Meist beginnt man mit einem Raster aus rechtwinkligen Elementen, die schon fast den optimalen Formfaktor haben. Nach drei Iterationen ist die Glättung oft schon beendet. Stark unterschiedliche Elementengrößen werden dann aber z.B. nicht angeglichen, so daß das Netz noch nicht optimal ist. Als sinnvoll hat sich herausgestellt, daß man den Formfaktor etwa zu 0,85 vorgibt. Dann sind auch Proportionsverschlechterungen erlaubt, die bei anderen Ele-

menten oder insgesamt zur Verbesserung führen. An einem Beispiel wird gezeigt, wie sich ein Netzausschnitt (Sohlbalken eines Kontrollgangs) bei verschiedenen vorgegebenen Formfaktoren verändert (Abb.4.1.3). Ausschnitt a zeigt das Ausgangsnetz und Ausschnitt f das Netz ohne Einschränkung der Glättung durch Proportionskontrollen. Bei den Ausschnitten b bis f sind die vorgegebenen (zugelassenen) Formfaktoren 1,0 - 0,9 - 0,8 - 0,5 - 0,0. Man beachte, wie sich die Elemente an den beiden einspringenden inneren Ecken verändern.

2. Die Determinante der Jacobi-Matrix jeder Elementecke muß positiv sein. Dies verhindert einspringende Ecken (Innenwinkel $> 180^\circ$).
3. Der Determinantenfaktor D_r der Jacobi-Matrix muß größer als ein (vorzugebender) Wert sein. Durch die Wahl dieses Wertes beeinflußt man, wie groß die Innenwinkel an den Elementknoten werden können.

Der relative Determinantenfaktor D_r wird wie folgt definiert. D sei zunächst die Determinante der Jacobi-Matrix, bezogen auf die Seitenlängen $a \cdot b$:

$$D = \frac{\text{Det}(J)}{a \cdot b} \quad (4.5)$$

Der optimale und größte Determinantenfaktor ist dann gegeben, wenn die Kanten des Elements einen Winkel von 90° bilden. Es ist dann:

$$D_{\max} = 0,25 \quad (4.6)$$

Um mit dimensionslosen Größen rechnen zu können, wird der vorhandene Determinantenfaktor auf den maximal möglichen bezogen. Der relative Determinantenfaktor ist also:

$$D_r = \frac{D}{D_{\max}} = \frac{\text{Det}(J)}{a \cdot b \cdot 0,25} \quad (0 < D_r < 1) \quad (4.7)$$

Bei genauer Betrachtung stellt man fest, daß D_r der Sinus des Winkels zwischen beiden Kanten ist.

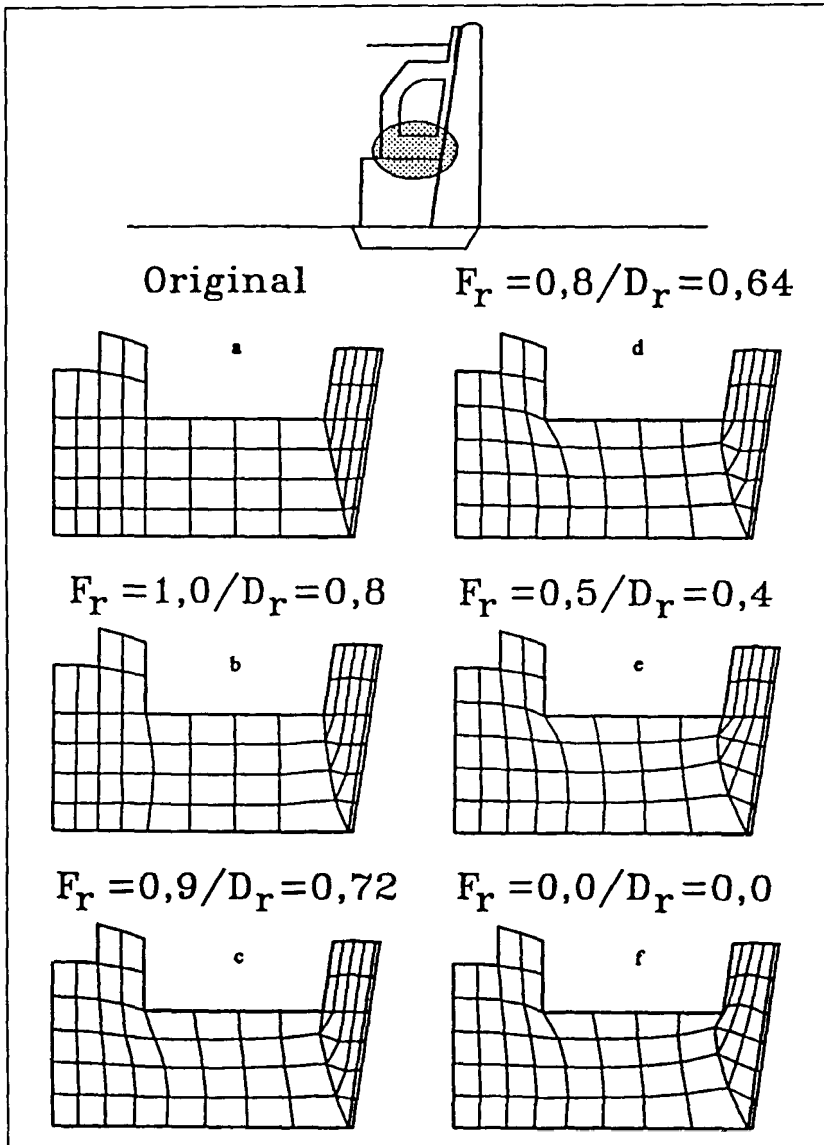


Abb.4.1.3: Netzveränderung bei verschiedenen Form- und Determinantenfaktoren

Für die Form des einzelnen Elements ist ein möglichst großer Wert D_f (max. 1,0) günstig. Wird er zu groß festgelegt, können notwendige Knotenverschiebungen verhindert werden. Als günstig hat sich ein Wert vom ca. 0,8-fachen des vorgegebenen Formfaktors erwiesen.

4. Wenn der Determinantenfaktor der Jacobi-Matrix kleiner als der vorgegebene Mindestwert ist, muß er an jeder Ecke mindestens so groß sein wie vor der Verschiebung.
5. Das Seitenverhältnis muß besser als ein vorzugebender Wert sein, z.B. 3:1; falls nicht möglich, dann mindestens so gut wie vor der Verschiebung. Das Seitenverhältnis an einem Knoten ist das Verhältnis der Längen der angrenzenden Elementkanten a/b .

Für Dreiecke gilt lediglich:

6. Der Formfaktor F_D darf nicht kleiner als vorher werden. Dieser ist das Mittel aus folgenden Winkelfaktoren w_i , die für jede der drei Ecken berechnet werden:

$$w_i = \left(\frac{\alpha}{60^\circ} \right)^2 \quad \text{falls } \alpha < 60^\circ \quad (4.8)$$

$$w_i = \frac{120^\circ - \alpha}{60^\circ} \quad \text{falls } \alpha > 60^\circ \quad (4.9)$$

$$w_i = 1 \quad \text{falls } \alpha = 60^\circ \quad (4.10)$$

$$F_D = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 w_i \quad (4.11)$$

Gleichseitige Dreiecke (60°) werden damit bevorzugt, andererseits werden die Winkel 90° und ca. $42,6^\circ$ gleich bewertet ($w_i=0,5$); das bewirkt, daß Innenwinkel größer als 60° etwas mehr begünstigt werden als Winkel kleiner 60° . Abb.4.1.4 zeigt die (Einzel-)Winkelfaktoren w_i für einige ausgewählte Winkel und Abb.4.1.5 die (Gesamt-) Formfaktoren F_D für einige ausgewählte Dreiecke.

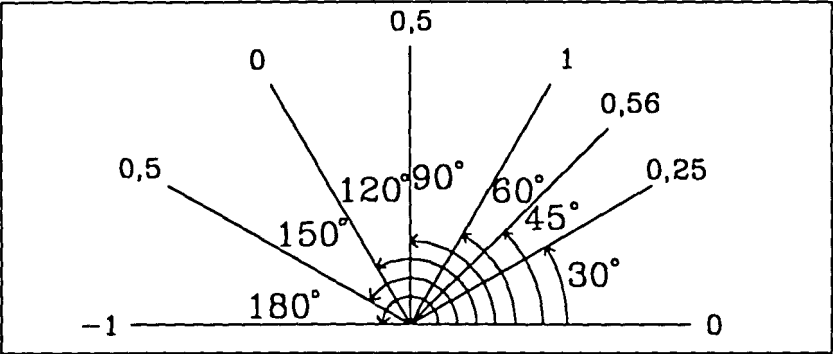


Abb.4.1.4: Winkelfaktoren w_i für Innenwinkel

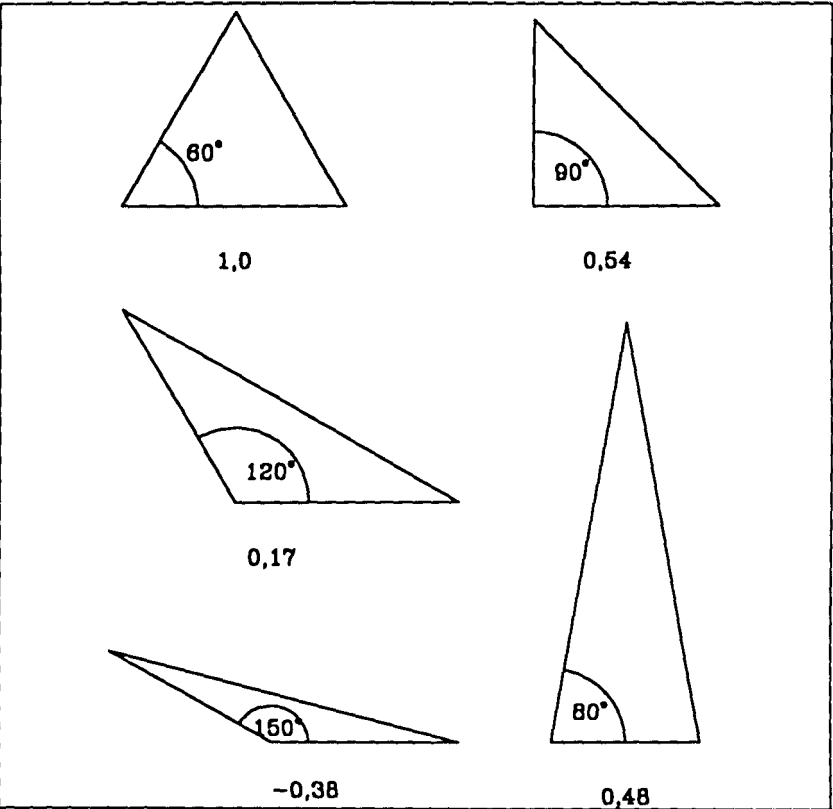


Abb.4.1.5: Formfaktoren F_D für Dreiecke

Ist eine der Bedingungen nicht erfüllt, wird der Knoten nur um die Hälfte des vorgesehenen Maßes (oder um ein Viertel, usw.) oder gar nicht verschoben. So kommt jeder Knoten im Verlauf der Iterationen an den Ort, an dem eines der Kriterien seinen Grenzwert erreicht.

Bei der Netzglättung dürfen Knoten auf dem Rand oder auf Materialgrenzen auch verschoben werden. Sie dürfen sich aber nur auf der Randlinie bewegen und nur dann, wenn der Rand geradlinig ist. An Kreuzungspunkten von Materialgrenzen oder um einen Knickpunkt herum ist die Verschiebung nicht zulässig.

Nachteilig bei einer Netzglättung ist, daß eine Netzverfeinerung u.U. wieder rückgängig gemacht wird. Eng beieinander liegende Knoten werden auseinander gezogen, wenn sie nicht am Rand festgehalten werden. Beispielsweise wird aus dem Netz links das Netz rechts, obwohl in der linken oberen Ecke das Netz verfeinert bleiben sollte (Abb. 4.1.6):

Verfeinerter Bereich

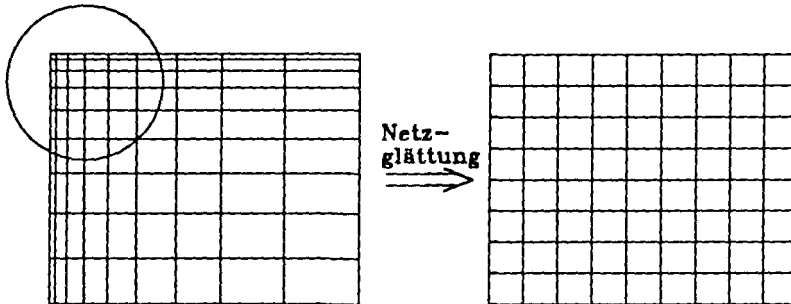


Abb. 4.1.6: Nicht beabsichtigte, nachteilige Netzglättung

In einem solchen Fall muß man entweder "von Hand" Knoten festhalten, indem man sie in eine Liste von Knoten schreibt, die nicht verschoben werden dürfen, oder einen passenden, zusätzlichen Materialbereich einführen, über dessen Grenzen Knoten nicht verschoben werden können.

Die Netzglättung wirkt sich auf den Verlauf der Ergebnisse (z.B. Potentiallinien, Spannungen) im Berechnungsgebiet aus, der dadurch regelmäßiger wird. Die Ergebnisse werden beträchtlich verbessert. Stark geknickte, "zackige" Isolinen würden auf ungünstige Elementformen hinweisen. Daß das geglättete FE-Netz in den meisten Fällen gefälliger aussieht, ist ein Nebeneffekt.

Repräsentative Ergebnisse (Absenkung, Spannung am Einspannpunkt) werden nicht unbedingt beeinflusst, wohl aber Innere bzw. Äußere Energie und der Restfehler, wie Abb.4.1.7 und 4.1.8 anhand einiger Diskretisierungen mit und ohne Netzglättung zeigen. Der Referenzlösung liegt eine regelmäßige Diskretisierung aus reinen Quadratelementen zugrunde.

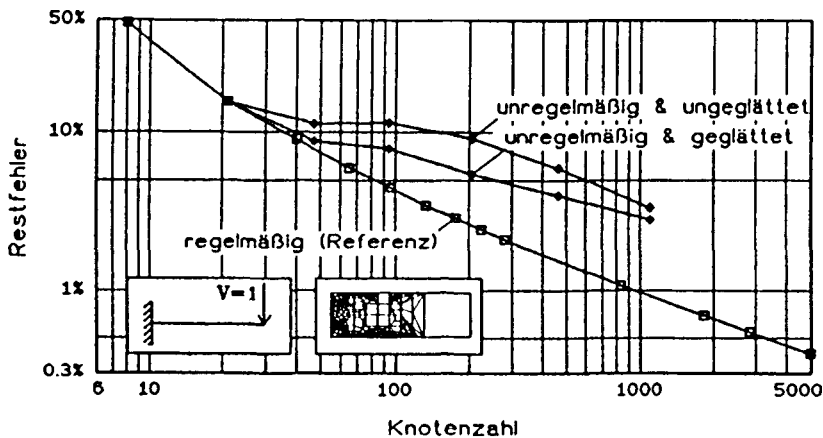


Abb.4.1.7: Restfehler im Kragarm mit und ohne Netzglättung

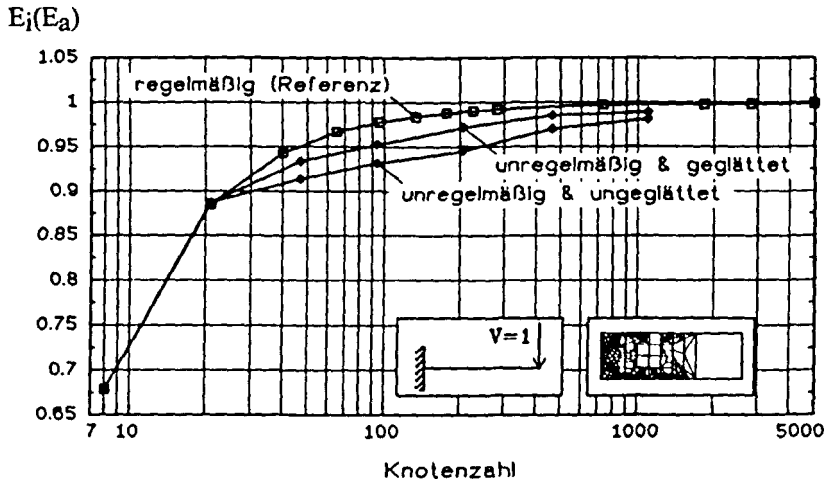


Abb.4.1.8: Dimensionslose Innere (E_i) bzw. Äußere Energie (E_a) im Kragarm mit und ohne Netzglättung (Balkentheorie = 1)

4.2 Bandbreitenoptimierung

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix des FE-Gleichungssystems ist eine quadratische Matrix der Größe $n \times n$. n ist die Zahl der Freiheitsgrade. Bei einer Potentialberechnung (Sickerströmungs- oder Temperaturberechnung) entspricht n der Zahl der Knoten, weil für jeden Knoten eine Unbekannte zu berechnen ist. Im zweidimensionalen elastischen Kontinuum entspricht n der zweifachen Anzahl der Knoten, weil für jeden Knoten x - und y -Verschiebung Unbekannte sind. In beiden Fällen wird noch die Zahl der vorgegebenen Randbedingungen abgezogen.

Diese $n \times n$ -Matrix ist bei dem hier behandelten Typ von finiten Elementen symmetrisch, d.h. spiegelbildlich zur Hauptdiagonale. Die Matrix enthält viele Nullen; der Anteil der Nullen erreicht oftmals sogar 90%. Wenn die Nicht-Null-Koeffizienten in der Nähe der Hauptdiagonale angeordnet sind, hat die Matrix Bandstruktur. In diesem Falle müssen nur wenige Koeffizienten der Matrix gespeichert werden, nämlich eine Hälfte des Bandes; meist nimmt man diejenige, die oberhalb der Hauptdiagonale liegt. Eine günstige Bandstruktur wird dann erreicht, wenn in allen Elementen die Knoten möglichst geringe Index-Abstände haben.

Die meisten Gleichungssystemlöser sind auf eine kleine Bandbreite angewiesen. Es gibt allerdings auch solche, bei denen die Bandbreite von untergeordneter Bedeutung ist. Trotzdem ist es vorteilhaft, eine kleine Bandbreite anzustreben, weil so weniger Koeffizienten des Gleichungssystems gespeichert werden müssen.

Deshalb beschäftigt sich ein Autor eines FE-Programmes in der Regel auch mit der Reduzierung der Bandbreite. Alle Algorithmen arbeiten heuristisch, d.h. sie finden nicht mit Sicherheit die tatsächlich beste Bandbreite. Sie gehen letztlich entweder auf ROSEN (1968) oder CUTHILL, MCKEE (1969) zurück.

Nach ROSEN werden die Indices von Knoten systematisch vertauscht und damit gleichzeitig im Gesamtgleichungssystem die zugehörigen Spalten und Zeilen. Dies führt allmählich zu geringeren Zeilenlängen. Dieser Algorithmus ist günstig, wenn die Matrix bereits eine relativ gute Anfangsbandbreite hat.

Der bekannteste Algorithmus ist wahrscheinlich der von CUTHILL, MCKEE; Varianten davon werden z.B. in BREMER (1988) und HÖTTGES (1992) beschrieben. Sie beruhen, wie auch der hier verwendete Algorithmus SBOP, auf einer stufenweisen Numerierung von Ebenen mit bestimmten, aussichtsreichen Startknoten. Das sind (bei SBOP) die Eckknoten des Berechnungsausschnitts. Man findet sie durch die Bedingung, daß nur je ein einziges Element diese Knoten enthält.

Abb.4.2.1 zeigt eine Numerierung nach dem Algorithmus von CUTHILL, MCKEE mit den zugehörigen Ebenen.

Einen linearen Zusammenhang zwischen Knotenzahl bzw. Zahl der Freiheitsgrade und Bandbreite gibt es nicht, wie Abb.4.2.2 bis Abb.4.2.4 zeigen. Eine gute Bandbreite läßt sich bei regelmäßigen Diskretisierungen eher finden als bei unregelmäßigen. Bei unregelmäßigen Diskretisierungen werden die Ebenen sehr lang und "verschlungen".

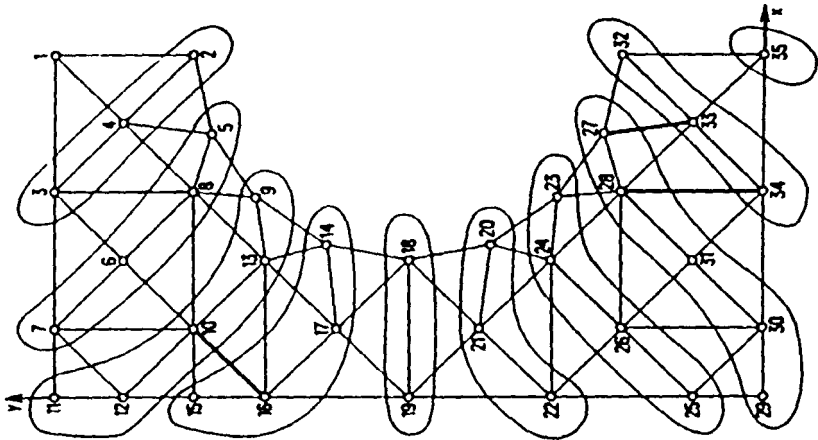


Abb.4.2.1: Numerierung nach dem Algorithmus von CUTHILL, MCKEE (aus SCHWARZ, 1984)

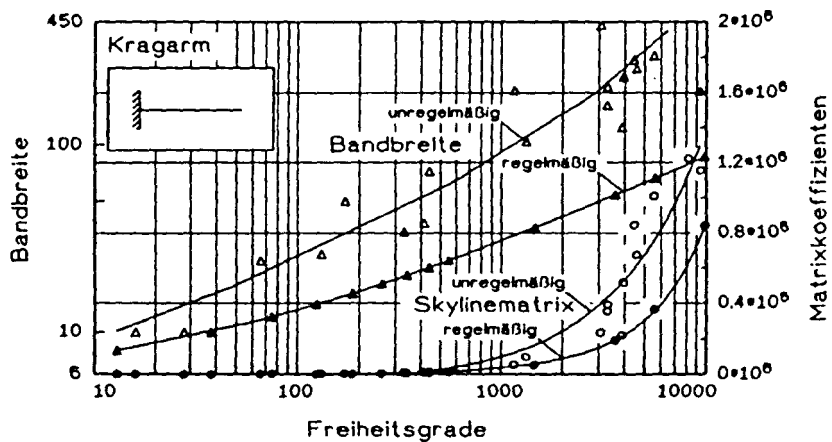


Abb.4.2.2: Zusammenhang von Bandbreite, Matrixgröße und Freiheitsgraden am Kragarm bei regelmäßiger bzw. unregelmäßiger Diskretisierung

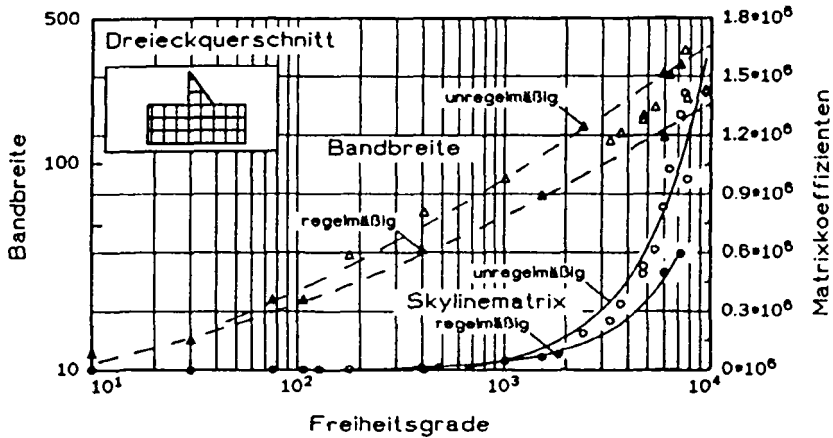


Abb.4.2.3: Zusammenhang von Bandbreite, Matrixgröße und Freiheitsgraden am Grunddreieck bei regelmäßiger bzw. unregelmäßiger Diskretisierung

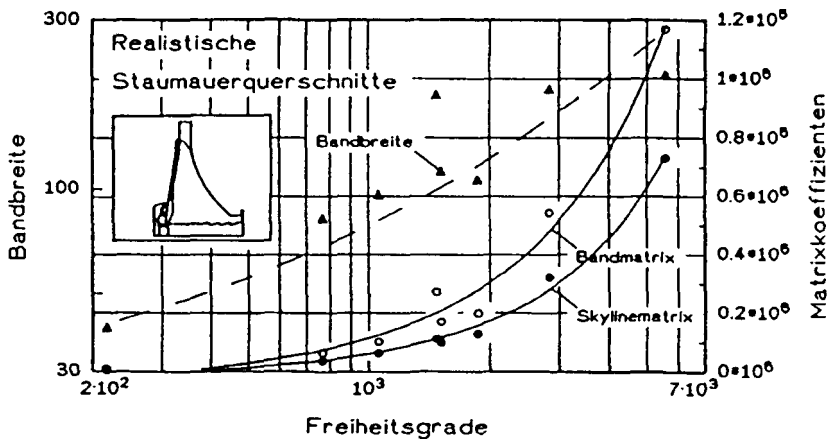


Abb.4.2.4: Zusammenhang von Bandbreite, Matrixgröße und Freiheitsgraden an realistischen Staumauerquerschnitten

4.3 Adaptive Netzverfeinerung

Grundsätzlich gibt es zwei Verfahren, finite Elemente adaptiv zu verfeinern: die **h-Version** und die **p-Version** der Verfeinerung. Bei der **h-Version** werden die Elementkanten durch neue Knoten unterteilt und aus einem Element entstehen so mehrere neue Elemente. Bei der **p-Version** bleiben alle Elemente erhalten und der Ansatzgrad der Funktionen wird erhöht, mit denen der Verschiebungszustand und die Formfunktionen beschrieben werden. Außerdem gibt es die Möglichkeit, beide Versionen zu kombinieren.

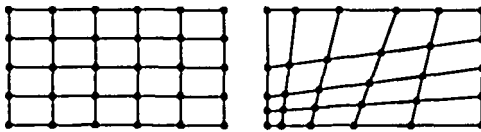
4.3.1 Die h-Version der Verfeinerung

Diese Version ist die einfachere und unmittelbar einsichtige. **h** ist die Bezeichnung für den charakteristischen Gitterabstand der FE-Diskretisierung. Die Interpolationsfunktionen im Element bleiben unverändert. Das durch eine Verfeinerung erzeugte neue Netz ist dem alten gleichwertig, abgesehen davon, daß es mehr Knoten und Elemente enthält. Der erzeugte Datensatz kann wie der Ausgangsdatsatz abgespeichert, geändert und weiterverwendet werden. Es sind beliebig viele weitere Verfeinerungsschritte möglich. Die Grenze ist erst da erreicht, wo die maximal mögliche Knotenzahl überschritten wird oder der Platz für die Speicherung der Gesamtsteifigkeitsmatrix nicht mehr ausreicht. Die **h-Version** entspricht dem ursprünglichen Gedanken der FE-Methode, das Berechnungsgebiet in viele endlich kleine Elemente aufzuteilen. Abb.4.3.1 zeigt mehrere Möglichkeiten der Verfeinerung.

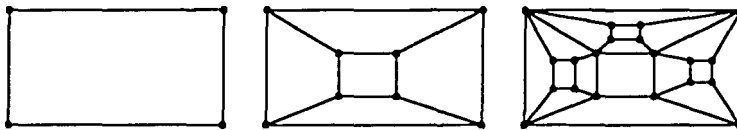
4.3.2 Die p-Version der Verfeinerung

Der Grad des Funktionsansatzes wird bei jedem Schritt erhöht. Aus einem linearen Element wird so ein quadratisches, aus einem quadratischen ein kubisches usw. Diese Version besitzt ein etwas besseres Konvergenzverhalten als die **h-Version**. Sie erfordert aber bei der Programmierung einen wesentlich höheren Aufwand. Für jeden Funktionsgrad muß die Aufstellung der Elementsteifigkeitsmatrix programmiert sein. Diese wird umso komplizierter, je höher der Funktionsgrad ist. Ein Element kann nur so oft verfeinert werden, wie Funktionsgrade vorgesehen sind, in der Praxis nicht mehr als 4-5. Wenn z.B. der höchste vorgesehene, fest programmierte Funktionsgrad 5 ist, sind maximal vier Verfeinerungsschritte möglich. In jedem verfeinerten Datensatz muß für jedes Element gespeichert werden, welcher Ansatz gerade gültig sein soll (Stichwort: Restart-Möglichkeit), oder die

Berechnung müßte immer vom Ausgangsdatensatz ausgehen. Die numerischen Ergebnisse für Spannungen oszillieren bei höheren Graden der Ansatzfunktionen stark, weswegen besonders Singularitäten schlecht zu erfassen sind (RANK, 1985). Wegen dieser Nachteile wird in dieser Arbeit nur die h-Version verwendet.



Lokale Verfeinerung durch Verschieben der Knoten



Verfeinerung durch Einfügen neuer Elemente



Verfeinerung durch Elementteilung

Abb.4.3.1: Möglichkeiten der Netzverfeinerung (nach RANK, 1985)

4.3.3 Kombination von h- und p-Version

Hier werden erst einige Verfeinerungsschritte nach der h-Version unternommen und anschließend wird der Ansatzgrad der Elemente erhöht. Für ein typisches Netz, das aus dieser Kombination entsteht, siehe Abb.1.3. Diese Mischform, in der Vor- und Nachteile beider Versionen enthalten sind, erfordert wiederum eine besondere Programmstruktur.

4.3.4 Verfeinerungskriterien

Zunächst wird mit einer Ausgangsdiskretisierung eine erste FE-Berechnung durchgeführt. Beispielhaft wurde ein Kragarm mit 280 Knoten und 243 Elementen verwendet, um eine aussagekräftige Fehlerverteilung zeigen zu können. Für jeden Knoten wird der Fehlerindikator $e_{X,i}$ (lokaler Fehler, wie in Kap.2.2.1 definiert) berechnet und gespeichert.

Die Fehlerverteilung sieht man in Abb.4.3.2. Die Spitzenwerte des Fehlers sind auf kleine Bereiche in der Nähe der Einspannstelle beschränkt. Im größten Teil des Querschnitts liegt der lokale Fehler unter 2%. Größer ist er an der Ober- und Unterkante und an der Mittelachse. Diese Verteilung des Fehlers würde dazu führen, daß genau in diesen Bereichen auch verfeinert würde. An der Mittelachse ist aber objektiv eine Verfeinerung nicht notwendig. Die Verteilung der Horizontalspannungen (Sigma X, siehe Abb.4.3.3) würde viel besser angeben, wo die Diskretisierung feiner sein muß.

Extremwerte für FEHLER:
34.52 %

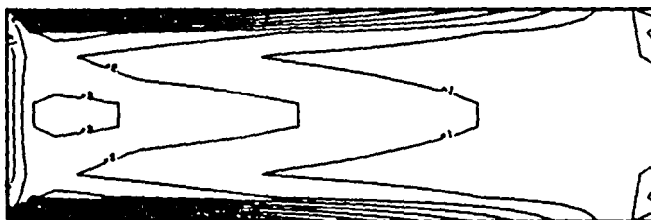


Abb.4.3.2: Verteilung des Restfehlers in einem Kragarm

Extremwerte für SIGMA X:

Zug +19.0 kN/m²

Druck -19.0 kN/m²

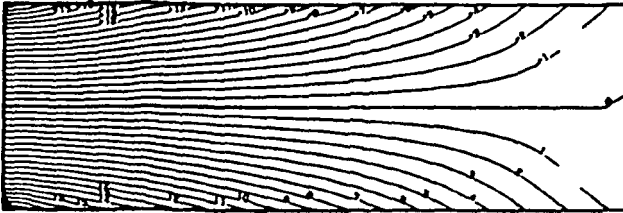
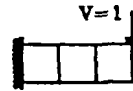


Abb.4.3.3: Spannungen σ_x in einem Kragarm

Eine Kombination aus Fehlerverteilung und Spannungsverteilung ist daher als Verfeinerungsindikator günstiger. Beide müssen kombinierbar, also dimensionslose, bezogene Werte sein.

Als Fehlerindikator einer Elementkante wird der mittlere Energiefehler beider Knoten bezogen auf den maximalen Energiefehler aller Kanten definiert:

$$I_E = \frac{(\Delta E_1 + \Delta E_2)}{(\Delta E_1 + \Delta E_2)_{\max}} \quad (4.12)$$

Als Spannungsindikator wird der Spannungsunterschied beider Knoten bezogen auf den maximalen Spannungsunterschied aller Kanten definiert:

$$I_\sigma = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)_{\max}} \quad (4.13)$$

bzw. für die von-Mises-Vergleichsspannung:

$$I_{\sigma M} = \frac{(\sigma_{M1} + \sigma_{M2})}{(\sigma_{M1} + \sigma_{M2})_{\max}} \quad (4.14)$$

Der Verfeinerungsindikator wird damit:

$$I_{E,\sigma} = n \cdot I_E + (1-n) \cdot I_{\sigma(M)} \quad (4.15)$$

Der Anteil n ist zwischen 0 und 1 wählbar. Als günstig hat sich der Erfahrungswert $n=0,5$ erwiesen. Die Art der Spannung ist ebenfalls wählbar (σ_x , σ_y , τ_{xy} , σ_I , σ_{II} ...). Sinnvollerweise wird die für die betreffende Aufgabenstellung maßgebende Bemessungsspannung gewählt. Im Falle des Kragarms ist das die Horizontalspannung σ_x , sonst oft die von-Mises-Vergleichsspannung.

In allen Verfeinerungsschritten wird jede Elementkante nicht nur nach dem Verfeinerungsindikator als Hauptkriterium beurteilt. Weitere Steuerungsparameter stehen zur Verfügung und entscheiden über die Verfeinerung:

1. Verfeinerungsindikator

Für jede Kante wird ein Verfeinerungsindikator aus den Fehler- und Spannungsindikatoren der beiden Eckknoten berechnet. Kanten mit einem großen Indikatorwert werden unterteilt. Der Anteil der zu unterteilenden Kanten von allen Kanten ist zwischen den Grenzwerten 0% und 100% wählbar, z.B. bedeutet 20%, daß die 20% mit den höchsten Indikatorwerten unterteilt werden, und 100%, daß alle Kanten unterteilt werden.

2. Elementform

Ungünstige Elementformen müssen vermieden werden. Daher wird eine Kante - unabhängig vom Verfeinerungsindikator - auch dann unterteilt, wenn ihre Länge im Verhältnis zur Länge einer benachbarten Kante im Element zu groß ist. Dieses Verhältnis ist als Programmeingabe wählbar (z.B. 1:3). Entsprechend wird eine Kante dann *nicht* unterteilt, wenn ihre Länge zu kurz ist.

3. Grenzlänge

Unterhalb einer wählbaren absoluten Grenzlänge (z.B. 0,1m) wird eine Kante gar nicht unterteilt. Diese Einschränkung ist vorgesehen, damit nicht zu kleine Elemente entstehen. Wenn z.B. mit gerissenen Elementen gerechnet werden soll, wird der Riß an der Stelle mit der höchsten Spannungskonzentration beginnen. Am Ort der stärksten Verfeinerung entstehen die kleinsten Elemente. Am Rißanfang wären dann sehr kleine gerissene Elemente, im weiteren Verlauf des Risses größere. Besser ist aber, den gesamten Rißbereich mit ungefähr gleich großen Elementen nachzubilden.

4. Dreiecke

Damit möglichst wenig schiefwinklige Elemente entstehen, können Dreiecke gegenüber Vierecken um einen wählbaren Faktor (empfehlenswert ist 3-5) unempfindlicher gegen Unterteilung gemacht werden. Im Programm wird dann der Verfeinerungsindikator dieser Kanten entsprechend abgemindert.

5. Kantenrichtung

Unter 3.1.4 wurde gezeigt, daß Elemente mit dem Seitenverhältnis 1:2 besonders günstig für die Bestimmung der Spannungen sind, wenn diese Elemente quer zur wesentlichen Spannungsrichtung liegen. (Das sind beim horizontal liegenden Kragarm hochkant stehende Elemente). Deshalb kann eine Richtung bei der Verfeinerung mit einem Faktor bevorzugt werden.

6. Material

Kanten werden nicht unterteilt, wenn eines der beiden Elemente einem bestimmten, wählbaren Materialtyp angehört. Dies ist dazu gedacht, dem Anwender einen noch stärkeren Einfluß auf die Verfeinerung zu ermöglichen.

Diese Kriterien werden mit Fuzzy-Regeln (s.u.) kombiniert, um die Entscheidung zu fällen, ob eine Kante unterteilt wird oder nicht.

4.3.5 Kombination mittels Fuzzy-Logik

Die **Fuzzy-Logik** ermöglicht es, Regeln nicht nur nach dem Ja-Nein-Prinzip konventioneller Computerprogramme auszuwerten, sondern mit Hilfe unscharfer Beziehungen wie z.B. "viel", "wenig", "kaum" usw. Entscheidungen werden entsprechend bestimmter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht. Diese Logik kommt menschlichen Entscheidungsschemata sehr nahe. Die Grundlagen sind z.B. in ZEDLITZ (1992) anschaulich erläutert. Der Fuzzy-Logik wird in den nächsten Jahren eine stark steigende Verbreitung prognostiziert (siehe Abb.4.3.4).

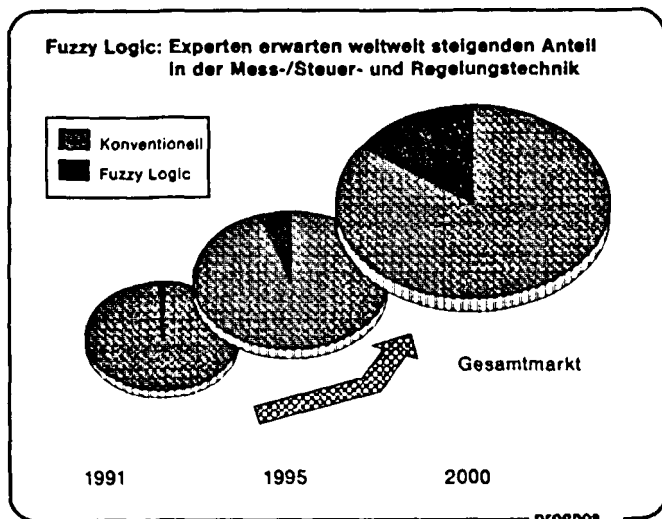


Abb.4.3.4: Prognostizierte Entwicklung der Fuzzy-Logik (aus IIR, 1992)

Die unter 4.3.4 genannten Kriterien werden nun zur Anwendung in der Fuzzy-Technik präzisiert. Sie können die Eigenschaft "viel (V)" oder "wenig (W)" haben:

Kürzel	Kriterium	Beschreibung
VI	Verfeinerungsindikator	Der Verfeinerungsindikator einer Kante liegt über der Grenze entsprechend dem angegebenen Prozentsatz
SVlg	Elementform (1)	Seitenverhältnis einer langen Kante (zur kurzen) ist günstig
SVku	Elementform (2)	Seitenverhältnis einer kurzen Kante (zur langen) ist günstig
GL	Grenzlänge	Kantenlänge liegt über Grenzkantenlänge
DR	Dreiecke	Kante gehört nicht zu einem Dreieck
XY	Kantenrichtung	Kante liegt in bevorzugter Richtung
MAT	Material	Kante gehört nicht zu Material, das ungeteilt bleiben soll

Tab.4.3.5: Fuzzy-Kriterien

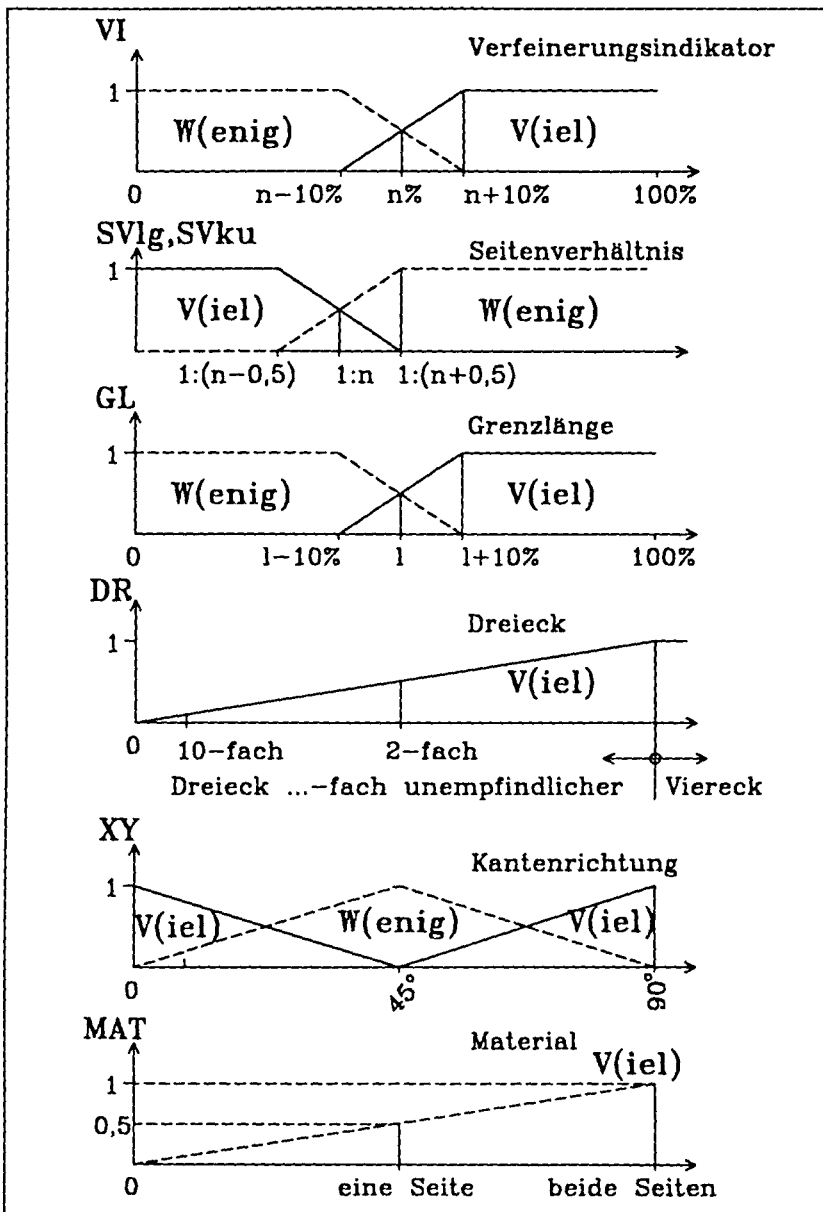


Abb.4.3.6: Fuzzy-Funktionen

Zu jedem Kriterium gibt es eine **Fuzzy-Funktion**, die aus einem Eingangswert einen **Fuzzy-Wert** zwischen 0 und 1 liefert. Die angesetzten Fuzzy-Funktionen für die 7 Kriterien (Tab. 4.3.5) sind abgebildet.

Die Fuzzy-Werte werden nun mit **Fuzzy-Regeln** ausgewertet. Die Regeln sagen etwas darüber aus, ob die betreffende Kante unterteilt werden sollte. 6 Dringlichkeitsstufen für die Unterteilung "U" werden wie folgt definiert:

WWW	sehr sehr wenig
WW	sehr wenig
W	wenig
V	viel
VV	sehr viel
VVV	sehr sehr viel

Tab.4.3.7: Dringlichkeitsstufen für die Unterteilung

Die folgenden Fuzzy-Regeln liefern für jede der 6 Dringlichkeitsstufen mindestens eine Aussage, nämlich einen neuen Fuzzywert. Gibt es mehr als eine Aussage zu einer Stufe, so wird später nur die Regel berücksichtigt, die den größten Fuzzywert ergibt. Die Regeln werden mit folgenden logischen Operatoren verknüpft:

AND ($\wedge$)	Minimum von zwei Fuzzywerten
OR ($\vee$)	Maximum von zwei Fuzzywerten
NOT ($\neg$)	1 minus Fuzzywert

Tab.4.3.8 Die logischen Operatoren in der Fuzzy-Logik

Regeln mit einem Kriterium:

if VI = V then U = V
if SVlg = $\neg$ V then U = V
if SVku = W then U = W
if GL = W then U = WW
if DR = $\neg$ V then U = W
if XY = $\neg$ V then U = W
if MAT = $\neg$ V then U = W

Tab.4.3.9a: Fuzzy-Regeln

Regeln mit zwei Kriterien:

if $SV_{ku} = W \wedge XY = \neg V$ then $U = WW$
if $SV_{ku} = W \wedge MAT = W$ then $U = WW$
if $SV_{ku} = W \wedge DR = W$ then $U = WW$
if $XY = \neg V \wedge MAT = W$ then $U = WW$
if $XY = \neg V \wedge DR = W$ then $U = WW$
if $MAT = W \wedge DR = W$ then $U = WW$
if $VI = V \wedge SV_{lg} = \neg V$ then $U = VV$
if $VI = V \wedge XY = V$ then $U = VV$

Regeln mit drei oder mehr Kriterien:

if $VI = V \wedge SV_{lg} = \neg V \wedge XY = V$ then $U = VVV$
if $DR = W \wedge SV_{ku} = W \wedge XY = \neg V \wedge MAT = W$ then $U = WWW$
if $GL = W \wedge (SV_{ku} = W \vee XY = \neg V \vee DR = W \vee MAT = W)$ then $U = WWW$

Tab.4.3.9b: Fuzzy-Regeln

Somit erhält man für jede Dringlichkeitsstufe einen Fuzzywert. Diese werden nun auf einer Zahlengeraden aufgetragen. Im letzten Schritt wird der Schwerpunkt der sich ergebenden Flächen (oder Balken) berechnet. Liegt der Schwerpunkt rechts von der Mitte, wird die Kante unterteilt; liegt er links von der Mitte, so wird sie nicht unterteilt.

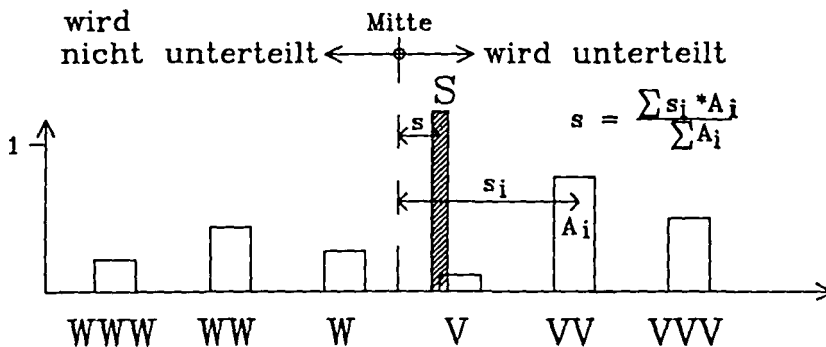


Abb.4.3.10: Auswertung der Fuzzywerte für die Unterteilung einer Kante

Kanten werden unterteilt, indem in der Mitte ein neuer Knoten eingeführt wird. Als Resultat entstehen Elemente mit einer bis drei (bei Dreiecken) bzw. einer bis vier (bei Vierecken) zu unterteilenden Kanten. In Abhängigkeit davon und von der geometrischen Form des Ausgangselements wird es in Unterelemente aufgeteilt. In Abb.4.3.11 ist dargestellt, welche Aufteilungsmöglichkeiten vorgesehen sind. Gewählt wird diejenige Aufteilung, die jeweils die günstigsten Elementformen ergibt.

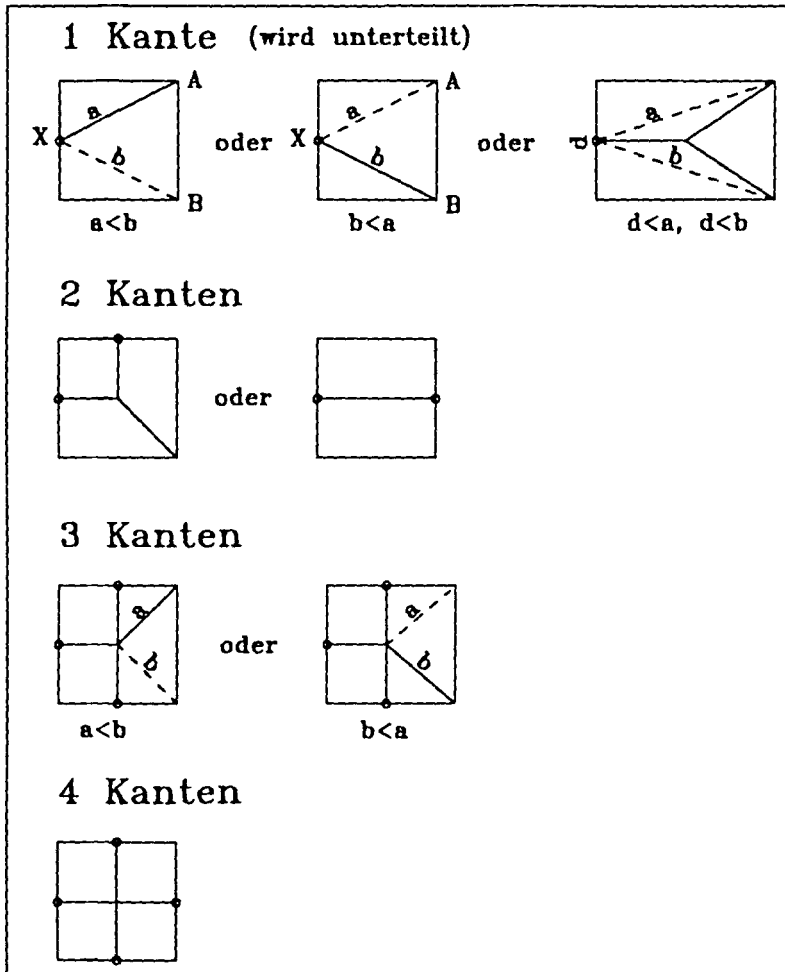


Abb.4.3.11: Teilungsmöglichkeiten für Vierecke

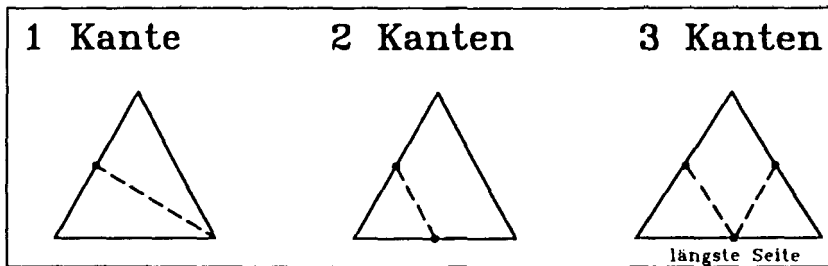


Abb.4.3.12: Teilungsmöglichkeiten für Dreiecke

Vierecke

1 Kante: Im Normalfall entstehen ein Dreieck und ein Viereck mit der kürzeren der beiden Verbindungslinien a und b. Sind a und b gleich lang, wird X mit derjenigen Ecke (A oder B) verbunden, die dem Gesamtschwerpunkt der Diskretisierung am nächsten liegt. Ist die unterteilte Kante d wesentlich kürzer als die Verbindungen a und b, wird ein neuer Mittenknoten eingefügt und es entstehen zwei Vierecke und ein Dreieck.

Zusätzlich gibt es noch folgende Regel: Ist die gegenüberliegende Kante ein Außenrand der Diskretisierung, wird sie ebenfalls unterteilt und es entstehen zwei Vierecke.

2 benachbarte Kanten:

Es wird immer so aufgeteilt, daß ein zusätzlicher Knoten und drei neue Vierecke entstehen.

2 gegenüberliegende Kanten:

Es wird immer so aufgeteilt, daß zwei neue Vierecke entstehen.

3 Kanten:

Es entstehen drei Vierecke und ein Dreieck. Die Lage des Dreiecks richtet sich nach der kürzeren Länge der Linien a und b und bei gleichen Längen nach dem Gesamtschwerpunkt (wie "1 Kante").

4 Kanten:

Es entstehen immer ein zusätzlicher Mittenknoten und vier Vierecke.

Dreiecke1 Kante:

Der neue Knoten wird immer mit dem gegenüberliegenden Eckknoten verbunden.

2 Kanten:

Die beiden Knoten werden so verbunden, daß ein Dreieck und ein Viereck entstehen.

3 Kanten:

Das Element wird so aufgeteilt, daß ein Viereck und zwei Dreiecke entstehen. Das Viereck liegt dabei so, daß seine Ecke auf die längste der Dreieckseiten trifft.

4.3.6 Datenaufbereitung

Nach der Unterteilung aller Elemente ist ein neuer Datensatz entstanden, der formal wie der Ausgangsdatsatz aussieht. Er hat lediglich mehr Knoten und Elemente. Aus mehreren Gründen ist die neue Diskretisierung nicht optimal. Daher ist vor Neuberechnung und nächstem Verfeinerungsschritt zunächst eine optimierende Aufbereitung der Diskretisierungsdaten nötig.

1. Durch die Aufteilung sind vermutlich einige zusätzliche Dreiecke entstanden. Vierecke sind aber Dreiecken vorzuziehen, wie in Kapitel 3.1.3 gezeigt wurde. Deshalb werden alle Dreiecke daraufhin überprüft, ob sie angrenzende weitere Dreiecke haben. Wenn ja, wird anhand von Formkontrollen festgestellt, aus welchem der maximal drei möglichen Dreieckspaare sich das beste Viereck herstellen läßt. Dies ist dann möglich, wenn das neue Viereck konkav ist (alle Innenwinkel deutlich kleiner als 180°), und wenn Formfaktor und Determinantenfaktor größer als die wählbaren Mindestwerte sind (z.B. 0,8 bzw. 0,6). Außerdem muß mindestens eine Kante des neuen Vierecks parallel oder fast parallel zu einer der beiden Koordinatenachsen sein. Diese Bedingung bewirkt, daß ein weniger unregelmäßiges Netz entsteht. - Zur Ergänzung sei gesagt, daß HÖTTGES (1992) für dieses Problem (Umwandlung von zwei Dreiecken in ein Viereck) als Formkontrolle den Quotienten verwendet, der die Fläche des Vierecks auf die mittlere Fläche der auf den vier Seiten zu bildenden Quadrate bezieht.

Dreiecke, die wegen dieser Bedingungen bestehen bleiben müssen, können möglicherweise im nächsten Schritt besser aufgeteilt werden, nachdem Viereck-Dreieck-Paare geändert wurden (siehe 2.).

2. Die Elementformen werden wahrscheinlich ungünstig sein, weil zu große oder zu kleine Innenwinkel und Seitenverhältnisse entstanden sind. Deshalb werden alle Vierecke daraufhin überprüft, ob sie ein angrenzendes Dreieck haben. Wenn ja, wird festgestellt, ob sich das Elementepaar Viereck-Dreieck besser aufteilen läßt. Es gibt fünf verschiedene Aufteilungsmöglichkeiten (Abb.4.3.13).

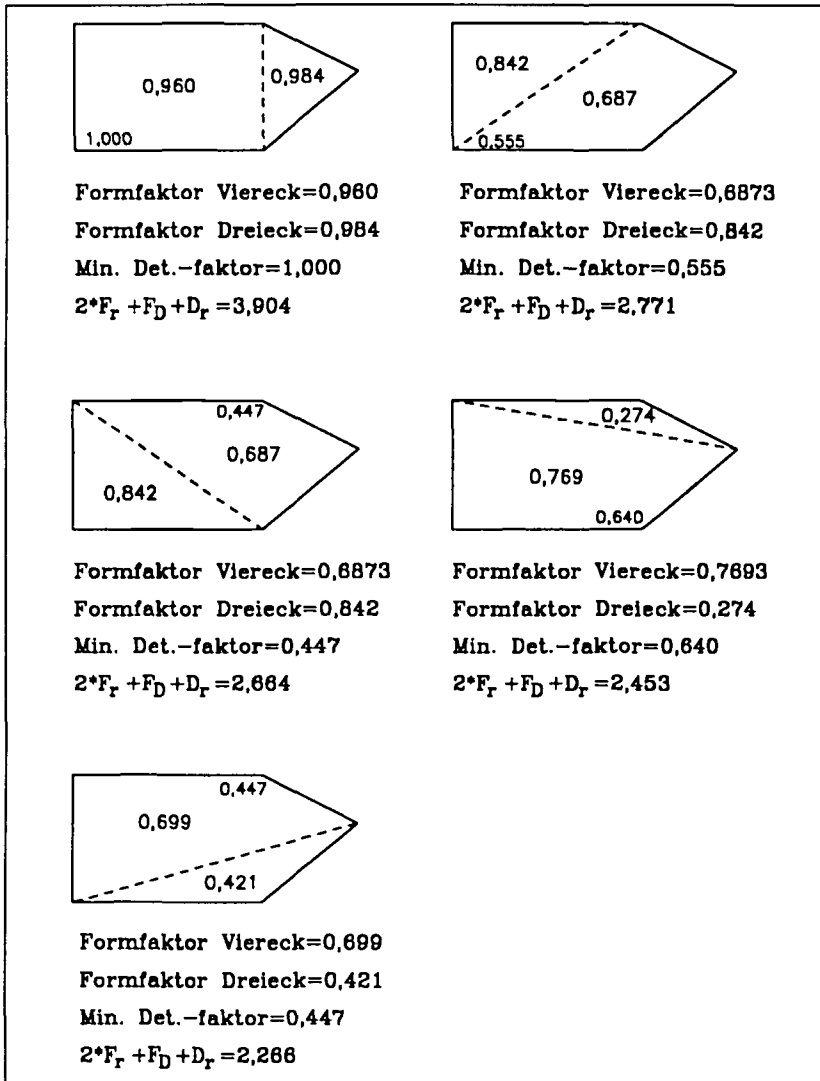


Abb.4.3.13: Aufteilungsmöglichkeiten für ein Viereck-Dreieck-Paar

Durch Ausprobieren an realistischen FE-Netzen wurde gefunden, daß die Elementformen am günstigsten werden, wenn eine bestimmte Kombination aus den Formfaktoren F_r , F_D und dem Determinantenfaktor D_r (Kap. 4.1) maximal ist, nämlich:

$$\text{Max}(2 \cdot F_r + F_D + D_r) \quad (4.16)$$

mit:

F_r = Formfaktor Viereck ($0 < F_r < 1$)

F_D = Formfaktor Dreieck ($0 < F_D < 1$)

D_r = Determinantenfaktor Viereck ($0 < D_r < 1$)

Das allein genügt noch nicht: Die Elemente sollten auch möglichst regelmäßig sein. Das wird erreicht, wenn möglichst viele Kanten parallel oder fast parallel zu den Koordinatenachsen liegen. Deren Anzahl wird durch den "Kantenfaktor" ausgedrückt, der aus den Steigungen der 7 Kanten von Viereck und Dreieck ermittelt wird. Für eine parallele Kante wird eine 1 addiert und für schräge Kanten ihre Steigung n bzw. $1/n$, bezogen auf die Steigung von $n_0=10:1$ (Kanten mit der Steigung von mindestens 10:1 gelten als parallel):

$$K_n = \sum_{i=1}^7 K_i \quad (4.17)$$

mit $0 < K_i < 1$ und:

$K_i = 1,0$ für eine Kante parallel zur X- oder Y-Achse

$K_i = \frac{n}{n_0}$ für eine schräge Kante, wenn sie steiler als 45° ist

$K_i = \frac{1/n}{n_0}$ für eine schräge Kante, wenn sie flacher als 45° ist

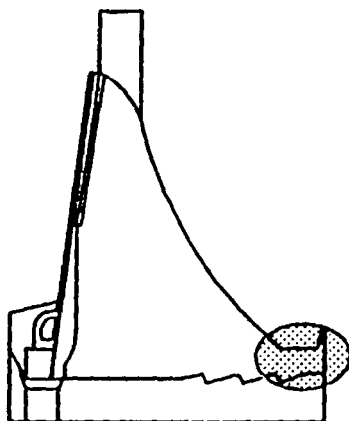
Da bei jeder Elementkombination Viereck-Dreieck nur die gemeinsame Kante unterschiedlich ist, ist sie allein maßgebend.

Die Kombination von Formfaktoren, Determinantenfaktor und Kantenfaktor wird definiert als "Gesamter Formfaktor":

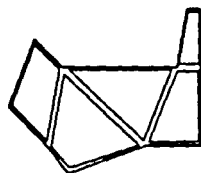
$$F_G = 2 \cdot F_r + F_D + D_r + K_n \quad (4.18)$$

mit:

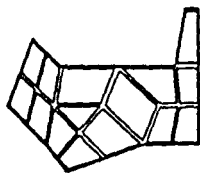
K_n = Kantenfaktor



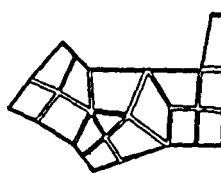
ohne Kantenfaktor:



a_0

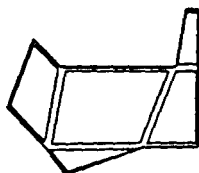


a_1

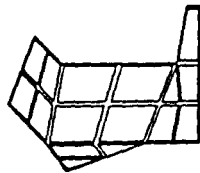


a_2

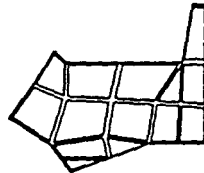
mit Kantenfaktor:



b_0



b_1



b_2

Abb. 4.3.14: Netzformen ohne und mit Kantenfaktor

Ein Beispiel soll zeigen, wie mit dem Kantenfaktor eine günstigere Netzform als ohne ihn erzeugt wird: Abb.4.3.14 zeigt den luftseitigen Mauerfuß einer Staumauer mit dem Tosbecken. Oben (Reihe a_0 bis a_1) sieht man den Netzausschnitt in zwei Verfeinerungsschritten ohne Berücksichtigung der Parallelität der Kanten zu den Koordinatenachsen. Hier sind viele schräge Elementkanten, die später u.a. dazu führen, daß die Isolinien der Spannungen nicht regelmäßig verlaufen.

Unten (Reihe b_0 bis b_1) wurde die Elementaufteilung bevorzugt, durch die das mittlere Elementpaar Viereck-Dreieck durch eine horizontale Kante unterteilt wurde. Das Ergebnis ist eine wesentlich günstigere Netzform, was bei noch weiterer Verfeinerung besonders deutlich wird. In der rechten Spalte (a_2/b_2) sind die Netzausschnitte abgebildet, die aus den vorherigen (a_1/b_1) durch nachträgliche Netzglättung entstehen. Daraus resultieren zwar wieder geneigte Kanten, aber das Netz auf der rechten Seite bleibt günstiger.

Die Schritte 1 und 2 werden mehrmals nacheinander ausgeführt, solange bis die Elementaufteilung sich nicht mehr ändert.

3. Die Größenverhältnisse zwischen benachbarten Elementen sind wahrscheinlich ungünstig, weil große Elemente an kleine grenzen. Die Größenverhältnisse der Elemente können durch "Netzglättung" verbessert werden (siehe Abb.4.1.1). Das hat allerdings den Nachteil, daß die Verfeinerung teilweise wieder aufgehoben wird. Knoten werden nämlich bei der Glättung aus Zonen größerer Verfeinerung in Zonen geringerer Verfeinerung verschoben. In Kap. 4.3.8 wird untersucht, ob die Glättung zwischen der Verfeinerungsschritten vorteilhaft ist oder nicht.
4. Die Nummern benachbarter Knoten sind mit Sicherheit stark unterschiedlich, so daß die Bandbreite des Gleichungssystems extrem schlecht wird. Die Knoten müssen durch Bandbreitenoptimierung neu numeriert werden (siehe Kap.4.2). Es hat sich gezeigt, daß die Elementstruktur bei ungünstiger Verfeinerung so unregelmäßig werden kann, daß das Bandbreitenoptimierungsprogramm (wie das hier verwendete SBOP) eine Lösung nicht mehr findet. Auch aus diesem Grunde ist es vorteilhaft, die Verfeinerungsschritte so zu steuern, daß regelmäßige Element- und Netzformen entstehen.

4.3.7 Geschwindigkeit der Verfeinerung

Unter 4.3.4 wurde erwähnt, daß der Anteil der pro Schritt zu unterteilenden Kanten wählbar ist. Dieser Anteil entscheidet auch darüber, wie viele Verfeinerungsschritte nötig sind, um eine bestimmte, ausreichende Knotenzahl zu erreichen. Bei einem großen Anteil (z.B. 100%) ist die endgültige Knotenzahl schnell erreicht (Kragarm: 5 Schritte von 8 Knoten bis 3201 Knoten). Dabei entsteht ein sehr regelmäßiges Netz, das aber nirgendwo verfeinert ist.

Bei einem kleinen Anteil (z.B. 10%) bekommt man sehr stark verfeinerte Zonen neben Zonen, die überhaupt nicht verfeinert werden. Das Resultat ist ein sehr unregelmäßiges Netz mit ungleichmäßigen Elementen und vielen Dreiecken. Die Bandbreiten werden sehr schlecht und große Rechenzeiten sind die Folge. Bis das endgültige Netz erreicht ist, dauert es sehr lange. Auch die Ergebnissen sind unsymmetrisch und unregelmäßig. Die Genauigkeit ist gering.

Besser ist - unter Berücksichtigung von Aufwand *und* Genauigkeit - die Verfeinerung mit variablem Anteil. Dabei wird zuerst mit einem großen Prozentsatz verfeinert (100%), und bei weiteren Schritten mit kleineren. Folgende Schrittfolgen sind z.B. sinnvoll (Tab.4.3.15):

Schritt	Reihe 1	Reihe 2	Reihe 3	Reihe 4
1	100%	100%	100%	100%
2	100%	100%	100%	100%
3	90%	50%	100%	100%
4	80%	10%	100%	50%
5	50%	5%	50%	100%
6	20%	3%	10%	50%
7	10%	1%	5%	
8	5%		3%	
9	3%			

Tab.4.3.15: Beispielhafte Anteile der verfeinerten Elementkanten pro Verfeinerungsschritt

Ein Optimum für den Prozentanteil in jedem Schritt muß gefunden werden. Abb.4.3.16 zeigt die Konvergenz der Absenkung am Ende des Kragarms bei verschiedenen konstanten Anteilen pro Verfeinerungsschritt und bei Verfeinerung mit variablem Anteil. Im letzteren Falle wurde zuerst teilweise mehrmals mit 100% verfeinert, danach mit sinkendem Prozentsatz entsprechend Tab.4.3.15 und Abb.4.3.16. Dreiecke wurden mit dem Faktor 5 unempfindlicher gegen Unterteilung gemacht. Die Horizontalrichtung wird bei der Verfeinerung bevorzugt (hier um den Faktor 2), da bei einem horizontal liegenden Kragarm hochkant stehende Elemente am günstigsten sind.

Außerdem wurde die Diskretisierung nach jedem Verfeinerungsschritt nach zwei Kriterien verbessert:

1. Doppeldreiecke werden, falls aufgrund ihrer Form möglich, in ein Viereck umgewandelt (siehe Kap. 4.3.6-1).
2. Bei jedem Elementepaar Viereck-Dreieck wird die günstigste Aufteilung hinsichtlich der Form beider Elemente gesucht (d.h. die Aufteilung mit dem günstigsten Gesamtformfaktor wird gewählt, siehe Kap. 4.3.6-2 und Abb. 4.3.13).

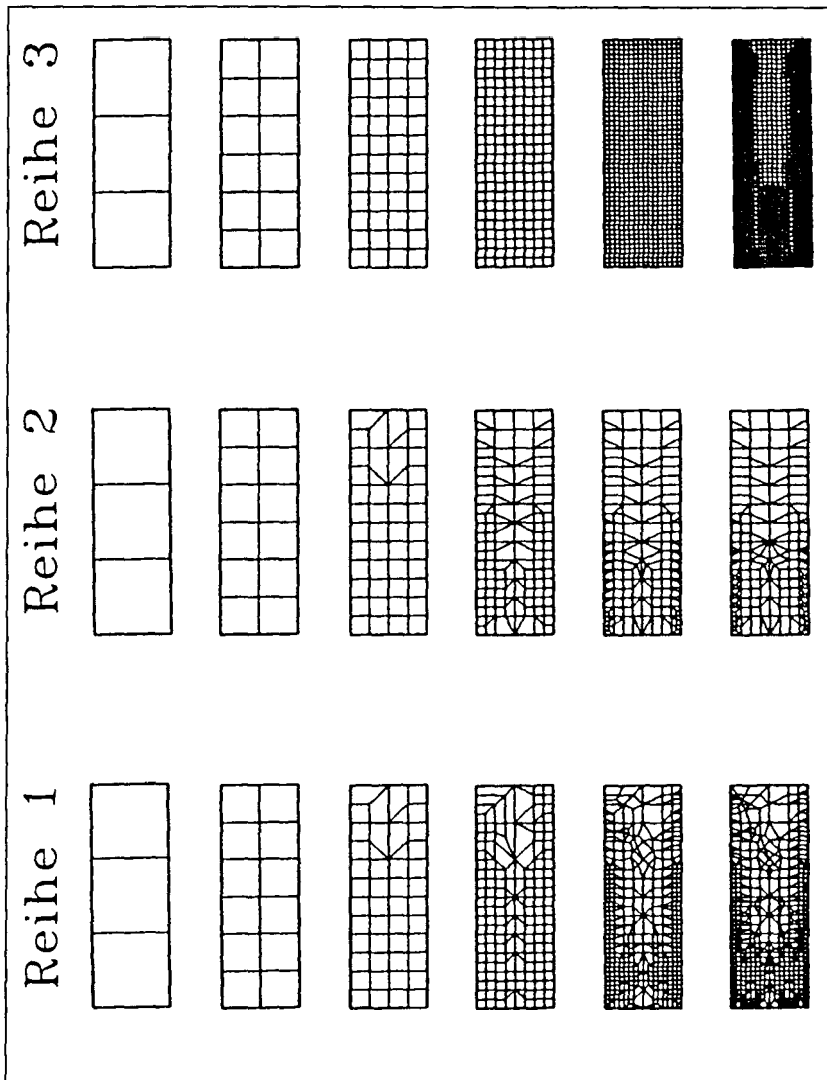


Abb.4.3.16: FE-Netze für drei Verfeinerungsfolgen

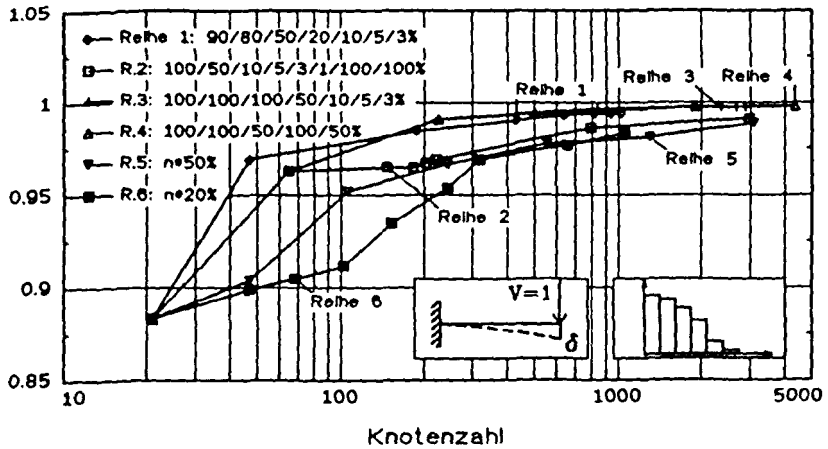
δ 

Abb.4.3.17: Konvergenz der dimensionslosen Absenkung δ bei verschiedenen Geschwindigkeiten der Verfeinerung (Balkentheorie=1)

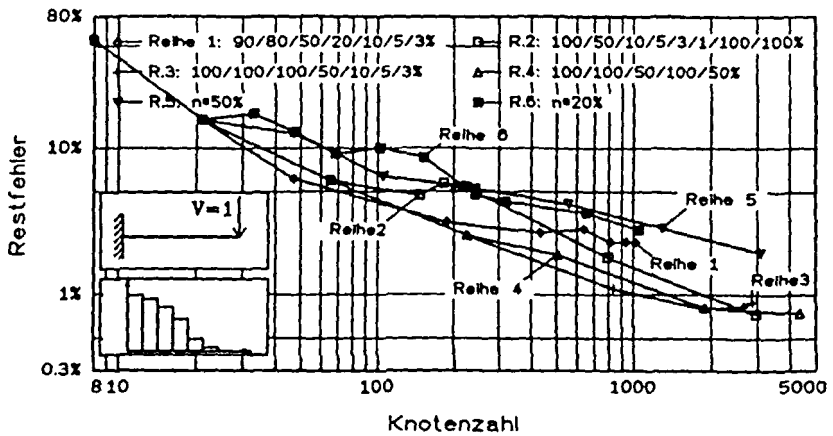


Abb.4.3.18: Konvergenz des Restfehlers bei verschiedenen Geschwindigkeiten der Verfeinerung

Die Genauigkeiten von Absenkung, Spannungen, Fehler und Energie verändern sich bei diesen unterschiedlichen Geschwindigkeiten der Verfeinerung. Aus Abb.4.3.17 erkennt man, daß die Absenkung am Ende des Kragarms bei Reihe 3 und 4 am besten gegen den theoretischen Grenzwert konvergiert. Dies sind die Reihen mit anfänglicher mehrmaliger Verfeinerung um 100% und einigen weiteren Schritten mit kleineren Prozentzahlen. Diese Verfeinerungsstrategie bewirkt, daß ein regelmäßiges Netz entsteht, das nur wenige Übergangselemente mit schiefwinkligen Kanten enthält. Insbesondere ist es vorteilhaft, wenn solche Übergangselemente nicht noch einmal unterteilt werden.

Auch der Verlauf des Restfehlers (Abb.4.3.18) zeigt, daß diese Strategie die beste ist. Bei Reihe 3 und 4 wird der Fehler am geringsten. Auch Reihe 2 kommt noch unter die 1%-Marke, aber erst bei 3000 Knoten.

Die Spannungen und die Energie im Kragarm in Abhängigkeit von verschiedenen Geschwindigkeiten der Verfeinerung haben einen Verlauf, der die Aussagen für Abb.4.3.17 und 4.3.18 bestätigt und sind deswegen nicht dargestellt.

Eine weitere Genauigkeitssteigerung ergibt sich, wenn man die Ausgangsdiskretisierung günstig wählt. Wie oben gezeigt wurde, ist beim Kragarm eine Diskretisierung mit hochkant stehenden Elementen (Seitenverhältnis 2:1) am günstigsten. Hier wirkt die maßgebende Belastung bzw. Spannung quer zur schmalen Seite (horizontal).

Feste Regeln für die Wahl der genannten Steuerungsparameter lassen sich nicht aufstellen; es hängt von der Problemstellung und der Erfahrung des Anwenders ab, wie er die Parameter einsetzt, um ein optimales FE-Netz zu generieren.

4.3.8 Verfeinerung mit und ohne Glättung

Die Glättung der Diskretisierung zwischen den einzelnen Verfeinerungsschritten führt dazu, daß die Elemente schiefwinklig werden und dadurch das FE-Netz unregelmäßig. Es hat sich auch gezeigt, daß sich dann oft Knotennumerierungen mit kleiner Bandbreite nicht finden lassen. Auch wird der Verlauf der Spannungen unregelmäßig. Erst das endgültige FE-Netz nach dem letzten Verfeinerungsschritt sollte daher geglättet werden, wie sich aus Erfahrungen an einer Vielzahl von FE-Berechnungen erwiesen hat. Ungleichmäßige Elementgrößen werden so angeglichen, während das Netz insgesamt relativ

gleichmäßig bleibt. Ein nach dem letzten Verfeinerungsschritt geglättetes Netz bewirkt so gut wie immer eine Genauigkeitssteigerung gegenüber dem ungeglätteten Netz.

4.4 Spannungsberechnung

Die Genauigkeit, ausgedrückt durch den Restfehler, wird auch mit Hilfe der Spannungen an den Knoten berechnet. Deshalb ist hier eine Betrachtung über die Art der Spannungsberechnung notwendig.

Die Spannungen $\{\sigma\}$ werden elementweise aus den Knotenverschiebungen $\{d\}$ berechnet:

$$\{\sigma\} = [D] \cdot [B] \cdot \{d\} \quad (4.19)$$

Durch Einsetzen der elementbezogenen lokalen Koordinaten r, s in die B-Matrix kann bei Vierecken die Spannung an jedem Punkt des Elements ausgerechnet werden. Bei Bedarf lassen sich auch nachträglich aus den Knotenwerten X_i alle benötigten Spannungen mit folgender Formel ableiten:

$$X = \sum_{i=1}^4 N_i \cdot X_i \quad (4.20)$$

mit:

N_i = Formfunktionen

X_i = Werte (z.B. $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) an den Knotenpunkten 1-4

Ausgeschrieben ergibt sich z.B. bei einfachen Vierecken: (4.21)

$$X(r,s) = \frac{1}{4} \cdot (1+r) \cdot (1+s) \cdot X_1 + \frac{1}{4} \cdot (1-r) \cdot (1+s) \cdot X_2 + \frac{1}{4} \cdot (1-r) \cdot (1-s) \cdot X_3 + \frac{1}{4} \cdot (1+r) \cdot (1-s) \cdot X_4$$

r und s sind die elementbezogenen Koordinaten und liegen zwischen -1 und 1.

Für ein lineares Element (hier das Element an der Einspannstelle eines Kragarms) kann der Spannungsverlauf z.B. so aussehen (Abb.4.4.1):

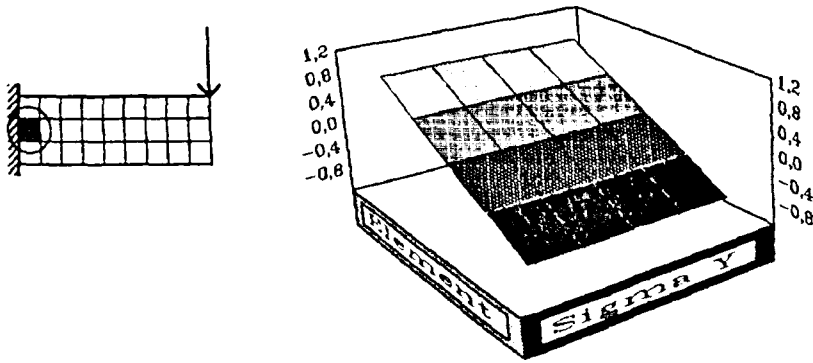


Abb.4.4.1: Spannungsverlauf in einem beliebigen Element

Die Spannungen bilden eine Ebene mit verschiedenen Neigungen in jeder Richtung über dem Element, für eine Richtung ist die Neigung aber an jedem Punkt gleich.

Es ist nun zu entscheiden, für welchen Ort man die Spannungen angeben bzw. weiterverarbeiten soll. In Frage kommen für jedes Viereckelement:

- die Schwerpunktspannung (Mittenspannung)
- die Gaußpunktspannungen an den vier Stützstellen
- die Knotenspannungen an den vier Eckpunkten

(Bei linearen Dreiecken ist die Spannung im ganzen Element gleich; vgl. Kap.3.2.2).

Die Wahl dieses Ortes kann entscheidende Bedeutung dafür haben, ob die Spannungen an einer Bauwerksaußenwand richtig erfasst werden oder nicht. Von SALVETER (1989), Abb.4.4.2 - 4.4.4, wird für einen angenommenen Spannungsverlauf veranschaulicht, welche Spannungen, die aus einer fiktiven Belastung resultieren, vom Programm ausgegeben werden, je nachdem, an welchem Ort sie berechnet werden. Während die Schwerpunktspannung (Mittenspannung) am Rand noch im Druckbereich ist, ist die Stützpunktspannung (Gaußpunktspannung) Null und nur die Eckpunktspannung (Knotenspannung) zeigt Zugspannungen an, weil nur sehr nahe am Rand Zugspannungen vorhanden sind.

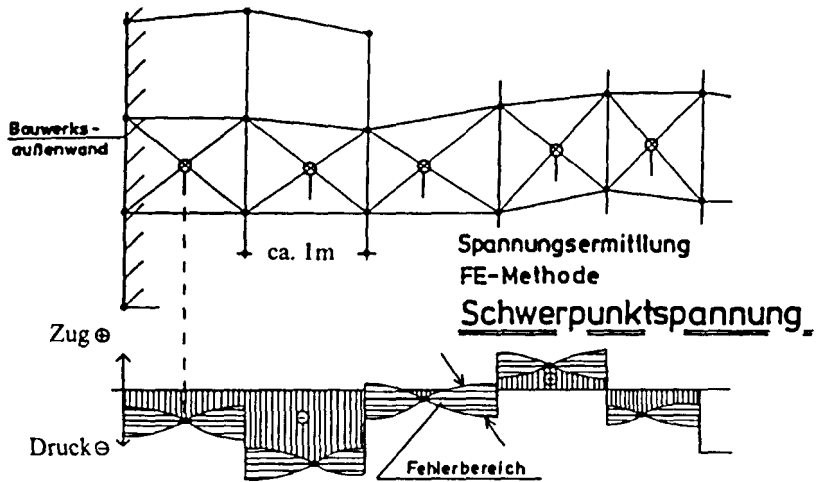


Abb.4.4.2: Spannungsermittlung FE-Methode: Schwerpunktspannung (SALVETER, 1989)

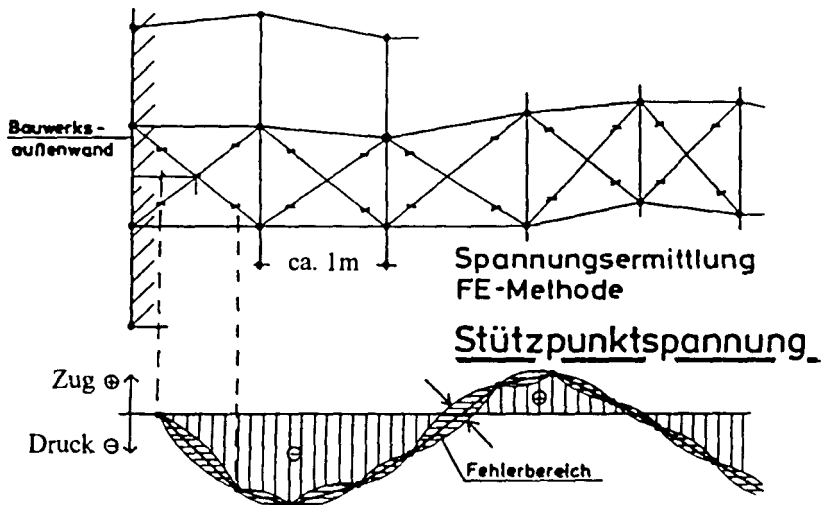


Abb.4.4.3: Spannungsermittlung FE-Methode: Stützpunktspannung (SALVETER, 1989)

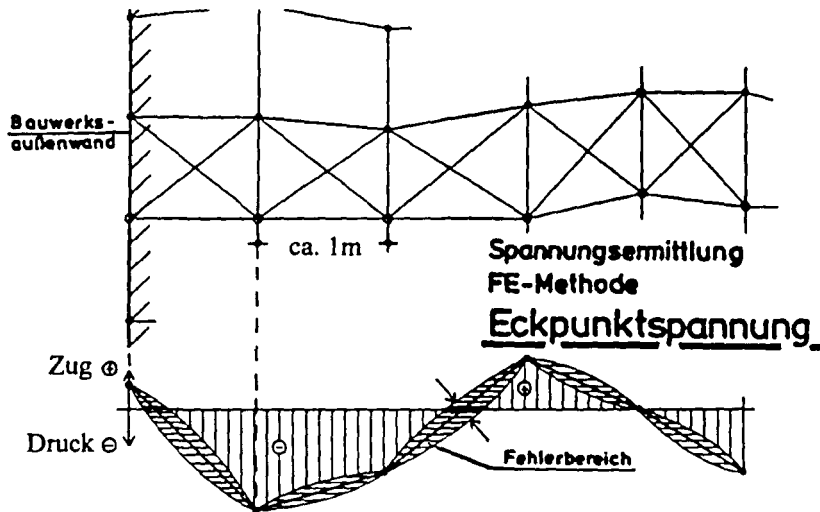


Abb.4.4.4: Spannungsermittlung FE-Methode: Eckpunktspannung (SALVETER, 1989)

Da man die Spannungen elementweise berechnet, kann man sie auch elementweise darstellen und erhält dann Sprünge an den Elementkanten oder Farbunterschiede bei Farbdarstellung, weil die Ergebnisse von Element zu Element an der gemeinsamen Kante etwas voneinander abweichen. Diese Abweichung ist, wie in Kap.1.2.2 bereits angesprochen, auch ein Maß für die Genauigkeit der Berechnung (TISSERA, MÜLLER, 1990).

Will man die Spannungen aber nicht elementweise darstellen, sondern kontinuierlich, so benötigt man die Spannungen an den Knoten. Dafür müssen die Spannungen aus den benachbarten Elementen gemittelt werden. Für diese Mittelung kommen u.a. folgende Mittelungsvorschriften in Frage:

- arithmetische Mittelung
- Wichtung mit der Größe des Elements bzw. mit der Determinante der Jacobi-Matrix
- Wichtung mit der Knotenenergie

Die arithmetische Mittelung der Spannungen am Knoten aus allen benachbarten Elementen ist selbstverständlich die einfachste, aber auch die unbefriedigendste

Möglichkeit. Kleine Elemente werden überbewertet, große unterbewertet, weil sie unabhängig von ihrer Größe alle gleich stark in den Mittelwert eingehen würden. Deshalb ist eine Wichtung mit der Determinante der Jacobi-Matrix besser. Sie entspricht ungefähr einem Viertel der Fläche eines Elements; bei einem Quadrat, Rechteck oder Parallelogramm genau der Viertelfläche. Unberücksichtigt bleibt dann aber noch, daß Elemente mit kleiner Verformungsenergie (z.B. niedriger E-Modul) weniger stark gewichtet sein sollten (z.B. Lehmschicht, Anschüttung, Intzekeil gegenüber Beton und Bruchsteinmauerwerk). Daher ist eine Wichtung der Spannungen mit der Energie der benachbarten Elemente am vorteilhaftesten. Die Abb.4.4.5 - 4.4.7 zeigen die Spannungen σ_x an einem Kragarm für Mitten-, Gaußpunkt- und Knotenspannung bei verschiedenen Wichtungen. (Die arithmetische Mittelung ist nicht dargestellt, weil sie in diesem Fall von gleichgroßen Quadratelementen mit der Wichtung mit der Determinante identisch ist).

Für den linken und rechten Drittelpunkt des Kragarms zeigt sich, daß σ_x in allen Fällen gegen den analytischen Wert nach der Balkentheorie konvergiert, aber nur dann ausreichend schnell, wenn die Knotenspannungen betrachtet werden. Bei den Gaußpunktspannungen und erst recht bei den Mittenspannungen bleibt selbst bei sehr großen Knotenzahlen bzw. Freiheitsgraden noch eine nennenswerte Abweichung vom analytischen Ergebnis.

An der Einspannungsstelle konvergiert die Spannung nicht. Wie an anderer Stelle genauer erläutert (Kap.5.4.2), liegt das an der Singularität dieses Punktes. Eine Wichtung ist hier ohne Einfluß, weil jeweils nur ein einziges Element den Eckknoten enthält.

Alle Elemente des Kragarms waren bei den vorstehenden Berechnungen gleich groß. Bei unterschiedlicher Größe wäre der Einfluß der Wichtung noch größer (und wichtiger).

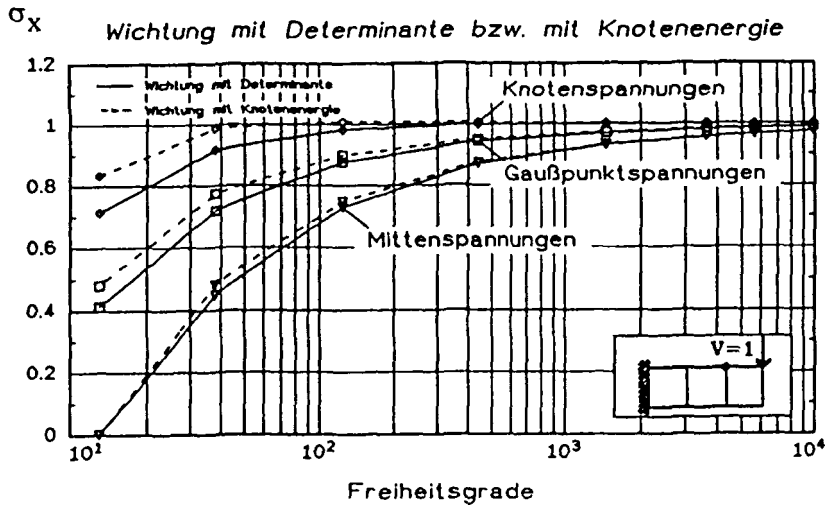


Abb.4.4.5: Dimensionslose Spannung σ_x im rechten Drittelpunkt eines Kragarms bei verschiedenen Berechnungsarten (Balkentheorie=1)

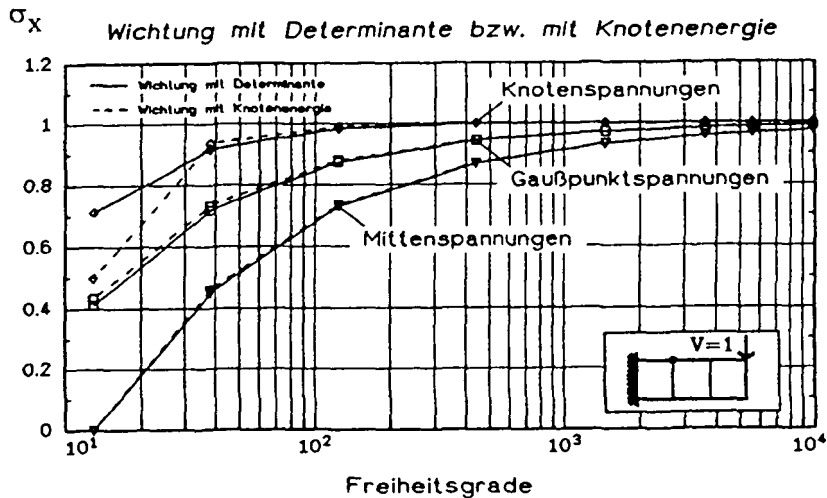


Abb.4.4.6: Dimensionslose Spannung σ_x im linken Drittelpunkt eines Kragarms bei verschiedenen Berechnungsarten (Balkentheorie=1)

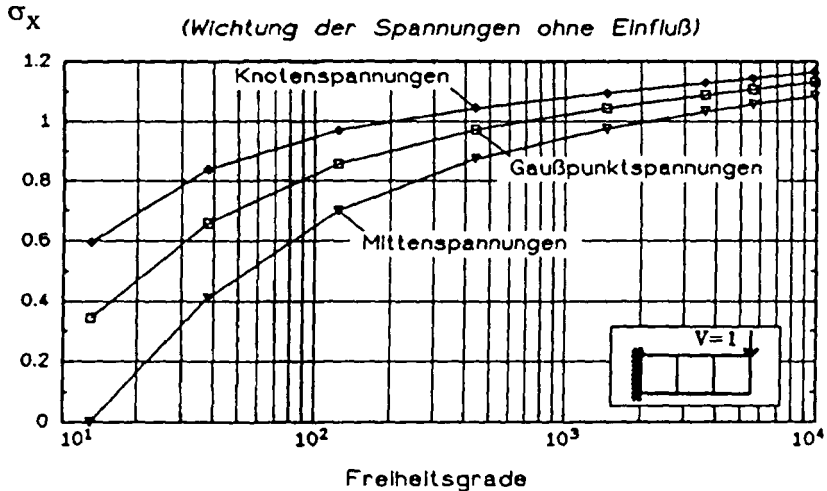


Abb.4.4.7: Dimensionslose Spannung σ_x an der Einspannstelle eines Kragarms bei verschiedenen Berechnungsarten (Balkentheorie=1)

Wichtung und Ort der Spannungsberechnung haben auch einen Einfluß auf die Genauigkeit des Gleichgewichts zwischen Spannungen und Kräften. In einem beliebigen Schnitt durch ein Bauteil muß das Gleichgewicht ΣH und ΣV möglichst genau erfüllt sein. Exakte Übereinstimmung läßt sich bei dieser Kontrolle nie nachweisen. An der Diskretisierung einer Staumauer mit Dreieckprofil und unterschiedlich großen Elementen wurde diese Kontrolle durchgeführt. Der Fehler bei ΣH und ΣV ist in den Abb.4.4.8 und 4.4.9 dargestellt; zusätzlich in Abb.4.4.10 der gesamte Restfehler der Berechnung.

Der Fehler bei ΣH ist deutlich am geringsten bei den mit der Energie gewichteten Knotenspannungen. Bei ΣV ist der Fehler bei arithmetischer Wichtung und bei Wichtung mit der Determinante am kleinsten, aber die Fehlerbeträge sind hier insgesamt viel kleiner (0,2-2,0%) als bei ΣH (4,1-10,6%). Der Restfehler (Abb.4.4.10) nimmt allgemein bei Wichtung mit der Energie ab. Am kleinsten ist er verständlicherweise bei den Gaußpunktspannungen, den Stützstellen der Integration. Fast genauso klein ist der Restfehler bei den Knotenspannungen, und am größten bei den Mittenspannungen.

Es läßt sich zusammenfassen, daß die direkt am Knoten ermittelten Spannungen für den Spannungsverlauf das genaueste Ergebnis liefern, wenn sie zwischen den benachbarten

Elementen mit der Knotenenergie gewichtet werden, während der Restfehler noch geringfügig besser wird, wenn die Gaußpunktspannungen herangezogen werden.

Leider kann jede Wichtung die Spannungen an Rändern weniger als im Innern von Bauteilen verbessern und in Ecken gar nicht, weil am Rand weniger Elemente zur Verfügung stehen und an einer Ecke nur eines. Auch werden die Spannungen nur parallel zum Rand "bearbeitet", nicht aber senkrecht zu dieser Richtung, die meist die interessantere ist. Dieser Problematik kann man nur mit einer alternativen Spannungsberechnung begegnen, wie sie z.B. von AHMAD (1974) beschrieben und von KLÖHN (1982) verfeinert wurde. Dort werden die Spannungen nicht wie üblich aus den Verschiebungen abgeleitet, sondern elementweise aus den fiktiven Knotenkräften und Gleichgewichtsbeziehungen, die zu einem neuen Gleichungssystem führen.

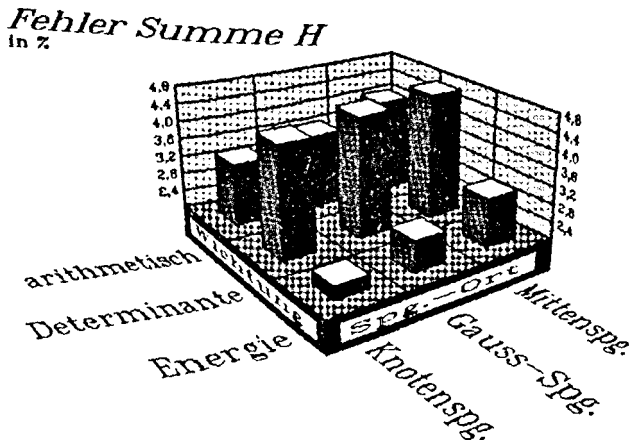


Abb. 4.4.8: Gleichgewichtskontrolle ΣH in Abh. von Wichtung und Ort der Spannungen

Fehler Summe V in %

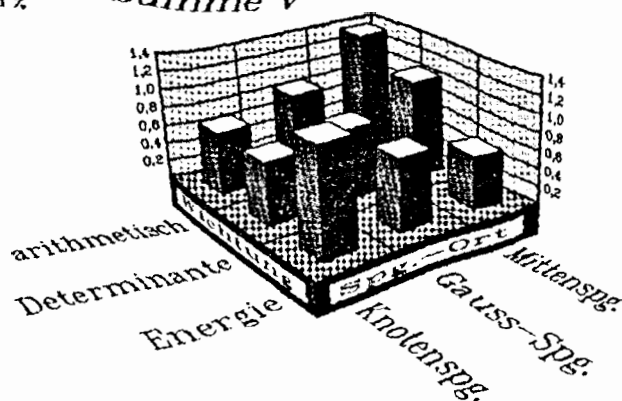


Abb.4.4.9: Gleichgewichtskontrolle ΣV in Abh. von Wichtung und Ort der Spannungen

Restfehler in %

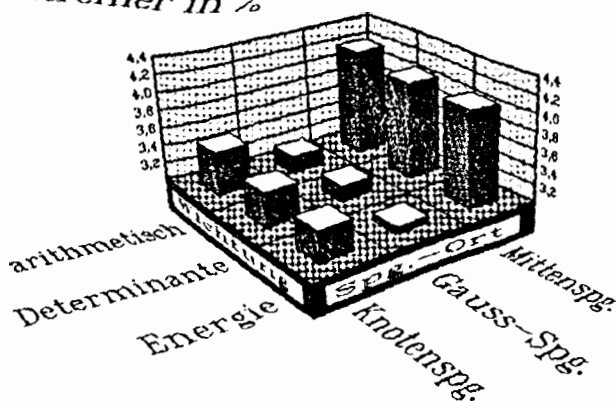


Abb.4.4.10: Restfehler in Abh. von Wichtung und Ort der Spannungen

4.5 Rechengenauigkeit

Reelle Zahlen können im Computer nur mit einer bestimmten Anzahl von Stellen gespeichert werden. Standardmäßig sind das bei FORTRAN 8 Stellen (Single precision), bei doppelter Genauigkeit 16 Stellen (Double precision). Bei vielen aufeinanderfolgenden Rechenoperationen kann die Rechengenauigkeit einen Einfluß auf das Endergebnis haben,

insbesondere dann, wenn Zahlen stark unterschiedliche Größen haben. Bei der Lösung des Finite-Elemente-Gleichungssystems sind diese Voraussetzungen gegeben. Es ist daher notwendig, die Größe des Einflusses der Rechengenauigkeit zu kennen.

4.5.1 Einfache Genauigkeit (single precision)

Eine reelle Zahl (Real-Zahl) benötigt bei single precision nur 4 Byte (=32 Bit) Speicherplatz. Daher kann man hiermit sehr große Gleichungssysteme verarbeiten. Für die meisten Aufgaben ist die Genauigkeit im allgemeinen so groß, daß der Fehler aus der Rechengenauigkeit kleiner ist als der Fehler aus ungenauen Randbedingungen (z.B. Belastung) und Eingangsparametern (z.B. E-Modul).

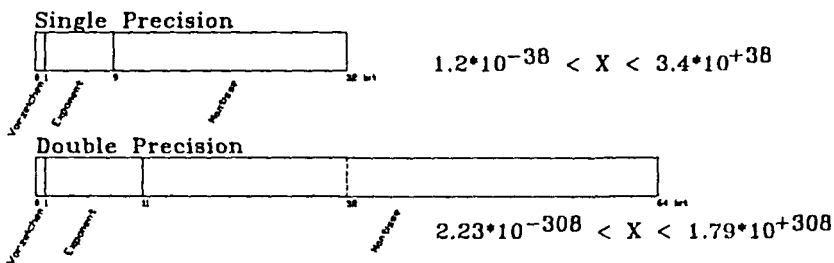


Abb. 4.5.1: Zahlendarstellung bei single und double precision

4.5.2 Doppelte Genauigkeit (double precision)

Bei double Precision benötigt eine Real-Zahl 8 Byte (=64 Bit) Speicherplatz. Die Koeffizienten der Gesamtsteifigkeitsmatrix haben den größten Anteil am Speicherplatzbedarf eines Finite-Elemente-Programms. Der Platzbedarf für alle anderen Zahlen (z.B. die Knotenkoordinaten, die Kräfte, die Verformungen) fällt demgegenüber kaum ins Gewicht. Deshalb ist es am bequemsten, für alle Zahlen im FE-Programm (nicht nur für die Koeffizienten der Gesamtsteifigkeitsmatrix) die Eigenschaft "double precision" zu vereinbaren. Außerdem wäre es nur auf umständliche Weise möglich, die notwendigen Operationen zwischen Zahlen mit einfacher und doppelter Genauigkeit auszuführen.

Der Nachteil doppelter Genauigkeit ist, daß für die Speicherung der Daten doppelt so viel Arbeitsspeicher benötigt wird. Der Platz für den Programmcode und für Integer-Zahlen (natürliche Zahlen) bleibt zwar gleich. Bei gegebener Speichergröße kann die Gesamtsteifigkeitsmatrix aber nur knapp halb so groß sein wie bei einfacher Genauigkeit.

4.5.3 Vergleich

Bei einem Kragarm mit einheitlichem E-Modul sind die Unterschiede in den Ergebnissen zwischen einfacher Genauigkeit und doppelter Genauigkeit vernachlässigbar klein. Die Unterschiede liegen im Promillebereich. Bei kleinen Knotenzahlen sind die Ergebnisse völlig gleich.

Genauso sieht es bei einem Stau-mauerquerschnitt aus (genauere Beschreibung siehe 5.3.1.), bei dem die E-Moduln von Mauer und Untergrund gleich sind. Abb.4.5.2 zeigt, daß die Horizontalverschiebung der Mauerkrone bei wachsender Knotenzahl unabhängig von der Rechengenauigkeit ist. Entsprechendes gilt für andere repräsentative Ergebnisse.

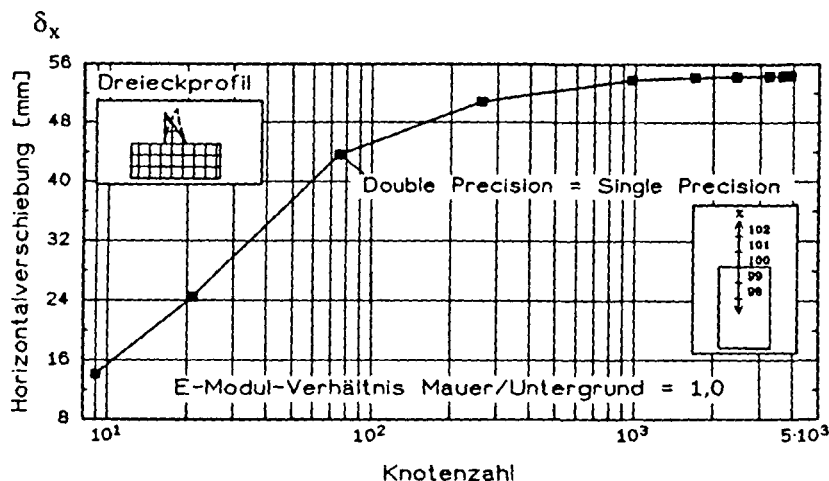


Abb.4.5.2: Horizontalverschiebung δ_x der Mauerkrone bei einfacher bzw. doppelter Genauigkeit

Stark unterschiedliche E-Moduln im Berechnungsgebiet aber führen zu Ungenauigkeiten bei einfacher Genauigkeit. In den Abb.4.5.3-4.5.5 sind Rechenergebnisse an dem Staumauerquerschnitt in Abhängigkeit vom E-Modul-Verhältnis zwischen Mauer und Untergrund aufgetragen. Während bis zu einem Verhältnis von 10:1 alle Ergebnisse nahezu identisch sind, weichen sie bei 100:1 und erst recht 1000:1 voneinander ab. Das Ergebnis bei doppelter Genauigkeit kann man als richtig voraussetzen, weil das Verhältnis der inneren zur äußeren Energie exakt mit 1 ausgewiesen wird. Dieses Verhältnis (Abb.4.5.5) beginnt bereits bei $E(\text{Mauer})/E(\text{Untergrund})=1$ ungenau zu werden; deutlich wird der Fehler erst bei dem Verhältnis 10:1.

E-Modul-Unterschiede dieser Größenordnung (1000:1) kommen bei realistischen Staumauern vor, wenn Gleitschichten o.ä. mit niedrigen E-Moduln diskretisiert werden. Daher sind hier Fehler zu erwarten, wenn nur mit einfacher Genauigkeit gerechnet wird. Abb.4.5.6 zeigen dementsprechend deutliche Unterschiede zwischen Single und Double Precision beispielhaft für die Kronenverschiebung. Ähnlich verhält es sich für die Vertikalspannung am wasser- und luftseitigen Mauerfuß, die Innere bzw. Äußere Energie, deren Verhältnis, und für den Restfehler. (Bei diesen Beispielberechnungen handelt es sich um die Staumauern, für die der Autor in den letzten Jahren FE-Berechnungen anzufertigen hatte).

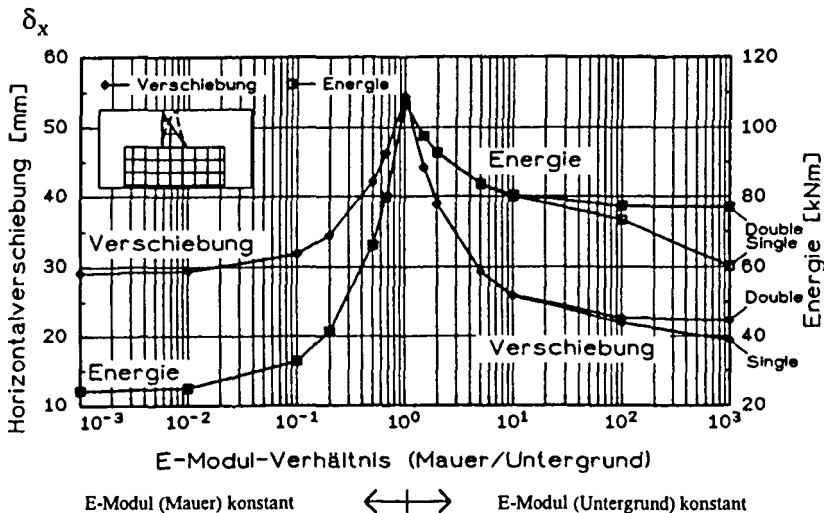


Abb.4.5.3: Horizontalverschiebung δ_x der Mauerkrone und Energie in Abhängigkeit vom E-Modul-Verhältnis

Der Knick bei dem E-Modul-Verhältnis 10^0 (1:1) ist dadurch bedingt, daß

- links vom Knick der E-Modul der Stauwand konstant gehalten wurde, und
- rechts vom Knick der E-Modul des Untergrunds konstant gehalten wurde,

während der jeweils andere E-Modul variiert wurde. Linke und rechte Hälfte der Abbildung sind demzufolge getrennt zu betrachten.

Die Nachteile doppelter Genauigkeit sind erhöhter Speicherplatzbedarf und größere Rechenzeit. Die Abb.4.5.7 zeigt den Unterschied der Rechenzeiten in Abhängigkeit von der Zahl der Knoten. Für doppelte Genauigkeit wird etwa 40% mehr Zeit benötigt. Einfache Genauigkeit ist in der Praxis nur dann ausreichend, wenn die Materialparameter, insbesondere der E-Modul bzw. der k_F -Wert, in dem diskretisierten Bereich nicht zu sehr voneinander abweichen.

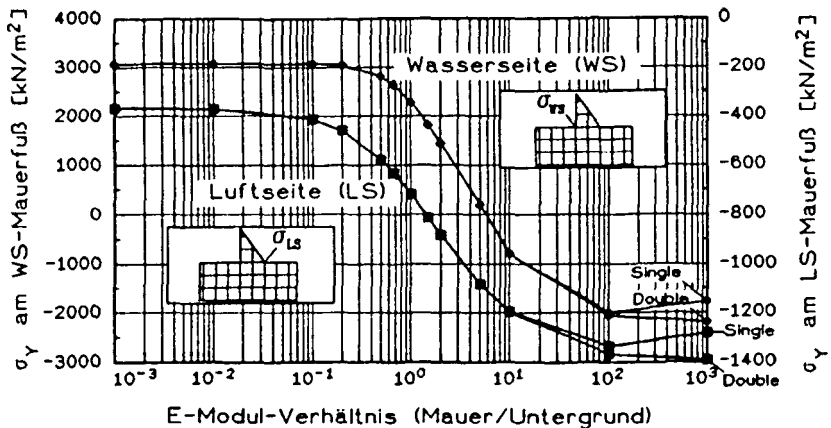
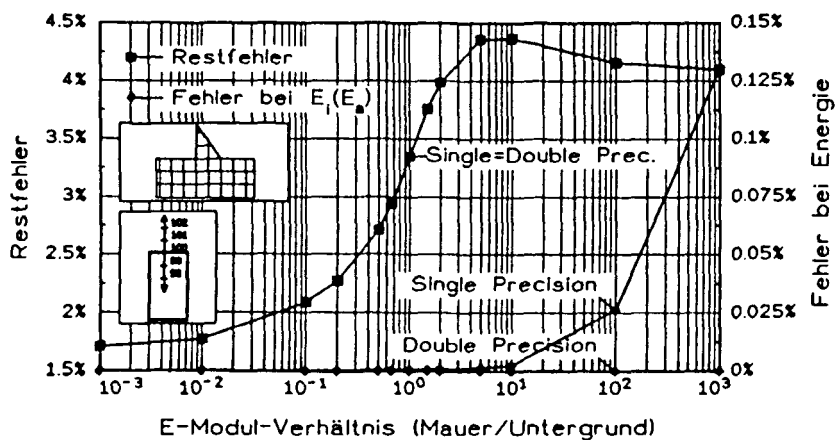
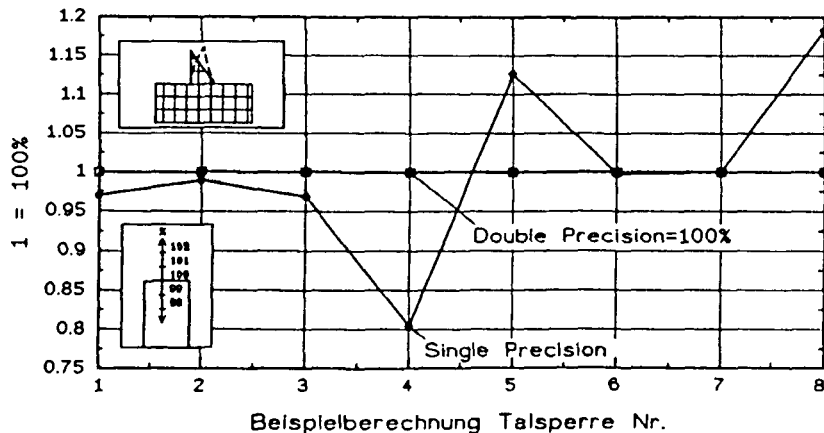


Abb.4.5.4: Spannungen σ_y an Wasserseite und Luftseite in Abhängigkeit vom E-Modul-Verhältnis

Abb.4.5.5: Restfehler und Fehler bei E_i (E_A) in Abhängigkeit vom E-Modul-VerhältnisAbb.4.5.6: Fehler bei der Horizontalverschiebung δ_x der Mauerkrone bei verschiedenen Staumauerberechnungen

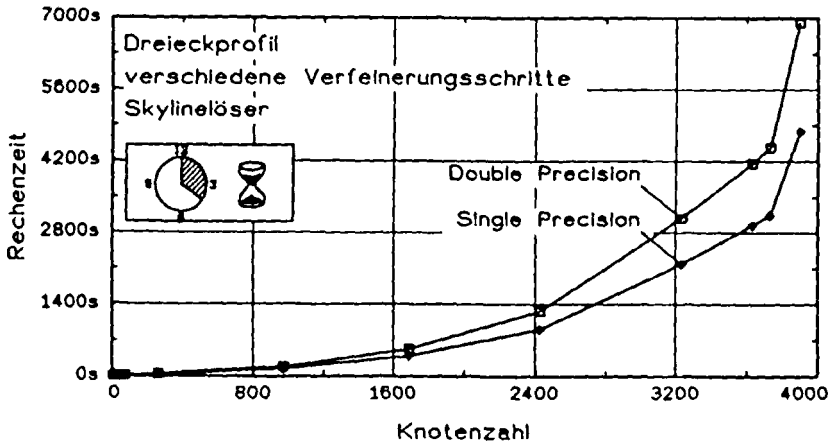


Abb.4.5.7: Rechenzeitvergleich Einfache-Doppelte Genauigkeit

4.5.4 Konditionszahl des Gleichungssystems

Mit der Konditionszahl K kann man die numerische Genauigkeit der Lösung des Gesamtgleichungssystems überprüfen. Die Genauigkeit hängt von der Anzahl der Dezimalstellen ab, die das Programm bzw. der Rechner berücksichtigt. Bei der Lösung des Gleichungssystems, also beim Eliminationsprozeß, treten kleine Differenzen großer Zahlen auf. Es kommt zu Stellenverlust, der das Ergebnis der Berechnung völlig verfälschen kann (ZURMÜHL, 1964). Bei einfacher Genauigkeit gehen selbstverständlich wesentlich mehr Stellen verloren als bei doppelter Genauigkeit. Es könnte von der Konditionszahl abhängen, ob einfache Genauigkeit ausreicht oder nicht. Statt K wird auch der Kehrwert $1/K$ als Konditionszahl bezeichnet.

4.5.4.1 Konditionszahl nach HADAMARD

Eine auf einer bekannten Determinantenabschätzung nach HADAMARD beruhende Konditionszahl ist:

$$K_H = \frac{D}{V} \quad (4.22)$$

mit:

$$D = |\det A|$$

A = Matrix

$$V = a_1 * a_2 * \dots * a_n$$

$$a_i = \sqrt{\sum a_{ik}^2}$$

n = Zahl der Gleichungen

i,k = Zeilen-, Spaltenindex

$a_{i,k}$ = Matrixkoeffizienten

K_H ist praktisch die Determinante der Matrix A bezogen auf das n-dimensionale Volumen aus den Zeilenvektorenlängen a_i . K_H erfüllt drei Forderungen:

1: $0 < K < 1$

2: K invariant gegenüber Zeilenvertauschung

3: K invariant gegenüber Multiplikation der Zeilen mit Faktoren p_i ungleich 0.

4.5.4.2 Konditionszahl nach der Euklidischen Matrixnorm

Eine zweite Konditionszahl basiert auf der Euklidischen Matrixnorm:

$$K_N = \frac{D}{(N/\sqrt{n})^n} \quad (4.23)$$

mit: N = Euklidische Matrixnorm

$$\begin{aligned} N/\sqrt{n} &= \text{quadratisches Mittel der Zeilenvektorenlängen } a_i \\ &= \sqrt{\sum a_{ik}^2} \end{aligned}$$

K_N läßt sich demnach auch schreiben als:

$$K_N = \frac{D}{(\sqrt{\sum a_{ik}^2})^n} \quad (4.24)$$

K_N ist demnach praktisch die Determinante der Matrix bezogen auf das n-dimensionale Volumen aus dem geometrischen Mittel der Zeilenvektorenlängen a_i .

4.5.4.3 Konditionszahl aus Eigenwerten

Eine dritte Konditionszahl benutzt den größten und den kleinsten der singulären Werte der Matrix und erfordert so zu ihrer Berechnung die Lösung einer Eigenwertaufgabe:

$$K_0 = \kappa_1 / \kappa_n \quad (4.25)$$

mit: $\kappa_1 = \text{Min } \kappa_i$

$\kappa_n = \text{Max } \kappa_i$

4.5.4.4 Bewertung der Konditionszahl

K sollte möglichst nahe an 1 liegen bzw. der Kehrwert möglichst klein sein. In praktischen Fällen liegt K_H nahe bei Null und K_N noch darunter. Die meisten Autoren verwenden den Kehrwert $1/K$ als Konditionszahl, worauf auch sich die folgende Aussage bezieht: Nach WILDERMUTH (1980) gibt der Zehnerlogarithmus der Konditionszahl die Anzahl der verlorengegangenen Stellen an. Demnach ist die Anzahl der Dezimalstellen der Zahlendarstellung abzüglich des Zehnerlogarithmus der Konditionszahl die Anzahl der glaubwürdigen Dezimalstellen der Verschiebungen. Beispiel: Eine Konditionszahl von 10^{12} bei 15 Stellen Rechengenauigkeit ergebe $15-12=3$ glaubwürdige Dezimalstellen.

SCHWARZ (1984) gibt die Konditionszahlen für ein Kragbalkenproblem an. Die Zahlenwerte nehmen mit größer werdender Matrix sehr rasch zu und zwar etwa mit der 4. Potenz der Zahl der Freiheitsgrade. Das bedeutet, daß schon bei 32 (Stab-)Elementen die Kondition $1/K$ $2,5 \cdot 10^7$ beträgt. Eine Skalierung der Matrix verkleinert die Kondition nur etwa um den Faktor 5. Bei einer angemessenen Zahl von Freiheitsgraden (mindestens einige Hundert) würde die Kondition so groß, daß nach der Regel von WILDERMUTH nicht eine einzige Stelle des Ergebnisses verläßlich wäre. Dies trifft aber eindeutig nicht zu, denn die Absenkung eines Kragarms wird umso genauer, je mehr Elemente verwendet werden. Die Absenkung konvergiert zudem genau gegen das analytische Ergebnis.

Das Größerwerden der Konditionszahl der Gesamtsteifigkeitsmatrix bei Verfeinerung der Elemententeilung und Erhöhung der Anzahl Knotenvariablen liegt für festen Elementtyp in der Natur der Sache (SCHWARZ, 1984). Es kann außerdem noch folgende Ursachen haben:

- spitze bzw. stumpfe Winkel in den Elementen
- große Unterschiede in den physikalischen Größen zwischen den Elementen
- dimensionsbehaftete Größen in den Elementsteifigkeitsmatrizen

Bei einem Problem mit sehr vielen Elementen und Freiheitsgraden werden die Konditionszahlen $1/K_H$ und $1/K_N$ so groß, daß sogar numerische Schwierigkeiten dabei entstehen, sie zu berechnen. Der in FORTRAN verfügbare Zahlenbereich (ca. $1,2 \cdot 10^{-38}$ bis $3,4 \cdot 10^{38}$ bei einfacher Genauigkeit und ca. $2,23 \cdot 10^{-308}$ bis $1,79 \cdot 10^{308}$ bei doppelter Genauigkeit) reicht u.U. nicht aus, die Zahl darzustellen. Bei viereckigen Scheibenelementen ist die Zahl der Freiheitsgrade doppelt so groß wie bei Stabelementen.

Daher wird die Konditionszahl hier noch größer. Aber auch hier ist das Ergebnis für die Absenkung sehr genau (siehe Kap. 3.2).

Es kann gefolgert werden, daß hier nur die Konditionszahl $1/K_O$ eine praktische Bedeutung hat, nicht aber $1/K_H$ und $1/K_N$.

4.6 Rechenzeitbedarf

Der Zeitbedarf für eine FE-Berechnung setzt sich zusammen aus:

- Beschaffung und Aufbereitung der Eingangsdaten (Geometrie, Materialparameter usw.)
- Eingabe (CAD-gesteuert oder zahlenmäßig in Tabellenform) zur Aufstellung des Ausgangs-Datensatzes, evtl. mit Generierung von Knoten und Elementen
- ggf. programmgesteuerte mehrschrittige Netzverfeinerung
- Rechenzeit des Hauptprogramms für den endgültigen Datensatz
- Auswertung und Darstellung der Ergebnisse auf Plotter oder Bildschirm
- u.U. Wiederholung der Berechnung mit variierten Parametern

Den kleinsten Anteil hat daran der Zeitbedarf für das Hauptprogramm für einen gegebenen Datensatz, auch wenn die Rechenzeit (bei großen Datensätzen auf kleinen Rechnern) Stunden betragen kann. Er läßt sich genauer aufschlüsseln in die Programmschritte:

- Input/Output (Daten einlesen und in Dateien ausgeben)
- Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix
- Lösung des Gesamtgleichungssystems
- Nachgeordnete Berechnungen (Gradienten, Spannungen,...)

Bei iterativen Berechnungen (mehrschrittige Sickerströmungsberechnung zur Bestimmung der Sickerlinie oder mehrschrittige elastostatische Berechnung mit gerissenen Elementen) wiederholen sich die letzten drei Anteile. (Aufbau und Lösung der Matrix können mit bestimmten Verfahren eingespart werden, wenn man mit Ersatzkräften bzw. Ersatzwassermengen arbeitet).

Wie groß die einzelnen Anteile an der gesamten Rechenzeit sind, hängt wesentlich von der Zahl der Freiheitsgrade ab (das ist die Zahl der Knoten multipliziert mit der Zahl der Unbekannten pro Knoten abzüglich der vorgegebenen Randbedingungen, s.o.). Die absolute Rechenzeit ist natürlich vom Rechner bedingt, aber auch vom Compiler, der Qualität der Algorithmen im Programm und von der Bandbreite des Gleichungssystems.

Qualität der Algorithmen im Programm und von der Bandbreite des Gleichungssystems. Die folgenden Diagramme geben einmal die Zeitanteile pro Programmschritt an (Abb.4.6.1 - 4.6.3) und andererseits - beispielhaft - den Zeitbedarf für eine einzelne elastostatische Berechnung auf einem Personal Computer mit 80386-Prozessor mit 33 MHz (Abb.4.6.4). Beides ist in Abhängigkeit von der Zahl der Freiheitsgrade dargestellt. Selbst wenn für viele aufeinander folgende iterative Rechenschritte bei heutiger Hardware noch einige Stunden Rechenzeit benötigt werden, kann das in Kauf genommen werden. Die reine Rechenzeit ist - wie gesagt - der kleinste Teil der Gesamtzeit für eine FE-Berechnung und bei Personal Computern praktisch umsonst. (Bei Großrechnern würde diese Zeit allerdings enorme finanzielle Kosten verursachen). In den nächsten Jahren wird diese Zeit - wie in den letzten Jahren - noch weiter sinken.

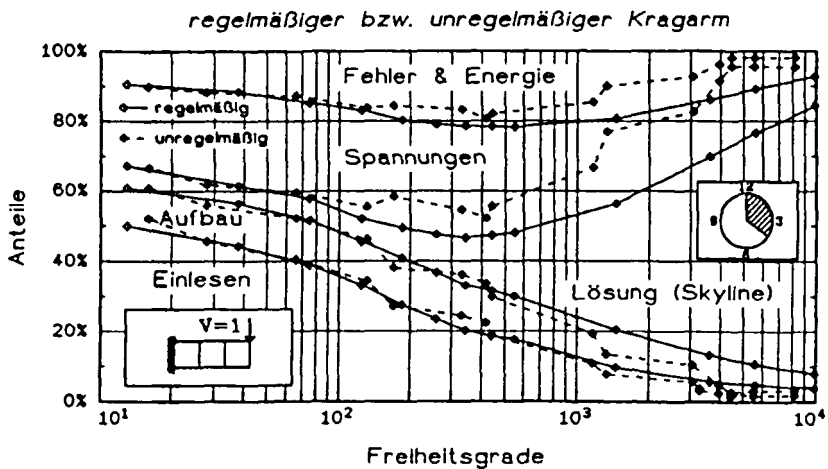


Abb.4.6.1: Rechenzeitanteile beim Kragarm (elastostatische Berechnung)

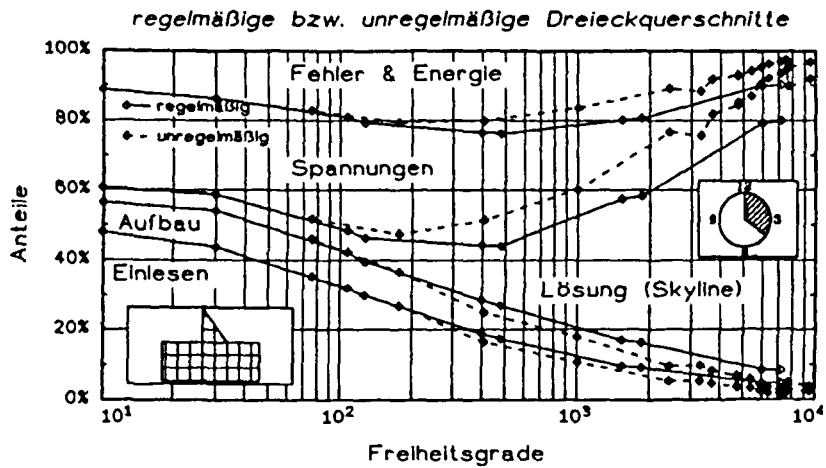


Abb.4.6.2: Rechenzeitanteile beim Dreieckquerschnitt (elastostatische Berechnung)

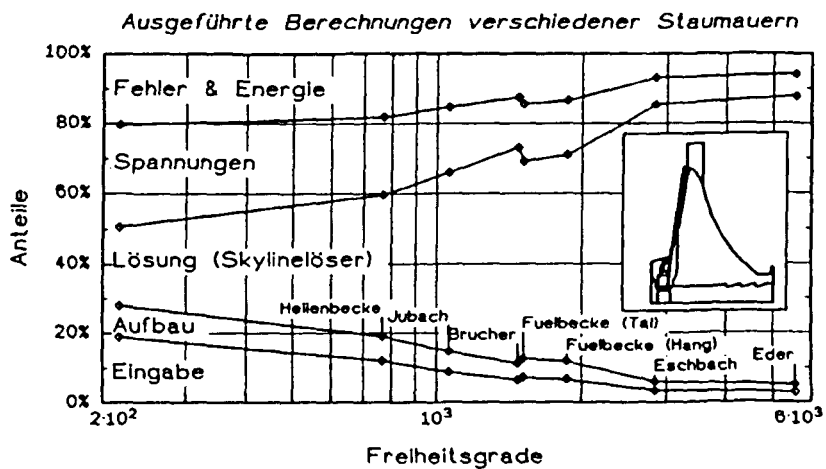


Abb.4.6.3: Rechenzeitanteile bei realistischen Staumauern (elastostatische Berechnung)

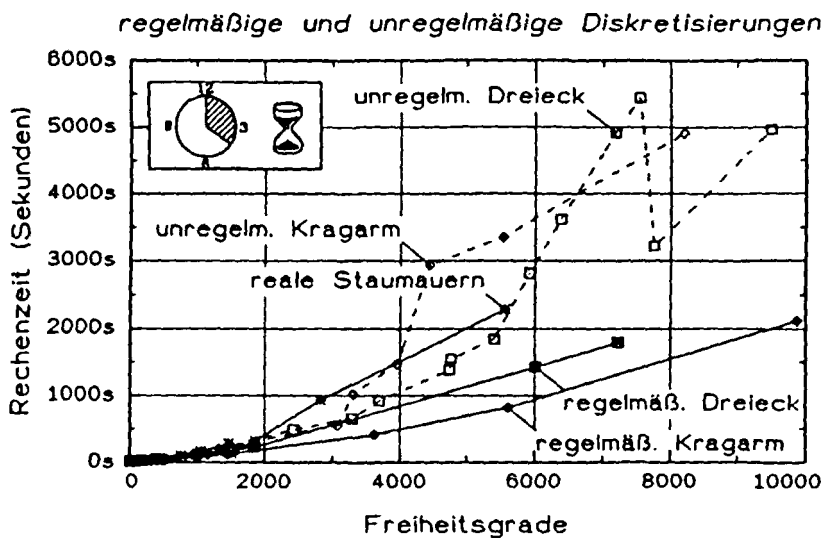


Abb.4.6.4: Absolute Rechenzeiten (elastostatische Berechnung auf einem PC 386-33)

5 Fallbeispiel: Staumauer mit Dreieckprofil

Auf der Grundlage der in Kapitel 4 erarbeiteten Verfeinerungsstrategien soll nun das FE-Netz eines allgemeinen Staumauerprofils generiert werden. Im Anhang wird zur weiteren Veranschaulichung ein Anwendungsvorschlag aus einem realistischen Projekt vorgestellt. Das einfachste Staumauerprofil ist das Grunddreieck. Hierfür gibt es eine analytische Lösung aus der Scheibentheorie. Für kompliziertere Querschnitte ist die analytische Lösung nicht mehr möglich.

5.1 Lösung mit der Airy'schen Spannungsfunktion (Scheibentheorie)

Diese Lösung wird benötigt, weil die zahlenmäßigen Ergebnisse der FE-Berechnung zur Bewertung auf die analytischen Ergebnisse bezogen werden sollen. Die geschlossene Lösung mit der Airy'schen Spannungsfunktion gilt unter folgenden Voraussetzungen:

- Dreieckprofil
- als Scheibe gerechnet (ebener Spannungszustand oder ebener Formänderungszustand)
- lotrechte und vollkommen dichte Wasserseite
- Belastung nur aus Eigengewicht und hydrostatischem Wasserdruck
- Wasserstand in Kronenhöhe
- Verformung des Untergrundes unberücksichtigt
- Materialeigenschaften ohne Einfluß

Die Airy'sche Spannungsfunktion für das Grunddreieck lautet (GIRKMANN, 1963):

$$F = \gamma_w(-y^3/6 + 1/2 x^2 y * H^2/B^2 - 2H^3/B^3 * x^3/6) + \gamma_b(-1/2 x^2 y + H/B * x^3/6) \quad (5.1)$$

γ_w = spez. Gewicht Wasser

γ_b = spez. Gewicht Beton/Bruchsteinmauerwerk

H = Mauerhöhe, B=Sohlbreite

Diese Spannungsfunktion erfüllt die folgende Differentialgleichung vierter Ordnung, auch Scheibengleichung genannt:

$$\nabla^4 F = d^4 F/dx^4 + 2 * d^4 F/dx^2 dy^2 + d^4 F/dy^4 = 0 \quad (5.2)$$

(∇ = Nabla-Operator)

Die Spannungen ergeben sich aus Ableitungen der Spannungsfunktion:

$$\begin{aligned}\sigma_X &= d^2F/dy^2 = -\gamma_w \cdot y \\ \sigma_Y &= d^2F/dx^2 = \gamma_w \cdot H^2/B^2(y-2x \cdot H/B) + \gamma_b \cdot (-y+x \cdot H/B) \\ \tau_{XY} &= -d^2F/dx \cdot dy - g_x \cdot y - g_y \cdot x = -H^2/B^2 \cdot \gamma_w \cdot x\end{aligned}\quad (5.3)$$

Für den Mauerfußpunkt gilt mit $x=0$, $y=H$:

$$\begin{aligned}\sigma_X &= -\gamma_w \cdot H \\ \sigma_Y &= \gamma_w \cdot H^3/B^2 - \gamma_b \cdot H \\ \tau_{XY} &= 0\end{aligned}\quad (5.4)$$

Wie sich leicht nachvollziehen läßt, stimmen diese Formeln für jeden Querschnittspunkt genau mit den Ergebnissen der Balkentheorie überein.

5.2 Ergebnisse nach Balken- bzw. Elastizitätstheorie

Zum Vergleich von Ergebnissen benötigt man die Verschiebung der Mauerkrone und die Spannungen am wasserseitigen Mauerfuß. Dies sind gleichzeitig die maßgebenden Ergebnisse.

5.2.1 Formänderungen

Die Formänderung nach der Balkentheorie bzw. Elastizitätstheorie ist allgemein:

$$\delta_{ik} = \int_0^1 M_i M_k dx/EI + \int_0^1 N_i N_k dx/EA + \int_0^1 \chi Q_i Q_k dx/GA + \int_0^1 M_{id} M_{kd} dx/GI_d \quad (5.5)$$

Im Lastfall *Eigengewicht* reduziert sich die Gleichung zu:

$$\delta_x = \int_0^H M_i M_k /EI dx, \quad \delta_{yN} = \int_0^H N_i N_k /EA dy, \quad \delta_{yM} = \int_0^H M_i M_k /EI dy \quad (5.6)$$

($H=30\text{m}$, $B=20\text{m}$, $E=1000\text{ MN/m}^2$, $\gamma_b=0,023\text{ MN/m}^3$)

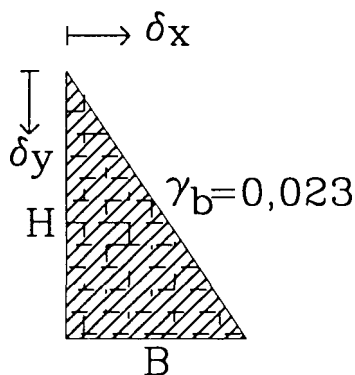


Abb. 5.2.1: Lastfall Eigengewicht

Im Lastfall *Wasserdruck* reduziert sich die Gleichung zu:

$$\delta_{xM} = \int_0^H M_i M_k / EI \, dy \quad (\text{aus Momentenbelastung}) \quad (5.7)$$

$$\delta_{xQ} = \int_0^H Q_i Q_k \cdot \chi / GA \, dy \quad (\text{aus Querkraftbelastung}) \quad (5.8)$$

$$\delta_y = \int_0^H M_i M_k / EI \, dy \quad (5.9)$$

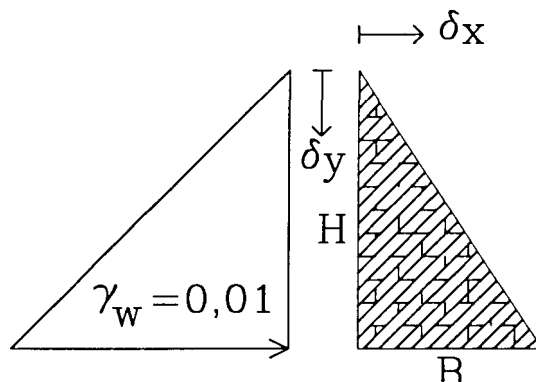


Abb. 5.2.2: Lastfall Wasserdruck

Zusammengefaßt ergeben sich folgende Verschiebungen für die beiden Lastfälle:

[mm]	Lastfall Eigengewicht	Lastfall Wasserdruck
δ_x	-15,525	40,095
davon aus Moment:	-15,525	30,375
aus Querkraft:		9,720
δ_y	10,350	-10,125
davon aus Moment:	5,175	
aus Normalkraft:	5,175	

Tab.5.2.3: Verschiebungen nach Elastizitätstheorie

5.2.2 Spannungen

Die Spannung σ_Y am wasserseitigen Mauerfuß ist im Lastfall Eigengewicht (vgl. Kap. 5.1):

$$\sigma_{YEG} = -\gamma_b \cdot H = 0,023 \cdot 30 = -690 \text{ kN/m}^2 \quad (5.10)$$

und im Lastfall Wasserdruck:

$$\sigma_{YW} = \gamma_w \cdot H^3/B^2 = 0,010 \cdot 30^3/20^2 = 675 \text{ kN/m}^2 \quad (5.11)$$

Für die Berechnung der Verformungen wie der Spannungen bleibt nach der Balkentheorie der Untergrund unberücksichtigt bzw. wird als vollkommen starr angenommen. Der Vollständigkeit halber soll erwähnt werden, daß es einen Ansatz von VOGT (1925) gibt, der sich die Stauwand um einen bestimmten Betrag nach unten fortgesetzt denkt, um den Einfluß der Fundamentdeformation zu erfassen.

5.3 Berechnungsraum für die Stauwand

Die Einflüsse von Elementeigenschaften und Netzform auf Berechnungsergebnisse können noch am eingespannten Kragarm untersucht werden. Dort ist der Berechnungsraum durch die starre Einspannung begrenzt. Ebenso ist es bei der Berechnung von Stauwänden nach klassischen Methoden. Der Untergrund wird dabei als vollkommen starr angenommen.

Bei einer FE-Berechnung einer Staumauer ist es dagegen notwendig, die elastischen Eigenschaften des Untergrundes und damit die Wechselwirkung zwischen Bauwerk und Untergrund mit einzubeziehen. Theoretisch müßte man den Untergrund bis ins Unendliche mitberücksichtigen (elastischer Halbraum). Es gibt auch besondere (infinite) Elemente mit speziellen Eigenschaften, die das ermöglichen. Es ist aber vollkommen ausreichend, den Untergrund mit einer bestimmten, endlichen Ausdehnung zu erfassen und dafür die gleichen Elemente wie sonst auch zu verwenden. Seine notwendige Ausdehnung soll hier für eine Staumauer mit der Form eines Grunddreiecks bestimmt werden.

5.3.1 Berechnung einer Staumauer mit Dreieckquerschnitt

Für die Untersuchung wird die Diskretisierung nach Abb.5.3.1 verwendet (vom Untergrund ist nur ein Ausschnitt dargestellt). Die 30 m hohe Staumauer wird in 528 Elemente mit 561 Knoten eingeteilt. Die Tiefe des Untergrundes variiert von 0 bis 1000 m, letzteres entspricht der 33fachen Mauerhöhe. Gleichzeitig wird die ober- und unterwasserseitige Begrenzung des Berechnungsraumes entsprechend verändert. Bei maximaler Größe besteht die Gesamtdiskretisierung aus 3600 Elementen mit 3729 Knoten. Es werden drei Lastfälle berechnet:

- Lastfall Eigengewicht (EG) mit $\gamma(\text{Mauer})=23 \text{ kN/m}^3$, $\gamma(\text{Untergrund})=0$
- Lastfall Wasserdruck (W) mit dreieckförmiger hydrostatischer Last an der Wasserseite $\gamma(\text{Wasser})=10 \text{ kN/m}^3$
- Summe aus beiden

Die maßgebenden Ergebnisse der Berechnung (Verschiebung der Mauerkrone und Spannung am wasserseitigen Mauerfuß) werden auf die Ergebnisse der klassischen Berechnung nach der Balkentheorie bezogen und dimensionslos dargestellt.

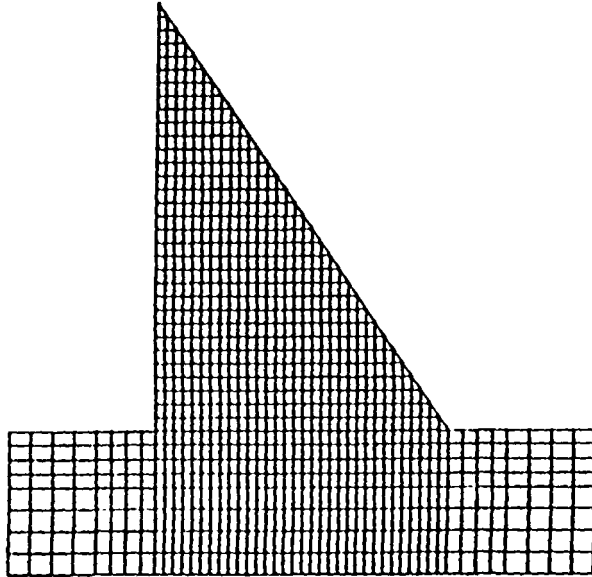


Abb. 5.3.1: Diskretisierung zur Bestimmung der notwendigen Untergруndtiefe (Ausschnitt)

5.3.2 Bestimmung der notwendigen Untergруndtiefe

Die Verschiebung dx der Mauerkrone nach FE-Berechnung ist für beide Lastfälle (EG und W) in Abb. 5.3.2 und 5.3.3 dargestellt, die Verschiebung dy in Abb. 5.3.4 und 5.3.5. Die Ergebnisse weichen - auch im Fall "Tiefe des Untergrundes gleich Null" - von der Balkentheorie ab. Nur die Verschiebung dx infolge Eigengewicht entspricht dem analytischen Ergebnis fast: Wenn die Tiefe des Untergrundes fast Null ist ($0,01 \cdot \text{Mauerhöhe}$, Abb. 5.3.2), erreicht die Verschiebung dx - unabhängig vom E-Modul-Verhältnis - 99% der Verschiebung nach der Balkentheorie.

Die Kurve für das E-Modul-Verhältnis 10:1 ist zur Übersichtlichkeit in allen Abbildungen nicht vollständig dargestellt; sie folgt aber jeweils in ihrer Tendenz den anderen Kurven.

Je tiefer der Untergrund modelliert wird, desto größer sind auch die Verschiebungen. Die Verschiebungen dx (EG) und dy (W) sind konvergent. Der Grenzwert ist abhängig vom

E-Modul-Verhältnis zwischen Mauer und Untergrund. Je kleiner der E-Modul des Untergrundes ist, desto größer ist der Endwert der Verformung. Er ist zu ca. 95% erreicht, wenn die Untergrundtiefe die dreifache Mauerhöhe hat, und zu 99% bei etwa zehnfacher Mauerhöhe.

Die Verschiebungen dy (EG) und dx (W) sind nicht konvergent. Dies ist auch logisch: Bei einer Vertikallast (EG) wird bei größerer Verformungslänge die vertikale Verschiebung immer größer; bei einer Horizontallast (W) ebenso die horizontale Verschiebung.

Die Spannungen konvergieren trotzdem, wie aus Abb. 5.3.6 und 5.3.7 ersichtlich ist. Für den Lastfall Wasserdruck verlaufen bei sehr geringer Untergrundtiefe die Spannungen zunächst unregelmäßig und werden erst bei größerer Tiefe regelmäßig. Der Grenzwert ist auch hier vom E-Modul-Verhältnis zwischen Mauer und Untergrund abhängig. Er ist in fast allen Fällen höher als das Ergebnis nach der Balkentheorie. Gerade am wasserseitigen Mauerfuß ist aber eine Übereinstimmung mit der Balkentheorie auch nicht zu erwarten. - Auch hier kann gesagt werden, daß für eine ausreichende Genauigkeit (95%) der Untergrund mindestens so tief sein sollte wie die dreifache Mauerhöhe.

Die Art der Randlagerung beeinflusst das Ergebnis demgegenüber nicht. Die Wahl von Festlagern ($dx=dy=0$) oder Rollenlagern (unten $dy=0$; seitlich $dx=0$) führt - bei großer Untergrundtiefe - nicht zu unterschiedlichen Ergebnissen.

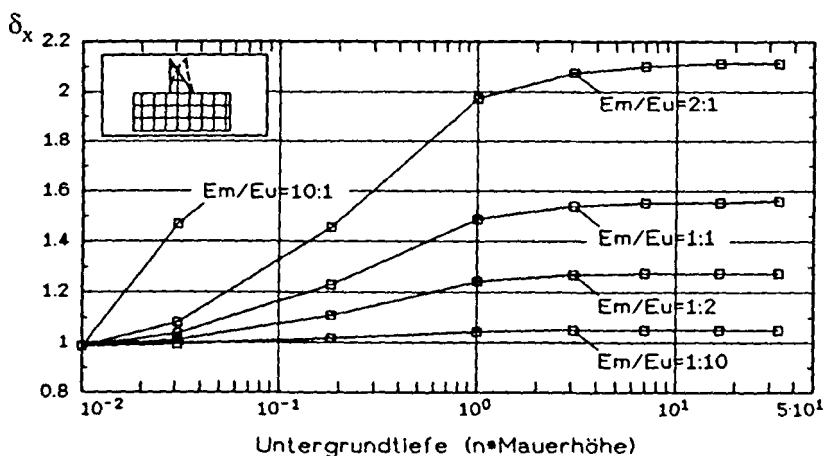


Abb.5.3.2: Dimensionslose Horizontalverschiebung δ_x der Mauerkrone im Lastfall Eigengewicht in Abhängigkeit von Untergundtiefe und E-Modul-Verhältnis E_m/E_u (Scheibentheorie=1)

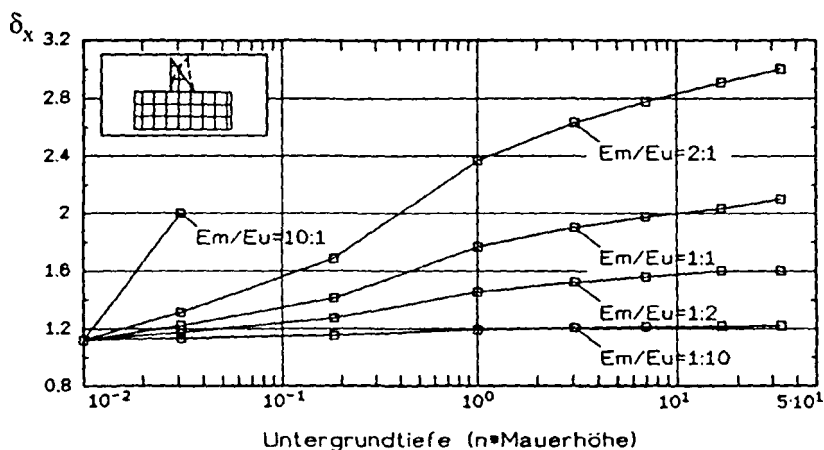


Abb.5.3.3: Dimensionslose Horizontalverschiebung δ_x der Mauerkrone im Lastfall Wasserdruck in Abhängigkeit von Untergundtiefe und E-Modul-Verhältnis E_m/E_u (Scheibentheorie=1)

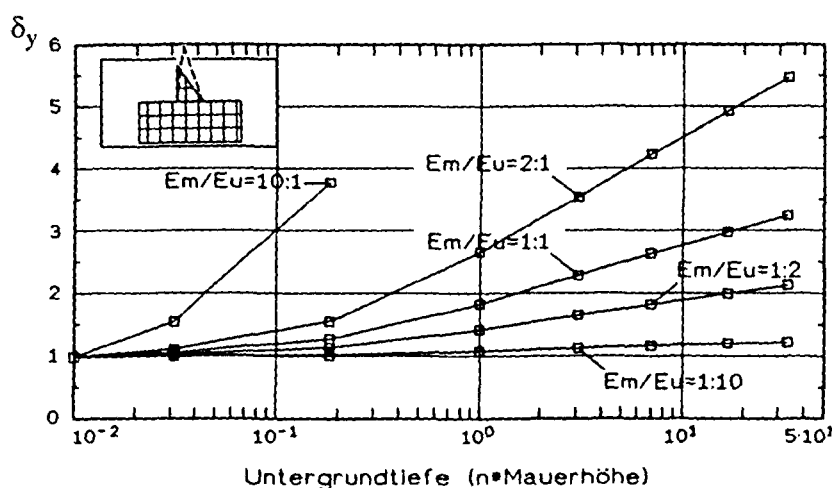


Abb.5.3.4: Dimensionslose Vertikalverschiebung δ_y der Mauerkrone im Lastfall Eigengewicht in Abhängigkeit von Untergundtiefe und E-Modul-Verhältnis E_m/E_u (Scheibentheorie=1)

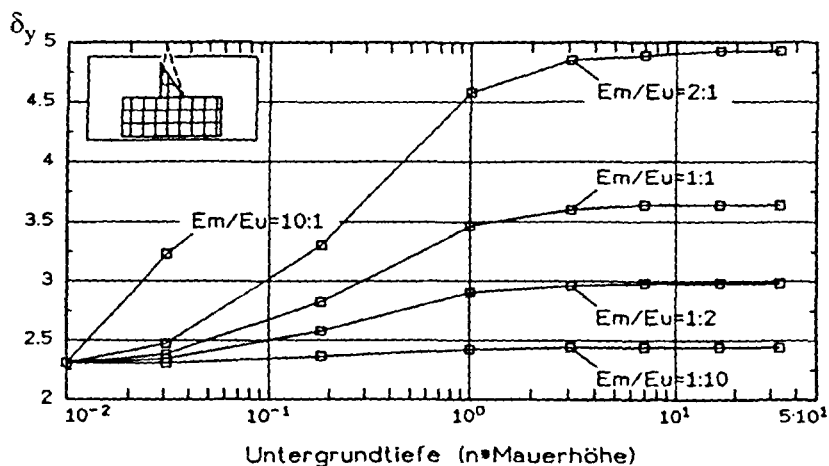


Abb.5.3.5: Dimensionslose Vertikalverschiebung δ_y der Mauerkrone im Lastfall Wasserdruck in Abhängigkeit von Untergundtiefe und E-Modul-Verhältnis E_m/E_u (Scheibentheorie=1)

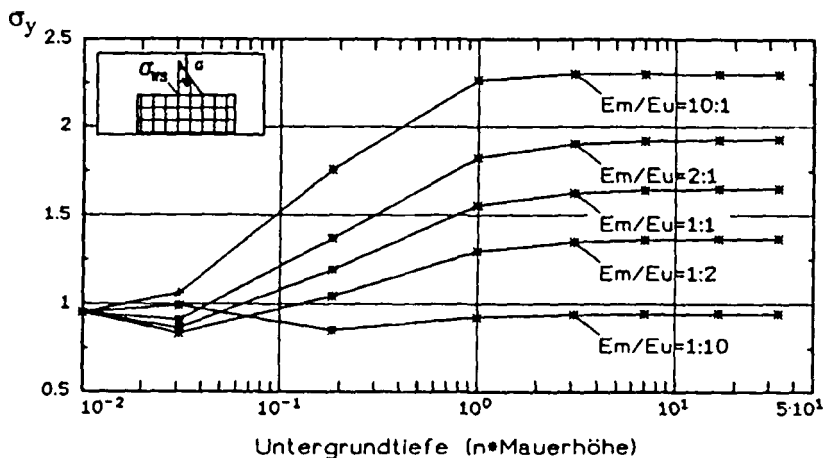


Abb.5.3.6: Dimensionslose Spannung σ_y am Mauerfuß im Lastfall Eigengewicht in Abhängigkeit von Untergrundtiefe und E-Modul-Verhältnis E_m/E_u (Scheibentheorie=1)

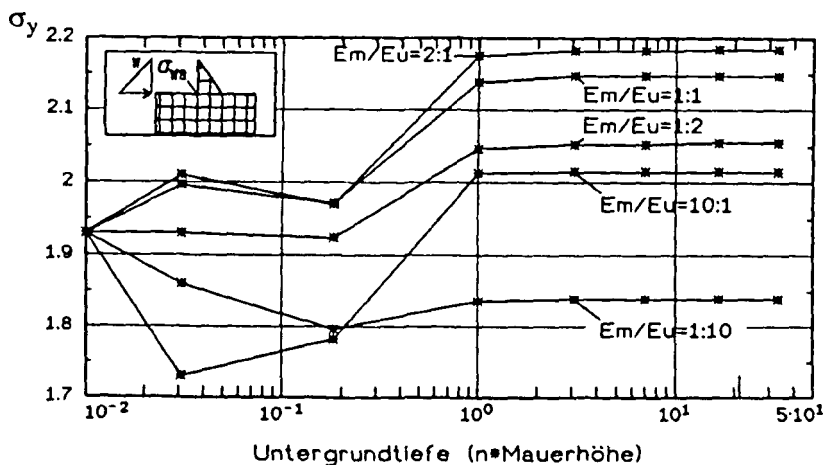


Abb.5.3.7: Dimensionslose Spannung σ_y am Mauerfuß im Lastfall Wasserdruck in Abhängigkeit von Untergrundtiefe und E-Modul-Verhältnis E_m/E_u (Scheibentheorie=1)

5.4 Finite-Elemente-Lösung mit Netzverfeinerung

Nachdem Elementart und Netzform am Kragarm untersucht sind (Kap. 3.1 und 3.2) und der notwendige Berechnungsraum festgelegt ist (Kap. 5.3), soll die Netzverfeinerung am dreieckförmigen Stauwandquerschnitt angewandt werden.

5.4.1 Netzgenerierung

Die Verfeinerungsstrategie ist die gleiche wie beim Kragarm. Die variablen Parameter werden dabei so eingestellt, wie sie bei der Berechnung des Kragarms als günstig ermittelt wurden. Auf diese Weise wird eine Verfeinerung in den gewünschten Bereichen erzielt, nämlich insbesondere am wasserseitigen Mauerfuß:

- Verfeinerungsindikator bestehend zu 50% aus Fehlerindikator und 50% aus Spannungsindikator
- Spannungsindikator aus σ_y vom Lastfall Eigengewicht berechnet
- Seitenverhältnis maximal 1:3
- Mindestlänge einer Seite (zunächst) 0, d.h. nicht begrenzt
- Bevorzugung der Y-Richtung dreifach
- Berücksichtigte Untergrundtiefe: dreifache Mauerhöhe
- Geschwindigkeit der Verfeinerung: variabel

Das Ziel ist eine regelmäßige Diskretisierung mit bis zu 5000 Knoten, mit möglichst schnell konvergierenden maßgebenden Ergebnissen, Erfassung der maximalen Spannung an der Wasserseite, möglichst geringem Fehler und gleichzeitig geringer Rechenzeit (also guter Bandbreite). Die variierte Einflußgröße ist die Geschwindigkeit der Verfeinerung, also der Anteil der verfeinerten Kanten bei jedem Schritt.

Die Verfeinerung wurde jeweils abgebrochen, wenn die Knotenzahl 5000 erreicht war oder wenn die Gesamtmatrixgröße 1.700.000 überschritt. Bis zur Matrixgröße 800.000 wurde mit "double precision" gerechnet, darüber mit "single precision". Über diese Grenzen hinaus wäre eine Berechnung zwar noch möglich (durch Swapping, d.i. Auslagerung auf Festplatte), sie wäre aber nicht mehr ökonomisch und auch nicht nötig. Abb.5.4.1 zeigt beispielhaft die FE-Netze von 8 Verfeinerungsschritten für die Folge 4*100%, 50%, 10%, 5%, 3%. In den darauf folgenden Abbildungen 5.4.2 - 5.4.6 sind die Ergebnisse dargestellt.

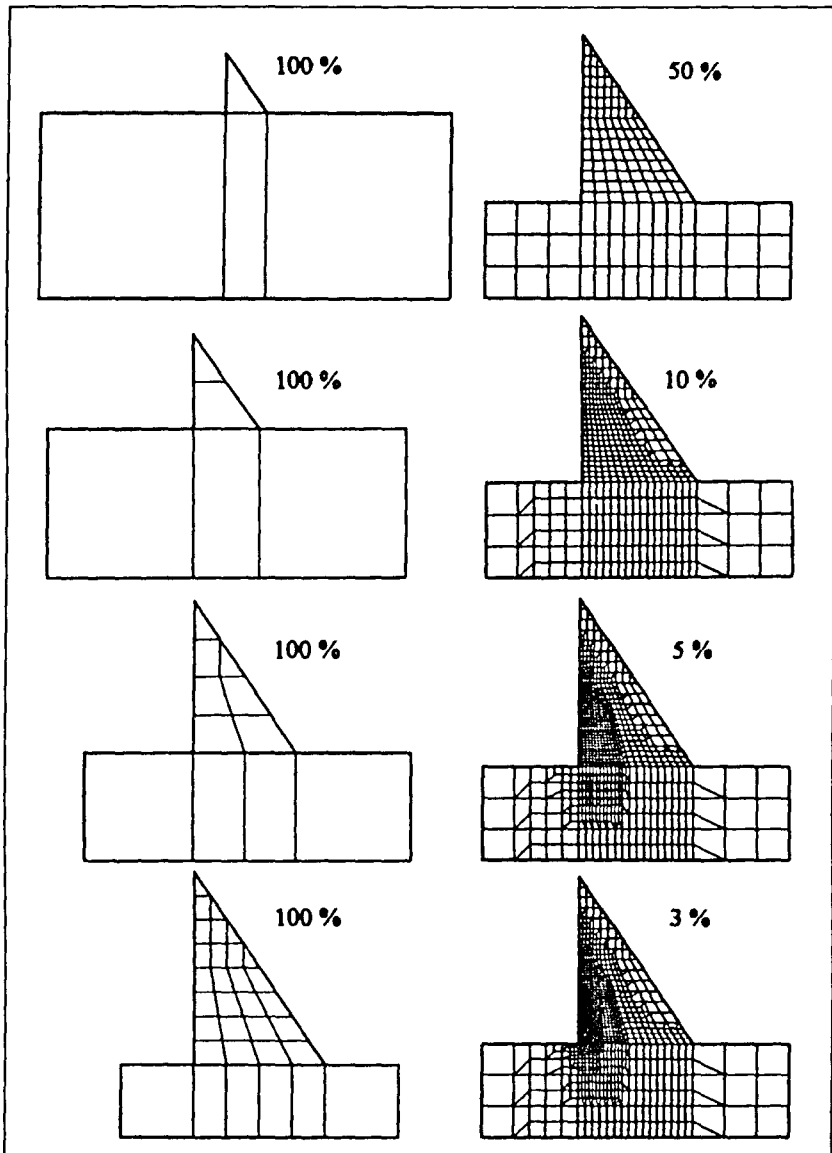


Abb. 5.4.1: FE-Netze in 8 Verfeinerungsschritten für eine beispielhafte Verfeinerungsfolge

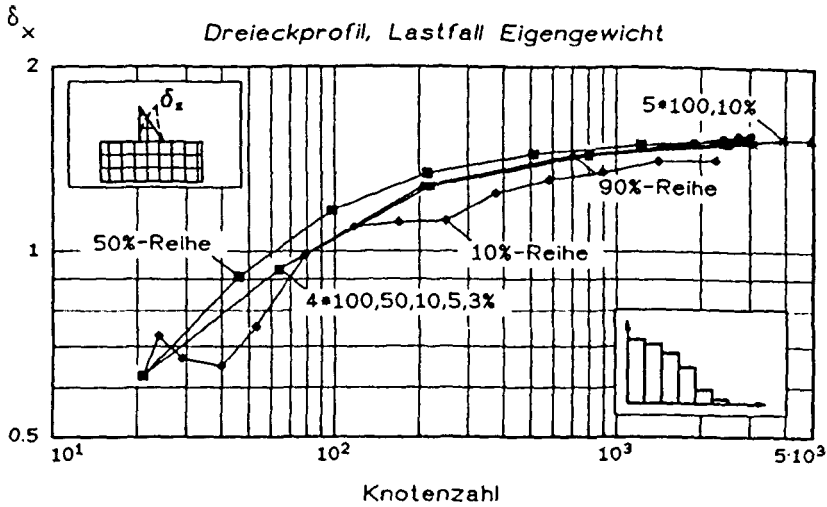


Abb.5.4.2: Dimensionslose Horizontalverschiebung δ_x der Mauerkrone in Abhängigkeit von der Verfeinerungsfolge (Scheibentheorie = 1)

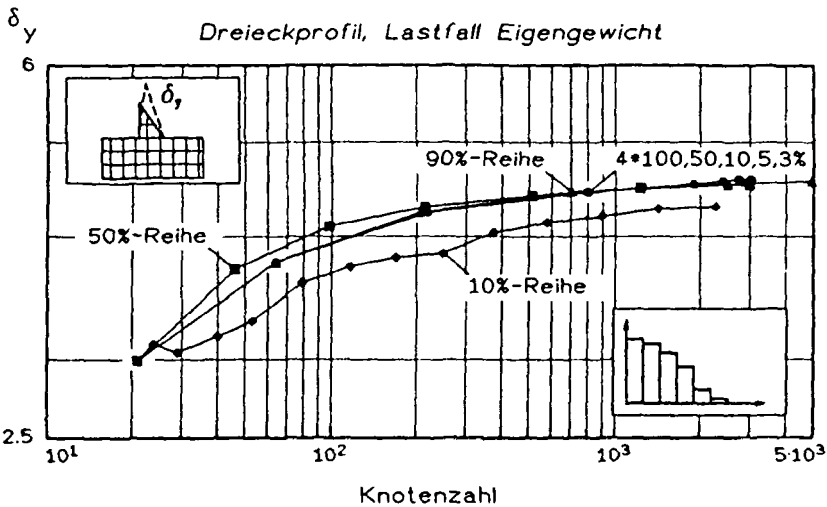


Abb.5.4.3: Dimensionslose Vertikalabsenkung δ_y der Mauerkrone in Abhängigkeit von der Verfeinerungsfolge (Scheibentheorie = 1)

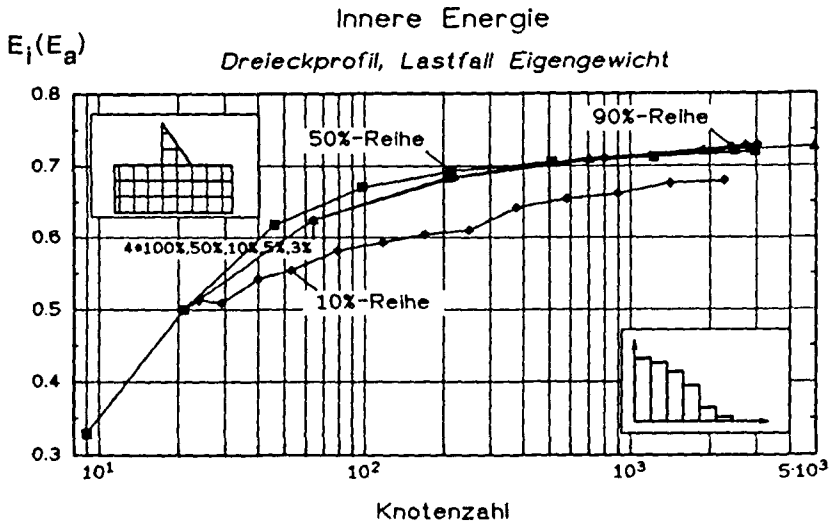


Abb.5.4.4: Dimensionslose Innere (E_i) bzw. Äußere Energie (E_a) in Abhängigkeit von der Verfeinerungsfolge (Scheibentheorie = 1)

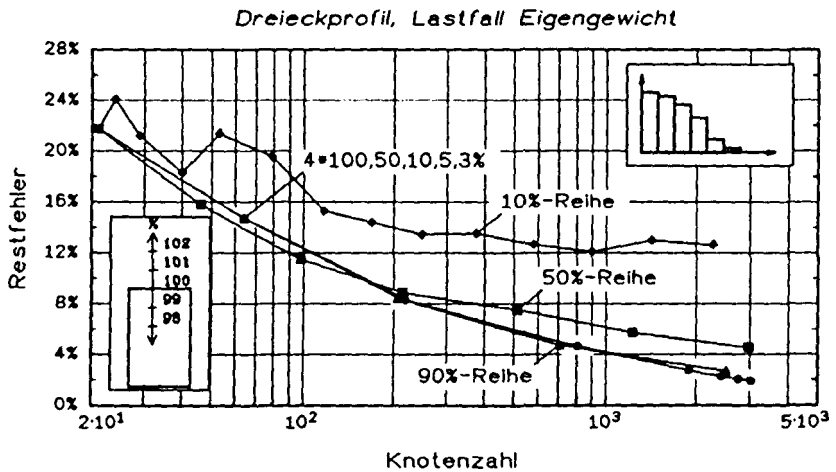


Abb.5.4.5: Restfehler in Abhängigkeit von der Verfeinerungsfolge

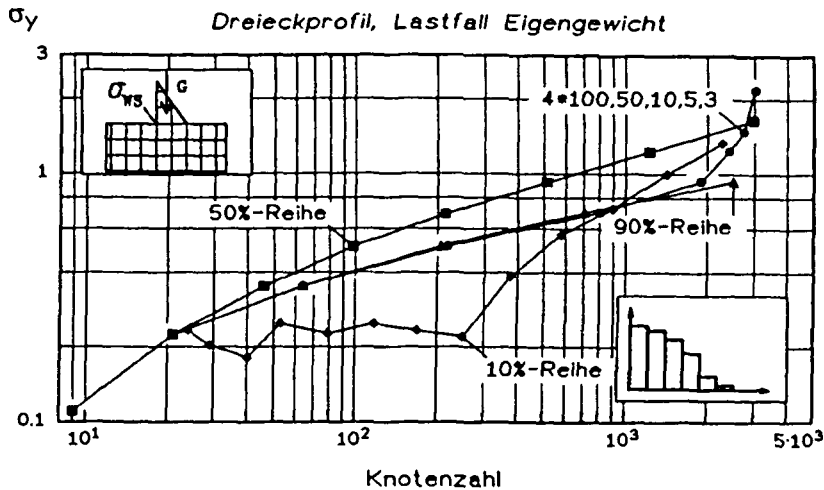


Abb.5.4.6: Dimensionslose Spannung σ_y am wasserseitigen Mauerfuß in Abhängigkeit von der Verfeinerungsfolge (Scheibentheorie = 1)

5.4.2 Konvergenz der maßgebenden Ergebnisse

Die Güte der Konvergenz der maßgebenden Ergebnisse hängt von der Abstufung der Verfeinerungsschritte ab. In der 10%-Reihe wurden jeweils nur 10% aller Kanten unterteilt. Der Verlauf der Konvergenzkurven in allen Abbildungen ist unregelmäßig und die Konvergenz schlecht. Besonders der Restfehler ist sehr hoch (mehr als 12%). Das liegt daran, daß die Diskretisierungen zu unregelmäßig sind. Außerdem mußte die Verfeinerung bei 2270 Knoten abgebrochen werden, weil Bandbreite und Gesamtsteifigkeitsmatrix zu groß wurden.

Relativ gute Konvergenz ist bei der 50%-Reihe zu beobachten. Bei kleinen Knotenzahlen sind Verformungen, Energie und Fehler dem Grenzwert am nächsten. Bei größeren Knotenzahlen wird aber die Reihe noch etwas besser, bei der zuerst viermal mit 100% verfeinert wurde, später abgestuft weniger (50%,10%,5%,3%). Der Fehler beträgt dann nur noch 2%.

Die neu hinzukommende Knotenzahl ist bei gleichem Prozentsatz umso höher, je mehr Knoten bereits vorhanden sind. Die Knotenzahl steigt deshalb nach einigen Schritten zu

schnell, wenn man den Prozentsatz nicht stark herabsetzt. Außerdem ist die zusätzliche Knotenzahl schlecht vorhersagbar. Es gibt auch die Möglichkeit, die Zahl der zusätzlichen Knoten für einen Verfeinerungsschritt vorzugeben.

Man kann nicht generell angeben, mit wievielen und welchen Schritten zu verfeinern ist. Als Regel gilt aber:

- zuerst mehrmals alle oder fast alle Kanten verfeinern (95-100%). Ungünstige Seitenverhältnisse werden ausgeglichen.
- wenn ca. 1000 Knoten (20-25% der Maximalzahl) erreicht sind, Prozentsatz stark herabsetzen, so daß bei jedem Schritt nicht mehr als 1000 Knoten hinzukommen - oder die zusätzliche Knotenzahl festlegen
- wenn 3000 Knoten erreicht sind, nur noch mit maximal 5% verfeinern
- darauf achten, daß Übergangselemente zwischen groben und feineren Bereichen nicht noch einmal unterteilt werden
- Netzglättung erst nach dem letzten Verfeinerungsschritt durchführen

Die schrittweise Verfeinerung sollte ungefähr der empirischen Folge nach Abb.5.4.7 folgen. Außerdem ist noch die Größe der Gesamtsteifigkeitsmatrix zu beachten. Die maximale Größe ist von der Speichergröße des Rechners vorgegeben und - in Abhängigkeit davon - im Programm festgelegt. Mit 20 MB Arbeitsspeicher liegt die Grenze auf einem PC bei ca. 3.000.000 Koeffizienten. Ist diese Größe zu mehr als der Hälfte erreicht, sollte der Verfeinerungs-Prozentsatz etwas abgemindert werden.

% der Kanten

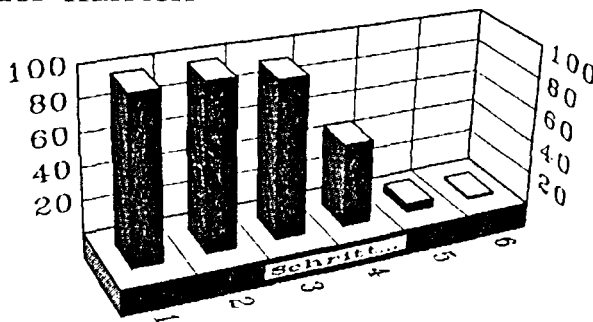


Abb.5.4.7: Günstige Folge von Verfeinerungs-Prozentsätzen

5.4.3 Spannung am wasserseitigen Mauerfuß

Bei der Vertikalspannung am wasserseitigen Mauerfuß ist eine Besonderheit festzustellen. σ_y konvergiert weder im Lastfall Eigengewicht noch im Lastfall Wasserdruck. Tatsächlich ist σ_y an dieser Stelle im wesentlichen nicht von der Gesamtknotenzahl abhängig, sondern von der Größe der Elemente. Deshalb wurde die Spannung σ_y in Abhängigkeit von der Breite des kleinsten wasserseitigen Elements untersucht. Dazu wurde eine regelmäßige Ausgangsdiskretisierung von 969 Knoten in insgesamt 11 Schritten so verfeinert, daß am wasserseitigen Mauerfuß ein Bereich entstand, in dem die Breite der äußeren (ungefähr fünf) Elemente bei jedem Schritt jeweils halbiert wurde. Deren Breite wurde bis auf 1cm verkleinert, das entspricht 1/2000 der Sohlfugenbreite. Als Abszisse in Abb. 5.4.8 dient das Verhältnis der Sohlbreite (20m) zu der Breite der wasserseitigsten Elemente in der Sohlfuge. In der doppelt logarithmischen Darstellung der Abbildung ist für beide Lastfälle und deren Summe eine lineare Abhängigkeit festzustellen. Es ist eindeutig zu erkennen, daß die Spannung an dieser Stelle bei infinitesimaler Elementgröße über alle Grenzen wächst und nicht konvergiert.

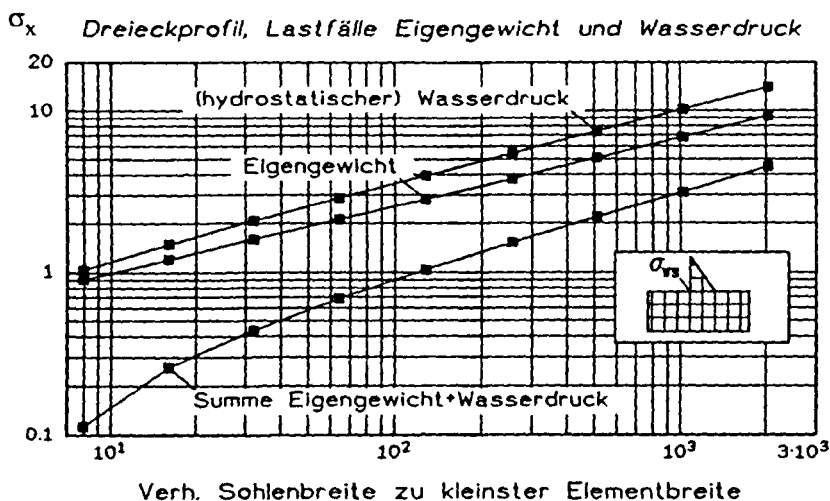


Abb. 5.4.8: Dimensionslose Spannungen σ_y am wasserseitigen Mauerfuß in Abhängigkeit von der Elementgröße (Scheibentheorie = 1)

Es stellt sich nun die Frage, warum die Spannungen an dieser Stelle ins Unendliche wachsen. Dazu betrachte man, wie sich die Spannungen rechnerisch zusammensetzen. Es gilt allgemein:

$$\{\sigma\} = [S] * \{d\} \quad (5.12)$$

mit $[S] = [D] * [B]$

Im linken unteren Eckpunkt (Knoten Nr. 3) des ersten Elements oberhalb der Sohlfuge ist, daraus abgeleitet, die Vertikalspannung:

$$\sigma_y = (dx_3 - dx_4) * [S(2,1)] + (dy_2 - dy_3) * [S(2,5)] \quad (5.13)$$

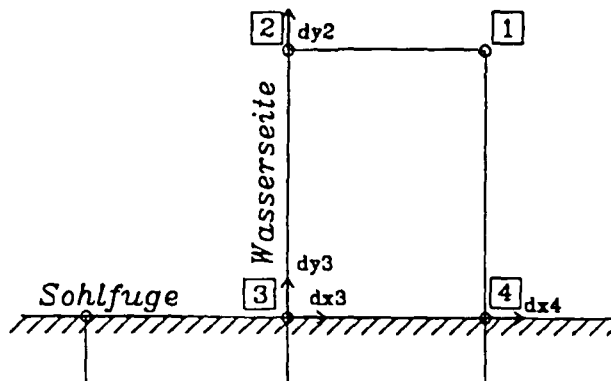


Abb. 5.4.9: Erstes Element in der Sohlfuge an der Wasserseite

Alle anderen Summanden sind bei einem rechteckigen Element Null, weil die entsprechenden Matrixelemente von $[S]$ Null sind. Die Werte von $[S]$ verdoppeln sich aus geometrischen Gründen, wenn sich die Kantenlängen des Elements halbieren. Wenn σ_y konvergieren soll, müßten die Verschiebungsdifferenzen $dx_2 - dx_3$ und $dy_2 - dy_3$ sich mit halber Kantenlänge ebenfalls halbieren. Das ist aber nicht der Fall. Diese Verschiebungsdifferenzen konvergieren zwar mit abnehmender Elementgröße gegen Null, aber nicht schnell genug. In Abb. 5.4.10 sind die Anteile $dy_2 - dy_3$ und $[S(2,5)]$ in Abhängigkeit von der Elementgröße aufgetragen. (Der Verlauf von $dx_3 - dx_4$ ist ähnlich und nicht dargestellt). Das Produkt aus beiden ergibt (zusammen mit dem dx -Anteil) die Spannung σ_y und wächst ins Unendliche.

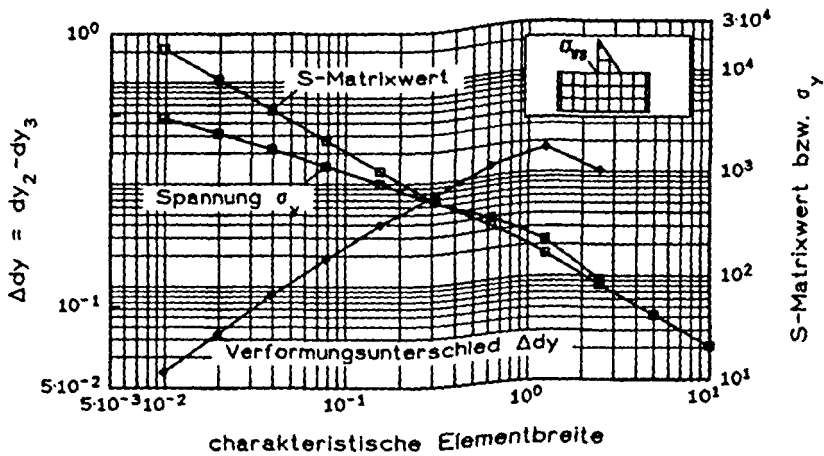
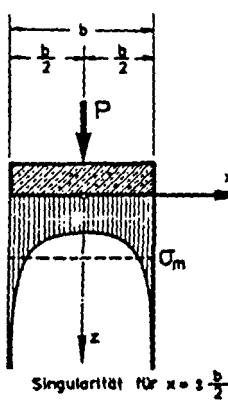


Abb.5.4.10: Komponenten der Spannung σ_y am wasserseitigen Mauerfuß

Dieses Resultat bestätigt das analytische Ergebnis der Spannungsberechnung unter einem starren Fundament, das schon BOUSSINESQ nachwies. Die Randspannungen unter einer starren Fundamentplatte sind theoretisch unendlich (zum Vergleich dargestellt in Abb.5.4.11).



Senkrechte Flächenlast

Fundamentstreifen starr, mittige Belastung

Sohldruckverteilung nach
Boussinesq:

$$\sigma_z(z=0) = \frac{2P}{\pi \cdot b} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{4x}{b}\right)^2}} \quad (9.16)$$

Näherung: $\sigma_m \approx \frac{P}{b}$

Abb.5.4.11: Sohldruckverteilung nach BOUSSINESQ (aus WITTKE, 1979)

In ROUVÉ et al. (1987) wird eine Untersuchung zur notwendigen Anzahl der Elemente in der Sohlfuge durchgeführt (Abb.5.4.12). Dort wird die Abhängigkeit der maximalen Hauptspannungen von der Anzahl der Knoten in der Sohlfuge dargestellt. Dort scheint diese Spannung konvergent zu sein und ihre Größe bei einer bestimmten Feinheit der Diskretisierung voll erfaßt werden zu können. Das dies nicht so ist, erkennt man erst bei noch feinerer Unterteilung an der Extremstelle und doppelt logarithmischer Darstellung.

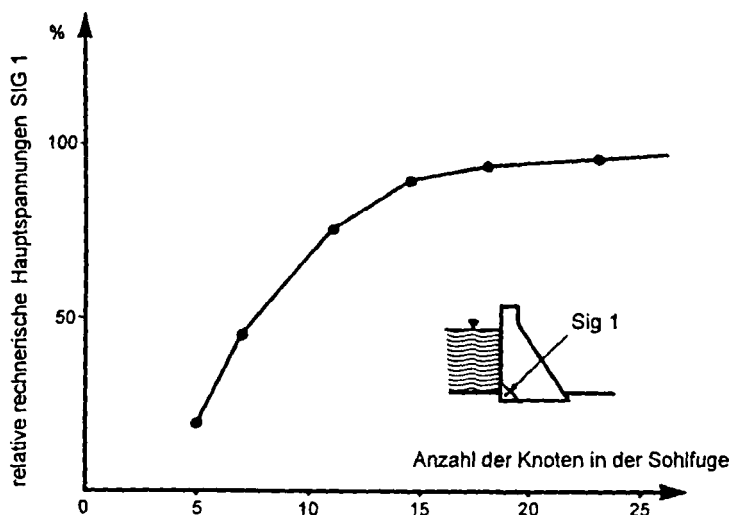


Abb.5.4.12: Abhängigkeit der maximalen Hauptspannungen von der Genauigkeit der Diskretisierung (aus ROUVÉ et al., 1987)

STEIN (1978) schlägt für die Abschätzung von Singularitäten wie dieser vor, eine analytische Lösung in das FE-Programm einzubauen. Aber auch die analytische Lösung gibt die Wirklichkeit nicht unbedingt zutreffend wieder, z.B. in der Kirchhoffschen Plattentheorie wegen der Vernachlässigung der Schubdeformation. Die Vergrößerung von Spannungsspitzen einer FE-Berechnung mit Hilfe von plausiblen Extrapolationen anhand von Vergleichssystemen ist daher stets angreifbar. Weiterhin ist gerade bei singulären Beanspruchungen eine ganzheitliche Betrachtungsweise geboten. Das wirkliche Baustoffverhalten, die Systemeigenschaften und die tatsächliche Beanspruchung können die Bedeutung von rechnerischen Singularitäten einschränken, so daß die Diskussion um bestimmte Zahlenwerte oft unwesentlich ist.

Im tatsächlichen Bauwerk baut sich die Extremspannung durch Relaxation oder Ribbildung ab. Ein Rib kann durch Fugen vorweggenommen werden, damit er sich nicht unkontrolliert bildet. Eine Bemessung nach dem Extremwert wäre in jedem Fall unwirtschaftlich. Da das Material (unbewehrter Beton) Zugspannungen nicht aufnehmen soll, muß bei realen Berechnungen von Staumauern mit nichtlinearem Materialgesetz bzw. Ribelementen gerechnet werden (s.u.).

Trotzdem muß die Netzeinteilung relativ fein sein, um Risse verfolgen zu können. Eine grobe Einteilung ist in jedem Falle nicht ausreichend. Bei weniger als fünf Elementen in der Sohlfuge treten nämlich im Lastfall Eigengewicht plus Wasserdruck sogar noch Druckspannung an der Wasserseite auf. Erst bei mehr als fünf Elementen wird überhaupt Zugspannung ausgewiesen.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit entwickelt einen Algorithmus zur Generierung von FE-Netzen, wie sie der Berechnung von Scheibenkonstruktionen wie z.B. Gewichtsstaumauern zugrunde zu legen sind. Mit Hilfe dieses Algorithmus wird die Genauigkeit von FE-Berechnungen gesteigert und eine weitgehend automatische Netzerzeugung und -verfeinerung ermöglicht. Die Netzverfeinerung wird erstmals mit der Fuzzy-Logik gesteuert. Als Optimalitätskriterium für die Güte des FE-Netzes dient ein neu entwickelter Fehlerindikator, durch den der Restfehler angegeben werden kann. Der Restfehler wird über Energiedifferenzen an den Knoten ermittelt.

Als Ergebnis der Arbeit werden insbesondere vorgestellt:

- die Einflüsse auf die Genauigkeit der FE-Ergebnisse,
- ein Fehlerindikator als Optimalitätskriterium,
- eine neue Verfeinerungsstrategie für FE-Netze, die mit der heute immer mehr angewandten Fuzzy-Logik gesteuert wird,
- und ein "Unordnungsfaktor", mit dem für ein gegebenes FE-Netz die zu erwartende Genauigkeit im Voraus abgeschätzt werden kann.

Algorithmen dieser Art sind im Bauingenieurwesen und in anderen Fachgebieten z.Z. noch Gegenstand der Forschung und Entwicklung und waren bisher für die Berechnung von Staumauern kaum verfügbar. Es wird außerdem gezeigt, daß der Restfehler einer FE-Berechnung mit dieser Verfeinerungsstrategie unter 1% sinken kann. Die Genauigkeit wird außerdem gesteigert (abgesehen von höherwertigen Elementen), wenn

- Viereckelemente statt Dreieckelementen verwendet werden,
- regelmäßige Elementstrukturen verwendet werden,
- Spannungen direkt an den Knoten berechnet und mit der Knotenenergie gewichtet werden.

Hiermit werden Forderungen nach einer zielsicheren und wirtschaftlichen Berechnung von Staumauern erfüllt. Diese Forderungen hat STEIN (1978) als "allgemein verfügbar erst im Laufe der nächsten Jahre" bezeichnet. Auch zehn Jahre später wurden nach STEIN (1988) Fehlerkontrollen und adaptive Netzverfeinerung in der Praxis noch selten verwendet.

An einem Anwendungsbeispiel (Anhang 1) wird gezeigt, wie mit geringem Zeitaufwand eine Vielzahl von Konstruktionsvarianten für eine Gewichtsstaumauer berechnet werden

kann. Durch automatische Netzverfeinerung mit dem entwickelten Verfahren ist dies mit vertretbarem Aufwand möglich. Die FE-Methode wird jetzt mehr und mehr als fortschrittliches Werkzeug in der täglichen Praxis eingesetzt werden und auf dem Gebiet der Berechnung von Staumauern das klassische Verfahren der Balkentheorie allmählich ersetzen.

Der nächste Entwicklungsschritt könnte in Richtung "Expertensystem für die Berechnung von Gewichtsstaumauern" gehen. In einer solchen Software würden Wissen und Erfahrung dieses Fachgebiets gespeichert sein. Programmierte Entscheidungsmechanismen werden Schlußfolgerungen ziehen können. Die "Fuzzy"-Logik wird dabei eine breitgefächerte Anwendung finden. Sie ermöglicht Entscheidungen nicht nur nach dem konventionellen Ja-Nein-Prinzip, sondern nach Graden der Wahrscheinlichkeit mittels unscharfer Beziehungen. Die Fuzzy-Logik befindet sich erst am Anfang ihrer Entwicklung. Bisher spielt sie im Bereich der Prozeßsteuerung (und hier besonders in Japan) eine Rolle.

Mit dem Expertensystem wird der Bearbeiter in ingenieurgerechter Dialogform, möglichst in natürlicher Sprache, kommunizieren. Das Resultat wird die weitgehend automatische Standsicherheitsberechnung sein oder z.B. auch - unter Vorgabe bestimmter Bedingungen - die optimale Querschnittsform für eine Staumauer. So könnte in der Zukunft die Planung einer Staumauersanierung auch für den praktisch denkenden Ingenieur erleichtert werden, der nicht selbst ein Fachmann für Standsicherheitsberechnungen mit numerischen Berechnungsverfahren ist. Das Expertensystem darf allerdings nicht als "black box" benutzt werden. Der Ingenieur mit einem gesunden Mißtrauen gegenüber allen Rechenergebnissen wird nicht überflüssig. Er wird in kürzerer Zeit höherwertigere Ergebnisse hervorbringen. Expertensysteme sind z.Z. in mehreren Fachbereichen im Aufbau. Entsprechende Anstrengungen auf dem Gebiet der Staumauersanierungen sind bisher nicht bekannt geworden.

Bisherige Programme verlangen vom Anwender fundierte Kenntnisse in elektronischer Datenverarbeitung. Dies gilt auch, wenn hinsichtlich Benutzerfreundlichkeit schon gewaltige Fortschritte erzielt worden sind. Expertensystemen, die weniger Detailwissen voraussetzen, dürfte in allen Fachgebieten die Zukunft gehören. "Auf Knopfdruck", wie vielfach erwartet, wird aber - auch in absehbarer Zeit - eine Staumauerberechnung nie zu haben sein.

Anhang:

Anwendungsvorschlag (Staumauer mit vorgesetzter Dichtwand)

Das Ziel der Entwicklung des vorgenannten Berechnungsverfahrens ist die Anwendung bei der Strukturoptimierung von zu sanierenden älteren Gewichtsstaumauern. In Nordrhein-Westfalen gibt es 21 Gewichtsstaumauern des sog. Intze-Typs, die um die Jahrhundertwende gebaut worden sind und nun einer Sanierung bedürfen. Bei einer Reihe dieser Talsperren hat die Sanierung begonnen oder ist bereits abgeschlossen (Heilenbecke, Fuelbecke, Jubach, Brucher, Dreilägerbach, Hasper, Eschbach, Kerspe, Ennepe, Lingese usw.). Für alle diese Projekte war eine Standsicherheitsberechnung nach der FE-Methode erforderlich und ist bisher in 9 Fällen mit dem Programm HOFE ausgeführt worden. Die Berechnung einer solchen Talsperre wird im folgenden dargestellt. Die Ennepe-Talsperre wurde gewählt, weil deren Berechnungsergebnisse so noch in die Planung einbezogen werden konnten.

Für den Entwurf stehen zwei Hauptvarianten zur Debatte:

- Vorgesetzte Dichtwand mit Gleitschicht bis zur Sohlfuge (sog. "Fuelbecke-Lösung", Variante 1)
- desgleichen mit Gleitschicht bis zum Kontrollgang, Fuge oben im Kontrollgang, Gleitschicht im Kontrollgang bis zur Sohlfuge (sog. "Heilenbecke-Lösung", Variante 2)

Außerdem sind weitere Varianten denkbar, die sich aus einer Kombination von beiden Lösungen und der Verlängerung oder Verkürzung der Fugen und Gleitschichten ergeben. Alle diese Varianten lassen sich auf zwei Ausgangsdiskretisierungen zurückführen. Weitere Varianten sind auch dadurch möglich, daß der Kontrollgang in verschiedenen Höhen angeordnet werden kann. Letztlich ist die Breite der Mauerverstärkung festzulegen. Für diese Fälle muß der Ausgangsumriß verändert werden. Andere Sanierungsvarianten (siehe z.B. BIENER, 1983), die selbstverständlich ihre Berechtigung haben und die evtl. als Sondervorschläge bei der Ausschreibung erwartet werden, wurden hier nicht untersucht, weil die geplante Variante mit vorgesetzter Dichtwand technisch und wirtschaftlich als optimal angesehen werden kann.

Der zunächst entworfene Querschnitt ist in Abb.A.1 zu sehen.

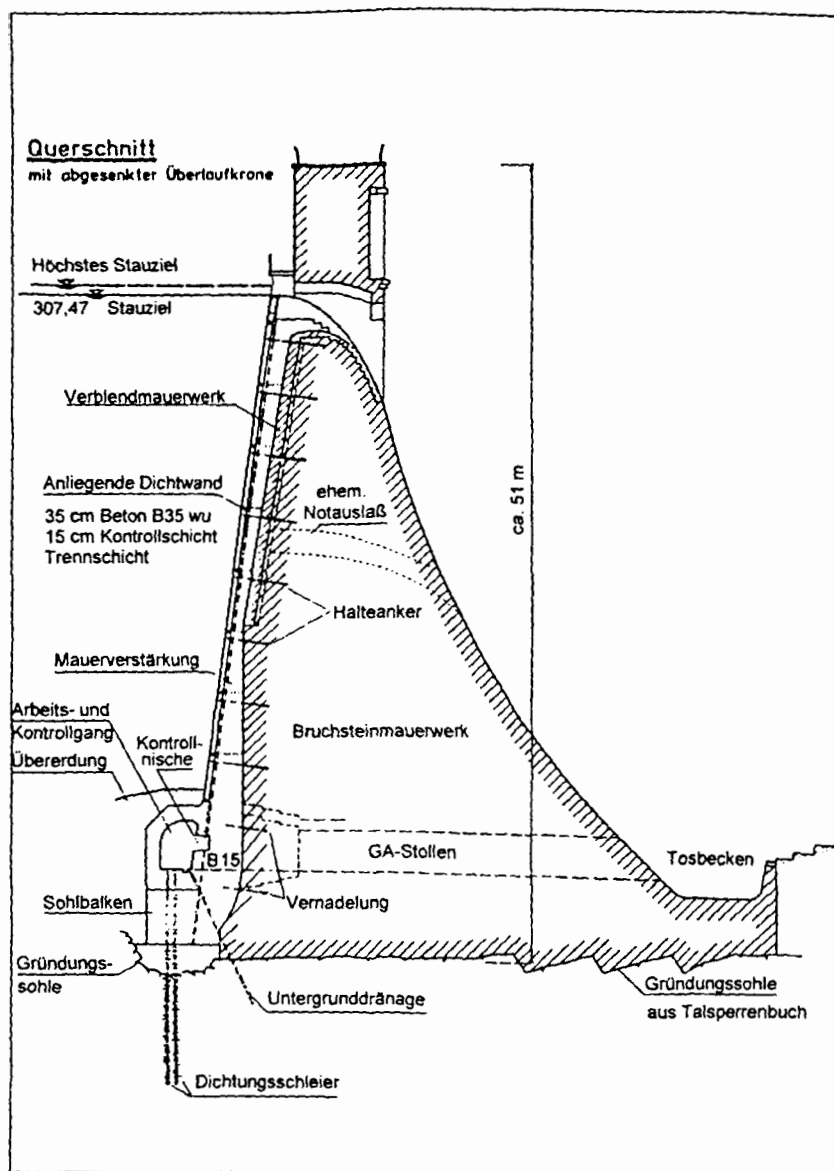


Abb.A.1: Regelquerschnitt (1. Entwurf)

A.1 Materialbereiche

Zuerst werden die Umrisse der Materialbereiche als Zwangspunkte eingegeben (siehe Abb.A.2 und A.3). Dann werden die in Abb.A.4 und A.5 erkennbaren Innenknoten hinzugefügt. Sie werden in diesem Fall nicht automatisch rasterförmig erzeugt, sondern einzeln sinnvoll eingegeben, damit das Generierungsprogramm das erste FE-Netz erzeugen kann, wie es in Abb.A.6 und A.7 dargestellt ist. Da der Querschnitt unregelmäßig und kompliziert ist, hätte ein regelmäßiges Raster zu unregelmäßigen Elementformen an den Übergängen der Materialbereiche geführt.

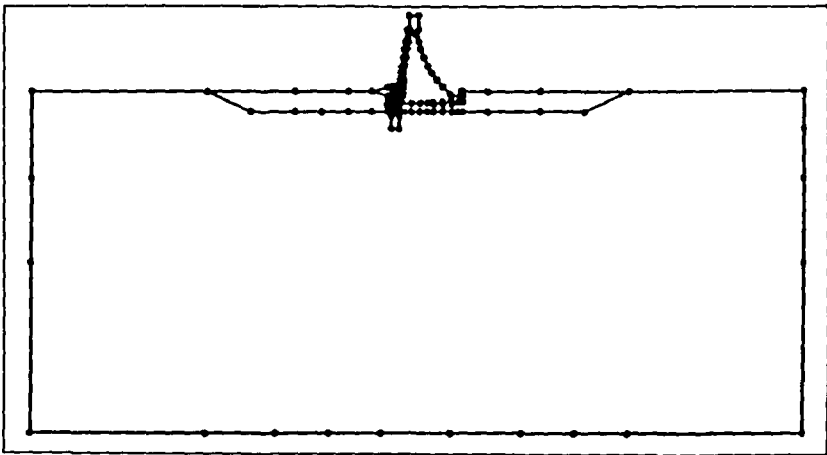


Abb.A.2: Rand und Materialbereiche des gesamten Berechnungsausschnitts

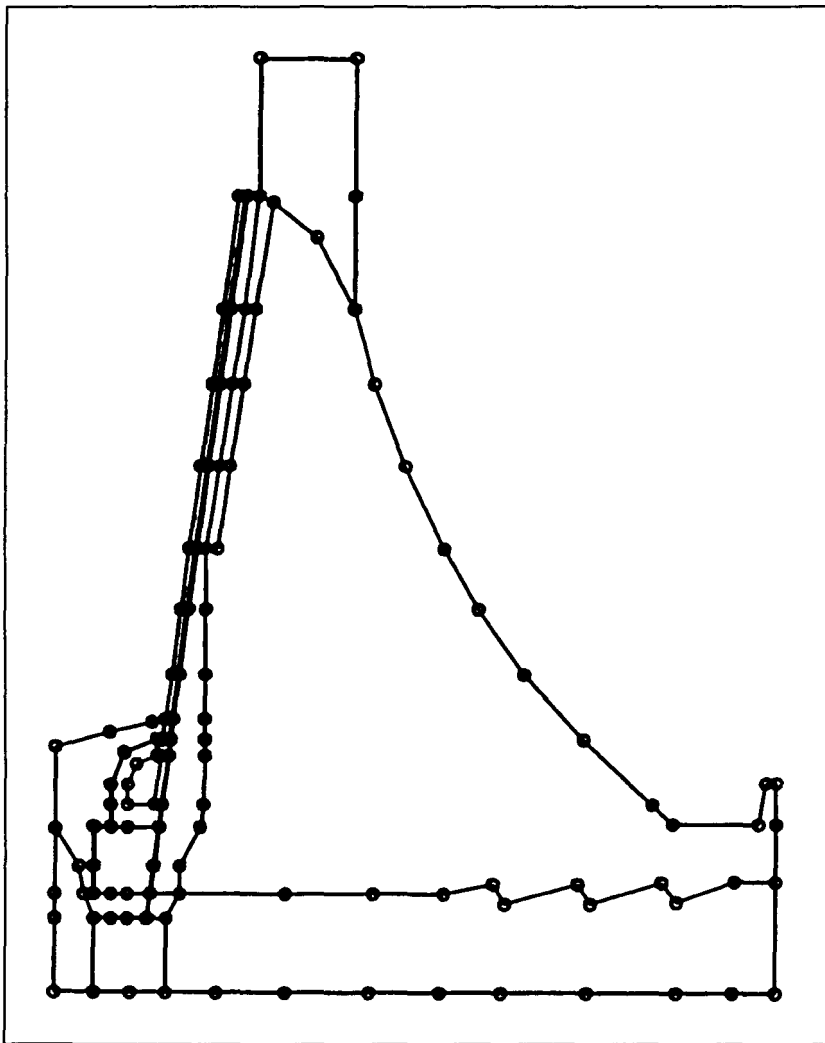


Abb.A.3: Rand und Materialbereiche, Ausschnitt

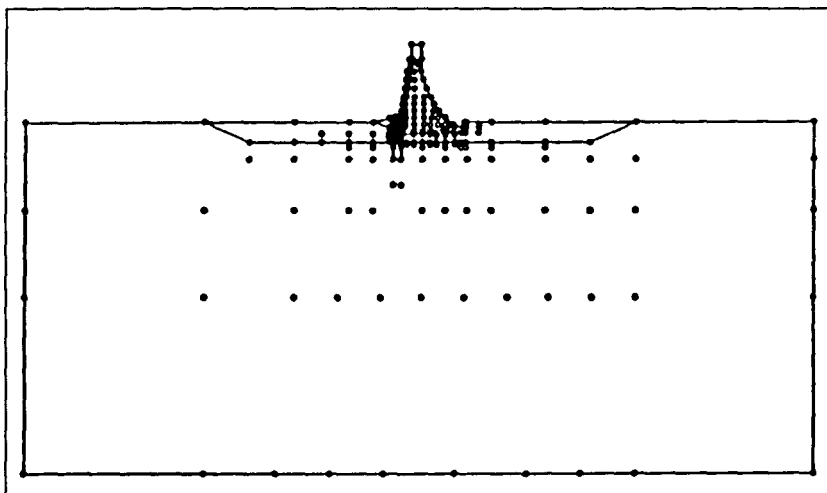


Abb.A.4: Rand und Materialbereiche des gesamten Berechnungsausschnitts mit Innenknoten

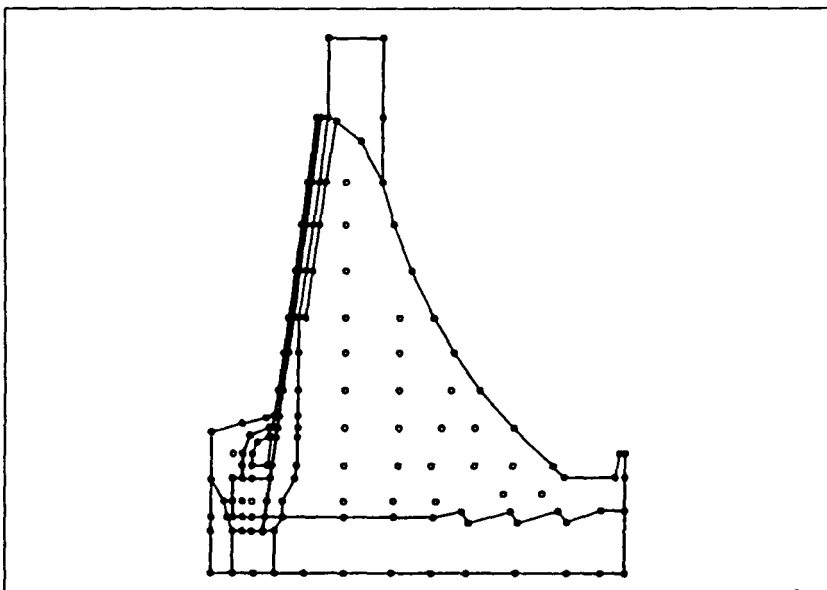


Abb.A.5: Rand und Materialbereiche mit Innenknoten, Ausschnitt

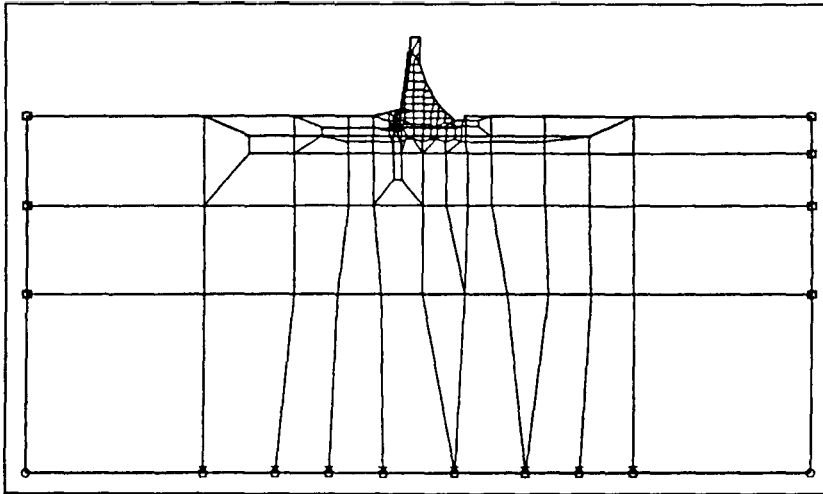


Abb. A.6: Ausgangs-FE-Netz, gesamter Berechnungsausschnitt

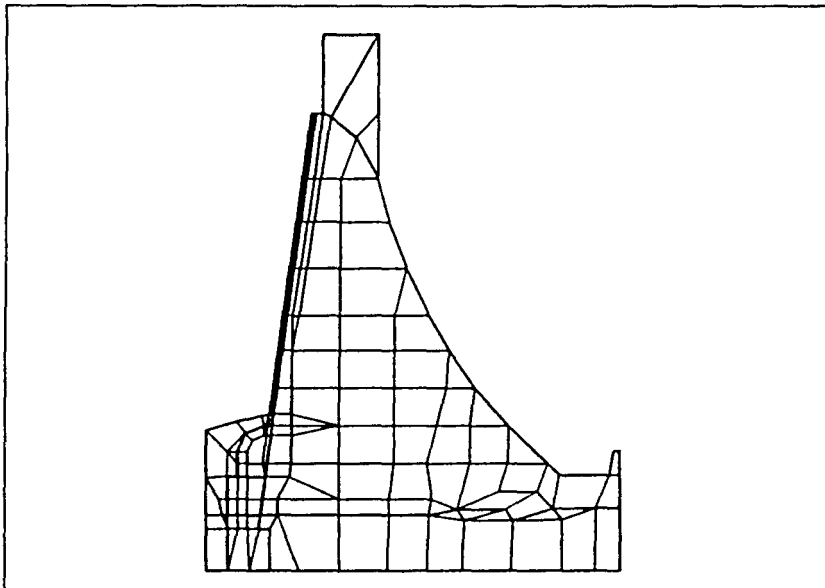


Abb. A.7: Ausgangs-FE-Netz, Ausschnitt

A.2 Netzverfeinerung

Für das erzeugte Ausgangs-FE-Netz werden nun alle notwendigen Randbedingungen, Lasten usw. eingegeben. Damit wird eine erste Berechnung des Temperaturfeldes, der Sickerströmung und der elastostatischen Verformung ausgeführt. Anschließend wird das FE-Netz in drei Schritten mit folgenden Parametern verfeinert:

	Schritt 1	Schritt 2	Schritt 3
Prozentsatz	100%	80%	20%
Spannungsart	σ_y	σ_y	σ_y
zul. Seitenverhältnis	6:1	3:1	3:1
Grenzkantenlänge	0,4m	0,4m	0,25m
Dreiecke unempfindlicher	10-fach	10-fach	10-fach
Verhältnis Spannung/Energie	50:50	50:50	50:50
Bevorzugung der Y-Richtung	2-fach	2-fach	2-fach

Tab.A.8: Verfeinerungsparameter

Diese Parameter sind so gewählt, daß

- das endgültige Netz so regelmäßig wie möglich wird,
- das Netz 4000-5000 Knoten hat und
- die maßgebenden Bereiche am wasserseitigen Mauerfuß und um den Kontrollgang herum besonders verfeinert werden, wobei die Elementgrößen hier trotzdem nicht zu klein sein sollen.

Wenn später mit gerissenen Elementen gerechnet werden wird, wäre es nicht sinnvoll, am Rißanfang sehr kleine Elemente und am Reißende größere zu haben. Dies aber würde unvermeidlich, wenn bei einem oder zwei weiteren Verfeinerungsschritten die Elemente im unteren Sohlbalken (am unteren Ende der Gleitschicht) weiter unterteilt würden. - (Die Elemente im Reißbereich sollten etwa gleiche Größe haben oder nur am Reißende kleiner sein).

Neue Knoten auf gekrümmten Rändern (Kontrollgang; Überfall) werden nicht in die Mitte der zu unterteilenden Kante gelegt, sondern auf den Mittelpunkt der beschreibenden Funktion, hier ein Kreisbogen. Die vier FE-Netze haben die folgenden Knoten- und Elementezahlen:

	0.Schritt	1.Schritt	2.Schritt	3.Schritt
Knoten	258	863	2706	4360
Elemente	248	841	2730	4538

Tab.A.9: Knoten- und Elementezahlen der FE-Netze in den Verfeinerungsschritten

Die in drei Schritten erzeugten Netze sind in Abb.A.11-A.16 zu sehen. Nach der Verfeinerung wurde das Netz jeweils optimiert (Zusammenfassung von Doppeldreiecken, Umordnung von Dreieck-Viereck-Paaren). Für die folgende Berechnung, nicht aber für den nächsten Verfeinerungsschritt, werden die Netze dann noch geglättet.

A.3 Spannungen

Der Spannungszustand im Lastfall Stauziel (Wasserdruck einschließlich Eigengewicht) ist in diesen vier FE-Netzen wegen der unterschiedlichen Anzahl der Elemente nicht identisch. Im folgenden sind die vertikalen Zugspannungen dargestellt, die nach linear-elastischem Materialgesetz errechnet werden, d.h. ohne gerissene Zonen (Abb.A.17-A.20). Die Isolinien der Druckspannungen wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen (bei farbiger Darstellung würde Zug rot und Druck blau gezeichnet). Die Veränderung des Maximalwertes von σ_y ist aus der folgenden Tabelle abzulesen. Beide Stellen sind Extremstellen, wo die Spannung nicht konvergiert. Diese Spannung wird abgebaut, wenn mit gerissenen Zugzonen gerechnet wird. Die Größe der beiden Zugzonen verändert sich vom 2. zum 3. Schritt nicht mehr; das 4. Netz ist also ausreichend fein. - Ebenso eine Extremstelle ist der Ort der maximalen Druckspannung am unteren Ende der Gleitschicht, gegenüber der Stelle mit der maximalen Zugspannung.

[kN/m ²]	0.Schritt	1.Schritt	2.Schritt	3.Schritt
Max. Zugspg., Sohlbalken links	620,5	1003	1375	1786
Max. Zugspg., Sohlbalken rechts	664,3	1433	2194	3061
Max. Druckspg.	2666	2852	3499	4607

Tab.A.10: Maximale Spannungen σ_y in den Verfeinerungsschritten

A.4 Konstruktionsvarianten

Mit der so entstandenen Diskretisierung (4360 Knoten) werden sechs Entwurfsvarianten gebildet, die sich durch die Anordnung von Gleitfugen unterscheiden. Mit einer geänderten Diskretisierung entstehen zwei weitere Varianten mit unterschiedlicher Fugenanordnung ("Heilenbecke"). Die Varianten sind in Abb.A.21 dargestellt. Diese acht Varianten werden zum einen linear-elastisch und zum anderen nichtlinear-plastisch mit gerissenen Elementen berechnet, um die statisch günstigste Variante herauszufinden. Für den elastischen Fall sind die Zugzonen mit den Maximalwerten für σ_y in Abb.A.22 dargestellt.

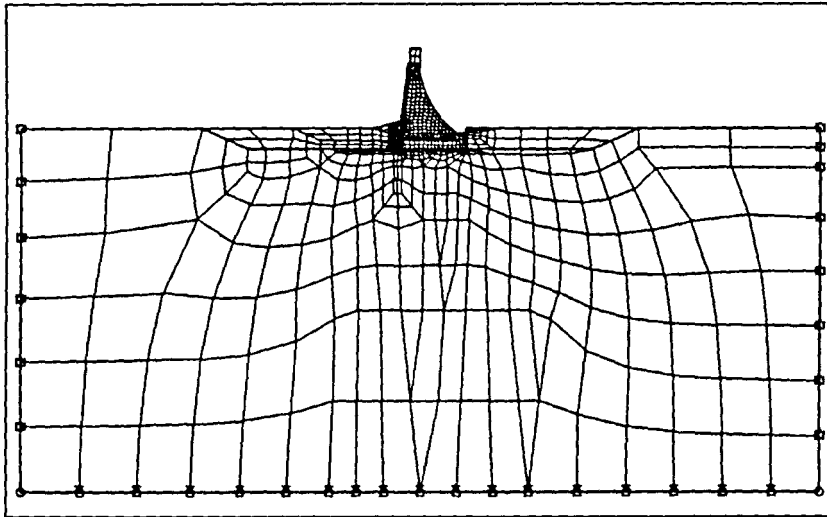


Abb.A.11: Gesamtes FE-Netz nach dem 1. Verfeinerungsschritt

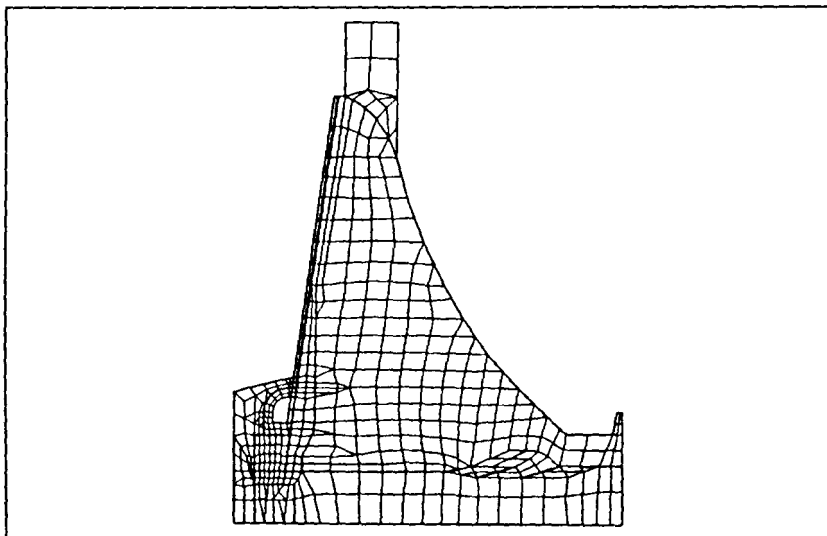


Abb.A.12: FE-Netz nach dem 1. Verfeinerungsschritt, Ausschnitt

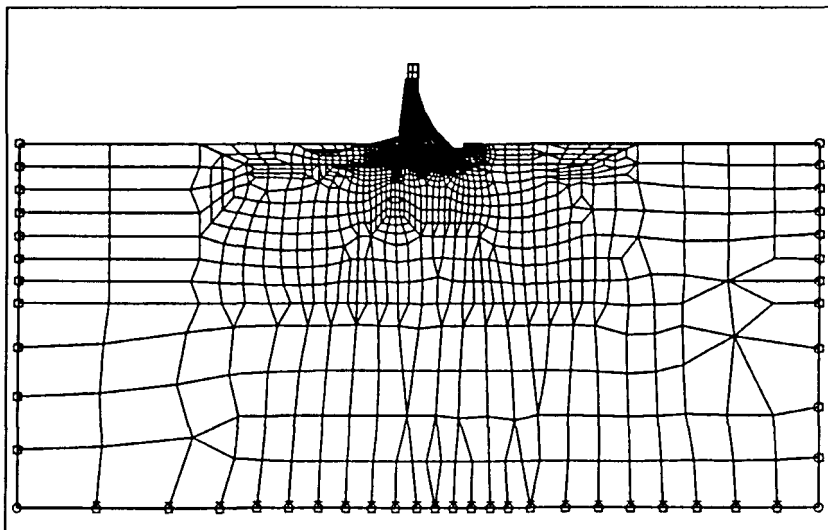


Abb. A.13: FE-Netz nach dem 2. Verfeinerungsschritt, gesamt

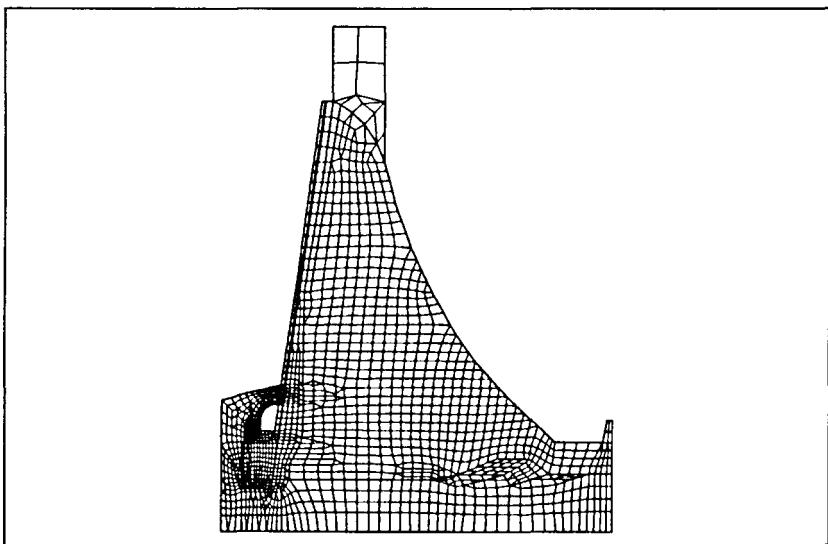


Abb. A.14: FE-Netz nach dem 2. Verfeinerungsschritt, Ausschnitt

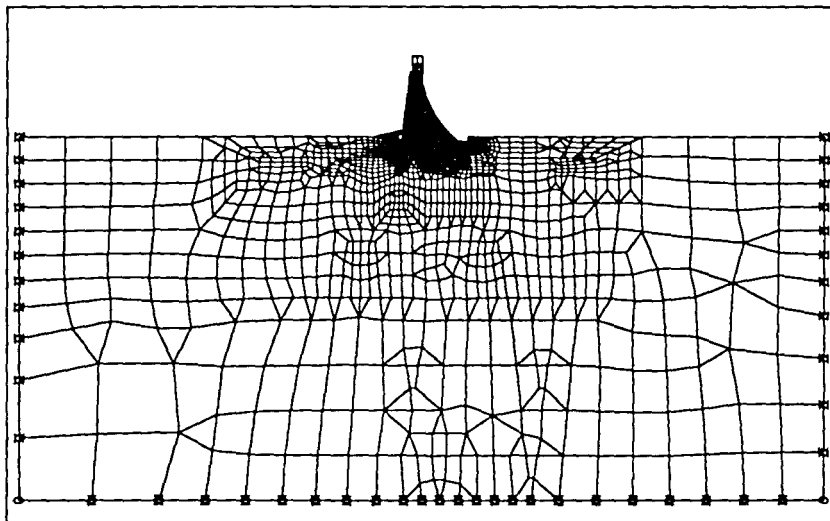


Abb.A.15: FE-Netz nach dem 3. Verfeinerungsschritt, gesamt

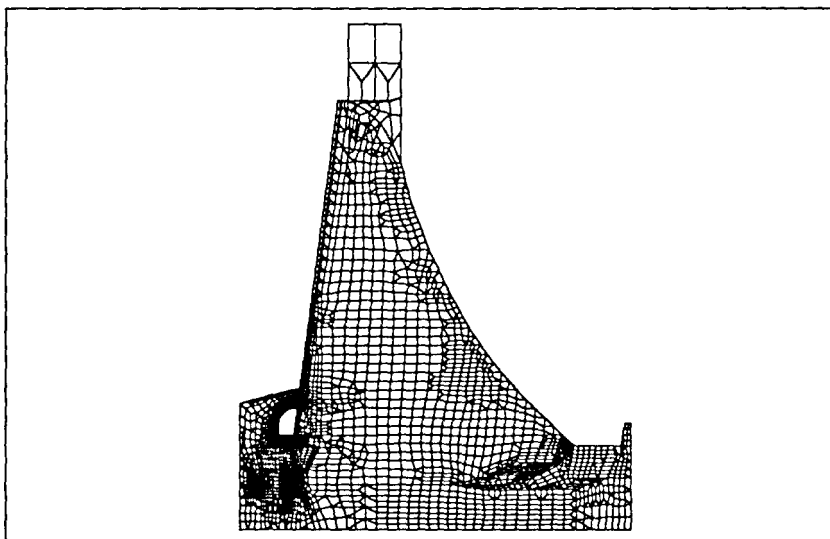


Abb.A.16: FE-Netz nach dem 3. Verfeinerungsschritt, Ausschnitt

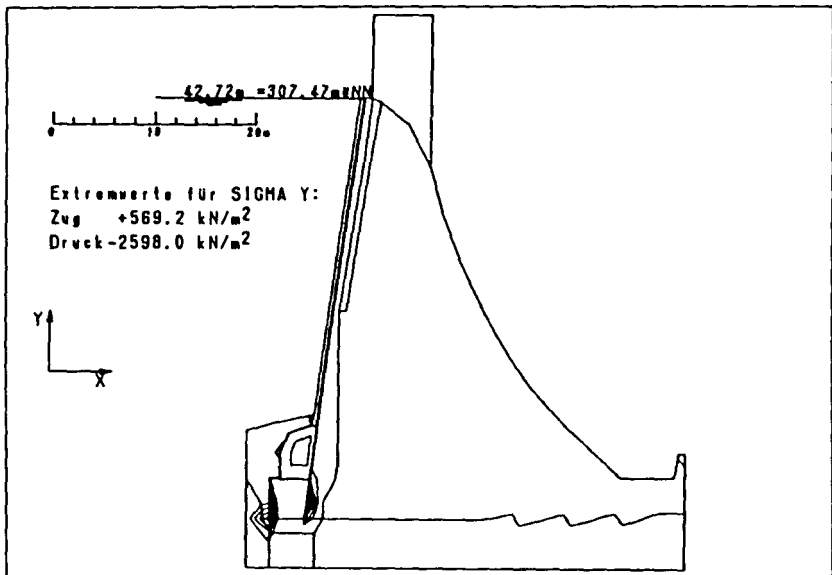


Abb.A.17: Vertikalspannungen bei der Ausgangsdiskretisierung (258 Knoten)

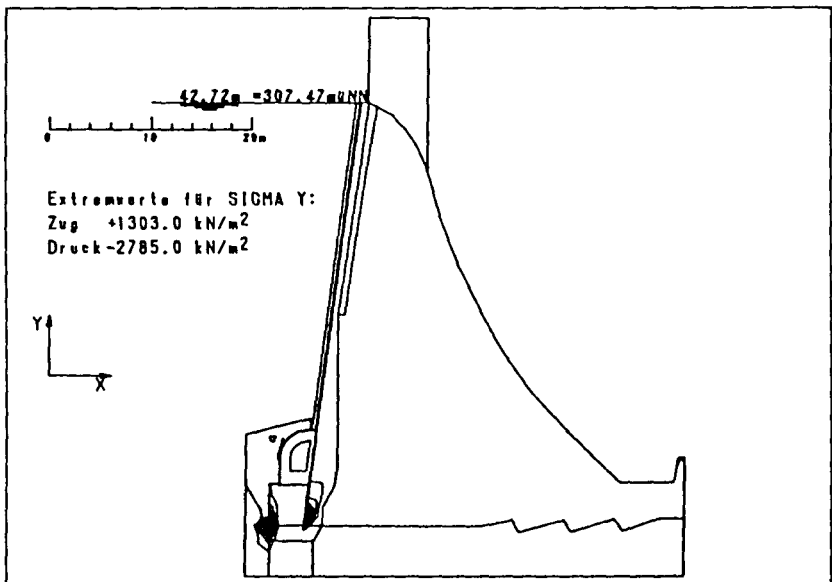


Abb.A.18: Vertikalspannungen im 1. Verfeinerungsschritt (863 Knoten)

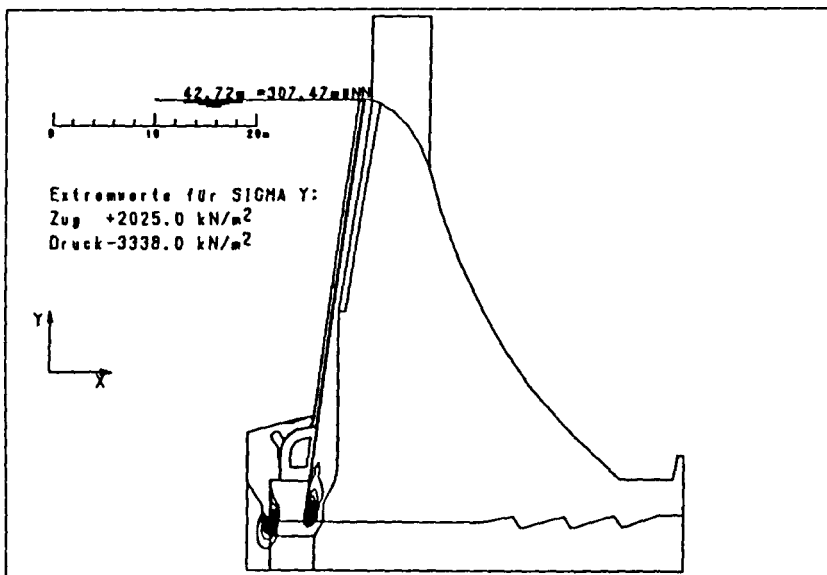


Abb.A.19: Vertikalspannungen im 2. Verfeinerungsschritt (2706 Knoten)

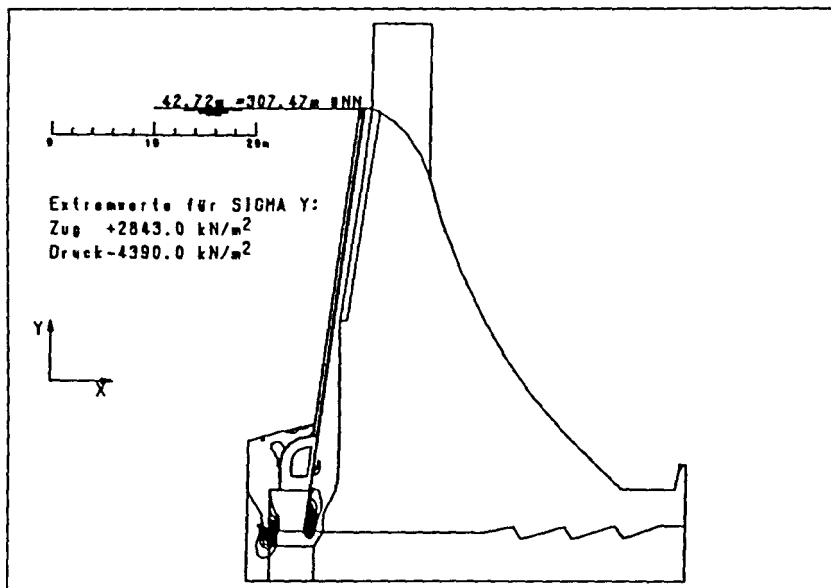


Abb.A.20: Vertikalspannungen im 3. Verfeinerungsschritt (4360 Knoten)

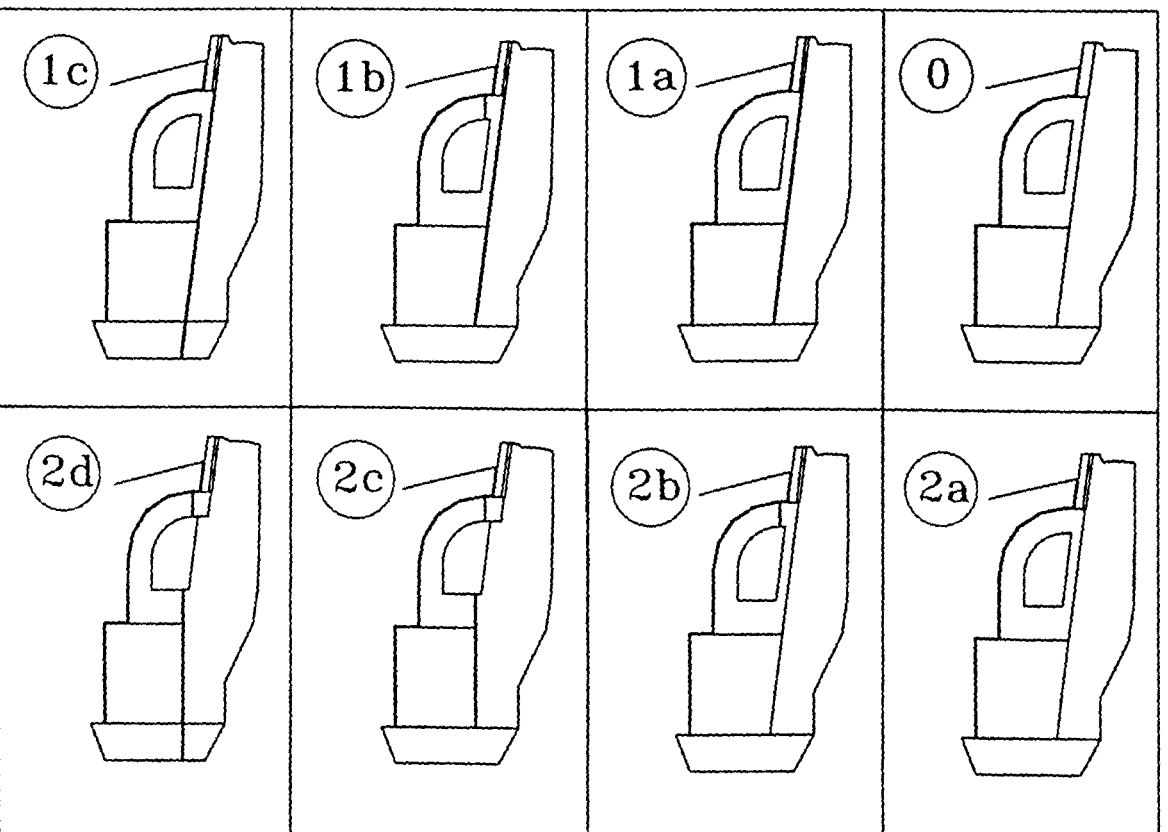


Abb. A.2: Acht Varianten mit verschiedenen Fugenanordnungen am Kontrollgang

In Abb.A.23 sind die gleichen acht Varianten dargestellt, wenn sie nach nichtlinearem Materialgesetz gerechnet werden. Zu sehen ist die Ausdehnung der Rißbereiche.

A.4.1 Gemeinsames

Dem Untergrund sind die Gebirgs- (oder Primär-) -spannungen aus seinem Eigengewicht eingeprägt. Sie überlagern sich mit den Spannungen aus dem Bauwerk. Wenn diese überlagerten Spannungen die zulässigen Spannungen überschreiten bzw. die zulässigen Dehnungen überschritten werden, tritt ein Riß auf. Deshalb wird bei diesen Berechnungsgängen das Gewicht des Untergrundes voll angesetzt. In den Darstellungen der verformten Staumauern ist das Gewicht des Untergrundes demgegenüber nicht mehr enthalten, denn für die meßbaren Verformungen sind die Vorverformungen aus Eigengewicht unmaßgeblich. Für Vergleiche mit Verformungsmessungen müßten allerdings erst noch die Steifigkeitsparameter kalibriert werden.

Die gerissenen Elemente werden einzeln ermittelt, d.h. in jedem Iterationsschritt nur eines. Als Rißbedingung wird die größte Dehnung gewählt. Dadurch reißen zuerst vorzugsweise die Elemente vor dem Kontrollgang in ungefähr horizontaler Richtung. Spannungen im Bauwerk werden bereits hierdurch abgebaut. Nur bei einheitlichem Material könnte diese Rißbedingung bis zum vollständigen Spannungsabbau beibehalten werden, nicht aber bei Materialbereichen mit sehr verschiedenen Elastizitätsparametern. Nachdem eine erste Rißzone ermittelt ist ($\epsilon_{x,zul}=0,1$), wird deshalb die Rißbedingung geändert und nun die Überschreitung einer zulässigen Zugspannung gewählt. Da die größten Zugspannungsspitzen im Bauwerk (und nicht im Untergrund) sind, werden sie nunmehr abgebaut.

Weder für die zulässige Dehnung noch für die zulässige Zugspannung kann man den Wert "Null" vorgeben; das würde wegen des Extremalcharakters von Spannungsspitzen zu unrealistisch großen Rißbereichen führen. Eine Restzugspannung (ca 100-200 kN/m²) muß daher zugelassen werden und entspricht auch den tatsächlichen Gegebenheiten (Betonzugfestigkeit, Bewehrung).

A.4.2 Varianten mit "Fuelbecke"-Fugen (1A - 1C)

Aus Abb.A.22 ist folgendes zu erkennen:

In allen Fällen befindet sich vor dem Kontrollgang eine Zone mit großen Zugspannungen, die durch die Form des Sohlbalkens hervorgerufen wird. Sie ist besonders groß, wenn die gesamte Betonverstärkung ohne Fugen ausgeführt wird (0). Am unteren Ende der Gleitschicht ("Fuelbecke-Typ") ist ebenfalls eine Zugzone, unabhängig von dem Ort, an dem sie im Sohlbalken endet (1A/1C). Kommt eine Fuge oben im Kontrollgang hinzu, verändert sich die Zugzone und ihr Maximalwert nur wenig (1B).

In allen Varianten gibt es eine gerissene Zone vor dem Kontrollgang. Sie reicht mehr oder weniger in allen Fällen bis unter die wasserseitige Kante des Kontrollgangs, teilweise auch noch geringfügig unter den Kontrollgang.

Bei den Varianten 1A-1C (Fuelbecke-Typ) gibt es jeweils am unteren Ende der Gleitschicht eine größere gerissene Zone. Sie liegt allerdings hinter der Dichtungsebene und ist daher nicht schädlich. Die Masse der Dichtwand ist bei dieser über 50 m hohen Mauer vergleichsweise groß. Die Dichtwand belastet den Kontrollgang einseitig, so daß dieser wasserseitig Zugspannungen erhält und luftseitig große Druckspannungen entstehen. Er wird in eine Kippbewegung zur Luftseite gezwungen und stützt sich gegen den Mauerkörper ab. Dadurch erhält der Mauerkörper Zugspannungen an seiner Wasserseite.

Insgesamt ist daher der "Fuelbecke-Typ" hier weniger günstig.

A.4.3 Varianten mit "Heilenbecke"-Fugen (2A - 2D)

In Variante 2A-2D endet die Gleitschicht oberhalb des Kontrollgangs. Deshalb gibt es hier an dieser Stelle Zugspannungen (Abb.A.22). Sie werden kleiner, wenn eine Fuge nach dem "Heilenbecke"-Typ hinzukommt (2C-2D). - Am unteren Ende dieser Fuge sind vergleichsweise geringe Zugspannungen. Diese Fuge bis zum Fels hinunterzuführen, würde zu geringfügig größeren Spannungen an dieser Stelle führen (2D). Eine Fuge allein im oberen Kontrollgang verändert wie in 1B den Spannungsverlauf wenig (2B). 2C ist hiernach die günstigste von allen acht Varianten.

Bei den Varianten 2A-2D ist am unteren Ende der oberen Gleitschicht oberhalb des Kontrollgangs eine gerissene Zone zu beobachten (Abb.A.23), die aber wesentlich kleiner ist als bei 1A-1C. In 2C und 2D ist zusätzlich eine nur kleine gerissene Zone am unteren Ende der Fuge unter dem Kontrollgang. Das Gewicht der Dichtwand überdrückt hier fast vollständig die Zugspannungen.

Der Kontrollgang wird weniger unsymmetrisch belastet als bei der Fuelbecke-Lösung. Deshalb ist in statischer Hinsicht die Variante 2C mit der "Heilenbecke-Fuge" hier günstiger als die "Fuelbecke"-Lösung.

A.4.4 Sonstige Varianten

Folgende Varianten werden zusätzlich untersucht und dabei jeweils die "Fuelbecke"- und die "Heilenbecke"-Lösung verglichen:

- Tiefer gelegter Kontrollgang
- Breitere Verstärkung (um 1 m breiter) (B15)
- Sohlbalken mit gerader, senkrechter Wasserseite bis zum Untergrund

A.4.4.1 Tiefer gelegter Kontrollgang

Bei einem tiefer gelegten Kontrollgang entfällt der obere Sohlbalken. Der Kontrollgang liegt 4,10 m tiefer. Der Kontrollgang mit unterem Sohlbalken ist deutlich weniger hoch und schlank. Die Belastung an wasserseitiger und luftseitiger Kante wird günstiger. Diesem Vorteil steht entgegen, daß das Drainagewasser nicht mehr im natürlichen Gefälle durch den Grundablaß abfließen kann, sondern gepumpt werden muß. Die Pumpkosten sind ein so schwerwiegender Nachteil, daß diese Variante letztlich nicht in Frage kommt.

A.4.4.2 Breitere Verstärkung

Eine breitere Verstärkung führt selbstverständlich dazu, daß die Zugspannungen an der Wasserseite kleiner werden oder verschwinden. Deshalb wurde eine Variante mit einer um 1 m breiteren Betonverstärkung gerechnet. Die Zugspannungsspitzen werden dadurch tatsächlich reduziert. Sie werden aber nicht vollständig abgebaut. Durch ihren Extremalcharakter bleiben für die "Fuelbecke"- wie für die "Heilenbecke"-Variante immer noch geringe Zugzonen erhalten. Um diese abzubauen, müßte die Verstärkung um ca. noch einen weiteren Meter verbreitert werden. Wie bereits erläutert, wäre dies unwirtschaftlich; kleine gerissene Bereiche sind unschädlich, wenn sie hinter der Dichtungsebene liegen.

A.4.4.3 Sohlbalken mit senkrecht durchlaufender Wasserseite

Der untere Sohlbalken wird normalerweise so ausgeführt, daß die Baugrube mit Beton als Fegersatz voll ausgefüllt wird. Der obere Sohlbalken wird darüber nach oben geführt. Zwischen beiden entsteht ein Versatz, der im Sinne der FE-Statik eine Extremstelle ist. Wenn der untere Sohlbalken eingeschalt würde, könnte die Wasserseite des Kontrollgangs senkrecht durchlaufend hergestellt werden. Dann gäbe es die einspringende Ecke nicht mehr, an der Zugspannungen unvermeidlich sind.

Durch die Vergleichsberechnung hat sich gezeigt, daß die Zugspannungen lediglich weiter nach unten gezogen werden. Sie treten jetzt an der Unterseite des unteren Sohlbalkens auf und damit auch näher an der Verpressungsebene. Dort ist es wahrscheinlich, daß sich vertikale Risse bilden. Dies ist hier ungünstiger als etwas weiter oben, wo Zugspannungen durch die Bewehrung des Beton aufgenommen würden.

Aus diesem Grund ist ein Sohlbalken mit senkrecht durchlaufender Wasserseite hier nicht vorteilhaft.

A.4.5 Ausgeführte Lösung

Welche Lösung bei der Ennepe letztendlich ausgeführt werden wird, ist z.Z. noch nicht entschieden. Neben der statischen Standsicherheit und natürlich den Gesamtkosten spielen noch weitere Kriterien eine Rolle, wie z.B.:

- Anordnung der Arbeitsfugen
- Ausführbarkeit der Fugenbänder
- Vorhaltung von Pumpen für das Drainagewasser
- usw.

Mit Hilfe der hier gezeigten automatischen Netzverfeinerung wurde es möglich, in kurzer Zeit eine Vielzahl von Varianten durchzurechnen. Damit wurde für die Entscheidung über die günstigste Lösung in statischer Hinsicht eine wichtige Grundlage geschaffen.

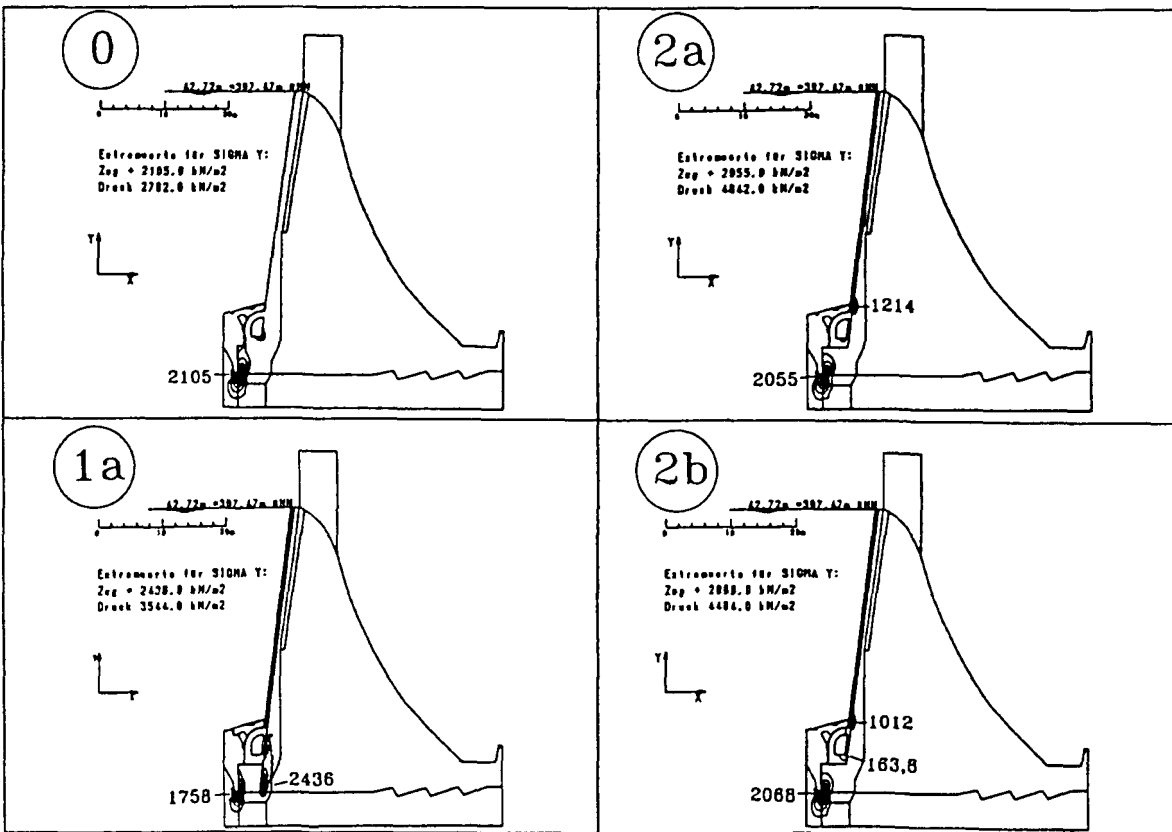


Abb. A. 22a: Vertikalspannungen bei den acht Entwurfsvarianten (1. Teil)

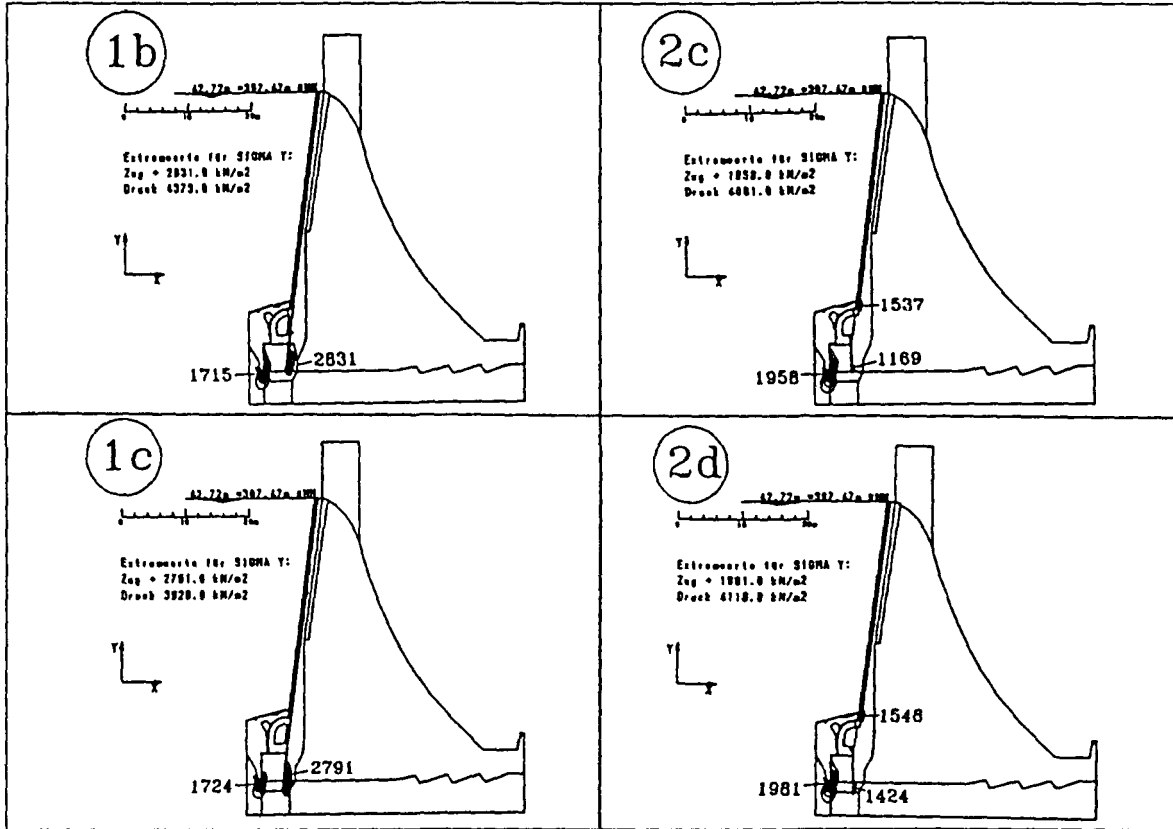


Abb. A.22b: Vertikalspannungen bei den acht Entwurfsvarianten (2. Teil)

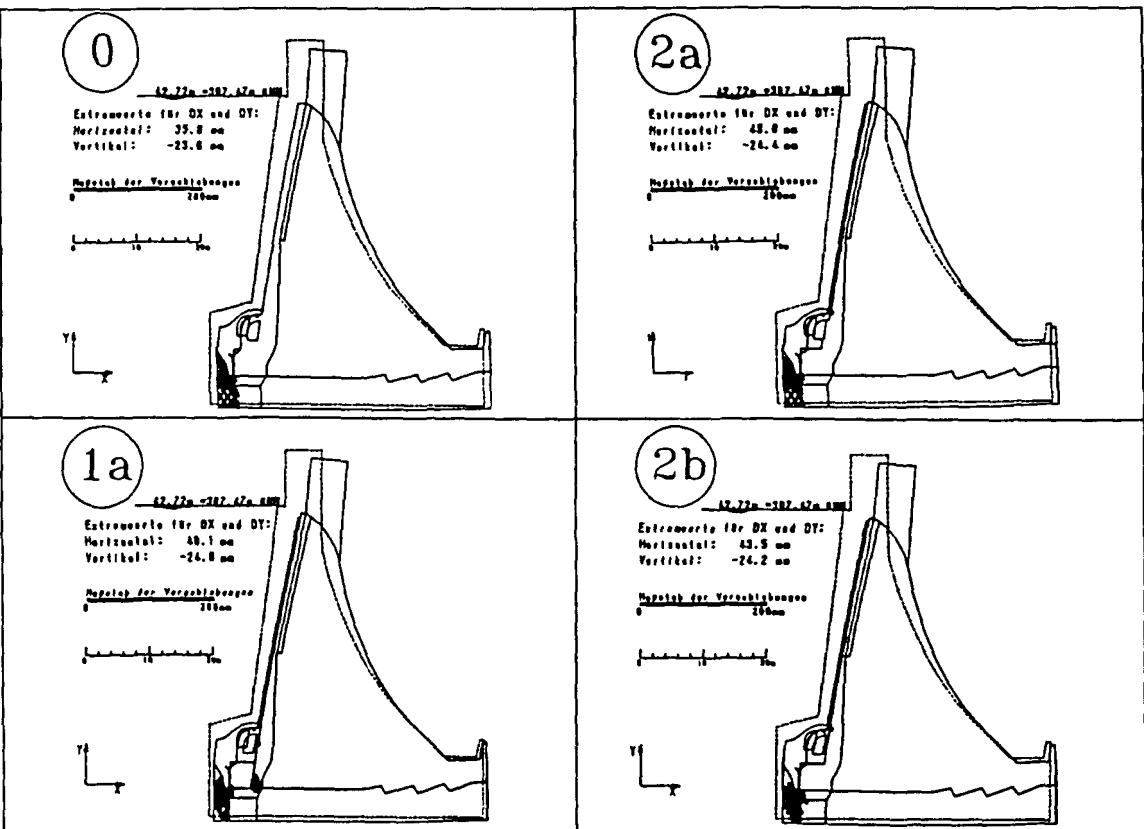


Abb. A.23a. Geissene Bereiche bei den acht Entwurfsvarianten (1. Teil)

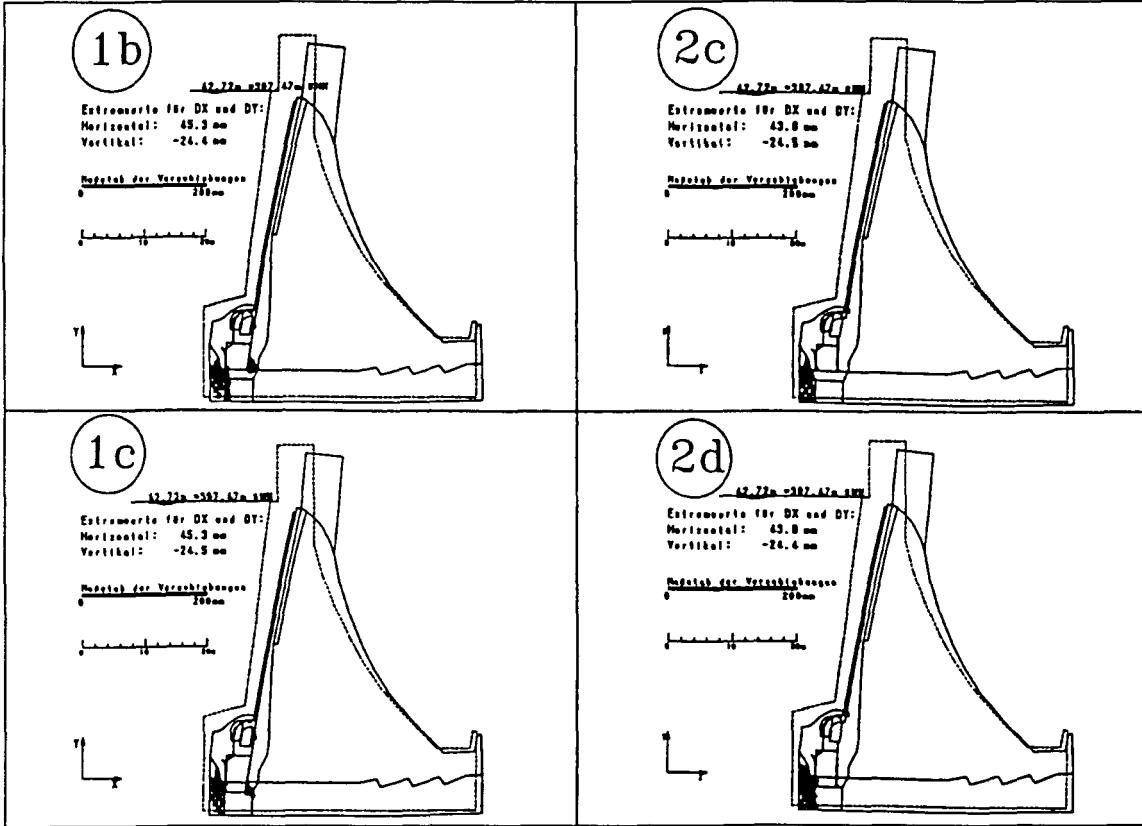


Abb.A.23b: Gerissene Bereiche bei den acht Entwurfsvarianten (2. Teil)

Glossar

Absenkung

=(oder Durchbiegung) die vertikale Verschiebung des Kragarms an der Stelle $x=L$, auf den Vergleichswert nach der Balkentheorie bezogen

Adaption

=Anpassung

adaptiv

=anpassend

adaptive Netzverfeinerung

=anpassende Verfeinerung des FE-Netzes durch Einfügen neuer oder höhergradiger Elemente an den Stellen, an denen Spannungen, Fehler o.a. besonders groß sind

Airy'sche Spannungsfunktion

=die Differentialgleichung, die den Spannungszustand in einer Scheibe beschreibt

a posteriori

=im Nachhinein

a posteriori-Fehlerestimator

=Abschätzung des Fehlers in einer FE-Berechnung im Nachhinein, also nach der Berechnung, anhand der Berechnungsergebnisse

Approximation

=Näherung, insbesondere die Annäherung einer analytischen Funktion durch eine numerische Funktion, z.B. treppenförmigen Funktion

Approximationsfehler

=der Fehler, der durch die Annäherung einer analytischen Funktion durch eine numerische Funktion entsteht

äußere Arbeit

=die Arbeit der äußeren Kräfte, berechnet durch Kraft mal Weg

äußere Energie

=äußere Arbeit

äußerer Fehler

=Fehler in einer FE-Berechnung, der durch die Lastannahmen oder Randbedingungen gegenüber dem realen Tragwerk entsteht

Balkentheorie

=klassisches Berechnungsverfahren für Gewichtsstaumauern, hier als Bezugswert für maßgebende Ergebnisse verwendet. Starrkörperbetrachtung ohne Berücksichtigung der Untergrundsteifigkeit mit der Prämisse: linearer Spannungsverlauf für horizontale Fugen zwischen Wasser- und Luftseite

Bandbreitenoptimierung

=Verkleinerung der Bandbreite durch Knotenumnummerierung

Bandmatrix

=Bandförmiger Teil der Gesamtsteifigkeitsmatrix oberhalb der Hauptdiagonalen. Die Breite des Bandes (Bandbreite) wird durch den größten Abstand der Nicht-Null-Elemente von der Hauptdiagonalen bestimmt.

Compiler

=Programm zur Übersetzung eines Quellprogramms in eine maschinenlesbare Form

Determinantenfaktor

=Wert der Determinante der Jacobi-Matrix eines Viereckelements, bezogen auf den maximal möglichen Wert bei einem 90°-Winkel

Differenzenergie

=Unterschied des Energiewertes eines Knotens des FE-Netzes in den benachbarten Elementen, die den Knoten enthalten

Dirichlet'sche Randbedingung

=Randbedingung in einem FE-Gleichungssystem, bei der eine der zu berechnenden Unbekannten bereits bekannt ist (Verschiebung, Potential)

Diskretisierung

- =1. der Vorgang der Unterteilung einer Struktur in Elemente und Knoten
- =2. das Ergebnis der Unterteilung einer Struktur in Elemente und Knoten, d.h. das FE-Netz

Diskretisierungsfehler

= der Fehler, der durch die Annäherung einer Struktur durch finite Elemente entsteht (siehe auch Approximationsfehler)

doppelte Genauigkeit

=Art der Zahlendarstellung in FORTRAN, bei der mit 16 Stellen gerechnet wird

Double Precision

=doppelte Genauigkeit

ebener Spannungszustand

=Berechnungsweise bei Scheiben, bei der in der dritten Dimension die Spannungen zu Null gesetzt sind, aber Verformungen erlaubt sind. Gegensatz: ebener Verformungszustand

ebener Verformungszustand

=Berechnungsweise bei Scheiben, bei der in der dritten Dimension die Verformungen zu Null gesetzt sind, aber Spannungen erlaubt sind. Gegensatz: ebener Spannungszustand

Eckpunktspannung

=Spannung, die direkt am Knoten oder Eckpunkt eines Elements berechnet ist (durch Einsetzen von r und s in die B-Matrix)

einfache Genauigkeit

=Art der Zahlendarstellung in FORTRAN, bei der mit 8 Stellen gerechnet wird

Eingabedaten

=Informationen für ein FE-Programm zur Beschreibung der zu berechnenden Struktur, auf einer oder mehreren Dateien gespeichert

Eingabefehler

=Fehler durch falsche Eingaben des Benutzers

Elastizitätstheorie

=Analytisches Berechnungsverfahren (Erweiterung der Balkentheorie), mit der insbesondere auch die Verformungen einer Struktur berechnet werden können. Hier als Bezug für maßgebende Ergebnisse verwendet

elastostatische Berechnung

=hier gebraucht als Bezeichnung für eine FE-Berechnung, bei der die Knotenverschiebungen die Unbekannten sind, im Gegensatz zur Strömungs- und Temperaturberechnung

Elementierung

=die Art und Weise, wie eine zu berechnende Struktur in finite Elemente aufgeteilt ist oder wird

Energienorm

=mathematische Größe, berechnet aus Spannung und Verformung, die zur Abschätzung des Approximationsfehlers in einer FE-Berechnung herangezogen wird

Energieverteilung

=Verteilung der Energie über einem FE-Netz; die Energie kann elementweise für jeden Punkt berechnet werden

Extremalprinzip

=Prinzip, durch das dadurch eine Lösung gefunden wird, daß eine Funktion ihr Maximum oder Minimum erreicht

Extremspannung

=(elastische) Spannung an einer Singularität, z.B. an einer einspringenden Ecke

Extremstelle

=Ort einer Singularität, z.B. einspringende Ecke

Fehlerestimator

=Restfehler

Fehlerindikator

=Verteilung des Restfehlers über der Diskretisierung, berechnet z.B. an jedem Knoten

Fehlerlasten

=äußere Lasten, die zum Ausgleich des Approximationsfehlers dienen

Formfaktor

=Maß für die Güte der Form (Abmessungen, Seitenverhältnis, Innenwinkel,...) eines Elements

Formfunktion

=Funktion für die Transformation der Elementkoordinaten (r,s) in die Globalkoordinaten (x,y)

Formkontrolle

=Überprüfung der Güte der Form (Abmessungen, Seitenverhältnis, Innenwinkel,...) eines Elements

Funktional

=(Differential)gleichung oder Funktion, die das zu berechnende Problem beschreibt

Funktionsansatz

=Art der mathematischen Funktion, die zur Beschreibung eines Sachverhalts dient, z.B. lineare Funktion, Parabel, usw.

Fuzzy-Funktionen

=Funktionen, die für einen Sachverhalt unscharfe Beziehungen liefern

Fuzzy-Logik

=Logik, die nicht auf dem Ja-Nein-Prinzip bisheriger Computer basiert, sondern auf der Auswertung unscharfer Beziehungen. Entscheidungen werden entsprechend bestimmter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht. Anwendung in Experten- und Entscheidungssystemen und Steuerungen

Galerkin

=Namensgeber des Verfahrens der Gewichteten Residuen

Gap-Element

=RiBelement

Gaußpunkt

=(Stützstelle) Ort im Element, an dem ein Funktionswert berechnet wird. Durch Summation der Funktionswerte an den Gaußpunkten erhält man das Integral der Funktion (Gauß-Legendre-Integrationsverfahren)

Gaußpunktspannung

=Spannung, die an einem Gaußpunkt (Stützstelle der numerischen Integration) berechnet wird

Generierung

=Erzeugung von größeren regelmäßigen FE-Netzen mit einer geringen Menge von Eingabedaten

Gesamtenergie

=Energie in einer belasteten Struktur. Die innere Energie (Verzerrungsenergie) ist identisch mit der äußeren Energie (Arbeit der äußeren Kräfte)

Gesamter Formfaktor

=maßgebender Formfaktor, um die günstigste Aufteilung eines Viereck-Dreieckspaares zu finden; berechnet aus den Formfaktoren des Vierecks und des Dreiecks, dem Determinantenfaktors und dem Kantenfaktor. Kann auch als Maß für die Unordnung einer Diskretisierung dienen

Gesamtfehler

=Restfehler

Gesamtpotential

=Die Summe aus innerer Energie und äußerer Arbeit. Sie hat im Gleichgewicht ein Minimum

Gesamtsteifigkeitsmatrix

=Matrix, die die Koeffizienten des Gesamtgleichungssystems einer FE-Berechnung enthält. Sie wird aus den Koordinaten und den Materialparametern aufgebaut

Gewichtete Residuen

=dem Variationsverfahren analoges Verfahren, wenn ein natürliches Extremalprinzip nicht existiert, z.B. bei Strömungsberechnungen. Die gewichteten "Reste" (Abweichungen der FE-Näherungslösung, die beim Einsetzen in die Differentialgleichung entstehen) werden minimiert.

globaler Fehler

=Restfehler

Halbraum

=eine Hälfte des Kontinuums, durch eine Oberfläche begrenzt, z.B. der Untergrund, auf dem ein Bauwerk gegründet ist

Idealisierung

=Vereinfachung; Übertragung der realen Struktur in ein berechenbares Modell

infinite Elemente

=Gegensatz zu finites Element; Element, das in mindestens einer Richtung unendlich lang ist, um z.B. den elastischen Halbraum zu beschreiben

inkompatible Elemente

="nicht zueinander passende" finite Elemente, die sich so verformen, daß die Elementkanten nicht mehr übereinstimmen, auch wenn die Knoten verbunden bleiben

innere Energie

=Gesamtenergie, berechnet und aufsummiert aus den Spannungen und den Verformungen der Elemente

innerer Fehler

=Restfehler

irregulärer Knoten

=Knoten in einem FE-Netz, der nicht ordnungsgemäß mit allen benachbarten Elementen verbunden ist. Er entsteht insbesondere dann, wenn ein Element unterteilt wird, aber das Nachbarelement nicht. Die Randbedingungen eines solchen Knotens müssen von den Nachbarknoten abhängig gemacht werden.

isoparametrisch

=bewährter Elementtyp, bei dem für die Formfunktionen dieselben Funktionen angesetzt werden wie für die Transformation der Koordinaten

Jacobi-Matrix

=Matrix, die zur Transformation der elementbezogenen Koordinaten auf die Globalkoordinaten benötigt wird

Kantenfaktor

=Faktor, der zur Beurteilung dient, wie ein Viereck-Dreieck-Paar am günstigsten aufgeteilt werden kann. Horizontale und vertikale Elementkanten werden begünstigt

Knotenspannung

=Eckpunktspannung

Kollokationspunkte

=Orte im Element, an denen beim Kollokationsverfahren der Fehler minimiert wird

Kollokationsverfahren

=alternatives Verfahren zum Verfahren der Gewichteten Residuen, das sich der sog. Kollokationspunkte bedient

kompatible Elemente

= "zueinander passende" finite Elemente, bei denen die Elementkanten auch nach Verformung noch (ohne Knicke) übereinstimmen

Komplementärenergie

= Pendant zur potentiellen Energie beim Variationsverfahren (Prinzip des Minimums der Komplementärenergie)

Kondensation

= Streichung aller Nullen aus der Gesamtsteifigkeitsmatrix, um Speicherplatz (und ggf. Rechenzeit) zu sparen

Konjugierte Gradienten

= indirektes (d.h. iteratives) Verfahren zur Lösung des Gesamtgleichungssystems (=cg-Verfahren)

Konditionierung

= Anpassung (Skalierung) der Matrixelemente, damit das Gleichungssystem besser (genauer) berechnet werden kann

Konditionszahl

= Zahlenwert, der aus einer Matrix berechnet wird, von den Größenunterschieden der Matrixelemente abhängt und Auskunft über die Lösbarkeit eines Gleichungssystems gibt

konform

= hier identisch mit kompatibel

Konnektivitäten

= Art, wie ein Element mit seinen Nachbarelementen durch die Knoten verbunden ist. Die Verbindungen müssen lückenlos und nicht überlappend sein

Kontaktelement

= entspricht RiBelement; ein Element, das z.B. eine Fuge beschreibt und bei Zugspannungen den Kontakt löst

Mittenspannung

= Spannung, die in der Mitte (im Schwerpunkt) eines Elements berechnet ist

Nabla

=Differentialoperator, der in der Scheibengleichung verwendet wird

Netzeinteilung

=(=Diskretisierung [1.]) Unterteilung einer Struktur in finite Elemente

Netzgenerierung

=Generierung

Netzglättung

=Optimierung der Element- und Netzform durch Knotenverschiebungen

Netzoptimierung

=Verbesserung der Netzform durch Netzglättung, Neuaufteilung von Viereck-Dreieck-Paaren, und Zusammenfassung von Doppeldreiecken zu einem Viereck

Neumann'sche Randbedingung

=Randbedingung in einem FE-Gleichungssystem, bei der ein Glied der rechten Seite des Gleichungssystems bereits bekannt ist (z.B. Kraft, Strömungs- oder Wärmequelle oder -senke), benannt nach dem Mathematiker John von Neumann

Optimierung

=allgemein die Suche nach der besten Lösung einer Funktion mit mehreren Variablen; hier die Verbesserung der Form des FE-Netzes durch Netzoptimierung und die Verbesserung und Vereinfachung des Ablaufs der gesamten FE-Berechnung, speziell von Gewichtsstaumauern

Overlay

=Programmteil, der nur dann in den Arbeitsspeicher geladen wird, wenn er aufgerufen wird

Patch-Test

=Test eines Elementtyps bzw. eines FE-Programms an einem "Flecken" von Elementen

Präprozessor

=Programmteil vor dem eigentlichen Hauptprogramm, z.B. zum Erzeugen der Eingangsdaten

Postprozessor

=Programmteil nach dem eigentlichen Hauptprogramm, z.B. zur Darstellung der Ergebnisdaten

Rechengenauigkeit

=numerische, zahlenmäßige Genauigkeit des Endergebnisses, abhängig von der Zahl der mitgeführten Stellen oder auch der Anzahl der Iterationen bei iterativen Verfahren

Restart

=Wieder-Start eines Programms, wobei Zwischenergebnisse eines vorherigen Programmlaufs verwendet werden

Restfehler

=der verbleibende (Approximations-)fehler in einer FE-Berechnung, der durch den Näherungscharakter des FE-Verfahrens bedingt ist

Rißelement

=Element, das durch seine Eigenschaften dafür geeignet ist, einen Riß in einer FE-Struktur zu beschreiben

Rundungsfehler

=Fehler durch Rechengenauigkeit, siehe Rechengenauigkeit

Scheibentheorie

=Teil der Elastizitätstheorie, die mit einer Differentialgleichung den Spannungszustand in einer Scheibe beschreibt, siehe Airy'sche Spannungsfunktion

Schwerpunktspannung

=Mittenspannung

Single Precision

=einfache Genauigkeit

Singularität

=Ort des Extremwertes einer Funktion, z.B. einer Spannung an einer einspringenden Ecke

Skylinelöser

=Verfahren zur Lösung eines Gleichungssystems, bei dem die Gesamtsteifigkeitsmatrix in Form einer Skyline abgespeichert ist

Skylinematrix

=Teil der Gesamtsteifigkeitsmatrix oberhalb der Hauptdiagonalen ohne die Nullelemente oberhalb des letzten Nicht-Null-Elements jeder Spalte. Der Speicherbedarf ist deutlich geringer als für die zugehörige Bandmatrix.

Skylinestruktur

=Art der Abspeicherung der Gesamtsteifigkeitsmatrix, bei der die Matrix als Band ohne die Nullelemente oberhalb des letzten Nicht-Null-Elements einer Spalte gespeichert ist

Spannungsberechnung

=elementweise Berechnung der Spannungen aus den Verschiebungen an einem bestimmten Ort im Element und die anschließende Berechnung der Knotenspannungen durch Mittelung mit einer bestimmten Wichtung zwischen den Elementen

Spannungsgradient

=Änderung einer Spannung zwischen zwei Punkten, i.a. den Knotenpunkten einer Elementkante

Spannungsindikator

=Spannungsunterschied zwischen den zwei Knoten einer Kante, bezogen auf den maximalen Spannungsunterschied aller Kanten

Stützpunktspannung

=Gaußpunktspannung

Swapping

=Auslagern von Programmdaten auf die Festplatte während eines Programmlaufs, wenn der Arbeitsspeicher nicht ausreicht, um alle Programmteile und Daten gleichzeitig aufzunehmen

Topologie

=Form und Aussehen eines FE-Netzes

Transformation

=Übertragung von Matrizen, Vektoren, Koordinaten, Spannungen usw. in ein anderes Koordinatensystem

Triangulierung

=Bildung von Dreieckselementen aus einem Punktehaufen

Variationsverfahren

=Mathematisches Verfahren, bei dem sich ein Funktional als Integral darstellen läßt, und seine Lösung durch die Bedingung gefunden wird, daß die Ableitung an der betreffenden Stelle stationär ist, also eine Nullstelle hat

Verdichtungsindikator

=Maß, das bestimmt, an welcher Stelle ein FE-Netz verfeinert (unterteilt) werden muß

Verfeinerung

=Unterteilen, Verschieben oder Einfügen von Elementen zum Zwecke der Genauigkeitssteigerung einer FE-Berechnung

Verfeinerungsfolge

=Folge von Schritten, in denen ein FE-Netz mehrmals verfeinert wird. In jedem Schritt kann ein bestimmter, unterschiedlicher Anteil der Elemente bzw. Elementkanten unterteilt werden

Verfeinerungsindikator

=Verdichtungsindikator

Verfeinerungsstrategie

=Vorgehensweise, wie man eine Verfeinerung durchführt

Verformung

=Verschiebung bezogen auf eine Länge

Verformungsenergie

=innere Energie

Verformungszustand

=Zustand und Aussehen der verformten Struktur

Verschiebung

=Absolutwert der Horizontalbewegung eines Punktes, hier meist der Mauerkrone

Verzerrungsenergie

=innere Energie

Verzerrungsenergiedichte

=Verteilung der inneren Energie, bezogen auf ein Fläche (oder ein Volumen)

Winkelfaktor

=Maß für die Güte der Form eines Dreiecks, ausgedrückt durch die Innenwinkel

Literaturverzeichnis

- AHMAD, Rashid (1974): Die Spannungsberechnung im Rahmen der Finite-Element-Methode
- ALTROCK, Constantin von, Ingo T. Storm (1991): Unscharfe Software, in: c't magazin für computertechnik 3, März 1991
- ALTROCK, Constantin von (1991): Über den Daumen gepeilt. Fuzzy Logic: scharfe Theorie der unscharfen Mengen, in: c't magazin für computertechnik 3, März 1991
- Arbeitsausschuß "Ufereinfassungen" (1990): Anwendung elektronischer Berechnungen bei Ufereinfassungen (E 143), in: Empfehlungen des Arbeitsausschusses "Ufereinfassungen"
- Arbeitskreis "EDV-gestützte Standsicherheitsnachweise" (1987): Richtlinie für das Aufstellen und Prüfen EDV-gestützter Standsicherheitsnachweise Entwurf
- BABUSKA, I. (1976): The Self-adaptive Approach in Finite Element Methods, in: The Mathematics of Finite Elements and Applications, Acad.Press
- BABUSKA, I. (1986): Feedback, Adaptivity, and a posteriori Estimates in Finite Elements: Aims, Theory, and Experience, in: Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in FE Computation
- ARGYRIS, J.H., Th.L. Johnsen, R.A. Rosanoff, J.R. Roy (1975): On Numerical Error in the Finite Element Method, ISD Universität Stuttgart
- BABUSKA, I., A. Aziz (1972): Foundations of the Finite Element Method, in: The Math. Found. of the FE Method with Application to Partial Differential Equations
- BABUSKA, I., C. Rheinboldt (1978): A-Posteriori Error Estimates for the Finite Element Method, in: Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.12
- BABUSKA, I., O.C. Zienkiewicz, J. Gago, E.R.de A. Oliveira (Hrsg) (1986): Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations
- BABUSKA, I., W. C. Rheinboldt (1978): Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations, in: SIAM J. Numer. Anal. Vol 15, No.4, August
- BELLMANN, J., S. Holzer, H. Werner (1988): Adaptive Verfahren für elastisch gebettete und aufgelagerte Tragwerke, in: Finite Elemente in der Baupraxis
- BIENER, Ernst (1983): Zur Sanierung älterer Gewichtsstaumauern, Mitteilungen Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft RWTH Aachen Heft 48

- BODARWÉ, H. (1991): Die Finite-Elemente-Methode, eine Zusammenfassung der Grundlagen, Studienarbeit Lehrstuhl und Institut für Massivbau RWTH Aachen
- BOGACKI, W. (1987): Optimale Bewirtschaftung von Süß- Salzwasser Aquiferen, Mitteilungen Institut für Wasserbau RWTH Aachen Heft 65
- BRAESS, Dietrich (1991): PRECG, ein Programm zur schnellen Lösung von großen linearen Gleichungssystemen mit positiv definiten, dünn besetzten Matrizen
- BREMER, C. (1988): Netzgenerierung, Bandbreitenoptimierung und Netzanpassung für Finite-Element-Berechnungen, in: Finite Elemente in der Baupraxis
- CUTHILL, E., J. McKee (1969): Reducing the Bandwidth of Sparse Symmetric Matrices, in: Proc. ACM Nat. Conf., New York 157-172
- DIN 66230 (1981): Programmdokumentation
- DANKESREITER, M., H. Daniels, G. Rouvé (1991): Three-dimensional Analysis of Mass Concrete Structures Using Finite Elements and Conjugated Gradients - Part I: Code Implementation and Verifikation, in: Extended Abstracts of the IV-ICCCBE 91 Conference, Tokyo
- DIAZ, Alejandro R., Noboru Kikuchi, John E. Taylor (1983): A Method of Grid Optimization for Finite Element Methods, in: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 41
- DUDDECK, H. (1978): Statische Berechnungen im Fels- und Tunnelbau, in: Pahl, Stein, Wunderlich (Hrsg): Finite Elemente in der Baupraxis
- GALERKIN, B. G. (1915): Series Solution of some Problems of Elastic Equilibrium of Rods and Plates, in: Vestn. Inzh. Tech., 19, 897-908 (Original russisch)
- GALLAGHER, R. H. (1976): Finite Element Analysis
- GIRKMANN, Karl (1963): Flächentragwerke 6. Auflage
- HARTMANN, F., S. Pickhardt (1985): Der Fehler bei finiten Elementen, in: Bauingenieur 60, S. 463-468
- HEES, G. (1987): Kontrollen von statischen Berechnungen dargestellt an Beispielen, Universität Stuttgart, 12./13. März 1987
- HEIDERMAN, Henning (1986): Datenfehler bei mathematisch-numerischen Grundwassermodellen - Input-Sensitivität und Kalman-Filter, Mitteilungen Institut für Wasserbau RWTH Aachen, Heft 61

- HÖTTGES, J. (1992): Grundlagenuntersuchungen zur Schadstoffausbreitung in Flüssen, in: Mitteilungen Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft RWTH Aachen, Heft 81
- HUGHES, Thomas J. R., Ernest Hinton (1986): Finite Element Methods for Plate and Shell Structures, Vol. 1: Element Structures; MacNeal, Richard: The Evolution of lower order Plate and Shell Elements in MSC/Nastran; Vol. 2: Formulations and Algorithms
- HUYAKORN, Peter S., George F. Pinder (1983): Computational Methods in Subsurface Flow Academic Press New York, London,...
- InfoGraph (1992): InfoGraph Programmsysteme. Programmbeschreibung InfoStatik
- Institute for International Research (IIR) (1992): Fuzzy Logic, Einladung zur 2. I.I.R. Fachkonferenz Düsseldorf 21.-23.10.1992
- KLÖHN, Carsten (1982): Alternative Spannungsberechnung in Finite-Element Verschiebungsmodellen, Forschungs- und Seminarberichte Mechanik, Universität Hannover
- KNOTHE, K., H. Wessels (1991): Finite Elemente. Eine Einführung für Ingenieure
- KTa 3201.2, Kerntechnische Anlagen, Anhang B, Rechnerische Methoden, S. 72-84
- LASHKARI, M. (1990): COSMOS/M User Guide, Stress, Vibration, Buckling, Dynamics, Fluid, Electromagnetics and Heat Transfer Analysis, Programmbeschreibung
- ODEN, J. T., L. Demkowicz, T. Strouboulis, P. Devloo (1986): Adaptive Methods for Problems in Solid and Fluid Mechanics, in: Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in FE Computation
- PAHL, J., E. Stein, W. Wunderlich (Hrsg.) (1978): Finite Elemente in der Baupraxis Vorträge anlässlich einer Tagung an der TU Hannover am 13. und 14. April 1978, Verlag Wilhelm Ernst und Sohn
- PALLACKS, R. (1988): Die maximale Spannung als Indikator für adaptive Netzverfeinerung, in: Finite Elemente in der Baupraxis
- PFAFFINGER, Dieter D. (1980): Praktischer Einsatz von FE-Systemen, in: CAD-Berichte 151, Kernforschungszentrum Karlsruhe
- RANK, Ernst, Ivo Babuska (1987): An Expert System for the Optimal Mesh Design in the hp-Version of the Finite Element Method, in: Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.24

- RANK, Ernst (1985): A-posteriori-Fehlerabschätzungen und adaptive Netzverfeinerung für Finite-Element- und Randintegralelement-Methoden, Dissertation
- RITZ, W. (1909): Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, in: J. Reine Angew. Math. 135
- ROBERTI, Paolo, Michel A. Melkanoff (1987): Self-Adaptive Stress Analysis Based on Stress Convergence, in: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24
- ROSEN, R. (1968): Matrix Bandwidth Minimization, in: Proc. ACM Nat. Conf., Brandon Systems Press, Princeton, N.J.
- ROUVÉ, G., M. Hoffmann (1987): Erfassung der Standsicherheitsverhältnisse älterer Gewichtsstaumauern unter Berücksichtigung ihres dreidimensionalen Tragverhaltens sowie nichtlinearer und zeitvarianter Materialeinflüsse, Schlußbericht Untersuchungsauftrag des MURL NRW
- ROUVÉ, G., W. Pelka, A. Peters, M. Hoffmann, J. Birkhölzer (1987): Alte Staumauern - Neue Berechnungsverfahren, Vortrag auf dem 7. Nationalen Felsmechanik-Symposium in Aachen, Februar 1986, in: geotechnik, Vorträge 7. Nationales Felsmechanik-Symposium
- SALVETER, G. (1989): Abbildungen zur Erläuterung der Elementspannungen, Stützpunktspannungen und Eckpunktspannungen (unveröffentlicht)
- SCHULTE, H. (1989): Zur numerischen Simulation abgelöster turbulenter Strömungen mit der Finite-Elemente-Methode, Mitteilungen Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft RWTH Aachen, Heft 72
- SCHWARZ, H. R. (1984): Methode der finiten Elemente, Teubner-Verlag
- STEIN, E., L. Plank (1988): Fehlerabschätzung und Verbesserung von FE-Ergebnissen, in: Finite Elemente in der Baupraxis
- STEIN, E. (1978): Kriterien für Finite-Element-Programme aus der Sicht prüffähiger statischer Berechnungen, in: Finite Elemente in der Baupraxis
- TISSERA, J. H. G., G. Müller (1990): Fehler vermeiden, Grafische Auswertung von Finite-Element-Ergebnissen, in: Infografik 2. Mai 1990
- University of Salford (1991): F7N77/486 Reference Manual Revision D
- VOGT, Fredrik (1925): Über die Berechnung der Fundamentdeformation, Oslo

- WERNER, H., C. Katz (1980): FEM - Anwendungen im Tunnelbau. Darstellung des Konzepts und des Leistungsumfangs der Programmkette SET; Anwendung, in: CAD-Berichte 151, Kernforschungszentrum Karlsruhe
- WILDERMUTH, G. (1980): FEM-Anwendungsfälle aus dem Hochbau. Beispiele für Netzaufteilungen, in: CAD-Berichte 151, Kernforschungszentrum Karlsruhe
- WITTKE, W. (1979): Unterlagen zu den Vorlesungen Bodenmechanik und Erdstatik I, Vorlesungsskript
- WITTKE, W. (1984): Felsmechanik, Springer Verlag
- WUNDERLICH, W. (1987): Das Element-Konzept, Anwendungen in der Baustatik, in: Baustatik Baupraxis, Tagungsband BB3, 13./14.3.1987, Universität Stuttgart
- ZADEH, Lotfi A. (1965): Fuzzy Sets Information and Control, S. 338
- ZEDLITZ, Erich (1992): Denkende Technik, in: DOS International 4
- ZIENKIEWICZ, O. C., G. S. Hollister (1965): Stress Analysis
- ZIENKIEWICZ, O. C., Y. C. Liu, G., C. Huang (1988): Error Estimation and Adaptivity in Flow Formulation for Forming Problems, in: International Journal for Num. Methods in Engg., Vol.25, 23-42
- ZIENKIEWICZ, O. C. (1984): Methode der Finiten Elemente
- ZURMÜHL, Rudolf (1964): Matrizen und ihre technischen Anwendungen

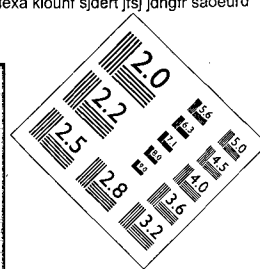
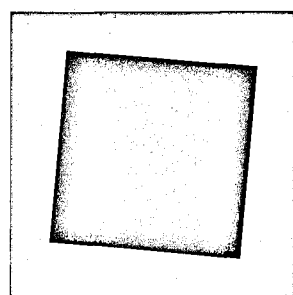
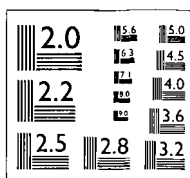
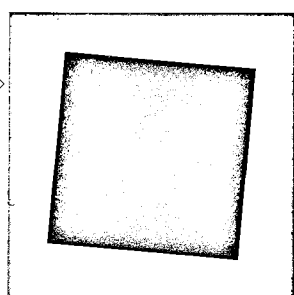
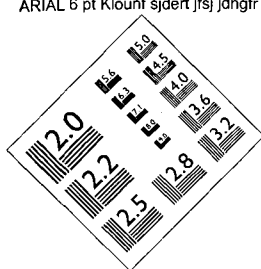
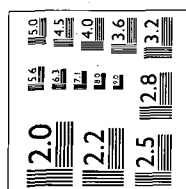
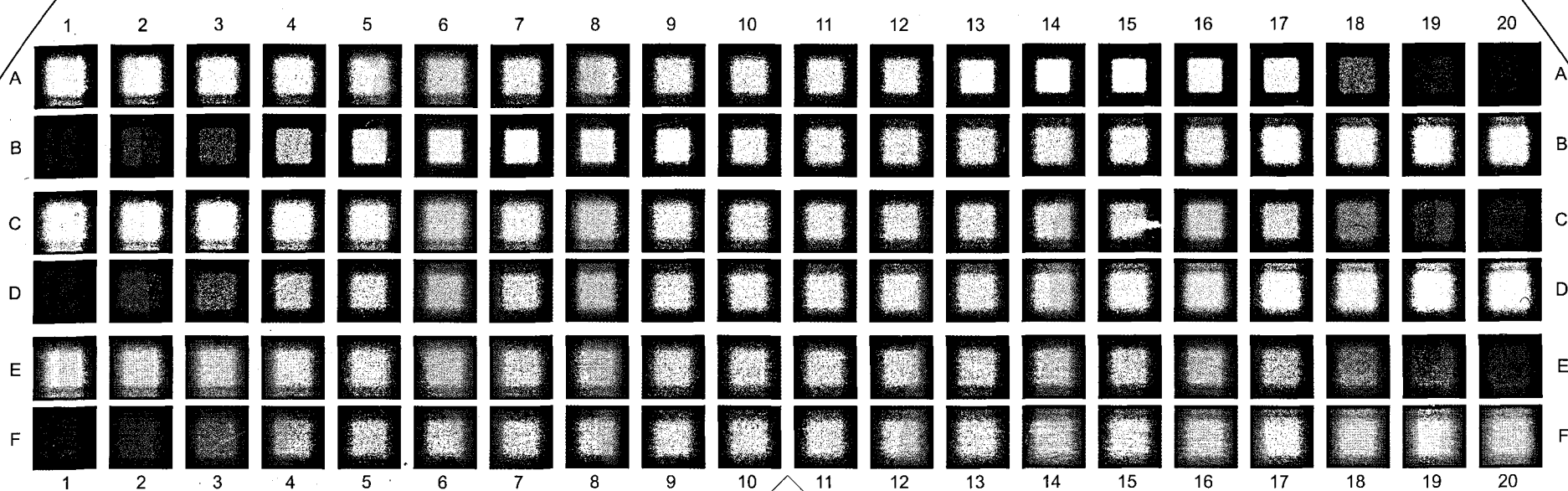
Diese Seite enthält personenbezogene Daten und wurde daher nicht digitalisiert.

Die vorliegende Arbeit entwickelt einen Algorithmus zur Optimierung der Generierung von FE-Netzen für Scheibenberechnungen wie z.B. Gewichtsstaumauern. Mit Hilfe dieses Algorithmus wird einerseits die Genauigkeit von FE-Berechnungen gesteigert und andererseits eine weitgehend automatische Netzerzeugung und -verfeinerung ermöglicht, die mit der Fuzzy-Logik gesteuert wird. Als Optimalitätskriterium für die Güte des FE-Netzes dient ein Fehlerindikator, durch den der Restfehler angegeben werden kann. Mit einem „Unordnungsfaktor“ kann für ein gegebenes FE-Netz die zu erwartende Genauigkeit abgeschätzt werden.

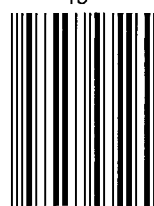
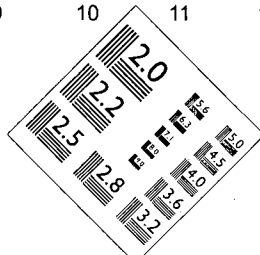
Mit dieser Verfeinerungsstrategie kann der Restfehler einer FE-Berechnung unter 1% sinken. Die Genauigkeit wird außerdem gesteigert, wenn

- Viereckelemente statt Dreieckelementen verwendet werden,
- regelmäßige Elementstrukturen verwendet werden,
- Spannungen direkt an den Knoten berechnet und mit der Knotenenergie gewichtet werden.

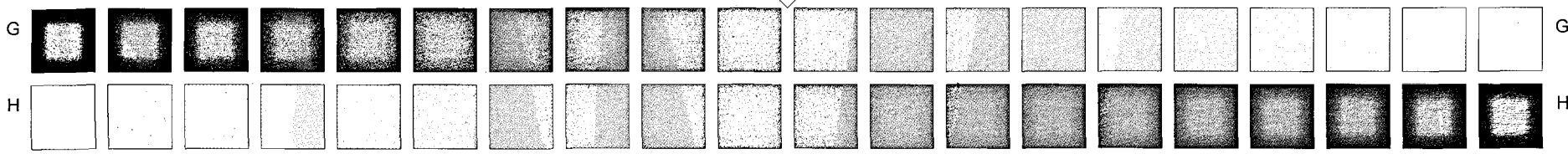
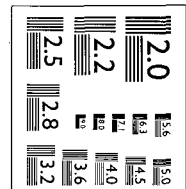
An einem Anwendungsbeispiel werden mehrere Konstruktionsvarianten für eine Gewichtsstaumauer berechnet, um bereits im Entwurfsstadium die statisch günstigste Variante zu finden. Somit kann die FE-Methode jetzt als einfaches Werkzeug auch für die tägliche Praxis das klassische Verfahren der Balkentheorie allmählich ersetzen.

[illegible]The logo for Scan2Net, featuring a black circle with the white text "S2N" inside, followed by the word "Scan2Net" in a bold, black, sans-serif font, with a registered trademark symbol (®) to the upper right.

Color Scanner Test Target
S2N CSTT-2a
Batch-Nr.: #201301



201301

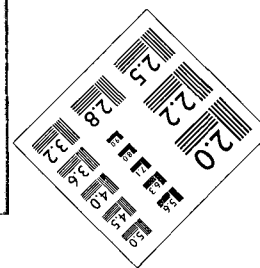
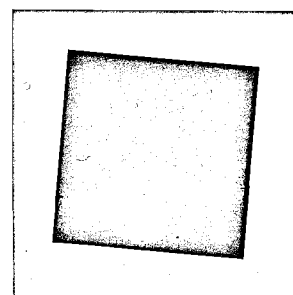
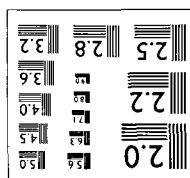
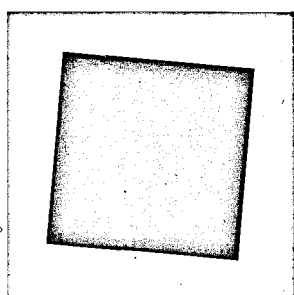
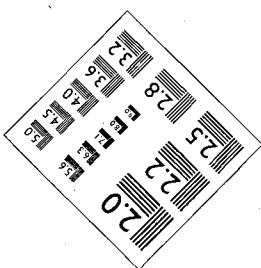
[illegible]

**Image
Access**

Hatzfelder Strasse 161 - 163
D-42281 Wuppertal
Telefon: ++49 (0)202 27058-0
Telefax: ++49 (0)202 27058-40
www.imageaccess.de
www.scan2net.de
E-Mail: info@imageaccess.de

1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	
7	7	7	
8	8	8	8
9	9	9	9
A	A		A
B	B	B	B
C	C	C	C

4 p	Klounf sjdert fjsj jdhgrf saoeur djfkehç sfhwpuçk kigor foxies grnnschwiç hloumco xfl vojçdvd f Wju licfc jmv prongs wallusi 94846 393 shd94 hah 43 gnurç splog ukalla bonf schmiz saporen
6 p	Klounf sjdert fjsj jdhgrf saoeur djfkehç sfhwpuçk kigor foxies grnn Wju licfc jmv prongs wallusi 94846 393 shd94 hah 43 gnurç ong
8 p	Klounf sjdert fjsj jdhgrf saoeur djfkehç sfhwpuçk Wju licfc jmv prongs wallusi 94846 393 shd94 h
10 p	Klounf sjdert fjsj jdhgrf saoeur djfkehç Wju licfc jmv prongs wallusi 94846 39
12 p	Klounf sjdert fjsj jdhgrf saoeur d Wju licfc jmv prongs wallusi 948

[illegible]