

Beugungssimulation ohne Rechenzeitexplosion:

**Die Methode der quantisierten Pyramidenstrahlen –
ein neues Berechnungsverfahren
für Raumakustik und Lärmimmissionsprognose**

Vergleiche, Ansätze, Lösungen

Von der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Physiker
Uwe Martin Stephenson

aus Koblenz (Rheinland-Pfalz)

Berichter: Univ.-Prof. Dr. rer. nat. M. Vorländer
Univ.-Prof. Dr.-Ing. B. Rembold

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Juli 2004

Diese Dissertation ist auch auf den Internet-Seiten der Hochschulbibliothek online
verfügbar.

Berichte aus der Akustik

Uwe Martin Stephenson

Beugungssimulation ohne Rechenzeitexplosion:

**Die Methode der quantisierten Pyramidenstrahlen –
ein neues Berechnungsverfahren
für Raumakustik und Lärmimmissionsprognose**

Vergleiche, Ansätze, Lösungen

D 82 (Diss. RWTH Aachen)

Shaker Verlag
Aachen 2004

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Zugl.: Aachen, Techn. Hochsch., Diss., 2004

Copyright Shaker Verlag 2004

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 3-8322-3112-9

ISSN 1611-1303

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • eMail: info@shaker.de

Abstract

„Beugungssimulation ohne Rechenzeitexplosion: Die Methode der quantisierten Pyramidenstrahlen – ein neues Berechnungs- verfahren für Raumakustik und Lärmimmissionsprognose“

der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik der RWTH Aachen

am 20.1.2004 vorgelegte

Dissertation von Uwe M. Stephenson (Bad Oldesloe)

In Raumakustik und Lärmimmissionsprognose werden im Wesentlichen drei Algorithmen zur Berechnung der Schallausbreitung verwendet. Dies sind nach steigender Reflexionsordnung: die Spiegelschallquellenmethode, Strahlverfolgungsmethoden (*ray* oder *beam tracing*), darunter die Verfolgung und rekursive Aufspaltung von Pyramidenstrahlen („Pyrs“), und, meist für den späten Nachhall, die Strahlungs-Austausch- (*radiosity*-) Methode. Hauptdefizit jener strahlengeometrisch-energetischen Methoden ist naturgemäß die mangelnde Berücksichtigung von Welleneffekten wie Beugung. Mit Einbau von Beugung aber würden Strahlenanzahl und Rechenzeit exponentiell steigen. Ziel war es, jene Methoden durch Einbau von Beugungsmodulen auf tiefere Frequenzen bzw. längere Wellenlängen auszudehnen, bei denen der Raum zwar noch groß, aber nicht mehr sehr groß gegen die Wellenlänge ist, dazu einen einheitlichen, universellen Gesamtalgorithmus zu finden, der die beliebige Kopplung von Reflexionen und Beugungen gestattet, aber ohne Explosion der Rechenzeit. Die Lösungsidee hierzu ist: Strahlen müssen auch wiedervereinigt werden! Dies gelingt durch Quantisierung von Raumrichtungen und Raumbereich und Zusammenfassung mit einer gewissen Zeittoleranz gleichzeitig eintreffender Strahlen. Beides zusammen bedeutet Quantisierung des Spiegelquellenraums. Pyre, deren Spitzen in eine Zelle des Spiegelschallquellen-Raums fallen, werden auf dessen Mittelpunkt „zurechtgerückt“, ihre Energien werden bei Rückprojektion auf die Oberflächen des Originalraums, je nach Überlappungsgrad ihrer Raumwinkel, interpoliert und einsortiert in „quantisierten“ Pyren, deren Raumwinkel durch die angepeilten Raumbereichspolygone vorgegeben sind. Notwendig ist eine vorherige Zerlegung der Oberfläche in kleinere Patche und des Gesamtraums in konvexe Unterräume. Dies führt nicht nur zu einer erheblichen Vereinfachung der Pyr-Aufspaltung (ein Polygon-Polygon-Schnitt-Problem), sondern auf Randflächen „transparenter Trennwände“ kann auch Beugung effizient erfasst werden. Hierfür wurde ein energetisches Strahlen-Beugungs-Modell entwickelt, das, inspiriert von der Unschärferelation, Ablenkungsfunktionen erzeugt, deren Werte um so höher sind, je dichter ein Strahl eine Kante passiert. Die Pyre werden in einem iterativen Energieumverteilungsverfahren quasi-simultan verfolgt. Ergebnis ist das Verfolgen quantisierter Pyramidenstrahlen, eine Kombination der Radiosity- und der Spiegelquellenmethode. So konvergiert die Strahlenanzahl letztlich gegen ein vom Anwender vorgegbares Maximum. Die Rechenzeiten dürften für typische Anwendungen auf heutigen PC bei einigen Minuten bis Stunden liegen; der Arbeitsspeicherbedarf ist allerdings mit 100MB-100GB sehr hoch. Damit ist das Ziel erreicht. Die vorgeschlagenen Algorithmen sind jedoch noch umzusetzen und zu validieren.

abstract

simulation of diffraction without explosion of computation time: Quantized Pyramidal Beam Tracing –a new computational method for room acoustics and noise immission prognosis

thesis presented to the faculty of electrical engineering and information technology
of the RWTH Aachen University 7/28/2004
by Uwe M. Stephenson (Bad Oldesloe)

In room acoustics and noise immission prognosis, basically three algorithms for the computation of sound fields are in use. These are, in the order of reflection where they are efficient: the mirror image source method ray tracing methods (ray or beam tracing), among these tracing and recursive splitting of pyramidal beams („pyrs”), and, sometimes to simulate the late reverberation, the radiosity method basing on the radiation interchange of pairs or surface patches. But, caused by their nature, the mean deficit of these geometrical and energetic methods is not to take wave effects as diffraction into account. But, with diffraction, the number of rays and computation time would explode exponentially. It was the aim, by introduction of diffraction modules, to extend those methods to lower frequencies respectively longer wavelengths where the room may be large but is not very large compared with wavelengths and to find a new uniform and universal algorithm to allow arbitrary combinations of reflections and diffractions, but without explosion of computation time. The idea for the solution: rays must be re-unified! This is achieved by quantization of solid angles as well as room surface into small patches and summing up of pyr energies arriving at the patches within certain time intervals. Both means: quantization of the space of mirror image sources. Pyrs whose vertices fall into cells of that mirror image source space are shifted to their center points, projected back to the original room, but not split up by the surface patches into smaller and smaller pyrs but, according to their overlap with the patches, their energies are interpolated and distributed to previously created quantized pyrs whose shapes are defined by aiming at the patches. To make pyr tracing efficient, a previous sub-division of the room's surface into convex walls and many small patches and a sub-division of the volume into convex sub-rooms is necessary. This is accomplished by the introduction of “transparent walls” between the sub-rooms. Thereby, a considerable simplification of the otherwise complicated pyr clipping procedure (polygon-polygon-intersections) is achieved, moreover, an elegant discovering of diffraction events at surface patches near to the edges on those transparent walls. Inspired by the uncertainty relation, for that purpose, an energetic ray diffraction model has been developed working with “deflection-angle-probability-density-functions” whose values are the higher the closer the ray passes an edge. Now, a huge amount of quantized pyrs are traced quasi-parallel in a kind of energy interchange procedure where the number of beams converges against a maximum value which may be set up by the user. Thus, quantized pyramidal beam tracing is a combination of the radiosity with the mirror image source method. With typical room acoustical applications, computation times may lie in the order of minutes up to some hours with modern PC. However, the required RAM is very high: 100MB-100GB. So, the goal has been reached. However, the algorithms proposed still have to be implemented and validated.

Vorwort

Diese Dissertation ist ein Kondensat aus über 20 Jahren Auseinandersetzung des Autors mit numerischen Methoden der Raumakustik. Sie begann mit der Diplomarbeit über die Berechnung raumakustischer Parameter in Konzertsälen 1981/82 im Institut für Technische Akustik (ITA) der RWTH Aachen /H1/. Ergebnis war das wohl erste voll anwendbare Raumakustiksimulationsprogramm in Deutschland. 1985, im Fraunhofer-Institut für Bauphysik in Stuttgart, war ein Projekt über die Schallabstrahlung von Kühltürmen von Großkraftwerken der erste Anlass, über den Einbau von Beugung in Schallteilchensimulationsprogramme nachzudenken /H2/. Eine einfache Lösung lieferte die „Unschärferelation“. Folgejahre waren intensiv dem Bemühen gewidmet, durch neue Algorithmen die enormen Rechenzeiten zu reduzieren /H3, X3/. Viele (in der vorliegenden Kurzfassung dieser Dissertation nun weitgehend ausgelassene) Details all dieser frühen Bemühungen sind in einem 1991 im Auftrag der Vereinigung der Großkraftwerksbetreiber entstandenen 400-seitigen Bericht /H0/ zusammengefasst. Das Jahr 1991/92 an der NTNU (Universität) Trondheim in Norwegen war das Kernjahr dieser Dissertation, betreut von Prof. H. Kuttruff (damaliger Leiter des ITA Aachen). Ziel war ursprünglich die analytische Ableitung eines Näherungsverfahrens zum Einbau von Kantenbeugung in Strahlverfolgungsprogramme. Grundannahme war und ist bis heute geblieben die Annahme weiterhin inkohärenter, energetischer Schallüberlagerung. Ergebnis war das „Trondheimer Beugungsmodell“ /H4/. Es war aber schon lange klar, dass jeder Einbau von Streuung von Teilchen, rekursiv angewandt – denn nur das allgemeine Problem der freien Kombinierbarkeit mir Reflexionen beliebig hoher Ordnung interessierte – , zu exponentieller Teilchenvermehrung und entsprechendem Anstieg der Rechenzeit führen würde. Dagegen kommt keine der klassischen Rechenzeitverkürzungsmethoden an. Es bedurfte also einer qualitativ neuen Idee. Erst gegen Ende der Zeit in Trondheim kam - wieder inspiriert von der Quantenphysik sowie von der bisher in der Raumakustik wenig beachteten Radiosity-Methode - die Erleuchtung: Die Methode der Verfolgung und Aufspaltung von Pyramidenstrahlen („Pyren“) und ihre Wiedervereinigung durch Quantisierung (QPBT).

Aber diese Lösungen (Beugung von Schallteilchen, aber Quantisierung von Pyren) passten nicht zusammen. Auch waren manche Fragen der Quantisierung und vor allem der Speicherorganisation („wie findet man schnell den ältesten und wie den benachbarten Pyr?“) noch ungeklärt, wie noch 1996 veröffentlicht /H5/. So kam es - auch aus beruflichen und familiären Gründen, der Autor wechselte 1996 als Professor zur Fachhochschule nach Hamburg - , dass jahrelang weder Mut noch Freiraum zum „Zusammenschreiben“ da waren. Dies änderte sich im Sommer 1999. Zwischen war mit dem Doktorvater eine Schwerpunktsverschiebung beschlossen worden: Die Entwicklung des neuen Algorithmus sollte im Vordergrund stehen, die (ohnehin nicht so befriedigenden) Beugungsansätze in den Hintergrund treten. Es war jedoch von Anfang an klar: Die Darstellung und Begründung all jener Ideen, Entwicklungen und Lösungen würde so umfangreich werden, dass für eine tatsächliche Umsetzung in ein Computerprogramm kein Platz und keine Zeit mehr wäre. Und so verbleibt diese Dissertation letztlich im Konzeptionellen. Sie enthält keine Vergleiche mit Messungen, Rechenergebnisse nur zu einigen wenigen Modellexperimenten, nicht zu konkreten Anwendungsfällen, wie etwa bestimmten Auditorien oder sonstigen Szenarien. Die tatsächliche Berechnung raumakustischer Zielgrößen oder gar die (sicherlich wichtige und mögliche) Auralisierung und andere Anwendungen sind nicht Thema dieser Arbeit –um so mehr die Wege dorthin.

IV

Nun blieb es nicht beim „Zusammenschreiben“. Die schon erwähnten Probleme der Quantisierung, der Speicherverwaltung und des schnellen Zugriffs wurden dabei auf überraschend einfache Weise gelöst. Zudem wurde im Jahre 2000 auch eine viel einfachere alternative Methode gefunden, die ebenfalls den Einbau von Beugung ohne Rechenzeitexplosion erlaubt: Eine Kombination aus der Schallteilchen- und der Radiosity-Methode /H6/, 2001. Viele schwierige geometrische Details, wie zur nötigen Konvexzerlegung des Raumes und zu Polygonproblemen, wurden gelöst und nebst mathematischen Herleitungen, etwa zu Fresnel'schen, Fraunhofer'schen und eigenen Beugungsformeln und zu Rechenzeitprognosen, in Anhängen genau beschrieben. Und so wuchs die Arbeit auf 450 Seiten. Diese „Urfassung“ der Dissertation gab der Autor am 21. März 2003 im Institut für technische Akustik in Aachen ab. Aber diese Arbeit wurde vor allem ihres Umfangs wegen als Dissertation nicht angenommen.

Im Einvernehmen mit Prof. Vorländer (Nachfolger Prof. Kuttruffs als Leiter des ITA) wurde ein Kürzungskonzept erarbeitet, das sich noch mehr auf die Darstellung der Methode der Quantisierten Pyramidenstrahlen konzentriert. Die Alternativ-Methode der Kombination Schallteilchen-Radiosity entfiel ganz, ebenso fast alle Anhänge mit den mathematischen Details. Auf eine ausführliche Darstellung der „klassischen“ raumakustischen Algorithmen der Spiegelquellen- und Strahlverfolgungsmethoden wurde verzichtet. Es werden also in Kap. 2 bereits spezialisierte Leser vorausgesetzt, für die kurze Rekapitulationen genügen. Jedoch werden diese Methoden samt ihrer Varianten und Verbesserungen qualitativ beschrieben, klassifiziert und bewertet im Hinblick auf ihre Defizite, aber auch ihre verwendbaren Ideen für das propagierte neue Rechenverfahren. Obwohl im Weiteren wegen des energetischen Ansatzes keinerlei frequenzabhängige Darstellungen mehr folgen, wird auf die Problematik des breiten Frequenzbereiches näher eingegangen. Etwas näher dargestellt wird auch die unter Raumakustikern noch weniger bekannte Radiosity-(Strahlungsaustausch-) Methode, insbesondere ihre zeititerative Formulierung, da sie als Rahmenalgorithmus' auch für QPBT dient. Wert wird auch auf Vergleiche zur Simulation der Licht- und Funkwellenausbreitung gelegt. Die Darstellung der neu gefundenen Schalleilchen-Beugungsmodelle in Kap.3. (des ursprünglichen Hauptthemas) wurde stark gekürzt mit Betonung der Einbau- bzw. der algorithmischen Problematik. Der Preis für all diese Kürzungen ist ein semi-quantitativer Darstellungsstil unter Verzicht auf die ursprünglich lückenlose mathematische Darstellung. Das Kernkapitel 4 über die Entwicklung von QPBT wurde noch einmal stark überarbeitet; mehrere Denkfehler der Urfassung wurden korrigiert und sogar noch erst im September 2003 gefundene neue Lösungen zum Problem der Speicherverwaltung eingearbeitet. Kap.5. verbindet die ansonsten scheinbar nur nebeneinander stehenden Kap. 3 und 4, deutet Möglichkeiten des Einbaus von Beugung in QPBT an. Bewusst erst nachträglich, da für den Leser wohl erst dann verstehbar, werden in Kap.6. drei alternative Rechenmethoden anderer Autoren gewürdigt und im Vergleich zur eigenen Arbeit diskutiert.

Der Autor ist sicher, dass seine Methode der Quantisierten Pyramidenstrahlen einer jener gesuchten universalen Algorithmen ist, der die Simulation der Schallausbreitung einschließlich Beugung sowohl in geschlossenen als auch offenen Räumen, zur Optimierung von Auditorien wie zur Lärmbekämpfung in Städten, in Zukunft wesentlich effizienter und genauer gestattet. Er braucht – neben der Lösung einiger Detailprobleme und Parameteroptimierungen - eigentlich „nur noch“ in ein funktionierendes Programm umgesetzt zu werden. Das ist bereits geplant.

Bad Oldesloe, den 21.11.03 und den 11.7.04

Ulrich Stephenson

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Kurzfassung	I
Abstract	II
Vorwort	III
Inhaltsverzeichnis	V
1. Einführung	1
1.1. Motivation- Ausgangslage – Ziel	1
1.2. Annahmen und Zielgrößen der geometrischen Raumakustik	2
1.3. Vergleich Licht / Schall	4
1.4. Vergleich zur Hochfrequenztechnik	6
1.5. Grundlegende Ziele, Annahmen und Ansätze dieser Dissertation	7
2. Raumakustische Simulationsverfahren - State of the Art	9
2.1. Die Spiegelschallquellenmethode	11
2.2. Strahlverfolgungsmethoden (Ray Tracing-Methoden)	13
2.2.1. Schallteilchenverfahren	14
Schallabsorption	15
Reflexion und Streuung	16
Detektierung	18
Gesamtstruktur des Algorithmus	19
2.2.2. Vergleich der Rechenzeiten der Strahlverfolgungsmethode mit der klassischen Spiegelquellenmethode	20
2.2.3. Methoden zur Rechenzeitverkürzung beim Ray-Tracing –ein Überblick	22
Das Rasterverfahren	23
Ungleichförmig-hierarchische Raumrasterung	24
Zerlegung in konvexe Teilräume	25
2.2.4. Vergleich verschiedener Varianten von Strahlverfolgungsmethoden	26
2.2.5. kombinierte Verfahren	28
2.3. Radiosity - (Strahlungsaustausch-) Modelle	29
2.3.1. Prinzip der Radiosity-Methode	30
2.3.2. numerische Formulierung, Energie-Umverteiler-Faktoren	31
2.3.3. zeitabhängig-iterative Berechnung	32
2.3.4. Bewertung	33
2.4. Zusammenfassung und Klassifizierung der diskutierten numerischen Methoden	34
2.5. Zur allgemeine Problematik der Frequenzabhängigkeit	34
2.6. Diskussion hinsichtlich der Erweiterbarkeit um Beugungseffekte	35
2.7. Schlussfolgerung	37

3. Zum Einbau von Beugungseffekten in raumakustische Simulationsverfahren

3.1. Einführung	38
3.1.1. Arbeitshypothesen	38
3.1.2. Theorie der Beugung am halbunendlichen Schirm	39
3.1.3. Beugung am Spalt	45
3.1.4. Verallgemeinerungsversuche und Widersprüche der klassischen Abschirmrechnung	45
3.1.5. Warum Schallteilchenbeugung ?	46

3.2. Zur Verwendbarkeit der Geometrischen Theorie der Beugung	48
--	-----------

3.3. Das "Stuttgarter" Schallteilchen-Beugungsmodell	52
3.3.1. Arbeitshypothesen	52
3.3.2. Einführung der Kantenbeugungswirkung	54
3.3.3. Ableitung der Ablenkungswinkelwahrscheinlichkeitsdichteverteilung	55
3.3.4. Schallteilchenbeugungsexperimente a) am Schirm b) am Spalt	57
3.3.5. Optimierung der KBW-Funktion	58
3.3.6. Zusammenfassung des Schallteilchen-Beugungs-Algorithmus	59
3.3.7. Wahrscheinlichkeitsverteilung oder Aufspaltung ?	60

3.4. Das "Trondheimer" Schallteilchen-Beugungsmodell	61
3.4.1. Einführung	61
3.4.2. Die Kanten-Verschiebe- Hypothese	61
3.4.3. Berechnung des Transmissionsgrades durch Entwicklung um den Durchstoßpunkt	62
3.4.4. Energetische Oktavband-Mittelung des Transmissionsgrades	64
3.4.5. Differenzierung bezüglich einer Verschiebung des Schirms	66
3.4.6. Herleitung einer Ablenkungswinkelwahrscheinlichkeitsdichteverteilung durch Vergleich mit der Energieflussdichte über die Schirmkante	67
3.4.7. Algorithmus der Schallteilchen-Beugung nach dem Trondheimer Modell	70
3.4.8. Ergebnisse numerischer Experimente	70
3.4.9. Der maximal zu erfassende Vorbeiflugabstand	71
3.4.10. Weitergehende Überlegungen zur Erweiterung auf die Beugung am Spalt	72

3.5. Probleme und Ansätze bei der Umsetzung in Beugungsalgorithmen	74
3.5.1. Vielfach-Beugung und Baumstruktur - <i>State of the Art</i>	74
3.5.2. Wie erfasst man einen hinreichend nahen Vorbeiflug an Kanten ? - die Methode der „Fähnchen“	76
3.5.3. Probleme mit der Beugungserfassung „nebeneinander“ und „hintereinander“ liegenden Kanten	77
3.5.4. Konsequenz aus den Widersprüchen mit Fähnchen: Konvexzerlegung	79
3.5.5. Vergleich des „Stuttgarter“ und des „Trondheimer“ Schallteilchenbeugungsmodells	80
3.5.6. Ein grundsätzliches Problem: die Frequenzabhängigkeit	81
3.5.7. Lösungsansätze zur Verhinderung der exponentiellen Strahlenvermehrung	82

4. Die Methode quantisierter Pyramidenstrahlen

4.1. Entwicklung der Ideen: warum Pyramidenstrahlen und warum Quantisierung?	84
4.1.1. Resümé aus den bisherigen Algorithmen, Begründung der Pyramidenstrahlen Spiegelschallquellen-, Schallteilchen-, Radiosity-Methode,	84
4.1.2. Begründung der Quantisierung, Einführung der Pyre als neue elementare Energieträger	88
4.1.3. Erweiterung der Radiosity-Methode auf geometrische Reflexionen ? Gründe für eine Kombination mit der Spiegelquellenmethode	91
4.1.4. Ideen zur Wiedervereinigung durch Einsortierung, Logistik und Synchronisierung	93
4.1.5. Vorhersage des Gesamtverhaltens von QPBT	94

4.2. Unquantisierte Pyramidenstrahlen-Verfolgung (UPBT)	96
4.2.1. Einführung -warum Konvexzerlegung ?	96
4.2.2. vorausgesetzte Datenstruktur des Raumes, Konventionen und Parameter Kantengenerierung und -Paarung	99
4.2.3. Skizze eines Algorithmus' der Konvexzerlegung	103
4.2.4. Gesamtalgorithmus der Verfolgung noch unquantisierter Pyramidenstrahlen Werden die Pyr-Querschnitte komplizierter ?	110
4.2.5. Spiegelungskriterien	115
4.2.6. Projektion des Pyr auf die Wandebene	116
4.2.7. Vorprüfung auf Pyr-Polygon-Schnitt	118
4.2.8. Clipping von Pyren an Raumkanten (Polygon-Polygon-Schnitt)	121
4.2.9. Spiegelung der Pyre	126
4.2.10. Immissionsberechnung	129
4.3. Entwicklung der optimalen Quantisierung der Pyramidenstrahlen	130
4.3.1. Die Quantisierung des Spiegelschallquellenraums	130
4.3.2. Zur optimalen Wahl der Segmentierung $\Delta r, \Delta \delta, \Delta \varphi$	132
4.3.3. Zum systematischen Fehler der Sichtbarkeit beim Zurechtrücken der Pyre, zur Optimierung eines inneren Grenzradius r_{min} und der Schrittweite Δr	134
4.3.4. Klassen von Pyren	136
4.3.5. Verzicht auf anfänglich unquantisierte Pyre ?	137
4.3.6. Zur Quantisierung der Rückstrahl-Raumwinkel	137
4.3.7. Zerlegung der Raumboberfläche in Teilpolygone	139
4.3.8. Der Datensatz eines gequantelten Pyr	140
4.3.9. Vorabschätzung zum Arbeitsspeicherbedarf	141
4.3.10. Zusammenfassung	141
4.4. Wiedervereinigung und Schalleistungsübertrag	143
4.4.1. Raumwinkel-bezogene Interpolation bei Überlappung von Pyren und Lösung der Frage „wie findet man schnell benachbarte Pyre“	143
4.4.2. Berechnung des Raumwinkels eines Pyramidenstrahls	144
4.4.3. Zum Problem, dass die Originalschallquelle eine Richtwirkung aufweist	146
4.4.4. Die Wiedervereinigung	147
4.5. Zur Ausführungsreihenfolge - Entwurf zu einem Gesamtalgorithmus	149
4.5.1. Zum Wiedervereinigungszeitpunkt	149
4.5.2. Vermeidung von „bösen Pyren“ durch Bezug auf konvexe Teilräume	150
4.5.3. Zur Sortierung nach dem genauen „Alter“ bzw. der Laufstrecke	150
4.5.4. Benötigt man einen unendlichen Arbeitsspeicher ? - Entwicklung der Matrixform der Speicherorganisation	151
4.5.5. Diskussion dynamischer Speichermethoden, Besetzungsdichte und Abarbeitung der Pyr-Matrix und Lösung des Problems, schnell benachbarte Pyre zu finden	155
4.5.6. Gesamtalgorithmus von „Quantized Pyramidal Beam Tracing“ (QPBT)	160
4.5.7. Zusammenfassung: Gesamtverhalten von QPBT qualitativ / Interpretation der Energieumverteilung	162
4.5.8. Abschätzung Speicherplatzbedarf	163
4.5.9. Abschätzung der Gesamt-Rechenzeit	164
4.5.10. Alternative Parallelausführung	164
5. Zum Einbau von Streuung und Beugung von Pyramidenstrahlen	165
5.1. Simulation diffuser Reflexionen	165
5.2. Simulation von Beugung	166
5.2.1. Modell 1: Kanten- statt Punktstrahler	166
5.2.2. Modell 2: Punktstrahler auf den Flächenschwerpunkten der Randpatche transparenter Zwischenwände	168
5.3. Kohärente Beugungsansätze, der Ansatz von Svensson	169
5.4. Kombination von QPBT mit einem der selbst entwickelten Beugungsmodelle	170

6.	Diskussion alternativer Algorithmen aus der Literatur, potentiell geeignet zum effizienten Einbau von Beugung ohne Rechenzeitexplosion	171
6.1.	Das Verfahren von Dalenbäck	171
6.2.	Das Verfahren von Lewers	173
6.3.	Das Verfahren von Funkhouser	174
6.4.	In der Hochfrequenztechnik eingesetzte Methoden	177
6.5.	Zusammenfassung und Vergleich der Methoden untereinander und mit QPBT hinsichtlich Einbau von Beugung in die raumakustische Simulation	178
7.	Zusammenfassung, Bewertung, Ausblick	179
7.1.	Zusammenfassung	179
7.2.	Bewertung	182
7.3.	Offene Fragen und Probleme	184
7.4.	Ausblick und Anwendungen	185
	Literatur	186
	Danksagung	193
	Tabellarischer Lebenslauf und Bildungsweg	194

1. Einführung

1.1. Motivation- Ausgangslage - Ziel

Das Erreichen einer "guten Akustik" von Auditorien ist seit alters her das Ziel von Architekten. Seit rund hundert Jahren gibt es dazu Raumakustiker. Ein drängendes, oft unterschätztes Umweltproblem der jüngeren Zeit ist andererseits der Lärm, insbesondere der des Straßenverkehrs. Verbesserung der Berechnungs- und Prognosemethoden sowohl der Raumakustik als auch der Lärmbekämpfung bilden die Motivation zur Beschäftigung mit den Themen dieser Dissertation.

Zur Berechnung der Schallausbreitung sowohl im Freien als auch in geschlossenen Räumen werden seit einigen Jahrzehnten ähnliche numerische Methoden angewandt. Diese beruhten früher meist auf dem Spiegelschallquellen-, heute eher auf dem Strahlen- oder Teilchenmodell von Schall, oder auf kombinierten Modellen, in jedem Falle auf der Grundannahme der geometrischen Raumakustik, nämlich dass die Wellenlängen klein gegen typische Raumabmessungen sind.

Die wesentlichen Defizite dieser Methoden sind:

- ein physikalisches: die Vernachlässigung von Beugung und weiteren, nur durch die Wellennatur von Schall erklärbaren Effekten; Streuungseffekte werden in der Raumakustik bisher nur in sehr pauschaler Form behandelt, durch das Einführen diffus reflektierender Wände;
- ein praktisches: die - trotz der Fortschritte der Computertechnologie - immer noch enormen Rechenzeiten; die Methoden sind auch in sofern ineffizient, als sie Schallfelder genauer berechnen als Details hörbar sind.

Beide Defizite haben insofern etwas miteinander zu tun, als jede Erweiterung des Modells um Beugung die Rechenzeiten noch erheblich weiter ansteigen lässt.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, jene Strahlverfolgungsverfahren der geometrischen Raumakustik näherungsweise um Beugungseffekte erweitern und so anwendbar zu machen auf die zahlreichen wichtigen Fälle, bei denen Schallreflexionen und -beugungen auch und insbesondere höherer Ordnung in Kombination auftreten, die bisher aber durch kein Rechenverfahren näherungsweise erfasst werden. Dazu zählt besonders die Schallausbreitung im Freien, da Schall hier oft ausschließlich durch Beugung - wie etwa hinter Lärmschutzwänden - zum Immissionsort gelangt, wo aber nur die einfachsten Fälle exakt berechenbar sind.

Nun bedeutet Streuung, übersetzt ins Teilchenbild, jedoch Aufspalten. Durch rekursives Aufspalten würde indes die Rechenzeit exponentiell steigen. Selbst „richtige“ Näherungen machen dann keinen Sinn. Das klassische Schallteilchenmodell muss aufgegeben werden. Benötigt wird also ein qualitativ neuer Algorithmus wider jenes sinnlose exponentielle Wachstum, einer, der – dies sei hier vorweggenommen – ein Wiedervereinigen von Strahlen ermöglicht. Eine Lösung ist das in dieser Dissertation vorgeschlagene Verfahren der Verfolgung quantisierter Pyramidenstrahlen.

1.2. Annahmen und Zielgrößen der geometrischen Raumakustik

Raumakustik beschäftigt sich, physikalisch ausgedrückt, mit Messung und Berechnung von hörbaren (Luft-) Schallfeldern, d.h. orts- und zeitabhängigen Schallenergie- und Schalldruckverteilungen, meist in geschlossenen Räumen. Ziel ist die Vorausbestimmung raum- bzw. psychoakustischer Parameter, die die Hörsamkeit ("Akustik") von Auditorien bestimmen. Als wichtigste, vor allen anderen zu optimierende Größe gilt nach wie vor als pauschale ortsunabhängige Größe die Nachhallzeit. Noch heute ist unbestritten, dass ohne eine vorherige ungefähre Optimierung der Nachhallzeiten eine weitere Optimierung der weiteren raumakustischen Parameter kaum möglich und sinnvoll ist. Unter der Annahme eines diffusen Schallfeldes lässt sich die Nachhallzeit aus einer extrem einfachen Formel, der Sabine'schen oder Eyring'schen Formel, bestimmen $/R3/$. Damit begnügt man sich bei den meisten praktischen Beratungsfällen; diese „Trivial-Raumakustik“ ist hier aber nicht Thema. Vielmehr sind es jene schon erwähnten numerischen Methoden, mit deren Hilfe sich erst die weiteren, ortsabhängigen raumakustischen Parameter berechnen lassen.

Alle hörbaren Eigenschaften eines Raumes als akustisches Übertragungssystem zwischen einem Sende- und einem Empfangspunkt lassen sich ableiten von den **Raumimpulsantworten**, Funktionen des Schalldrucks p von der Zeit t (nach Anknüpfung des Direktschalls) und der Einfallsrichtung, nachdem am Sendepunkt ein Delta-Impuls ausgesandt wurde.

Eine **wellentheoretische Berechnung**, d.h. im Prinzip Lösen der Wellengleichungen unter Einhaltung der Randbedingungen geschlossener Räume, ist aufgrund der hohen Anzahl von Moden bis 4kHz (s. z. B. $/R3/$) numerisch (etwa durch Boundary-Elemente-Methoden, s. Kap.2.), auch mit den heute verfügbaren Rechenleistungen, in vernünftiger Rechenzeit nicht möglich. Glücklicherweise sind auch weder Details des Frequenzgangs der Schallübertragung noch Phasenunterschiede von Schallmissionen (z.B. unter den Obertönen von Klängen) hörbar, wie viele Untersuchungen bewiesen (zuletzt z.B. $/M1/$).

In der **geometrischen** Raumakustik wird deshalb angenommen, dass (bei geringer Absorption) in der Regel derartig viele Reflexionen auftreten, dass die Phase der Wellen als zufällig betrachtet, daher Energien statt Amplituden addiert und modellhaft von Teilchen bzw. Strahlen transportiert werden (Inkohärenz).¹ Man berechnet oder betrachtet deshalb nur Energie-von-Zeit-Funktionen, die „Echogramme“ (Bild 1.1.). Sie ergeben sich (da Schallenergien proportional dem Schalldruckquadrat sind) aus den quadrierten Impulsantworten², idealisiert eine Folge der von den Raumboflächen reflektierten Schallenergien, falls hörbar, „Echos“. Sie gelten als der „Fingerabdruck“ eines Raumes, da nach der Systemtheorie das Verhalten des „nachrichtentechnischen Übertragungssystems Raum“ aus Raumimpulsantworten, vollständig bestimmt werden kann (der Höreindruck letztlich jedoch nur unter Einbe-

¹ Durch Betrachtung der mindesten Eigenmodendichte fanden Schroeder und Kuttruff $/R3/$ eine untere Grenzfrequenz, ab der eine solche statistische Betrachtung überhaupt erlaubt ist. Für die Raumvolumina der meisten betrachteten Auditorien mit typischen mindesten Raumabmessungen von etwa 3m liegt diese in der Größenordnung von 100Hz.

² Die Phaseninformation geht bei der Quadrierung verloren. Sofern aber Echogramme frequenzabhängig angegeben werden – es genügt meist eine Klassifizierung nach Oktavbändern – können zum Zwecke der Auralisierung $/D3/D5/$ - nach statistischen Verfahren näherungsweise Impulsantworten rekonstruiert werden.

zug der Einfallrichtungen, da das Übertragungssystem „Ohr“ dabei natürlich auch noch eine Rolle spielt).

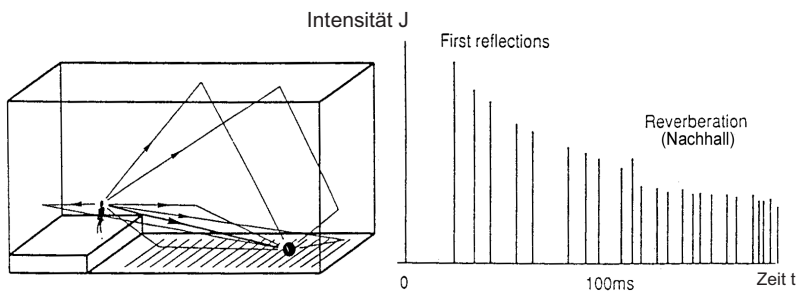


Bild 1.1: Echogramm (rechts) mit zugehörigen Schallstrahlen (links); zu jedem Umweg z gehört eine Reflexion mit der Zeitverzögerung $\Delta t = z / c$; (c =Schallgeschwindigkeit = 340m/s)

In dieser energetisch orientierten Arbeit wird häufig der **Begriff „Intensität“** gebraucht, da er am anschaulichsten ist (Energie/Zeit/Fläche). Dieser ist hier stets betragsmäßig gemeint, etwa messbar, statt auf einer kleinen ebenen Fläche, auf einer kleinen Kugel, auf die von allen Seiten jeweils senkrecht Schallenergie auftreffen kann, und die von ihr durchquert wird; in diesem Sinne ist die hier gemeinte Intensität proportional der Energiedichte in dieser Kugel: $I = c \cdot U$.³

Der Zusammenhang zwischen vielen, den Höreindruck in einem Raum beschreibenden subjektiven Begriffen und objektiv messbaren **raum- bzw. psychoakustischen Parametern** ist seit langem bekannt. Von den zahlreichen Parametern (Übersichten u.a. bei /Z3/Z5-8/) sind nach Untersuchungen u.a. von Gottlob /Z6/ jedoch bereits 3-5 ausreichend zur Beschreibung der raumakustischen Qualität eines Hörerplatzes. Diese lassen sich – vorausgesetzt, die Nachhallzeit liegt etwa bei den bekannten Sollwerten - fast ausnahmslos aus Energieverhältnissen der Echogramme bestimmen. Von den ortsabhängigen raumakustischen Parametern seien, da viele untereinander alle hoch korrelieren /Z6/, nur drei stellvertretend genannt:

- 1) Der **Schallintensitätspegel** $L = 10 \log(I / I_0)$ in dB,
mit I_0 = Bezugsintensität 10^{-12} W/m^2 bzw.

$$\text{die Gesamt-Schallintensität} \quad I = P / E_0 \cdot \int_0^{\infty} I(t) \cdot dt \quad (1.1)$$

wobei P die fiktive Dauerschallleistung einer Quelle,

E_0 die bei einem Impuls ausgesandte Energie ist.

³ Diese Definition ist in der statistischen Raumakustik üblich; statt dass im diffusen Schallfeld die vektorielle Intensität null ist, ist stattdessen die betragsmäßige Intensität pro Raumwinkel und im Raum konstant: $dI / d\Omega = \text{const.}$ und $I(\mathbf{r}) = \text{const.}$

2) Als typisch zeitabhängiger Parameter der **Deutlichkeitsgrad D**;

er ist definiert als das Verhältnis der in den ersten 50ms (nach dem Direkt-schall) eintreffenden Schallenergie zu der insgesamt eintreffenden; er hängt eng mit der Silben- und Sprachverständlichkeit zusammen.

3) Als typisch richtungsabhängiger Parameter der **Seitenschallgrad S**;

dieser berücksichtigt noch den jeweiligen Einfallswinkel φ zur durch die Ohren des Hörers gehenden Achse (senkrecht auf der Verbindungsachse Hörer-Schallquelle). Die Intensität – messtechnisch eigentlich $|Z1|$ der Schalldruck - wird dabei mit dem Faktor $\cos \varphi$ gewichtet. Der Seitenschallgrad korreliert, wie Barron $|Z1|$ fand, hoch mit dem besonders für Musikdarbietungen wichtigen Räumlichkeitseindruck (mit dem Eindruck des „Umhülltseins von Schall“ oder der „scheinbaren Quellbreite“).

In einem weiteren Schritt können die vollständigen und mit Richtungsinformation und Eigenschaften der Außenohrübertragungsfunktionen ergänzten Raumimpulsantworten beider Ohren „gefaltet“ werden mit echofreien Musik- oder Sprachaufnahmen mit dem Ziel der Hörbarmachung des Schallfeldes, dem „Hineinhören“ in erst geplante Räume - "Auralisierung", der auditive Teil "Virtueller Realität" /D1/D5/K6/K7/X12/.⁴

Es sei ausdrücklich bemerkt, dass all jene Zielgrößen hier nur der Motivation wegen erwähnt werden. Ihre tatsächliche Berechnung ist nicht Inhalt dieser Dissertation.

Raumakustik im weiteren Sinne dieser Dissertation beschäftigt sich aber auch mit der Schallausbreitung im „Freien“, in „offenen Räumen“, d.h. der Berechnung der (meist nur stationären) Schallfelder bzw. der Lärmimmissionsprognose in Fabrikhallen und Arbeitsräumen sowie in Stadt- oder Industriegebieten. „Offene Räume“ lassen sich formal und rechnerisch auf geschlossene zurückführen, in dem der „Himmel“ als eine Schall total absorbierende Hüllfläche definiert wird.

1.3. Vergleich Licht / Schall

Aus der zentralen Rolle, die die Impulsantworten in der Raumakustik spielen, folgt:

Ein Wesen numerischer Berechnungsmethoden der Raumakustik ist, dass die Immissionen zeitabhängig berechnet werden müssen.⁵ Dies ist nicht selbstverständlich, wie am Vergleich der Schall—mit der Lichtausbreitung in Verbindung mit der Wahrnehmung verdeutlicht sei (Tab 1.1). Dieser Vergleich ist insbesondere deshalb interessant, da vielfach erwartet wird, dass sich aus dem Gebiet der Beleuchtungssimulation und vor allem der weit fortgeschrittenen Techniken zur Visualisierung in „Echtzeit“ bzw. der „virtuellen Realität“ Rechenmethoden für die Raumakustik einfach entlehnen ließen.

⁴ Praktisch genügt meist eine Klassifizierung der Echogramme bzw. eine Quantisierung in wenige Raumwinkelbereiche, z.B. 33 räumliche, dabei in der Horizontalebene 8 Azimutalwinkelbereiche /Z9/.

⁵ Sie sind zumindest zeitabhängig, auch wenn sie bei Immissionsprognoseberechnungen gewöhnlich „in einen Topf geworfen“ werden zur Berechnung nur des Gesamtpegels.

Tabelle 1.1: Vergleich Licht/Schall bezüglich physikalischer Parameter, Wahrnehmung und Rechenmethoden

Parameter	Licht	Schall
Ausbreitungsgeschwindigkeit	300000 km/s	340m/s (bei 20°C)
Typische Wellenlänge	0,5 µm	0,5 m
Typische Frequenz	10 ¹⁵ Hz	10 ³ Hz
Wahrnehmungsbereich / Bandbreite	380 ...760 nm ("violett" ... "rot") 1:2 entspricht einer "Oktave"	20 Hz ... 20 kHz ("tiefe ... hohe" Töne) 1:1000 entspricht 10 Oktaven
Typische Zeit zur Durchquerung eines großen Saales	30 ns	30 ms
Typische mittlere Wandabsorptionsgrade	10...50%	5...20%
Typische Nachhallzeit	1 µs (typisch: 30 Reflexionen)	2 s (typisch: 60 Reflexionen)
Vorwiegende Reflexionsart	diffus ("weisse", "rauhe" Wände)	geometrisch / spiegelnd ("glatte" Wände)
Richtungsauflösung (Anzahl unterscheidbarer Raumrichtungen)	>10 ⁶	< 100 (geschätzt)
Zeitauflösung	typ. 70 ms (16 Bilder/s)	35...100 ms
Frequenzauflösung	Gering (wenige Hauptfarben)	sehr hoch (allein ca. 100 Halbtöne)
Wichtung/Höchste Empfindlichkeit	"gelb"	1-2 kHz
Spektralbewertung	„Farbe“	„Klangfarbe“
Typ. Räumliche Auflösung (Anzahl Oberflächenpolygone)	10000	100
i.d.R. geeignete Rechenmethode	Radiosity (paarweiser Strahlungsaustausch) (stationäre Energiebilanz)	Ray Tracing (Strahlverfolgung) (zeitabhängig)

Die Relevanz der Zeitabhängigkeit ist eine Folge der Tatsache, dass die Schallgeschwindigkeit rund eine Million mal langsamer als die Lichtgeschwindigkeit ist, und das Ohr die daraus folgenden Zeitverzögerungen in Räumen gewöhnlicher Größe wahrnimmt (Nachhalleffekt). In der Raumakustik müssen deshalb auch Reflexionen bis zu hoher Ordnung verfolgt werden. All das ist im Bereich der Optik bzw. Raumbeleuchtung nicht der Fall. Dies ist ein Grund, warum die in der Computergraphik vorherrschende Methode zur Simulation von Beleuchtungen, die „Radiosity-Methode“ (bei der ein stationäres Gleichgewicht des Strahlungsaustausches nur zwischen Paaren von Oberflächenelementen betrachtet wird, wobei frühere Reflexionen „vergessen“ werden) nur bedingt auf die Raumakustik übertragbar ist, nämlich ohne Änderungen nur dann, wenn alle Reflexionen (wie meist beim Licht) diffus sind, s.Tab.2.01. In der Raumakustik, wo große, „glatte“, meist schallharte Wände dominieren, überwiegen dagegen geometrische, nicht „vergessende“ Reflexionen, sodass die Anwendung von Strahlverfolgungsmethoden notwendig wird – wodurch die nötigen Rechenzeiten in der Raumakustik um Größenordnungen höher sind.

Die andere grundlegende Problematik raumakustischer Simulationen liegt darin, daß der "optische Grenzfall" der geometrischen Raumakustik eben nur begrenzt gilt: Die Schallwellenlängen sind im Vergleich zum Raum zwar klein, aber nicht sehr klein (und zudem sehr verschieden). Es treten demnach Welleneffekte wie Interferenzen, Streu- und Beugungseffekte auf, insbesondere an Feinstrukturen der Raumboberfläche oder bei tiefen Frequenzen. Streueffekte nehmen auch mit wachsender Laufstrecke bzw. -Zeit zu, überwiegen also bei Reflexionen hoher Ordnung. In der raumakustischen Computersimulation behilft man sich mit der Einführung von mehr oder weniger diffus streuenden Wandoberflächen, beschrieben durch Diffusitäts- oder Streugrade (zuerst vom Autor eingeführt /H1/, später von anderen übernommen und modifiziert, Näheres in 2.2.) Diese können jedoch oft nur grob geschätzt werden. Bei der Berechnung raumakustischer Parameter bekommt man damit, selbst ohne Streugrade, noch gute Ergebnisse, bei der Auralisierung jedoch nicht /D3/V1/. Auf der anderen Seite erleichtern diffuse Reflexionen aber auch die raumakustische Simulation: Die Raumgeometrie braucht nämlich bei weitem nicht so genau modelliert zu werden wie bei der Lichtsimulation (typischerweise nur durch einige 100 Polygone). Die Richtigkeit dieser Aussage ist jedoch angesichts des (im Vergleich zum sichtbaren) sehr weiten hörbaren Frequenz- bzw. Wellenlängenbereiches (10 Okta-ven entspr. $2^{10} \approx 1000$) sehr stark vom betrachteten Frequenzbereich abhängig: Optimalerweise müssten Räume für verschiedene Frequenzbereiche mehrfach mit variabler Auflösung modelliert werden. Der sehr weite Frequenzbereich bleibt ein besonderes Problem.

Die Berücksichtigung von Beugung ist entscheidend bei der Lärmimmissionsprognose im Freien. Hier gelangt Schall oft nur durch Beugungseffekte, etwa über Abschirmwände zum Hörer⁶. Nur die einfachsten Konstellationen sind analytisch berechenbar, vor allem der einfache halbumendliche Schirm, Mehrfachbeugungen jedoch nicht. Aber auch in geschlossenen Räumen können Beugungseffekte eine wichtige Rolle spielen (in Konzerträumen: Orchestergraben, Balkone, in Maschinenhallen: große Schirmwände, Maschinen).

1.4. Vergleich zur Hochfrequenztechnik

Zur Simulation der Ausbreitung von Funk- oder Radarwellen im GHz-Bereich und Findung der Übertragungswege in Gebäudestrukturen werden – motiviert durch die rasante Ausbreitung von Mobiltelefonen – seit einiger Zeit ebenfalls **ray tracing** - Methoden angewandt (s. z.B. /D8/). Hier sind die Wellenlängen zwar kurz, aber aufgrund der eine Million mal höheren Lichtgeschwindigkeit ihre Verhältnisse zu den Abmessungen wichtiger Objekte im gleichen Bereich wie in der Akustik. Ganz anders als in der Akustik ist allerdings die Bandbreite beim Funk praktisch null, was die Sache sehr erleichtert. Zur Beschreibung der Kantenbeugung in hochfrequenter Näherung kommt hierbei die GTD oder ihre Weiterentwicklung, die UTD zum Einsatz, die im Bereich der Hochfrequenztechnik bzw. im Flugzeug- und Satelliten-Bereich seit Längerem bekannte und angewandte Uniform (Geometrical) Theory of Diffraction

⁶ Ein wichtiger Fall und Anlass für das Nachdenken über den Einbau von Beugung in Strahlverfolgungsprogramme war für den Autor schon im Jahre 1985 der Fall der Kühltürme von Großkraftwerken, innerhalb derer quasi Raumakustik stattfindet, über deren Mündungskanten hinweg jedoch letztlich Schall zu den Immissionsorten nur durch Beugung gelangt /H0/.

/B2-4/. Diese Techniken können jedoch u.a. deshalb nicht einfach übernommen werden, da im Anwendungsfeld der Hochfrequenztechnik, anders als in der Raumakustik, meist nur geringe Reflexions- und Beugungsordnungen vorherrschen, das Rechenzeitproblem also nicht gravierend ist (s. Kap. 3.2.).

1.5. Grundlegende Ziele, Annahmen und Ansätze dieser Dissertation

Ziel ist also die Erweiterung numerischer Modelle der geometrischen Raumakustik um Verfahren, die näherungsweise den Effekt der Beugung simulieren, und zwar in Situationen, in denen einerseits die geometrische Akustik versagt - da eben Gebäude nicht groß genug gegen die Wellenlänge sind -, andererseits aber auch Methoden für tiefe Frequenzen (lange Wellenlängen) wie Finite- oder Boundary-Elemente-Methoden (wie kurz in Kap. 2. kurz diskutiert), weil ihre finiten Wandelemente so klein sein müssten, dass es derer zu viele gäbe, und das zu lösende Gleichungssystem zu umfangreich würde. Die radikalste Lösung wäre eine vollständige Abkehr von der Behandlung von Schall als Energiestrahlung. Diese aber wird hier nicht weiter verfolgt. Es geht also um die „Marktlücke“ der Gebäude-/ Wellenlängenverhältnisse dazwischen. Die Grundannahme der geometrischen Raumakustik, dass die Wellenlängen kurz gegen die wesentlichen Raumabmessungen seien, bleibt also auch Grundannahme dieser Dissertation – sie sollen aber nicht mehr sehr kurz sein („optischer Grenzfall“). Diese Aussage ist freilich hochgradig frequenzabhängig, denn 20Hz – 20kHz entsprechen 17m–17mm Wellenlänge; die Gültigkeit dieser Annahme hängt also stark vom Frequenzbereich bzw. dem Wellenlängen/Strukturverhältnis ab.

Mit anderen Worten: es geht um die nächst bessere hochfrequente Näherung. Dabei bleibt die wesentliche Arbeitshypothese und gleichzeitig Einschränkung dieser Dissertation:

Schall wird weiterhin als Energie- bzw. Teilchenstrahlung behandelt.

In diesem Sinne bleibt also Ziel die freie Kombinierbarkeit der Simulation von Reflexionen und Beugungen. Gefordert ist demnach ein in Strahlenalgorithmen einbaubares „Beugungs-Modul“, das im Beugungsfall – dies wird vor allem das nahe Passieren von Kanten sein - gewissermaßen nur vorübergehend eine Anleihe aus der Wellentheorie machend, eine Ablenkwinkelverteilung zurückliefert, wonach so gebeugte Strahlen weiterhin inkohärent überlagert werden. Kompliziertere Fälle mehrfacher Beugung neben- oder hintereinander müssen demnach aus einfachen Kantenbeugungen zusammengesetzt werden.

Ziel ist ein universeller Algorithmus mit einer angemessenen, wo möglich von selbst auf ein Maximum konvergierender Anzahl Strahlen, kein Patchwork aus den bisherigen Algorithmen (Spiegelquellen-, *Ray tracing*- oder *Radiosity*- Methode).

Damit nach rekursiver Anwendung und der zu erwartenden exponentiellen Strahlen-Vermehrung die Rechenzeit nicht explodiert, wird es (da ein einfacher Abbruch nach einer festen Beugungsordnung im Allgemeinen nicht möglich sein wird) eines qualitativ neuen Algorithmus' bedürfen, der neben der Strahlaufspaltung auch deren Wiedervereinigung erlaubt.

Explizit frequenzabhängige Darstellungen werden im Folgenden nun nicht mehr vorkommen. Es wird angenommen, dass alle relevanten Parameter der Schallausbreitung, Absorptions-, Streu-, ja auch "Beugungsgrade" nur implizit frequenzabhängig sind. Die Simulationen werden also frequenzbandweise durchgeführt, das können sie sogar, entgegen bisherigen Vermutungen, gleichzeitig (s. Kap.2.6.).

2 . Raumakustische Simulationsverfahren - State of the Art

In diesem Kapitel werden die bekannten Algorithmen der geometrischen Raumakustik, auch die noch weniger bekannte Radiosity-Methode dargestellt und klassifiziert. Dabei sollen ihre nutzbaren Eigenschaften, vor allem aber ihre Defizite herausgearbeitet werden, die auf die Notwendigkeit einer qualitativ neuen Rechenmethode hinweisen: eben die in dieser Dissertation vorgestellte Rechenmethode der quantisierten Pyramidenstrahlen. Dabei erscheint es zur Vorbereitung der Darstellung dieser neuen Methode sinnvoll, ihre wesentlichen, insbesondere algorithmischen Eigenarten zu rekapitulieren. Auf eine quantitative Darstellung wird weitgehend verzichtet. Die (meist einfache) Behandlung der physikalischen Effekte wird nebenher erläutert.

Eine **Klassifizierung erfolgt zunächst hinsichtlich des Wellenlängen / Struktur - Verhältnisses bzw. des Frequenzbereichs** der Anwendbarkeit einer Rechenmethode. Einbezogen werden deshalb nur der Vollständigkeit halber auch die in der Raumakustik (bislang) unüblichen numerischen Methoden der Finiten oder Boundary-Elemente (FEM, BEM), s. folgende Tabelle:

Tabelle 2.0: Klassifizierung von Rechenmethoden

Gebiet	Wellen-theoretische Raumakustik	Geometrische Raumakustik niedere höhere Reflexionen		(geometrische) Optik
Wellenlänge/ Raumabmessung	Groß - mittel	klein	klein- mittel	extrem klein
Geeignete Rechenmethode	FEM/BEM Diskretisierung von Volumen oder Oberfläche	Spiegel-Schallquellen-Methode	Ray Tracing /Schallteilchen-Methode	Radiosity
Idee	Quantisierung der Raumoberfläche Stückweise Lösung der Wellengleichung	Ersetzen von Quelle und Wänden durch Quelle und Spiegelquellen Zurückführung aufs Freifeld Indirekt/ deterministisch	Direkte Simulation des Energietransports durch Schallstrahlen oder Schallteilchen Statistisch ("Monte-Carlo")	Strahlungsaustausch zwischen Paaren von Oberflächenelementen / Lösung eines linearen Gleichungssystems
prinzipiell erlaubte Geometrie	beliebig	ebene Oberflächen (optimal: Quaderraum)	beliebig (besser eben)	beliebig
Reflexionen	implizit	geometrisch	Geometrisch/ Diffus	Diffus
Beugung	implizit	Beugungsformeln vorhanden, aber Widersprüche, Rechenzeitexplosion	Schwierig: Lösungsansätze, aber Rechenzeitexplosion	spielt keine Rolle

Zusätzlich zu den üblichen raumakustischen Annahmen (Wellenlängen klein gegen die Strukturen) wird hier – für die Algorithmendiskussion wichtig - vorausgesetzt, dass die Raumboberfläche stückweise eben ist, aus einer Anzahl von Polygonen ("Wänden"), Kanten und Ecken besteht, der Raum also ein Polyeder ist. Von gekrümmten Oberflächen wird also angenommen, dass sie in Polygone zerlegt seien. Sollen nur energetische Parameter berechnet werden, ist dies keine wesentliche Einschränkung, selbst bei groben Näherungen (Bild 2.0) /H1/. Nur in unmittelbarer

Umgebung von Brennpunkten ergeben sich aufgrund der Polygonnäherung starke systematische Fehler im Vergleich zur wellentheoretischen Betrachtung /G5,S6/ - die aber auch nur theoretisch, denn exakte Kreislräume gibt es ja praktisch nicht.

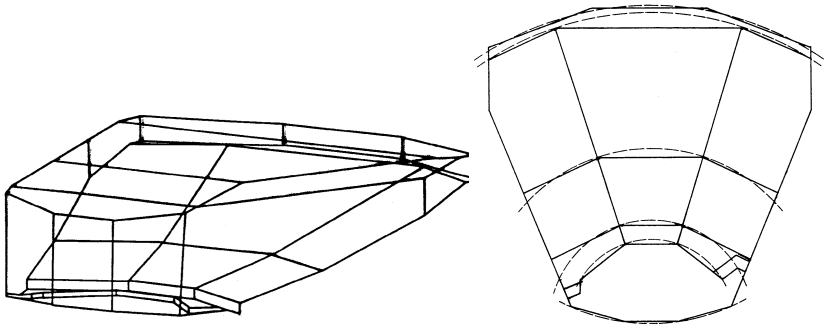


Bild 2.0 Zur Polygonnäherung am Beispiel eines Hörsaals mit zylindrischen Rückwand:
Gittermodell eines Polyeders (Forum 1 des Kármán-Auditoriums der RWTH Aachen)
a) perspektivisch ; b) 3-Sekanten-Näherung der zylindrischen Rückwand, der Publikumsfläche und des Bühnenreflektors; dies ist ein sehr grobes Modell (aus /H1/), heute sind dank der gestiegenen Rechenleistungen wesentlich feinere Modellierungen üblich (oft aber nicht nötig).

Daraus ergeben sich, hierarchisch gliederbar, folgende Raum-„Objekte“:

Raum- (Teilräume¹) - (Wandgruppen²) – Wände - (Kanten³) – Ecken.

Finite-Elemente- und Boundary-Elemente-Methoden werden bei zahlreichen ingenieurwissenschaftlichen Aufgabenstellungen eingesetzt, bei denen, allgemein ausgedrückt, die zugrunde liegenden Differenzialgleichungen wegen komplexer Geometrie der Randbedingungen nicht mehr analytisch gelöst werden können, sowohl in der Statik (z.B. im Bauingenieurwesen) als auch bei der Berechnung von Eigenschwingungen mechanischer Systeme (z.B. im Kraftfahrzeugwesen).

Bei der **Methode der Finite-Elemente (FEM)** /F1/ wird die Wellengleichung zunächst in ein Variationsfunktional übergeführt. Das Gebiet, in dem sie gelöst werden soll, wird in endliche Volumenelemente unterteilt. In jedem Element wird eine Näherungsfunktion angesetzt, die an den Rändern stetig zu der des Nachbarelements übergeht. Sodann wird unter diesen Randbedingungen ein Extremum des Variationsfunktionals ermittelt. Zu Lösen bleibt ein lineares Gleichungssystem, und zwar nur mit einer Bandmatrix. Eine Randbedingung an die FEM liefert das Nyquist-Theorem. Danach muß die Breite, Länge und Höhe der Elemente kleiner als die halbe Wellenlänge sein; als Faustregel gilt: besser kleiner als eine sechstel Wellenlänge.

¹ unterteilt durch „transparente Wände“, einsetzbar zur Konvexzerlegung (s. 4.2.2) und Rechenzeitverkürzung

² räumlich abgegrenzt durch Hüllflächen, eventuell zur Rechenzeitreduzierung

³ die Einführung der „Zwischenobjekte“ Kanten ist, außer zu Zwecken der grafischen Darstellung, geboten zur Erfassung der Kantenbeugung (s. Kap. 3.5.)

Bei der **Methode der Boundary-Elemente (BEM)** wird die Wellengleichung mit einer geeigneten Greenschen Funktion in die Kirchhoff-Helmholtz'sche Integralgleichung transformiert. Diese wird, bei gegebenen Schallquellen im Innern, für die Oberflächen eines vorgegebenen Raumes gelöst. Dazu wird die Oberfläche in endlich viele kleine Elemente zerlegt, für deren paarweise Beziehung näherungsweise Matrixelemente angesetzt werden. Dies führt wiederum auf ein lineares Gleichungssystem, dessen Matrix, anders als bei der FEM, voll besetzt und nicht symmetrisch ist.

Beide Methoden liefern für niedrige Frequenzen, d.h. heute praktisch bis höchstens 1kHz, und für Wellenlängen, die nicht allzu klein gegen typische Raumabmessungen sind, gute Ergebnisse.

Vorteil: Wellentheoretische Effekte wie Interferenz und Beugung werden erfaßt.

Nachteil: Bei Strukturen, die sehr groß gegen die Wellenlänge sind, bedarf es aufgrund des Nyquist-Theorems extrem vieler finiter Elemente.

Zur Berechnung der Schallverteilung innerhalb eines Würfels von 10 m Kantenlänge müssten z.B. bei der FEM im raumakustischen Frequenzbereich bis 4 kHz ($\lambda=8.5\text{cm}$) mindestens 10^7 finite Volumen-Elemente verwendet werden. Dies würde neben riesigem Speicherplatz auch astronomische Rechenzeiten erfordern. Auf große Räume als Ganzes und (wegen der noch grösseren Strukturen) auf die Immissionsprognose im Freien sind – zumal die Zielgrößen meist nur energetisch und frequenzbandweise zu berechnen sind - FEM und BEM also nicht sinnvoll anzuwenden. Immerhin ist die BEM zur Anwendung auf Beugungs- und Abstrahlprobleme von Wänden (z.B. von Lärmschutzwänden) oder von komplexen Schallquellen wie Maschinen anwendbar. (Zur Berechnung der Streucharakteristik begrenzter Raumbereiche s. z.B. /G1/.) Die BEM –Methode, obwohl wellentheoretisch, kann in Zusammenhang zur *Radiosity*-Methode gesehen werden, bei der, rein energetisch, der Strahlungsaustausch zwischen Paaren von Oberflächen betrachtet wird, was auf ein ähnliches lineares Gleichungssystem führt. Dieses Gleichungssystem lässt sich auch iterativ lösen; der Strahlungsaustausch wird dabei zeitabhängig simuliert. Eine sehr interessante Time Iterative Boundary Element Method (TIBEM) wurde von Kludszuweit /R2/ vorgestellt. Einen Vergleich hinsichtlich der akustischen Anwendung beider Methoden enthält /F2/. Verwandt mit der BEM ist die von de Vries & Berkhout entwickelte Wellenfeld-Methode /F3/, die aber zu ähnlichen Speicherplatz-Problemen führt.

In den drei folgenden Abschnitten erfolgt eine Darstellung raumakustischer Rechenverfahren, klassifiziert nach Zeitbereichen der Raumimpulsantwort (früh, Mitte, spät) bzw. der Reflexionsordnung, auch hinsichtlich der Möglichkeit diffuser Reflexionen.

2.1. Die Spiegelschallquellenmethode (SSQM)

Die Spiegelschallquellenmethode ist die "klassische Methode", die auch ohne Computerhilfe oft zeichnerisch angewandt wird /Q1/Q3/. Sie ist eine (im Rahmen der Annahmen der Geometrischen Raumakustik) **exakte, deterministische, indirekte Methode**. Sie führt nämlich die Konstellation „Quelle –Raumbereiche – Empfänger“ auf die äquivalente, d.h. physikalisch ununterscheidbare Konstellation „Quelle – Spiegelquellen – Empfänger“ zurück. Die Schallimmissionen können dann wie im Freifeld berechnet werden, meist nach der einfachsten Annahme der Spiegelquellen

als Punktquellen, also nach dem $1/r^2$ -Abstandsgesetz. Bei der SSQM gelten alle Wände als "Spiegel", d.h. als geometrisch reflektierend (Einfallswinkel = Ausfallswinkel). Die geometrische Reflexion ist im Vergleich zu diffusen, auch die Reflexion des kürzesten Gesamtweges; das folgt unmittelbar aus dem Axiom, dass die Gerade die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist, oder aus dem Fermat'schen Extremalprinzip – das auch bei der Kantenbeugung eine Rolle spielt ⁴. Der tatsächliche Schallstrahl kann dann von einem Spiegelpunkt S' direkt zum Empfangspunkt E gezogen werden (s. Bild 2.1). Das Spiegelungsprinzip kann rekursiv auch auf Spiegelungen höherer Ordnung angewandt werden, wobei vier Kriterien zu beachten sind: zunächst müssen natürlich Spiegelschallquelle (SSQ) und Empfänger vor der spiegelnden Wand liegen; eine Spiegelschallquelle (SSQ) muss auch „sichtbar“ sein; diese "Sichtbarkeit" (Gültigkeit) ist nur dann gegeben, wenn der so konstruierte Strahl seinen Reflexionspunkt nicht nur auf der Wandebene, sondern auch innerhalb des (endlichen) Wandpolygons hat; ferner darf der so konstruierte Strahl nicht durch andere (nicht an der Spiegelung beteiligte) Wände unterbrochen sein, was weitere solche Punkt-in-Polygon-Tests beinhaltet. Diese sind die rechenaufwändigsten. Der Algorithmus sei anhand des folgenden Bildes nur angedeutet.

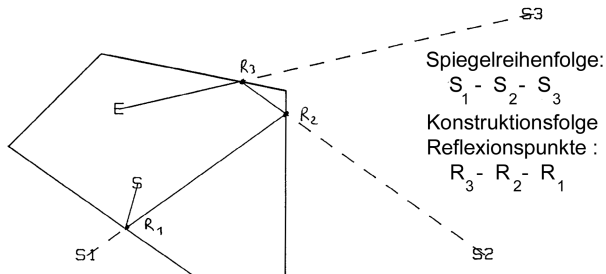


Bild 2.1 Prinzip der Spiegelschallquellenmethode, rekursiv angewendet: Zu gegebenen Spiegelungsreihenfolgen werden gültige Strahlverbindungen gefunden, indem ein Quellpunkt oder Spiegelquellpunkt rekursiv bis zur gewünschten Ordnung jeweils an den nächsten Wandebenen gespiegelt wird, und dann vom Empfangspunkt aus zunächst die so gebildete Spiegelquelle höchster Ordnung angepeilt wird, wodurch sich der letzte Reflexionspunkt ergibt, dann von diesem die (in der Spiegelungsreihenfolge) vorletzte Spiegelquelle angepeilt wird, wodurch sich der vorletzte Reflexionspunkt ergibt, usw. rückwärts, bis alle Reflexionspunkte bestimmt sind.

Das Problem dieser klassischen SSQM (erst Konstruktion der SSQ, dann Sichtbarkeitsprüfung) ist: Da die „Sichtbarkeit“ von der Lage des Empfangspunktes abhängt, „vererben“ sich die Kriterien nicht auf die „Nachkommen“; d.h. eine von einem Empfangspunkt E aus unsichtbare SSQ kann ein „Kind“ haben, das von E aus wieder „sichtbar“ ist. Alle konstruierten SSQ müssen also auf Sichtbarkeit geprüft werden. (s. Bild 4.2.14 in Kap. 4.2.). Es muß deshalb eine mit der Reflexionsordnung exponentiell steigende Anzahl von SSQ, eine Baumstruktur von Spiegelquellen zunächst

⁴ Dies hat auch wichtige praktische Konsequenzen für die Raumakustik: „Diffuse Reflexionen kommen stets später“, können deshalb nicht Deutlichkeits-erhöhend wirken.

konstruiert und geprüft werden. Andererseits nimmt die Intensität einer Punktquelle mit dem Quadrat der Entfernung ab; nach dem Energieerhaltungssatz muss es deshalb zum Ausgleich eine mit dem Quadrat der Entfernung (und damit auch der Reflexionsordnung L_0) wachsende Anzahl SSQ bestimmter Ordnung geben, in der Summe, bis zur Ordnung L_0 , also eine proportional L_0^3 ; das ist auch der Fall, da es im Spiegelquellenraum im Mittel stets eine SSQ pro Originalraumvolumen gibt; das Exponentialgesetz (K_0^{-1}) wird auch dadurch aufgehoben, dass die Sichtbarkeitswahrscheinlichkeit auf jeder Reflexionsstufe von der Ordnung $1/K_0$ ist (K_0 =Wandanzahl). Die ganze o.g. Prüfprozedur wird mit steigender Reflexionsordnung also nur äußerst selten ganz durchlaufen. Aus physikalischen Gründen steigt letztlich die sichtbare Anzahl SSQ nur mit der 3. Potenz der Reflexionsordnung, d.h. der Verzweigungsgrad des Spiegelquellen-Bildungs-Baumes nimmt ab.⁵ Mit zunehmender Reflexionsordnung steigt so bei der klassischen SSQM die Diskrepanz zwischen Rechenaufwand und Ergebnis (d.h. Energiebeitrag am Empfangspunkt) drastisch $/H3/$. Die Rechenzeit der SSQM wird also nicht bestimmt durch die Anzahl sichtbarer, sondern durch die Anzahl zu konstruierender SSQ. Sie ist proportional der Anzahl Quellpunkte und (da leider die Sichtbarkeit jeweils neu zu prüfen) auch proportional der Anzahl Empfangspunkte (im Gegensatz zu Strahlverfolgungsmethode).

Fazit: Die SSQM ist (bis auf den immer unvermeidlichen Abbruchfehler nach einer bestimmten Reflexionsordnung, den "Restnachhallfehler") eine im Rahmen der Annahmen der geometrischen Raumakustik zwar exakte, aber ineffiziente Methode. Ihre Stärke im Vergleich zur Strahlverfolgung ist es immerhin (für die Auralisation wichtig) **alle** Schallpfade von einem Sende- zu einem Empfangspunkt zu finden. Sie ist aber nur für niedere, i.d.R. 1.-2. Reflexionsordnungen effizient (s. $/H3/$ und Vergleich am Ende von Abschnitt 2.2). Ihre entscheidende Verbesserung - ebenso wie sie deterministisch, aber bei deutlicher Reduzierung der Anzahl der rechenaufwendigen Sichtbarkeitsprüfungen – stellt die Pyramidenstrahlmethode dar.

2.2 Strahlverfolgungsmethoden (Ray Tracing-Methoden)

Ray Tracing-Methoden sind moderne numerische Methoden, die erst mit der Verfügbarkeit von Computern Anfang der 60er Jahre aufkamen $/S1/$ (erste praktikable Umsetzung in Deutschland mit einigen Erweiterungen 1982 im Rahmen der Diplomarbeit des Autors $/H1/$.) Sie sind typische Vertreter von Monte-Carlo-Methoden, in dem Sinne, dass ein physikalischer Prozess direkt simuliert wird mithilfe (quasi-) zufällig festgelegter Anfangswerte von Einzelprozessen; sind also **statistische, aber direkte Verfahren**.

Exemplarisch näher beschrieben sei zunächst das Schallteilchenverfahren.

⁵ Das kann man verstehen, wenn man sich den Spiegelungsprozesses mit Pyramidenstrahlen vorstellt, ausgehend vom Quellpunkt, mit den Wandpolygonen als Querschnitt, die sich nach jeder Spiegelung immer weiter aufsplitten, sich dabei aber mit immer weniger neuen Wandpolygonen schneiden, sodass am Ende fast immer nur noch eine neue Wand getroffen wird, sodass der Aufspaltungsgrad gegen 1 und das ganze Verfahren gegen ein Ray Tracing Verfahren konvergiert (s. Bilder 4.1.4 und 4.2.13 in den Abschnitt 4.1 bzw. 4.2). Das genau ist die Idee des Pyramidenstrahlverfahrens; das Geheimnis seiner Effizienz liegt darin, dass die „Sichtbarkeit“ – wie beim Ray Tracing - vorwärts statt rückwärts, während des Konstruktionsprozesses geprüft wird, ohne Kenntnis von Empfangspunkten, d.h. also auch für alle Empfangspunkte, sodass die meisten unsichtbaren SSQ gar nicht erst konstruiert werden; implizit (wenn auch unklar beschrieben) ist dies auch der Grund für die Effizienz der von Lee $/Q2/$ vorgeschlagenen Variante der SSQM.

2.2.1. Das Schallteilchenverfahren

Beim Schallteilchenverfahren wird von einem Quellpunkt aus eine große Anzahl "Schallteilchen" oder Strahlen (die Begriffe werden oft synonym gebraucht) möglichst gleichmäßig (quasi-zufällig) in alle Raumrichtungen (sozusagen nach dem Gießkannenprinzip) ausgesandt. (Zwischen „Schallstrahl“ und „Schallteilchen“ wird erst bei der Immission bzw. Detektierung unterschieden). Nicht die erreichten Empfangspunkte sind also bekannt, sondern die Anfangsrichtungen – genau umgekehrt wie bei der SSQM. Jedes Teilchen bzw. jeder Strahl repräsentiert dabei einen Raumwinkelausschnitt aus einer Kugelwelle, trägt eine bestimmte Schallenergie bzw. Schallleistung derselben (oder mehrerer Frequenzbänder). Von jeder Punktschallquelle ("Schallteilchenkanone") aus wird eine große Anzahl von Schallteilchen möglichst gleichmäßig in alle Raumrichtungen ausgesandt⁶. Jedes Teilchen bekommt im Standardfall (keine Richtwirkung und nur eine Quelle) die relative Anfangsenergie 1. Bei mehreren Quellen unterschiedlicher Schallleistungen wird am besten die Teilchenanzahl bei gleicher Teilchenenergie variiert; das ist rechnerisch effizienter als die Teilchenenergien zu variieren. Eine Richtwirkung kann simuliert werden durch Zuweisung unterschiedlicher Anfangsenergien der Teilchen oder (schwieriger) durch Variation der Abstrahldichte (Raumwinkel / Teilchen) oder durch beides. Diese Strahlen oder Teilchen werden nun über eine bestimmte Anzahl Reflexionen verfolgt.

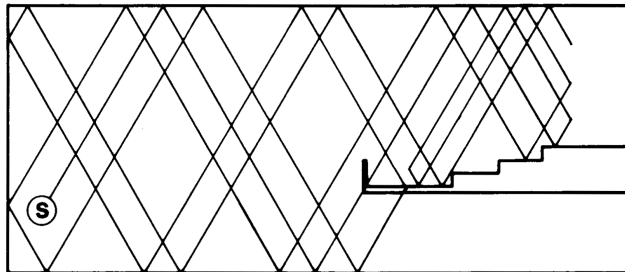


Bild 2.2 Zur Veranschaulichung von Strahlverfolgung

Zum Finden des nächsten Reflexionspunktes müssen im Prinzip alle Wände auf Schnittpunkt mit dem Schallstrahl getestet werden. Das geschieht in einer Schleife wieder nach vier Kriterien („Teilchen von vorne?“, „vorwärts?“, „nächster Schnittpunkt?“ und „Trefferpunkt auf Wandpolygon?“ /H1/); der Punkt-in-Polygon-Test ist dabei mit Abstand am rechenaufwändigsten (s. Abschnitt 2.2.3).

Die Reflexionen brauchen, da der Schallausbreitungsprozess ja, ohne Rücksicht auf das Erreichen bestimmter Orte, „straight-forward“ simuliert wird, nicht geometrisch-spiegelnd zu sein, sondern können auch diffus sein oder nach sonstigen Reflexionsgesetzen erfolgen. Dies ist ein wesentlicher Vorteil von Strahlverfolgungsmethoden gegenüber der SSQM.

⁶ Ein Problem dabei ist: Man kann eine Kugeloberfläche nicht in exakt gleich grosse Raumwinkel zerlegen, sofern mehr als 20; eine vom Autor /H1/ verwendete Lösung zeigt Bild 4.3.3.a in Kap. 4.3.3.; ein Beispiel für eine andere, vielfach verwendete Zerlegung in viele Dreiecke auf Basis eines Ikosaeders, d.h. 20 primärer Dreiecke zeigt Bild 6.2. in Kap.6.

An dieser Stelle sei die (meist recht einfache) Simulation der physikalischen Effekte der Absorption und der Reflexion skizziert, da sie auch bei der Pyramiden-Methode Verwendung finden.

Schallabsorption

Die Schallabsorption an Oberflächen wird – auch im Spiegelschallquellenverfahren für die Schallleistung – nach der simplen Formel: die Energie nach Reflexion ist

$$E' = E \cdot (1 - \alpha) \quad (2.1)$$

berechnet (E = auftreffende Energie, α = Schallabsorptionsgrad).

Dieser Ansatz könnte auch im statistischen Mittel über viele Teilchen statt für eines gemeint sein; demnach bliebe die Energie einzelner Teilchen stets konstant, und der Effekt der Absorption würde über die Teilchenzahl geregelt, in dem der Reflexionsgrad $\rho = 1 - \alpha$ als Wahrscheinlichkeit für eine Reflexion bzw. ein „Überleben“ des Schallteilchens gedeutet wird, d.h. Weiterverfolgung, falls eine Zufallszahl $Z < \rho$ ($0 < Z < 1$). Diese „Annihilationsmethode“ wurde u.a. von Vorländer /V4, D7/ untersucht und u.a. von Heinz /D3/ getestet. Kommt es nur auf die auf Energieverhältnissen beruhenden raumakustischen Parameter an, so ist trotz der mit weniger Teilchen „gröberen“ Aufteilung der Energiesummen die Annihilationsmethode geringfügig effizienter, denn man verfolgt nur Teilchen mit „voller“ Energie; will man jedoch, etwa für eine Auralisation, „lange Echogamme“ berechnen, genauer: kommt es also auf Teilchen fester (höherer) Reflexionsordnung an, so ist o.g. Energieverminderungsmethode effizienter; das liegt daran, dass man, zum Ersatz „gestorbener“ Teilchen, neue nachschießen muss, und zwar ab der Quelle, sodass viele Wege und Reflexionen ineffizienter Weise mehrfach berechnet werden müssen. Diese Art Gedankengang wird auch wieder bei der Frage der Beugungssimulation eine Rolle spielen. Schlussfolgerung: die Energieverminderungsmethode ist vorzuziehen.

Alle physikalischen Parameter sind, wie hier und in den üblichen Simulationen stets vorausgesetzt, frequenzabhängig, in der Raumakustik meist in den 6 Oktavbändern 125Hz-4kHz angegeben, entsprechend dem raumakustischen Ansatz kommen meist nur energetische Werte zum Zuge. Schallstrahlen oder –Teilchen in den Simulationen können Energien mehrerer Frequenzbänder gleichzeitig übertragen; allerdings ist zu bedenken, dass auch die Streugrade und damit die Ausbreitungspfade frequenzabhängig sind, weswegen Simulationen eventuell komplett zu wiederholen sind. (Wie das zu vermeiden ist, s. Kap. 2.6.)

Im Übrigen sind die Reflexionsfaktoren auch von der Entfernung der (Spiegel-)quelle zur endlichen Wandebene bzw. von der Krümmung der Wellenfronten abhängig, welche bei nahen (ca. eine Wellenlänge nahen) Abständen, wichtig wird /MM/. Neuere Untersuchungen beschäftigen sich bereits mit dem Einbau in numerische Modelle /MK/. Die Hörbarkeit von Unterschieden ist jedoch fraglich /M1,D3,5,6/. Bei der Schallteilchenmethode kann von so vielen Schallteilchen bzw. so geringen Raumwinkeln pro Schallstrahl ausgegangen werden, dass die Krümmung der Wellenfront pro Strahl vernachlässigbar ist.

Ferner sind Absorptionsgrade auch richtungsabhängig /MR/; eingesetzt wird jedoch meist der Mittelwert des Diffusfeldes. Bei der SSQM wird Glng. 2 im Zusammenhang mit Glng. 1 bei Vielfachreflexionen rekursiv angewendet.

Die kontinuierlich längs einer Strecke r erfolgende **Absorption (Dämpfung) in Luft und über Publikum** wird entsprechend einem Exponentialgesetz behandelt:

$$E(r) = E(0) \cdot e^{-m \cdot r} \quad (2.2)$$

In Luft nimmt diese Dämpfung bekanntlich erheblich mit der Frequenz zu ($m_{\text{Luft}} = 0.039 \cdot f^{1.7} / \Phi$, f = Oktavbandmittelfrequenz in kHz, Φ = relative Luftfeuchte in %, m in 1/m; interpoliert aus allgemein bekannten Daten für den üblichen Feuchtebereich von 30%-90% und Frequenzen bis 4kHz).

Publikum kann (bei dem vor allem interessierenden streifenden Einfall mit Winkeln unter 10°) etwa als dichte, quasi-kontinuierliche Anordnung absorbierender Streukörper mit hoher Dämpfung aufgefasst werden kann („dicke Soße“ /H1/). Zwar erfolgt hier der Energieverlust eigentlich nicht exponentiell mit der Wegstrecke (die ersten Publikumsreihen streuen und absorbieren dabei übermäßig viel /M2/); will man „auf der sicheren Seite“ liegen, kann man aber doch ein Exponentialgesetz annehmen, z.B. etwa mit $m_{\text{pub}} = 0.23/\text{m}$ entsprechend einem Pegelabfall von **1dB/m für 1kHz**. Dieser Wert wurde schon von Meyer et.al. 1965 gefunden und von Mommertz /M3,D6/ 1993 für die ersten 10m bestätigt. Bei größeren Entfernungen wird die Dämpfung pro Strecke wesentlich geringer.

Reflexion und Streuung

Die **geometrische** Reflexion (eigentlich nur an unendlich ausgedehnten ebenen Wänden) ist bekanntlich charakterisiert durch den Grundsatz „Ausfallswinkel = Einfallswinkel“, berechenbar nach einer einfachen Vektorgleichung.

Die im umgekehrten Fall (Abmessungen der reflektierenden Fläche klein gegen Wellenlänge oder „rauhe“ Wände) auftretende **diffuse Reflexion**, wird, falls „perfekt diffus“, nach dem aus der Optik bekannten Lambertschen Gesetz, interpretiert als (normierte) Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnet; demnach ist die **Wahrscheinlichkeitsdichte des Ausfallswinkels** δ , auf den Raumwinkel bezogen, proportional $\cos \delta$, unabhängig vom Einfallswinkel (zur technischen Ausführung, s. /H1/).

Nun ist natürlich sowohl die rein-spiegelnde als auch die rein-diffuse Reflexion nur ein Grenzfall. Denn eigentlich hat jede unendlich ausgedehnte, periodisch untergliederte Oberfläche eine wohl definierte Richtcharakteristik. Fast jede reale Oberfläche wird je nach Frequenz bzw. Wellenlänge eher zum Spiegel oder eher zum diffusen Streuer. Die Vorgabe diffus reflektierender Wände ist nach obigen Überlegungen sinnvoll bei Wänden mit „rauer“ Oberfläche, d.h. typische „Relieftiefe“ ganz grob in der Größenordnung der Wellenlänge (bei 1 kHz etwa 30 cm); Treppen oder ähnlichen Feinstrukturen, auch die Bodenfläche „Publikum“ (mit seinen schallstreuenden Köpfen) werden demnach vergrößert als schiefe, diffus reflektierende Ebene eingegeben. Ist die Relieftiefe vernachlässigbar im Vergleich zur Wellenlänge, wirkt die ganze Wand als Spiegel (Wellen „sehen“ Details nicht). Auf der anderen Seite werden Wellen vergleichsweise sehr kurzen Wellenlängen an jedem Detail der Struktur wie an einem Spiegel reflektiert.

Ein inzwischen üblicher Ansatz zur Berücksichtigung der im Realfall nur teilweise diffusen Reflexionen ist die Einführung von **Streugraden** $0 \leq D \leq 1$ (früher "Diffusitätsgrade" D genannt); die zwischen den beiden Extremfällen "spiegelnd" ($D=0$) und "Lambert'sch-diffus" ($D=1$) mischen /H1/. Früher (wie auch heute noch oft) wurde der Streugrad meist grob, „nach Gefühl“ bzw. Erfahrung geschätzt. In jüngerer Zeit ist es jedoch Vorländer et.al. G3/G4/D6/ im Freifeld vor einer Testfläche sowie Mommertz /G2/D6/ auch im Diffusfeld des Hallraums gelungen, die Streugrade messtechnisch zu bestimmen (aus den Standardabweichungen zwischen kohärent und inkohärent gemessenen Reflexionsfaktoren), so dass sie nun bald für viele Oberflächenstrukturen und Wellenlängen zur Verfügung stehen. Der Streugrad, wie hier definiert, soll ein Kennwert allein für die Beschaffenheit der Oberfläche (im Verhältnis zur Wellenlänge) sein, beschreibt also nur bei unendlich ausgedehnten Flächen und Auftreffen ebener Wellen das ganze Ausmaß der Streuung (d.h. Abweichung von der geometrischen Reflexion), denn hinzu kommt bei endlichen Wänden ja noch der Effekt der Kantenbeugung (welcher bei o.g. Messungen minimiert wurde.)

Technische Umsetzung: Am einfachsten und konsequentesten ist eine teilweise diffuse Reflexion durch Aufruf einer weiteren (gleichverteilten) Zufallszahl Z_3 durchführbar: Falls $Z_3 < D$, erfolgt diffuse, sonst geometrische Reflexion. Der Nachteil dieser Methode ist freilich eine weitere Ungenauigkeit, denn erst im Grenzfall unendlich vieler Teilchen - die eine bestimmte Wand treffen - wird der erwünschte Diffusitätsgrad auch tatsächlich umgesetzt, bei höheren Reflexionsordnungen (ausgerechnet da, wo die Diffusitätsgrade hoch werden) aber treffen nur noch wenige Schallteilchen eine Fläche. Diese Methode wird dennoch von vielen Autoren (die diffuse Reflexionen in Ray-Tracing-Programmen umsetzen) verwendet⁷.

Es soll hier nun (abweichend von anderen Autoren) ausdrücklich sowohl die Reflexion an „rauen“ Oberflächen (mit Relief) als auch schon die an endlichen Oberflächen (durch die Beugung an den Außenkanten) als „diffus“ bezeichnet werden, denn in der Anwendung macht die Separation in diffuse (d.h. nicht-geometrische) Reflexionen wegen der „Rauigkeit“ der Oberfläche und die wegen des Kanteneffektes nach Auffassung des Autors bzw. nach seinem energetischen Grundansatz keinen Sinn. Der Grad, der den energetischen Anteil nicht-geometrischer Reflexionen beschreibt und beide Effekte zusammenfasst, sei deshalb weiter als „Diffusitätsgrad“ bezeichnet⁸.

Klar ist nun (wie von Kuttruff häufig betont, s. z.B. /R6/), dass (besonders bei tiefen Frequenzen) der Anteil in diesem Sinne diffuser Reflexionen in Räumen mit der Reflexionsordnung stark zunimmt; schon nach wenigen Reflexionen ist meist totale Diffusität erreicht. Berücksichtigt man nun aber auch die Endlichkeit der reflektierenden Flächen, müsste auch der Diffusitätsgrad der Wände selbst (der zum Diffuser-Werden des Schallfeldes beiträgt) mit zunehmender Entfernung vom Sender und Empfänger zunehmen. Das ist plausibel, da mit zunehmender Laufstrecke immer

⁷ Außer vom Autor selbst: nach Stephenson /H1/ wird bei gemischt-geometrisch-diffuser Reflexion der Ausfallsrichtungsvektor per Linearkombination aus dem für die geometrische Reflexion berechneten und dem per Zufall für die diffuse Reflexion bestimmten bestimmt.

⁸ Es sei bemerkt, dass, wenn man den Streugrad realistischerweise auch von der Entfernung der Schallquelle vom betrachteten Oberflächenstück abhängig macht, bzw. von der Krümmung der Wellenfronten, zwischen „rauen“ und „kleinen“ Oberflächenstücken letztlich, d.h. bei großen Laufstrecken oder vielen Reflexionen, ohnehin kein Unterschied mehr besteht, wenn man den ganzen Ausbreitungsraum, in dem Schall vielfältig hin und her reflektiert wird, betrachtet; so gesehen ist dann der Raum als Ganzes „rauh“ bzw. eine fraktale Struktur, nur in größerem Maßstab, der die Schallstrahlen immer weiter aufspaltet; oder: „die Entropie steigt letztlich immer.“

weniger Fresnel-Zonen auf eine endliche Raumbohrfläche passen und somit, auch bei „glatten“ Wänden, der Kantenbeugungsanteil zunimmt. Wie der Autor unter Nutzung der (allgemein bekannten) Fresneltheorie⁹ abschätzen konnte, müsste ein so definierter **entfernungsabhängiger Diffusitätsgrad** (schon für ebene Flächen)

$$\text{betragen: } D_0\left(f, \bar{r}, \delta, S_1\right) \approx 2 \cdot \left(\frac{c \cdot \bar{r}}{S_1 \cdot f \cdot \cos \delta} \right)^2, \text{max. } 1 \quad (2.3)$$

mit harmonisch-mittleren Abstand $\bar{r} = \frac{2 \cdot r_q \cdot r_p}{r_q + r_p}$ vom Reflexionspunkt R zu Sendepunkt

P und Empfangspunkt Q, S_1 =Fläche, f =Frequenz, δ =Einfallswinkel, gemessen in der Einfallsebene QRP. Für einen mittleren Raum mit einer mittleren freien Weglänge von etwa 10m und ca. 100 Oberflächen würden dann bei 1kHz schon Reflexionen ab der 6.Ordnung völlig diffus sein, die für tiefere Frequenzen natürlich schon früher.

Schon der durch die Begrenztheit reflektierender Flächen gegebene Diffusitätsgrad steigt also mit dem Quadrat der Laufstrecke bzw. Reflexionsordnung. Diese Formel wurde jedoch noch nicht in einem Simulationsprogramm getestet.

Die erwartete Zunahme des Diffusitätsgrades mit der Reflexionsordnung ist auch der Grund, weswegen in modernen hybriden Simulationsverfahren bei niederen Reflexionsordnungen die Spiegelquellenmethode, bei höheren Ray-Tracing-, bei noch höheren Radiosity-Methoden bevorzugt werden. Meist wird dabei davon ausgegangen, dass nach diffusen Reflexionen grundsätzlich keine geometrische mehr erfolgt. Das ist jedoch falsch. Im Einzelfall kann ein Schallstrahl nach einer eher diffusen Reflexion durchaus auch wieder weitgehend spiegelnd reflektiert werden, etwa, wenn wieder eine große, glatte Oberfläche getroffen wird. Freilich kann es (auch als Folge des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik interpretiert) *in der Summe* kein Zurück von diffus gestreuter zu geometrisch reflektierter (=„geordneter“) Schallenergie mehr geben, der Umwandlungsprozess von geometrischer in diffus gestreute Schallenergie ist wegen der Zunahme der Diffusitätsgrade sogar beschleunigt.

Detektierung

Welche der (vorher festgelegten) Empfänger, nun erreicht werden, ist bei der STSM (im Gegensatz zur deterministischen SSQM) quasi-zufällig. Es können auch durch einen einmal berechneten Strahl mehrere Empfänger „bedient“ werden – woraus bereits erkennbar wird, dass Strahlverfolgung effizienter sein kann als die Spiegelquellenmethode – jedenfalls im Falle mehrerer Empfangspunkte.

Nun ist es ja nicht möglich, genauer: die Wahrscheinlichkeit ist null, dass ein von einem Punkt ausgesandter idealer (ausdehnungsloser) Strahl per Zufall exakt einen Empfangspunkt trifft. **Exaktes Ray-Tracing gibt es also nicht.** Entweder müssen die Empfänger oder die Strahlen räumlich ausgedehnt sein. An dieser Frage unterscheidet sich auch, wie die Strahlen oder Teilchen im Raum registriert werden.

⁹ s. z.B. Taschenbuch Akustik, Hrsg. Fasold et.al., VEB Verlag Technik Berlin, 1984; dort Verweis auf: Meyer, J.; Akustik und musikalische Aufführungspraxis, Frankfurt/Main; Verlag das Musikinstrument, 1972; dort Verweis auf: Cremer, L.: Die Plexiglasreflektoren im neuen Herkulesaal der Münchener Residenz, in: Die Schalltechnik 13 (1953) Nr. 5

Beim hier zunächst vorgestellten Modell punktförmiger Schallteilchen müssen die **Empfänger räumlich ausgedehnt sein** - kleine Volumenelemente, „**Detektoren**“.

Die einfachste mögliche (und wohl deshalb am häufigsten verwendete) Detektorform ist eine Kugel, denn der Rechenaufwand zur Klärung, ob eine Kugel von einem Schallstrahl durchquert wird, ist am geringsten /S4/D3/D5/. Dazu muss nur geprüft werden, ob der Vorbeiflugabstand eines Schallteilchens am Kugelmittelpunkt größer als der Kugelradius ist. Eine Energiedichte könnte wie unten beschrieben berechnet werden. Meist werden Kugeln aber nur zur Abfrage verwendet, ob durchquert oder nicht, wenn ja, wird das r^{-2} -Gesetz einer so „entdecken“ Spiegelquelle angewandt, d.h. Strahlverfolgung wird „nur“ zur effizienteren Findung von Spiegelquellen genutzt.

Nachteile: Wird ein ganzes Feld von Immissionspunkten, meist ein Immissionspunktraster („Publikum“) als periodisches Punktegitter verlangt, erweist sich ein Kugeldetektor-Algorithmus von der Rechenzeit her als ungünstig, denn diese ist bei jeder Detektorraumdurchquerung proportional der Anzahl aller vorhandener (nicht nur durchquerter) Kugeln. Außerdem sind, besonders bei niederen Reflexionsordnungen, Mehrfach-Detektionen zu eliminieren; andererseits, besonders bei hohen Entfernungen bzw. Reflexionsordnungen oder bei zu kleinen Detektoren, werden viele Spiegelquellen gar nicht gefunden. Eine solche Strahlverfolgung mit idealisierten Strahlen ist von daher eigentlich schon ein kombiniertes Verfahren. Das physikalische Modell bleibt das der Spiegelquellenmethode. Damit die Detektionswahrscheinlichkeit richtungsunabhängig ist, müssen die Detektoren Kugeln sein.

Dies ist im Teilchenmodell nicht so, dann nämlich, wenn auch die Durchquerstrecke durch die Detektoren gewertet wird. Physikalisch wird dann statt der Intensität eine (mindestens kurzzeitig stationäre) Energiedichte berechnet. Diese ist nach der Systemtheorie proportional dem Zeitintegral über die nach Impulsanregung zustandekommende Energiedichte. Der Beitrag eines einzelnen Schallteilchens dazu ist nicht nur proportional zu seiner Energie, sondern auch zu seiner Aufenthaltsdauer im Detektor (Austritts- minus Eintrittszeit), denn von der Aufenthaltsdauer hängt die mittlere Anzahl der sich gleichzeitig im Detektor befindlichen Teilchen ab und somit bei Bezug auf das Detektorvolumen die Energiedichte $/H0/H1/$. Gewertet wird also das Produkt aus Teilchenenergie mal Detektordurchquerstrecke. Die "Empfindlichkeit" des Detektors hängt so ausschließlich vom Detektorvolumen ab. Das $1/r^2$ - Entfernungsgesetz ergibt sich dabei auf statistische Weise von selbst: durch Teilchenzählung. Deshalb können auch quaderförmige Detektoren verwendet werden, die einen großen Vorteil bieten: Diese können dicht gepackt werden, so dass der Austrittspunkt aus einem Detektor gleich dem Eintrittspunkt in den nächsten ist; eine Suche über alle Detektoren erübrigt sich. Nutzt man diesen Vorteil, hat die STSM, bei vielen Immissionspunkten, insbesondere dicht gepackten Publikumssebenen, einen wichtigen Rechenzeitvorteil gegenüber allen anderen Arten des Ray Tracing. Ein solcher Quaderdetektoralgorithmus ist daher wesentlich schneller, wenn auch etwas komplizierter $/H0/H1/$.

Die **Gesamtstruktur des Algorithmus' der STSM** ist im wesentlichen durch die Schachtelung von Schleifen charakterisiert (über alle Teilchen, darunter jeweils alle Reflexionen, alle Wände und eventuell noch über alle von deren Kanten). Daneben sind vor jeder Reflexion alle Detektoren auf Durchquerung zu überprüfen.

Die Rechenzeit der STSM setzt sich deshalb zusammen aus dem Anteil zur Teilchenverfolgung, der proportional dem Produkt über die Anzahlen von Teilchen, Reflexionen und Wänden ist, und aus einem zweiten Anteil zur Teilchendetektierung, proportional der Anzahl Empfänger (anders als bei der SSQM nur dieser zweite Summand !). Die Rechenzeit

- steigt demnach nur proportional (und nicht exponentiell wie bei der SSQM) mit der Anzahl der Wände bzw. der Komplexität des Raumes an;
- ist von der Anzahl der Immissionspunkte nur schwach abhängig und
- von der Anzahl der Quellpunkte unabhängig.

Nützlich ist auch: Der Kompromiss aus Rechenzeit und Genauigkeit ist frei wählbar. Die nötige Anzahl Teilchen und Reflexionen wird automatisch festgelegt /H0/. Ist es dagegen, wie in der Raumakustik oder zur Auralisation, wichtig, ein vollständiges Echogramm zu berechnen, wird eine maximale Verfolgungstrecke vorgegeben. Der „Raumauflösegrad“ (Raumwinkel pro Wand / Raumwinkel pro Teilchen) zum Finden im statistischen Mittel aller Spiegelquellen muss dann auch noch für die höchste Reflexionsordnung 1 betragen. Damit steigt die Rechenzeit der STSM – im Gegensatz zu der der SSQM – statt exponentiell nur mit der 3. Potenz der Reflexionsanzahl sowie (bei vernachlässigbaren Detektionszeiten) mit der Anzahl Wände zum Quadrat. Diese und ähnliche Zusammenhänge wurden von mehreren Autoren, u.a. /D3,5,7/, vielfach untersucht und empirisch bzw. numerisch bestätigt, besonders gründlich von Vorländer /D7,V4/ und vom Autor /H3/. Hier setzen diverse Algorithmen zur Rechenzeitverkürzung bei der Wandtreffersuche an, bei denen die Rechenzeit schwächer als proportional mit der Wandanzahl K_0 ansteigt; bei hierarchischer Raumunterteilung z.B. steigen die Rechenzeiten nur noch mit dem Logarithmus von K_0 .

2.2.2. Vergleich der Rechenzeiten der Strahlverfolgungsmethode (STSM) mit der klassischen Spiegelquellenmethode (SSQM)

Der entscheidende Vorteil der STSM liegt in der Vermeidung der zahlreichen Sichtbarkeitsprüfungen der SSQM durch ihre „Straight-forward“-Methode: jeder Strahl findet (nachdem ein jeweils nächster Reflexionspunkt gefunden wurde) „von selbst“ nur „gültige“ Wege. Freilich handelt man sich, zusätzlich zum Restnachhallfehler, wie bei allen numerischen Methoden, noch einen statistischen Fehler durch die nur endliche Strahlenanzahl ein, die den Raum nur mit entsprechender Genauigkeit „abtastet“ /V2/. Es erweist sich aber, dass dieser verhältnismäßig klein ist, ja dass bei gleicher Zielgenauigkeit in den meisten typisch raumakustischen Fällen die Rechenzeit erheblich kleiner als bei der klassischen SSQM ist, welche bei hoher Raumkomplexität bis in absurde Höhen steigen würde. Die folgenden beiden Bilder zeigen ausschnittsweise das Ergebnis neuerer statistischer Abschätzungen des Autors¹⁰.

Danach ist bei vielen (mehreren hundert) Wänden - wie in vielen raumakustisch realistischen Fällen - die Anwendung der klassischen Spiegelschallquellenmethode (rekursive Konstruktion von SSQ ohne Vorausscheidung) für mehr als 2 Reflexionen praktisch indiskutabel. Strahlverfolgungsmethoden eignen sich dagegen grundsätzlich auch zur Verfolgung höherer Reflexionsordnungen.

¹⁰ - ähnlich denen in der früheren Veröffentlichung /H3/, aber darüber hinaus gehend, hier der Kürze halber nicht dargestellt

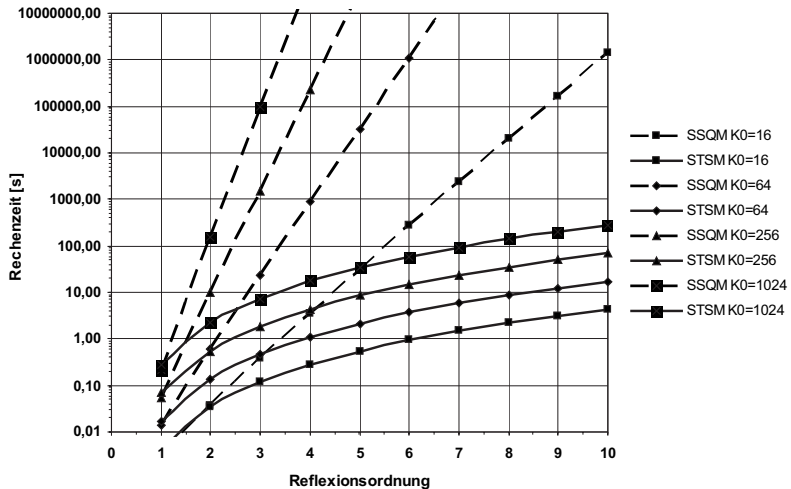
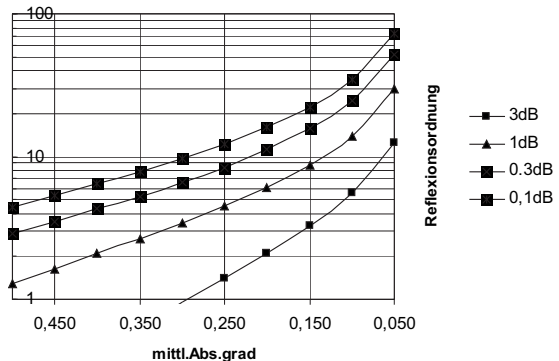


Bild 2.3a) Rechenzeiten der SSQM für eine Quelle und viele, im Verhältnis zu den Wänden „kleine“, also automatisch immer genügend häufig durchquerte Detektoren; bei „vollflächiger Berechnung“, d.h. der ganze Boden des Raumes mit Detektoren etwa gleichen Seitenverhältnisses wie der Raum selbst ausgelegt, bei Vernachlässigbarkeit der Rechenzeit für die Detektierung, als Funktion der Reflexionsordnung L_0 , mit der Wandanzahl K_0 als Parameter. Die Kurven zu gleicher Wandanzahl K_0 kreuzen sich stets schon bei Reflexionsordnungen unter 2, d.h. für höhere Reflexionsordnungen ist die klassische SSQM fast immer langsamer. Welche Reflexionsordnung zur Erreichung einer bestimmten Zielgenauigkeit notwendig ist, zeigt Bild b. Die Rechenzeiteinheit wurde mit $RZE = 0.1\text{ms}$ angesetzt (für PC des Jahres 1998 mit 200MHz Taktfrequenz). Die Rechenzeiteinheit RZE fasst die diversen vektoriellen Berechnungen zusammen, die nötig sind zur Berechnung und Verifizierung eines Reflexionspunktes auf einer bestimmten Wand. Sie ist definiert durch: $K_0 \cdot RZE = \text{Rechenzeit}$ bei der Strahlverfolgung zur Bestimmung des nächsten Reflexionspunktes bei K_0 Wänden.

Bild 2.3b) Anzahl nötiger Reflexionen $L_0 = \ln(D)/\ln(1-\alpha)$

als Funktion der relativen Energiedichtegenauigkeit D und des mittleren Absorptionsgrades α mit der gewünschten Immissionspegelgenauigkeit $H = -10\lg(1-D)$

als Parameter



Absolute Rechenzeiten von Schallteilchensimulationsprogrammen

(auch von Kombinationen mit der Spiegelungsmethode) sind in den letzten 20 Jahren /H0/X3/, bedingt vor allem durch die rasante Entwicklung der Prozessor-Hardware, aber auch der Algorithmen (s. nächster Abschnitt) zwar um mehr als den Faktor 1000 gesunken: während im Jahre 1982 o.g. Rechenzeiteinheit zum Finden nächster Reflexionspunkte auf dem Laborrechner des Instituts für Technische Akustik der RWTH Aachen noch 0.1s, und die absoluten Rechenzeiten für komplizierte Räume wie den Eurogress Aachen mit einigen hundert „Wänden“ bis zu einer Woche betrugen /H1/, waren es 1998 nur noch 0.1ms, und zur Berechnung nur der raumakustischen Parameter genügen heute meist schon wenige Minuten; für Auralisierungen können sie jedoch - je nach Reflexionsordnung bzw. Echogrammlänge und Genauigkeitsanforderung bzw. Raumauflösung – auch noch bis zu Stunden betragen.

2.2.3. Methoden zur Rechenzeitverkürzung beim Ray-Tracing – ein Überblick

Um den Aufwand zur Treffpunktfindung und –Verifizierung zu minimieren, wurden zahlreiche Techniken zur Raumunterteilung und zur Rechenzeitreduktion erdacht.

Im Bereich der Computergrafik bzw. zum Zwecke der Visualisierung sind Ray-Tracing-Techniken wesentlich weiter entwickelt. Fortgeschrittene Algorithmen werden dort - anders als im Bereich der raumakustischen Literatur - bis ins Detail diskutiert. Eine auch nur halbwegs vollständige Behandlung ist hier unmöglich und auch nicht angebracht. Im Folgenden sollen aber wenigstens die Ideen zu erfolgreichen Algorithmen skizziert werden.

Die schon erwähnte Wandtreffer-Verifizierung, der **"Punkt-in-Polygon-Test" (PIP)**, ist am rechenaufwändigsten. Wegen des erheblichen Einflusses auf die Gesamt-Rechenzeit haben sich viele Autoren, auch der Verfasser, ausgiebig mit der Optimierung dieses Verfahrens beschäftigt z.B. /H1/D3/D5/O2/O3/O4 und, genauer, Kulowski /P3/. Die einfachste Methode ist hierbei die Winkelsummen-Methode; sicherer und schneller ist die Dreiecks-Methode /H1/. Die Methode der Testgeraden ist wahrscheinlich die effektivste, d.h. kommt mit den wenigsten Rechenoperationen pro Kante, ja sogar ohne volle Vektorprodukte aus. Idee dabei ist, vom zu prüfenden Schnittpunkt Schallstrahl/Wand aus in eine beliebige Richtung innerhalb der Wandebene einen Strahl zu ziehen und die Anzahl der Schnittpunkte mit den Polygonkanten zu zählen: Ist die Anzahl ungerade, ist der Schnittpunkt im Polygon, sonst nicht /D3/D5/.

Die weiteren in der folgenden Tabelle genannten „einfachen“ Verfahren wurden vom Autor zwar ausführlich getestet, sind aber hinsichtlich einer Rechenzeitminimierung hier von keiner qualitativen Bedeutung mehr; sie lieferten (je nach Raumstruktur) jeweils Rechenzeitminderungen in der Größenordnung von nur 10-50% /H0/, zusammen mit der u.g. Hüllquadermethode in den Jahren 1982-1989 Rechenzeitminderungen um den Faktor 6 /O3/O4/.

Tab 2.2.3.1 Klassifizierung verschiedener Methoden zur Rechenzeitverkürzung in der Reihenfolge zunehmend grundsätzlicheren Charakters:

Einfache Methoden (/H0/):

- **Schnellere Treffpunkt- Findung Strahl / "Wand";**
durch Ausnutzung konstanter geometrischer Eigenschaften, z.B. Sortierung nach Innen- und Außenwänden /S4/S5/, Ausnutzung von Wand-Wand-Sichtbarkeiten /Q2/ oder Konvex-Zerlegung, s.u.
- **Schnellere Treffpunkt- Verifizierung auf der „Wand“;** d.h. Verbesserung des „Punkt-in-Wand-Test“, z.B. durch Umkreis-Vorabfragen, auch /S5/P3/.
- **Verbesserungen im Detektierungsverfahren** (d.h. schnelleres Finden der „Detektorenwände“) durch Quader- statt Kugeldetektoren und evtl. zusätzliche Hüllstrukturen

Raumunterteilungsmethoden (zur Verminderung der mittleren Anzahl zu prüfender Objekte, s.u.)

- **Hüllquader- (allgemein Hüllvolumen-) Technik:**
Gruppierung von Wänden (Objekten) nach Benutzervorgabe /H0/
Unterteilungsstruktur dabei angepasst an die Raumstruktur;
Zuordnung von Objekten zu Hüllvolumina; dadurch Ermöglichung von Vorentscheidungen und Einschränkungen der Anzahl zu prüfender Objekte
- **benutzerdefinierte Bildung von Teilräumen¹¹**
- **automatische Raum- Unterteilung** in
 - gleichförmig-periodisch angeordnete, z.B. würfelförmige Raumelemente – „**Rasterverfahren**“ /H7/
 - ungleichförmige, rekursiv geteilte, BSP(*binary space partition*)-tree oder octree /C3/D9/.

nahezu zwingend voraussetzen bei Verfolgung und Clipping von Pyramidenstrahlen:

- **Konvexzerlegung** (polygonaler) Oberflächen und Räume, s. Abschnitt 4.2.3.
- **Verminderung der Strahlen- oder Teilchenanzahl**
 - pauschal, um den Preis größerer statistischer Fehler, d.h. geringerer Genauigkeit;
 - durch Abschluß der Strahlen nur in "lohnende" Richtungen und Verfeinerung der Raumstruktureauflösung nur "bei Bedarf"; z.B. ermittelt durch Pre-Scanning; lohnend vor allem im „Freifeld“; Ansätze dazu bei der Frage der Quantisierung der Pyramidenstrahlen diskutiert, s. 4.3
- **grundsätzlich andere Strahlverfolgungstechniken**, Kegel oder Pyramiden s.u.
mit anderen Algorithmen für Splitting und Detektierung, damit auch anderes Rechenzeitverhalten
- **inverse Strahlverfolgung** (von Empfangspunkten zu Schallquellen, s. u.)

Das Rasterverfahren ist eine effektive und dennoch relativ einfache Methode der Rechenzeitminimierung /O1,O2,O3,D5/. Sie wurde vom Autor näher untersucht und auch implementiert. Sie ist näher beschrieben in /H7/. Die Idee dazu ist folgende (s. Bild 2.4.): Der Raum wird vollständig aufgerastert in ein Gitter von würfelförmigen Rasterelementen. In einem (einmalig durchlaufenen) Oberflächen-Scanning wird zunächst geprüft, welche Wände welche Rasterelemente schneiden (oder ganz in ihnen enthalten sind). Die allermeisten Rasterelemente (RE) liegen in der Mitte des Raumes und sind leer, von den restlichen werden die meisten von nur einer Wand geschnitten, noch weniger (die, die an den Kanten liegen) werden von zwei, noch weniger (die, die eine Raumecke beinhalten) werden von drei Wänden geschnitten. Die RE werden so klein gewählt, dass möglichst keines von mehr als drei Wänden geschnitten wird. Während der Simulation fliegen nun die (Schall-)Teilchen meistens

¹¹ zu unterscheiden von Hüllraumbildung bzw. Wandgruppierung: Hüllräume können sich überlappen bzw. es gibt Schnittmengen von Wänden, Teilräume dürfen das nicht; sie sind zu trennen durch „transparente Zwischenwände“, z.B. zur Unterscheidung unterschiedlicher Ausbreitungsbedingungen.

durch leere Rasterelemente. Das schrittweise Durchqueren des leeren Raumes geht also sehr schnell.

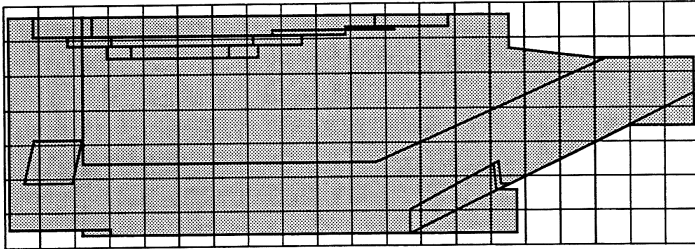


Bild 2.4. Testraum mit Hüllquader, aufgerastert durch ein Würfelgitter

Nach einer (erstmalig vom Autor durchgeführten) statistischen Rechenzeitabschätzung /H7/ ergibt sich: bei einem optimalen „Raumauflösegrad“ ist die Rechenzeit zur Findung des nächsten Wandtreffers nur noch proportional zur Wurzel aus der Anzahl Wände K_0 . Dabei ist die Wellenlänge übrigens kein Kriterium. Außerdem ist die zugehörige Proportionalitätskonstante theoretisch ca. 5 mal kleiner (praktisch, wie Tests zeigten, jedoch nur etwa 2 mal kleiner). Theoretisch ist damit die Rechenzeit bei Räumen mit z.B. 1000 Polygonen rund 100 mal kleiner als ohne Rasterung !

Dies bedeutet freilich nicht, dass etwa die Rastermethode ausreichend geeignet wäre, den Einbau von Beugung zu ermöglichen; denn die dadurch entstehende Baumstruktur der Strahlverfolgung mit ihrem exponentiellen Anwachsen der Rechenzeit verhindert sie nicht, sie ermäßigt es nur. Erst die neueren Abschätzungen zeigten, dass der Speicherplatzbedarf bei einem optimalen, meist wesentlich geringeren Aufrasterungsgrad (geringer als nach dem Wellenlängen-Argument bzw. Abtasttheorem bzw. geringer als bei der BEM) erträglich ist. Die Rasterungsmethode bleibt deshalb attraktiv.

Ungleichförmig-hierarchische Raumrasterung

Noch effektiver und weniger arbeitsspeicherbedürftig, dafür aber wesentlich komplizierter, da hierarchisch aufgebaut, sind Methoden ungleichförmiger Raumuntergliederung, in Form einer hierarchischen („baumförmigen“) Unterteilung. Die naheliegendste Methode besteht darin, den Gesamtraum rekursiv zu teilen, jeweils so lange, bis in einem Untervolumen so wenige Wände enthalten sind, dass keine weitere Unterteilung mehr lohnt, in der amerikanischen Literatur der Computergrafik BSP Methode genannt (*binary space partition*) /C3/.¹² Führt man dies, ausgehend von einem einzigen, kleinstmöglich um die gesamte Raumstruktur gelegten Würfel, aufeinanderfolgend stets in Form einer Teilung des x-,y- und z-Bereichs aus, ergibt sich zusammengefasst eine rekursive Achtelung des Raums (grafisch „Achter-Baum“); dies ist die „octree“-Methode. Die Teilungen müssen übrigens keine Achsen-Halbierungen sein, wenn eine andere, z.B. an Kanten orientierte Teilung passender ist.

¹² Diese Methode wird auch als Algorithmus für die Simulation der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Gebäuden (Funknetzen) bevorzugt, s. z.B. Dissertation von Frach /D9/

Vorteile der Octree-Methode gegenüber der starren Rasterung sind die Anpassung an die Raumstruktur und ein wesentlich kleinerer Speicherplatzbedarf, der Nachteil ist, dass die Rechenzeit pro Durchquerung eines Raumelements durch die ungleiche Teilung wesentlich höher ist. Damit lohnt sich diese Methode erst bei der Schallfeldberechnung in sehr komplizierten und sehr großen Strukturen mit Strukturelementen sehr unterschiedlicher Größe¹³.

Zerlegung in konvexe Teilräume

Einfach wären auch rekursive Unterteilungen mit Ebenen entlang den Hauptachsen, ohne Rücksicht auf gegebene Kanten, wie etwa nach der BSP-Methode, solange, bis die Teilräume konvex sind. Eine hier sinnvollere automatische Raumunterteilung ließe sich aber durch Einziehen transparenter Zwischenwände erreichen, die ihre Kanten mit den Kanten der gegebenen Wandstruktur gemeinsam haben. Denn teilt man den Gesamtraum so auf, dass nur noch konvexe Teilräume entstehen, so läßt sich bei der Strahlverfolgung erheblich Rechenzeit sparen, wenn die Schleife zur Bestimmung des nächsten Wandtreffers nur über die Wände desjenigen Teilraums ausgeführt wird, in dem das Teilchen sich gerade befindet. Außerdem entfallen die rechenaufwändigen Punkt-in-Polygon-Enthaltungsprüfungen. Zwar könnte ein Raum stets vollständig in viele kleine (unregelmäßige) Tetraeder zerlegt werden. Solche räumliche Konvexzerlegungsalgorithmen sind z.B. die Netzgenerierungsalgorithmen zur Anwendung der Finiten-Elemente-Methode. Die maximale Rechenzeiterparnis wird sich jedoch dann einstellen, wenn der gesamte Raum in möglichst wenige, große konvexe Teilräume zerlegt wird, wobei die künstlich eingezogenen „Trennwände“ zwischen ihnen an schon existierende, „hineinragende“ (also die Konvexität störende) Kanten anknüpfen sollten. Solche konvexen Teilräume werden selten mehr als 10 Wände haben, meist – wegen der meistens rechtwinkligen Gebäudestrukturen – nur sechs. Ein solches vom Verfasser selbst entwickeltes Verfahren zur Zerlegung eines polygonalen Raums in konvexe Teilräume wird in Abschnitt 4.2.3 beschrieben. Es ist eine praktisch notwendige Voraussetzung zur Umsetzung des in dieser Dissertation propagierten Pyramidenstrahlverfahrens, insbesondere da zu erweitern um Beugung.

Inverses Ray-Tracing

Bei der Auralisierung von Räumen gibt es nur einen Empfänger, bei Real-Time-Anwendungen sogar einen sich bewegenden. Auch im Freien sind meist viele Quellen, meist Linienquellen wie Straßen oder flächige Schallquellen, dagegen nur wenige Immissionspunkte gegeben. Das ist gerade die umgekehrte Situation wie bisher betrachtet. "Gießkannenmethoden" wie Ray Tracing (bei denen von allen Quellen erstmal in alle Richtungen Strahlen ausgesandt werden) werden dann ineffizient.

Dann liegt es nahe, das Reziprozitätsprinzip auszunutzen, hier die Umkehrbarkeit des Schallwegs. Es werden also Strahlen rückwärts vom Empfangspunkt zu den Schallquellen ausgesandt. Dadurch ergibt sich eine erhebliche Strahlen- und damit Rechenzeitreduzierung. Dazu taugt jedoch aufgrund der meist linienförmigen oder

¹³ Dies ist vor allem bei der Visualisierung von Räumen bzw. bei Lichtsimulationen der Fall; bei Räumen, die mit CAD-Programmen erstellt wurden, entstehen leicht 10000-100000 Polygone – weit mehr als für eine Schallsimulation aufgrund der dort viel höheren Wellenlängen bzw. größeren Raumauflösung nötig ist..

flächigen Quellen nicht die Schallteilchen-Methode, sondern nur eine Verfolgung räumlich ausgedehnter Strahlen, Kegel oder Pyramiden, s.u. (Anwendungsbeispiele mit Beugung: /A3/A8/ , mit zweidimensionalen Fächern: /A4/A2/). Diese Strahlen "überstreichen" dann die schallabstrahlenden Oberflächen – einschließlich etwaiger beugender Kanten - und "sammeln" die von dort in die Richtung der Immissionspunkte (oder deren Spiegelpunkte) abgegebene Schalleistung ein.

Zusammenfassung

Tab 2.2.3.2 Vor- und Nachteile der verschiedenen Raumunterteilungstechniken:

Methode	Vorteile	Nachteile
Benutzerdefinierte Gruppierung v. Objekten, z.B. „Wänden“	Die Substruktur des Raumes (z. B. von Nebengebäuden) wird ausgenutzt; sehr einfach zu programmieren	Rechenzeitgewinn gering, Reduzierung abhängig davon, um wieviel schneller die Hüllraumtrefferabfrage als die Wandtrefferabfrage ist, und vom Geschick des Benutzers bei Gruppierung
Hüllräume (Quader) „mit Zwischenstopp“ (nach benutzerdef. Gruppierung)	Wie oben, meist weniger Wände zu prüfen	Komplikationen bei der Programmierung (z. B. durch sich überschneidende Hüllräume);
Hüllräume, nach hierarchischer Gruppierung	Substrukturen des Raumes werden noch besser ausgenutzt	Komplizierte, da rekursive Eingabe- und Durchqueralgorithmen; weiter Überschneidungen möglich
Gleichförmige Rasterung (In z.B. würfelförmige Raster-elemente Raster-elemente RE)	Relativ einfacher Durchqueralgorithmus; drastische Verringerung der zu prüfenden Wandanzahl und damit der Rechenzeit	erheblicher Speicherplatzbedarf (da sehr viel RE nötig), keine Ausnutzung bzw. Anpassung an die gegebene Raumstruktur, relativ aufwendige Vorberechnung (Zuordnung der Wände zu RE).
automatische hierarchisch – ungleichförmige Raumunterteilung z.B. BSP oder Octree	Substrukturen des Raumes werden flexibel erfasst; viel geringerer Arbeitsspeicherbedarf	Durchquer-Algorithmus kompliziert
Konvexzerlegung, vorhandene Kanten ausnutzend (nicht hierarchisch)	Für die Pyramidenstrahlverfolgung praktisch unvermeidlich; beugende Kanten werden bereits vorher erfasst	Rechenzeitgewinn etwas geringer als bei hierarchischer Unterteilung, aber wohl nicht viel; Komplizierter Teilungsalgorithmus, jedoch nur einmal vorweg

2.2.4. Vergleich verschiedener Varianten von Strahlverfolgungsmethoden

Wie schon bemerkt, müssen bei der Strahlverfolgung entweder die Empfänger oder die Strahlen selbst räumlich ausgedehnt sein. Der erste Fall korrespondiert zu einem Teilchen- (statt Strahlen-) modell und wurde schon in Abschnitt 2.2.1. behandelt. Beim „**Beam Tracing**“ sind nun die Strahlen räumlich ausgedehnt, ihre Querschnittsfläche dehnt sich dabei proportional zur Laufstrecke aus. Liegt ein Empfangspunkt im Strahlquerschnitt, erhält er eine Immission, d.h. "sieht" eine Spiegelquelle. Vom physikalischen Modell her läuft *beam tracing* auf die Spiegelquellenmethode hinaus, kann also auch als „kombiniertes Verfahren“ gelten. *Beam tracing* ist aber viel effizienter als die klassische SSQM, weil bei jeder *Straight-Forward-Methode* (wie *beam* oder *ray tracing*) die "Sichtbarkeit" der der SSQ nahezu "von selbst" gegeben ist, demnach in weit weniger Fällen aufwändig geprüft zu werden braucht (s. Bilder in Kap. 4.2.).

Hält man an der Grundforderung fest, Strahlen nicht aufzuspalten, entsteht das Problem, welche neue neue Laufrichtung ein solch ausgedehnter *beam* denn nach einer Reflexion erhält. Naheliegend ist es dann, dies allein anhand der Richtung des Mittelstrahls innerhalb des *beams* festzulegen; damit macht man natürlich einen systematischen Fehler, da ja ein Teil der Strahlenergie, je nach Nähe zu Raumkanten, eigentlich an Nachbarwänden reflektiert wird – bzw. reflektiert worden wäre, bevor er einen Empfangspunkt erreicht. Entweder vertraut man darauf, dass sich dieser „**Abtastfehler**“ im Mittel wieder ausgleicht. Ohnehin gibt es ja aufgrund der Wellennatur des Schalls eine natürliche „Unschärfe“; man könnte also geneigt sein, solche Fehler als rein „geometrisch konstruiert“ und physikalisch nicht relevant anzusehen /K11/. Dass dadurch aber zusätzlich Ungenauigkeiten entstehen, kann man freilich nicht wegdiskutieren. Oder man muss (genauso wie bei der Strahlendetektierung durch Kugeln) die Gültigkeit der an den Empfangspunkten detektierten Immissionen – die ja auch durch nicht mittige und damit eigentlich woanders reflektierte Strahlverbindungen zustande gekommen sein können – d.h. die „Sichtbarkeit“ der zur genauen Strahlverbindung gehörenden Spiegelquelle durch eine Strahlrückverfolgung vom Empfangspunkt bis zu jener hin prüfen /K3/K6/K10/. Dieses *back tracing* ist sehr aufwändig. Der Aufwand kann aber durch eine geschickte Zwischenspeicherung von Spiegelquellen bzw. ihrer Indizes, d.h. der Wandnummernfolgen der an der Spiegelung beteiligten Wände, vermindert werden /K6/.

Im einfachsten Fall kreisförmigen Querschnitts sind die Strahlen **Kegel** (*cones*) (/S3/K11/K3/.) Auch *Cone tracing* ist also eine *Scannen* des Raumes nach Spiegelquellen, freilich ebenso wie bei kugelförmigen Detektoren mit einem „Raumauflösefehler“: es werden nicht alle SSQ gefunden, sondern pro Reflexionsordnung nur maximal so viele wie Strahlen ausgeschildet wurden; allerdings ist dieser *under-sampling*-Effekt weniger gravierend als bei der Kugel-Detektierung, da ja die Kegelquerschnitte mit der Laufstrecke wachsen¹⁴ (von gleich klein bleibenden Kugeldetektoren werden dagegen viele Strahlen, die kleine Raumbereiche erfasst haben, später nicht mehr erfasst, wenn die Kugeldurchmesser kleiner als der Strahlenabstand geworden sind). Kegelstrahlen (**cones**) sollten jedoch nicht „dicht gepackt“ emittiert, sondern es sollten Überlappungen eingeführt werden. Denn ohne Überlappung gibt es ja zwischen Kreisen Lücken, sodass weitere Raumbereiche und damit Spiegelquellen nicht erfasst würden. Dann aber gibt es Mehrfach-Detektionen derselben Spiegelquelle, systematische Fehler, die ebenfalls durch *back tracing* eliminiert werden *müssen*¹⁵. Kegelstrahlen haben den Vorteil einfacher Handhabung, denn der Test, ob ein Immissionspunkt im Kegel liegt, ist eine einfache Abstandsabfrage. Das Lücken- oder Überlappungsproblem beim *cone tracing* kann vermieden werden durch dicht gepackte Strahlen.

Dazu bieten sich **Pyramidenstrahlen** an, d.h. Strahlen, anfänglich gebildet aus einem Quellpunkt als Pyramiden spitze und den Raumbereichen polygonen, also mit polygonalem Querschnitt und proportional mit der Laufstrecke wachsenden Abmessungen /K4/K8/. Damit werden – gesehen von demselben Empfangspunkt – automatisch alle Spiegelquellen höchstens einmal gefunden, ein *back tracing* zu diesem

¹⁴ – ein Fehler, der von Naylor /K10/, der Kugeldetektoren verwendet, einfach durch Multiplikation der Energien der zu wenig gefundenen Spiegelschallquellen mit einem entsprechenden Korrekturfaktor aus dem Vergleich mit der zu erwartenden Anzahl Spiegelquellen pauschal ausgeglichen wurde.

¹⁵ Vian und v.Maercke /S3/ entschieden sich für eine pauschale Abschwächung durch eine Wichtungsfunktion gefundener SSQ über den Kegelquerschnitt.

Zweck ist nicht nötig; allerdings ist die Abfrage, ob ein Empfangspunkt in der Pyramide liegt, schwieriger. Solange aber diese Pyramidenstrahlen bei Reflexionen nicht aufgespalten werden, also ihre Anzahl konstant bleibt, werden nicht alle Spiegelquellen gefunden. Und solange maßgeblich für die Reflexionsrichtung ihr Mittelstrahl ist, bleiben (ohne *back tracing*) auch, wie bei den Kegelstrahlen, die Abtastfehler bestehen.

Man kann deshalb noch einen Schritt weiter gehen und ein **Aufspalten der Pyramidenstrahlen** bei jeder Reflexion zulassen, entsprechend der Überlappung des bisherigen Pyramidenstrahls mit den Oberflächenpolygonen (s. Bilder 4.2.11-14 in 4.2.4.). Dann wird natürlich der Abtastfehler vermieden, denn es wird die Schallausbreitung entsprechend der Oberflächenverteilung geometrisch exakt nachvollzogen, d.h. es werden alle Spiegelquellen gefunden – freilich um den Preis, dass sich die Pyramidenstrahlen immer weiter aufspalten und ihre Anzahl sich vermehrt. Das aber geschieht dann nur entsprechend der zu erwartenden Anzahl sichtbarer Spiegelquellen mit L^3 (L = Reflexionsordnung); ein exponentielles Anwachsen tritt nicht ein, da automatisch nur sichtbare Spiegelquellen gefunden werden, d.h. der Aufspaltungsgrad nimmt ab (s. Bilder 4.1.4 und 4.2.13). Das Pyramidenstrahlverfahren mit Aufspaltung kommt also einem sehr effizienten Spiegelquellenverfahren gleich und nähert sich mit steigender Reflexionsordnung automatisch einem *ray tracing* an. Gerade das macht das Verfahren so interessant. (s. Kap. 4.1). Was die meisten Autoren bisher von der Umsetzung dieses Verfahrens abgeschreckt hat, ist wohl der Aufwand des „Polygon-Clippings“, d.h. des teilweise Abschneidens von Teilpolygonen bzw. – Pyramiden aus dem Ursprungsstrahl bei teilweisem Auftreffen auf Wandpolygone. Das entstehende Polygon-Polygon-Schnitt-Problem (s. Bild 4.2.18 in 4.2.8.) ist noch aufwändiger als der Punkt-in-Polygon-Test – irgendwo ist eben immer der Preis zur Lösung des Sichtbarkeitsproblems zu zahlen. Eine entscheidende Vereinfachung bietet auch hier die Zerlegung des Raumes in konvexe Teilräume; diese ist zwar schwierig (s. Kap. 4.2.3.), aber nur einmal durchzuführen und dann sehr effizient. Für das Pyramidenstrahlverfahren ist sie praktisch zwingend.

Pyramidenstrahlverfahren mit Aufspaltung wurden bislang nur selten angewendet, bezeichnenderweise meist dort, wo die Reflexionsordnungen eher niedrig sind und spiegelnde Mehrfachreflexionen eher die Ausnahme sind, nämlich im Bereich der Computergrafik bzw. Lichtsimulation oder im Bereich der Schallausbreitung im Freien (/A2/, /A3/, /A8/); eine Ausnahme hinsichtlich Anwendung auf Raumakustik und Auralisierung machen die (von der Computergrafik beeinflussten) Autoren Walsh /K12/ und, am weitesten fortgeschritten hinsichtlich Rechenzeitminimierung, Funkhouser et al. /K5/ (s. Kap.6.).

2.2.5. Kombinierte Verfahren

In jüngerer Zeit wurde versucht, die Vorteile beider Methoden, Vollständigkeit der SSQM (wichtig zur Auralisation) und Effizienz der STSM, in Hybridverfahren zu vereinen (s. Literaturverzeichnis, Gruppe /K/): *ray tracing*, meist *cone tracing*, zum Zwecke des Findens von Spiegelquellen. Allerdings liefert die SSQM keine diffusen Reflexionen, die bei höheren Reflexionsordnungen überwiegen; das geht nur mit *ray tracing*. Für höhere Reflexionsordnungen wird deshalb ganz zur STSM übergegangen, die allerdings prinzipiell unvollständig ist, deshalb sollte sie „hochauflösend“ sein. Der exponentielle Restnachhallverlauf, bestehend aus Reflexionen noch höherer Ordnung, wird oft aus der SSQM /Q4/ oder der STSM extrapoliert /D3/K10/.

Zu jener Klasse hybrider Modelle gehört, als vielleicht noch innovativstes Modell, da (im Gegensatz zu anderen) geometrische und diffuse Reflexionen **in beliebiger Reihenfolge** erlaubend, das von Heinz /D3/K6/. Heinz verwendet für die geometrischen Reflexionen niederer Ordnung physikalisch ein Spiegelquellenmodell, effizient umgesetzt durch ein Scannen des Raumes durch *ray-tracing* und *back tracing* zum Ausschluss von Mehrfachdetektionen, ergänzt durch direkte Immissionen von diffus reflektierenden Oberflächen zu Empfangspunkten („diffuser Regen“). Dies sind bereits Ansätze zu einem Radiosity-Verfahren (s. Abschnitt 2.3). In einem mittleren Bereich der Impulsantwort (auch für erst diffuse, dann wieder geometrisch Reflexionen) wird ein Schallteilchenverfahren verwendet, für den „Nachhallschwanz“ eine exponentielle Extrapolation, gewonnen aus den Echogrammen der vorigen Methode. Der Nachteil solcher Kombinationen liegt in der Willkür, mit der bei bestimmten Übergangszeiten von einem Verfahren für die „frühen“, meist spiegelnden Reflexionen zu einem für die „späten“, eher diffusen übergegangen wird.

Sehr interessant, weil sie in die Richtung der Ideen dieser Dissertation gehen, sind die Verfahren von Lewers /K8/ und /Dalenbäck/D1/. Beide erlauben einen fließenden Übergang von geometrischen zu diffusen Reflexionen, rechenzeitlich freilich nacheinander bearbeitet. Lewers verwendet zur Behandlung der geometrisch reflektierten Energieanteile Pyramidenstrahlen mit dreieckigem Querschnitt, um alle Spiegelquellen zu finden. Die „unterwegs“ festgestellten diffusen Energieanteile werden zunächst nur vorgemerkt und von den geometrischen, wie als ob zusätzlicher absorbiert, abgezogen. Im Nachgang wird dann von allen Oberflächenelementen ein zeit-iteratives Radiosity-Verfahren gestartet (s. Abschn. 2.3.), wobei geschickterweise für den Strahlungsaustausch, d.h. zum Finden von Partner-Flächenelementen wieder das Pyramidenstrahlverfahren angewendet wird. Dalenbäck geht ähnlich vor, wenn auch mit Kegelstrahlen, d.h. speichert diffuse Energieanteile zwischen und arbeitet diese dann durch rekursiven Aufruf desselben *ray tracing* Verfahrens auf effiziente Weise ab; dabei können auch wieder geometrische Reflexionen auftreten. Diese beiden Verfahren werden noch in Kap. 6. näher diskutiert.

2.3. Radiosity - (Strahlungsaustausch-) Modelle

Zuletzt sollen Methoden betrachtet werden, die, eventuell ergänzend, geeignet sind zur Behandlung des Nachhalls als Ganzes oder des „Restnachhalls“ (d.h. von Reflexionen nach der höchsten durch o.g. Methoden verfolgten Reflexionsordnung). Alle diese Methoden bzw. die ihnen zugrundeliegenden Modelle setzen vereinfachend vollständig, d.h. „Lambert’sch“ diffuse Wandreflexionen voraus – was für späte Reflexionen ja auch plausibel ist. (Rechenmodelle zur vereinfachenden Behandlung eines Restnachhalls bei teilweise geometrischen Reflexionen gibt es nicht, nur statische, d.h. solche, die zufalls-verteilte Zeitintervalle und Richtungen annehmen.) Eine Unterklassifizierung könnte im Sinne zunehmender Genauigkeit erfolgen nach

- a) Berechnung nur eines Parameters, nämlich - exponentiellen Nachhall und damit diffuses Schallfeld vorausgesetzt - einer ortsunabhängigen Nachhallzeit; dazu müssen nicht nur alle Oberflächen diffus reflektieren, sondern es muss auch die Wandbestrahlungsdichte konstant sein (durch ersteres noch nicht zwingend be-

wirkt¹⁶); unter diesen restriktivsten Bedingungen - zusätzlich überall niedrigen Absorptionsgraden - gilt vor allem die berühmte **Sabine'sche Formel** (s. z.B. /R3/); solche Nachhallzeitformeln spielen jedoch nur eine Rolle zur Abschätzung bzw. Extrapolation des Restnachhallverlaufs, etwa zur Ergänzung der Auralisierung durch einen rekursiv arbeitenden Nachhallgenerator /K10/ oder zur Berechnung einiger raumakustischer Parameter (in deren Definition Zeitintegrale bis Unendlich auftreten /Z5-7/);

numerischen („Radiosity“-)-Methoden zur Berechnung der Schall-(oder Licht-)Verteilung (die also keine konstante Wandbestrahlungsichte voraussetzen); darunter:

- b) Beschränkung auf die Berechnung einer nur stationären Verteilung;
- c) die zeitabhängige Berechnung der (späten) Raumimpulsantworten.

2.3.1. Prinzip der Radiosity-Methode

Die **Radiosity- (deutsch etwa: Strahlungsaustausch-) Methode** betrachtet den Strahlungsaustausch zwischen Paaren von Oberflächenelementen. Die Idee eines Strahlungsaustausches in einem Hohlraum bei diffus reflektierenden Oberflächen wurde für Wärme- und Lichtstrahlung schon im 19. Jahrhundert von Clausius formuliert, im Bereich der Raumakustik wieder aufgegriffen von Kuttruff, theoretisch exakt formuliert durch eine Integralgleichung /R3/. Die im Bereich der Computergrafik so genannte „Radiosity-Methode“ ist nichts anderes als die numerische Ausführung dieser Integralgleichung bei diskretisierten Oberflächen. Die Idee dabei ist, dass zwischen Paaren von Oberflächenelementen (s. Bild 2.5.) eine Energieaustausch statt findet, bei dem sich, **stationär betrachtet** (bei Existenz einer stationär abstrahlenden Schallquelle), ein Gleichgewicht der Bestrahlungsichten¹⁷ der Wände ausbildet.

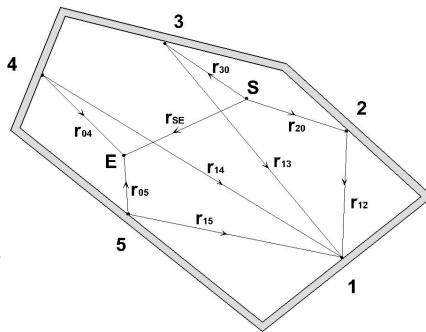


Bild 2.5 Zur Geometrie des Strahlungsaustausches zwischen einem Paar von Wandoberflächen S_i und S_j bzw. deren Flächenschwerpunkten, mit einem Sendepunkt S und einem Empfangspunkt E

Bei **zeitabhängiger Betrachtung** ergibt sich die Bestrahlungsichte an einem Ort r zu einem gefragten festen Zeitpunkt t als Wirkung der Ursache einer Bestrahlungsichte an einem Ort r' zu einer variablen früheren Zeit $t' = t - R/c$.

¹⁶ Ein diffuses Schallfeld ist ein Paradoxon bzw. nur ein Idealfall, da es strenggenommen nur bei Null-Absorption aller Wandoberflächen existieren könnte. Eine Systematik enthält /X15/.

¹⁷ Begriff „Bestrahlungsichte“ wie Intensität, aber, im Unterschied zu jener, deren senkrecht auf eine Fläche auftreffender Anteil.

2.3.2. numerische Formulierung, Energie-Umverteiler-Faktoren

Numerisch, nach Quantisierung der Raumboberfläche S in K_0 Teilflächen S_i , ergibt sich statt der Integralgleichung ein lineares Gleichungssystem mit konstanten Matrixelementen und, im stationären Fall, dem Bestrahlungs-dichte-Vektor $\mathbf{B}$ als Lösung. Kernfaktor dieser Matrixelemente sind die „Form-Faktoren“

$$\frac{\cos_0 \delta \cdot \cos_0 \delta'}{\pi \cdot R^2},$$

die die Geometrie der gegenseitigen Bestrahlung beschreiben. (δ, δ' = Einfallswinkel bzw. Ausfallswinkel zu den Flächennormalen, R = Abstand zwischen den Flächenschwerpunkten, s. Bild 2.5; bei nicht-konvexen Räumen können die Formfaktoren 0 sein, wenn die Flächen i und j sich nicht gegenseitig „sehen“ können; mit $\cos_0(\delta)$ wird hier deshalb eine auf den jeweils vorderen Halbraum beschränkte Cosinus-Funktion definiert durch $\cos_0(\delta) = 0$ für $|\delta| > \pi/2$). Statt solcher symmetrischer Formfaktoren (mit der Dimension 1/Fläche) sind hier dimensionslose, mit der Sendefläche S_j multiplizierte

$$g_{ij} = \frac{\cos_0 \delta_{ij}}{\pi} \cdot \left\{ \frac{\cos_0 \delta_{ji} \cdot S_j}{R_{ij}^2} \right\} \quad (2.4)$$

vorteilhafter; dann kann man sie nämlich als **Energie-Umverteiler-Faktoren** oder (wie bei Gerlach&Mellert /R1/) als Übergangswahrscheinlichkeiten deuten, oder als der Relativanteil der Intensität, der von S_j ausgesandt wird in Richtung S_i , bezogen auf die insgesamt von S_j reflektierte Intensität. Da darin alle Teilfaktoren ortsabhängig variieren – bei großen Flächenelementen sogar stark –, wäre bei genauen Ansprüchen, da über 2 Flächen, eigentlich ein 4-fach-Integral zu berechnen. Dies ist analytisch nur für ausgewählte Situationen (senkrecht oder parallel zueinander stehende ebene Polygone) möglich /R8,9/¹⁸. Dieser für Zwecke des Wärmestrahlungsaustausches konzipierte Weg erscheint jedoch angesichts der durch relativ große Schallwellenlängen ohnehin bedingten Unschärfe unnötig aufwändig. Sollen nur Nachhallzeiten berechnet werden, braucht ein Raum nur in größenordnungsmäßig 100 Oberflächenelemente zerlegt werden /R6/. Den meisten Autoren der Raumakustik genügt deshalb eine Vorberechnung der Formfaktoren durch numerische Summation über eine recht grobmaschige Subunterteilung der Teilflächen oder durch Wahl von vorne herein kleiner Teilflächen, *patches*. Sichtbarkeits- und andere Prüfungen machen – was häufig (z.B. von Kuttruff R3-R7/) noch gar nicht betrachtet wurde – die Berechnung der Formfaktoren unglaublich aufwändiger. Im Bereich der Computergrafik /C3,C7/, wo Raumboberflächen typischerweise 10000-100000 Polygone haben, aber auch schon in der Raumakustik /K8/, werden deshalb, um die Berechnung riesiger (schwach besetzter) Matrizen aus Formfaktoren zu vermeiden, iterative Methoden, vor allem Beam Tracing-Techniken (also Hybrid-Methoden) bevorzugt. Dabei werden von einem Flächenpunkt aus in den vorderen Halbraum ausgedehnte Strahlen durch ein „vorgefertigtes Gitter“ (z.B. ein in Quadrate unterteilter „Hemicube“ /C7/) ausgesandt, mit denen andere Flächen abgetastet werden. Lewers /K8/ verwendet dafür bei seiner Anwendung auf Schall dreieckige Pyramidenstrahlen.

¹⁸ Mathiak gelingt es mithilfe der Feldtheorie, die Flächen- in Linienintegrale umzuwandeln und auf Polygonpaare anzuwenden. Er gibt dazu ein Rechenschema an, das jedoch äußerst kompliziert ist. Miles wendet dies auf die Raumakustik an und verwendet eine zeitabhängige Iteration.

2.3.3. zeitabhängig-iterative Berechnung

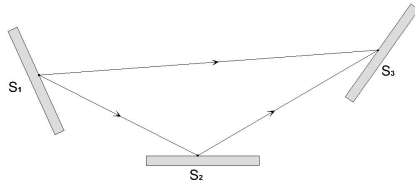
Zur zeitabhängigen Berechnung der (späten) Raumimpulsantwort muss die Integralgleichung bzw. ihre numerische Formulierung iterativ gelöst werden, die Bestrahlungsdichten sind zeitabhängig (instationäre Lösung). Die zeitabhängige Formulierung bedeutet im Prinzip nichts weiter als die algorithmische Formulierung der Umverteilung von Schallenergie von einem i-ten zu einem j-ten Flächenelement unter Berücksichtigung des Zeitbedarfs. Dabei erweist sich eine zukunftsorientierte Verteilung von einer jeweils festen Sendefläche aus zu verschiedenen Empfangsflächen („wohin wird verteilt?“) als sinnvoller als eine vergangenheitsorientierte Betrachtung („woher kommt der Schall?“), wie sie der Integralgleichung zu Grunde liegt. Der Energieaustausch wird so unmittelbar nachvollzogen. Es ergeben sich zeitabhängig aufeinander folgende, mit Zeitintervallzahlen n nummerierbare Bestrahlungsdichteverteilungen $\mathbf{B}_n$ (Zeilen einer Matrix mit den Elementen $B_{j,n}$, wobei j die Nummer der

Patche ist). Hierbei stellt sich zusätzlich das Problem einer geeigneten Quantisierung der Zeit in Zeitintervalle Δt . Dies hat nichts mit zeitlich geeigneten (d.h. frequenz- oder wellenlängen-abhängigen) Abstraten zu tun, sondern mit einer geeignet feinen Abtastung der Raumboberflächenstruktur. Hinzu kommt das Problem, dass die Zeiten zur Übertragung von Schallenergien zwischen den Flächenschwerpunkten variabel sind, proportional zum Abstand.

Es kann also nicht einfach eine komplette Verteilung der Wandbestrahlungsdichten in einem Schritt aus einer einzigen vorhergehenden abgeleitet werden, sondern nur aus zu unterschiedlichen Zeiten existiert habenden Bestrahlungsdichten¹⁹.

Außerdem gilt: Es sollte von einer Fläche erst dann weiterverteilt werden, wenn alles dort angekommen ist bzw. nichts mehr ankommen kann. Dann nämlich finden die Umverteilungsvorgänge in der günstigsten Reihenfolge statt bzw. ihre Anzahl wird minimal. **Die Bearbeitungsreihenfolge muss also individuell sein.**

Bild 2.6 Zur Problematik der Reihenfolge der Energie-Umverteilung am Beispiel dreier Flächen: Weiterverteilung von Fläche 3 nicht schon, wenn von 1 angekommen, sondern erst, wenn auch von 2 angekommen, obwohl dort ebenfalls erst Ankunft von 1 abgewartet werden muss; Flächen wie 2 müssen also vor 3 bearbeitet werden.



Nun entspricht die maximal mögliche Zeitverschiebung Δt dem maximal vorkommenden Weg zwischen den Flächenschwerpunkten zweier Wandelemente, d.h. der Raumdiagonalen. Damit ist die maximal mögliche Anzahl Zeitintervalle $m_{\max}$ und der benötigte Speicherplatz für die $B_{j,n}$, obwohl $n \rightarrow \infty$ läuft, nicht unendlich, die $B_{j,n}$ können „im Rotationsverfahren“ überschrieben werden, sobald $n > m_{\max}$ würde. (Es wird dann ein $n' = n \bmod m_{\max}$ als Speicheradresse eingeführt.) Nach o.g. Motto „erst weiterverteilen, wenn Alles auf einer Fläche angekommen ist“, muss die Ausföhrung der Umverteilungen dann nach dem Prinzip „älteste Sendeflächen zuerst!“

¹⁹ Der einfache Ansatz von Gerlach & Mellert /R1/ („der Nachhallvorgang als Markoff-Kette“), bei dem aufeinander folgende Verteilungen $\mathbf{B}_{n+1}$ aus $\mathbf{B}_n$ mit konstanten statt variierenden freien Weglängen bzw. Laufzeiten zwischen den Flächenschwerpunkten berechnet werden, ist daher falsch.

geschehen, d.h. bildlich interpretiert so, dass die Matrix der $B_{j,n}$ Zeile für Zeile von „unten“ nach „oben“ abgearbeitet wird (die „ältesten“ Flächen, auf den die in Echtzeit am weitesten zurückliegenden Energien gespeichert sind, auf denen also nichts mehr ankommen kann, sind in der ursprünglich unendlichen Matrix „unten“). Die zeit-iterative Lösung der Integralgleichung entspricht also einem Energiumverteilverfahren, dessen „Logistik“ sorgfältig zu optimieren ist (s. Kap. 4.5.).

2.3.4. Bewertung

Die Radiosity- Methode ist so „verführerisch“ einfach, weil sie - obwohl sie diffuse Reflexionen, ja damit implizit sogar Beugung beinhaltet - mit einer endlichen, ja sogar konstant bleibenden Anzahl von Energieträgern und Verbindungen von Flächenelementen auskommt. Im Prinzip muss nur ein lineares Gleichungssystem gelöst werden. Die Rechenzeit der Radiosity-Methode ist damit bei der in der Raumakustik gewöhnlich geringen Anzahl Wänden (einige 100) gegenüber den Rechenzeiten der STSM (erstreckt der SSQM) sehr gering - um so mehr noch dadurch, dass, sind die Formfaktoren (oder, bei konstanten Quellen, sogar die Bestrahlungsdichten) erstmal berechnet, für jeden neuen Empfangspunkt die immittierten Intensitäten blitzschnell nachberechnet werden können. Das ist auch der Grund, weswegen die Radiosity-Methode bei Beleuchtungsproblemen so häufig zum Einsatz kommt, aber auch für einfache, nur an Lautstärkesimulation interessierten akustischen *Virtual Reality* Anwendungen mit „wandernden“ Hörern.

Hier kommt die Frage auf: Warum hat sich denn eine so effiziente Rechenmethode nicht schon längst in der Raumakustiksimulation durchgesetzt ? Nun, weil sie vollständig diffuse Reflexionen voraussetzt, welche bei raumakustisch typischen Reflexionen zunächst kaum gegeben sind. Diese müssen vorausgesetzt werden, da nur bei ihnen die Ausfallwinkel unabhängig von den Einfallswinkeln sind; anschaulicher formuliert: „die Schallteilchen“ (oder sonstige Schallenergieträger) „vergessen ihre Vergangenheit“. Andernfalls müsste die gesamte „Vorgeschichte“ (nicht nur die letzte Einfallrichtung, wie leicht falsch vermutet !) bei der Bestimmung der weiteren Schallausbreitung berücksichtigt werden; das würde eine paarweise Betrachtung bzw. das Aufstellen einer einfachen Matrix unmöglich und eine Strahl-Rück-Verfolgung nötig machen. In der nur paarweise Betrachtung einer endlichen Anzahl von Oberflächenelementen, der dadurch vorherberechenbaren Matrix von Beziehungsfaktoren, und der damit verbundenen Effizienz liegt die Stärke der Radiosity-Methode – gleichzeitig aber auch ihre Schwäche, denn dadurch scheint die Behandlung auch geometrischer, „nicht-vergessender“ Reflexionen prinzipiell ausgeschlossen.²⁰ Es gibt aber dazu doch eine iterative Lösung: die Methode der quantisierten Pyramidenstrahlen. Die Ausnutzung des Wiedervereinigungseffektes der Radiosity-Methode und die Entdeckung der Endlichkeit des benötigten Speicherplatzes war für ihre Entwicklung entscheidend.

²⁰ Es gibt dennoch Ansätze für einen Einbezug auch geometrischer Reflexionen in einen zeitabhängig- iterativ ablaufenden Algorithmus. Der Ansatz von Korany et al. /R10/ z.B. bezieht noch Spiegelquellen in das Radiosity-Schema ein, ist entsprechend kompliziert, gestattet dennoch praktisch nur geometrische Reflexionen maximal 2.Ordnung. Ein eigener universeller Ansatz auf Basis der Radiosity-Methode, der also weiterhin auf dem Energieaustausch zwischen einer endlichen – wenn auch sehr hohen - Zahl von Oberflächenelementen beruht – relativ einfach und übersichtlich ist, wurde erst kürzlich gefunden, soll aber, wie im Vorwort erwähnt, aus Platzgründen hier nicht dargestellt werden /H6/.

2.4. Zusammenfassung und Klassifizierung der diskutierten numerischen Methoden der Raumakustik

Neben der am Anfang von Kap.2. gegebenen Übersicht (Tab. 2.0) diene die folgende noch einmal als detailliertere Zusammenfassung:

Tabelle 2.4.1: numerische Methoden der Raumakustik:

wellentheoretische Raumakustik (für niedrige Frequenzen)
finite oder Randelemente-Methoden (FEM, BEM)

geometrisch- statistische Raumakustik (für mittlere und hohe Frequenzen)
nur geometrische Reflexionen (effizient nur bei niedrigen Reflexionsordnungen):
Spiegelschallquellenmethode (deterministisch)

geometrische oder diffuse Reflexionen (bis zu mittleren Reflexionsordnungen)

Strahlverfolgungsmethoden (statistisch):

darunter:

Schallteilchensimulation, beliebig geformte Detektoren,
Berechnung von Energiedichten, bes.effizient bei vielen Empfangspunkten

andere Strahlverfolgungsmethoden:

zur Entdeckung von SSQ und Berechnung von deren Intensitäten:

Verfolgung idealer Strahlen (Ray Tracing) , Kugeldetektoren

Verfolgung ausgedehnter Strahlen (Beam Tracing) , Empfangspunkte
Kegelstrahlen (Überlappungsproblem)
Pyramidenstrahlen
ohne Aufspaltung (Verfolgung der Mittelstrahlen)
mit Aufspaltung, rekursives Verfolgen

nur diffuse Reflexionen (geeignet für Restnachhall):

Radiosity-Methode (paarweiser Strahlungsaustausch)

- stationär (Lösen eines linearen Gleichungssystems)
- zeitabhängig / iterativ

2.5. Zur allgemeinen Problematik der Frequenzabhängigkeit – auch der Schallausbreitungspfade

Die Frequenzabhängigkeit ist bei numerischen Modellen der Raumakustik ein besonderes Problem, da 6-10 Oktaven, entsprechend einem Frequenzverhältnis von 1:64 bis 1:1000 abgedeckt werden müssen – ganz im Gegensatz etwa zur (elektromagnetischen) Hochfrequenztechnik. Solange die Frequenzabhängigkeit – egal in welcher Unterteilung bzw. in wieviel Frequenzbänder - nur Energien betrifft, also vor allem bei der Absorption, ist es kein Problem, Schallenergeträger gleichzeitig alle Energien „tragen“ zu lassen, d.h. die nötigen Multiplikationen mit den Reflexionsgraden in einer zuunterst angeordneten Schleife jeweils mehrfach auszuführen. Nun sind aber z.B. auch die Streugrade und Diffusitätsgrade D frequenzabhängig, d.h. die Wahrscheinlichkeiten für Richtungsänderungen der Schallstrahlen verschieden, d.h.

die Frequenzabhängigkeit betrifft auch die Geometrie. Da bei jeder Reflexion grundsätzlich nur eine Wahrscheinlichkeitsverteilung realisiert werden kann, bliebe nichts anderes übrig, als die gesamte (wegen geometrischer Probleme ja meist schon sehr aufwändige) Simulation so oft zu wiederholen wie es Frequenzbänder gibt. Da dieser grundlegende Effekt natürlich auch bei (Kanten-) Beugung auftritt, lohnt es sich besonders, über die Vermeidbarkeit dieser Wiederholungen nachzudenken. Da liegt der Gedanke nahe, sich zunächst einmal, als „nullte Näherung“, auf einen über alle Frequenzbänder (meist wohl 6 Oktavbänder) gemittelten Diffusitätsgrad D_m zu beschränken (mit der in 2.2 beschriebenen Zufallsmethodik, d.h. diffuse Reflexion, falls eine Zufallszahl $Z_3 < D_m$, sonst geometrische Reflexion), d.h. eben auf die Frequenzabhängigkeit in diesem Punkt zu verzichten – ein freilich sehr grober Kompromiss angesichts der starken Frequenzabhängigkeit der Streuung. Als Verfeinerung müsste man dann den Fehler, den man mit der Anwendung einer falschen Winkelwahrscheinlichkeitsverteilung auf ein Frequenzband f macht, durch einen Korrekturfaktor bei den Energien wieder ausgleichen (falls eine diffuse Reflexion erfolgte, also Korrektur um den Faktor $D(f)/D_m$, falls eine geometrische erfolgte, um den Faktor $(1 - D(f))/(1 - D_m)$). Im Grenzwert über eine gegen Unendlich gehende Anzahl Teilchen, die eine teildiffuse Oberfläche treffen, kämen dann am Ende die „richtigen“ Energieströme in alle Richtungen heraus. Diese Idee (die der Autor bereits früher hatte, jedoch noch nicht umsetzte) wurde von Embrechts /G0/ vorgestellt und getestet. Die weitere Lösung nach Embrechts besteht darin, die Streugrade nicht nur von den aktuellen Wanddiffusitätsgraden, sondern von der jeweiligen Vorgeschichte eines Strahles abhängig zu machen. Jeder Strahl verhält sich demnach so, d.h. er wird so gelenkt, wie es der Schwerpunktsfrequenz der von ihm gerade übertragenen Energie entspricht. Nach diesem Prinzip frequenzabhängiger Behandlung könnten in Zukunft zufallsbasierte Schallausbreitungssimulationsalgorithmen funktionieren bei Einbeziehung beliebiger winkelabhängiger Effekte, also auch der Beugung. Schon vorab sei aber bemerkt, dass sich das Problem paralleler frequenzabhängiger Behandlung fast von selbst löst, wenn man die Idee der „Zwischenspeicherung und Umverteilung von Schallenergien auf Oberflächenelementen“ nutzt. Dies entspricht der Grundidee des zeititerativen Radiosity-Verfahrens. Ein Nachteil bliebe die Verwendung von Zufallszahlen. Diesen Nachteil weist das in dieser Dissertation propagierte quantisierte Pyramidenstrahl-Verfahren, das ebenfalls parallel-frequenzabhängig arbeitet, nicht auf.

2.6. Diskussion hinsichtlich der Erweiterbarkeit der vorgestellten numerischen Methoden um Beugungseffekte

Beugung, als typisches Wellenphänomen, kann mit Methoden der geometrischen Raumakustik naturgemäss erstmal nicht simuliert werden. Im Rahmen einer wellentheoretischen Betrachtung hingegen, d.h. Lösen der Wellengleichungen unter bestimmten Randbedingungen, entweder exakt oder, wie bei der BEM-Methode, numerisch, ist Beugung kein Thema, sondern automatisch Teil der Lösung. Grundlage ist ja stets das Huygens'sche Prinzip, dass von jedem Punkt (einer Fläche) wieder eine Welle ausgeht. Auch die Radiosity-Methode mit ihrer Annahme der diffusen Schallabstrahlung von allen Oberflächen beinhaltet so gesehen – wenn auch auf sehr pauschale Weise – Beugung. In die gleiche Richtung geht die Einführung von Diffusitätsgraden beim Ray Tracing, denn ein Teil der Streuung von Wänden ist ja auf den Kanteneffekt. Derart grobe Näherungen taugen aber nur im statistischen Mittel vieler Reflexionen, also als nächste Näherung nach der rein geometrischen Raumakustik.

Wirklich wichtig wird die Einbeziehung von Beugung – und zwar mit detaillierter Berücksichtigung der Winkel- und Streckenabhängigkeiten – bei der Schallausbreitung im „Freien“, wo Schall oft nur durch Beugung um Hindernisse zu Immissionspunkten gelangt. Klassischer Fall ist der der halbbunendlichen Ebene, praktisch umgesetzt in Form von Lärmschutzwänden. Aber auch in geschlossenen Räumen, besonders bei grossen Hindernissen in sonst absorbierender Umgebung kann der Fall wichtig werden, z.B. bei Zwischenwänden in Großraumbüros, Fabrikhallen mit absorbierender Decke oder beim Orchestergraben im Opernhaus.

In diesen Zusammenhängen kann **Beugung als Kanteneffekt** betrachtet werden. Im strahlengeometrischen Zusammenhang gilt das Fermat'sche Extremalprinzip des (wie meist nur relevant) minimalen Umwegs. Ähnlich wie bei der geometrischen Reflexion, die dem Prinzip geringsten Umweges über eine Fläche gehorcht, müssen, bei gegebenem Sende- und Empfangspunkt, Punkte geringsten Umwegs auf beugenden Kanten gefunden werden. Das könnte im Prinzip mit einem rekursiven Algorithmus wie der Spiegelquellenmethode (SSQM) geschehen. Dann aber würde (da ja nicht Beugung erster Ordnung, sondern die Berechnung von Beugungseffekten beliebig hoher Ordnung in Kombination mit Reflexionen beliebig hoher Ordnung Ziel ist) die Anzahl der (auf „Sichtbarkeit“ zu prüfenden!) Wege nicht nur exponentiell mit der Reflexionsordnung sondern zusätzlich noch exponentiell mit der Beugungsordnung steigen. **Die SSQM ist also auch für eine Kombination mit dem Umwegmodell der Beugung praktisch ungeeignet.**

Beugungsfelder können analytisch nur in den allereinfachsten Fällen berechnet werden. Wichtigster Fall, „Baustein“, aus dem alle anderen näherungsweise zusammengesetzt werden sollen, ist der der halbbunendlichen Ebene mit ihrem „Umweggesetz“ /B3,5-9/, bei der, getreu dem Kirchhoffschen Prinzip, die Randbedingungen der flankierenden Wände vernachlässigt werden. Hierbei gibt es allerdings in vielen, sogar noch einfachen Fällen Widersprüche, die in Kap. 3.1. behandelt werden.

Einbezogen werden die Randbedingungen bei einer im Bereich der elektromagnetischen Wellenausbreitung seit Längerem bewährten hochfrequenten Näherung, der Geometrischen Theorie der Beugung (UTD, /B2,4/ D8,9/). Diese und ähnliche Ansätze werden neuerdings (was sich wegen der ähnlichen Wellenlängen anbietet) auch in die Raumakustik eingeführt (z.B. /B13/). Auch dies führt jedoch zu Widersprüchen.

Alle Extremalwege finden zu wollen ist auch unsinnig, denn wenn Beugung ein Kanteneffekt ist, kann es nicht sinnvoll sein, alle nur denkbaren weit entfernten Kanten zu suchen (besonders nicht, wenn es noch viele andere stärkere Übertragungswege, z.B. via Reflexionen gibt). Vielmehr sollten – im Sinne einer Wechselwirkungs idee – nur „nahe“ Kanten Berücksichtigung finden. Dies spricht für die Kombination von Beugung mit dem Schallteilchenmodell, da hierdurch ja die Schallausbreitung direkt simuliert wird. Dann aber können die Kantenbeugungsformeln nicht angewendet werden, da Schallteilchen vorgegebener Flugrichtungen ja nur zufällig Kanten treffen (s. Kap.3.5.) ; also bedarf es eines Modells, bei dem zunächst „nahe Vorbeiflüge“ nach Kanten erfasst werden und dann von den Kanten eine „Beugungswirkung“ ausgeht, die – im Sinne einer „Unschärferelation“ - umso stärker ist, je geringer der Vorbeiflugabstand ist („Stuttgarter Schallteilchenbeugungsmodell“, s. Kap. 3.3). Das ers-

te Problem ist schon die Erfassung „naher“ Vorbeiflüge, bei dem sich Widersprüche zeigen. Das Hauptproblem aber: Selbst wenn dies Beugungsmodell näherungsweise „richtig“ wäre, müsste, damit die neue Richtungsverteilung auch zum Tragen kommt, ein Schallteilchen sich bei jeder Beugung in viele neue Aufspalten. Dann würde die Teilchenzahl und damit die Rechenzeit exponentiell wachsen. Die Idee, zur Verhinderung eines allzu starken Anwachsens der Rechenzeit als Kompromiss eine maximale Beugungs- und/oder Reflexionsordnung festzulegen, ist zu einfach. Denn maßgeblich für eine erreichte Genauigkeit und damit ein Abbruchkriterium sollte die immittierte Energie sein. Wie weit die aber schon konvergiert ist, lässt sich im Allgemeinen, vor allem im „Freien“ nicht im Voraus abschätzen. Auch die Alternative, die Beugungswinkelverteilung als Wahrscheinlichkeitsverteilung zu deuten, und nur ein Teilchen in eine danach zufällig bestimmte Richtung weiterfliegen zu lassen, wäre nicht von Vorteil; denn dann müssten schon auf jede Kante entsprechend viele Teilchen geschossen werden, die zusätzlich zu verfolgen wären – und dies sogar von Anfang an. **Also ist auch die Kombination der Schallteilchenmethode mit der Beugung schwierig und widersprüchlich.**

Die Einführung von Beugung in bisherige Algorithmen der Geometrischen Raumakustik bedeutet also in jedem Falle exponentielles Wachstum der Strahlenanzahl.

2.7. Schlussfolgerung

Es wird klar, dass gegen das exponentielle Anwachsen der Strahlenanzahl bei Einführung von Beugung nur ein qualitativ neuer Algorithmus hilft. Die besprochenen Algorithmen zur Rechenzeitverkürzung bieten hinsichtlich des Problems „Einbau von Beugung“ da keine grundsätzliche Lösung. Ein universeller Algorithmus sollte die positiven Eigenschaften der besprochenen Algorithmen in einem vereinen:

- beliebig hohe Reflexions- und Beugungsordnungen verarbeiten können
- geometrische wie diffuse Reflexionen berücksichtigen
- ähnlich wie die Radiosity-Methode mit einer begrenzten Strahlenanzahl auskommen, d.h. rechnerisch effizient sein.

Dieses Ziel wird durch das in dieser Dissertation vorgeschlagene Verfahren der Verfolgung einer begrenzten Zahl quantisierter Pyramidenstrahlen erreicht, das Ideen aus allen drei diskutierten Algorithmen aufgreift:

- die Exaktheit der Spiegelungsmethode,
- die Effizienz der Strahlverfolgung für geometrische Reflexionen,
- die Effizienz der Radiosity-Methode für diffuse,

und einen energetischen Ansatz für die Strahlenbeugung. Beugende Kanten werden dabei im Rahmen des „Pyramiden-Clipping“ durch eine Konvexzerlegung des Raumes ohne Mehraufwand gefunden. Die Explosion der Strahlenanzahl durch die Rekursivität wird durch den Wiedervereinigungseffekt der Quantisierung vermieden.

Die Idee dazu: **Interpolieren statt aufspalten !**

Statt der Rekursion wird dabei ein zeit-iterativer Energie-Umverteiler-Algorithmus wie beim Radiosity-Verfahren der Rahmen-Algorithmus sein.

3. Zum Einbau von Beugungseffekten in raumakustische Simulationsverfahren

3.1. Einführung

3.1.1. Arbeitshypothesen

Die grundlegende, aus der Beschäftigung mit numerischen Modelle der Geometrischen Raumakustik herrührende Arbeitshypothese dieser Dissertation ist: Schall wird als Energiestrahlung behandelt. Nun ist Beugung freilich ein Wellenphänomen, das nicht durch Strahlenmodelle, sondern nur durch phasenrichtige Überlagerung (Interferenz) von Wellen erklärt werden kann, die von einem beugenden Hindernis ausgehen oder einer gedachten Fläche (Apertur) in dessen Nähe. Huygens'sches Prinzip: „Jeder Punkt einer Welle ist Quelle einer neuen Welle...“ (s. Bild unten). Will man dennoch Beugung als Modul in einen auf Energiestrahlungen beruhenden Simulationsalgorithmus „einbauen“, so müsste das gewissermaßen nur vorübergehend von Wellentheorie Gebrauch machen und eine neue Richtungsverteilung der Strahlen erzeugen, welche sich dann aber wieder inkohärent überlagern. In der Sprache des Strahlenmodells bedeutet dies strukturell Neues: Strahlrichtungen ändern sich auch ohne dass Objekte getroffen werden, abhängig von der Geometrie einer „Öffnung“, vor allem nur von der Nähe zu einer Kante; die Strahlen haben sich dann in viele neue aufzuteilen gemäß einer – vermutlich vorbeiflugabstandsabhängigen – Ablenkwinkel-Verteilung der Strahlenergien. Diese ist zu finden. In diesem Sinne wird aus der Arbeitshypothese abgeleitet: gesucht ist ein **Beugungsmodul**. Dies sollte möglichst einfach, aus einer isolierten, möglichst einfachen Situation abgeleitet sein, ohne gleichzeitige Beinhaltung von Reflexionen.

Der **elementare Beugungsfall ist der an einer Kante** bzw. am halbbunendlichen Schirm oder näherungsweise an einem Keil, wobei angenommen wird, dass dessen beide flankierenden, möglicherweise reflektierenden Wände keinen Einfluss haben. (Die analytische Berechnung von Beugungsfeldern ist sonst selbst bei einfachen geometrischen Strukturen sehr schwierig oder gar unmöglich). Unter diesen Prämissen gibt es für jene Kantenbeugung eine weithin akzeptierte und hier passende Lösung gibt: die Fresnel-Kirchhoff'sche. Bei Kirchhoff wird statt der Gesamtanordnung nur die "Apertur" (Öffnung) betrachtet, durch die die einfallende Welle hindurch tritt. Ihre typische, **vereinfachende Annahme ist:**

keine Rückwirkung der beugenden Struktur auf das einfallende Wellenfeld.

Die Randbedingung flankierender, etwaig reflektierender Wände wird also missachtet; das ist zwar ein Fehler, der aber im Sinne der eigenen Annahme ist: denn Reflexionen sollen ja durch Spiegelquellen separat nachgebildet werden. Integriert wird über die in der Apertur liegenden Huygens'schen Punkte.

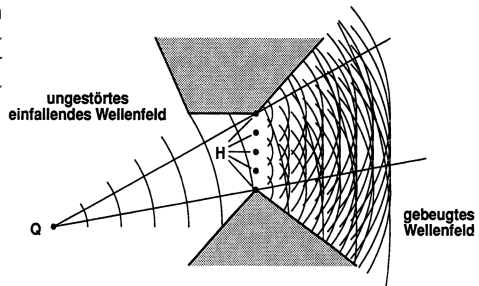


Bild 3.1.1. Zur Kirchhofftheorie, H=Huygens'sche Punkte, hier in der Apertur eines Spaltes

3.1.2. Theorie der Beugung am Schirm nach Fresnel /Kirchhoff

Da hierauf eines der Schallteilchen-Beugungsmodelle aufbauen wird, seien bereits hier die nötigen Definitionen eingeführt, und die Theorie quantitativ skizziert. Zunächst einige nötige geometrische Definitionen und Beziehungen, s. Bild 3.1.2.:

Sei o.B.d.A. die Beugungskante K gleich der z-Achse (bei $x=0, y=0$). Quellpunkt Q und Empfangspunkt P liegen in der xy-Ebene ($z=0$, Beugungsebene), Koordinaten: $Q=(x_1<0, y_1)$ links und $P=(x_2>0, y_2)$ rechts des Schirms. Die Apertur (d.h. die Fläche Huygens'scher Punkte, über die zu integrieren ist) sei die yz-Halbebene über der Kante ($y>0$). Diese kann o.B.d.A. - da ja etwaig asymmetrische flankierende Wände keine Rolle spielen sollen – auf der Winkelhalbierenden zwischen den Strahlen zu Q und P angenommen werden.

Bild 3.1.2. zur Geometrie am halbunendlichen Schirm
(Schnitt senkrecht zur Beugungskante K)

Beugungspunkt (-Kante) K,

Q =Quellpunkt, P =Empfangspunkt,

r_q = Abstand QK, r_p = Abstand KP,

R = Abstand QP, W =Strahlänge= r_q+r_p ,

U = Umweg= $W-R$,

φ =Beugungswinkel um Kante = 2β

β = einseitiger Winkel zu Q und P

B = Punkt in Aperturebene

r_1 = Abstand QB, r_2 = Abstand BP,

ε =Beugungswinkel um Punkt B in Apertur

($=\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ = Teilwinkel Q- und P-seitig)

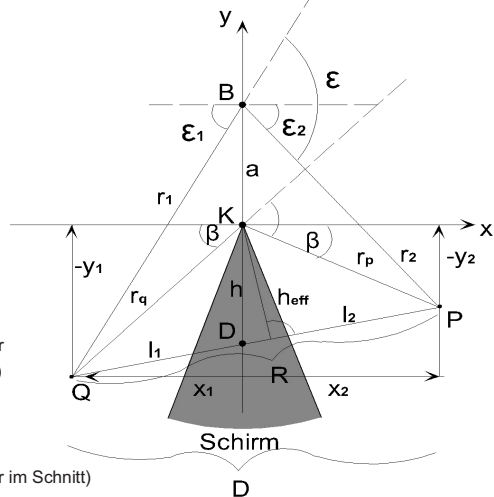
D = Durchstoßpunkt QP durch Schirm

h = Abstand Durchstoßpunkt zu Kante

h_{eff} = „Höhe“ K über QP-Verbindung

l_1 = Strecke QD, l_2 = Abstand DP,

Aperturfläche = Halbebene $x=0, y>0$) (hier im Schnitt)



Parameter bzw. Abkürzungen:

Gesamtweg Q über K nach P: $W = r_q + r_p$ (3.1)

x-Komponente QP: $D = x_2 - x_1 = r_q \cdot c + r_p \cdot c = c \cdot W > 0$ (3.2)

harmonisch-mittlerer Radius: aus $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r_q} + \frac{1}{r_p} \right) \quad \bar{r} = \frac{2 \cdot r_q \cdot r_p}{W}$ (3.3)

Beugungswinkel um Kante
(Gesamt- und Teil-): $\varphi = 2\beta$ (3.4)

Im „Schatten“ soll der Beugungswinkel $\varphi < 0$, der Umweg $Z > 0$ sein.

Abkürzungen: $c = \cos \beta = \mp x_{1,2} / r_{q,p},$
 $s = \sin \beta = y_{1,2} / r_{q,p}$ (3.5)

aus Strahlensatz:	$l_{1,2} = R/D \cdot (\mp x_{1,2}) = R/W \cdot r_{q,p}$	(3.6)
Abstand QP :	$R = W \cdot \sqrt{1 - \frac{2 \cdot \bar{r}}{W} \cdot s^2} \approx D \approx W$	(3.7)
rechts ggf. Näherungen für kleine Beugungswinkel φ		
Effektive Schirmhöhe (s. Bild oben)	$h_{eff} = \frac{s \cdot \bar{r} \cdot D}{R} \approx h$	(3.8)
Höhe des Durchstoßpunktes:	$h = \bar{r} \cdot s = \sqrt{\frac{2}{\bar{r}} \cdot s^2} \approx \sqrt{\bar{r} \cdot Z }$	(3.9)
Umweg:	$Z = (W - R) \cdot \text{sgn}(-s) = \frac{2W}{R+W} \cdot \bar{r} \cdot s^2 \cdot \text{sgn}(-s) \approx \bar{r} \cdot s^2 \cdot \text{sgn}(-s) \approx \frac{h_{eff}^2}{\bar{r}}$	(3.10)
Wellenlänge , Wellenzahl	$\lambda , \quad k = 2\pi / \lambda ; \quad \text{sgn}(s) = \text{Vorzeichen von } s$	
Fresnelzahl (Umweg/halbe Wellenlänge) $N = Z/(\lambda/2)$ (im Schatten >0)		(3.11)

Die wesentlichen weiteren Stationen der Ableitung sind folgende: Das Kirchhoff-Helmholtz-Flächenintegral der Amplituden ψ_H über die yz-Halbebene als Apertur kann unter Nutzung der üblichen Green'schen Funktionen $g(r_{1,2})$ (r^2 -Gesetz) geschrieben werden als: Amplitude an P mit Schirm=

$$\psi = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left\{ \psi_H(r_1) \cdot \frac{dg(r_2)}{dx} - g(r_2) \cdot \frac{d\psi_H(r_1)}{dx} \right\} dz dy \quad (3.12)$$

Ist ψ_0 die Amplitude am Immissionspunkt P ohne Schirm, dann wäre $\psi_0/g(R)$ die Quellstärke an Q und die Amplitude auf der Apertur $\psi_H = \psi_0 \cdot g(r_1)/g(R)$. Dies in Glng. 3.12 eingesetzt, ist der gesuchte Transmissionsfaktor $t =: \psi/\psi_0$:

$$t = \frac{1}{g(R)} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left\{ g(r_1) \cdot \frac{dg(r_2)}{dx} - g(r_2) \cdot \frac{dg(r_1)}{dx} \right\} dz dy \quad (3.13)$$

Auf alle Fälle soll im Folgenden angenommen werden, dass

- bei den wichtigen Beiträgen von Huygens'schen Punkten die y-Werte und damit die **Entfernungen nur geringfügig variieren**; dann können alle Amplitudenfaktoren als Konstanten vor das Integral gezogen werden;
- sich Quelle und Empfänger weit weg von der Kante befinden
(**Fernfeldannahme** : $r_{1,2} \gg \lambda$);

die Ableitungen d/dx werden unter Beachtung der Geometrie in Ableitungen d/dr umgeformt (die Green'schen Funktionen sind ja $\propto 1/r^2$): $d/dx = \pm c \cdot \langle W/R \rangle \cdot d/d\lambda_{1,2}$; der Faktor $c = \cos\beta$ wird also nicht für kleine Beugungswinkel β vernachlässigt (!); (der Faktor in $\langle \rangle$ gilt für den D-Fall, s.u.); die Zeitabhängigkeit wird weggelassen.

Nun ist obiges Integral (3.13) selbst nach diesen Vereinfachungen nicht exakt lösbar, sondern nur mit bestimmten Vereinfachungen für die

$$\text{Umwegfunktion} \quad u(y, z) = r_1(y, z) + r_2(y, z) - R.$$

Wie Fresnel fand, tragen fast nur die Zonen („Fresnel'sche Ringe“) zum Schallfeld am Empfangspunkt bei, die nahe der Beugungskante sind. Charakteristisch sind nach Fresnel deshalb Reihenentwicklungen der

$$\text{Streckenterme} \quad r_{1,2}(y, z) = \sqrt{x_{1,2}^2 + (y - y_{1,2})^2 + z^2}$$

in der Umwegfunktion bis zum quadratischen Glied.

Zunächst soll nun, wie in der Literatur üblich – da mit dem Vorteil der Rotationsinvarianz – eine **Entwicklung der Umwegfunktion um die Beugungskante** – angenommen werden, im Folgenden der „**K-Fall**“ **genannt**.

Der hier später bevorzugte „**Fall D**“ ist dagegen der Fall, dass der **Durchstoßpunkt D** (s. Bild 3.1.2) **der Bezugspunkt der Entwicklung** ist, d.h. dass nicht die Radien $r_{q,p}$, sondern die $r_{1,2} \approx l_{1,2} = (R/W) \cdot r_{q,p}$ als konstant anzunehmen sind.

Die Gleichungsnummern zu sich entsprechenden Gleichungen tragen im Folgenden entsprechend den genannten Fällen den Zusatz K oder D.

Für den Transmissionsfaktor ergibt sich dann nach einigen Umformungen

$$t = \left(\left(\frac{W}{R} \right)^3 \right) \frac{-jR \cdot c}{\lambda \cdot r_q \cdot r_p} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{jk} \cdot u(y, z) dz dy \quad (3.14K/D)$$

Der Zusatzfaktor in $\langle \rangle$ gilt für den D-Fall und liefert offenbar bei großen Beugungswinkeln ($W \gg R$) einen größeren Wert für t .

Im „**K-Fall**“ wird die Umwegfunktion $u(y, z)$ um $y=0$ entwickelt; das ergibt:

$$u(y, z) = r_1(y, z) + r_2(y, z) - R = |Z| - 2s \cdot y + \frac{c^2 \cdot y^2}{\bar{r}} + \frac{z^2}{\bar{r}} \quad (3.15K)$$

Für den „**D-Fall**“ wird die Umwegfunktion $u(y, z)$ um $y = h$ entwickelt, mit $y' = y - h$ entfällt der lineare Term aus 3.15K:

$$u(y', z) = \frac{c^2 \cdot W^3}{\bar{r} \cdot R^3} \cdot y'^2 + \frac{W}{\bar{r} \cdot R} \cdot z^2 \quad (3.15D)$$

Mit diesen Annahmen und Entwicklungen, sowie geeignete Substitutionen können die Integrationen in Glng. 3.14 separiert und auf die Standardform der Fresnel'schen Integrale gebracht werden, für die es numerische Lösungen gibt (s.u.). Das Ergebnis ist

der komplexe Transmissionsfaktor des Schirms

$$t = \frac{R}{W} \cdot e^{jk \cdot Z_0} \cdot F_N(v_K) \quad (3.16K)$$

mit $Z_0 = |Z| - \frac{s^2 \cdot \bar{r}}{c^2}$, dem **Fresnel'schen Integral** $F_N(v) = \frac{1}{1+j} \int_v^\infty e^{j\pi/2 \cdot t^2} dt$ (3.17).

und dem **Schirmwert**: $v_K = -y_0 \cdot v(v') = -y_0 \cdot \frac{2c}{\sqrt{\lambda \cdot \bar{r}}} = \frac{-s \cdot r \cdot 2c}{c^2 \cdot \sqrt{r \cdot \lambda}} = -\frac{2s}{c} \cdot \sqrt{\frac{r}{\lambda}}$ (3.18K),

einem für die Beugung am Schirm charakteristischer dimensionsloser Parameter.

Den Zusammenhang mit dem Umweg erkennt man, wenn man $\bar{r} \cdot s^2$ nach Glng. 3.10 in Glng. 3.18K einsetzt und noch Glng. 3.11 nutzt:

$$v_K = \frac{-\text{sgn}(s)}{c} \cdot \sqrt{4 \cdot \bar{r} \cdot s^2} = \frac{-\text{sgn}(s)}{c} \cdot \sqrt{|N| \cdot \frac{R+W}{W}} \approx -\text{sgn}(s) \cdot \sqrt{|2N|} \quad (3.19K)$$

Daraus kann man einen **Hilfsschirmwert**“

$$X = \frac{\pi}{2} \cdot v^2 = \frac{R+W}{2W \cdot c^2} \cdot k|Z| \approx k|Z| = \pi|N| \quad (3.20).$$

ableiten, welcher nahezu proportional zum Umweg Z ist.

Die Näherung gelten für kleine Beugungswinkel. Im „Schatten“ ist $s < 0$, $N > 0$, $v > 0$. (Formeln für v gelten allgemein, also sowohl für v_K als auch für v_D).

Der endliche Wert der Fresnel-Integrale kommt gewissermaßen nur durch die Ungleichheit der Fresnel'schen Zonen (maximal einer halben Wellenlänge Gangunterschieds), also durch das Nicht-Auslöschen von Beiträgen aufeinander folgender Zonen zustande.

Für die Berechnung des Fresnel'sche Integrals (Glng. 3.17) gibt es nun glücklicherweise Näherungsformeln: Nach Ersatz von $F_N(v)$ durch eine

komplexe Hilfsfunktion $h(v)$: $F_N(v) = \frac{1+j}{2} \cdot e^{jX} \cdot h^*(v) \quad (3.21)$

und der Zerlegung $h(v) = f(v) + j \cdot g(v)$ (h^* =complex-konjugiert) (3.22)

finden sich (in /U1/) für die Fresnelschen Hilfsfunktionen $f(v)$ und $g(v)$ für $v > 0$ folgende sehr gute Näherungen (± 0.002):

$$f(v) = \frac{1 + 0.926v}{2 + 1.792v + 3.104v^2} \xrightarrow{v \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi v}, \quad g(v) = \frac{1}{2 + 4.142v + 3.492v^2 + 6.67v^3} \xrightarrow{v \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi^2 v^3} \quad (3.23)$$

Nun interessiert hier nur der energetische Transmissionsgrad $T = |t|^2 = t \cdot t^*$. Dabei entfällt in Gln. 3.16 der „Phasenterm“ e^{jkZ_0} , und es folgt:

$$T = tt^* = \left(\frac{R}{W} \right)^2 \cdot F_N F_N^*(v_K) \quad (3.24).$$

und auf ähnliche Weise weiter mit Gln. 3.21 der

energetische Transmissionsgrad, welcher für den Fall $v > 0$ beträgt:

$$T_{v>0} \approx \frac{R^2}{2W^2} \cdot (f^2(v) + g^2(v)) \quad (3.25K)$$

Für beide Fälle ergibt sich:

$$T = T_{v>0} + \left(\frac{R}{W} \right)^2 \langle I(v) \rangle_{v<0} \quad (3.26K)$$

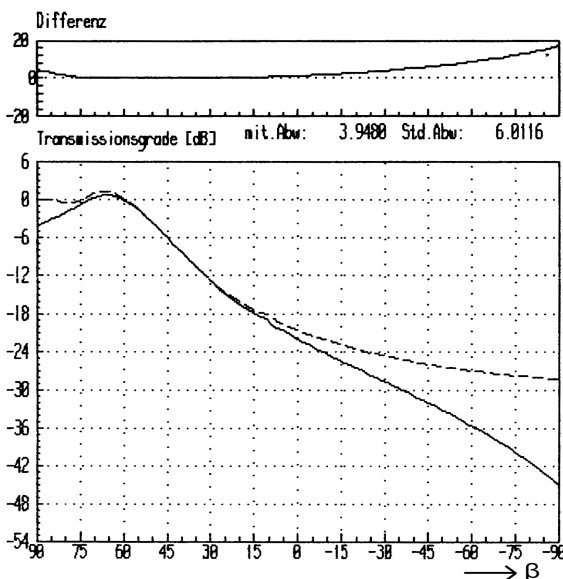
mit dem nur für $v < 0$ (d.h. den „sichtbaren Bereich“) gültigen Interferenzterm

$$I(v) = 1 - \sqrt{2} \cdot (\cos(X + \pi/4) \cdot f(v) + \sin(X + \pi/4) \cdot g(v)) \quad (3.27)$$

der sich aus der Symmetriebeziehung $F_N(-v) = 1 - F_N(v)$ ergibt.

Bild 3.1.3. zeigt einen typischen Verlauf des Transmissionsgrades als Funktion des Beugungswinkels. Weit im „Schatten“ (rechts unten) ist nach der obigen Herleitung auf Grund des Faktors $(R/W)^2$ die Abschirmung größer, als nach den üblicherweise verwendeten Näherungslösungen für kleine Beugungswinkel.

Bild 3.1.3. Typischer Verlauf des Transmissionsgrades T (logarithmiert bzw. als Pegel dargestellt) als Funktion des Beugungswinkels β , hier für besonders hohe Beugungswinkel und den (in der Rechnung nicht dargestellten asymmetrischen) Fall, dass sein linker Anteil $\beta_l = -45^\circ$ ist und $r_q = r_p = 10\lambda$. Vergleich der eigenen Berechnung für den Fall der Entwicklung um die Beugungskante („K“) nach Gln. 3.26K in Verbindung mit Gln. 3.25K, 3.27 und 3.18K für $v_K(s$ und c werden dabei aus dem ganzen Beugungswinkel β nach Gln. 3.5 berechnet) mit der üblichen Näherung für kleine Beugungswinkel (gestrichelt); oben: Differenz der Transmissionsgrade



Die obige eigene Lösung berücksichtigt auf besondere Weise (Vorfaktor R/W), dass bei größeren Beugungswinkeln ($R \ll W$) der Transmissionsgrad kleiner wird und entspricht betragsmäßig genau der Lösung von Pierce /B9/, der, ebenso wie der Autor, und im Gegensatz zu Kirchhoff, den Effekt des größeren Laufwegs um die Beugungskante berücksichtigt. Nach Kirisits /B3/, der die Rechenergebnisse Kirchhoffs und anderer Autoren /B6,B8-B10/ untereinander verglichen hat, korreliert diese Lösung auch am besten mit Messergebnissen. Die verschiedenen Lösungen unterscheiden sich nur durch Einsatz von R/W an verschiedenen Stellen dieser Formeln.

Für den Fall großer positiver Umwege („tief im Schatten“ $v \rightarrow +\infty$) geht $f(v) \rightarrow \frac{1}{\pi v}$ und $g(v) \propto v^{-3}$ noch schneller gegen 0. Dann folgt mit Glnn. 3.25K und 3.20:

$$F_N F_N^*(v) \approx \frac{1}{2} \cdot (f^2(v) + g^2(v)) \rightarrow \frac{1}{2\pi^2 v^2} = \frac{1}{4\pi X} = \frac{2W \cdot c^2}{(R+W) \cdot 4\pi^2 N} \approx \frac{1}{4\pi^2 N}, \text{ damit}$$

$$T = tt^* = \left(\frac{R}{W}\right)^2 \cdot F_N F_N^*(v_K) \rightarrow \frac{2R^2 \cdot c^2}{(R+W) \cdot W \cdot 4\pi^2 \cdot N} \approx \frac{1}{4\pi^2 N} \approx \frac{1}{40N} \quad (3.28)$$

letzteres für kleine Beugungswinkel.

Für kleine Beugungswinkel, aber große Umwege gilt damit näherungsweise:

„Der Transmissionsgrad des Schirmes ist umgekehrt proportional dem Umweg bezogen auf die Wellenlänge“ („Umweggesetz“).

Da mit „Umweg“ stets der kürzeste Weg gemeint ist, entspricht damit das Gesetz für die Kantenbeugung dem Fermat’schen Extremal-Prinzip.

Die Abschirmwirkung ist aber nur in erster Näherung bzw. kleinen Beugungswinkeln ϕ nur vom Umweg abhängig, bei höheren ist sie höher als nach dem Umweggesetz.

Eine empirische, weiter vereinfachte Näherungslösung von Maekawa /B8/ hat bezeichnenderweise den Inhalt von Normen und Richtlinien zur Schallabschirmung, insbesondere von Verkehrslärm /B1a,b/ maßgeblich bestimmt. Für die Abschirmung an halbumendlichen Schirmen werden Näherungslösungen vorgeschlagen der Art:

$$T = \min\left(\frac{1}{a+b \cdot N}, 1\right), \text{ Abschirmpegeldifferenz } \Delta L_A = -10 \cdot \lg(T) = 10 \cdot \lg(\max(a+b \cdot N, 1))$$

Für "dünne" Schirme soll gelten: $a = 3$ und $b = 20$. Zur Berücksichtigung auch der geringen Abschirmwirkung einer Schirmwand, die die direkte Sichtverbindung zwischen Quell- und Empfangspunkt nicht unterbricht, wird der Begriff des negativen Umwegs N eingeführt, betragsmäßig gleich dem Umweg über die Schirmkante. Natürlich darf dann der Transmissionsgrad den Wert 1 nicht übersteigen. Zum Vergleich mit dem Schallteilchenbeugungsmodell (s. Kap.3.3.) wurde als Verbesserung eine analytische Funktion benutzt, die an die ursprünglichen Ergebnisse von Maekawa sogar noch besser heranreicht (Fehler $< 1\text{dB}$, für $N \rightarrow \infty$ Übereinstimmung)

$$\text{für } -1 < N < 1: T \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 6 \cdot N \cdot \left(1 + e^{-3N}\right)\right) \quad (3.28m)$$

Für „dicke“, also ausgedehnte Gebäude mit 2 oder mehr „oberen“ Umlenkanten soll – nach jenen Richtlinien- der Umweg aus mehreren Abschnitten zusammengesetzt und evtl. etwas andere Werte für a und b genommen werden (verallgemeinertes Fermat'sches Prinzip bzw. „Gummibandverfahren“.) Dies ist jedoch eine fragwürdige Verallgemeinerung (s.u.)

3.1.3. Beugung am Spalt

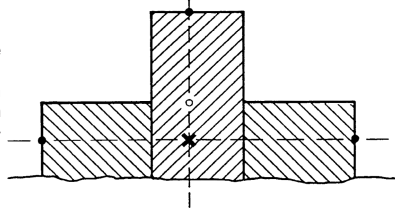
Der zweite grundlegende und einfache Beugungsfall ist der am Spalt. Nach dem bekannten Fraunhofer'schen Ansatz (der hier nicht wiederholt werden soll) entspricht im Fernfeld bzw. bei parallelem Strahlengang die Richtungsverteilung hinter dem Spalt der räumlichen Fouriertransformierten der Spalt-Transferfunktion: Je enger der Spalt, desto breiter die Verteilung – dies wiederum entsprechend der aus der Quantenmechanik bekannten „Unschärferelation“ (Impuls- mal Ortsunschärfe=konstant). Diese Überlegung ist die Basis zum „Stuttgarter Beugungsmodell“ (Kap. 3.3).

3.1.4. Verallgemeinerungsversuche und Widersprüche der klassischen Abschirmrechnung

Aus dem Umweggesetz folgt: Kanten als Elementarobjekte der Beugung sind auch in sofern konsequent, weil –ähnlich wie die geometrische Reflexion an einer Ebene dem Fermat'schen Prinzip des kürzesten Weges gehorcht – auch für die Pfade von an Kanten gebeugten Strahlen kürzeste („im Schattenbereich“ längste) Umwege bestimmt („Gummibänder gespannt“) werden müssen. Auch die Struktur des Rechenalgorithmus' könnte demnach ähnlich wie bei der Spiegelquellenmethode sein. Ausgehend von der Frage nach allen möglichen Übertragungswegen von einem gegebenen Emissions- zu einem Immissionspunkt müssten die Umwege über alle beugenden Kanten ähnlich wie die über alle reflektierenden Flächen bestimmt werden: nämlich in einer entsprechenden Schleife. Konsequenz müssten im Falle der Kombination von Beugungen mit Reflexionen Schleifen über alle Kanten jeweils auf alle Spiegelquellen angewendet werden. Dies führt aber zu einem noch steileren exponentiellen Anstieg der Rechenzeit. Diesen Weg sind auch einige Autoren gegangen, praktisch freilich nur bis zu niederen Reflexions- und Beugungsordnungen oder in vereinfachenden Sonderfällen wie z.B. bei Schirmwänden, die stets senkrecht auf dem Boden stehen, wie meist bei der Freifeldausbildung bzw. Verkehrslärmproblematik /A2/A3/A6-A8/. Es ergeben sich außerdem Widersprüche aus einer solchen verallgemeinerten Anwendung des Umweggesetzes:

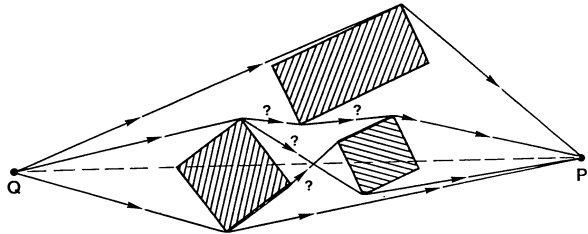
Erster Problemfall ist der der Beugung "nebeneinander": Reale Schirmwände sind natürlich seitlich begrenzt. Stehen sie „im Freien“ auf dem Boden und sind rechteckig, haben sie drei beugende Kanten: links, rechts und oben (s. Bild 3.1.4.). Für die so „parallel geschalteten“ Umwege wird in den Richtlinien vorgeschlagen, die beschriebene Abschirmrechnung für alle diese drei Schirmkanten durchzuführen und die Beiträge auf der Immissionsseite energetisch einfach zu addieren. Die Bildung gerade dreier Umwege aber ist willkürlich. Denn „Schirme“ könnten ja beliebige Polygone sein. Bei einem gedrehten Koordinatensystem ergäben sich z.B. „links“ und „rechts“ andere Umlenkpunkte; nahe liegend wäre auch wohl eher die Wahl der „Innenecken“ der konkaven Figur als Umlenkpunkte wirklich kürzester Umwege...

Bild 3.1.4. zwei dicht hintereinander liegende Schirme in der Ebene senkrecht zum Strahl, z.B. eine horizontal verlaufende Mauer und ein schmales, höheres Gebäude dahinter, bilden eine nicht konvexe Figur mit starken Einschnitten. X= Durchstoßpunkt Direktstrahl



Zweiter Problemfall ist der mehrere Schirme „in Reihe“ bzw. "hintereinander", z.B. an verschiedenen Gebäuden. Wäre klar, dass diese Kanten wirklich „hintereinander“ liegen, könnte mangels Alternativen auch hier das Gummibandverfahren angewendet werden. Alternativ könnte man annehmen, dass sich die Transmissionsgrade mehrerer hintereinander liegender Hindernisse (s. z.B. Bild 3.1.5.) multiplizieren; dies würde eine weit größere Abschirmwirkung ergeben, als nach der Gummiband-Bedingung.

Bild 3.1.5: Beispiel für eine beliebige Gebäudeanordnung im Freien (2-dimensional), wo liegen hier die relevanten gebeugten Schallpfade zwischen Q und P ? Die wegen „Sichtbarkeit“ nur schwach behinderten und die reflektierten sind nicht eingezeichnet.



Bei sinngemäß als „parallel geschaltet“ erkannten Pfaden um Kanten wären ihre übertragenen Energien zu addieren. Welche Gebäude oder Teile der geometrischen Struktur aber liegen bezüglich der Richtung vom Quell- zum Empfangspunkt "parallel" oder "in Reihe", welche Wege sind auszuwählen, an welchen Kanten, an welchen nicht ?

Die hierzu in Richtlinien gemachten Kompromisse führen sicherheitshalber meist zu zu hohen Immissionspegeln. Selbst aber wenn sich bei geometrisch komplexeren Strukturen, mehrfacher Beugung oder gar in Kombination mit Reflexionen, wie oben angedeutet, durch Kombination der Spiegelquellenmethode mit dem Gummibandverfahren ein Algorithmus finden ließe, so wäre er dennoch physikalisch falsch. Das Umwegmodell verträgt (obwohl in den Richtlinien so getan wird) aufgrund seiner zahlreichen Widersprüche eben keine Verallgemeinerung.

3.1.5. Warum Schallteilchenbeugung ?

Das zu findende energetische Beugungsmodul muss es erlauben, auch kompliziertere Fälle mehrfacher, neben- oder hintereinander passierender Beugung näherungsweise „richtig“ zusammzusetzen (wobei die Beugung am einfachen Schirm freilich als Elementarfall weiter richtig reproduziert werden muss); es muss mit dem

Spiegelquellenmodell kombinierbar sein. Dabei kann es nicht um einfache Ergänzungen gehen, sondern qualitative Änderungen sind gefragt.

Idee einer Lösung: Ähnlich wie der Effizienzgewinn der Schallteilchen- gegenüber der Spiegelquellenmethode durch ihre direkte Vorwärts-Simulation bewirkt wird (reflektierende Wände werden „von selbst“ gefunden) ist es effizienter, auch beugende Kanten nur „by the way“ zu finden, also bei „zufälligem“ nahem „Vorbeiflug von Schallteilchen“. Es macht keinen Sinn bzw. wäre die Ursache für die weitere Rechenzeitexplosion, **alle** Kanten auf Beugungswirkung zu untersuchen, denn nur die nahe bei passiert, beugen stark („Unschärferelation“). Dies ist bereits die Idee zum „Stuttgarter“ Schallteilchen-Beugungsmodell. Deshalb „Schall-**Teilchen**-Beugung“.

3.2. Zur Verwendbarkeit der Geometrischen Theorie der Beugung

Auch im Bereich der Elektrodynamik bzw. der Hochfrequenztechnik sind wie in der Raumakustik die gegebenen geometrischen Strukturen zwar oft groß, aber nicht sehr groß gegen die Wellenlänge (Bei einer Frequenz von typischerweise 1GHz ist auf Grund der eine Million mal höheren Lichtgeschwindigkeit die Wellenlänge dabei etwa gleich groß wie bei Schall von 1kHz.) Beispiel: Streuung elektromagnetischer (Funk- oder Radar-) -Wellen an Flugzeug- und Satellitenkörpern¹. Auf der Suche nach der nächst besten Approximation für jenen hochfrequenten Grenzfall – also, genau wie hier gefragt, nach einem Beugungsverfahren für ansonsten strahlenmäßige Betrachtung – entwickelte Keller die **Geometrical Theory of Diffraction (GTD) /B2/**. Sie stellt wohl die am weitesten entwickelte und seit Längerem erfolgreich angewandte Näherungstheorie für solche Problemfälle dar und liefert im Vergleich zu Messungen sehr gute Ergebnisse bis in jedes Detail (von Richtcharakteristiken), sogar bis herab zu Strukturen in der Größenordnung einer Wellenlänge /B11/.

Idee der GTD: es werden - aus der Lösung der Wellengleichung unter Berücksichtigung elektrisch leitender oder nicht leitender – beim Schall entsprechend also harter oder weicher Randbedingungen - Beugungskoeffizienten für die Beugung von Strahlen an nur einigen kanonischen Grundformen hergeleitet, z.B. an Platten und Zylindern (für z.B. Flugzeugflügel und –Rumpf), vor allem um Kanten oder sonstige Diskontinuitäten, und zwar näherungsweise für kleine Wellenlängen, durch asymptotische Entwicklung. Im Übergangsbereich zum „Schattenbereich“ zeigt die GTD jedoch Unstetigkeiten. Diese beseitigt die UTD (**„Uniform Theory of Diffraction“**), welche aus der GTD durch Hinzunahme von Termen höherer Ordnung der Reihenentwicklung nach Luneberg- Kline hergeleitet wurde /B4/.

Bild 3.2.1. zu den Parametern der UTD:

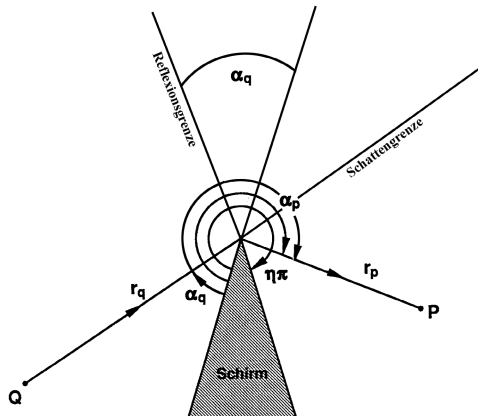
Geometrie des Keils:

Schattengrenze bei $\alpha = \alpha_q + \pi$,

Reflexionsgrenze bei $\alpha = \pi - \alpha_q$

(Seitenansicht, beugende Kante senkrecht Bildebene)

Perspektive, s. Bild 3.2.2.



¹ S. z.B. die jüngeren Dissertationen /D8/ und /D9/ hierzu, die ebenfalls vor allem algorithmische Verbesserungen zum Ziel haben; diese werden noch in Kap.6 diskutiert.

Für den hier interessierenden Fall der Beugung an der Kante eines Keils ergibt sich s. Bild 3.2.1. nach /B11/: Der zu berechnende Kantenbeugungskoeffizient D ist zunächst definiert durch

$$\psi_d = \psi_e(B) \cdot D \cdot f \cdot e^{-j \cdot k \cdot r_p} \quad (3.29)$$

wobei $\psi_e(B)$ die Amplitude des einfallenden Wellenfeldes am Beugungspunkt B ,

ψ_d die Amplitude des gebeugten Strahls am Empfangspunkt in Entfernung r_p von B ,

k die Wellenzahl und f ein Divergenzfaktor ist.

Für Kugelwellen ist

$$f = \frac{1}{r_p} \sqrt{\frac{\bar{r}}{2}} \quad (3.30).$$

$\bar{r}$ ist ein mittlerer Radius, s. Kap.3.1.1. Glng. 3.1 und 3.3. Der Beugungskoeffizient D ist

$$D = -\mathbf{b}_q \mathbf{b}_p D_s - \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{a}_p \cdot D_h \quad (3.31),$$

wobei D_s und D_h hinter den Skalarprodukten die dyadischen Beugungskoeffizienten für elektromagnetische Strahlung sind: s für *soft*, h für *hard-boundary-condition*. $\mathbf{b}$ und $\mathbf{a}$ sind Einheitsvektoren senkrecht zu den Strahlen (s. Bild 3.2.2.); die $\mathbf{b}$ liegen in der Einfalls- bzw. Beugungsebene der Strahlen, die $\mathbf{a}$ stehen jeweils senkrecht darauf. Das Ergebnis für die Beugungskoeffizienten ist

$$D_{s,h}(\alpha_q, \alpha_p, \eta, \beta) = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2\eta\sqrt{2\pi k \sin\beta}} \cdot \left\{ \cot\left(\frac{\pi+\varphi_-}{2\eta}\right) \cdot U(X_{++}) + \cot\left(\frac{\pi-\varphi_-}{2\eta}\right) \cdot U(X_{--}) \mp \left[\cot\left(\frac{\pi+\varphi_+}{2\eta}\right) \cdot U(X_{++}) + \cot\left(\frac{\pi+\varphi_+}{2\eta}\right) \cdot U(X_{-+}) \right] \right\} \quad (3.32)$$

mit

$$\varphi_{\pm} = \alpha_p \pm \alpha_q$$

$\alpha_{q,p}$ = Winkel des einfallenden bzw. gebeugten Strahls relativ zur quellseitigen Keilebene, gemessen in der Beugungsebene von Bild 3.2.1., so dass

$\varphi_- - \pi$ der Beugungswinkel des Direktschalls und

$\varphi_+ - \pi$ der Beugungswinkel von der Spiegelquelle bei $\alpha_q' = \pi - \alpha_q$ ist;

$\eta \cdot \pi$ = Außenwinkel des abschirmenden Keils, und

β = Schräglaufwinkel der Strahlen gegen die Kante (s. Bild 3.2.2.).

Die vier Terme dieser Gleichung in $\{ \}$ entsprechen den Anteilen für die direkte, gebeugte, reflektierte und die reflektiert-gebeugte Welle bzw. die direkte und die gebeugte von der Spiegelquelle; das Vorzeichen vor der eckigen Klammer entspricht D_s oder D_h .

$$U(X) = 2j\sqrt{X} \cdot e^{jX} \cdot \int_{\sqrt{X}}^{\infty} e^{-j \cdot t^2} \cdot dt \quad (3.33)$$

ist die für die UTD charakteristische, die Stetigkeit um die Schattengrenzen vermittelnde Übergangsfunktion, verwandt mit dem auch bei der Fresnel'schen Beugung an der Halbebene auftretenden Fresnel'schen Integral $F_N(v) = \frac{1}{1+j} \int_v^{\infty} e^{j\pi/2 \cdot t^2} dt$:

$$U(X) = (1+j) \cdot \pi |v| \cdot e^{jX} \cdot F_N^*(v),$$

wobei $F_N^*(v)$ sich numerisch über die Fresnel'schen Hilfsfunktionen berechnen lässt, die in Abschn. 3.1.2 vorgestellt wurden (Gln. 3.23).

Bei der UTD ist die Fresnelzahl

$$X_{\pm\pm} = k \cdot L \cdot a_{\pm}(\varphi_{\pm}) \approx k \cdot \bar{r} \cdot \cos^2(\varphi/2) \quad (3.34)$$

mit dem z.B. für Kugelwellen gültigen Entfernungsparameter

$$L = \frac{r_q r_p}{r_q + r_p} \cdot \sin^2 \beta = \bar{r} \cdot \sin^2 \beta \quad (3.35)$$

und dem winkelabhängigen Parameter

$$a_{\pm}(\varphi_{\pm}) = 2 \cos^2 \left(\frac{2\eta\pi N_{\pm} - \varphi_{\pm}}{2} \right) \quad (3.36)$$

- einem Maß für den Winkelabstand zwischen Empfangspunkt und Schatten- bzw. Reflexionsgrenze. $N_{\pm}$ sind diejenigen ganzen Zahlen, die am besten die folgenden Gleichungen erfüllen $2\eta\pi N^+ - \varphi_{\pm} = \pi$ bzw. $2\eta\pi N^- - \varphi_{\pm} = -\pi$ (3.37).

Bei der Beugung an einer dünnen Halbebene ist $N^+ = 0$ oder 1 und $N^- = -1$ oder 1.

Die Kotangensfunktionen der Gln. 3.32 würden an der Schattenübergangsgrenze und der Reflexionsgrenze Unstetigkeiten der Beugungskoeffizienten erzeugen; die Übergangsfunktionen $U(x)$ glätten den winkelabhängigen Verlauf des Gesamtfeldes, in dem sie passenderweise gerade dann verschwinden, wenn eine der 4 cot-Funktionen singulär wird.

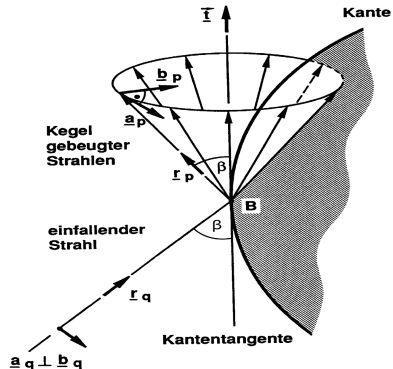


Bild 3.2.2. zum Kantenbeugungsgesetz „Ausfalls- = Einfallswinkel“ nach dem erweiterten Fermat'schen Gesetz auch bei gekrümmten Kanten (aus /B11/)

Ein geometrisch-algorithmisches Problem besteht nach wie vor darin, alle Strahlen nennenswerter Intensität zu finden, die einen Quell- mit einem Empfangspunkt verbinden. Wie im Spiegelquellenverfahren wird dies im Prinzip, aber ineffizient, durch Kombination mit dem auf Kanten erweiterten Fermat'schen Prinzip erreicht: Trifft ein Strahl schräg auf eine Kante, so teilt er sich in ein Bündel neuer Strahlen auf, die als Folge des Fermat'schen Prinzips allesamt auf einem Kegel liegen mit gleichem Ausfalls- wie Einfallswinkel zu Kante (s. Bild 3.2.2.).

Bewertung hinsichtlich Kombinierbarkeit mit dem Schallteilchen-Verfahren:

- Bei der UTD geht die Entfernung des Empfangspunkts explizit ein; die empfangsseitig immittierte Schallenergie könnte im Schallteilchenverfahren deshalb erst nachträglich, bei Eintreffen eines Schallteilchens an einem Detektor berechnet werden; bis dahin ist der Beugungskoeffizient (der eigentlich schon geschehenen Beugung) noch ungewiss; dieses Problem ließe sich aber durch ein "Merken" der sonstigen Beugungsparameter lösen;
- bei der UTD sind, um die Randbedingungen zu erfüllen, die Spiegelquellen an etwaigen schallharten Blenden implizit bereits berücksichtigt; damit würden im Rahmen des (energetischen) *ray tracings* Reflexionen mehrfach berücksichtigt werden, insbesondere bei Mehrfachbeugung; - oder es müsste phasenrichtig gerechnet werden; das kollidiert aber mit dem Grundansatz dieser Dissertation.
- Bei der UTD wird vorausgesetzt, dass ein Strahl genau eine Kante trifft, und alle Kombinationen extremer Wege um Kanten und über Flächen gefunden sind; dies würde bei höheren Ordnungen sehr ineffizient - was durch ein Schallteilchen-Verfahren vermieden werden könnte, aber zufällig ausgesandte Schallteilchen treffen Kanten nie exakt.
- Im Gegensatz zur Akustik (6-10 Oktaven) macht bei den Anwendungsfeldern der UTD das relevante Frequenzband meist nur einen kleinen Bruchteil (typischerweise 10 %) der mittleren Frequenz aus.

Kurz: die UTD passt nicht zu einem Strahlverfolgungsverfahren; sie ist nicht in dem geforderten Sinne modularisierbar².

Ähnliches hinsichtlich Verwendbarkeit in einem Strahlenalgorithmus gilt auch für ähnlich analytische, die Randbedingungen um schallharte Keile erfüllende Ansätze aus der akustischen Literatur.

Hier sei exemplarisch die Arbeit von Svensson genannt /B13/. Auch hier entsteht das Problem, dass im Strahlenmodell Spiegelquellen erst erzeugt werden, die im Beugungsmodell aber schon enthalten sind, und dass eine kohärente Rechnung gefordert ist (wofür freilich Einiges spricht, s. Kap. 3.4.).

Auf die Verwendung solcher Ansätze wurde deshalb vorerst verzichtet.

² Schöberl /D8/, der *ray tracing* (mit dünnen Strahlen) zur Findung von Übertragungskanälen in Mobilfunknetzen anwendet, wendet die UTD einfach unverändert auch im Falle nur naher Kanten an (mit einer gewissen Erfassungsgrenze, s. Kap. 3.5.) Damit macht er mindestens einen (bei ihm unbeziffernten) numerischen Fehler- und, da er zur Berechnung der Beugungskoeffizienten die volle Gleichung 4 anwendet (welche auch die Reflexion an den Flanken beinhaltet) zudem systematische Fehler.

3.3. Das "Stuttgarter"³ Schallteilchen-Beugungsmodell

Will man die schon erkannten Vorteile der direkten „straight-forward“-Simulation nutzen, bleibt man also beim Schallteilchen-Modell bzw. der Vorstellung der geometrischen Verfolgung und energetischen Überlagerung von Strahlen, ist anstelle einer Abschirm-Formel ein Beugungsmodell gefordert, das in ein Rahmenprogramm zur Strahlverfolgung eingebaut werden kann, das aber seinerseits auf Wellentheorie zu beruhen hat; dabei sollte mindestens das Abschirmgesetz des halbebenen Schirms näherungsweise erfüllt sein.

3.3.1. Arbeitshypothesen

Es sollte nur die aktuelle Beziehung eines „Schallteilchens“ zu einem gerade passierten Objekt abgefragt werden, wobei "der Vorbeiflugabstand" zu den Kanten eine wesentliche Rolle zu spielen hätte. Man könnte auch von einer „Wechselwirkung Schallteilchen-Kante“ sprechen, „**Kantenbeugungswirkung**“ (**KBW**) genannt.

Daraus könnte eine Winkelabhängigkeit der Beugungskoeffizienten $D(\varepsilon)$ (mit ε =Ablenkwinkel) abgeleitet werden, genauer: für die als unteilbar angesehenen Schallteilchen eine „**Ablenkwinkelwahrscheinlichkeitsdichteverteilung**“ (**AWWD**).

Bei mehreren „gleichzeitig“ passierten Kanten müssten sich deren Beugungseffekte geeignet überlagern. Der zukünftige Verlauf der Strahlen – Reflexionen oder Beugungen - sollte keine Rolle spielen, sodass die Kombinierbarkeit verschiedener Effekte von selbst gewährleistet ist. Im Folgenden wird eine frühere heuristische Lösung des Autors beschrieben, etwas ausführlicher als in /H2/.

Die Idee zur Lösung war eine „Anleihe aus der Quantenmechanik“: die Heisenberg'sche „Unschärferelation“, welche im Teilchenbild (man denke etwa an die historischen Experimente mit der Beugung von Elektronen) so zu formulieren ist:

Je genauer der Ort eines Teilchens bekannt ist, desto ungenauer sein Impuls, also seine Richtung, wobei das Produkt aus beiden „Unschärfen“ konstant ist (nämlich gleich der Planck'schen Konstanten h); ähnlich müsste sich auch die Flugrichtung eines Schallteilchens bei "Vorbeiflug" an einer Kante ändern, und zwar umso mehr oder umso wahrscheinlicher, je dichter der Vorbeiflug⁴. Nun spielt ja auch bei der Beugung (von Licht) am Spalt eine solche Unschärferelation eine Rolle: Je enger der Spalt, desto größer die KBW, desto breiter die Richtungsverteilung $D(\varepsilon, b)$ dahinter. So lag, um auf jene AWWD zu kommen die Idee nahe:

Das Teilchen „sieht“ einen Spalt, und zwar einen, dessen Breite – gleich „Ortsunschärfe“ b – proportional dem Vorbeiflugabstand a zu sein hat !

(Alle Streckenangaben verstehen sich als wellenlängenbezogen).

³ So genannt, da in den Jahren 1985/86 am Fraunhofer-Institut für Bauphysik in Stuttgart ersonnen.

⁴ Freilich soll hier nicht etwa auch in der Akustik ein Welle-Teilchen-Dualismus eingeführt werden, der dann durch eine neue Quantenmechanik zu lösen wäre, es handelt sich nur um die Nutzung einer Analogie; auch in der Akustik gibt es ja nicht zufällig eine Frequenz-Zeit-Unschärfe $\Delta f \cdot \Delta t \approx 1$, die etwa bei der Zeitdauer zur Erkennung tiefer Frequenzen eine Rolle spielt, die wiederum aus der Fourier-Transformation eines kurzen Tonimpulses folgt; nimmt man die Planck'sche Beziehung $E = h \cdot f$ (Proportionalität zwischen Energie und Frequenz), so korrespondiert die Unschärferelation $\Delta E \cdot \Delta t \approx h$ für Elementarteilchen zur Beziehung der Akustik.

3.3.2. Einführung der Kantenbeugungswirkung

Es wird nun also eine Kantenbeugungswirkung (KBW) $B(a)$ eingeführt mit den Eigenschaften:

- a) die Kantenbeugungswirkung - bei eventuell mehreren passierten Kanten die gesamte - ist aufgrund der Unschärferelation definiert gleich der reziproken Breite des imaginären Spaltes:

$$B_{ges} =: \frac{1}{b} \quad (3.38);$$

- b) die Beugungswirkung einer Kante nimmt mit zunehmendem Vorbeiflugabstand a ab; da jener der gedachten „Unschärfe“ entspricht, welche ihrerseits einen Anteil der Breite des „gespürten“ Spaltes b ausmacht, also $a = b/n$, und Gln. (1) auch für *eine* passierte Kante gelten muss, wird als erste Näherung angenommen: die

KBW einer Kante ist umgekehrt proportional dem Abstand:

$$B(a) = \frac{1}{n \cdot a} \quad (3.39a);$$

und ist (zur Vereinfachung) oberhalb einer gewissen Grenze a_{max} null;

- c) die "Beugungswirkungen" von gleichzeitig passierten Kanten addieren sich:

$$B_{ges} = \sum_k B(a_k) \quad (3.40)$$

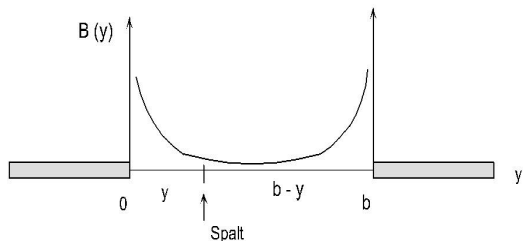
mit a_k = Vorbeiflugabstände an den einzelnen Kanten.

- d) die "Zukunft" des Teilchens hat keinen Einfluss auf den Beugungsvorgang;
e) nacheinander auftretende Beugungsfälle sind (entsprechend der Hypothese von Energiestrahlen) voneinander unabhängig, sofern die Beugungspunkte mindestens eine Strecke von der Größenordnung einer Wellenlänge auseinander liegen.

Was ist nun der „richtige“ Wert von n ?

Dies lässt sich aus einem "Selbstkonsistenz-Test" ableiten: Lässt man modellhaft sehr viele Teilchen einen wirklichen Spalt durchqueren, müsste sich ja nach Überlagerung sehr vieler verschiedener Beugungswinkelverteilungen jenseits des Spaltes die physikalisch richtige Winkelverteilung seiner selbst ergeben. Daraus lässt sich die „Normierungskonstante“ n bestimmen (s. Bild 3.3.2.)

Bild 3.3.2. Zur Herleitung des Faktors 6 in der Formel $B = 1/(6a)$ für die Kantenbeugungswirkung: Spalt der Breite b , Vorbeiflugabstände links y , rechts $b-y$, nach oben qualitativ aufgetragen die resultierende Beugungswirkung $B(y)$.



Nach Gln. 3.40 und 3.39a wäre über die resultierende Beugungswirkung

$$B(y) = \frac{1}{n \cdot y} + \frac{1}{n \cdot (b - y)}$$

für alle y zu mitteln; das Ergebnis müsste nach Gln. 3.38 $1/b$ sein:

$$\frac{1}{b} \int_0^b \left(\frac{1}{n \cdot y} + \frac{1}{n \cdot (b - y)} \right) dy = \frac{1}{b};$$

freilich divergiert dieses Integral beidseitig (s. Bild) bzw. $n = \int_0^b \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{(b - y)} \right) dy$ ist nicht bestimmbar; deshalb wird ersatzweise über einen „effektiven Vorbeiflugabstand“ a_{eff} gemittelt, der bei nur einer Kante gleich dem n -ten Teil einer „gesehenen Spaltbreite“ zu sein hätte: $a_{eff} = b_{eff} / n$; andererseits sollte $b_{eff} := \frac{1}{B_{ges}}$ sein; entsprechend der Summation der Beugungswirkungen ergibt sich dann am Spalt

$$B_{ges} = \frac{1}{b_{eff}} = \frac{1}{n \cdot a_{eff}} = \frac{1}{n \cdot y} + \frac{1}{n \cdot (b - y)} \quad (\text{wie oben}) \quad \text{bzw.} \quad a_{eff} = \frac{y \cdot (b - y)}{b}$$

als harmonisches Mittel der Einzelvorbeiflugabstände; mittelt man diesen „effektiven Vorbeiflugabstand“ über die Spaltbreite, ergibt sich

$$a_{effspaltmittel} = \frac{1}{b} \int_0^b \frac{y \cdot (b - y)}{b} dy = \frac{1}{b^2} \left(b \cdot y^2 / 2 - y^3 / 3 \right)_0^b = \frac{b}{6};$$

beim Experiment am Spalt selbst müsste die „mittlere, effektiv gesehene Spaltbreite“ natürlich gleich der wirklichen sein (Selbstkonsistenz), also

$$b = b_{effspaltmittel}, \text{ und auch wieder } a_{effspaltmittel} = \frac{b_{effspaltmittel}}{n} = \frac{b}{n}.$$

Durch Vergleich folgt $n = 6$.

Also muss die KBW bei Vorbeiflug an nur einer Kante sein:

$$B(a) = \frac{1}{6 \cdot a} \quad (3.39).$$

Bei Vorbeiflug an einer Kante „sähe“ ein Schallteilchen also einen Spalt von der sechsfachen Breite seines Vorbeiflugabstands.

3.3.3. Ableitung der Ablenkungswahrscheinlichkeitsdichteverteilung (AWWD)

Die AWWF-Funktion $D(\epsilon, b)$ wird aus der Mittelung über die Energieverteilung der "Fraunhofer'schen Beugung"⁵ für „weißes Licht“ abgeleitet; Mittelung entsprechend „weißem Licht“, da in der geometrischen Raumakustik in der Regel oktavbandbreite Daten interessieren und „weißes Licht“ etwa einer Frequenzbandbreite von 2:1 ent-

⁵ „Fraunhofer'sch“ bedeutet: im Fernfeld hinter dem Spalt, d.h. für parallel auf den Spalt immitierte und von ihm emittierte Strahlen, ($r_q \rightarrow \infty, r_p \rightarrow \infty$).

spricht. Die Winkelverteilung $D(\varepsilon, b)$ für monofrequente Strahlung ist (aus Lehrbüchern der Wellenoptik) bekannt: Mit der Abkürzung

$$u = \pi b \sin \varepsilon \quad (3.41)$$

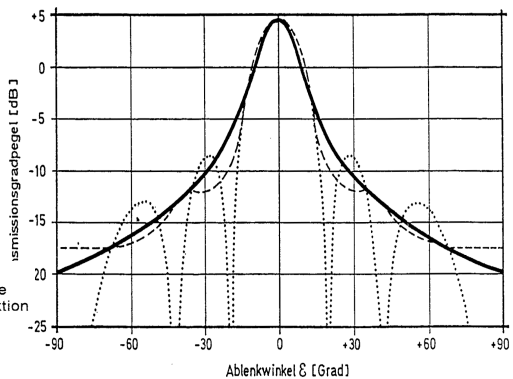
ist die winkelabhängige Intensitätsverteilung hinter dem Spalt (s. Bild 3.3.3.)

$$I(\varepsilon, b) = I_0 \cdot \frac{\sin^2 u}{u^2} \quad (3.42)$$

I_0 und $I(\varepsilon, b)$ sind hier die Intensitäten pro Längeneinheit senkrecht zur Betrachtungsebene. Diese Verteilung wäre über ein Oktavband zu mitteln, d.h. implizit (da ja $b = \text{Spaltbreite} / \text{Wellenlänge}$) über b im Bereich eines $b = b_0 / \sqrt{2} \dots b_0 \cdot \sqrt{2}$. Die Einbrüche der Spaltfunktion nivellieren sich dann:

Bild 3.3.3. Zur Mittelung der Spaltfunktion (Glng. 3.42) über ein Oktavband und zur Entwicklung einer Ablenkwinkelwahrscheinlichkeitsdichteverteilung $D(\varepsilon, b)$ nach Glngn. 3.43, hier logarithmisch aufgetragen
 $T = 10 \lg(D(\varepsilon, b)) + \text{const.}$ mit relativer Spaltbreite $b = 3$.

... = Spaltfunktion für mittlere Frequenz
 --- = Spaltfunktion gemittelt über eine Oktave
 — = genäherte Schallteilchen-Beugungsfunktion



Zur Vereinfachung aber, damit eine nicht mehr so willkürliche, wellige, sondern auf beiden Seiten monotone Verteilung zustande kommt, sollte noch weiter gemittelt werden, indem für große u in Glng. 3.4.2 der Term $\sin^2 u$ einfach durch $1/2$ ersetzt wird. Für große Ablenkungen oder Spaltbreiten wäre dann $I(\varepsilon, b) \propto 1/(2 \cdot u^2)$.

Um auch die Bedingung für den Mittelwert $I(u=0) = I_0$ einzuhalten, wäre es am einfachsten gewesen, $I(u) = I_0 / (1 + 2 \cdot u^2)$ zu setzen; dies kollidiert jedoch mit dem Verlauf der gemittelten Spaltfunktion für betragsmäßig kleine u , die eine viel „breitere Kuppe“ hat (die Reihenentwicklung von Glng. 3.42 ist $I(u) \approx I_0 \cdot (-u^2/3 \dots)$).

Deshalb wurde nach vielen verworfenen Ansätzen letztlich, proportional zu $I(u)$, eine symmetrische, beidseitig monotone, geteilte Funktion $D(\varepsilon, b)$ mit näherungsweise (statt wie nach Glng. 3.4.1.: $u = \pi b \sin \varepsilon$)

$$v = 2 \cdot b \cdot \varepsilon \quad (3.41b)$$

$$\text{gewählt: } D(v) = D_0 \cdot \begin{cases} 1 - v^2 & \text{für } |v| \leq v_0 \\ 1/2 & \text{für } |v| > v_0 \end{cases} \quad \text{mit } v_0 = \sqrt{1 - 1/\sqrt{2}} \approx 0.5412 \quad (3.43).$$

Um etwaigen Einwänden, dies sie allzu sehr „gebastelt“, vorzubeugen sei hier vorweg genommen: Andere plausible Ansätze brachten bei vielen Schallteilchen eine nur kaum merkbare Verbesserung; die genaue Wahl der AWWD scheint also nicht so wichtig. Der Normierungsfaktor D_0 ergibt sich jeweils erst aus der aktuellen Situation durch die (aus Gründen der Energieerhaltung) geltende „Normierung“

$$\int_{\varepsilon_{\min}}^{\varepsilon_{\max}} D(\varepsilon) d\varepsilon = 1 \quad (3.44)$$

Der beugende „Schirm“ ist ja nicht unendlich dünn, sondern ein „Keil“, d.h. erstreckt sich über einen bestimmten Winkelbereich.

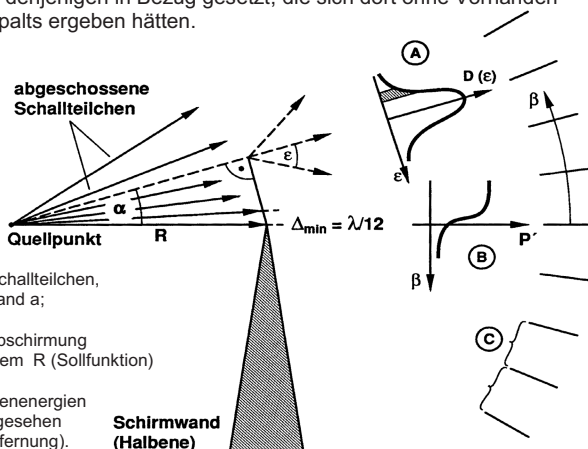
Mit diesen Annahmen und Funktionen wurden nun Schallteilchenbeugungsexperimente an den zwei wichtigen komplementären Versuchsanordnungen durchgeführt:

3.3.4. Schallteilchenbeugungsexperimente

a) Test am einfachen am Schirm, d.h. nur eine Kante

Parameter ist hierbei der wellenlängenbezogene Abstand Quellpunkt- Schirmkante $r=R$ (Bild 3.3.4.). Dabei wurden einige hundert Teilchen an der Schirmkante vorbeigeschossen. Auf der gegenüberliegenden Seite wurden die den AWWD-Funktionen entsprechenden gebeugten Energieanteile (ohne Einfluss der Entfernung!) in einem 10° -Winkelraster detektiert; d.h. es wurde jeweils das Integral über die AWWD $D(\varepsilon)$ im entsprechenden Bereich des Emissionswinkels β analytisch berechnet (wobei dieser beim Schirm, s. Bild, $\beta = \alpha - \varepsilon$ ist, beim Spalt $\beta = -\varepsilon$). Die dort gezählten Teilchenenergien wurden zu denjenigen in Bezug gesetzt, die sich dort ohne Vorhandensein des Schirms bzw. Spalts ergeben hätten.

Bild 3.3.4.
Zum Schallteilchen-
Beugungs-Experiment
am Einfach-Schirm
mit exponentieller
Abschusswinkelverteilung:



Das Ergebnis waren die gesuchten winkelabhängigen Transmissionsgrade der jeweiligen Anordnung. Diese wurden verglichen mit den nach der Beugungstheorie des Schirmes erwarteten Werten (Ging. 3.28m in Abschnitt 3.1.2.).

b) Selbstkonsistenztest am Spalt, d.h. zwei gegenüberliegenden Kanten

Parameter ist hier die wellenlängenbezogene tatsächliche Spaltbreite h . Die Experimente wurden wie am Schirm durchgeführt. Die erhaltenen Transmissionsgrade wurden hier verglichen mit der aus der Fraunhofer'schen Beugung am Spalt hergeleiteten, geglätteten Verteilungsfunktion, also der AWWD selbst.

Erste Ergebnisse

Schon auf Anhieb – ohne weitere Parameteranpassung, dies sei gegenüber Skeptikern sei betont –, also allein mit den aus nur plausiblen Hypothesen hergeleiteten Funktionen – ergaben sich (mit nur 50-100 passierenden Schallteilchen) für Schirm und Spalt sehr gute Übereinstimmungen (max. 2 dB) mit den jeweiligen Test-Verteilungsfunktionen; dies sogar für einen erstaunlich großen Wertebereich der Parameter $r=3\dots 100$ bzw. $h=3\dots 100$.

Oberhalb eines Vorbeiflugabstands von etwa 7 Wellenlängen kann die Kantenbeugungswirkung als 0 angenommen werden. Vermutlich ließe sich – zur Rechenzeiterparnis, denn es bräuchten dann weniger Teilchen erfasst werden – dieser Grenzabstand noch weiter reduzieren. Denn bei größeren Abständen ergeben sich in der Summe Änderungen von nur noch weniger als 0.1 dB.

3.3.5. Optimierung der KBW-Funktion

Bei großen Spaltbreiten lieferte die Kantenbeugungswirkungsfunktion $B(a)$ nach Glng. 3.39 jedoch zu hohe Beugungswirkungen. Weitere Experimente zeigten, dass gute Ergebnisse (Übereinstimmungen mit den Solltransferfunktionen) an Schirm und Spalt dann erzielbar sind, wenn die Beugung der kantennahen Schallteilchen etwa bleibt, und nur die der kantenfernen geschwächt wird; bei breiten Spalten ($h \gg 10$) schien es sogar so, dass man die KBW schon ab etwa einer halben Wellenlänge Vorbeiflugabstand nahezu Null setzen könnte. $B(a)$ sollte also stärker als umgekehrt-proportional mit dem Vorbeiflugabstand fallen. Das an beiden Beugungsanordnungen wechselseitig optimierte Ergebnis für die Abstandsabhängigkeit der Kantenbeugungswirkung war:

$$B(a) = \frac{1}{3 \cdot a + e^a} \quad \text{für } 0 < a < 7, \text{ sonst } 0 \quad (3.39b),$$

für $a=1$ in ungefährer Übereinstimmung mit Glng. 3.39.

Eine Optimierung der AWWD-Funktion ergab kaum nennenswerten Verbesserungen.

Ergebnisse

Mit dieser neuen KBW-Funktion $B(a)$ ergaben sich fast unglaublich gute Übereinstimmungen der aufsummierten winkelabhängigen Transferfunktionen mit ihren jeweiligen Sollfunktionen: für Spalt **und** Schirm, für große Wertebereiche des Quellpunkt-Schirmkantenabstands r bzw. der Spaltbreite $h=3\dots 100$ mittlere Abweichungen (gemittelt jeweils über alle Winkel) von unter 1 dB, meist unter 0.5 dB! Nur bei sehr nahen Schirmen $r=1\dots 3$ wuchs die Abweichung auf 2 dB (s. Bilder 3.3.5.).

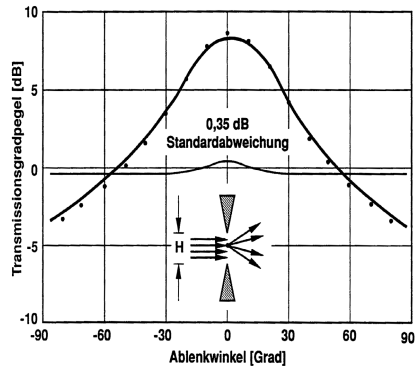
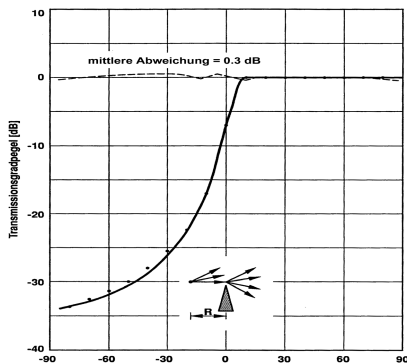


Bild 3.3.5. Ergebnisse der Beugungsexperimente an Schirm und Spalt:

Transmissionsgradpegel als Funktion des Beugungs- bzw. Ablenk winkels β ;

Punkte: berechnet mit Schallteilchenbeugung (Simulation)

Durchgezogen: Sollwerte nach Beugungstheorie (a) nach Fresnel bzw. b) nach Fraunhofer)

a) am Schirm:

Parameter: Abstand Quellpunkt-Schirmkante

hier $r = 100$ (Wellenlängen)

oben: mittlere Differenz nur 0.3 dB

b) am Spalt

Parameter: Spaltbreite/ Wellenlänge

hier $H=1$ (Wellenlängen)

Kurve in der Mitte: mittlere Differenz nur 0.35 dB

3.3.6. Zusammenfassung des Schallteilchen-Beugungs-Algorithmus:

- Erfassen der Schallteilchen mit Vorbeiflugabständen von weniger als $a_{\max}$ Wellenlängen von Kanten;
- Berechnung der einzelnen Kantenbeugungswirkungen nach Glng. 3.39b;
- Addition dieser Werte nach Glng. 3.40;
- Berechnen der dazu inversen Breite b eines imaginären Spaltes (Glng.3.38);
- Erzeugung einer geeigneten Anzahl von neuen Teilchen mit Energien gemäß der Winkelfunktion nach Glngn. 3.41b und 3.43, integriert über entsprechende Winkelbereiche (zu normieren entspr. Glng. 3.44; hier gehen als Grenzwinkel die Winkel zu flankierenden Wänden ein.

Dieses Verfahren ist direkt in Schallteilchen-Verfolgungs-Programme einbaubar.

Nachteile:

- Auf jeden Kantenbereich müssen, damit eine ausreichende Mittelung über die AWWD möglich ist, viele, bei äquidistantem oder gar zufälligen Eintreffen größenordnungsmäßig 10-100 Schallteilchen geschossen werden; dies würde, rekursiv angewandt, zu einer besonders stark steigenden Anzahl nötiger Teilchen und damit Rechenzeit führen.
- Das Reziprozitätsprinzip bzw. der gleichartige Einfluss des Weges zum Empfangspunkt geht scheinbar nicht ein; es ist aber zu vermuten, dass weitere

Tests zeigen würden, dass es erfüllt wird; denn in der Summe ergäbe sich bei nahen Empfangspunktabständen tatsächlich eine effektiv größere Abschirmung durch von oben her schräger in die Zählfenster (C in Bild 3.3.4) einfallende Teilchen als bei gleichen Beugungswinkeln aber größeren Kante-Empfangspunktabständen.

- Der Einfluss den Schirm flankierender Seitenwände geht in die Rechnung nicht ein; das ist konsequent, da ja modulweise die Intensität der gebeugten, nicht auch der reflektierten Strahlen berechnet werden soll.
- Das Modell wurde noch nicht dreidimensional getestet; jedoch wird es vermutlich auch bei dreidimensional, d.h. schräg über Kanten laufenden Strahlen, funktionieren, sofern die aus dem Fermat'schen Prinzip folgende Regel mit den gebeugten Strahlen auf Kegeln eingehalten wird (s. Bild 3.2.2.).
- Auch die Mehrfachbeugung an nebeneinander oder nacheinander liegenden Kanten (s. Kap. 3.1.4) wurde noch nicht getestet; hier sind in vielen Fällen mit Sicherheit große Fehler zu erwarten, da wegen des energetischen Modells (die gebeugten Strahlen sollen sich ja inkohärent überlagern) Interferenzeffekte nicht erfasst werden. Allerdings ist dies ein prinzipielles Manko des energetischen Ansatzes überhaupt. Hier bleibt nur zu hoffen, dass wegen der Oktavbandmittelung und vielfacher Reflexionen sich Vieles wieder ausgleicht.

3.3.7. Diskussion: Wahrscheinlichkeitsverteilung oder Aufspaltung ?

Getreu dem Credo „ein Schallteilchen ist unteilbar“, dem ersten Denkmodell, bliebe es bei einem Teilchen, das entsprechend der AWWD abzulenken wäre; dies wäre sicher am einfachsten hinsichtlich des Einbaus in bestehende Schallteilchensimulationsprogramme. Die hier aber letztlich propagierte Alternative ist, gebeugte Schallteilchen in viele neue aufzuspalten mit Energien, die dem Integral über die AWWD über den von je einem Schallteilchen repräsentierten Ablenkungsbereich entsprechen; physikalisch ist dies natürlich - im Grenzwert gegen unendlich gehender Anzahl Teilchen- äquivalent der ersten Methode. Bei beiden Modellen – nicht nur beim zweiten, wie es scheint - droht jedoch Rechenzeitexplosion. Denn für genaue Berechnungen müssten auf die Kantenbereiche sehr viele Teilchen gelenkt werden, da man am Ende eine bestimmte Mindestanzahl ankommender Teilchen braucht. Dann aber müsste man bei der ersten Methode schon gleich am Anfang sehr viel mehr Teilchen aussenden - von denen jeweils viele den gleichen Weg zu denselben Kanten in dem selbem Abstand laufen müssen, um dann mit der gleichen AWWD gebeugt zu werden; das ist offensichtlich Rechenzeitverschwendung, denn dann könnte man die auch gleich zu einem Strahl zusammen fassen und erst nach Kantenbeugungen verschiedene Wege gehen lassen. Letztlich müsste man demnach bei der Methode ohne Aufspaltung gleich viel Teilchen aussenden wie auch mit Aufspaltung am Ende existieren. Das Vermeiden der Aufspaltung ist also kein Vorteil, sondern sogar ein Nachteil. Eine exponentielle Teilchenzunahme, sogar mit hohem Verzweigungsgrad, scheint prinzipiell unvermeidbar.

Die Kanten-Verschiebe-Hypothese lautet nun also:

Die Energieflussdichte in einem Abstand a oberhalb der beugenden Kante, in einem Bereich $\Delta y = \Delta a$, entspricht gerade der Änderung des Transmissionsgrades des Schirms, wenn dieser um Δa verschoben wird.

Es zeigt sich, dass daraus eine höhenabhängige Energiestrom- und Ablenkwinkelverteilungsdichte um die Kante bestimmbar ist.

3.4.3. Berechnung des Transmissionsgrades durch Entwicklung um den Durchstoßpunkt

Bevor zu der differentiellen Betrachtung (Änderung des Energieflusses bei Verschiebung des Schirms) gegangen werden kann, muss zunächst die Entwicklung der Transferfunktion (s. Kap.3.1.2.) modifiziert werden.

Objektiv ist es bezüglich des Gesamttransmissionsgrades zwar egal, ob, bei konstanter Lage von Quell- und Empfangspunkt Q und P, die Schirmoberkante um $y = a$ nach oben verschoben wird, oder, bei konstanter Lage der Beugungskante K bei $y = 0$, Q und P um a nach unten. Rechnerisch ist das aber nicht so. Danach kann das Ergebnis nämlich nur dann gleich sein, wenn sich die Amplitudenverteilung auf der Apertur relativ zum Quellpunkt nicht verschiebt; das tut sie objektiv freilich auch nicht, aber im Falle der Näherung der Entwicklung der Umwege um den Beugungspunkt rechnerisch. Denn damit verschieben sich auch die Grenzen der Fresnelzonen. Ist hingegen der zwischen Q und P fixierte Durchstoßpunkt D Entwicklungszentrum für die Umwege, ändert sich die Lage der Fresnelzonen, auch der genäherten, bei Schirmverschiebung nicht, somit auch nicht das Endergebnis für den Transmissionsgrad.

Ein weiterer, zwingender Vorteil der Entwicklung um den Durchstoßpunkt ist der, dass bei Erweiterung des Beugungsmodells auf mehrere nahe Kanten, z.B. den Spalt, eine andere Entwicklung als die um den –eben nur dann noch eindeutigen – Durchstoßpunkt auch gar nicht möglich ist.

Die Entwicklung der Umwegfunktion $u(y, z)$ um $y = h$ bzw. $y' = 0$ mit $y' = y - h$ (s. Bild 3.1.2.) führte bereits zu Glng. 3.15 D (s.Kap.3.1.2). Diese genäherte Umwegfunktion wird als Exponent eingesetzt in die entsprechende alternative Integralformel für den Transmissionsgrad (3.14D), die nach Separation und mit den Substitutionen

$$v = 2c \cdot y' \cdot (W/R)^{3/2} / \sqrt{\lambda \cdot \bar{r}} \quad \text{und} \quad w = 2z \cdot \sqrt{W/R} / \sqrt{\lambda \cdot \bar{r}}$$

bzw. den Ableitungen

$$\xi = \frac{dy'}{dv} = (R/W)^{3/2} \sqrt{\lambda \cdot \bar{r}} / (2c) \quad \text{und} \quad \zeta = \frac{dz}{dw} = \sqrt{R/W} \cdot \sqrt{\lambda \cdot \bar{r}} / 2 \quad (3.45D)$$

auf die Standardform der Fresnel'schen Integrale gebracht wird. Dabei heben sich alle Vorfaktoren vor dem Integral (Glng. 3.14D) weg, und man erhält jetzt als

Transmissionsfaktor des Schirms :

$$t = F_N(v_D) \quad (3.16D)$$

mit dem Schirmwert

$$v_D = \frac{-h}{\xi} = -2s \cdot c \cdot \left(\frac{W}{R}\right)^{3/2} \cdot \sqrt{\frac{r}{\lambda}} \quad (3.18D)$$

oder als Funktion der zum Umweg proportionalen Fresnelzahl N

$$v_D = -\text{sgn}(s) \cdot c \cdot \left(\frac{W}{R}\right)^{3/2} \cdot \sqrt{|N| \frac{R+W}{W}} \approx -\text{sgn}(s) \cdot \sqrt{2|N|} \quad (3.19D)$$

Die Näherung gilt wieder für kleine Beugungswinkel.

Für den Hilfsschirmwert ergibt sich:

$$X_D = \frac{\pi}{2} \cdot v_D^2 = k \cdot r \cdot s^2 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{W}{R}\right)^3 = \pi \cdot |N| \cdot c^2 \cdot \left(\frac{W}{R}\right)^3 \cdot \frac{R+W}{2W} \approx \pi |N| = k|Z| \quad (3.20D).$$

Dabei wurden die geometrischen Beziehungen Gln. 3.1-3.11 genutzt. Im Vergleich zur Entwicklung um die Beugungskante (Fall „K“, Gln. 3.16ff in Abschnitt 3.12.) entfällt in Gln. 3.16D der Vorfaktor, dafür tauchen in den folgenden Gleichungen solche auf.

Der energetische Transmissionsgrad ist davon wieder das Betragsquadrat

$$T = tt^* = F_N F_N^*(v_D) \quad (3.24D)$$

ausgedrückt mit den Fresnelschen Hilfsfunktionen (wie über Gln. 3.21ff in 3.1.2.)

für $v > 0$ („Schatten“):

$$T_{v>0} \approx \frac{1}{2} \cdot \left(f^2(v) + g^2(v)\right) \quad (3.25D)$$

Allgemein, auch für den „sichtbaren Bereich“ entsprechend $v < 0$ ergibt sich als Lösung mit v nach Gln. 3.19D, X nach Gln. 3.20D, und mit Gln. 3.25D

$$T(v) = T_{falls v > 0} + \langle I(v) \rangle_{falls v < 0}$$

und mit Gln. 3.27 für $I(v)$

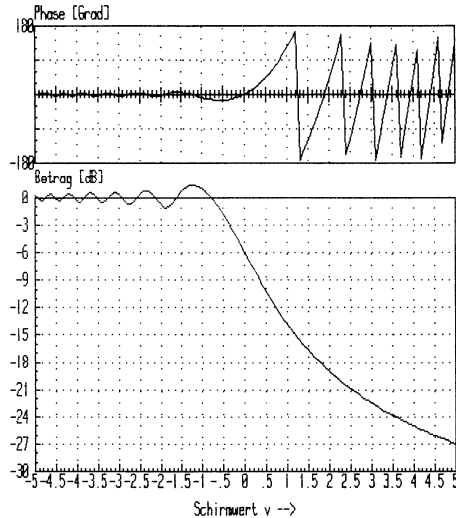
$$T(v) = \frac{1}{2} \left(f^2(v) + g^2(v) \right) + \left(1 - \sqrt{2} \cdot (\cos(X + \pi/4) \cdot f(v) + \sin(X + \pi/4) \cdot g(v)) \right)_{falls v < 0} \quad (3.26D)$$

Für den Fall großer positiver Umwege („tief im Schatten“ $v \rightarrow +\infty$) verhält sich (da $f(v) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{v}}$ und $g(v) \propto v^{-3/2}$) T (außer für extrem große Beugungswinkel) ähnlich wie schon bei Gln. 3.28 diskutiert:

$$T = F_N F_N^*(v) \approx \frac{1}{2} \left(f^2(v) + g^2(v) \right) \rightarrow \frac{1}{2\pi^2 v^2} = \frac{1}{4\pi X} = \left(\frac{R}{W}\right)^3 \cdot \frac{2W}{c^2 \cdot (R+W) \cdot 4\pi^2 N} \approx \frac{1}{4\pi^2 N} \quad (3.28D)$$

Die letztere Näherung gilt wieder für kleine Beugungswinkel. Im Fall großer negativer Umwege („weit im Sichtbaren“ $v \rightarrow -\infty$) geht der Interferenzterm (2. Term in () in Glng. 3.26D) betragsmäßig gegen 1, und der erste Term gegen 0, so dass der Gesamtwert, wie zu erwarten, gegen 1 geht – anders als fälschlicherweise im „K“-Fall wegen des Terms $(R/W)^2$ in Glng. 3.28, der dann gegen 0 geht – eine Bestätigung für die Richtigkeit dieser 2. Entwicklung um den Durchstoßpunkt. Im „Sichtbaren“ fehlt genau die Energie, die bei gleichem v -Betrag in den „Schatten“ gebeugt wurde (z.B. bei $|v|=5$: $T=97\%$ bzw. 3 %).

Bild 3.4.2. normierte Fresneffunktion $F_N(v)$ nach Glng. 3.16D; oben die Phase; unten das logarithmierte Betragsquadrat nach Glng. 3.24D bzw. 3.26D;



3.4.4. Energetische Oktavband- Mittelung des Transmissionsgrades

Nach dem energetischen Ansatz dieser Entwicklung ist obige Transmissionsgradfunktion (Glng. 3.26D) noch nicht direkt zu gebrauchen, ein Mittel über ein gewisses praktikables Frequenzband ist geboten. Dies ist in der Raumakustik üblicherweise ein Oktavband. Zu mitteln ist also über einen Frequenzbereich von 1:2, oder, von der Mitte aus gesehen, über $1/\sqrt{2} \dots \sqrt{2}$, bzw. in reziproker Weise über die Wellenzahl. Die Mittelung erfolgt hier ersatzweise über den Fresnel'schen Hilfsparameter X . Dabei kann die Mittelung über die monotonen Funktionsanteile des Transmissionsgrades näherungsweise entfallen, da sich die Steigungsänderungen zu kleinen und zu großen X hin weitgehend aufheben werden. Nötig ist aber eine Mittelung über die oszillierenden Terme, d.h. den Interferenzterm (Glng.3.27). Mittelt man eine Funktion

$$F(X) = e^{iX} \text{ über eine Spanne } X_0/\sqrt{2} \dots X_0 \cdot \sqrt{2}, \text{ also } \bar{F}(X_0) = \frac{\sqrt{2}}{X_0} \int_{X_0/\sqrt{2}}^{X_0 \cdot \sqrt{2}} e^{jX} \cdot dX,$$

folgt daraus kein einfacher Ausdruck. Das gelingt jedoch, wenn man – etwas ungenau, aber sicher im Rahmen einer Mittelung legitim – ein Oktavintervall einen Halbton verschoben, von $X_0 \cdot 2/3 \dots X_0 \cdot 4/3$ wählt, weil dann oberer und unterer Rand gleich weit von der Mitte entfernt sind, nämlich $\Delta X/2 = X_0/3$. Dann ist

$$\bar{F}(X_0) = \frac{3}{2X_0} \int_{X_0 \cdot 2/3}^{X_0 \cdot 4/3} e^{jX} \cdot dX = \frac{3}{2j \cdot X_0} \cdot e^{jX} \Big|_{X_0 \cdot 2/3}^{X_0 \cdot 4/3} = \frac{3}{2j \cdot X_0} \cdot e^{jX_0} \cdot \left(e^{jX_0/3} - e^{-jX_0/3} \right) \quad (3.46)$$

Schreibt man diese gemittelte Schwingungsfunktion als $\bar{F}(X_0) = e^{jX_0} \cdot M(X_0)$, so ergibt sich als „Interferenz-Abmilderungsfaktor“ der Oktavbandmittlungsfaktor

$$M(X) = \frac{3}{X} \cdot \sin\left(\frac{X}{3}\right) \quad (3.47)$$

der auf den variablen Teil des Interferenzterms in $\langle \rangle$ in Glng. 3.26D anzuwenden ist. Der oktavbandgemittelte Transmissionsgrad ist dann

$$\bar{T}(v) = \frac{1}{2} \cdot \left(f^2(v) + g^2(v) \right) + \left[-\sqrt{2} \cdot M(X) \cdot \left(\cos(X + \pi/4) \cdot f(v) + \sin(X + \pi/4) \cdot g(v) \right) \right]_{v < 0} \quad (3.48)$$

s. Bild 3.4.3. Das Ergebnis der Mittelung ist eine geglättete Kurve. Sehr interessant ist im Sinne der Zielstellung die Analyse, welche Energieanteile in welchem Abstand über die Beugungskante fließen. Hierzu sei ein Ergebnis aus der später durchgeführten virtuellen Kantenverschiebung vorweggenommen (Bild 3.4.4.):

Bild 3.4.3. Oktavbandmittelung des Transmissionsgrades $T(v)$ nach Glng. 3.48 (vergl. Bild 3.4.2.): Das schwarze Band zeigt die Mittelung über 100 Kurven im Oktavintervall $X = X_0 / \sqrt{2} \dots X_0 \cdot \sqrt{2}$

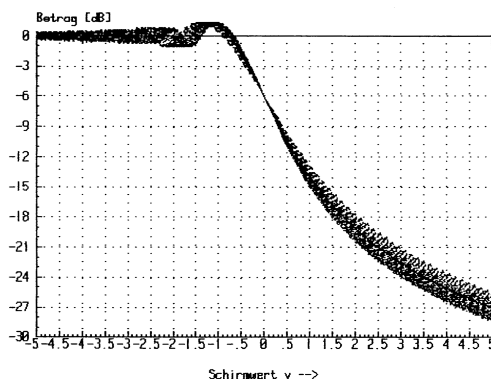
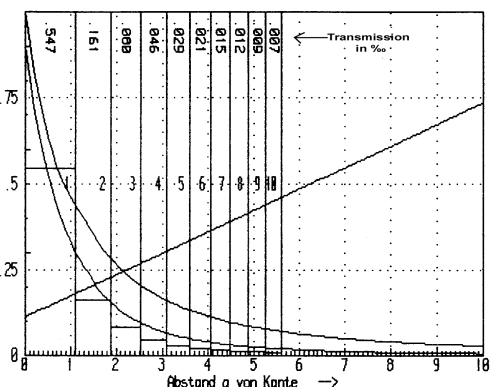


Bild 3.4.4. Teil-Transmissionsgrade im Abstand a (in Einheiten von λ) über der Beugungskante:
Fallende Kurven:
Obere: T oberhalb a ,
untere: dT/dv
steigende Gerade: $v(a)$,
abgeteilt durch senkrechte Linien: Fresnel-Zonen, darin in Promille der dadurch übertragene Energieanteil
($r_q = r_p = 10\lambda$, $\beta = -10^\circ$, d.h. schon bei $a=0$ Schatten-Fall).



Man findet bestätigt, dass der relative Energiebeitrag der Fresnelzonen über der Beugungskante drastisch abnimmt: Allein durch die erste wird in diesem typischen Beispiel schon mehr als die Hälfte übertragen, oberhalb der dritten nur noch weniger als ein Viertel (so dass der Fehler < 1dB), in der 10. z.B. nur noch weniger als 1%.

3.4.5. Differenziation bezüglich einer Verschiebung des Schirms

Nach der Kanten-Verschiebe-Hypothese ist nun der differenzielle, zusätzliche Transmissionsgrad dT bei Verschiebung der unteren Integrationsgrenze der Apertur bei $y = a$ um dy nach unten gleichbedeutend mit einer Verschiebung der Beugungskante. Dann ist der Gesamttransmissionsgrad gleich dem Integral über die Apertur

$$T = \int_0^{\infty} \frac{dT}{dy} \cdot dy \quad (3.49)$$

dT/dy kann zerlegt werden in : $\frac{dT}{dy} = \frac{dT}{dv} \cdot \frac{dv}{dy}$. Dabei beschreibt dv/dy die Erhöhung des Schirmparameters bei einer Höhenänderung der Beugungskante und ist stets positiv. (Im „Schatten“ ist v positiv, h positiv, y negativ, aber mit v steigend). Also ist mit $y' = y - h$ und $dy = dy'$: $dv/dy = -dv/dh$. Das Inverse hiervon wurde schon mit ξ in Glng. 3.45D berechnet. Hier muss eigentlich berücksichtigt werden, dass die Änderung von v mit der Höhe der Beugungskante y auch die anderen Parameter in den Gln. 3.18D und 3.19D ändert. Man kann jedoch unter Zurückgehen auf die geometrischen Beziehungen zeigen, dass tatsächlich in sehr guter Näherung, sogar für ungleiche Winkel β_1 und β_2 , die Ableitung nach Glng. 3.45D umgeformt werden kann zu

$$\frac{dv}{dy} = \frac{2}{\sqrt{\lambda \cdot c \cdot r}} \left(\frac{D}{R} \right)^{3/2} = \frac{D^2 \cdot \sqrt{2}}{R^{3/2} \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{-x_1 \cdot x_2}} \quad (3.50)$$

- und konstant ist.

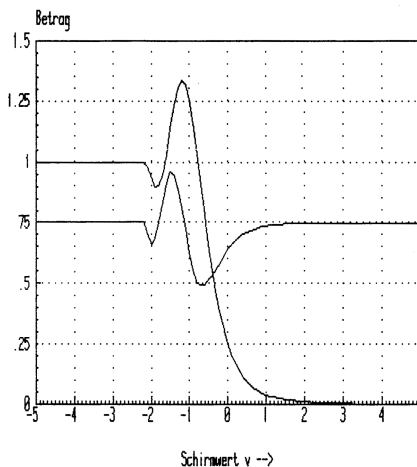
Der Schirmparameter v steigt also linear mit der Schirmkantenhöhe y bzw. mit dem „Vorbeiflugabstand a .

dT/dv beschreibt die Verminderung des Transmissionsgrades bei Erhöhung von v und ist (abgesehen vom Interferenzbereich) stets negativ (s. Bild 3.4.2.) Dazu ist die oktavbandgemittelte Funktion $T(v)$ (Glng.3.48) nach v abzuleiten, wobei $X = \pi/2 \cdot v^2$. Über die exakt möglichen Ableitungen der darin enthaltenen Fresnelschen Hilfsfunktionen $/U1/$ erhält man (unter Vernachlässigung der Ableitung von $M(X)$) in sehr guter Näherung

$$\frac{d\bar{T}(v)}{dv} = -\text{sgn}(v) \cdot g(v) - M(X) \cdot \left[\sqrt{2} \cdot \cos(X - \pi/4) \right]_{\text{falls } v < 0} \quad (3.51)$$

Den Verlauf zeigt Bild 3.4.5.

Bild 3.4.5. oben: oktavbandgemittelter Transmissionsgrad T nach Glng. 3.48
unten, nach unten verschoben („0.75“ entspr. 0): seine Ableitung dT/dv nach Glng. 3.51: für große v , s. rechts unten, ist der Verlauf $\propto 1/v^3$ und entspricht dem in Bild 3.4.4; im „sichtbaren“ Bereich, d.h. wenn die Schirmkante nach unten verschoben würde (linker Teil der unteren Kurve für dT/dv) ergibt sich (s. „Überschwingen“ ins Negative (d.h. unter 0.75) vorübergehend scheinbar „rückwärts fließende“ Energie.



Das Produkt $\frac{dT}{dy} = \frac{dT}{dv} \cdot \frac{dv}{dy}$ (Glng. 3.50 * Glng.3.51) ist die Änderung des Transmissionsgrades mit der Höhe y der Beugungskante, welche proportional ist der **Energieflussdichte über der Beugungskante des Schirms**:

$$\frac{dT}{dy}(v) = \frac{2}{\sqrt{\lambda \cdot c \cdot \bar{r}}} \left(\frac{D}{R} \right)^{3/2} \cdot \left\langle -\operatorname{sgn}(v) \cdot g(v) - M(X) \cdot \left[\sqrt{2} \cdot \cos(X - \pi/4) \right]_{\infty} \right\rangle \quad (3.52)$$

Hierbei ist $1/\sqrt{c \cdot \bar{r}} = \sqrt{D/(-2x_1 \cdot x_2)}$ gleich einem konstanten Anfangswert. Für große v (weit im Schatten) ist $g(v) \approx 1/(\pi^2 \cdot v^3)$.

Bemerkenswert ist: **Es ist keine explizite Abhängigkeit vom Vorbeiflugabstand von der Kante erkennbar.**

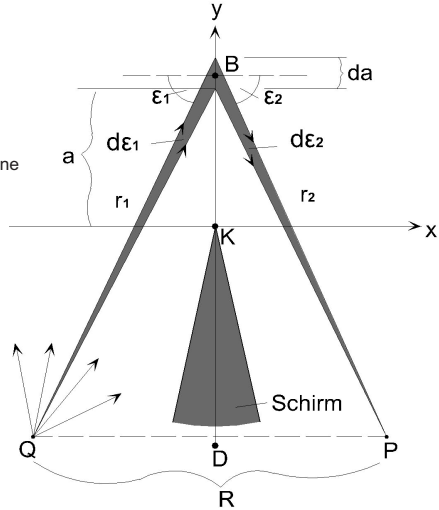
3.4.6. Herleitung einer Ablenkungswinkelwahrscheinlichkeitsdichteverteilung durch Vergleich mit der Energieflussdichte über die Schirmkante

Aus der Energieflussdichte dT/da ist nun die Schallteilchen-Ablenkungswinkel-Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (AWWD) $D(\varepsilon)$ an einem Beugungspunkt B in der Apertur herzuleiten. Dies kann man, wenn man danach fragt:

Durch welchen Abstandsbereich da oberhalb der Kante fließt die Energie, die von Q unter einem Winkelbereich $d\varepsilon_1$ emittiert wurde, und welchem Emissionwinkelbereich $d\varepsilon_2$ und Ablenkungswinkelbereich $d\varepsilon$ von dort entspricht dies ?

Bild 3.4.6. zeigt dazu die Geometrie eines fiktiven Schallteilchen-Beugungs-Experimentes:

Bild 3.4.6. Geometrie zur Herleitung einer AWWD-Verteilung: (weitere Parameter s. Bild 3.1.2.)
 Q = Quellpunkt,
 P = Empfangspunkt,
 y-Achse ($x=0, y>0$) = Apertur = Integrationsebene
 R = Abstand QP,
 r_q = Abstand Q von K,
 β_1 = Winkel von Q, gesehen bei K
 B = Punkt in Aperturebene
 a = Vorbeiflugabstand an Beugungskante
 da = Abstandsreichweite, durch den die unter einem Winkelbereich $d\epsilon_1$ von Q abgeschickte Schallleistung nach P fließt
 r_1 = Abstand QB, r_2 = Abstand BP,
 ϵ = Beugungswinkel um Punkt B in Apertur
 $= \epsilon_1 + \epsilon_2$ = Teilwinkel Q- und P-seitig, im „Schattenfall“ negativ.



Geometrisch-differenzielle Betrachtungen liefern den Zusammenhang für den Transmissionsgrad –AWWD:

$$T = \int_0^{\infty} \frac{dT}{da} da = R \cdot \int_{-\pi/2}^{\beta_1} \frac{D(\epsilon(\epsilon_1))}{r_2(\epsilon_1)} d\epsilon_1 \quad (3.53)$$

Durch Vergleich der Integranden (und mit $dy = -da$) gewinnt man eine Berechnungsvorschrift für die gesuchte AWWD:

$$D(\epsilon) = \frac{r_2(\epsilon)}{R} \cdot \frac{da}{d\epsilon_1} \cdot \frac{-dT}{dy}(\nu) \quad (3.54).$$

Dabei sind alle enthaltenen Größen eine Funktion des Ablenkungswinkels ϵ .

Da der Schirm selbst - nach Kirchhoffscher Annahme - gar keinen direkten Einfluss auf die Transmission an einer Stelle B hat, kann man den Beugungspunkt und die Schirmkante gleich setzen, damit auch die Winkel $\epsilon \equiv \beta$ und die Radien $r_{1,2} \equiv r_{q,p}$.

Unter Nutzung diverser geometrischer Beziehungen, und der Glngn. 3.18D und 3.50-52 erhält man schließlich für die Berechnung der Ablenkungswinkelwahrscheinlichkeitsdichte im aktuellen Moment eines Kantenvorbeiflugs folgende AWWD-Funktion:

AWWD-Verteilung als implizite Funktion der Eingangsgrößen $r_1, r_2, \varepsilon, \lambda$:

$$D(\varepsilon) = \left(\frac{W}{R} \right)^{5/2} \cdot \sqrt{\frac{\bar{r}}{\lambda}} \cdot \frac{dT}{dv}(\nu) \quad (3.55).$$

mit

$$W = r_1 + r_2 \quad (3.1b),$$

$$R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 \cdot r_2 \cdot \cos \varepsilon} \quad (3.7b),$$

$$\bar{r} = 2 \cdot r_1 \cdot r_2 / W \quad (3.3b),$$

(vergl. Glngn. 3.1-11), dem Schirmparameter

$$\nu = -\sin \varepsilon \cdot \left(\frac{W}{R} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{\bar{r}}{\lambda}} \quad (3.18e)$$

und

$$d\bar{T}/dv \text{ nach Glng. 3.51.}$$

Für große Ablenkwinkel weit im „Schatten“ ($\nu \rightarrow \infty$) gilt

$$D_\infty(\varepsilon) \approx \frac{R^2 \cdot \lambda}{\pi^2 \cdot W^2 \cdot \bar{r} \cdot \sin^3(\varepsilon)} \quad (3.56).$$

Die Normierung $\int_{-\pi/2+\beta_1}^{\pi/2+\beta_1} D(\varepsilon) \cdot d\varepsilon = 1$ wurde nicht analytisch, aber numerisch überprüft.

Auch die AWWD-Verteilung ist also, wie schon dv/dy , nicht direkt abhängig vom Vorbeiflugabstand a von der Schirmkante. $D(\varepsilon)$ kann nur indirekt angegeben werden, da nötige geometrische Parameter erst aus dem Ablenkwinkel folgen. Indirekt hängt demnach die AWWD durchaus auch vom Vorbeiflugabstand ab. Denn es gilt (s. Bild 3.4.1 und 3.4.6, Indizes 1 und 2 für linke bzw. rechte Seite):

$$\eta_1(a) = \sqrt{r_q^2 + a^2 - 2 \cdot r_q \cdot a \cdot \sin \beta_1} \quad \text{und} \quad \tan \varepsilon_1(a) = (y_1 - a) / -x_1 = \tan \beta_1 - a / (r_q \cdot \cos \beta_1) \quad (3.57).$$

Je höher $|\varepsilon_1|$ und der Vorbeiflugabstand a , je mehr sind die Maxima der Verteilung ebenfalls nach oben (positive ε_2) verschoben, s. Bild 3.4.7., d.h. die Nichtablenkung bzw. der Weiter-Geradeaus-Flug wird immer wahrscheinlicher. Das Gleiche zeigt anschaulicher, als Richtwirkung, Bild 3.4.8.

Wie physikalisch zu erwarten, bestätigt Glng. 3.56 die Interpretation:

- stärkere Beugung mit zunehmender Wellenlänge,
- geringere Beugung
 - bei zunehmendem Vorbeiflugabstand zur Kante (dann wird nämlich $W \gg R$);
 - bei zunehmendem mittleren Abstand r von Q oder P,
 - abnehmend mit der 3. Potenz des Sinus' des Ablenkwinkels.

Es gibt keine Unterschiede in den Abhängigkeiten von Q und P.

Das Reziprozitätsprinzip ist deshalb erfüllt. Damit konnte tatsächlich eine AWWD aus der Fresneltheorie analytisch abgeleitet werden.

Bild 3.4.7. (links) Ablenk-
winkelverteilungsfunktion

$D(\varepsilon)$ nach Glngn. 3.55ff an
einem Beugungspunkt B in
der Apertur;

Parameter: Abstand zu
Kante $a=0,1,2,\dots,10$;

$$r_q = r_p = 10\lambda,$$

mit Q unter Winkel $\beta_1 = 0$
(d.h. Höhe von Q : $y_1=0$,
vergl. Bild 3.4.6.).

$$r_2 \equiv r_p = 10\lambda.$$

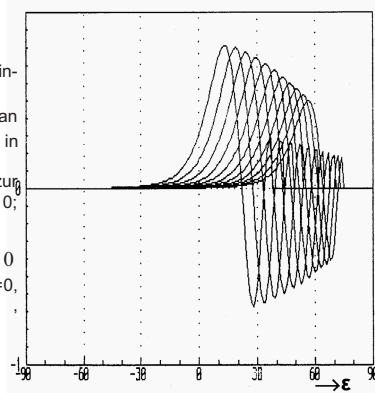


Bild 3.4.8. (rechts): „Richtungskeulen“ (Richtwirkung) der Schallteilchen-Ablenkung: in verschiedenen Abständen $a=0,1,2,\dots,10$ von der Beugungskante eingezeichnete Ablenkungswinkelverteilungsfunktionen, wie als Funktion des Ablenkungswinkels in Bild 3.4.7. oben,

hier ist $r_q = 2\lambda$; $r_p = 10\lambda$, Q unter Winkel $\beta_1 = 0$ d.h. Höhe $y_1=0$

3.4.7. Algorithmus der Schallteilchen-Beugung nach dem Trondheimer Modell:

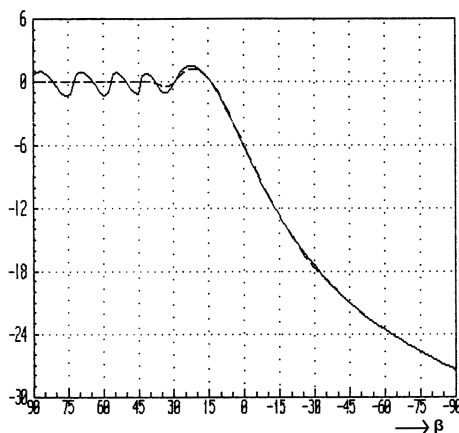
- Erfassung der geometrischen Konstellation Quelle, Beugungskante, Vorbeifugabstand – auch Empfangspunkt(e); für jeden von diesen:
- Berechnung der nötigen Hilfsparameter nach Glngn. 3.1b, 3.3b, 3.7b, 3.18e, 3.57 und der AWWD nach (Glngn. 3.23, 3.51, 3.55);
- die numerische Integration von $D(\varepsilon)$ oder bei kleinen Winkeln näherungsweise Multiplikation mit $\Delta\varepsilon$ (was „im Ernstfall“ freilich durch Zugriff auf eine „Datenbank mit Beugungskoeffizienten“ ersetzt werden könnte.)

3.4.8. Ergebnisse numerischer Experimente

In einem „Schallteilchen-Beugungs-Experiment“ wurden vom Quellpunkt in äquidistanten Winkeln ε_1 (im Bereich $\beta_1 \dots -\pi/2$) eine gewisse Anzahl von Schallteilchen auf die Apertur über der Beugungskante „geschossen“, jedem ein entsprechender relativer Energieanteil zugeordnet (Summe 1). Auf der Empfangsseite wurden – ähnlich wie schon beim „Stuttgarter Beugungsmodell“ - rechnerisch „Zählfenster“ entsprechend einem Immissionswinkelbereich $\Delta\beta_2$ bezogen auf die Beugungskante in einem Abstand r_p eingerichtet.

Summiert man (entsprechend dem Integral nach Glng. 3.53) in jedem Empfangswinkelbereich die von allen Schallteilchen herrührenden Beiträge auf, so ergibt sich (wenn auch nur für endlich viele Winkel) eine winkelabhängige Transmissionsgradfunktion, die mit der analytischen Sollfunktion des Schirmes, wie aus der Fresnel-Kirchhoff-Theorie folgend, gemittelt für ein Oktavband (Glng. 3.48) verglichen werden kann. Das Ergebnis eines solchen Experiments zeigt exemplarisch Bild 3.4.9.

Bild 3.4.9. Transmissionsgrad des Schirmes nach dem „Trondheimer Beugungsmodell“ für 20 Schallteilchen als Funktion des Beugungswinkels β (nach Glngn. 3.23, 3.51, 3.55) (durchgezogen)
gestrichelt:
„wahrer“ Transmissionsgrad, oktavbandgemittelt nach Glng. 3.48
Parameter: $r_q = r_p = 10\lambda$,
 $\beta_1 = -10^\circ$, $\beta_2 = -10^\circ$.



Die Abweichungen sind im wichtigen „Schatten“-Bereich praktisch null, im „Sichtbaren“ (mit dem Interferenz-Effekt) maximal 1dB, Standardabweichung kleiner 0.5 dB. Sogar mit nur 10 Schallteilchen sind die Abweichungen noch erträglich. Mit wachsender Teilchenzahl nehmen sie stark ab.

Damit ist – für den einfachen, aber wichtigen Fall der Beugung am absorbierenden Schirm – das Trondheimer Beugungsmodell weitgehend verifiziert.

3.4.9. Der maximal zu erfassende Vorbeiflugabstand

Der numerisch für eine bestimmte Genauigkeit maximal zu erfassende Vorbeiflugabstand ist wellenlängenabhängig, denn mit wachsendem Abstand nimmt ja die Beugungswirkung ab. Außerdem wird er vom Radius r_q abhängen. Eine Vermutung ist weiter, dass gerade derjenige Abstand $a_{\max}$ bzw. derjenige Beugungspunkt noch tolerabel sein könnte, der im Vergleich zur Position der Schirmkante zu einer Phasenverschiebung entsprechend $< \lambda/8$ führt (eine halbe Fresnelzone). Daraus folgt eine optimale Abstandsgrenze von

$$a_{\max} \approx \sqrt{r_q \cdot \lambda / 4} / \cos \beta_1 \quad (3.58)$$

Numerische Experimente zeigten, dass die Abweichungen in den Transmissionsgraden (mit/ohne diese Erfassungsgrenze) in einem sehr weiten Immissionsbereich von 1...100 Wellenlängen fast durchgängig kleiner als 1dB waren. **Ein allgemein etwa genügender Toleranzabstand $a_{\max}$ beträgt etwa eine Wellenlänge.**

3.4.10. Weitergehende Überlegungen zur Erweiterung auf die Beugung am Spalt

Ähnlich wie beim „Stuttgarter“ Beugungsmodell sollte geprüft werden, inwieweit das hergeleitete Beugungsmodell gleichzeitig auch für den komplementären oder zumindest zweiteinfachsten Fall der Beugung am Spalt, also an zwei parallelen Kanten gilt. Dass es keinesfalls auch nur näherungsweise gelten würde, war von vorneherein klar, denn natürlich interferieren die Beugungsfelder beider Kanten miteinander, was durch energetische Überlagerung der Ergebnisse für zwei abschirmende Kanten niemals erfasst werden kann. Im Gegensatz zum „Stuttgarter Modell“ ergab sich beim „Trondheimer“ - physikalisch enttäuschend - auch nicht etwas wie eine „Kantenbeugungswirkung“, also auch keine direkte Abhängigkeit vom Vorbeiflugabstand von der Schirmkante. Das musste auch so herauskommen, denn nach der schon anfangs übernommenen Annahme von Kirchhoff und Fresnel sollte der Schirm ja keine Rückwirkung auf das Schallfeld haben.

Indem die zweite Kante als Begrenzung der Apertur bzw. der Integrationsfläche aufgefasst wurde, wurde eine Formel analytisch abgeleitet, die das Reziprozitätsgesetz erfüllt, also eine, in die auch der Weg zum Empfangspunkt einging. Die Ablenkwinkelverteilung blieb aber leider asymmetrisch.

Für einen „weiten“ Spalt, bei dem die beiden Kantenbeugungen als weitgehend unabhängig voneinander betrachtet werden können, kann aus der Kombination der Formeln für die beiden Schirmkanten (mit den Schirmwerten v_1 und v_2) eine Transmissionsgradformel hergeleitet werden. Das soll hier nicht dargestellt werden. (Idee: Zerlegung des Integrals des die Apertur zwischen den beiden Kanten bei y_1 und y_2

im Stile $\int_{y_1}^{y_2} () dy = \int_{y_1}^{\infty} () dy - \int_{y_2}^{\infty} () dy$, damit Nutzung der Einzelkantenbeugungsfunktionen von vorher).

Natürlich ergeben sich durch Überlagerung der Eigenschaften beider „Schirme“ zu einem Spalt neue, vorher nicht existente Interferenzterme (für die Überlagerung der beiden „Kantenwellen“). Die energetische Transferfunktion für einen Spalt kann also nicht einfach aus denen für Schirme zusammengesetzt werden.

Für enge Spalte ist die **Fraunhofer'sche Näherung** nahezu paralleler Strahlen zum Sende und Empfangspunkt adäquater. Dies ist verbunden mit einer Entwicklung der Umwegfunktion nur bis zum linearen statt bis zum quadratischen Glied (vergl. Gln. 3.15) und ist gleichbedeutend mit einer räumlichen Fourier-Transformation – wie es beim „Stuttgarter Beugungsmodell“ ausgenutzt wurde („Unschärferelation“). Nur in z-Richtung (falls langer, aber dünner Spalt) gilt noch der Fresnel'sche Ansatz.

Für dünne **und** kurze Spalte wäre in **beiden** zueinander senkrecht stehenden Richtungen der Parallelstrahlenansatz genügend – ein weiterer Sonderfall, der hier nicht näher betrachtet werden soll.

Weiter gäbe es jede Menge „Sonderfälle“, schon Spalte mit nicht-parallelen Kanten, nicht rechteckige oder gar mehr als viereckige Aperturen usw., für die es illusorisch

und auch nicht im Sinne der Zielrichtung wäre, jedes mal eine Sonderfunktion aufzurufen, die ohnehin nur Näherungsfunktion sein könnte.

Wie weitere Untersuchungen zeigten, muss die AWWD für den Spalt, erhalten aus der angedeuteten Kombination der Einzelkantenbeugungsfunktionen, symmetrisch sein ($D(-\varepsilon) = D(\varepsilon)$), damit nach Vertauschen der Kanten (als Selbstkonsistenztest) dasselbe herauskommt. Aber wie sollten - bei Vorbeiflug an mehreren Kanten - modularartig überlagerte asymmetrische Ablenkfunktionen – auch bei schrägen Einfallswinkeln - eine symmetrischer werdende resultierende Ablenkfunktion der Apertur erzeugen? Weil dies nicht erkennbar war, wurden weitergehende Untersuchungen wie die zum Spalt nicht weiter verfolgt.

3.5. Probleme und Ansätze bei der Umsetzung von Beugungsalgorithmen

3.5.1. Vielfach-Beugung und Baumstruktur - *State of the Art*

Ein raumakustisches Simulationsprogramm im hier betrachteten weiteren Sinne (also auch für offene Räume mit wichtigen Abschirmeffekten), das die zeitabhängige Schallfeldberechnung anstrebt und also auf Strahlverfolgung beruht, muss auch das mehrfache Hintereinander-Anwenden, also den rekursiven Aufruf eines Beugungsalgorithmus' erlauben. Das bedeutet eine qualitative und sehr grundlegende Änderung des Programmablaufs: Während Programme bisheriger Prägung sich hauptsächlich mit der Reflexion beschäftigen, wobei die Reflexion an ebenen Flächen, also zweidimensionalen Gebilden stattfindet, und die Suche nach dem nächsten Reflexionspunkt iterativ wiederholt wird, soll sich nun ein Schallteilchen irgendwie „bei Vorbeiflug“ „nahe“ Kanten, nur ein-dimensionalen Gebilden, rekursiv in „neue“ Teilchen aufspalten, die jedes auf die gleiche Weise weiterverfolgt werden (Bild 3.5.1); der Vorbeiflug wird dabei an so genannten „Fähnchen“, an Kanten angesetzten, transparenten Wänden, erfasst, s. Bild 3.5.2a. Ein neu einzuführendes, rekursiv aufzurufendes Beugungs-Modul erfasst zunächst den Vorbeiflugabstand an einer oder, falls nahe genug, an mehreren Kanten und kreierte, gemäß winkel- und streckenabhängigen Beugungsfunktionen, neue Schallteilchen bestimmter Energien, die wie üblich weiter verfolgt werden.

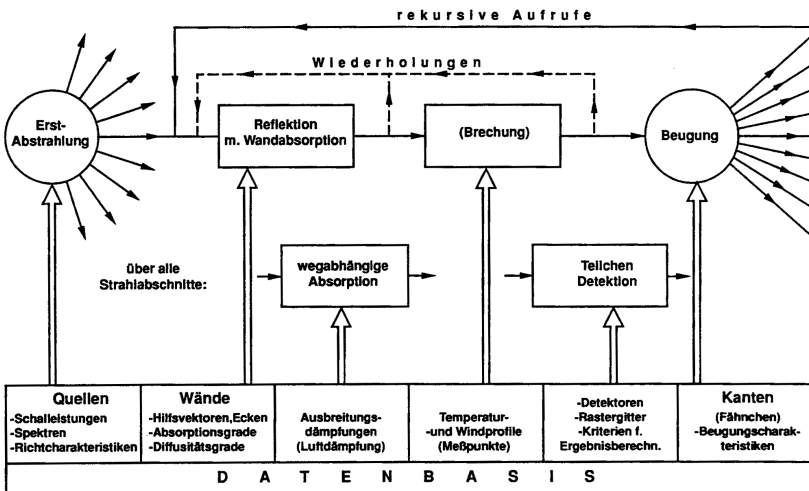
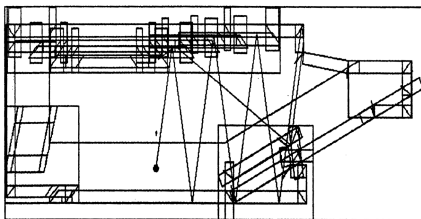


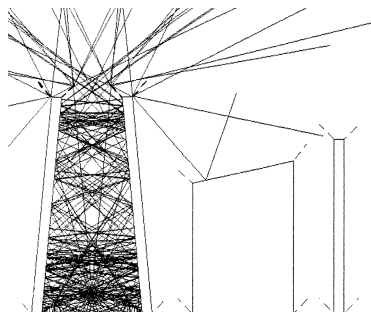
Bild 3.5.1 Schema eines rekursiven Schallteilchen-Simulationsprogramms mit Beugung (aus einem Programmentwurf für die Schallausbreitung von Kraftwerksanlagen /H0/)

Ein Beugungsereignis wirkt also - eine unmittelbar Konsequenz des Huygens'schen Prinzips - wie das Entstehen einer neuen Schallquelle, es entsteht eine Baumstruktur als selbstähnliches Gebilde: An jedem Knotenpunkt beginnt ein Unter-Baum. Die Anzahl der Strahlen nimmt exponentiell zu.



Bilder 3.5.2:

a) Längsschnitt durch einen Testraum mit an 63 Kanten automatisch angesetzten 175 Föhnchen, links Bühne, rechts Publikums-ebene, außen herum Hüllquader /H0/



b) Grafischer Test rekursiver Strahlverfolgung mit zahlreichen Reflexionen und Beugungen an Föhnchen an einem 2-dim. Kraftwerksmodell: links der Kühlturm, darin die Quelle /H0/

In der Literatur wurde dieses Problem merkwürdigerweise nur selten aufgegriffen. Mit Mehrfachbeugung – wie selbstverständlich in Kombination mit einem rekursiv angewendeten Spiegelquellenverfahren – beschäftigen sich zwar Walerian /A5-8/ und Jaroch /A3/, aber nur bis zu niedriger Ordnung; das algorithmische bzw. Rechenzeit-Problem wird daraus nicht deutlich. Gute Chancen auf geringe Rechenzeiten auch bei höheren Ordnungen kann dieser Ansatz nur haben, wenn viele Kombinationen durch hohe Absorption oder, effektiver, durch „Entkommen in den Himmel“ als dritte Dimension „von selbst aussterben“, also bei quasi zweidimensionaler Schallausbreitung „im Freien“.

Im „Freien“ dominiert meist der Verkehrslärm von Straßen, welche gewöhnlich durch Linienquellen angenähert werden. Demnach gibt es unendlich viel mehr Quellpunkte als Empfangspunkte. Nahe liegend ist hier deshalb inverse Strahlverfolgung von den Empfangspunkten zu den Sendelinien, jedoch nicht mit linienförmigen, sondern Fächer-Strahlen, konsequenterweise mit rekursiver Aufspaltung (s. z.B. Bild 4.2.13.). Diese werden jedoch nur in der zweidimensionalen Grundebene verfolgt, dabei an den (meist senkrechten) Gebäudewänden partiell reflektiert, partiell darüber hinweg gebeugt (so als ob sie partiell „hindurchtunneln“ /A2,A4/. Die einzige Arbeit, die sich mit einer Kombination von Schallteilchenverfolgung mit Beugung nahe Kanten beschäftigt, ist die von Benedetto und Spagnolo /A1/ – jedoch ohne, dass das Verfahren zur Erfassung der Strahlen nahe Kanten und die Problematik der Rekursivität und Rechenzeit transparent wird.

Vorversuchsergebnisse an einem zweidimensionalen Beugungstestprogramm (Bild 3.5.2b) zeigten – wie zu erwarten – starke Abhängigkeiten der erzeugten Anzahl Strahlen und der Rechenzeit von den Föhnchenflächen, dem erlaubten Verzweigungsgrad der Beugung, sowie natürlich der erlaubten Flugstrecke /H0/. Danach ergäbe sich z.B. selbst bei einer recht schlechten „Raumauflösung“ (schon für den Direkt-schall, erst recht für höhere Reflexionen), bei einem maximal erlaubten Aufspaltungs- bzw. Verzweigungsgrad von 67 (im statistischen Mittel jedoch, bedingt durch Absorption bzw. „Entkommen in den Himmel“ von nur 3.4) und selbst bei Berücksichtigung von Beugungen nur bis zur zweiten Ordnung, sowie einer Zielgenauigkeit

von 1 dB selbst bei heutigen PC mit 3 GHz Taktfrequenz eine Rechenzeit von 14 Stunden⁷; dies ist rund 60 mal länger als ohne Beugung. Bei Rechnung bis zur vierten Beugungsordnung würde die Rechenzeit noch mal auf das 12fache (ca. 7 Tage) ansteigen; bei Rechnungen bis zur zehnten Beugungsordnung auf das 40000-fache, auf ca. 70 Jahre. Zur Anwendung der in den vorigen Abschnitten beschriebenen Beugungsmodelle müsste für eine vernünftige Winkelauflösung der Verzweigungsgrad der Baumstruktur in der Größenordnung von mindestens 100 liegen. Dadurch würde das Rechenzeit-Problem bei höheren Beugungsordnungen noch viel kritischer.

3.5.2. Wie erfasst man einen hinreichend nahen „Vorbeiflug“ an Kanten ?

Kanten werden ja als Grundelemente der Beugung aufgefasst. Sie sind aber nur eindimensionale Gebilde ohne „Wirkungsquerschnitt“. Irgendwie muss also (ideal „dünne“ Strahlen oder Teilchen im Sinn) eine zweidimensionale Struktur angesetzt werden. Dazu wurden drei Möglichkeiten in Erwägung gezogen (s. Bild 3.5.3.). Alle setzen die Generierung von „Kanten“ als eigenständige Objekte der Raumstruktur voraus, s. Kap. 4.2.2.

1.) Definition von etwa **wellenlängen-breiten „Toleranzstreifen“** parallel Kanten als Verbreiterung der Wandecken; Nachteil: „streifende“ Kantenvorbeiflüge werden seltener erfasst als eher senkrechte;

2.) **zylinderförmige Detektoren-
räume rund um die Kanten** als
Achse wären zwar zur räumlichen
Erfassung von Vorbeiflügen bis zu
einem maximalen Abstand die kon-
sequenteste Lösung – aber pro-
grammiertechnisch – man denke nur
an die vielen Fälle des Schnitts mit
anderen Wänden – sehr kompliziert;
der Vorbeiflugabstand ist in diesem
Fall der dichteste Abstand zweier
Geraden im Raum (Strahl und Kan-
te) wie er vektoriell gefunden werden
kann.⁸

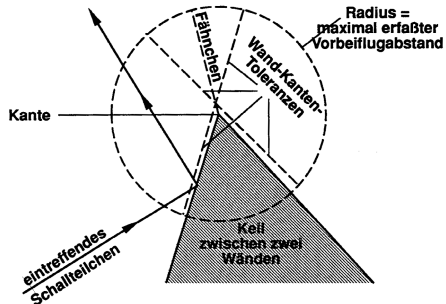


Bild 3.5.3. Drei Möglichkeiten zur Erfassung eines Schallteilchen-Vorbeiflugs an Kanten

Am geeignetsten scheint die

⁷ 18 Tage ergaben sich rechnerisch bzw. durch statistische Abschätzungen über Reflexions- und Beugungswahrscheinlichkeiten bei Rechenzeiteinheiten für die Trefferfindung von 0.1ms, wie sie bei Rechnern mit Taktfrequenz von ca. 100MHz des Jahres 1995 erreicht wurden, entsprechend 30 mal mehr für die im Folgenden genannten Rechenzeiten /H0/.

⁸ dies wird von Schöberl /D8/ genutzt, s. auch Bemerkung in Kap.3.2.

3.) Methode der „Fähnchen“, auf den Winkelhalbierenden zwischen je zwei flankierenden Wänden (vor allem an hineinragenden „Innenkanten“) angesetzte transparente, rechteckige „Wände“, die von Teilchen wie andere Wände getroffen werden können, nur eben mit der Folge der Beugung statt Reflexion. Die Breite dieser Fähnchen entspricht dem maximal zu erfassenden Vorbeiflugabstand, also typischerweise eine Wellenlänge - in Kauf nehmend, dass allzu „streifend“, aber dicht vorbeifliegende Teilchen nicht erfasst werden; „Vorbeiflugabstand“, s. Bild 3.4.1., ist dabei nicht der dichteste Abstand Einfallsgerade-Beugungskante, sondern die Strecke gemessen auf der Winkelhalbierenden; der Vorteil dieser Methode liegt vor allem in der Konsistenz mit der bisherigen Datenstruktur polygonaler Wände, die für die „Fähnchen“ als zusätzliche „Wände“ einfach übernommen werden kann.

3.5.3. Probleme mit der Beugungserfassung

Die „Fähnchen-Anhänge-Technik“ ist, obwohl schon recht aufwändig, offensichtlich unvollständig, ja auch widersprüchlich, was die Erfassung von Beugungsfällen angeht. Dies hat, ähnlich wie bei der "klassischen" Abschirmrechnung (Kap. 3.1.4.), zu tun mit den Problemen der Mehrfachbeugung. Diese kann man aufteilen in

1. Probleme der "gleichzeitigen" Beugung eines Schallstrahls an sinngemäß **nebeneinander** liegenden Kanten und der dreidimensionalen Verallgemeinerung bzw. Findung „passender“ Beugungskoeffizienten und Ablenkfunktionen;

2. mehr algorithmische bzw. die Rechenzeit betreffende Probleme der **hintereinander** auftretenden Beugung und der daraus resultierenden Baumstruktur.

Kriterium für das Zusammenfassen oder Nicht-Zusammenfassen von Beugungen sollte der Abstand potentieller Beugungspunkte in Strahlrichtung sein: liegen diese weiter als größenordnungsmäßig eine Wellenlänge (oder eine Kohärenzlänge) auseinander, so wird mehrfach hintereinander erfolgende und voneinander unabhängige Beugung angenommen. Diese Schematisierung ist, im Bild der Strahlen gedacht, konsequent, bei Betrachtung eines Wellenfeldes aber fragwürdig.

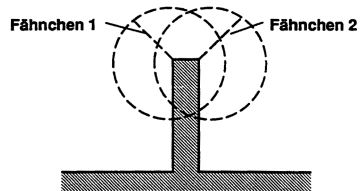
Zu 1.) Kriterien für die gegenseitige Nähe von Kanten / Zusammenfassen naher Kantenbereiche / Bilden von Fähnchenkonglomeraten

Nach geometrischer Prüfung (in einem Vorprogramm zur Generierung der sekundären Raumdaten) könnten Fähnchen, die einander nahe sind, zu Gruppen zusammengefasst werden, so, dass, bei Vorbeiflug nahe **einer** Kante, Verweise auf nahe Fähnchen (die möglicherweise erst später vom Strahl gestreift würden) abgefragt werden können. Die Bilder 3.5.4a-d zeigen jedoch, dass der gegenseitige Schnitt der Fähnchen nicht hinreichend ist zur Prüfung der Nähe von Kanten. Denn eigentlich müssten **alle** Kanten als nahe genug gelten mit einem gegenseitigen Abstand von weniger als etwa einer Wellenlänge.

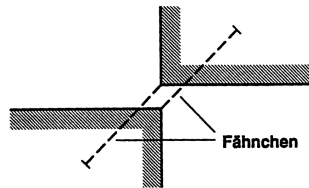
Die korrekte, aber komplizierte Methode zur Prüfung der gegenseitigen Nähe von Kanten besteht darin, den gegenseitigen Schnitt von um die Kanten gelegten Zylindern geeigneten Radius' zu prüfen. Damit wären Problemfälle behoben, wie sie in Bild 3.5.4a dargestellt sind, nicht aber andere Fälle, bei denen sich eine Spalteigenenschaft (effektiv doppelter Breite), mit einer eigentlich gesondert zu berechnenden Abschirmwirkung ergibt (Bilder b und c). An dreidimensionalen, inneren Ecken (s. Bild 3.5.4d) überlappen sich dagegen paarweise 3 Fähnchen, wodurch Mehrfachbeugung bewirkt wird. Unsinnig simulierte Mehrfachbeugung an "Außen-" Ecken zeigte schon Bild 3.5.2b zum Kraftwerksmodell. In Wirklichkeit gibt es jedoch nur einen Beugungseffekt. In „Innenecken“ verzichtet man deshalb besser auf eine Beugungssimulation.

Bilder 3.5.4a-d: Beispiele für Mängel bei der Erfassung von Mehrfach-Beugung durch Fähnchen:

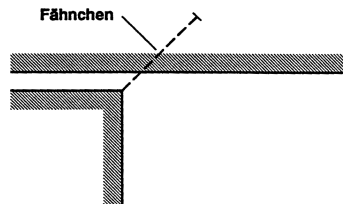
a) Zu viel erfasste Mehrfachbeugung an Außenecken: Zwei nahe, parallele Kanten mit sich nicht schneidenden Fähnchen an einem Wandvorsprung; die Zylinder um die Kanten aber schneiden sich.



b) Zu viel erfasste Mehrfachbeugung an nur einem Spalt: Zwei sich nicht schneidende, aber nahe Fähnchen an gegenüber liegenden Gebäudekanten, die dennoch einen Spalt bilden



c) Nicht erfasste Mehrfachbeugung an einem Spalt: Nur ein Fähnchen, das aber eine Wand von einem gegenüber liegenden Gebäudeteil schneidet, faktisch ein Spalt von doppelter Breite (die Kante wäre an der gegenüberliegenden Wand spiegelbar)



d) Zu viel erfasste Mehrfachbeugung in einer Innenecke: Innere Ecke mit Fähnchen: bei einem derart auftreffenden Schallstrahl, der nach Reflexion das Fähnchen ein zweites Mal kreuzt (bzw. kurz danach das an der Wand gespiegelte Fähnchen) würde kurz hintereinander scheinbar zweifache (oder in spitzen Winkeln gar mehrfache) Beugung auftreten (die gebeugten Strahlen sind hier zur Übersicht nicht eingezeichnet)

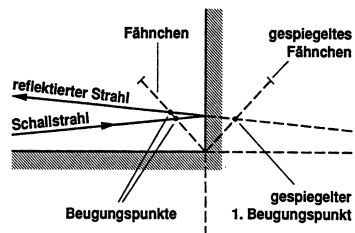
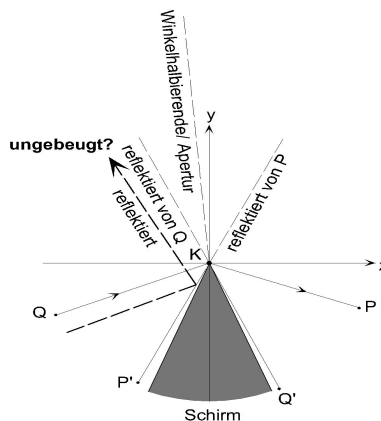


Bild 3.5.5. Abschirmender „Keil“ aus zwei reflektierenden flankierenden Wänden mit Quelle Q und Empfangspunkt P und jeweils an dieserseits gelegenen Wänden gespiegelten Punkten Q' und P', dazwischen - wie ein „Fähnchen“ - die „Aperturebene“ mit der Beugungskante K, hier auf der Winkelhalbierenden zwischen den Richtungen von K zu Q und zu P; eingezeichnet auch die Grenzen der geometrisch reflektierten Felder von Q' bzw. P'.



Fett gestrichelt: reflektierter Strahl, der das Fähnchen nie erreicht, also fälschlicherweise auch nie gebeugt wird.

Zu viel oder zu wenig erfasste Beugung tritt offenbar meist in Kombination mit Reflexion auf. Nun sind die in den vorigen Abschnitten beschriebenen Schallteilchen-Beugungsmodelle („Module **nur** für Beugung“) ja darauf angelegt, erst im Moment des Auftreffens von Teilchen auf Wänden mit einer Spiegelquellenbildung an den flankierenden Wänden kombiniert zu werden (Bild 3.5.5.). Konsequenterweise müssten deshalb die Ablenkfunktionen auf alle 4 Kombinationen von direkten und gespiegelten Quell- und Empfangspunkten (Q-K-P, Q'-K-P, Q-K-P', Q'-K-P') angewendet werden. Das Problem ist aber, dass die zugehörigen realen Fälle aufeinander folgender Beugung und Reflexion mit einem Fähnchen-Algorithmus gar nicht alle erfasst werden (nur flacher auf die linke Wand in Bild 3.5.5. eintreffende Strahlen werden so flach reflektiert, dass sie noch das Fähnchen oben kreuzen, also gebeugt werden.) Also könnte das gebeugt-reflektierte Schallfeld rund um reflektierende Keilformen so nie richtig berechnet werden.

Mit der Methode der Fähnchen werden auch nicht jene Teilchen erfasst, die eine Wandfläche nahe ihres Randbereichs treffen und dort reflektiert werden (s. Bild 3.5.5.); nach dem Babinet'schen Prinzip müssten aber auch jene Randstrahlen gebeugt werden. Schließlich werden sich Fähnchen (bzw. die Zylinder um sie), besonders bei langen Wellenlängen, fast *alle* schneiden, „Fähnchenkonglomerate“ bilden; das wäre aber vollkommen unsinnig, da es für einen Schallstrahl, der ein Fähnchen am einen Ende trifft, nicht relevant ist, ob dasselbe - unter Umständen sehr lange Fähnchen - an seinem anderen Ende noch ein anderes Fähnchen schneidet.

3.5.4. Konsequenz aus den Widersprüchen mit Fähnchen: Konvexzerlegung

Wenn man bedenkt, dass nur die nach „Innen“ ragenden, Räume „einschnürenden“, also „schatten-bildenden“ Kanten wichtig sind, liegt es nahe, den Gesamttraum in konvexe Teilräume zu zerlegen. Auf den dazu nötigen einzuziehenden „transparenten Trennwänden“ könnte dann Beugung stattfinden, sie könnten also die Fähnchen ersetzen und die Rechenzeit senken helfen. Die Probleme der Beugungserfassung und der optimalen Fähnchenbreite erledigen sich praktisch von selbst. Diese Methode ist die Grundlage für die in Kap. 4.2. dargestellte Pyramidenstrahlen-Verfolgung.

3.5.5. Vergleich des „Stuttgarter“ und des „Trondheimer“ Schallteilchenbeugungsmodells

Gemeinsam ist beiden offenbar :

- Hypothese: ein energetisches Modell, damit zusammenhängend das
- Ziel „Baukastenlösung“: weitere Beugungen sowie Reflexionen an flankierenden Wänden sind separat zu behandeln;
- halbebene Schirme mit Kanten als Grundelemente;
- zum Erhalt der „richtigen“ Beugungscharakteristik sind viele kantennahe Teilchentreffer nötig; Größenordnung 100 Teilchen pro Kante.

	„Stuttgarter“ Modell	„Trondheimer“ Modell
Methodik bzw. Ziel:	„Heuristisch“, intuitiv	analytisch
Postulate:	Wechselwirkung mit Kante addierbare „Kantenbeugungswirkungen“	kein Rückeinfluß aufs Schallfeld(Kirchhoff/Fresnel)
Ideen:	„Teilchen sieht Spalt“ (Unschärferelation)	Differenzielle Betrachtung : (Kantenverschiebe-Idee)
Testergebnisse am einfachen Schirm:	gut	sehr gut
am Spalt	sehr gut	Widerspruch
Reziprozität erfüllt ?	nicht geprüft, wahrscheinlich implizit	Ja
modularisierbar ? d.h. erweiterbar	Ja	Nein
auf beliebige Aperturen bzw. „Nebeneinanderbeugung“	Ansatz, vermutlich besser	vermutlich nicht
Kombinationsmöglichkeit mit Reflexionen bzw. Spiegelquellenmethode	möglich aber „technisch“ (durch Fähhchenerfassung)	möglich nicht sicher gewährleistet.

Ein entscheidender Nachteil des „Trondheimer“ Beugungsmodells im Vergleich zum „Stuttgarter“ ist (s. die Diskussion in Abschn. 3.4.10) die fehlende Zerlegbarkeit in Module.

Bei „**Nebeneinander-Beugung**“ versagt das „Trondheimer“ Modell schon beim Spalt. Dass energetische Modelle bei offensichtlichen Interferenzeffekten versagen, ist an sich auch klar. Es gibt (s. z.B. Spaltbildung in Bild 3.5.4c) deutliche Hinweise darauf, dass nur durch wellentheoretisch, also durch phasenrichtige statt durch energetische, oktavbandgemittelte Rechnung, der wahre Effekt einer Beugung nahe gleichzeitig mehrerer Kanten oder Flanken berechnet werden kann. Das Postulat des „Stuttgarter Modells“ einer überlagerbaren Kantenbeugungswirkung und seine – sicher nicht zufällig - genauen Ergebnisse auch beim Spalt erscheinen trotz mangelhafter Herleitung überzeugender.

Die **Problematik der Kurz-Nacheinander-Beugung** ist für beide Modelle noch nicht untersucht. Als Maß für Nebeneinander- oder Nacheinander-Beugung könnte die Kohärenzlänge dienen; es ist jedoch nicht klar, wo dann der Beugungspunkt sein soll. Bis auf Weiteres soll Unabhängigkeit angenommen werden.

Die mangelnde mathematische Herleitung des Stuttgarter Modells ist unbefriedigend, andererseits ist die physikalische Herleitung aus der Idee der Unschärferelation plausibel; die sehr genaue Übereinstimmung in vielen Fällen kann wohl kaum Zufall sein. Das „Trondheimer“ weist Widersprüche auf. Deshalb erscheint das ältere „Stuttgarter“ Beugungsmodell gegenüber dem „Trondheimer“ wieder attraktiver.

3.5.6. Ein grundsätzliches Problem: die Frequenzabhängigkeit.

Bisher war die stillschweigende Annahme, dass die Strahlverfolgung und –Beugung optimal gültig ist für ein bestimmtes - vom Benutzer vorzugebendes - relativ enges Frequenzband, z.B. ein Oktavband. Falls es für einen breiten Gesamtfrequenzbereich gültig sein soll, z.B. für die 8 Oktavbänder von 32 Hz bis 4 kHz, bestünde die einfachste und immer anwendbare Lösung darin, die Gesamtsimulation mit veränderten akustischen Parametern wie z.B. Absorptionsgraden zu wiederholen. Zu einem solch breiten Frequenzband gehört aber auch eine erhebliche Bandbreite der Wellenlängen, im genannten Beispiel ca. von 10 cm bis 10 m, also eine Variation um mehr als 100:1. Bei einer Beugungssimulation der beschriebenen Art, betrifft das unmittelbar die Kantennahbereiche, also die Fähnchenbreiten. Nun sollte aus Effizienzgründen natürlich vermieden werden, die gesamte Simulation zu wiederholen. Jedes Teilchen sollte deshalb besser die Energien aller interessierenden Frequenzbänder tragen. Wählt man die Fähnchenbreiten für hohe Frequenzen (z.B. für 4kHz, entspr. $\lambda \approx 8\text{cm}$) gerade breit genug, so ist die Erfassung der tief frequenten Anteile (z.B. für 32Hz, entspr. $\lambda \approx 10\text{m}$) nicht ausreichend. Im umgekehrten Fall müssten die Fähnchenbreiten derartig groß sein, dass ständig Mehrfachbeugungen - mit kaum schätzbaren Beugungskoeffizienten - zu vollziehen wären. Außerdem würden die freien Wegstrecken zwischen aufeinander folgenden Beugungen so kurz werden, dass die Teilchenanzahl noch schneller als ohnehin ansteigen würde, und damit auch die Rechenzeit. Derart breite Fähnchen zu installieren ist offensichtlich Unsinn.

Die Diskussion zeigt: Bei zu tiefen Frequenzen sollte zu ganz anderen numerischen Methoden z.B. zur Boundary-Elemente-Methode übergegangen werden. Fragen wären dann aber:

- Unterhalb welcher Wellenlänge ?
- Wie könnten die vorgeschlagenen Ray-Tracing- mit den Boundary- bzw. wellentheoretisch basierten Ansätzen kombiniert werden ?

Als Kompromiss könnte zwar die Fähnchenbreite an der Wellenlänge eines mittleren, am wichtigsten erscheinenden Frequenzbandes, z.B. 1 kHz orientiert werden. Die Beugungskoeffizienten könnten dann für alle Frequenzbänder gleichzeitig berechnet werden. Die Folge ist allerdings, dass z.B. in der Flugrichtung stark gebeugte Teilchen hoher Frequenzbänder sehr geringe Schallenergien tragen – ein Überaufwand; andererseits müssten Defizite bei der Erfassung tiefer Frequenzen in Kauf genommen werden. Dennoch soll dieser Ansatz im Folgenden propagiert werden. So wird von der Frequenzabhängigkeit im Folgenden nicht mehr explizit die Rede sein.

3.5.7. Lösungsansätze zur Verhinderung der exponentiellen Strahlenvermehrung

Beugungssimulation mit Strahlen ist unvermeidbar rekursiv. Mit rekursiven Aufspaltungen steigt demnach auch die Rechenzeit exponentiell mit der Beugungsordnung. Und Schallteilchen entsprechend hergeleiteter Ablenkungswahrscheinlichkeitsdichten tatsächlich nur abzulenken statt in viele neue aufzuspalten ist, wie schon argumentiert, nur eine Scheinlösung, denn man müsste dann, um letztlich bei der Immission gleich viele Teilchen und also gleiche Genauigkeit zu erhalten, entsprechend mehr schon von Anfang an auf die Fähnchen lenken („Baum ohne Unteräste, aber mit gleich vielen Blättern“). Dies wäre ineffizient, weil die Teilchen über weite Strecken fast die gleichen Wege zu verfolgen wären. Damit wäre der Rechenaufwand zur Verfolgung sogar noch größer.

Selbst wenn also die Beugungsmodelle exakt wären, und es keine der o.g. Widersprüche gäbe, würde doch ein darauf basierendes Computerprogramm schlicht nie fertig werden.

Auch die in Abschnitt 2.2.3 angedeuteten, auf Raumunterteilungen basierenden Rechenzeitverkürzungsmethoden versprechen dagegen nur wenig Abhilfe. Am einfachsten wäre eine Beschränkung der maximalen Beugungsordnung durch den Benutzer oder das Aufstellen eines Energie-Abbruchkriteriums. Bei der Berechnung der Schallimmission in "Schattenzonen" (in die Schall nur durch Beugung gelangt) könnte dann aber (wenn man etwa das Energieminimum des Teilchens aus der gemittelten immittierten Schallenergie mehrerer bislang schon berechneter Empfangsgebiete ableitet) die Teilchenverfolgung zu früh abgebrochen sein. Ein einfaches „Kappen des Baumes“ nach einer bestimmten Reflexions- oder Beugungsordnung oder je nach Energie geht also im Allgemeinen nicht. Auch ein „Ausprobieren“ einer nötigen Reflexionsordnung mit der Spekulation auf Konvergenz etwa im Stile einer geometrischen Reihe ist abwegig, denn die Folge der so berechneten immittierten Schallintensitäten in einzelne Gebiete wäre allenfalls sehr grob eine geometrische Folge, sie ist viel zufälliger: Während für einen Ort z.B. die Berücksichtigung einer ersten Beugungsordnung ausgereicht haben könnte, wären an anderen Orten eventuell Immissionen höherer Ordnung sogar energiereicher gewesen.

Auch das "Baumwachstum" durch einen mit steigender Beugungsordnung abnehmenden Verzweigungsgrad zu begrenzen (etwa weil bei höheren Ordnungen es nicht mehr auf die genaue Verteilung ankäme) wird nicht viel helfen. Ähnliches gilt für die Idee eines „Vor- Scannens“, d.h. nur auf „kritische Strukturen“, wie die Fähnchen gezielt, d.h. etwas dichter Teilchen abzuschießen, denn ausgerechnet dort finden ja die Strahlenvermehrungen statt. Auch hierbei wird keine Verbesserung zu erwarten sein, die gegen ein exponentielles Wachstum helfe.

Gefordert ist offenbar eine qualitativ neue Methode. Die Idee dazu lautet:

Wiedervereinigung von Teilchen !

Nur damit würde der Baum nicht weiter wachsen, die Gesamtzahl aller „gleichzeitig“ umher fliegender Teilchen asymptotisch einem Grenzwert zustreben. Das ist bereits die Grundidee dieser Dissertation.

Was vereinigt werden soll, muss jedoch auch gleichzeitig existieren. Die Ausführung dieser Idee setzt also – ein gravierender Eingriff in die bisherige Technik - eine „Synchronisation“ der gesamten Teilchensimulation voraus, so, dass ungefähr gleich weit geflogene Teilchen existieren, von denen jeweils viele auch noch ungefähr am gleichen Ort und in die gleiche Richtung fliegen. Diese „Koinzidenz-Wahrscheinlichkeit“ ist jedoch - wie statistische Abschätzungen ergaben - extrem gering, genauer: Die Rechenzeit zur Überprüfung aller gleichzeitig umherfliegender Teilchen auf „ähnlich“ fliegende ist unverhältnismäßig hoch, der Rechenzeitgewinn durch Vereinigung wäre demgegenüber im Mittel weit geringer.

So lag der radikale Schluss nahe, dass Methoden der Verfolgung ideal dünner Strahlen oder Teilchen grundsätzlich ungeeignet sind, mit Beugung kombiniert zu werden.

Das bedeutete die völlige Abkehr vom Teilchenverfahren und die Anwendung der Pyramidenstrahlmethode, also Verfolgung räumlich ausgedehnter Strahlen mit Polygonquerschnitt. Diese spalten sich zwar ebenso auf, sind aber leichter als Teilchen zu rekombinieren, da ihre Raumwinkelbereiche bereits fest stehen. Passend dazu ist die sowohl zur Beugungserfassung als auch aus Rechenzeitgründen günstige Zerlegung des Raumes in konvexe Teilräume durch transparente Trennwände, darauf die Einrichtung schmaler Zonen gewisser Wechselwirkung mit Kanten, an denen Pyramidenstrahlen gebeugt würden. Dann kann konsequent das Trondheimer Beugungsmodell, oder noch einfacher, das Stuttgarter Beugungsmodell angewendet werden. Dies sind bereits wesentliche Lösungsideen dieser Dissertation, die in Kap. 4. beschrieben werden.

4. Die Methode quantisierter Pyramidenstrahlen

4.1. Entwicklung der Ideen zur Überwindung der Baumstruktur – warum Pyramidenstrahlen und warum Quantisierung?

Drei Grundalgorithmen der geometrischen Raumakustik zur Berechnung von Energieverteilungen (Kap. 2.1-3) sind gründlich untersucht, insbesondere Möglichkeiten und Verhalten bei Einbau von Streuungen und Beugungen (Kap. 2.6 und 3.5.) Dabei müssten jedesmal Strahlen in eine Anzahl neuer aufgeteilt werden. Nach rekursiver Anwendung dieses Prinzips der Strahlverzweigung würden Anzahl zu verfolgender Strahlen und Rechenzeit exponentiell steigen - das Problem der Baumstruktur. Ein einfaches „Kappen des Baumes“ nach einer bestimmten Reflexions- oder Beugungsordnung ist im Allgemeinen unmöglich. Nichtaufspaltung und Zufallsentscheid über die neue Richtung ist auch nur eine Scheinlösung, da sie zum Ausgleich eine erhöhte Anfangsstrahlenzahl nötig macht. Methoden zur Rechenzeitverkürzung durch Raumunterteilungen helfen nur, den Einfluss der Raumkomplexität zu drücken (wenn auch z.T. drastisch). Gegen das Exponentialgesetz der Baumstruktur, das exponentielle Wachsen der Rechenzeit mit der Anzahl Reflexionen oder Streuungen aber kann keines dieser Mittel ankommen. So wurde klar, dass einem exponentiellen Anwachsen der Rechenzeit bei Einführung von Beugung ein qualitativ neuer Algorithmus entgegengesetzt werden muss. Dieser sollte den Eigenheiten einzelner Reflexionen und Streuungen als auch pauschal des Diffusionsprozesses bzw. Nachhalls in Räumen Rechnung tragen, die Vorteile der bisher untersuchten Algorithmen vereinen, die Nachteile vermeiden. Ziel war: Es sollte **ein** Algorithmus sein, nicht, wie bisher, „Flickwerk“ aus verschiedenen für bestimmte Teilbereiche der Impulsantwort. In diesem Abschnitt werden zunächst nur die Ideen zur Lösung beschrieben.

4.1.1. Resumé aus den bisherigen Algorithmen, Begründung der Pyramidenstrahlen

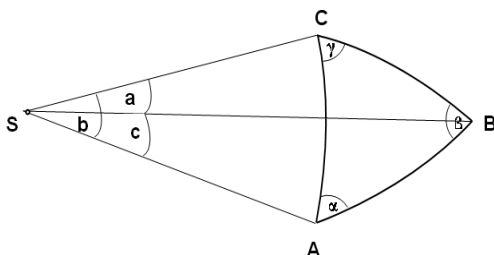
Was sind denn die Stärken und Schwächen der drei Grundalgorithmen und was kann man daraus ableiten ?

Der Vorteil der „klassischen“ **Spiegelschallquellenmethode (SSQM)** gegenüber *ray tracing* ist ihre (geometrische) Exaktheit. Ihr Nachteil aber ist ihre Ineffizienz, die darin begründet ist, dass so viele konstruierte SSQ unsichtbar sind; selbst von einem bestimmten Platz aus unsichtbare SSQ einer bestimmten Ordnung können Abkömmlinge (nächst höherer Ordnung) haben, die vom selben Ort aus wieder sichtbar sind. Dieses **indirekte** Verfahren - mit der sich bildenden Baumstruktur der SSQ-Erzeugung und dem Exponentialgesetz - erwies sich ja als ganz offensichtlich unsinnig bei höheren Ordnungen von Reflexionen - ganz zu schweigen von Beugungen. Will man die geometrische Exaktheit der SSQM nutzen, ihre Ineffizienz aber vermeiden, so führt dies konsequent zur Idee, Pyramidenstrahlen zu verfolgen.

Pyramidenstrahlen sind (wie in Kap. 2.1. bereits erwähnt, aber erst in Abschn.4.2. näher beschrieben werden soll) nichts anderes als „Spiegelquellen mit eingebauten Sichtbarkeitsgrenzen“, und Pyramidenstrahlen-Verfolgung ist nichts anderes als eine effiziente Art der SSQM. Die Pyramidenform kommt dabei ganz einfach zustande aus einem Quellpunkt (ursprünglich der eigentlichen Schallquelle, später den Spiegelquellen) als Spitze und den angestrahlten „Wänden“ als polygonaler „Grundfläche“ (ursprünglich den ganzen Wänden, später nur getroffenen Teilpolygone dar-

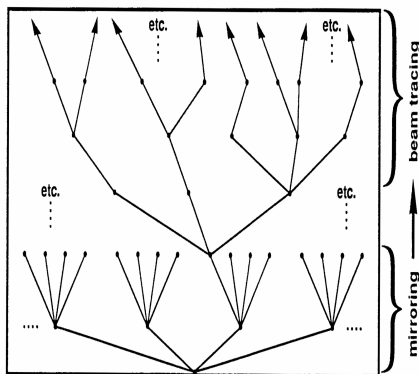
aus). Ein Pyramidenstrahl ist definiert durch seine Seiten-"Wände", die aufgespannt werden durch dazwischen liegende Kanten-Vektoren, s. Bild 4.1.1. Diese können auf den Betrag 1 normiert werden, denn es kommt nur auf ihre Richtungen an. Ein Pyramidenstrahl wird (wie alle Strahlen) zunächst einmal als unendlich ausgedehnt vorgestellt; wichtig sind nur seine wohl definierte Form und der dadurch definierte Raumwinkel.

Bild 4.1.1. Pyramidenstrahl, ausgehend von einem Quellpunkt=Spitze **S**, begrenzt durch n (hier 3) Seitenkantenvektoren $\mathbf{v}_i$ normiert auf Betrag 1, rückwärtig abgeschnitten durch eine zuletzt getroffene Wandebene; α, β, γ : Winkel in A,B,C, gemessen zwischen den Tangenten an die Großkreise auf einer Kugel um **S**; a, b, c : Winkel an der Spitze, gemessen in den den Pyramidenstrahl begrenzenden 3 Seitenebenen, zwischen je 2 Seitenkanten.



Der Vorteil des Verfolgens von Pyramidenstrahlen ist: Spiegelquellen werden „vorwärts“ erzeugt, denn sie laufen „von selbst“ nur auf möglichen Wegen; die Mehrzahl der bei der klassischen SSQM erzeugten unmöglichen Spiegelquellen wird erst gar nicht erzeugt. Bei der klassischen SSQM (d.h. mit SSQ-Erzeugung und Rückwärts-Abarbeitung) werden dagegen massenweise SSQ erzeugt, die von **keinem** Empfänger aus sichtbar sind. Andererseits werden **alle** SSQ gefunden: denn Pyramidenstrahlen sind ja (im Gegensatz zu Kegeln) „dicht gepackt“. Sie werden zwar rekursiv aufgespalten, aber es würde sich kein Exponentialgesetz mehr ergeben (s. Bild 4.1.2). Durch den wiederholten Beschnitt durch Wände „als Fenster der Sichtbarkeit“ werden die Pyramiden nämlich immer schmäler (s. Bild 4.2.13 in Abschn. 4.2). Die Spiegelung eines Pyr ist schließlich nur noch an einer Wand möglich, der Verzweigungsgrad ("Aufsplittungsgrad der Pyramidenstrahlen") konvergiert also gegen 1; die Pyr-Strahlen würden schließlich so dünn, dass der Algorithmus gegen ein Ray-Tracing-Verfahren konvergiert,

Bild 4.1.2 Degenerierter Baum der Spiegelquellenbildung nach der Methode der Pyramidenstrahlverfolgung: Da die Pyre immer schmäler werden, sinkt der Verzweigungsgrad des Baumes bis auf 1, d.h. es bilden sich lange, unverzweigte Äste; ihre Anzahl wächst nicht mehr mit $K_0^{L_0}$, sondern, pro Ordnung, weit weniger: mit L_0^2 . (K_0 =Anzahl Wände, L_0 =Anzahl Reflexionen.)



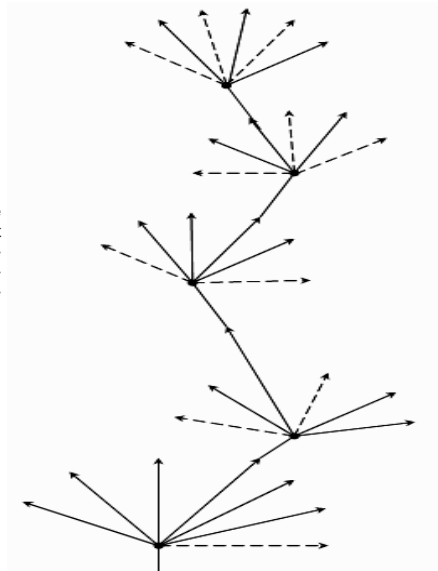
Pyramidenstrahlen versprechen noch weitere Vorteile gegenüber *ray tracing*:

- wenigstens zu Anfang sehr viel weniger Strahlen;
- viele Empfangspunkte können ohne Zusatzaufwand bedient werden, denn es muss nicht jedes mal neu durch *back tracing* auf Sichtbarkeit geprüft werden;
- besser für die Freifeldanwendung, da keine Verschwendung durch zahlreiche „Schüsse in den Himmel“ wie bei der STSM;
- beugende Kanten werden ohne Mehraufwand gefunden;
- keine „Statistik“: nicht viele Wand-treffende oder Kanten-passierende Teilchen notwendig, kein *undersampling* wie bei der STSM durch zu wenige Teilchen hoher Reflexionsordnung; denn die Pyr spalten sich ja auf.

Das erste Motiv für Pyramidenstrahlen ist also aus dem Wunsch abgeleitet, die Spiegelquellenmethode effizient zu machen.

Bei Zulassung von Streuungen, vor allem Beugungen an Kanten, (bei konstantem Aufspaltungsgrad) ergäbe sich aber wieder eine exponentielle Zunahme der Strahlenanzahl, s. Bild 4.1.3.

Bild 4.1.3. Verzweigungsstruktur für die Strahlverfolgung bei der Pyr- Methode mit Streuung: Baum mit abnehmendem Teil-Verzweigungsgrad durch Reflexionen, jedoch im Mittel konstantem Teil-Verzweigungsgrad q durch gleichzeitig auftretende Streuungen (gestrichelt); die Gesamtanzahl Pyre M entwickelt sich zwischen $L_0^3 < M < q^{L_0}$.



Diese exponentielle Zunahme der Strahlenanzahl gilt es, wie schon erkannt, durch Wiedervereinigung zu vermeiden.

Die **Schallteilchenmethode (STSM)** vermeidet zwar aufgrund ihrer Direktheit der Simulation die Berechnung unmöglicher Schallanteile („unsichtbarer Spiegelquellen“). Sie ist bei höheren Reflexionsordnungen wesentlich effizienter als die Spiegelschallquellenmethode (SSQM). Die Rechenzeit für die Strahlverfolgung ist, statt exponentiell steigend, nur proportional der Reflexionsordnung, unter Berücksichtigung einer ausreichenden „Raumauflösung“ proportional ihrer dritten Potenz. Aber sie entspricht dem Gießkannenprinzip: Es werden - ebenfalls „blind“ - erstmal sehr viele Schallteilchen abgeschickt - von denen jedes übrigens (wie ein Pyramidenstrahl, wenn auch in der Form nicht genau festgelegt) einen bestimmten Raumwinkel (nämlich einen Ausschnitt aus einer Kugelwelle) repräsentiert. Ihre Anzahl kann zwar optimiert werden, Nachteil aber ist: es wird dadurch, besonders bei hoher Raumauflösung, Vieles mehrfach gerechnet. So erklärt sich, dass auch die STSM - wenn auch erst bei höheren Reflexionsordnungen als die SSQM - ineffizient wird. Immerhin: sie kann pauschal diffuse Reflexionen simulieren, wenn auch ungenau, nämlich mit Richtungsbestimmung nach dem Zufallsprinzip. Verzichtet man darauf, könnte man relativ leicht, durch rekursive Erweiterung des Strahlverfolgungs- Algorithmus‘ auch Streuungen simulieren - aber nur im Prinzip, nämlich mit einer exponentiell bis in absurde Höhen wachsenden Rechenzeit, d.h. man bekäme nur theoretisch ein näherungsweise richtiges Ergebnis, praktisch nie.

Beide Algorithmen, die SSQM und die STSM, sind ungenau bis falsch wegen Nicht-Berücksichtigung von Beugung und im Übrigen ineffizient, weil sie Schallfelder genauer berechnen als Details hörbar sind. Daraus folgt der Gedanke: Es kann doch nicht effizient sein, eine exponentiell wachsende Anzahl von Energieträgern zu verfolgen - bei sogar abnehmender Gesamtenergie in einem Raum - besonders dann nicht, wenn mit zunehmenden Laufzeiten Details immer weniger wahrnehmbar sind !

Die **Radiosity-(Strahlungsaustausch-) Methode** geht im Vergleich zu den vorgenannten geometrisch-deterministischen Methoden von konträren Voraussetzungen aus: nur total (d.h. Lambert’sch-) diffuse Reflexionen sind erlaubt, Voraussetzung ist: die „Vergangenheit“ der Strahlen muss „vergessen“ sein. Denn nur das Vergessen erlaubt die paarweise Betrachtung von Oberflächenelementen. Die numerische Lösung läuft (bei der stationären Lösung) auf ein lineares Gleichungssystem mit einer $K_0 \cdot K_0$ - Matrix konstanter Formfaktoren hinaus (K_0 =Anzahl Oberflächenelemente). Die Anzahl möglicher Pfade des Energieaustausches - diesen Parameter scheint es sich zu lohnen zu betrachten ! - ist offenbar fest auf K_0^2 begrenzt.

Aber was ist der tiefere Grund, **warum** die Radiosity-Methode so effizient ist ? Warum kommt sie mit einer endlichen Strahlenanzahl aus, obwohl doch scheinbar jeder Einbau von Streuung zu einer Baumstruktur, zu explodierender Strahlenanzahl und Rechenzeit führt ?

Hier fällt die **Analogie zur Bevölkerungsentwicklung** auf: Warum findet (unter Annahme von genau 2 Kindern pro Elternpaar) keine Bevölkerungsexplosion statt - obwohl doch jeder Mensch einen binären Generationenbaum mit einer exponentiell wachsenden Anzahl von Nachkommen hat (2 Kinder, 4 Enkel, usw.) und auch einen ebensolchen Baum von Vorfahren ? Nun, ganz offensichtlich dadurch, dass alle

Menschen irgendwann sterben. In Gesellschaften von Menschen wird mit dem Tode aber auch – von verschiedenen Eltern - etwas vererbt, also wiedervereignet. Die Effizienz der *Radiosity*-Methode liegt also in der Wiedervereignung von Schallenergieverläufen und -Energie-Trägern. Das hieße für die Entwicklung einen neuen effizienten Algorithmus¹: **Wenn man schon bei Streuungen und Beugungen Strahlen aufspalten muss in neue, so müsste man sie zwecks Anzahlbegrenzung auch wiedervereignen bzw. ihre Energien auf neue Energieträger weiter vererben !**

Nun kann man aber mit der *Radiosity*-Methode keine geometrischen Reflexionen behandeln. Wenn man andererseits beim Konzept der Schallteilchen (also räumlich nicht umgedehnten Punkten) bleiben wollte, würde eine Ausführung der Idee der Wiedervereignung bedeuten, ständig nach "ähnlich fliegenden" Schallteilchen zu suchen, d.h. ähnlichen Ortes und ähnlicher Richtung. Nun ändern sich die Flugrichtungen der Teilchen mitten im Raum ja nicht, sondern nur am Rand, bei den Reflexionen. Also müssten die Vergleiche in diesen Momenten stattfinden. Dies setzt zunächst eine rechenzeitlich irgendwie gleichzeitige Verfolgung der Schallteilchen voraus. Zur etwaigen Feststellung „ungefähr gleichen Ortes“ müssten die Wände - ähnlich wie bei *radiosity* - in möglichst kleine Stücke aufgeteilt werden. Bei m gleichzeitig umher fliegenden Teilchen wären dann, pro Reflexionsschritt (in der Annahme dass alle Reflexionen generationenmäßig parallel stattfänden, also die Teilchen auch gleichzeitig aufträfen, was ja nicht stimmt) größenordnungsmäßig m^2 Vergleiche nötig. m liegt bei bisherigen raumakustischen Anwendungen meist in der Größenordnung von 10^4 bis 10^5 . Berücksichtigt man auch die Wahrscheinlichkeit ähnlicher Flug-Richtung, wäre erst bei einer extrem hohen Teilchen-Anzahl die Koinzidenz- und damit Rekombinierbarkeitswahrscheinlichkeit nennenswert. Die Rechenzeit würde explodieren, ehe ein Gewinn sich einstellte. Die Abfrage auch nach "ähnlichen Richtungen" würde im Übrigen bedeuten, dass man den Raumwinkelbereich, den ein Teilchen repräsentiert, berücksichtigen müsste. Will man also die Lösung des Wiedervereinigungsproblems, scheint daraus fast zwangsläufig¹ zu folgen:

Das Modell punktförmiger Schallteilchen muss aufgegeben werden !

Stattdessen sollte man gleich räumlich ausgedehnte Strahlen verwenden, am genauesten Pyramidenstrahlen. Dies ist der zweite Grund für die Wahl dieser Methode.

4.1.2. Begründung der Quantisierung, Einführung der Pyre als neue elementare Energieträger

Die zweite Frage ist: **Wodurch** wird denn bei der *Radiosity*-Methode der Wiedervereinigungseffekt, und damit die Begrenzung der Anzahl der Energieaustauschwege (und der Rechenzeit) so effektiv erreicht ? Offenbar durch Quantisierung, und zwar der Raumbereiche in „*Patches*“. Man kann das so interpretieren, dass diese endlich vielen *patches* als Umverteilplätze der Ladungen von Energieträgern fungieren. Zusammen mit der ersten Erkenntnis vom Vorteil räumlich ausgedehnter Strahlen definierter Raumwinkel bedeutet dies:

¹ Dies ist in dieser Rigorosität ein Irrtum, wie sich später herausstellte. Im Jahre 2000 wurde vom Autor eine Kombinationsverfahren aus *Radiosity*- und Schallteilchenverfahren entwickelt, das alternativ auf dem Sammeln von Teilchen auf kleinen Oberflächen-Stücken beruht, das in der hier vorgelegten Kurzfassung der Dissertation aber nicht näher beschrieben wird /H6/.

Anzahlbegrenzung durch Quantisierung, und zwar sowohl (wie bei der STSM) der Raumwinkel, als auch (wie bei *radiosity*) der Raumboberfläche !

Hier drängt sich eine weitere Analogie auf zur **Logistik, z.B. bei der Eisenbahn**: Auch hier gibt es offenbar endlich viele „Umverteilerplätze“ (z.B. Städte) statt einem ständigen „Unterwegsabgleich“; auch hier werden gewisse Umlade- bzw. Toleranzzeiten festgelegt und im Prinzip eine Matrix entsprechend „quantisierter“ Fahrzeiten zwischen jeweils einer i-ten und j-ten Stadt aufgestellt, um alle Züge optimal auszulasten. So braucht nicht umständlich jedes Mal verglichen zu werden, sondern es kann einsortiert werden. Das Motto lautet also:

Einsortieren in vordefinierte, „quantisierte“ „Elementar-Energie-Träger“ !

Von daher soll ab jetzt, inspiriert von der Quantentheorie (ähnlich wie „Quark“) der Kurzname „**Pyre**“ für einen **Pyramidenstrahl als neuen elementaren Energieträger** eingeführt werden².

Pyre sind demnach zusammengefasst:

- geometrisch Pyramiden, ursprünglich gebildet aus dem Schallquellenpunkt als Spitze und der Wand der ersten Spiegelung als polygonaler „Grundfläche“, definiert durch seine Seiten-„Wände“, die durch die dazwischen liegenden Kanten-Einheitsvektoren aufgespannt werden, später begrenzt durch nur teilweise getroffene Wände, wodurch sich der Querschnitt auf das Schnittpolygon beschränkt;
- falls ungequantelt, **Spiegelquellen mit** durch gespiegelt habende Wände definiertem Raumwinkel, „Fenster“ der Sichtbarkeit;
- **unendlich**³ ausgedehnte Strahlen, begrenzt durch eine Anzahl von n von der Spitze ausgehenden unendlichen Seitenkantenstrahlen, definiert durch auf Länge 1 normierte Richtungsvektoren $\mathbf{v}_i$, s. Bild 4.1.1;
- vorübergehende Träger von Schallenergie, die sich eine Zeit lang in einen gewissen Raumwinkelbereich ausbreiten und (entsprechend der Grundannahme, auch nach Beugung) inkohärent überlagern;
- ähnlich Elementarteilchen, neue Objekte, die, anders als etwa kontinuierlich verfolgte Strahlen, in gewissen Momenten „dynamisch“ erst neu kreiert, quasi parallel abgearbeitet werden und auch wieder „sterben“.

² Freilich ist aber klar, dass hier nicht Inhalte, etwa, wie in der Quantentheorie, Energien quantisiert werden, sondern nur Formen, und zwar die Raumwinkel der Pyramidenstrahlen; auch ist die Notwendigkeit der Quantisierung nicht durch ein grundlegend neues physikalisches Modell, etwa zur Vereinigung des Teilchen- mit dem Wellenmodell, begründet (wie dies wegen des Ziels des Einbaus von Beugung vermutet werden könnte), sondern „nur“ durch die Effizienz einer numerischen Methode. Eine weitere Motivation für die Betrachtung der Pyre als „Elementarteilchen“ entspringt der aus der Analogie zur Bevölkerungsentwicklung entsprungenen Idee, dass Pyre „sterben“ müssen und (im Moment der Wiedervereinigung mit anderen) „neu geboren“ werden, also nur vorübergehend existieren.

³ Wegen des Ausschlusskriteriums der Spiegelquellenmethode „spiegelnde Wand in Vorwärtsrichtung!“ müsste man sich scheinbar eigentlich die unendliche Pyramide auch als rückwärtig begrenzt bzw. als stumpfe Pyramide vorstellen, begrenzt durch die Wandebene der zuletzt durchstrahlen bzw. gespiegelt habenden Wand; dies ist jedoch nicht nötig, da dieses Ausschlusskriterium bei konvexen Räumen entfällt; nach Einführung „transparenter Wände“ (s. Abschnitt 4.2.3.) - kann davon ausgegangen werden, dass der Raum in konvexe Teilräume aufgeteilt ist.

Der Raumwinkel eines Pyrs, eigentlich Kriterium für den Überlappungsgrad bei der Wiedervereinigung, muss (wie sich noch in 4.4. zeigen wird) nicht explizit berechnet werden. Bei ungequantelten Pyr muss auch die Schallleistung eines Pyr nur vorgestellt, nicht tatsächlich als Variable festgehalten werden, denn die Schallleistung pro Raumwinkel der Quelle bleibt ja konstant, und die immittierte Intensität kann allein aus dem aktuellen Laufweg berechnet werden; berücksichtigt wird freilich das Produkt der Reflexionsgrade unterwegs getroffener Wände. Bei gequantelten Pyren muss die Energie allerdings gespeichert werden, da jene Energien aus früheren Pyren beinhalten bzw. Pyre vereinigen, die unterschiedliche „Vorgeschichten“, also Reflexionsfolgen erlitten hatten; ferner bei gestreuten Pyr, da bei diesen die Schallleistung pro Raumwinkel aus der „Schallleistung“ und „Richtwirkung“ beugender Kanten neu definiert wird. Zur Vereinheitlichung werden also allen Pyren auch Energien bzw. Schallleistungen zugeordnet, und zwar mehrfach für verschiedene Frequenzbänder, denn, anders als bei der Schallteilchenverfolgung, sind die Pfade in Pyren zusammengefasster, auch gestreuter Energien verschiedener Frequenz nicht grundsätzlich verschieden, können vorteilhafterweise also gleichzeitig behandelt werden, denn Pyre bilden quasi einen vollständigen Strauß: für jeden Richtungsbereich ist einer vorhanden.

Hieraus resultiert folgender Datensatz des neuen Objektes „Pyr“:

Tab. 4.1.1. Datensatz eines ungequantelten Pyr

- **Spiegelquellpunkt bzw. Pyr- Spitze** als Ortsvektor (in kartesischen Koordinaten)
- **Anzahl n und Seitenkantenrichtungsvektoren** $\mathbf{v}_i$; ($|\mathbf{v}_i| = 1$)
- **Seitenflächen-Normalenvektoren** $\mathbf{N}_{p_i} = \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_{i+1}$ (Vektorprodukt aus benachbarten Kanten)⁴
- **Nummer des aktuellen konvexen Teilraums**⁵
- **Schallenergien bzw. Schallleistungen pro Raumwinkel** für verschiedene Frequenzbänder

Diese (enorm vielen) Datensätze der Pyre müssen jedoch nicht alle explizit gespeichert werden:

beim unquantisierten *pyr tracing* (=effiziente Spiegelquellenbearbeitung) nicht, da die Daten beim rekursiven Abarbeiten als lokale Variable dynamisch erzeugt und so aktuell automatisch zur Verfügung stehen;

beim quantisierten Pyr-Tracing nicht, da die explizite Angabe der Orts- und Kantenvektoren eines Pyrs vollständig ersetzt werden wird durch „Quantenzahlen“, die gleichzeitig Ordnungszahlen der Speicherverwaltung sind und damit Verweise auf

⁴ Schallenergie-Empfang findet statt, wenn ein Empfangspunkt im Pyramidenstrahl liegt (s. 4.2.10); das muss anhand von Abfragen mit den Pyr-Seitenwänden geprüft werden (4.2.8.); um diese häufigen Abfragen im aktuellen Moment schnell zu ermöglichen, sollten auch die Seitenwand-Normalenvektoren des Pyr stets aktualisiert und in seinem Datensatz mit übertragen werden.

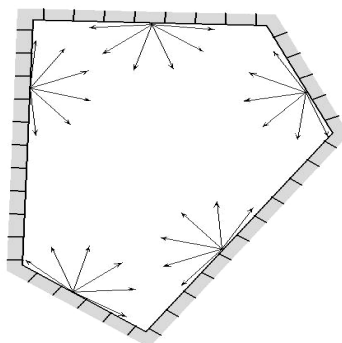
⁵ - um Wandtreffersuche auf aktuelle Wände zu beschränken, Spiegelungen an unmöglichen, z.B. hinter anderen Wänden liegenden auszuschließen; vorausgesetzt wird, dass der Raum aus Effizienzgründen in konvexe Teilräume zerlegt ist (s. Kap. 4.2.).

gerade angepeilte Teilpolygone des Raumes. (Die Pyre werden nämlich am besten durch die angepeilten Polygone des Raumes selbst definiert, s. Kap.4.3., und durch die Ecken angepeilter Polygone sind die Richtungsvektoren $\mathbf{v}_i$ ja eindeutig bestimmbar).

4.1.3. Erweiterung der Radiosity-Methode auf geometrische Reflexionen ? Gründe für eine Kombination mit der Spiegelquellenmethode

Der entscheidende Nachteil der Radiosity-Methode scheint ja zu sein: Man kann sie prinzipiell nicht auf geometrische Reflexionen erweitern. Andererseits ist ihre „Logistik“ bestechend effizient. Könnte man wenigstens dieses Prinzip der Radiosity-Methode nicht doch auf die Berücksichtigung geometrischer Reflexionen und dann gleich auch auf Streuungen und Beugungen, kurz, auf die Berücksichtigung beliebiger Richtcharakteristiken ausdehnen ?

Bild 4.1.4. Zur Erweiterung der Radiosity-Methode um eine Winkelunterteilung: Von jedem Flächenschwerpunkt von K_0 kleinen Oberflächenelementen (Patchen) gingen je J_0 vordefinierte Pyre aus (hier 2-dimensional: Fächerstrahlen): „unterteilte Diffus-Strahler“.



Zunächst nahe liegend scheint da eine zusätzliche, zweite Quantisierung, eben der Raumwinkel im Halbraum vor jedem Patch (s. Bild 4.1.4.). Diese Subunterteilung würde aus der 2-dimensionalen Matrix der Formfaktoren scheinbar eine 4-dimensionale Streumatrix machen („von welchem Patch“, „aus welcher Richtung“, „zu welchem Patch“, „in welche Richtung“). Bei K_0 Wänden und J_0 Raumwinkelsegmenten ergäbe das eine Matrix mit $(K_0 \cdot J_0)^2$ Elementen, Pyre, in die andere Pyre bzw. deren Energien einzusortieren wären. Nun wird, von einem k . Bezugspatch aus gesehen, durch andere Patche eine (wenn auch ungleiche) Raumwinkelteilung bereits vorgegeben; in die Zukunft hinein gedacht, braucht es also keiner weiteren Unterteilung (d.h. „zu welchem Patch“ j und „in welche Richtung“ ist praktisch gleich bedeutend.) Wohl bedarf es aber einer Berücksichtigung der Vorgeschichte, d.h. die zweidimensionale Matrix der Formfaktoren („von welchem zu welchem Patch“) müsste noch vom Eintreffraumwinkel oder vom vorherigen Patch i abhängig gemacht werden. Dann erhielte man insgesamt eine dreidimensionale Matrix. Eine solche Matrix könnte – verführerisch effizient – vorberechnet werden. Der Rechen- und Speicheraufwand wäre aber enorm: bei (für mittlere Wellenlängen) nur einigermaßen genauer Modellierung eines für akustische Zwecke mittelkomplizierten Raumes mit größenordnungsmäßig 100 Wänden, unterteilt im Mittel in $10 \cdot 10$ Patche ergeben sich 10000 Patche, entsprechend viele Einfalls- und Ausfallsrichtungen. Die Matrix hätte also größenordnungsmäßig 10^{12} Elemente. Dies wäre noch kein prinzipielles Problem (entsprechende Rechen- und Speicherkapazitäten könnten ja in naher Zukunft

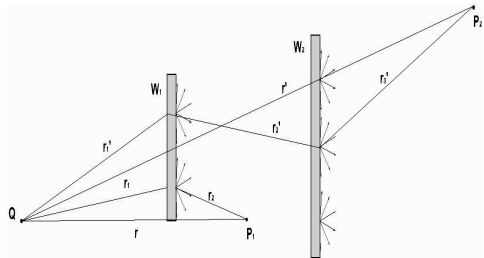
verfügbar sein). Die meisten ihrer Koeffizienten werden Null sein (meist wird nur das Matrixelement für eine einzige Auftreffrichtung gefüllt sein). Dann könnte man sich auch, statt mit einer kompletten Vorberechnung, mit einer Berechnung nur bei Bedarf, während der Iteration behelfen.

Die Großmatrix-Idee muss jedoch (auch falls technisch realisiert, und Strahlen dabei geometrisch reflektiert würden) **grundsätzlich versagen**, da die Laufzeit- bzw. Laufstrecken-Information verloren ginge - das dritte der drei Wiedervereinigungskriterien („ähnlicher Ort, ähnliche Richtung, ähnliche Laufzeit- bzw. -Strecke von der Quelle“).

Mit der Berücksichtigung der Ankunftsrichtung sind eben doch nicht alle relevanten Informationen der „Vergangenheit“ berücksichtigt. (Es ist ein Irrtum zu glauben - s. z.B. /R4/ - mit einer dreidimensionalen Matrix oder Ähnlichem wäre der relevante Teil der „Vorgeschichte“ berücksichtigt, und die *Radiosity* -Methode im Prinzip auf geometrische Reflexionen erweiterbar.) Die Koeffizienten der Matrix müssten nämlich noch die Strahlen-Divergenz; d.h. das Breiten- Werden und damit Verteilen auf eventuell mehr neue Flächenelemente berücksichtigen. Oder die Matrix müsste, etwa um die Kombinationen früher getroffener Wände („Spiegel“) zu berücksichtigen, theoretisch noch weit höher dimensional werden; damit aber wäre, neben dem Speicherplatzproblem, der Vorteil der *Radiosity*- Methode dahin⁶.

Die Laufzeit der Pyre in ihren Datensätzen zu speichern wäre nur scheinbar eine Lösung, da ja verschiedene Pyre, teils geometrisch reflektiert, teils gestreut bzw. deren Energien zu einem neuen vermischt werden. Welche Laufzeit hätte dann der „gemischte Pyr“ ? Damit zusammenhängend ginge auch die Information über die Divergenz der Strahlen verloren. Würde man die Flächenschwerpunkte, wie bei Diffusstrahlern (optisch wie bei „Mattscheiben“) zu Zwischenquellpunkten machen, sodass etwa ein Gesamtlaufweg r in verschiedene Teilstrecken r_1, r_2 , usw. zerlegt würde, entstünde eine völlig falsche Abstandsabhängigkeit der Intensität ($\propto \prod r_i^{-2}$ statt $\propto r^{-2} = (\sum r_i)^{-2}$), s. Bild 4.1.5.

Bild 4.1.5: Strahlungsverhältnisse symbolisch (mit begradigten, an sich reflektierten Strahlen) mit 2 Zwischenwänden W_1 und W_2 : Es entstehen fälschlicherweise neue Sekundärstrahler mit jeweils neuer r^2 -Abhängigkeit statt durchgängiger r^2 -Abhängigkeit der Intensität; Q =Quelle, P_1, P_2 =Empfangspunkte, r_1, r_2, r = Teilabstände und Gesamtabstand bis P_1 ; r_1', r_2', r_3', r' dto. für P_2



Da die ganze Berechnung aus Speicherplatzgründen aber ohnehin iterativ auszuführen wäre, und die eigentlich betrachteten Spiegelquellpunkte ja nicht auf, sondern

⁶ Korany et al. /R10/ stellten kürzlich ein Konzept vor, das im Prinzip die Erweiterung der Radiosity-Methode auf geometrische Reflexionen darstellt, in dem der Strahlungsaustausch auf den zwischen entsprechend gespiegelte Patche ausgedehnt wird –eine nahe liegende Idee. Jedoch funktioniert das, wie zu erwarten, praktisch, d.h. in vernünftiger Rechenzeit, nur bei Beschränkung auf geometrische Reflexionen maximal 2. Ordnung.

hinter den Raumbereichen sitzen, wäre ein solches Verfahren wohl nicht mehr *Radiosity*-Verfahren zu nennen.

Dann spricht man doch besser gleich konsequent von Spiegelquellenpunkten, die dann aber in gequantelten Entfernungen sitzen und Schallenergie in gequantelte Richtungen abgeben, deren Abstrahlwinkelbereiche also eine irgendwie genormte Form haben. Das läuft wieder auf das Modell von Pyramidenstrahlen, aber jetzt quantisierter, hinaus.

Um die vermisste Laufzeitinformation zu erhalten, müsste die Radiosity-Methode also mit der Spiegelschallquellenmethode (SSQM) kombiniert werden.

Quantisiert werden müssen nun also die **Pyre**, und zwar ist zu quantisieren zweierlei:

- **der Raumwinkel** der Pyramidenstrahlen (wodurch es nur endlich viele werden), **und** - da diese ja Spiegelquellen repräsentieren – statt der Raumbereiche
- **das Spiegelraumvolumen**; d.h. für die Quellpunkte der Pyramidenstrahlen wird (in einem bestimmten Entfernungsbereich vom Empfangspunkt) nur eine abzählbar-unendliche Anzahl Orte vorgesehen, die praktisch aber zu einem nur endlichem Speicherplatzbedarf bedeutet (wie in Kap. 4.5. erläutert werden wird).

Das entspricht einer Kombination der Quantisierung des Gesamtstrahlwinkels (wie - bei der Schallteilchenmethode) und des Ortes (wie bei der *Radiosity*-Methode).

Damit sind die wesentlichen Ideen einer neuen Methode dargelegt: Der Methode der Quantisierten Pyramidenstrahlen (Quantized Pyramidal Beam Tracing =QPBT).

Es sind freilich aber noch diverse Probleme zu lösen.

4.1.4. Ideen zur Wiedervereinigung durch Einsortierung , Logistik und Synchronisierung

Die **Wiedervereinigung** geschieht, wie schon erkannt, durch Einsortierung. Hier hieße das: Einsortierung der Pyr-Energien in eine endliche Anzahl räumlich und richtungsmäßig gequantelter, vordefinierter Pyre. „Alte“ Pyre werden in neue "einsortiert", genauer: "vererben" ihre Energie - je nach geometrischen Verhältnissen bei Auftreffen und Reflexion an Wänden und je nach Überlappungsgrad mit anderen Pyren ungefähr gleichen Herkunftsortes im Spiegelquellenraum und vordefinierter Raumwinkelbereiche - weiter, und zwar unter Umständen auf ein und denselben neuen Pyr. Genau darin liegt der Wiedervereinigungseffekt. Dies ist symbolisch in Bild 4.1.6 angedeutet.

„Logistik“, Synchronisierung

Ein universeller Algorithmus scheint allgemein, wie bei *radiosity*, auf eine Art „Energieumverteilungsverfahren unter endlich vielen Zwischenstationen“ hinauszulaufen. Nun werden in der Raumakustik Vorgänge zeitabhängig betrachtet. Um Wiedervereinigungen zu ermöglichen, müssen die zu vereinigenden Objekte gleichzeitig existieren. Es wird deshalb eine wesentliche, qualitative Änderung gegenüber dem klassisch-re-

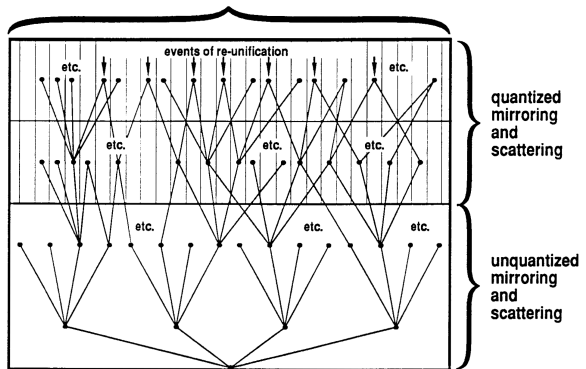
kursiven SSQ-bzw. *pyr-tracing* -Algorithmus sein müssen, dass die Pyre „nahezu“ gleichzeitig verfolgt werden müssen – rechenzeitlich freilich kurz nacheinander.

Bild 4.1.6 Verzweigungsstruktur für die Strahlverfolgung von quantisierten Pyramidenstrahlen (symbolisch, nach rechts aufgetragen etwa Raumwinkel):

unten: unterhalb einer bestimmten Reflexionsordnung **ohne Quantisierung:** Baum mit abnehmendem Verzweigungsgrad durch Reflexionen, jedoch bleibender Verzweigung durch Streuung;

oben: mit Quantisierung: Vermeidung der exponentiellen Zunahme der Anzahl Äste durch Einsortierung in vordefinierte, gequantelte Pyramidenstrahlen

quantization with respect to source position and radiation angles



Wegen der unterschiedlichen Echtzeitspannen bzw. freien Weglängen zwischen Reflexionen kann nämlich nicht Alles völlig gleichzeitig, quasi „generationenweise“ erfolgen, sondern es muss individuell „gewartet“ werden („es sollte nicht von einem Platz aus etwas weiterverteilt werden, bevor nicht alles dort angekommen ist“ - das gleiche „logistische“ Prinzip wie beim iterativen Radiosityverfahren, s. Abschnitt 2.3.). Deshalb muss gelten, wieder im Bild der Bevölkerungsentwicklung gesprochen: Der „älteste“ Pyr vererbt und „stirbt“ zuerst, an anderen Stellen erben schon vorhandene Pyre Energien von verschiedenen früheren, oder werden, falls noch nicht definiert, dort erst „geboren“. Die Strahlverfolgung erfolgt damit nicht mehr rekursiv, sondern iterativ, quasi parallel. Den „ältesten“ Pyr schnell unter einer sehr großen Zahl zu finden - das „Abarbeitungsmanagement“ - ist aber noch ein nicht zu vernachlässigendes algorithmisches Problem, behandelt in Kap. 4.5.

4.1.5. Vorhersage des Gesamtverhaltens von QPBT

Zum Schluss dieser Vorüberlegungen soll schon mal das Gesamtverhalten von QPBT qualitativ vorausgesagt werden, genauer: die Entwicklung der charakteristischen Anzahl M der Energieträger mit steigender Reflexions- oder Beugungsordnung L . Diese wird verglichen mit der bei bisherigen Methoden (s. Bild 4.1.7).

Bei der Schallteilchenmethode gibt es eine konstante, allerdings hohe (zu optimierende) Anzahl Teilchen N_0 .

Bei der klassischen Spiegelmethode steigen die Anzahl der nur konstruierbaren, aber nicht sichtbaren SSQ und damit die Rechenzeit exponentiell mit K_0^L (K_0 = Anzahl Oberflächenelemente).

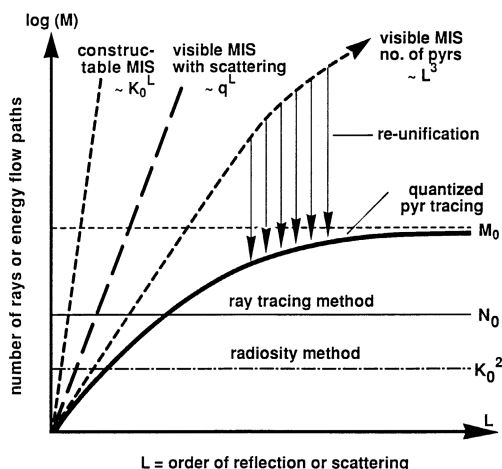
In Form der effizienten, noch unquantisierten *Pyr*-Methode steigen Anzahl zu verfolgender Strahlen M und also auch Rechenzeit schon mal nur noch mäßig mit L^3 .

Die *Radiosity*-Methode begnügt sich dagegen mit einer kleinen, konstant bleibenden Anzahl von K_0^2 Strahlverläufen.

Mit Einführung von Streuung und Aufspaltungsfaktor q explodieren Strahlenanzahl und Rechenzeit der STSM und der SSQM wieder mit q^L .

So beginnt auch zunächst der Anstieg der Anzahl *Pyre* beim QPBT. Bei höheren Reflexionsordnungen aber macht sich der Einfluss des Wiedervereinigungseffekts bemerkbar: die Anzahl Energieträger wird gegen ein Maximum konvergieren, das in der Größenordnung des Produkts aus den Anzahlen vordefinierter, gequantelter Quellpunktpositionen und Raumwinkel der *Pyre* liegt - **und zwar unabhängig davon, ob mit oder ohne Beugung!** Aus QPBT wird ein "Umverteiltergorithmus" - wie bei *Radiosity* - mit einer konstant bleibenden Anzahl von Energieträgern.

Bild 4.1.7. Entwicklung der charakteristischen Anzahl M der Energieträger (logarithmisch dargestellt) mit steigender Reflexions- oder Beugungsordnung L bei QPBT im Vergleich mit bisherigen Methoden



Bevor Methoden zur Quantisierung und zur Wiedervereinigung in den Abschnitten 4.3 und 4.4 vorgestellt werden, sollen nun erstmal die zugrunde liegenden geometrischen Algorithmen der Pyramidenstrahlenmethode erläutert werden.

4.2. Unquantisierte Pyramidenstrahlen-Verfolgung (Beamtracing)

4.2.1. Einführung - warum Konvexzerlegung ?

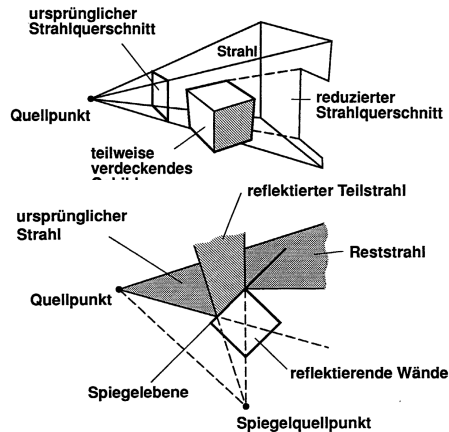
Die Verfolgung räumlich ausgedehnter Strahlen, insbesondere Pyramidenstrahlen (Pyre), ist ungleich komplizierter als die von idealen Strahlen:

- Erstens müssen, statt nur des zentralen, jeweils mehrere der Kantenstrahlen des Pyrs verfolgt werden;
- Zweitens ist das vom Ray-Tracing bekannte Nächste-Wand-Kriterium (längs eines Strahles wird stets die nächste Wand getroffen) bei der Verfolgung ausgedehnter Strahlen verbunden mit einem „vor-/hinter-Vergleich“ von Wänden; und dies ist komplizierter, da eine Wand nur teilweise (z.B. einige ihrer Ecken) „hinter“ einer anderen sein kann; dies hängt zusammen mit
- Drittens, dem Abtrennen von Teilpolygonen, dem Clipping: ein Pyr trifft in der Regel eine Wand nur teilweise, genauer: mit einem Teil seines Querschnitts (nur einige der Kantenstrahlen treffen eine Wand, einige andere eine andere); statt dem vom Ray-Tracing bekannten schon aufwändigen Punkt-in-Polygon-Test müssen beim beam-Tracing noch wesentlich aufwändigere Polygon-Polygon-Schnitt-Probleme gelöst werden; ein Teil eines Pyrs (mit dem Querschnitt eines Teilpolygons seines polygonalen Querschnitts) wird ein Wandpolygon schneiden, ein anderer Teil ein anderes Wandpolygon; die Folge ist, dass ein Teil des Pyrs in eine, ein anderer in eine andere Richtung reflektiert wird, s. Bilder 4.2.1.:

Bild 4.2.1 Clipping von Pyramidenstrahlen (aus /C3/):

a) Einschränkung des (durch ein entferntes Wandpolygon vorgegebenen) Strahlquerschnitts eines Pyr durch einen teilweise verdeckendes Raumobjekt

b) Reflexion (Spiegelung) eines Teilquerschnitts eines Pyr an einem Raumobjekt: es entsteht ein Pyr, d.h. eine Spiegelquelle mit dem Schnittquerschnitt als „Sichtbarkeitsfenster“; der Rest-Pyr (mit Rest-Querschnitt) läuft weiter - und wird durch weitere, unterwegs teilweise getroffene Objekte weiter beschränkt - bis er Null ist. Natürlich können auch mehrere Wände gleichzeitig getroffen werden.



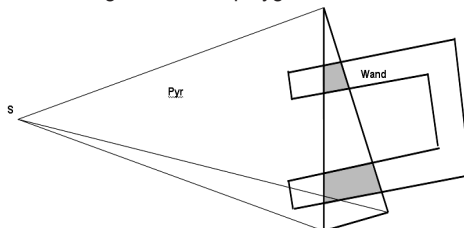
Die Pyrs splitten sich also auf. Daraus wiederum folgt⁷:

- **Viertens: Ein Pyramidenstrahlverfolgungsalgorithmus ist rekursiv.**

⁷ - bei einem konsequent umgesetzten Pyramidenstrahlverfahren; man könnte zwar auch den Mittelstrahl eines Pyrs zum alleinigen Kriterium dafür machen, welche Wand getroffen wird und wohin demnach der **ganze Pyr** reflektiert wird (wie bei Dreieckspyramiden /K8/), aber dann müsste man zum Ausgleich der „Abtastfehler“ so viele schmale Pyre verfolgen, dass der Aufwand auch wieder nicht mehr lohnt; allenfalls beim (wesentlich einfacheren) Verfolgen von Kegelstrahlen mag der Mittelstrahl als Reflexionskriterium genügen /K3/.

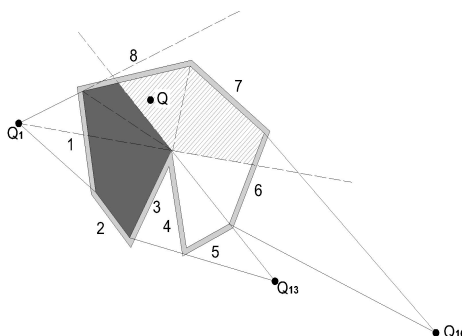
Nun folgt aus dem dritten Problem des Clippings, dass die Wandpolygone konvex sein sollten, ja praktisch sein müssen. Denn andernfalls entstehen beim Polygon-Polygon-Schnitt nicht-zusammenhängende Schnittpolygone, s. Bild 4.2.2.

Bild 4.2.2. Schneiden eines konvexen Pyr mit einem nicht-konvexen Wand-polygon: es entstehen zwei getrennte Schnittpolygone bzw. Pyrs



Bei der Spiegelung und Aufspaltung von Pyr sollten die Raumwinkel der gespiegelten Pyre in der Summe gleich dem des ursprünglichen sein. Dies gälte ohne Zerlegung in konvexe Teilräume im Allgemeinen nicht, wie in Bild 4.2.3. zweidimensional dargestellt wird.

Bild 4.2.3. Nicht-konvexer Raum, eingegrenzt durch einen Vorsprung, gebildet von Wänden 3 und 4 (unten), 2-dimensional dargestellt. Q_1 (links) ist Ursprung eines Pyr (2-dim.: Fächer). Wäre der Raum konvex, müsste die Summe der Winkelbereiche der an den Wänden 2-8 gespiegelten Fächer gleich dem Ursprungswinkelbereich von Fächer 1 sein; so aber ist er größer, da der an Wand 3 gespiegelte Fächer sich teilweise mit dem an Wand 6 gespiegelten überlappt; im Gegenzug existiert Q_{14} nicht, da Wand 4 „von hinten getroffen“.



Der Algorithmus des Polygon-Polygon-Schnitts bei nicht-konvexen Polygonen wäre (ähnlich wie beim Punkt-in-Polygon-Test) ohne Zweifel wesentlich aufwändiger. Dies ist der **erste, algorithmisch begründete, schon fast zwingende Grund für eine Zerlegung des Raumes in konvexe Teilräume**. Zumindest die Raumbereichfläche (Wände) sollte also in konvexe Teilpolygone zerlegt werden. Dann werden auch die Pyr stets von konvexem Querschnitt sein und bleiben. Aber auch der (dreidimensionale) Raum sollte in konvexe Teilräume zerlegt werden. Dies erfordert zusätzlich die Generierung von „Zwischenwänden“. Dann nämlich werden „hineinragende“, die Konvexität verletzende Objekte schnell erkannt, und der Restquerschnitt auf jenen „transparenten Zwischenwänden“ schnell bestimmt, welcher danach im jenseitigen Teilraum weiterverfolgt wird. Beim *ray tracing* wie beim *beam tracing* in konvexen Räumen entfallen 2 der 4 Kriterien der Strahlverfolgung:

beim *ray-Tracing* (s. Kap.2.2.)

- das Kriterium „**von vorne ?**“ und
- der besonders rechenaufwändige Punkt-in-Polygon-Test;

beim *beam tracing* (vergl. Spiegelquellenmethode, Kap. 2.1.):

- das Kriterium „Empfangspunkt **vor** Wand?“ und
- „Hindernis zwischen Reflexionspunkten?“.

Außerdem ist - wie bei jeder Raumunterteilung - die Anzahl der zu prüfenden Wände wesentlich kleiner, mindestens (bei Tetraedern) 4, vermutlich selten höher als 10, im Schnitt (meist Quader) wahrscheinlich nur etwa 6. Der Fall, dass bei Durchtritt durch mehrere Teilräume am Ende doch fast alle ihre Wände erfolglos zu prüfen wären, ist sehr unwahrscheinlich, da meistens nähere Wände, zumindest teilweise getroffen werden. Kritisch zu betrachten ist allerdings Folgendes: Die konvexen Teilpolygone nicht konvexer Wände (s. z.B. die Seitenwand in Bild 4.2.7b) gehören stets zu unterschiedlichen Teilräumen; dazwischen liegt eine transparente Trennwand. Dann erfolgt, nach Durchtritt des Pyrs jenseits dieser Wand ein weiteres Polygon-Polygon-Schnitt-Verfahren. Der Pyr spaltet sich also scheinbar unnötigerweise auf, da seine diesseits und jenseits der transparenten Wand reflektierten Teile sonst in einem Stück hätten reflektiert werden können. Wird dadurch Rechenzeit vergeudet? Nun, die getrennten Pyr-Teile werden dann ja auch in getrennten Teilräumen weiterverfolgt, und das geht doch jeweils wesentlich schneller. Dass mit der Teilung in Teilräume auch der Aufspaltungsgrad der Pyre steigt, dürfte dagegen weniger ins Gewicht fallen. Die Aufspaltung der Pyre wird zudem später durch ihre Quantisierung und Wiedervereinigung überwunden werden. Allein aus o.g. erstem Grund bleibt auch wohl keine Alternative zur Konvexzerlegung. **Rechenzeitgewinn ist also der zweite, algorithmische Vorteil einer Konvexzerlegung.**

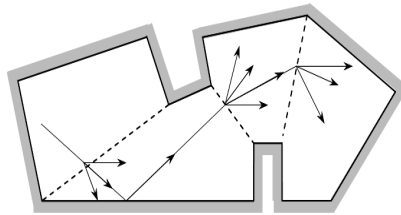
Der dritte Vorteil ist zwar auch algorithmischer Art, aber für ein physikalisch begründetes Ziel: **für den Einbau von Beugung.** Die einzufügenden „transparenten Wände“ gleichen nämlich jenen „Aperturen“, über deren Fläche im Rahmen des Fresnel'schen Beugungsmodells zu integrieren ist, um die Beugungsverteilung im „Schatten“ hinter den „Hindernissen“ zu gewinnen (Bild 4.2.4a). Das willkürliche Ansetzen von „Fähnchen“ an Kanten (s. Kap. 3.5.) um die Beugung „vorbei fliegender“ Schallteilchen zu erfassen, kann also entfallen. Die offene Frage einer „optimalen Fähnchenbreite“ und andere Widersprüche werden umgangen. Handelt es sich z.B. um schmale Aperturen zwischen Teilräumen, käme dies physikalisch einer „Beugung am Schlitz“ nahe; gäbe es bei einer solchen Konstellation wie in Bild 4.2.4b zwei sich überlappende, zufällig aber nicht schneidende Fähnchen, oder, wie in Bild 4.2.4c, nur eine statt zwei beugende Kanten, könnten Fähnchen die physikalische Wirkung des Spalts nicht erzeugen, da sie (bzw. der Computer) von der gegenüberliegenden nahen Wand ja „nichts wissen“; bei einer transparenten Zwischenwand entfällt dagegen dies Problem.

Auch das Problem, wie beugende Kanten, besonders die abschattenden „Innenkanten“, möglichst effektiv entdeckt werden, entfällt. Denn transparente Zwischenwände - und damit die sie begrenzenden „Innenkanten“ - werden ohne Mehraufwand, wie normale Wände erfasst. (Bekanntlich beugen zwar nach dem Babinet'schen Prinzip alle Kanten, auch „äußere“, dies aber ist - als Näherung - weniger wichtig; alle „Außen“-Kanten mit zu erfassen, wäre auch viel zu aufwändig.)

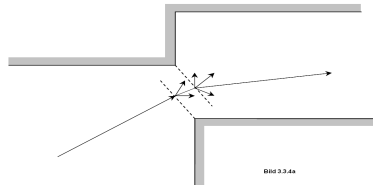
Viertens bringen konvexe Teilräume auch für die Anwendung der Radiosity-Methode Gewinn: „unmögliche“ Verbindungen zwischen Wand-Paaren unterschiedlicher Teilräume werden sofort erkennbar. Schließlich bringen sie auch noch Speicherplatzersparnis, wie in Kap. 4.5. noch erläutert werden wird.

Bilder 4.2.4.

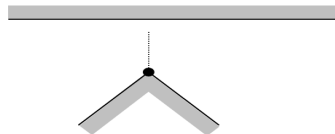
a) Beugung von Schallstrahlen bei Durchtritt durch transparente, Teilräume bildende Wände



b) an „Innenkanten“ eines „eingeschnürten“, konkaven Raumes angesetzte Föhnwände zur Beugungserfassung überlappen sich. Nötige und mögliche Breite ?



c) Innenkante gegenüber naher Wand: wie würde hier ohne „transparente Trennwand“ auf „Beugung am Schlitz“ erkannt ?



4.2.2. Vorausgesetzte Datenstruktur des Raumes, Konventionen und Parameter

Die raumakustischen Simulationsprogrammen (ähnlich optischen *ray-tracing*- oder CAD-Programmen), also auch dem Pyramidenstrahlverfahren zugrunde liegenden Daten lassen sich (wie z.B. in /H0/ oder /S2/ näher beschrieben ist) aufteilen in:

- geometrische Raumdaten;
- physikalische Raumparameter (Absorptions-, Diffusitäts-, oder Streugrade, Luftabsorptionsexponenten, ggf. Streudichten), alle frequenzabhängig, meist in Oktavbändern angegeben ;
- Daten zu Schallquellen (Orte⁸, Schallleistungen), falls nicht, wie meist, Punktschallquellen, auch Koeffizienten zur Richtwirkung;
- Daten zu den (meist zahlreichen, rastermäßig angeordneten) Empfängern⁹,
- numerische Parameter¹⁰;
- Ergebnisdaten, d.h. Pegel und raumakustische Parameter an den Empfangsorten bzw. auf den Empfangsebenen oder ganze Raumimpulsantworten¹¹.

⁸ In der Raumakustik meist nur eine Quelle oder Bezugsquelle, in der Lärmimmissionsprognose, wie auch beim optischen *ray tracing* meist viele, da im Grunde inverses *ray tracing*, von einem Empfänger zu vielen Quellen betrieben wird.

⁹ Beim *beam tracing* Punkte, beim *ray tracing* Detektoren, z.B. Kugeln /D3/, oder Quader /H1/, oft in Punktegittern auf Publikums- oder sonstigen -Ebenen angeordnet. Beim optischen *ray tracing* bzw. *rendering* oft nur ein Empfänger, bei *virtual reality* Anwendungen jedoch wandernd.

¹⁰ z.B. optimierte Anzahl Strahlen, maximale Anzahl Reflexionen oder Zielgenauigkeiten /H3/.

Erinnert sei an die Arbeitshypothesen:

- die **Raubegrenzungsflächen sollen eben sein**; daraus folgt: sie sind Polygone, durch geradlinige Kanten begrenzt; die Räume sind also Polyeder¹²;
- die Strukturen sollen (Grundannahme der geometrischen Raumakustik) „groß gegen die jeweilige Wellenlänge“ sein; die Detailtreue der Repräsentation müsste dann eigentlich frequenzabhängig sein, orientiert sich aber kompromisshaft an mittleren bis hohen Frequenzen, d.h. etwa 1kHz bzw. 0.3m Wellenlänge; d.h. der Raum ist (im Vergleich zu optischen Anwendungen) recht grob modelliert, seine Oberfläche lässt sich erfahrungsgemäß i.d.R. durch höchstens einige hundert ebene Oberflächenstücken, im folgenden kurz „Wände“ genannt, annähern (für tiefe Frequenzen bzw. große Wellenlängen ist der Raum dann eben zu genau modelliert, für hohe zu grob; entsprechend unterschiedliche „Diffusitätsgrade“ wären anzusetzen);
- grundsätzlich soll die Schallausbreitung in Räumen beliebiger Form simuliert werden; dazu gehören, anders als in der klassischen Raumakustik, auch stark zerklüftete Ausbreitungsräume, Gebäude und „offene Räume“, z.B. Stadtgebiete; diese werden formal durch schall-absorbierende Hüllflächen („Himmel“) zu geschlossenen.

Daraus ergeben sich, hierarchisch gliederbar, folgende Raum-Objekt-Arten:

Raum (Polyeder) - Wände (Polygone) – Ecken (Punkte).

Dies sind die „primären“, d.h. direkt (oder, wie z.B. in CAD-Programmen in benutzerfreundlicher Weise indirekt) vom Anwender einzugebenden Daten; darunter die Punkte (x-,y-,z-Koordinaten) geometrische, die „Wände“ strukturelle:

„Wände“ sind definiert durch die Zuordnung (raumweise gezählter) Punkte als (wandweise gezählte) Ecken, die (Konvention!) von „außen gesehen“ im Uhrzeigersinn eingegeben werden müssen.¹³

¹¹ Eine ziemlich vollständige, über sonstige Veröffentlichungen hinausgehende Darstellung der Gesamt-Daten- und Programmstruktur eines Schallteilchensimulationsprogrammes enthält /H0/.

¹² Dies ist eine scheinbar sehr einschränkende, aber praktische notwendige und fast immer auch erlaubte Vereinfachung; wie durch viele empirische Untersuchungen, d.h. vergleichende numerische Schallfeldberechnungen (u.a. durch den Autor /H1/) als auch mit Einschränkungen theoretisch belegt /G4/, können gekrümmte Oberflächen wie Außenwände von Kreisräumen, sonstige Teilflächen, Kuppeln etc., durch wenige Polygone grob genähert werden (oft genügen 30°-Segmente, s. Bild 2.0); andernfalls entstehen erhebliche Komplikationen, vor allem in der Frage des Verlaufs der begrenzenden Linien und des Punkt-in-Flächen-Tests, sowie im Algorithmus der Strahlverfolgung.

¹³ Ein Quader hat z.B., raumweise gezählt, 8 Eckpunkte (1-8), jedoch 6 Wände zu je 4 Ecken, denn jede Ecke gehört zu 3 Wänden; z.B. Eckfolge Boden =Punkte 1-2-3-4, Vorderwand: 1-5-6-2.

Der eingegebene Polyeder muss lückenlos sein¹⁴. Zur Prüfung müssen die Raumdaten deshalb in einer Vorberechnungsprozedur zunächst einem Konsistenztest unterzogen werden: Prüfung auf ebene Flächen, d.h. ob vierte und weitere Punkte in der durch die ersten drei definierten Ebene, ob jeder Punkt zu drei Wänden gehört u.a. /H0/. Dabei werden als **sekundäre Daten** vor allem die Wandnormalenvektoren **N** aus dem Vektorprodukt aus dem Kantenvektor von der ersten zur zweiten Ecke und dem Kantenvektor von der ersten zur letzten Ecke berechnet, ebenso die Abstände der Wände zum Nullpunkt des Raumkoordinatensystems (wodurch die Wandebenen eindeutig definiert sind), dazu weitere Orthonormalen zur Transformation der Punkt-Koordinaten in zweidimensionale Koordinatensysteme der Wandebenen, zur Anwendung der Punkt-in-Polygon- oder der Polygon-Schnitt-Algorithmen.

Weiter ist es sinnvoll, als Zwischenobjekte zwischen „Wänden“ und „Punkten“ noch „Kanten“ einzuführen. Eine „Kante“ (Verbindung zwischen zwei aufeinander folgenden Punkten im Polygon) ist dabei datenmäßig nichts weiter als ein nummeriertes, geordnetes Tupel aus zwei Punktnummern, primär, d.h. bei der Wandeingabe, im Uhrzeigersinn eingefügt¹⁵. Dies hat drei Vorteile:

- Erstens gehört meist jede Kante zu zwei Wänden, in der einen ein Vektor im Uhrzeigersinn, in der anderen entgegen dem Uhrzeigersinn, sodass es sekundär, d.h. nach entsprechender automatischer Nachbearbeitung, nur halb so viel Kanten wie einmal eingegeben gibt; diese „Kantenpaarung“ kann gleichzeitig als „Dichtigkeitstest“ benutzt werden und ist bei der Konvex-Zerlegung wichtig um benachbarte Wände zu finden;
- Zweitens sind Kanten gerade die Objekte, an denen (durch „Fähnchen“) Beugung erfasst werden soll; diese sind noch in „Innen“- und „Außen“-Kanten sowie „Trennkanten“ aufzuteilen, an welchen im Rahmen der geplanten Konvexzerlegung dann „transparente Wände“ aufsetzen;
- Drittens ist die Einführung von Kanten praktisch zur grafischen Darstellung.

Die „Kantenpaarung“ kann kompliziert sein /H0/: Zum einen müssen die räumlich identischen Kanten angrenzender Wände antiparallel verlaufen (Anfangspunkt der einen = Endpunkt der anderen und umgekehrt). Ist dies der Fall, wird eine „Kante“ als ein einziges Objekt „kreiiert“ (d.h. ein nummeriertes Ecknummernpaar). Verlaufen 2 Kanten angrenzender Wände gleichsinnig-parallel, ist dies ein Indiz, dass die Ecken eines der Polygone in falscher Reihenfolge eingegeben wurden.

¹⁴ - was in einigen Datenstrukturen von CAD-Programmen offenbar nicht der Fall ist, bei denen einzelne „Bausteine“ eventuell nur fast genau, aber nicht mit identischen Ecken und Kanten zusammengefügt werden; das ist der Grund, weswegen solche Daten und Szenarien nicht unmittelbar zum *ray tracing* taugen, und oft komplizierte Umwandlungsroutinen nötig sind; ein weiteres Problem ist die Umwandlung solcher oft hochgenau, mit zehntausenden Polygonen eingegebenen Raumstrukturen in solche mit nur wenigen hundert für akustische Zwecke.

¹⁵ Auf die Vorberechnung der konstanten Kantenvektoren selbst kann vermutlich verzichtet werden, obwohl sie bei zahlreichen Vektorprodukten (für Links/Rechts-Abfragen) benötigt werden (bei der Konvexzerlegung und beim Polygon-Polygon-Schnitt, s. 4.2.3 und 4.2.8), denn die aktuelle Berechnungszeit hierfür erscheint vernachlässigbar.

Sind Kanten vorerst ungepaart geblieben, so muss das nicht heißen, dass an sie keine zweiten Wände grenzen, sondern nur, dass nicht zwei Kanten **unmittelbar** zu einer kombiniert werden können, dass also mehr als zwei Kanten im Spiel sind. Solche Situationen können auftreten, wenn mehrere Wände eine gemeinsame Nachbarwand haben, oder wenn Wände mit Kanten, die auf einer Geraden liegen, an andere Wände grenzen, deren Kanten auch längs dieser Geraden angeordnet sind. In diesen Fällen läuft der weitere Kantenpaarungs-Algorithmus wie folgt ab:

Zunächst werden alle ungepaart gebliebenen, gegenseitig-kolinearen Kanten aus-sortiert. Dann werden in einer Doppelschleife sämtliche Zweierkombinationen dieser Kanten bezüglich etwaiger gemeinsamer Anfangs- und/oder Endpunkte überprüft. In diesem Falle läuft folgender Unteralgorithmus ab: Es wird jeweils die kürzere Kante von beiden "gepaart", d.h. bekommt als zweite Wand die der längeren zugeordnet, sie ist damit fertig bearbeitet (z.B. bekommt die obere Kante in Bild 4.2.5. von P1 nach P2 auch Wand W5 zugeordnet); die längere Kante wird um die Länge der kürzeren Kante gekürzt (und der Endpunkt aktualisiert, z.B. im Bild die untere Kante ehemals von Punkt P1 nach P3, jetzt von Punkt P2 nach P3); diese hat nun in jedem Falle wieder eine Partnerwand mit mindestens einer gemeinsamen Ecke (da ja der Endpunkt, im Bild Punkt P2, Anfangspunkt einer dritten Kante gewesen sein muss); diese gekürzte Kante bekommt, nach dem nächsten Schritt der Paarung mit der dann längeren oberen Kante von P2 nach P4, auch Wand W2 zugeordnet, usw. ..., bis Anfangs- **und** Endpunkte zweier Kanten zusammen fallen (in dem im Bild dargestellten Extremfall die auf Punkt P7 bis P8 verkürzte letzte obere Kante mit der letzten unteren); dann wird die eine gepaart, und die andere ganz eliminiert. Die Menge "pathologischer", ungepaarter Kanten wird so schrittweise sicher reduziert, bis keine mehr übrig ist.

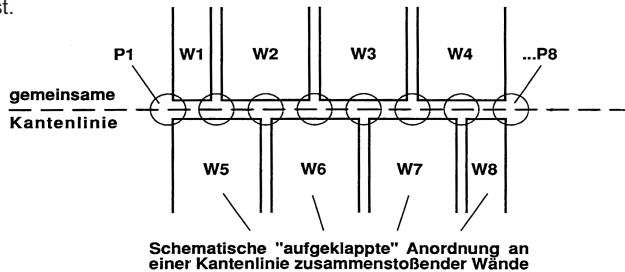


Bild 4.2.5 Zum Kantenpaarungsproblem: W1...W8= Wände (schematisch); P1...P8= paarweise identische (nur zur Veranschaulichung getrennt gezeichnete) Knotenpunkte:
Ausgangslage: 8 ungepaarte Kanten P1-P2, P2-P4, P4-P6, P6-P8 oben und P1-P3, P3-P5, P5-P7, P7-P8 unten
Ergebnis: 7 gepaarte Kanten P1-P2, P2-P3, ..., P7-P8 mit zugeordneten Wandpaaren W1/W5; W2/W5; W2/W6; W3/W6; ...W4/W8

Später können Kanten übrigens zu mehr als 2 Wänden gehören, von denen nur zwei echte Wände sind, die weiteren „transparente Trennwände“. Denn eine Konvexzerlegung der Raumbereichsfläche und des Raumes erfordert nun ja eine weitere Erweiterung der Datenstruktur; und zwar um

- **konvexe Teilräume (Polyeder);**
- **konvexe Teile der Wände, im Folgenden kurz „Polygone“ genannt.**

Daraus folgt die neue Datenstruktur des Raumes:

Hierarchie der Raumobjekte mit Unterarten nach Konvexzerlegung (verkürzt)

Raum (i.d.R. nicht konvex)

-> **Polyeder** (konvexe Teilräume)

-> **Wände** (auch nicht konvex, reflektierend oder transparent, mit Strukturdaten)

-> gemeinsame Daten: physikalische Daten (u.a. Absorptionsgrade)
 Sekundärdaten (Flächennormalen usw.)

-> **Polygone** (ursprüngliche=Wände, danach konvexe Unterpolygone)

-> **Kanten** (=Anfangs- und End-Ecknr., ursprüngliche, innen oder außen,
 + künstlich eingefügte Trenn-Kanten)

-> **Eckpunkte** (x,y,z)

Alle jene zusätzlichen Objekte und Daten - Teilräume, Teilpolygone, Kanten, Normalen und weitere konstante Hilfsdaten – gehören nicht zu den vom Anwender selbst vorzugebenden (primären), sondern zu den in einem einmalig durchlaufenen Vorberechnungsteil berechneten **Sekundärdaten**.

Die Zu- und Unterordnungen geschehen durch entsprechende Nummerierungen und Zeiger; auf die Darstellung dieser Detailbezeichnungen muss hier der Kürze halber verzichtet werden; so ist z.B. selbstverständlich, dass auch zu getroffenen Einzelpolygonen jederzeit die zugehörige Wand, deren Normale und die zugeordneten gemeinsamen physikalischen Oberflächeneigenschaften rekonstruiert werden können müssen. Zuordnungen werden generiert vor allem

- von Wänden zu (erzeugten Teil-) Polygonen und von jenen zu Kanten;
 - mit beidem können benachbarte Wände gefunden werden - ,
- von Ecken zu Kanten (dadurch können weiterführende Kanten gefunden werden, aus denen man transparente Wände „bauen“ kann, s.u.);
- von Teilräumen zu Wänden und Wänden zu Teilräumen
 - zur schnellen Strahlverfolgung notwendig.

4.2.3. Skizze des Algorithmus´ der Konvexzerlegung

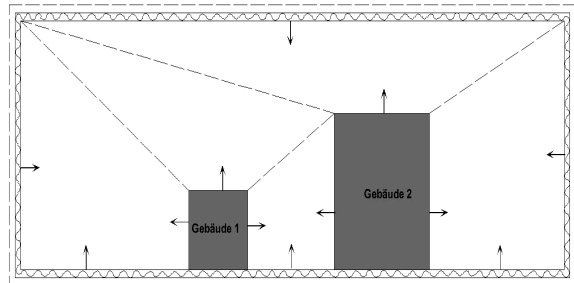
Die Aufgabe der Konvexzerlegung führt nicht zu einer eindeutigen Lösung, es gibt stets mehrere Konvexzerlegungen. Man könnte z.B. eine Zerlegung in Tetraeder als Polyeder mit der geringsten Oberflächenanzahl anstreben. Oder man mag darüber nachsinnen, ob es bei Forderung nach einer minimalen *Anzahl* konvexer Teilräume eine eindeutige Lösung gäbe (also eher größtmögliche konvexe Teilräume). Dies erscheint hier müßig. Im Bereich der Computergrafik werden, unabhängig von den vorgegebenen Raumform, auch rekursive Raumhalbierungsverfahren vorgeschlagen (*binary space partition* =BSP-trees /C2/C3/C7/), solange, bis kein Teilraum mehr konkav ist (was ohne Zweifel konvergiert). Hier aber steht noch die Anwendung von Innenkanten zur Beugungserfassung im Raum. **Es wird deshalb eine Konvexzerlegung angestrebt, die ausschließlich vorhandene Innenkanten und Eckpunkte nutzt und keine neuen erzeugt.**

Im Beispiel von Bild 4.2.4c z.B. läge es nahe, gegenüber der „beugenden Innenecke“ in der Wand gegenüber künstlich noch eine Ecke einzusetzen, zu der hin man dann eine Kante zur Trennung des Polygons in zwei konvexe Teilpolygone ziehen könnte. So aber werden von der Innenecke zwei Trennkanten zu den Ecken links und rechts oben gezogen; dann gibt es eben drei konvexe Teilpolygone, zwei Trennkanten bzw. Trennwände, an denen gebeugt wird. Das erscheint umständlich, ist aber algorithmisch klarer und einfacher. Ziel des Algorithmus ist es, neue Zuordnungen auf Grundlage o.g. Datenbasis zu knüpfen. Die Eckpunkte bleiben unverändert. Wesentliche Stufen sind folgende:

0.Stufe: Falls Freifeld-Fall („offener Raum, "unter freiem Himmel", s. Bild 4.2.6.):

Ein formal geschlossenen Raum wird gebildet durch Hinzufügen total schallabsorbierender Außenwände und einer Decke, oder einfacher, eines Hüllquaders. Die Gebäudewände müssen dann, anders, als wenn sie selbst die Außenhülle eines geschlossenen Raumes darstellten, nach „außen“ wirksam sein, ihre Flächennormalen müssen nach Außerhalb der Gebäude zeigen (nach innerhalb des Schallausbreitungsgebietes, s. Bild 4.2.6) die Eckpunkt-Reihenfolge muss dann von Außen gegen den Uhrzeigersinn verlaufen. Der Boden (das „Gelände“) könnte auch von nicht-ebener, sondern polygonal zerlegter Form sein, und auch teilweise reflektierend.

Zur 0.Stufe:
Bild 4.2.6: Hinzugefügte
absorbierende Hülle
um einen Gebäudekomplex
(geschlängelt)
Gestrichelt darum: Hüllquader.
Gestrichelt innen:
konvex-zerlegende
transparente Wände;
Pfeile: nach innen zeigende
Flächennormalen.



1. Initialisierung: Erzeugung der Datenstruktur, d.h. o.g. Zuordnungen

- durch Benutzereingabe: Punktkoordinaten, Zuordnung zu Wänden,
alle Wände sind zunächst identisch = (noch evtl. konkaven) Polygonen
- Kantenpaarung, d.h. Bildung der Zuordnungen Polygone $\leftrightarrow$ Kanten $\leftrightarrow$ Ecken
- Erzeugen von Sekundärdaten (Wand-Orthonormalensysteme, Ebenenprüfung)

2. Stufe 2-dimensionales Problem: Zerlegung der Wände in konvexe Polygone¹⁶

Idee: Rekursives Abspalten konvexer Teilpolygone, bis Restpolygon auch konvex¹⁶

dazu für jede Wand:

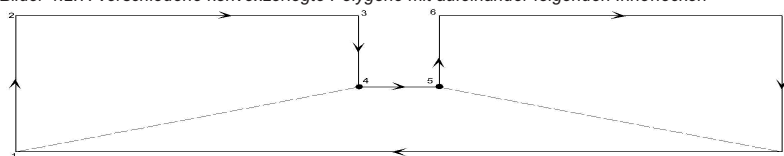
- * Umlauf um alle Ecken, „von außen“ im Uhrzeigersinn,
Merkmal von „Innen-Ecken“, d.h. wo Knick in Umlaufrichtung nach „links“¹⁷;
denen keine weiteren „Innenecken“ mehr folgen
wie Bild 4.2.7.a Ecke 5 nach 4 oder in Bild b 8 nach 6 und 7,
für alle diese Innen-Ecken als Start-Ecken:

Weiterumlauf und Finden von Partnerecken,
zu denen hin **neue Trennkanten** gezogen werden können,
und zwar so, dass (im Uhrzeigersinn) jenseits der Startecke
und vor der Partnerecke keine „Innenecke“ entsteht:

Abspalten eines konvexen Polygons (d.h. Zuordnung der abgespaltenen
Kanten und der Trennkante dazu; die restlichen und die Trennkante werden ,
neu nummeriert, dem Restpolygon zugeordnet)

Bearbeiten des Restpolygons (d.h. gehe zurück zu *),
bis Restpolygon konvex, d.h. nur noch „Außen“-Ecken hat.

Bilder 4.2.7: verschiedene konvexzerlegte Polygone mit aufeinander folgenden Innenecken



a) Folgeecke (5. nach 4.) ist auch Innenecke: zuerst Abtrennung des Polygons 5678,
dann des Polygons 4581

b) Seitenwand mit Randkanten
eines Balkons im Raum:
zuerst Abtrennung des
Polygons 8 9 10 1, dann
der Polygone 7812 und 6723

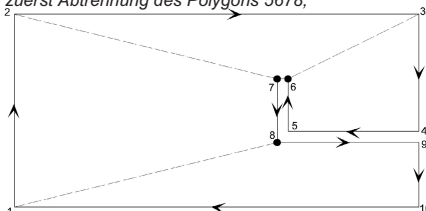
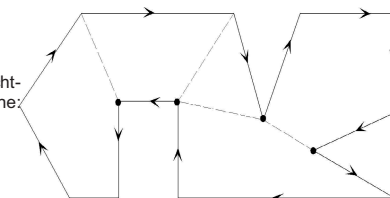


Bild 4.2.8 Ergebnis einer Zerlegung eines nicht-konvexen Polygons in konvexe Teilpolygone:
Umlauf von außen gesehen im Uhrzeigersinn
---= eingezogene Trennkanten



¹⁶ Einrückungen nach Schleifenanfängen oder Fallunterscheidungen;
kursiv oder in kleiner Schrift: nur Kommentare;
auf die Wiedergabe der quantitativen Ausarbeitung muss hier verzichtet werden.

¹⁷ Prüfbar anhand des Vorzeichens des Skalarprodukts des Vektorprodukts aufeinander folgender
Kantenvektoren mit der Flächennormalen

Zwischenergebnis:

Nur noch konvexe Polygone, gruppenweise derselben Wand zugeordnet - und damit deren physikalischen Parametern -, originale und zusätzlich erzeugte Trenn-Kanten, letztere also solche markiert; neue Ecken-Kanten-Zuordnung.

3. Stufe 3-dimensionales Problem:

Zerlegung des Gesamtraumes in konvexe Teilräume (Polyeder) (s. Bild 4.2.9.)
Idee: Analog 2.: Markieren aller „hineinragenden“ die Konvexität störenden, „Innen-Kanten“ des Raumes, daran „Anbau“ transparenter Trennwände entlang geeigneter „Partnerkanten“ (aller in Stufe 2 erzeugten Trennkanten), falls alle vorgemerkten Innenkanten derart abgearbeitet, kann es nur noch konvexe Teilräume geben.

Dazu (in Schleifen)

Prüfen aller Polygone und Kanten des Gesamtraums:
 falls benachbarte Wände „Innenkanten“ (in den Raum hineinragend¹⁸)
 bilden (analog „Innen-Ecken“ 2-dimensional, interpretiere Bild 4.2.8 als
 Grundriss eines darauf senkrecht stehenden Raumes)
 markiere diese Kanten als Innenkanten.

#1 dann, in eine erneuten Schleife über alle markierten „Innenkanten“:

(z.B. Kante 1 in Bild 4.2.9.)

„nehme eine Innenkante als Start-Kante zum Bau einer transparenten Trennwand“:
 stelle von ihrem Endpunkt aus weiterlaufende Kante fest (die keine Nachbarwand
 gemeinsam mit der Startkante hat, z.B. Kante 2 in Bild 4.2.9., also in derselben Ebene liegt;
 - diese zweite Kante liegt noch stets in einer Ebene mit der Start-Kante)
versuche nun eine Kette in einer Ebene liegender Kanten zu finden, d.h.

#2 stelle vom Endpunkt dieser Kante aus weiterlaufende (dritte) Kante fest
 (die keine gemeinsame Nachbarwand mit der zweiten hat)
 prüfe, ob diese (3.) Kante in derselben Ebene liegt wie die ersten beiden,
 falls ja: (wie Kante 3 in Bild 4.2.9.)

ist „Ring geschlossen“, d.h. Endpunkt letzte = Anfangspunkt Startkante
 falls nein, gehe zu #2 (d.h. 4. Kante usw.)
 falls ja

#3 „Kreiere eine neue Wand als so gebildete Trennwand“

ordne ihr alle benutzten Kanten der Reihenfolgen nach zu

- bilde auch neue Verknüpfungen Ecken-Kanten -

falls nein, kreiere als neue Kante eine vom letzten Endpunkt
 bis zum Anfangspunkt der Startkante, in Bild 4.2.9 Kante 5
 gehe zu #3 u.zurück

d.h. bilde einen vorläufig ersten Trennwandteil
 markiere diese als neue Innen- und Startkante.

Sind alle „Innenkanten“ abgearbeitet ? wenn ja: fertig:

Wenn nein (*kann nur sein, falls neue Innenkanten erzeugt wurden*):

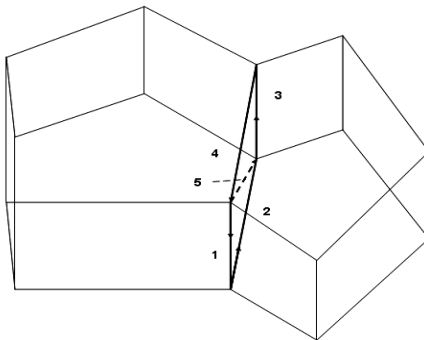
Wiederholung der Prozedur ab #1.

¹⁸ Zu prüfen anhand des Vorzeichens des Skalarprodukts des Vektorprodukts des Kantenvektors mit dem Flächennormalenvektor der einen Wand - eines Vektors, der in dieser Wandebene liegt und nach außerhalb zeigt- mit dem Flächennormalenvektor der anderen Wand; falls positiv, „Innenkante“

Zwischenergebnis:

Ursprüngliche und transparente Polygone,
ursprüngliche, in Wände eingezogene Trennkanten und Innen-Kanten;
jene grenzen nun an mehr als 2 Wände: die beiden ursprünglichen und
die Trennwand (in Sonderfällen, s. Bild 4.2.8, auch mehrere);
Teilräume, aber noch nicht als solche erkannt und zugeordnet.

Bild 4.2.9. zur 3. Stufe der Raumkonvexzerlegung: Einziehen einer transparenten Trennwand zur Bildung zweier konvexer Teilräume (perspektivische Darstellung): Voraussetzung: konvexe Oberflächenpolygone mit Trennkanten; Start mit Innenkante 1, Finden weiterführender Kanten 2,3,4 die alle (zufällig passend) in einer Ebene liegen; falls dies nicht der Fall ist (Kante 3 liegt nicht in einer Ebene mit Kanten 1,2), wird die Trennwand aus zwei nicht in einer Ebene liegenden Teilwänden zusammengesetzt; dann wird zum vorläufigen Abschluss Kante 5 neu erzeugt; diese wird neue „Innenkante“ als Startkante, an die auf die gleiche Weise Kanten 3 und 4 angebaut werden, welche den zweiten Teil der Trennwand bilden.



Ein kritischer Fall wäre ein „Raum mit Loch“, also z.B. ein Würfel, berührungslos „schwebend“ in einem äußeren Würfel. Alle Polygone wären dann konvex, es würden also keine Trennkanten erzeugt. Alle Kanten des inneren Würfels wären „Innenkanten“. Hierzu würden in Stufe 3 keine weiterführenden Kanten gefunden, aus denen man transparente Trennwände bauen könnte. Eine Konvexzerlegung dieses Gebildes würde also (zumindest mit dem beschriebenen Algorithmus) nicht funktionieren. Forderung also: Das Raumgebilde muss zusammenhängend sein !

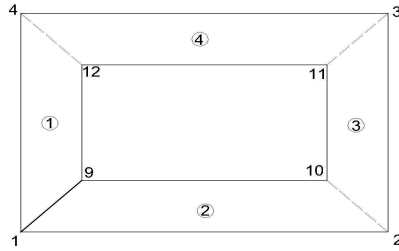
Das ist freilich praktisch keine wesentliche Einschränkung, denn „schwebende Körper“ sind ja ohnehin nicht realistisch. Das Raumgebilde könnte man leicht dadurch konvexzerlegbar machen, in dem man eine Verbindung zwischen Außen- und Innenteil herstellt. Beispiel: Innenquader, mittig auf dem Boden eines Außenquaders liegend. Dann ist, wegen eines „Lochs“ in der Mitte die Restbodenfläche automatisch nicht mehr konvex, s. die folgenden Bilder 4.2.10

Die Bodenfläche wird so durch Stufe 2 zerlegt in 4 konvexe Polygone (s. Bild a). In Stufe 3 werden seitlich an den 4 „Innen“-Kanten (anschaulich Außenkanten) des Innenquaders (z.B. 9-13, s. Bild c) 4 Trennwände (z.B. 9-13-5-2) angebaut, deren Oberkanten jedoch noch keinen Anschluss finden; dadurch entstehen 4 neue „Innen“-Kanten (z.B. 13-5), an die in einem letzten Schritt (Wiederholung des Algorithmus für Stufe 3 ab #1) 4 weitere Trennwände (z.B. 13-5-6-14) angelegt werden. Als Ausnahme entstehen hier übrigens 4 Kanten, an die keine echten, sondern nur je 3 transparente Wände stoßen. Ob in jedem Falle - unabhängig von der Reihenfolge der Trennwandbildung - der Raum vollständig zerlegt wird, ist anschaulich kaum durchschaubar, aber in sofern plausibel, da der Algorithmus nicht „fertig“ meldet, solange noch unbearbeitete Innenkanten existieren; und da bei jedem Schritt ohne Zweifel ein Fortschritt erzielt, in dem mindestens eine weitere Teiltrennwand erzeugt wird, wird der Algorithmus konvergieren.

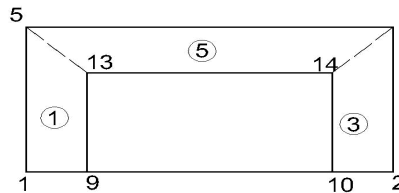
Bilder 4.2.10 Konvexzerlegung

eines Quaders im Quader:
 ---- = Kanten transparenter
 Trennwände; Ecknummern;
 in Kreisen: Teilraumnummern

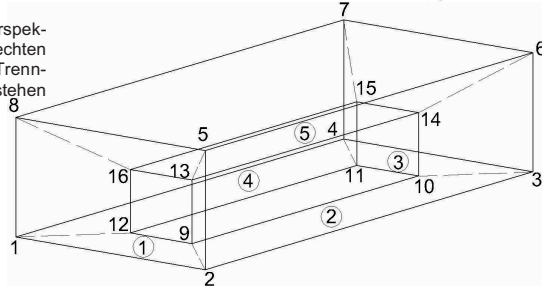
a) Draufsicht: „Boden mit Loch“, in einem Polygonzug eingegeben und konvexzerlegt (die „Stichkante“ links unten bestand ursprünglich aus zweien, die zu einer gepaart wurden)



b) Längsschnitt durch den Quader-in-Quader-Raum, links und rechts angebaute trapezförmige Trennwände; es gibt 4 solcher senkrechten Trennwände, s. Bild c (nummeriert nur „vordere“ Ecken)



c) Quader-in-Quader-Raum perspektivisch, oberhalb der senkrechten Trennwände noch 4 geneigte Trennwände eingefügt; dadurch entstehen 5 Teilräume, 4 seitlich, einer oberhalb des Innenquaders



4. Bildung von Teilräumen

Jedem Polygon werden Teilräume zugeordnet, an die sie unmittelbar grenzen (Trennwandpolygone zwei), und umgekehrt jedem Teilraum eine Liste ihm zugeordneter Polygone. Dies ist noch notwendig, ja war das eigentliche Ziel zur Rechenzeitverkürzung beim *beam tracing* (um nur noch Teilmengen von Wänden prüfen zu müssen). Leider ist auch dieses Problem schwieriger als es anschaulich scheint.

Erste Idee: Nutze dazu die Konvexität der Teilräume und den Vorteil, den dies fürs Ray Tracing bildet: Nehme willkürlich ein erstes Polygon und einen Punkt der minimal vor, d.h. „innerhalb“ dieses Polygons und damit garantiert innerhalb eines ersten Teilraums liegt, als Quellpunkt von Strahlen. Prüfe nun **alle** (noch nicht geprüften) Polygone des Gesamtraums, ob sich Punkte von ihnen (am besten die Flächenschwerpunkte) - ohne andere Polygone zu schneiden - mit dem Quellpunkt verbinden lassen; wenn ja, gehört das geprüfte Polygon zum selben Teilraum bzw. kann ihm zugeordnet werden und umgekehrt. Dann wird ein nächstes, noch nicht diesem (oder anderen) Teilräumen zugeordnetes Polygon genommen und die Prozedur wiederholt, d.h. der nächste Teilraum gebildet, bis alle Polygone zugeordnet sind.

Vorteil: Anschaulich, sicher; Nachteil: Rechenaufwand proportional dem Quadrat der Anzahl aller Polygone (da aber einmalig, nicht tragisch.)

Zweite Idee: Nutze die Geschlossenheit aller Teilräume, genauer: dass alle Polygone eines Teilraums Nachbar-Polygone haben müssen, die an denselben Teilraum grenzen, und bilde einen rekursiven Prozess des „Anbaus“ von Polygonen bis zu einer geschlossenen Hülle.

Nehme dazu willkürlich ein erstes Polygon,

#1: ordne es einem ersten Teilraum zu (und umgekehrt);

- gehe alle seine Kanten durch (Schleife),
- bestimme dabei das jeder Kante zugeordnete „andere“, benachbarte Polygon,
- ordne auch dieses demselben Teilraum zu (so lange es das noch ist),
- markiere das „erste“ Polygon als „selbst bearbeitet“;
- nehme von den Nachbarpolygone das erste, das neu zugeordnet wurde;

falls es das noch gibt, gehe zu #1 (*Rekursion!*)

falls es das nicht mehr gibt¹⁹:

(also ringsum kein Nachbarpolygon neu zugeordnet werden konnte)

prüfe: sind alle zugeordneten Polygone „selbst bearbeitet“ ?

Wenn nein: Bearbeite erstes noch nicht „selbst bearbeitetes“ zugeordnetes Polygon; gehe zu #1.

Wenn ja: Teilraum fertig erzeugt (ohne Beweis).

Danach wird willkürlich eine nächstes noch nicht zugeordnetes Polygon genommen und ihm der zweite Teilraum zugeordnet, usw. #1, bis es auch das nicht mehr gibt.

Vorteil: Sehr viel schneller. Nachteil: möglicherweise nicht sicher.

5. Zuordnung von a) Sende- und b) Empfangspunkten zu Teilräumen

Dies ist notwendig

- a) zur Erzeugung der richtigen Startbedingungen bei der Pyr-Verfolgung (richtige Teilmengen zu prüfender Polygone),
- b) um auch bei den Immissionen nur die richtige Teilmenge an Empfangspunkten auf Enthaltung im Pyr prüfen zu müssen.

Lösung:

Wie unter 4., erste Idee, beschrieben, angewandt auf den zu prüfenden Punkt.

Ergebnis: Bei der Pyramidenstrahlverfolgung werden in der Regel nur noch wenige Polygone pro konvexem Teilraum zu prüfen sein; häufig sogar nur 4 (Tetraeder) oder 5 (Prisma), am häufigsten (da die meisten Strukturen rechtwinklig sind) 6 (Quader), selten mehr als 10 und äußerst selten mehr als 20 (Ikosaeder); **wahrscheinlich schwerpunktmäßig 6.**

¹⁹ Wenn das der Fall ist, ist die Hülle um den ersten Teilraum nur scheinbar komplett! Man könnte annehmen: „Wenn dies nicht so wäre, gäbe es ein noch nicht zugeordnetes Polygon; das wäre aber Nachbar zu einem zugeordneten und also in obiger Prozedur gefunden worden“. Es könnte aber nur eine Gegend der Hülle „im Kreis herum“ abgearbeitet worden sein. Deshalb zur Sicherheit in #2 die Frage, ob alle Polygone „selbst bearbeitet“ sind. Diese Sicherheitsabfrage führt allerdings in einfachen Fällen, z.B. beim Quader, zu unnötigen, ineffektiven Zusatzprozeduren.

4.2.4. Gesamtalgorithmus der Verfolgung der noch unquantisierten Pyramidenstrahlen (UPBT)

Der Gesamtalgorithmus wird erst anhand von (leider natürlich nur 2-dimensionalen) Zeichnungen grob vorgestellt, dann werden einzelne Phasen, ihre Probleme, Alternativen und Lösungen erläutert, schließlich wird der Algorithmus präzisiert.

Gemäß den Bildungsgesetzen für Spiegelquellen ist der Algorithmus rekursiv: einem sich selbst aufrufenden Teilalgorithmus zur Pyr-Verfolgung wird jeweils ein Pyr vorgegeben, welcher sich später in weitere aufspaltet.

Direktschall

Zuerst ist das einer von jenen, die den Direktschall transportieren, also aus dem ursprünglichen Quellpunkt als Spitze und einem der Polygone gebildet werden, die den Teilraum begrenzen, in welchem sich die Quelle befindet (Initialisierung). Diese Pyre decken also zusammen den Gesamtraumwinkel 4π ab. (Später, nach Spiegelungen und Aufspaltungen, werden es mehr, aber schmalere Pyre sein.)

Immissionen

Vor der Weiterverarbeitung werden erst einmal die Empfangspunkte bedient. Das Kriterium ist ganz einfach: Jeder Immissionspunkt erhält einen Intensitätsbeitrag, wenn er im Pyramidenstrahl liegt, und zwar in der Stärke wie von derjenigen Spiegelquelle, deren Sichtbarkeitsbereich der Pyr repräsentiert. Immissionsberechnungen werden also ganz nebenbei, "unterwegs" erledigt.

Pyr-Projektion und -Aufspaltung

Jeder Pyr wird partiell mindestens ein, in der Regel aber mehrere Polygone treffen. Um zu finden, welche, ist eine Schleife über alle relevanten Wände durchzuführen - nach der Konvexzerlegung glücklicherweise nur desselben Teilraums. Um dennoch nicht „blind“ zu viele aufwändig zu prüfen, sind hier gewisse Vorprüfungen empfehlenswert (ähnliche, aber andere als bei Ray-Tracing und Spiegelquellenmethode). Der Reihe nach wird der Pyr nun auf die so vor-ausgewählten Wandebenen projiziert, s. Bild 4.2.11. In dieser Schleife über alle Polygone steckt die Verzweigung auf mehrere Pyre der nächsten Generation, die Strahlaufspaltung. Aus geometrischen und physikalischen Gründen bleibt dabei die Summe der Raumwinkel aller **in Echtzeit** gleichzeitig existierenden Pyre konstant gleich dem Gesamtraumwinkel $/Q4/$. Ohne Absorption bliebe es auch die Summe der in ihnen transportierten Schallleistungen, denn bei jedem Pyr-Clipping erhält der Reststrahl eine verringerte Schallleistung entsprechend dem Raumwinkelverhältnis. Das ist jedoch nur modellhaft vorzustellen, nicht zu berechnen. **Rechenzeitlich** nämlich werden die Pyre und ihre jeweiligen Abkömmlinge, anders als es sich in Echtzeit verhält, nacheinander statt parallel abgearbeitet, der Baum der Spiegelquellenbildung wird also unmittelbar rekursiv, Ast für Ast, jeweils erst bis zur letzten Unterverzweigung abgearbeitet (s. Skizze des rekursiven *pyr tracing* -Algorithmus unten.)

Bild 4.2.11. **Pyr** (zweidimensional: Fächer, hier die oberen beiden Segmente) von Q links auftreffend auf 2 von 3 eingezeichneten Wänden (und möglicherweise dreidimensional darüber oder darunter auf weitere). Der Pyr splittet sich auf in 2 (oder mehr) neue, entsprechend der Überlappung der (Raum-)Winkelbereiche bzw. der Polygonquerschnitte. Betrachtet und rekursiv weiterverfolgt wird aber jeweils nur einer, hier der an Wand 2 gespiegelte Pyr mit Q2 als Quelle (grau), der den „durch Wand 2 sichtbaren“ bzw. nach Reflexion an Wand 2 gespiegelten Spiegelquellenanteil von Q darstellt (vergleiche Bild 4.2.1 dreidimensional)

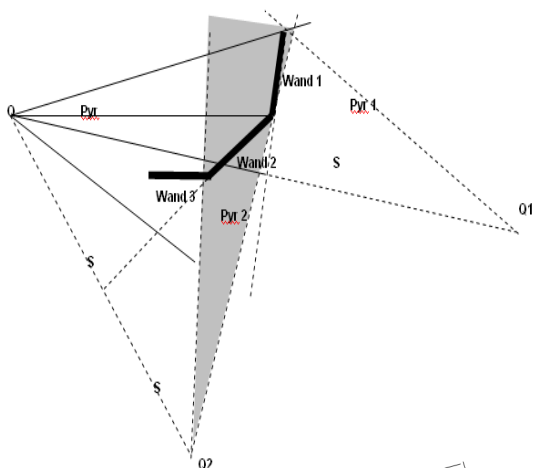
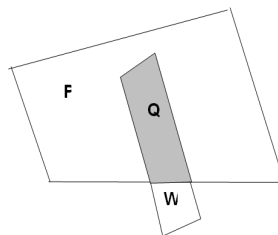


Bild 4.2.12: Schnitt des Pyr-Polygons F mit dem Wandpolygon W in der Draufsicht auf die Wandebene aus Bild 4.2.10; das Schnitt-Polygon Q (gestrichelt) bildet den Querschnitt des so beschränkten, weiter verfolgten Restpyr



Pyr-Reflexion

Der Reststrahl (Querschnitt Q des Schnittpolygons, s. Bild 4.2.12) wird bei normalen Wänden gespiegelt, wobei i.d.R. ein Teil der Schalleistung absorbiert wird. Er dient als Ausgangsstrahl für die rekursive Anwendung derselben Prozedur.

Praktisch an der Konvexzerlegung ist : Ist die teilweise getroffene Wand nur eine transparente Trennwand zwischen verschiedenen Teilräumen, wird der Reststrahl (s. Bild 4.2.1b) genau so gebildet, nur eben nicht gespiegelt, läuft in den jenseitigen Teilraum; das einzige, was erledigt werden muss, ist also eine Änderung der Teilraumzugehörigkeit, damit bei der Weiterverfolgung eine andere Teilmenge relevanter Polygone benutzt wird.

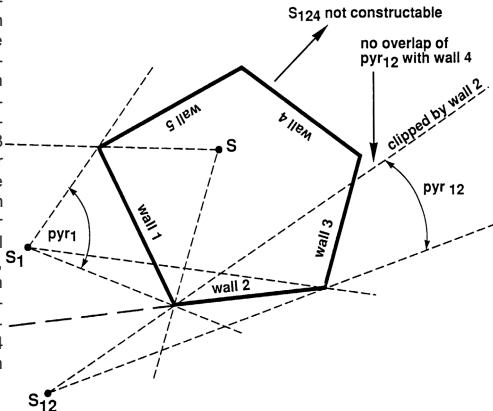
Für das Gesamtverhalten des Algorithmus' entscheidend ist nun, wie vorüberlegt:

Durch diese „Vorwärtserzeugung“ nur möglicher Spiegelquellen werden nicht nur einige wenige ausgeblendet, sondern jeweils alle weiteren Unterabkömmlinge, ganze „Unterbäume“ des Spiegelquellenbaums, also ebenfalls exponentiell wachsende Mengen. Das zeigt exemplarisch Bild 4.2.13: Sobald eine Wand vom Sichtbarkeitsbereich eines Pyrs gar nicht mehr erfasst wird, werden nicht nur die Spiegelung an ihr, sondern auch alle untergeordneten Spiegelungen danach unmöglich, d.h. solche Spiegelquellen würden von **keinen** Empfangspunkten aus „gesehen“, und - im Ge-

gensatz zur „klassischen“ Spiegelquellenmethode - auch gar nicht erst konstruiert. Genau dadurch wächst die Anzahl der Pyre nicht mehr exponentiell, sondern nur noch mit der 3. Potenz der Reflexionsordnung; das genau macht die qualitative Verbesserung aus.

Bild 4.2.13 Bildung von Spiegelquellen bzw. Pyren höherer Ordnung: hier wird eine Quelle S zunächst an Wand 1 gespiegelt, das ergibt Spiegelquelle bzw. Pyrspitze S_1 mit einem durch die Ränder von Wand 1 eingeschränkten (Raum-)Winkelbereich der Sichtbarkeit bzw. der Weiterstrahlung (gestrichelte Linien, hier 2-dimensional vereinfacht, also nur Winkelbereich eines „Fächers“, *Fans*);

S_1 wird dann ebenso an Wand 2 gespiegelt, ergibt S_{12} mit einer durch Wand 2 weiter - und zwar hier durch die „untere“ Kante - eingeschränkten Sichtbarkeitsbereich; (S_1 hätte auch noch an allen anderen Wänden weiter gespiegelt werden können); vom Sichtbarkeitsbereich von Pyr_{12} wird Wand 3 teilweise überstrichen, sodass an ihr eine weitere Spiegelung möglich wäre usw.; Wand 4 und Wand 5 werden von diesem Abstrahlbereich von Pyr_{12} aber nicht erreicht; Pyr_{12} wird also, obwohl S_{12} „vor“ Wand 4 und Wand 5 liegt, zunächst nicht weiter aufgespalten (Ausspaltungsgrad 1, unverzweigt weitergehender Ast in Bild 4.1.2.); die Unterbäume der Spiegelungen an Wand 4 und 5 (Pyre 124ff und 125ff) entfallen komplett.



Zu unterscheiden davon ist die Sichtbarkeit von **einzelnen** Empfangspunkten: Wäre nur von einem bestimmten aus eine Spiegelquelle nicht sichtbar, so heißt das nicht, dass auch alle von jener abgeleiteten Spiegelquellen nicht mehr konstruiert zu werden bräuchten, denn „Kinder“ dieser „Mutter“-Spiegelquelle könnte vom selben Immissionspunkt aus wieder sichtbar sein. S_{12} Bild 4.2.14 zeigt dazu ein Beispiel. Die Nicht-Sichtbarkeit von einzelnen Empfangspunkten aus ist also kein Kriterium für das „Kappen ganzer Unterbäume“ bzw. Kinder und Kindeskinde der „Mutter“.

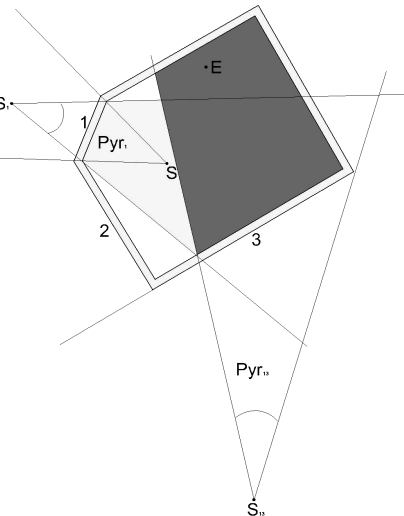


Bild 4.2.14. Beispiel dafür, dass ein Empfangspunkt (E) eine „Mutter“-Spiegelquelle (S_1 , links) nicht sieht, jedoch ein „Kind“ (S_{13} , unten) von ihr: E liegt hier nicht in Pyr_1 (hellgrau), „sieht“ also nicht S_1 , d.h. erhält von ihr keine Immission, liegt jedoch in Pyr_{13} (dunkelgrau) von S_{13} ; eine Spiegelung von S_1 an einer unmittelbar benachbarten Wand wie Wand 2 ist jedoch entweder unmöglich, oder S_1 ist auch von E sichtbar.

Da die Pyre immer schmäler werden, werden jeweils immer weniger Wände getroffen, der Verzweigungsgrad geht gegen 1 (vergl. Bild 4.1.2.) (Nach der Quantisierung der Pyre wird dies anders werden, das Aufspaltungs- und Programmschema bleibt zwar rekursiv, die Abarbeitung ist iterativ, quasi-parallel.)

Zusammenfassung:

Skizze des rekursiven *pyr tracing* -Algorithmus´

Für jede Schallquelle S: *Kreieren der Pyre der ersten Generation (für Direktschall), d.h.*

Schleife über alle Wandpolygone des Teilraums, in dem S ist:

Bilden von Pyren durch Verbinden von S mit den Wandpolygonecken:

für alle diese Pyre :

***rekursiver Einstieg in „Verfolge Pyr“:**

Berechnung der Immissionen, d.h.

Schleifen über alle Empfangspunkte des Teilraums und alle Frequenzbänder

Schleife über alle Polygone des aktuellen Teilraums:

(hierbei findet die Aufspaltung der Pyre statt!):

Vorabfrage, ob Polygone geschnitten werden

falls nein: Abbruch des aktuellen Zweigs der Pyrverfolgung

falls ja: Projektion Pyr auf Polygonebene

Pyr-Clipping = Beschränkung auf Schnittpolygon mit Wandpolygon

falls kein Schnittpolygon: Abbruch der Pyrverfolgung

Bildung eines neuen Pyr beschränkt durch das
Polygon der „Sichtbarkeit“

falls Wand spiegelnd:

Spiegelung des Pyr

Multiplikation der Pyr-Energien

mit den Wand-Reflexionsgraden

falls Energien kleiner als vorgegeben:

Abbruch des aktuellen Zweigs der Pyrverfolgung

falls Wand transparent:

Wechsel der Teilraumzugehörigkeit des Pyr

-> rekursiver Selbstauf Ruf „Verfolge Pyr“ * s.o.

An dieser Stelle soll noch einer wichtigen, kritischen Frage nachgegangen werden:

Werden die Pyr-Querschnitte nach dem ständigen Schneiden mit Wandpolygonen nicht immer komplizierter, erhalten also immer mehr Ecken ?

Nein. Im Gegenteil: Sie werden sogar immer einfacher !

Man betrachte dazu Bild 4.2.12. Im Kern geht es um die Frage: Angenommen ein konvexes (!) Polygon mit m Ecken wird - bei zufälliger Verschiebung in der Schnittebene - geschnitten mit einem konvexen Polygon mit n Ecken, wie viel (L) Ecken hat dann im Mittel (ohne Beachtung der Fälle, dass es keines gibt) das Schnittpolygon ?

Zunächst: Es hat natürlich minimal, und zwar wohl häufig $L_{\min} = 3$ Ecken; schon sehr selten sind die mittleren Fälle, dass ein Polygon im anderen ganz oder fast ganz enthalten ist, so dass eine Ecke durch eine Kante des äußeren abgeschnitten, also durch 2 ersetzt wird; dann gibt es $L_{m1} = m+1$ oder $L_{m2} = n+1$ Ecken; extrem selten wird der Maximalfall sein, dass sich die Eckenzahl addiert: $L_{\max} = m+n$ (z.B. bei 2 gleich großen Quadraten mit gleichem Mittelpunkt, gegeneinander verdreht, so dass sich ein 8-Eck ergibt). Die Fälle, dass sich nur 3 oder wenig mehr Ecken bilden, werden viel häufiger sein als die letztgenannten, weil die Fälle einer geringen Überlappung (abgesehen von den nicht gezählten noch viel häufigeren der Gar- Nicht-Überlappung) viel häufiger sind als die einer weitgehenden Überlappung. Das kann man einsehen, wenn man etwa ein festes großes quadratisches Polygon und ein kleines verschiebbares betrachtet und sich um das feste Quadrat 8 unmittelbar umgebende gleichgroße Quadrate vorstellt (die zusammen ein Quadrat der 3-fachen Kantenlänge und 9-fachen Fläche bilden); dann wird es 8 mal wahrscheinlicher sein, dass das kleine Polygon in den 8 „Randzonen“ ist als in der Kernzone (oder in seiner Nähe). Und der letzte Fall, dass zufällig zwei Polygone etwa gleich groß sind und fast den selben Mittelpunkt haben, und sich so die Eckenzahl beim Schnittpolygon addiert, ist ein seltener Unterfall des vorletzten Falls, von daher extrem selten.

Sei - als Sicherheitsabschätzung - dennoch angenommen, alle genannten Fälle seien gleich wahrscheinlich (*worst case*), so dass ein arithmetisches Mittel gälte, ergäbe sich als Rekursionsformel für die Anzahl Ecken eines Schnittpolygons (des Polygons nach $k+1$ -tem Clipping) die Formel $m_{k+1} = ((m_k + n) + 3)/2$, wobei die Eckenzahl n der Wandpolygone eigentlich variabel ist, aber zur Vereinfachung durch ihren Mittelwert ersetzt gedacht sei (wobei angenommen wird, dass dies am Konvergenzverhalten und -Ergebnis nichts ändere). Die sich ergebende Zahlenfolge m_k fällt, falls $((m+n)+3)/2 < m \equiv m_k$, d.h. $m > (n+3)$, und steigt, falls $m < (n+3)$, konvergiert in jedem Fall von unten oder oben auf $L = n+3$ (z.B. also bei im Mittel $n=5$ Wandecken auf 8 Ecken). Immerhin: Sie divergiert nicht ! Lässt man - und das ist viel realistischer - die extrem seltenen Fälle, dass $L = m+n$, außer Acht, und nimmt eine Gleichverteilung für $L = 3 \dots m$ oder $L = 3 \dots n$ an, so lautete die Rekursionsformel $m_{k+1} = ((m_k + n)/2 + 3)/2$ oder $m_{k+1} = m_k / 4 + n / 4 + 3/2$, analog mit dem Grenzwert $L = n/3 + 2$. Bei im Mittel $n=5$ Wandecken, ergeben sich also im Mittel $3\frac{2}{3}$ Ecken der Pyrpolygone. Und wegen der Konvexzerlegung haben die Wandpolygone nur derart wenig Ecken.

Ergebnis: In den allermeisten Fällen werden die Pyre höherer Ordnung also einen nur 3-4-eckigen Querschnitt haben !

Nun zu den einzelnen Phasen des Algorithmus' im Detail.

4.2.5. Spiegelungskriterien

Sowohl bei der Spiegelquellen-Methode, als auch bei der Strahlverfolgung (idealer Strahlen) gibt es 4 sich entsprechende Kriterien bei einer jeweils zur Spiegelung vorgesehenen bzw. zu prüfenden Wand:

1. die Ausgangs-(Spiegel-)Quelle muss **vor** der Wand liegen;
2. auch der Empfangspunkt muss **vor** der Wand liegen;
3. der Reflexionspunkt muss **auf** der (begrenzten) reflektierenden Wand liegen - nach Konvexzerlegung heißt das jetzt: auf dem gerade betrachteten Teilpolygon-;
4. die Wand muss als nächste getroffen werden („**kein Hindernis**“).

Bei konvexen (Teil-) Räumen (wie bei der Pyr-Verfolgung stets angenommen) entfallen Kriterien 2 und 4, da immer erfüllt (wenn man sich nur auf den aktuellen Teilraum bezieht, und das kann man, da der ja ggf. gewechselt wird.) Für die Originalquelle entfällt auch Kriterium 1 - wie für jeden Punkt innerhalb eines konvexen Teilraums, denn „hinter“ einer Außenwandebene kann dann per definitionem ja kein Punkt liegen. Kriterium 1 ist für Spiegelquellen S auch in konvexen Räumen nicht immer erfüllt²⁰, aber leicht zu prüfen, nämlich anhand des Vorzeichens des Abstands a von S zur untersuchten Wandebene²¹:

$$a = (\mathbf{S} - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{N} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} + d > 0! \quad (4.1)$$

In diesem Abschnitt gilt²²:

- $\mathbf{P}_1$ = ein Bezugspunkt auf dem gerade geprüften Wandpolygon,
- $\mathbf{N}$ = vorberechnete Wandebenen-Normale des
- d = deren Abstand zum Koordinatenursprung.

Im Übrigen entfallen natürlich alle Spiegelungen an derselben Wand wie vorher. Das wird automatisch verhindert, da dann ja die aktuelle SSQ hinter der Wand ist ($a < 0$).

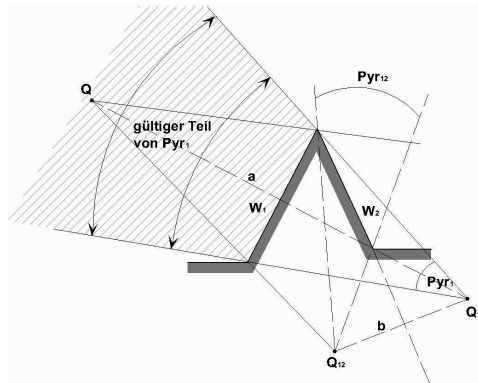
Wände, die, in Strahlrichtung gedacht, „vor“ der Wandebene liegen, die zuletzt spiegelte, s. Bild 4.2.15, fallen für eine nachfolgende Spiegelung aus (dies entspricht beim *ray tracing* dem „Vorwärts“-Kriterium). Jene Wände wären also „Wände des Beginns der Gültigkeit des Pyr“ (die die Pyramide stumpf machen). Auch dieser Fall kann in konvexen Räumen gar nicht erst auftreten. Wohl hätte er es in nicht-konvexen können, - ein weiterer Grund für die Konvexzerlegung.

²⁰ Wenn z.B. in Bild 4.2.13 Wand 2 mit Wand 1 einen gewissen noch größeren stumpfen Winkel gebildet hätte, hätte S1 „hinter“ der Ebene von Wand 2 liegen können.

²¹ außer bei transparenten, also beidseitig „sichtbaren“ Wänden, hierbei ist das Vorzeichen von a gleichgültig.

²² In diesem Abschnitt werden alle Wand-Variablen – obwohl freilich über o.g. Daten-Hierarchie (Wände –Polygone –Kanten –Ecken) indirekt adressiert - der Übersicht halber nur einfach indiziert.

Bild 4.2.15. In einen Raum hineinragender Keil aus 2 Wänden: Nach Spiegelung von Q an Wand 1, könnte Spiegelquelle Q1, da „vor“ Wand 2, an jener weiter gespiegelt werden; das aber ist offenbar unsinnig, da zugehörige Strahlengänge gar nicht existieren; auszuschließen wäre das algorithmisch dadurch, dass Wand 2, von dem von Q1 kommenden Pyr1 aus gesehen, in Strahlrichtung „vor“ dem Beginn seiner Gültigkeitsgrenze, nämlich der früher gespiegelt habenden Wand 1 liegt; Pyr 1 ist also stumpf mit Wand 1 als „hinten“ abschneidender Ebene. Das Problem entfällt bei konvexen Räumen, bzw. die falsche Spiegelung wird dadurch verhindert, dass Wand 2 – nach Konvex-Zerlegung – nicht im Teilraum von Wand 1 liegt, der nach wie vor gültig ist (vergl. Bild 4.3.2.b).



Es bleibt als mit Abstand schwierigstes Kriterium das Kriterium 3, denn es gibt ja nun nicht einzelne Reflexionspunkte - bei denen die Enthaltung in den Wandpolygonen schon schwer zu prüfen war - sondern ganze Reflexionsflächen - was auf das noch schwierigere Problem des Polygon-Polygon- bzw. Polygon- Pyr- Schnits hinausläuft.

Davor allerdings sind glücklicherweise einige einfache **Vorprüfungen** möglich, die dies schwierige Problem häufig vermeiden helfen. Zum einen muss (zusätzlich zum „Von- vorne“- Kriterium) das vom *ray tracing* bekannte „Vorwärts“-Kriterium abgefragt werden, allerdings erweitert, denn es gibt ja bei Pyramiden n Kantenstrahlen (mit Richtungsvektoren $\mathbf{v}_i$) statt einem; das Kriterium lautet offensichtlich²³:

Mindestens eine Pyrkantenstrahl muss vorwärts auf die Wandebene treffen !

Es ist also eine Schleife über alle n Kanten des Pyrs durchzuführen, und es muss dann mindestens eine (Nr. i) geben, für die gilt:

$$s_i = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{N} > 0 \quad (4.2)$$

Damit entfallen im Mittel schon fast die Hälfte aller sonst (bei der klassischen SSQM) möglichen Weiterspiegelungen des jeweiligen Pyr. (Bei ideal dünnen Schallstrahlen wäre es genau die Hälfte, da nur bei Wänden eines Halbraums erfüllt.)

4.2.6. Projektion des Pyr auf die Wandebene

Ist Glng. 4.2 für mindestens ein i erfüllt, können, wie für Schallstrahlschnittpunkte, für alle $s_i > 0$ gleich die Schnittpunkte der Pyramidenkantenstrahlen P_i mit der Wandebene berechnet werden nach

²³ Gegenbeispiel: Von Pyr12 in Bild 4.2.13 kann kein Kantenstrahl Wand 1 treffen.

$$w_i = a / s_i \quad (4.3)$$

$$\text{und} \quad \mathbf{P}_i = \mathbf{S} + w_i \cdot \mathbf{v}_i \quad (4.4).$$

Die $\mathbf{P}_i$ bilden die Eckpunkte des auf die Polygonebene projizierten Pyr (Bild 4.2.16).

Nun gibt es wegen der Ausgedehnthheit der Pyre die gar nicht so seltenen **Sonderfälle**, dass nur ein Teil der Kantenstrahlen die Wandebene schneidet, (nicht alle s_i sind positiv); die Projektion des Pyrs auf die Wandebene erfolgt dann nur teilweise (physikalisch: nur ein Teil der in ihm transportierten Schalleistung erreicht die Wandebene), die Projektion entspricht dann einer teilweise begrenzten Ebene, die man als „offenes“ oder „unendliches Polygon“ bezeichnen könnte, s. Pyr c in Bild 4.2.16.: Es wird dann zur ersatzweisen Schließung des projizierten Polygons eine Kante im Unendlichen eingezogen, also 2 „Eckpunkte“ im Unendlichen (in der richtigen Richtung) kreiert. Die formale Bildung eines solchen „unendlichen Polygons“ erscheint sinnvoll, um später den gleichen Polygon-Polygon-Schnitt-Algorithmus darauf anwenden zu können. Dazu müssen offenbar auch 2 Seitenkanten in die richtige Richtung kreiert werden, und das ginge so: Sind (während zyklischer Ausführung obiger Schleife über alle Pyrkanten) die i_1 -te die erste und die i_2 -te die letzte, die noch auf die Wandebene projizierbar sind (mit $s_i > 0$, in Bild 4.2.16 bei Pyr c Ecke 4 bzw. 1), so werden eine vorherige und eine nachfolgende Kante des „offenen Polygons“ gebildet durch den Schnitt der entsprechenden Pyr-Seitenebenen mit der Wandebene; dazu werden die Normalenvektoren des Pyrs benötigt, die sich aus den Vektorprodukten benachbarter Kanten berechnen (s. Bild 4.1.1) und ohnehin zur Verfügung stehen (Tab. 4.1.1.):

$$\mathbf{N}_{P_i}' = \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_{i+1} \quad (4.5)$$

(wobei Indexausdrücke wie $i+1$ zyklisch gemeint sind). In Bild 4.2.16 bei Pyr c ist z.B. $\mathbf{N}_{P_1}' = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Nun ergibt sich die Schnittkantenrichtung von zwei sich schneidenden Ebenen durch das Vektorprodukt ihrer Flächennormalen. Die Richtungsvektoren der zu kreierenden Seitenkanten des offenen projizierten Polygons sind dann parallel zu den Vektoren

$$\mathbf{U}_{i1-1} = \mathbf{N}_{P_{i1-1}}' \times \mathbf{N} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{U}_{i2} = \mathbf{N}_{P_{i2}}' \times \mathbf{N} \quad (4.6)^{24}$$

In ihrer Richtung werden dann, ausgehend vom nächsten bzw. letzten echten projizierten Eckpunkt (s. Polygon c in Bild 4.2.16B) die künstlichen Ecken in quasi-unendlicher Entfernung geschaffen durch:

$$\mathbf{P}_{i1-1} = \mathbf{P}_{i1} + 10^6 \cdot \mathbf{U}_{i1-1} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{P}_{i2+1} = \mathbf{P}_{i2} + 10^6 \cdot \mathbf{U}_{i2} \quad (4.7).$$

Die Ecken sind - nachdem ja auch einige nicht-projizierbare zwischen der nicht-projizierbaren i_2 -ten und der i_1 -ten ganz weg gefallen sein könnten - neu zu nummerieren.

²⁴ Könnte eine Pyr-Seitenebene nicht parallel der Wandebene sein, so dass die $|\mathbf{N}_{P_i} \times \mathbf{N}| = 0$?

Das wäre dann eine Pyr-Seitenebene, bei der **beide** Kantenstrahlen die Wandebene nicht schneiden. Bei der Bildung der Ersatzkanten handelt es sich aber um Pyr-Seitenflächen, deren eine begrenzende Kante die Wand schneidet, die andere nicht; das kann nur sein, wenn sie nicht parallel zur Wandebene ist; der Fall $|\mathbf{N}_{P_i} \times \mathbf{N}| = 0$ kann also nicht auftreten.

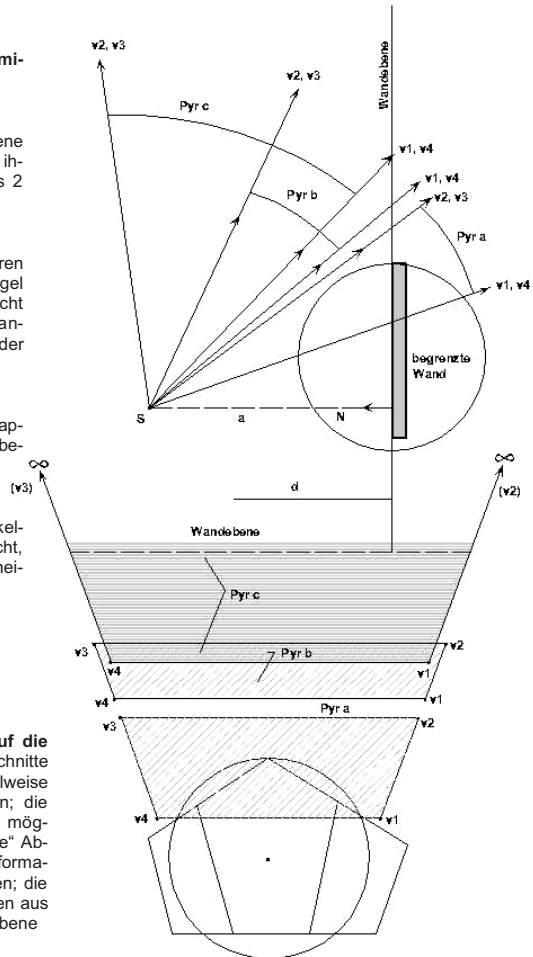
Bild 4.2.16. Projektionen von Pyramidenstrahlen auf eine Wandebene:

A) von der Seite: rechts die Wandebene und die begrenzte 5-eckige Wand mit ihrer umschriebenen Kugel, von links 2 Pyramidenstrahlen (2-dim.: Fächer):

Pyr a (hier vierkantig mit Vektoren $v_1, \dots, v_4$, s. Bild b) schneidet die Umkugel und auch die begrenzte Wand (was nicht automatisch so sein müsste); alle Kantenstrahlen bilden Schnittpunkte mit der Wandebene;

Pyr b: wie Pyr a, jedoch keine Überlapung (kein Schnittpolygon) mit der begrenzten Wand;

Pyr c: ein Teil seines (Raum-) Winkelbereichs schneidet die Wandebene nicht, da von ihr abgewandt, v_2 und v_3 schneiden die Wandebene nicht.



B) Das Gleiche in der Draufsicht auf die Wandebene: projizierte Pyr-Querschnitte (hier 4-eckige Polygone), die sich teilweise mit dem Wandpolygon überschneiden; die Projektion von Pyr c ist nur teilweise möglich; das Polygon ist „offen“, die „obere“ Abschlusskante existiert nicht, wird aus formalen Gründen „im Unendlichen“ gezogen; die seitlichen Kanten sind die Schnittkanten aus den Pyr- Seitenebenen mit der Wandebene

4.2.7. Vorprüfung auf Pyr-Polygon-Schnitt

Nun können und sollten - ähnlich wie beim *ray tracing* - zur Vorprüfung, ob der Pyr das begrenzte Wandpolygon überhaupt schneiden könnte, Hüllstrukturen eingesetzt werden. Hierbei ist ein Kompromiss aus Ersparnis und Aufwand zu finden. Zu bedenken ist: Solch zusätzliche Berechnungen müssten für jeden Pyr, für jede Teilstrecke seiner Verfolgung, also millionenfach ausgeführt werden; ihre Effizienz ist also von höchster Wichtigkeit.

Hierzu sind (unter anderen) 4 Methoden denkbar:

A1) Kugel um Wandpolygon, Kegel um Pyramidenstrahl und

Kegel-Kugel- Schnittprüfung (s. Bilder 4.2.17, Projektionen: Bilder 4.2.16)

Dies ist die anschaulich am nächsten liegende und am wenigsten aufwändige Methode. Für einen möglichst engen Kegel um die Pyramide muss dabei zunächst eine günstige Mittelachse gefunden werden. Dies könnte der Strahl zum Flächenschwerpunkt des sphärischen n -Polygons auf der Einheitskugel um den Pyr sein; vereinfachend könnte (bei ja meist nur 3-4-eckigen Pyren) das arithmetische Mittel der Kantenvektoren übernommen werden. Für die Vorprüfungen sind 5 Vektorgleichungen auszuführen.

Die Prüfung, ob der Kegel um den Pyr die Kugel um ein Wandpolygon schneidet, läuft letztlich auf eine Winkelabfrage „ $\gamma < \alpha + \beta$ “? hinaus (Bild 4.2.17). Sie ist aber weniger effektiv, weil in Fällen „streifend“ einfallender Pyre häufig positiv ausgehend, obwohl der Pyr das ebene Wand-Polygon nicht schneidet.

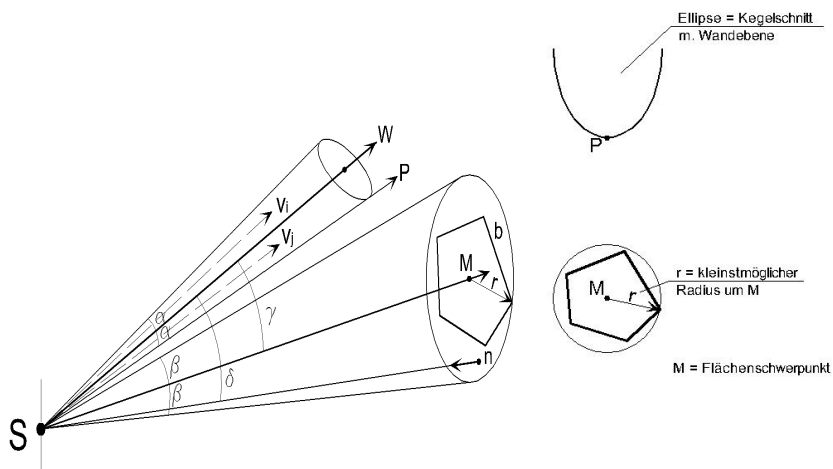


Bild 4.2.17a (links): Kugel mit Radius r um Wandpolygon in Ebene mit Normalen $\mathbf{N}$ mit Flächenschwerpunkt bei $\mathbf{M}$, Kegel um Pyramidenstrahl, ausgehend von Spitze S in Richtung der Achse $\mathbf{w}$ mit Öffnungswinkel α ; der Kugelradius wird von S aus mit Winkel β gesehen, der Winkel zwischen der Richtung des Kugelmittelpunktes M von S aus und der Kegelachse ist γ ; der Strahl auf dem Kegel, der der Kugel am nächsten kommt, im Schnitt von Bild a „unterhalb der Achse“, schneidet die Wandebene im Punkt P , dem Scheitelpunkt des Kegelschnitts mit der Wandebene, s. Bild b.

Bild 4.2.17b (rechts): Draufsicht auf Wandebene von Bild a: Kreis um Wandpolygon um M mit Radius r , Kegelschnitt mit unterem Scheitelpunkt P ; hier, da $\alpha + \delta < 90^\circ$, Ellipse; falls $\alpha + \delta = 90^\circ$, Parabel, falls $\alpha + \delta > 90^\circ$, Hyperbel, aber mit gleichem Scheitelpunkt δ = Winkel zwischen Kegelachse und Wandebenen-Normalen

A2) Kegel um Pyr, Projektion auf Wandebene, dann aber Kreis um Wandpolygon in Wandebene, Prüfung auf Schnitt Kegelschnittkurve-Kreis;

- statt eines dreidimensionalen also Reduktion auf ein zweidimensionales Problem; diese Vorabfrage scheint konsequenter und ist zweifellos genauer und damit effektiver, d.h. lässt noch mehr (eher streifende) Schnitt-Fälle ausscheiden; oft schneidet ja der Kegel die Kugel um das Wandpolygon, nicht aber seine Projektion in der Wandebene den Kreis um jenes; die Gleichungen der sich ergebenden Kegelschnitte mit der Wandebene zu berechnen und einen Schnitt mit dem Kreis um das Wandpolygon zu prüfen wäre sicher zu aufwändig; dies erweist sich aber auch nicht als nötig, denn äquivalent damit ist offenbar die Frage, ob nur der dem Kreismittelpunkt nähere Scheitelpunkt P der Kegelschnittkurve im Kreis liegt oder nicht; der Punkt P ist durch Projektion zu gewinnen mit der vom Ray-Tracing bekannten Gleichung; dazu muss erst geprüft werden, ob $\mathbf{v}=\mathbf{P}-\mathbf{S}$ überhaupt die Wand trifft; falls nicht, gibt es keinen Pyr-Wand-Schnitt - eine nützliche Zwischenabfrage: Dann kann schon die Projektion mit den vielen Vorprüfungen (Gln. 4.2-7) entfallen. Alle Vorprüfungen umfassen ca. 10 Vektor- und transzendente Gleichungen, die im Prinzip für alle (meist 4-10) Wände des Teilraums auszuführen sind, von denen aber viele oft nicht ausgeführt werden müssen.

B1) Nur Kugel um Wandpolygon, Prüfung auf Schnitt mit Pyr-Seitenebenen

Die Abfrage der Pyr-Seitenebenen ist (etwa falls der Pyr „flach“ ist, sein Querschnitt also z.B. ein stumpfwinkliges Dreieck ist) sehr viel genauer als die Abfrage des Kegels um den Pyr (Methode a); da die Pyr-Seitenebenen-Normalen für die Immissionsprüfung ohnehin berechnet werden müssen, bzw. schon im Datensatz eines Pyrs enthalten sind (Tab. 4.1.1.). Der Aufwand für die Vorberechnung der Polygonflächenschwerpunkte und der Radien der kleinstmöglichen umhüllenden Kugeln um die Polygone spielt keine Rolle, da einmalig vorweg berechenbar. Diese Methode ist einfacher als Methode a2); die Anzahl der im Mittel auszuführenden Vektorgleichungen ist geringer; ob effizienter (mehr Fälle ausgrenzend) ist offen, da in „streifenden Fällen“ ungünstiger.

B2) Erst Projektion des Pyr auf die Wandebene, dann Abfrage ob Schnitt des projizierten Polygons mit dem Kreis um die Wand

(also voll-zweidimensionales Problem, s. Bild 4.2.16b);

diese Methode ist aber - obwohl sicher die genaueste Vorabfrage - im Vergleich zu b zu aufwändig; für jede Kante des projizierten Pyr-Polygons muss geprüft werden, ob sie vom Kreis um das Wandpolygon geschnitten wird; die Anzahl auszuführender Vektorgleichungen ist deutlich höher als im Falle B1); zudem finden weitere Vorabfragen in der Wandebene im Rahmen des Polygon- Polygon- Clipping sowieso statt, sodass eine so komplizierte Prozedur nur zur Vorabfrage nicht ratsam erscheint.

Ergebnis: empfehlenswert von der Effizienz her sind Methoden A2 oder B1; einfacher ist aber Methode B1.

4.2.8. Clipping von Pyramidenstrahlen an Raumkanten

Sind alle Spiegelungskriterien (Glnn. 4.1 und evtl. 4.2) erfüllt, alle Vorprüfungsmöglichkeiten, ob der Pyr das ausgewählte Wandpolygon schneiden kann, ausgeschöpft - was schon in den meisten Fällen negativ ausgefallen sein wird -, eventuelle Sonderfälle der Projektion (Bild 4.2.16) abgehandelt, und ggf. alle Eckpunkte des auf die Wandebene projizierten Pyr berechnet (evtl. auch mit im „Fast -Unendlichen“ liegenden Ecken), ist nun das rein zweidimensionale Problem²⁵ des „Pyr-Clippings“, d.h. der Beschränkung des Pyr-Polygons auf das Schnittpolygon mit dem Wandpolygon bzw. der Findung des Schnittpolygons aus zwei konvexen Polygonen zu lösen (Bild 4.2.18) - das eigentlich aufwändige Problem. Zur Lösung dieses elementaren Problems gibt es mehrere Möglichkeiten und Algorithmen (s. z.B. /P1/). Dies mag hier als untergeordnetes Problem erscheinen. Es ist aber gerade deshalb ein millionenfach auftretendes. Die Effizienz seiner Lösung muss also von höchstem Interesse sein. Im Folgenden soll deshalb eine passend erscheinende, selbst entwickelte und effiziente Lösung wenigstens qualitativ beschrieben werden.

Aufgabenstellung des Polygon-Polygon-Schnitts:

Gegeben sind (in der Ebene, s. Bild 4.2.18, mit lokalen x', y' -Koordinaten²⁶)
 ein konvexes (Pyr-)Polygon P mit m Ecken P_i ($i=1..m$) und
 ein konvexes (Wand-)Polygon W mit n Ecken W_i ($i=1..n$).
 gesucht ist das (konvexe) Schnittpolygon Q mit l Ecken Q_k ($k=1..l$),
 (oder, falls es dies nicht gibt, die Ausgabe $l=0$)

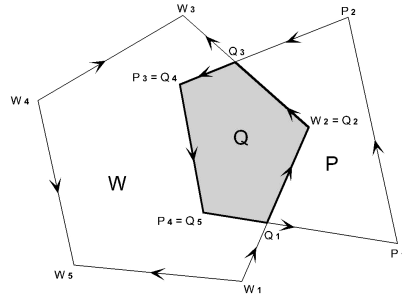
Die Ecken beider Polygone P und W seien in der Draufsicht von innen auf die Wandebene gegen den Uhrzeigersinn nummeriert. Unter „Schnittpolygon“ wird die Fläche verstanden, die die Schnittmenge aller von P und W umrandeten Punkte umfasst,

²⁵ Die nach Glnn. 4. 3 und 4.4 auf die Wandebene projizierten Eckpunkte des Pyrs als auch die Eckpunkte des Wandpolygons müssen dabei im Prinzip zunächst in 2-dimensionale Vektoren des wandbezogenen Koordinatensystems transformiert werden; einfacher werden nur 2 der 3 Komponenten betrachtet (diejenige Komponente mit dem betragsmäßig größten Wert der Wandnormalen **nicht**) und in jenen das Schnittproblem äquivalent gelöst; eventuellen „Schnittpunkten“ in diesen 2-dimensionalen Koordinaten muss dann zur Rekonstruktion der 3-dimensionalen Koordinaten mit Hilfe der Ebenengleichung $\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} + d = 0$ noch eine passende dritte Komponente hinzugefügt werden. Man könnte übrigens auch auf die Idee kommen /P2/, die zweistufige Vorgehensweise „erst Projektion, dann Lösung des zweidimensionalen Schnittproblems“ zu ersetzen durch ein Clipping des (dreidimensionalen) Pyrs direkt durch die Wandpolygon-Kanten – soweit dies überhaupt eintritt; die Probleme der nur teilweisen Projektion (s. Bild 4.2.16, Pyr c) könnten damit gleich erledigt werden; jedoch erscheint die oben vorgeschlagene zweistufige Vorgehensweise klarer, und der Rechenaufwand der Projektion ist auch sehr gering.

²⁶ - entweder nach Projektion der ehemals 3dim.Eckpunkte ins wandbezogene Koordinatensystem oder Betrachtung nur von geeigneten 2 der 3 Koordinaten. Alle im folgenden dargestellten Probleme sind im jeweiligen wandbezogenen Koordinatensystem rein zweidimensional zu lösen. Die Koordinaten der Eckpunkte der Wandpolygone sind nach der Konvexzerlegung nur durch indirekte Adressierung Polygone->Kanten und Kanten->Ecken zugänglich; im Folgenden wird dagegen zur Vereinfachung der Darstellung von einer einfachen Eck-Nummerierung Gebrauch gemacht; die konstanten Kantenvektoren der Wandpolygone sollten vorberechnet sein; zwar ist der Rechenzeitgewinn im Vergleich zur Berechnung der diversen Vektorprodukte gering; aber diese Berechnungen müssten sonst im Rahmen der hier zu beschreibenden Prozedur als erste erledigt werden, und schon bald danach ist ein vorzeitiger Ausstieg wahrscheinlich.

auch dann, wenn **W** und **P** sich nicht im engeren Sinne schneiden sondern ganz überlappen, d.h. die eine in der anderen Polygonfläche ganz enthalten ist. Der Fall, dass **P** ganz in **W**, wird sogar mit zunehmender Laufzeit und enger werdenden Pyr, häufig vorkommen. Das Pyr-Polygon **P** wird o.B.d.A. als das „**zu klippende**“, **W** als „**das P klippende**“ (d.h. den Pyramidenstrahlquerschnitt einschränkende), **Q** als das „Restpolygon von **P**“, d.h. das des weiter zu verfolgenden Pyr's angesehen.

Bild 4.2.18: Schnitt des Pyr-Polygons **P** mit einem Wandpolygon **W** (in der Wandebene); das Schnitt-Polygon **Q** (fett) bildet den Querschnitt des Restpyrs - das im Umlauf gefunden werden kann durch „Immer links Abbiegen“, s.u.; dabei wird als erster relevanter Schnittpunkt Q_1 gefunden.



Zunächst ist klar: Um die mit Abstand häufigsten Fälle disjunkter Polygone gleich ausschließen bzw. zu einem schnellen Ende kommen zu können, kann und sollte von der Konvexität der Polygone Gebrauch gemacht werden. Das bedeutet: Alle Punkte eines Polygons sind (in diesem gegen den Uhrzeigersinn umlaufend) „links“ von (oder auf) einer gerade betrachteten Kante; umgekehrt: sind **alle** Punkte des Polygons **P** „rechts“ **einer** der Kanten des Polygons **W** (in jenem gegen den Uhrzeigersinn umlaufend), sind die Polygone schon disjunkt.

Dass man beginnt, indem man in einem Polygon umläuft und dabei – irgendwann - die Lage aller Punkte des anderen zu den Kanten des ersten prüfen muss, ist klar. Die Effizienz hängt aber von der Reihenfolge ab.

Eine klare, konsequente Methode wäre die des „**Sukzessiven Klippens**“ /P2/: d.h. das Polygon **P** wird Stück für Stück durch die als unendliche Geraden gedachten Kanten des Polygons **W** beschnitten, bis am Ende das gesuchte übrig bleibt. Dabei sind jedoch zwischendurch zahlreiche Schnittpunkte zu berechnen, die am Ende wieder entfallen. (Es wird nicht die Tatsache genutzt, dass, wenn 2 Ecken bzw. eine Kante **i** eines Polygons **P**, rechts einer Kante **j** von **W**, also außerhalb von **W** liegen, dieses Paar von Punkten - auch wenn einer der Punkte links einer anderen unendlichen Geraden **j'** von **W** liegt - gar nicht mehr mit anderen Kanten **j'** von **W** verglichen zu werden braucht; man könnte Kante **i** aus Polygon **P** also **für immer** für Schnittpunkttests ausschließen; es treten auch zu viele Sonderfälle auf). Dieser Ansatz wurde deshalb zugunsten des im Folgenden dargestellten verworfen.

Aus der Ausnutzung der Konvexität folgt nämlich die Idee des „Immer-Links-Abbiegens“: **Das Schnittpolygon wird gebildet, indem man mit einem ersten Schnittpunkt beginnt, und bei jedem weiteren „immer links in das jeweils andere Polygon abbiegt.**

Algorithmus des „Immer-Links-Abbiegens“ (ILA):

Start mit der 1. Kante eines „ersten“ Polygons P_1 (Annahme am Anfang: $P_1=P$ und $P_2=W$):

* Suche nach schneidenden Kanten des „anderen“ Polygons P_2 (zunächst also von W); d.h.

Umlauf (zyklisch) über Kanten desselben Polygons; dabei

Schleife über alle Kanten des anderen Polygons, jedoch *exclusive*. derjenigen, die zuletzt in einen Schnitt involviert war, denn zweimal muss ausgeschlossen werden

Prüfung auf Von-rechts-nach-links-Schnitt und

ggf. Berechnung Schnittpunkt S (KKS s.u.)

falls eine schneidende Kante gefunden

(falls das erste Mal, Merken der Nr. J_s):

falls diese (im Falle $P_1=W$) wieder gleich der J_s .Kante von P :

Polygon Q geschlossen, fertig !

nächster Punkt von $Q = S$

Rollentausch „erstes“ und „anderes“ Polygon

(nach erstem Schnittpunkt: $P_1=W$ und $P_2=P$)

„nächste Kante“ des „anderen“ Polygons P_2 als jetzt „erstes“

sonst: (kein schneidende Kante)

nächster Punkt von $Q =$ Zielpunkt aktuelle erste Kante

nächste Kante = die des gleichen „ersten“ Polygons $P_1, \dots$

gehe zu *.

Die jeweiligen „nächsten Kanten“ werden in das Schnittpolygon Q übernommen.

Dabei ist jeweils folgendes Unterproblem zu lösen:

Bestimme Kanten-Kanten-Schnittpunkt (KKS):

geg.: eine Kante eines ersten Polygons (P_1) und eine des anderen (P_2)

ges.: Schnittpunkt im Bereich beider Kanten, aber nur, falls „Linksabbiegepunkt“.

Die Berechnung geschieht mithilfe von – als Matrixkoeffizienten vorberechneten – Vektorprodukten und ist elementar; andere Fälle wie „Abbiegen erst am Endpunkt“ oder „parallele Kanten“ werden dabei ignoriert.

Läge bei obiger Prozedur eine ganze Kante j von W , also ihr Anfangs- **und** Endpunkt, „rechts“ einer Kante i von P , so brauchen - nach obiger Vorüberlegung - Schnittpunkte dieser Kante j auch mit anderen Kanten von P gar nicht mehr untersucht werden, weil alle Punkte von P ja links der Kante i liegen. Ergäbe sich während der Unterschleife in obigem Algorithmus mithilfe gewisser Prüfvariablen, dass gar alle Kanten von W jeweils „rechts“ einer Kante von P liegen, ist schon klar, dass es gar kein Schnittpolygon gibt.

Da viele der nötigen (aufwändigen) Vektorprodukte ohnehin meistens berechnet werden müssen, ist es nützlicher, solche Prüfvariablen vor Start der Iteration zu berechnen. Diese Idee führte auf zwei Matrizen solcher Prüfvariablen (u_{ij} und v_{ij}):

$u_{ij} > 0$ bedeutet: Punkt i von P ist „rechts“ Kante j von W und

$v_{ij} > 0$ bedeutet: Punkt j von W ist „rechts“ Kante i von P (nicht äquivalent).

Die reellen Werte sind die z-Komponenten von „Vektorprodukten“ der Art $u_{ij} = (\mathbf{p}_i - \mathbf{w}_j) \times (\mathbf{w}_{j+1} - \mathbf{w}_j)$, wobei die Vektoren nur aus x'- und y'-Komponente bestehen, das Ergebnis also quasi die z-Komponente ist. Beispiele, s. Bilder 4.2.19.

Man kann übrigens (s. Bild 4.2.19b) nicht schon dann auf „disjunkt“ entscheiden, wenn eine Kante i des einen Polygons ganz (ihr Anfangs- und Endpunkt) rechts einer j Kante des anderen liegt, und umgekehrt, dieselbe Kante j des anderen ganz rechts Kante i des ersten Polygons. Der Fall, dass ein Punkt i des einen Polygons rechts der Kante j des anderen Polygons liegt (Aussage der Elemente der ersten Matrix) ist auch nicht äquivalent der umgekehrten Aussage, (der Matrixelemente der anderen Matrix) dass der Anfangspunkt j der Kante des anderen Polygons rechts der Kante i ausgehend vom Punkt i des ersten Polygons liegt (man betrachte nur zwei parallele Kanten); d.h. es müssen schon beide Matrizen berechnet werden.

Wird in einer entsprechenden Vorberechnungsprozedur erkannt, dass in jeder Zeile der ersten Matrix mindestens ein positives u_{ij} oder in jeder Spalte der zweiten mindestens ein positives v_{ji} steht (d.h. dass alle Kanten oder alle Eckpunkte eines Polygons „rechts“ einer jeweils beliebigen Kante des anderen liegen) - was insgesamt recht wahrscheinlich ist -, sind die Polygone schon als disjunkt erkannt. Natürlich kann man, wenn man dies zwischendurch prüft, die Vorberechnungsprozedur schon frühzeitig abbrechen.

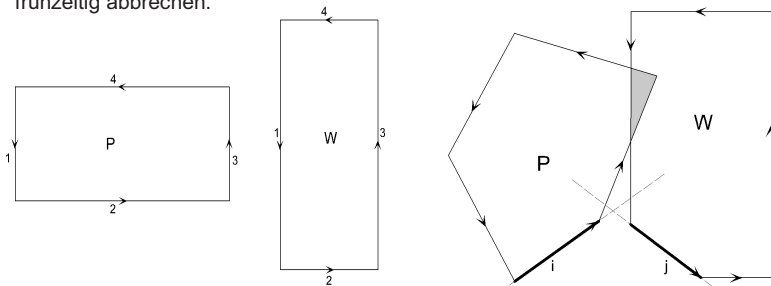


Bild 4.2.19a: 2 sich nicht schneidende, disjunkte Polygone: Liegt eine Kante von P als ganzes umlaufend „rechts“ Kante 1 von W, braucht auch kein Schnitt mehr mit Kanten 2-4 von W geprüft zu werden.

b: Eine Kante i von P (beide Endpunkte) liegt rechts von einer Kante j von W, und umgekehrt: dieselbe Kante j von W liegt rechts der Kante i von P; aber die Polygone sind dennoch nicht disjunkt, schneiden sich.

Falls es in obiger Prozedur keine Schnittpunkte gab (man also auf demselben ersten Polygon geblieben ist), gibt es drei Fälle: 1. es wurde schon zwischendurch (durch die Prüfvariablen) erkannt, dass die Flächen der Polygone disjunkt sind; falls dies nicht der Fall ist, gibt es noch die beiden Fälle, dass ein Polygon das andere vollständig beinhaltet; nun ist dasjenige innen, dessen Eckpunkte alle links aller Kanten des anderen sind - und einer dieser Fälle wird sehr häufig sein, denn bei vielfach reflektierten, d.h. „eng“ gewordenen Pyren werden die projizierten Pyrpolygone meist ganz in den Wandpolygonen enthalten sein. Auch dies kann man fast ohne Zusatzaufwand entscheiden an Hand der Vorzeichen der Prüfvariablen.

Natürlich kann die Vorberechnung der Matrixelemente auch schon mit entsprechendem Ergebnis abgebrochen werden, wenn der Fall „disjunkt“ unterwegs erkannt wird. Um dies zu beschleunigen, könnte jede Zeilenberechnung der Matrix vorerst abgebrochen werden, sobald eine positive Zahl („rechts“) auftaucht, und mit der nächsten Zeile fortgesetzt werden (wobei dort noch zuerst das Element gleicher Spalte berechnet werden könnte, denn ein „Rechts-Befinden“ bezüglich derselben Kante ist am wahrscheinlichsten); sollte das Ergebnis am Ende negativ ausgehen (es also einen Punkt geben, der bezüglich aller Kanten des anderen Polygons links ist, d.h. eine ganze Matrixzeile oder -Spalte ist <0 , d.h. die Polygone sind nicht disjunkt), müssen die restlichen Matrixelemente noch nachberechnet werden.

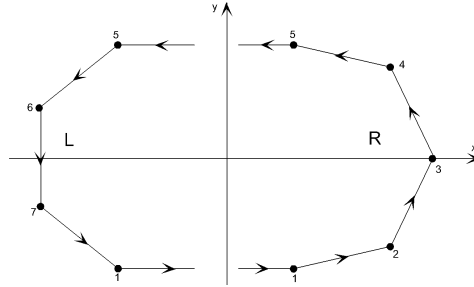
Sind alle Matrixelemente negativ, d.h. alle Punkte eines Polygons sind links aller Kanten des anderen, so ist erstes im zweiten ganz enthalten. Da dies mit zunehmender Reflexionsordnung sogar zunehmend wahrscheinlich ist, dass P ganz in W enthalten ist, sollte die zweite Matrix zuerst berechnet werden. Zur Nutzung in der Prozedur zur Bestimmung der Schnittpunkte aus zwei Kanten können die vorberechneten Vektorprodukte u_{ij} und v_{ij} gewinnbringend verwendet werden; d.h. es sollten nicht nur Prüfbits, sondern, wie schon erläutert, reelle Werte der Vektorprodukte gespeichert werden.

Die **Rechenzeit-Ersparnis** allein durch Sparen der Berechnung vieler Kanten-Kombinationen bzw. Vektorprodukte beträgt mindestens 50% , die gesamte Rechenzeit incl. Vorberechnungsteil sinkt noch weit drastischer, berücksichtigt man die höchst wahrscheinlichen frühzeitigen Abbrüche.

Grundsätzlich klassifiziert, ist die Anzahl der Rechenschritte bei dem beschriebenen Algorithmus (bei $m=n$ Ecken beider Polygone) jedoch noch von der Ordnung n^2 – wenn auch der Proportionalitätsfaktor durch Ausnutzung wahrscheinlicher Ausschlussfälle stark verkleinert wurde. Deshalb soll hier exemplarisch noch eine Idee von Dobkin&Kirkpatrick /P1/ aus der Welt der Computergrafik diskutiert werden.

Wie bei vielen Problemen der Findung optimaler Reihenfolgen bzw. Sortierproblemen gibt es auch hier die Möglichkeit einer **hierarchischen Sortierung** mit der Folge einer Rechenzeit nur proportional $\log(n)$. Um ein klares Sortierkriterium zu erhalten, werden die zyklischen Ketten der beiden Polygone (seien sie wieder Pyr- und Wandpolygon P und W genannt) in je zwei Halbketten, eine linke und eine rechte (L bzw. R) zerlegt, wobei die Eckpunkte mit dem minimalen bzw. maximalen y' -Wert die Grenzen zwischen den Hälften sind. Für die so definierten 4 Halbketten PL, PR, WL, WR kann man nun folgende Aussage ausnutzen: **Die Polygone P und W bilden dann und nur dann ein Schnittpolygon, wenn PR QL schneidet und PL QR schneidet.** Wegen der Konvexität entstehen auf beiden Seiten zwei Halbketten mit jeweils monotoner, z.B. steigender Folge der y' -Werte (s. Bild 4.2.20). Diese Monotonie hat den Vorteil, dass (bei jeweils n' Ecken zweier Halbketten) bei weitem nicht mehr n'^2 Kanten-Kanten-Vergleiche nötig sind, sondern kaum mehr als n' , denn nimmt der y' -Wertebereich einer Kante der ersten Halbkette ab, muss eine Partnerkante nur mit entsprechend abnehmendem y' -Bereich gesucht werden. Ferner entscheiden schon die beiden x -Wertebereiche der Kanten (und nicht erst Vektorprodukte) darüber, ob sie sich überhaupt schneiden können. Nach Zerlegung in Halbketten sind also Vorabfragen sehr schnell und einfach möglich.

Bild 4.2.20 Zerlegung eines 7-Ecks in zwei Halbketten L und R mit 4 bzw. 5 Ecken; die jeweils erste und letzte sind ursprünglich identisch und zwar die mit minimalem bzw. maximalem y-Wert; an sie werden halbinendliche Strahlen in positive bzw. negative x-Richtung angesetzt.



Um Kantenpaare überlappenden y' -Werte-Bereichs zu finden, muss schnell eine Partnerkante des anderen Polygons nach Vorgabe eines y' -Werts gefunden werden. Statt jeweils n' Vergleichen bei linearer Verkettung kommt man bei Sortierung entsprechend einem binären Baum mit $\propto \log_2(n')$ Vergleichen aus. Beim hiesigen Problem des Pyr- Wand-Schnitts mit schon konvexen Polygonen treten jedoch Polygone mit im Mittel nur 4 Ecken auf (bei den Pyren 3-4, s. Abschnitt 4.2.4., bei den Wänden meist nur 3-6 /H1/). Der *overhead* der Teilung in zwei Halbketten und der Bildung der Baumstruktur steht deshalb in keinem vernünftigen Verhältnis zum Rechenzeitgewinn. Die selbst entwickelte Methode zahlreicher Vorabfragen und Ausnutzung gespeicherter Matrizen erscheint deshalb optimal.

4.2.9. Spiegelung der Pyre

Gespiegelte Pyramidenstrahlen sind nichts als Spiegelquellen mit „eingebauten Sichtbarkeitsgrenzen“, gebildet durch ihre „Seitenwände“, erzeugt durch die Ränder der gespiegelt habenden Wände. Gespiegelt wird also nur die Pyrspitze, die Spiegelung der Seitenwände ist nicht explizit nötig, die neuen Seitenwände ergeben sich automatisch, wenn nur die neue Spitze mit den Polygonecken des gespiegelt habenden Polygons verbunden werden. So stellt die Spiegelung selbst, verglichen mit o.g. Prozeduren, einen minimalen Rechenaufwand dar. Sind $\mathbf{N}$ und $\mathbf{d}$ der Normalenvektor bzw. Ebenen-Ursprungsabstand der gespiegelt habenden Ebene mit einem beliebigen Bezugspunkt $\mathbf{P}_1$, so berechnet sich (wie von der Spiegelquellenmethode bekannt) der Abstand von der alten Pyrspitze $\mathbf{S}$ auf die Ebene nach

$$a = (\mathbf{S} - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{N} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} + d \quad (4.8)$$

und die neue Spitze nach

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} - 2a \cdot \mathbf{N}, \quad (4.9)$$

zusammengefasst also (s. z.B. Bild 4.2.11. mit $\mathbf{Q}$ statt $\mathbf{S}$ und $\mathbf{Q}_1$ statt $\mathbf{S}'$).

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} - 2 \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{N} + d) \cdot \mathbf{N} \quad (4.10).$$

Richtungsvektoren $\mathbf{v}$, wie die der Schallstrahlen, spiegeln sich gemäß der ähnlichen Gleichung

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - 2 \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{N} \quad (4.11)$$

(wie obige für $d=0$). Dies wäre auch auf Pyr-Seitenkantenvektoren anwendbar.

Natürlich lassen sich auch ganze räumliche Objekte mit Hilfe solcher Transformationsgleichungen spiegeln. Dies kann man noch weiter schematisieren, indem Spiegelungen als Matrixmultiplikationen dargestellt werden, sofern Punkte im Raum in „homogenen Koordinaten“ dargestellt werden, mit einer vierten Komponente, die bei Ortsvektoren (absoluten Ortsangaben) 1 ist, bei Richtungsvektoren 0.²⁷ Sei die vierte Komponente als die nullte nummeriert, dann ist also $S_0=1$, aber $N_0=0$, und Glng. 4.10 in Komponenten:

$$\mathbf{S}_i' = \mathbf{S}_i - 2 \cdot \left(\sum_{j=0}^3 \mathbf{S}_j \cdot \mathbf{N}_j + d \right) \cdot \mathbf{N}_i \quad (4.12)$$

Mit Einführung von Koeffizienten $\delta_{ij} = 1$, falls $i = j$, sonst $\delta_{ij} = 0$, kann man dies auch schreiben als

$$\mathbf{S}_i' = \sum_{j=0}^3 (\delta_{ij} - 2 \cdot \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j - 2 \cdot \delta_{0j} \cdot \mathbf{N}_i \cdot d) \mathbf{S}_j \quad (4.13)$$

oder eben als Matrixgleichung

$$\mathbf{S}' = \mathbf{D} \cdot \mathbf{S} \quad (4.14)$$

mit der Spiegelungsmatrix

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2N_1d & 1-2N_1N_1 & -2N_1N_2 & -2N_1N_3 \\ -2N_2d & -2N_2N_1 & 1-2N_2N_2 & -2N_2N_3 \\ -2N_3d & -2N_3N_1 & -2N_3N_2 & 1-2N_3N_3 \end{pmatrix} \quad (4.15).$$

Mehrfache Spiegelung an Wänden K1, K2, K3 kann nun aufgefasst werden als Multiplikation jedes zu spiegelnden Punktes mit dem entsprechenden Matrixprodukt $\mathbf{D}_{K3} \cdot \mathbf{D}_{K2} \cdot \mathbf{D}_{K1}$ usw. (i. A. nicht invertierbar). (Zweimalige Spiegelung an derselben Wand führt, wie erwartet zum identischen Punkt, da $\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{E}$ = Einheitsmatrix).

Ganze Pyramidenstrahlen, geometrisch beschrieben durch die Spitze $\mathbf{S}$ und n Seitenkantenrichtungsvektoren $\mathbf{v}_i$ ließen sich in eine $4 \cdot (n+1)$ -dimensionale „Pyramatrix“ $\mathbf{P}$ zusammenfassen mit $\mathbf{S}$ als 0. Spalte und den $\mathbf{v}_i$ als weitere Spalten, sodass man die Spiegelung eines ganzen Pyr durch $\mathbf{P}' = \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}$ beschreiben könnte. Natürlich sollte man die Spiegelungsmatrizen aller Wände vorab als Konstanten speichern. Wenn Pyre an Teilpolygonen dieser Wände gespiegelt werden, könnte man dann durch einen Verweis auf die Matrizen zugreifen. Das wäre eine elegante Methode. Der rechenzeitliche Gewinn dürfte jedoch gering sein, da ja manche Basispunkte der Pyre in sich selbst bzw. nicht gespiegelt werden.

²⁷ Diese Idee stellten bereits Lee&Lee („An Efficient Algorithm for the Image Model Technique“ IQ2) vor – und nicht nur die: Implizit beschrieben diese bereits die Idee der Verfolgung von Pyramidenstrahlen – ohne dies jedoch so zu formulieren. Lee&Lee beschrieben die vielfachen Spiegelungen von Quellen samt den früher gespiegelt habenden Wänden an neuen Wänden – was letztlich äquivalent ist. So erreichen sie eine drastische Reduktion der Anzahl zu konstruierender Spiegelquellen durch Einbau der Sichtbarkeitsbedingung – wenn auch umständlich.

Simulation von Richtwirkungen der Schallquellen

Lohnend könnte die Idee der Spiegelungsmatrix scheinbar werden, wenn man Schallquellen mit Richtwirkung hat; denn wären etwa Teilraumwinkel unterschiedlicher Intensität vorweg durch Pyre unterteilt, so müssten jene bei jeder Spiegelung allesamt mitgespiegelt bzw. rekursiv mit Drehmatrizen multipliziert werden, um bei der Berechnung der Immissionen berücksichtigt werden zu können. Man kann sich aber diese komplizierte Prozedur sparen, in dem man zur Simulation einer Richtwirkung von Anfang (vom Direktschall) an, ohne Berücksichtigung der Größe der zuerst angepeilten Wände, genügend viele enge Pyre ohne innere Richtwirkung kreiert; so brauchen Informationen über Richtwirkungen von Pyren nicht übertragen bzw. in ihren Datensätzen gespeichert und „mitgeschleppt“ zu werden (was angesichts der riesigen Anzahl gleichzeitig bereit zu haltender Pyre kritisch wäre, s. Diskussion in Abschn. 4.4.). Vermutlich gingen nach mehrfachen Reflexionen und Quantisierungsfehlern – wie auch in Wirklichkeit durch die wellenlängenbedingten Unschärfefekte – die Feinheiten der Richtwirkungen ohnehin verloren.

Zusammenhang zwischen der Nicht-Konvexität von Räumen, der Lage der Spiegelquellen bzw. Pyrspitzen und der Sichtbarkeit

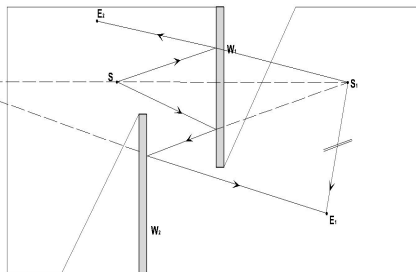
Während bei Spiegelungen an Wänden eines konvexen Raumes sich die Spiegelquellen S' immer weiter von einem Empfangspunkt E in diesem Raum entfernen, kann es bei Spiegelungen an „hineinragenden“, d.h. die Konvexität störenden Zwischenwänden sein, dass sie näher an E herankommen (S_1 in Bild 4.2.21 ist näher an E_1 als S selbst). Auch wenn Räume in konvexe Teilräume zerlegt sind, so kommen solche Spiegelungen im Gesamtzusammenhang ja weiter vor. Schall von einer Spiegelquelle, d.h. eigentlich reflektierter Schall, kann aber natürlich nicht eher ankommen als der direkte. Dies widerspricht dem Kausalitätsgedanken („es kann nicht dadurch, dass etwas Zusätzliches passiert, weniger Zeit verbraucht werden“.) D.h.:

Näher kommende Spiegelquellen sind nur virtuelle, nicht sichtbare.

Als „Zwischenstation“ der Spiegelung müssen solche näher kommenden „**bösen**“ Pyre („böse“, da dieser Umstand bei der Frage der Reihenfolge der Abarbeitung der Spiegelquellen noch eine unangenehme Rolle spielen wird) dennoch konstruiert werden, denn von **anderen** Empfangspunkten (E_2 in Bild 4.2.21) könnten sie durchaus „gesehen“ werden.

Bild 4.2.21. zu „bösen Pyren“:
Spiegelungen an „hineinragenden“ Wänden W_1 und W_2 in einem nicht-konvexen Raum:

S_1 = Spiegelquelle von S an W_1 , (rechts), S_{12} an W_1 und W_2 (links außerhalb); während die Reflexion $S-W_1-W_2-E_1$ möglich ist, E_1 (unten rechts) die Spiegelquelle S_{12} also „sieht“, ist die Reflexion $S-W_1-E_1$ nicht möglich, E_1 sieht S_1 also nicht (d.h. ein Abkömmling einer Spiegelquelle ist sichtbar, sie selbst nicht, vergl. Bild 4.2.14). Dies geht einher damit, dass S_1 näher an E_1 ist als S . S_1 ist wohl von E_2 (links oben) aus sichtbar bzw. $S-W_1-E_2$ konstruierbar.



10. Immissionsberechnung

Das Thema „Berechnung der Immissionen von Spiegelquellen“ schließlich lässt sich im Prinzip in einem Satz zusammenfassen:

Falls ein Empfangspunkt **E** im Pyramidenstrahl liegt, also „eine Spiegelquelle **S'** entdeckt“ wurde, erhält er einen entsprechenden Immissionsbeitrag ΔI nach dem $1/r^2$ -Abstandsgesetz des Freifeldes von **S'**, vermindert entsprechend dem Produkt der Reflexionsgrade aller unterwegs getroffener Wände ρ_L :

$$\Delta I = \frac{P}{4\pi} \cdot \frac{e^{-m \cdot r} \cdot \prod_{L'=1}^L \rho_{L'}}{r^2} \quad (4.16)$$

$P/(4\pi)$ = fiktive, bei Quantisierung evtl. korrigierte Schallleistung der Quelle
bzw. des Pyrs / Raumwinkel,

r = Pyr-Laufweg = jeweiliger - bei Quantisierung korrigierter - Abstand
der „entdeckten“ Spiegelquelle bzw. Abstand Empfänger –Pyr -Spitze

L = Reflexionsanzahl,

ρ_L = Reflexionsgrad der L -ten unterwegs getroffenen Wand (ggf. richtungsabhängig),

m = Luftabsorptionsexponent, alles natürlich frequenzabhängig,

bzw. in Unterschleifen über mehrere Frequenzbänder parallel zu verarbeiten.

Das heißt, die Immissionsberechnung geschieht - wie bei jedem Strahlenverfahren-ganz einfach nebenher, „unterwegs“. Natürlich wird Gng. 4.16 nicht in jedem Moment der Immission wieder von vorne ausgeführt. Die Multiplikation mit den Reflexionsgraden geschieht im Moment der Reflexion des Pyrs. Teilt sich ein Pyr dabei – wie zu Anfang meistens – restlos in mehrere neue auf, so bleibt deren Ausstrahlungsdichte $P/(4\pi)$ konstant, die auftreffende Schallleistung teilt sich proportional den Raumwinkelfractionen auf und wird dann, je nach getroffener Teilfläche, separat mit deren Reflexionsgrad multipliziert. Die Schallleistung pro Raumwinkel über den Strahlquerschnitt jedes Teil- Pyrs bleibt konstant. Damit das näherungsweise erreicht wird, muss nach diffusen bzw. beugenden Reflexionen oder bei Richtwirkungen freilich eine genügende Anzahl neuer Strahlen ausgesandt werden, s. Kap.5.

4.3. Entwicklung der optimalen Quantisierung der Pyramidenstrahlen

Bei der Pyramidenstrahl-Verfolgung steigt die Rechenzeit mit der dritten Potenz der Reflexionsordnung. Dies ist für höhere Reflexionsordnungen immer noch ineffizient, und vor allem steigt die Strahlenanzahl doch wieder exponentiell nach Einführung von Streuungen. Die in Abschn. 4.1. herausgearbeitete prinzipielle Idee zur nötigen Anzahlbegrenzung lautete

„Wiedervereinigung durch Quantisierung“ !

In diesem Abschnitt soll das Lösungskonzept zur optimalen Art dieser (vorher fest zu legenden) Quantisierung entwickelt werden; im nächsten dann die Durchführung des (aktuell auszuführenden) Wiedervereinigungsvorgangs.

4.3.1. Die Quantisierung des Spiegelschallquellenraums

Sowohl der Raum als auch die Raumwinkel sind also vorweg in eine endliche Anzahl diskreter Stücke aufzuteilen, „zu quantisieren“. Die Laufzeit- bzw. Strecken- oder Herkunftsinformation darf nicht verloren gehen. Pyre unterschiedlicher Laufstrecken („Vorgeschichten“ bzw. Divergenz) dürfen also nicht zusammengemischt werden. Quantisierung allein der Oberfläche, d.h. der Reflexions-Orte ist falsch. Das Wiedervereinigungskriterium „ähnlicher Ort“ muss genauer „ähnlicher Quell-Ort“ heißen. Pyre müssten von irgendwie genormten Quellorten, um die jeweilige bisherige Laufstrecke versetzt, von Punkten *hinter* den spiegelnden Wänden kommen. Das wären per definitionem die Spiegelquellpunkte. Die Lösung heißt konsequent - und dies ist auch die entscheidende Idee: **Quantisierung des Spiegelschallquellenraums** !

Bild 4.3.1 Zur Quantisierung des Spiegelquellenraums (zweidimensionale schematische Darstellung): In der Mitte der Originalraum mit einem Quellpunkt **S** und einem Empfangspunkt **R**; um jenen herum, ab einem gewissen Mindestradius r_0 , konzentrische Ringe (Kugelschalen) mit stufenweise um Δr zunehmendem Radius, unterteilt in Zellen mit konstanten Bereichen von Polarwinkel $\Delta\delta$ (s. Bild b) und Azimutwinkel $\Delta\varphi$. In einer Zelle rechts ein ursprünglich dorthin gespiegelter Pyr mit Spitze (Spiegelquelle) **S'**; der zur Mitte **M** „zurechtgerückt“ wird; seine Orientierung (durch die gestichelte Linien angedeutete Raumwinkelbereiche) bleibt bei dieser Parallelverschiebung erhalten; der Raumwinkel für die Re-Emission in Richtung Originalraum wird auf gewisse, vorweg definierte Weise in Teilraumwinkel unterteilt, s. Büschel links, oben und unten.

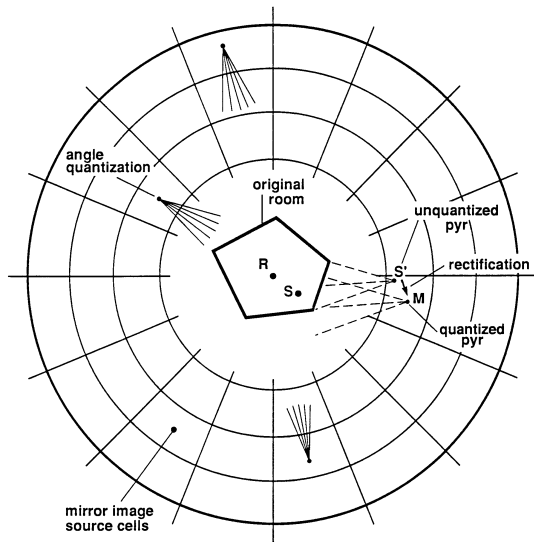
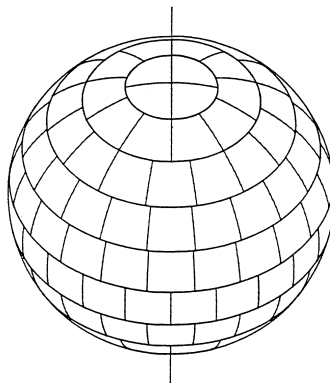


Bild 4.3.1b) Etwa gleichförmige Raumwinkel-Quantisierung um eine Punktquelle durch etwa gleich große Oberflächenquadrate auf einer Einheitskugel mit den Abmessungen $\sin \delta \cdot \Delta \varphi$ und $\Delta \delta$ - eine Möglichkeit zur Definition quantisierter Pyre (Details s. /H1/)



Diese Quantisierung des Spiegelschallquellenraums ist die logische Konsequenz aus der Kombination der Pyramidenstrahlmethode mit der Radiosity-Methode.

Wie schon erkannt: Die Simulation einer immer weiteren Zersplitterung der Schallausbreitung ist sinnlos angesichts der mit wachsender Reflexionsanzahl zunehmenden Diffusität bzw. Beugungseffekte. Dafür spricht auch ein physiologisches Argument: Allzu genau unterteilte Herkunftsrichtungen und Zeitverzögerungen sind ohnehin nicht hörbar. Das heißt: Der unendliche Gesamtraum („Himmel“) um den Originalraum, in dem alle Spiegelquellen (SSQ) liegen, wird in kleine Volumenelemente („SSQ-Raumzellen“) unterteilt (s. Bild 4.3.1.) ; wenn nun verschiedene Spiegelquellen in derselben Zelle zu liegen kommen, werden sie in deren Mitte „zurechtgerückt“ und in eine vereinigt; m.a.W., da ja die Spiegelquellenmethode in Form der Pyr-Methode durchgeführt werden soll:

Die Pyr-Spitzen werden auf die Mitten von SSQ-Raumzellen „zurechtgerückt“.

Bei diesem Zurechtrücken bleibt die Ausrichtung der Pyre erhalten, sie werden nur parallel verschoben. Inwieweit ihre Energien nun tatsächlich vereinigt werden, bestimmt der Überlappungsgrad ihrer Raumwinkel (s. Abschn. 4.4.), wonach per Interpolation die Energien einem dort entspringenden neu kreierten Pyr vererbt werden. Dadurch wird die Wiedervereinigung und die Anzahlbegrenzung der Pyre erreicht.

Aus physikalischen Gründen (Energieerhaltung), nimmt die Anzahl der Spiegelquellen in einem festen Entfernungsbereich Δr mit dem Quadrat von r bzw. der Reflexionsordnung L zu. Jede Zelle des ursprünglichen SSQ-Raums, d.h. ein Spiegelraum mit einer von irgendwo her genau einmal sichtbaren Spiegelquelle, hat bekanntermaßen (wie man o.B.d.A. am Beispiel zu einem Gitter gespiegelter Quaderräume sehen kann) im statistischen Mittel das Volumen des Originalraums V . Erst wenn die künstlich quantisierten SSQ-Raum-Zellen also das Volumen V überschreiten, ist im Mittel mit einem Wiedervereinigungseffekt zu rechnen.

Die Abstände der Spiegelquellen zur Originalraummitte entsprechen den Gesamtlaufzeiten von der Quelle zum Empfänger. Die Radien²⁸ sind deshalb ein Maß für das „Alter der Pyre“, wobei die „ältesten“ die innersten sind, die „jüngeren“ – da ja deren „Kinder“ – die Pyre mit weiter außen liegenden Quellpunkten. In jedem Stadium müssen die „ältesten Pyre“ zuerst bearbeitet werden. Es ist deshalb klar, dass zur Quantisierung des SSQ-Raums Kugelkoordinaten (r, δ, φ) dienen müssen. Der SSQ-Raum wird also in konzentrische Ringe und Raumwinkelsegmente mit konstanten $\Delta r, \Delta \delta, \Delta \varphi$ aufgeteilt (s. Bild 4.3.1b). Die so normierten SSQ-Orte bzw. Pyre werden durch drei entsprechende „Quantenzahlen“ (Nummerierungen) n_R, n_δ, n_φ identifiziert. Die Zellen haben die Abmessungen $\Delta r, r \cdot \Delta \varphi$ und $r \cdot \sin \delta \cdot \Delta \delta$, ihr Volumen ist $V_{SSQRZ} = r^2 \Delta r \cdot \Delta \varphi \cdot \sin \delta \cdot \Delta \delta$, der Raumwinkel der Immission (von den SSQ) wird in $\Delta \Omega_I = \Delta \varphi \cdot \sin \delta \cdot \Delta \delta$ –Stücke unterteilt.

Wo nun aber ist die Raummitte ? Wenn es nur einen Empfangspunkt gäbe, wäre es dieser. Wenn es mehrere gibt, kann nur ein Kompromiss gewählt werden, etwa der Schwerpunkt aus allen Empfangspunkten.

Werden die neuen Pyre nun gespiegelt²⁹, springen ihre Quellorte im SSQ-Raum kreuz und quer, meist auf die andere Seite, landen jedoch auf weiter äußeren Ringen (oder jedenfalls auf größerem Abstand r zu E, nur zufällig im selben r -Bereich). Auf der radialen Achse findet sozusagen ein ständiger „Überholvorgang“ vom innersten auf weiter äußere Ringe statt. Qualitativ nichts Anderes passiert auch bei diffusen Reflexionen oder Beugungen. Erfolg: Die Gesamtenergie des sich ausbreitenden Schalls bleibt - da die Raumwinkelstücke im SSQ-Raum konstant sind - auf eine maximale Anzahl von Pyr-Strahlen begrenzt. Während die Energien einzelner exakter Spiegelquellen (von der Wandabsorption einmal abgesehen) quadratisch mit der Spiegelungsordnung bzw. dem Laufweg sinken, bleiben die wiedervereinigten Energien der gequantelten Pyre in den besetzten Zellen des Spiegelquellenraumes konstant. **Die Zersplitterung ist besiegt !**

4.3.2. Zur optimalen Wahl der Segmentierung $\Delta r, \Delta \delta, \Delta \varphi$

Zur radialen Schrittweite Δr

Damit im Mittel nach jeder Generation von Spiegelungen die Pyrspitzen auch im nächst äußeren Ring zu liegen kommen, könnte die radiale Segmentweite Δr im ersten Ansatz gleich einer mittleren freien Weglänge des Raumes gewählt werden: also $\Delta r = 4V / S$. Allerdings wird dann der Sprung in den nächsten Ring zwar häufig erfolgen, in vielen Einzelfällen aber nicht. Das macht zwar hinsichtlich der Energieumverteilungen – bis auf eine gewisse Ineffizienz - nichts (wie noch in Kap. 4.5. gezeigt

²⁸ - wie sich noch in Kap. 4.5 zeigen wird, genauer eigentlich die Strecken von den SSQ zu den Flächenschwerpunkten der Teiloberflächen des Raumes, auf denen eigentlich die Vereinigung der Pyr-Energien stattfindet.

²⁹ Wenn ein Pyr im Rauminnern partiell eine transparente Wand trifft, wird jener Teil des Pyrs nicht gespiegelt, die Spitze des nicht gespiegelten Teils bleibt also in derselben SSQ-Raumzelle liegen.

wird). Aber ständiges Wieder-Zurück-Rücken auf den Mittelwert von r im entsprechenden Ring könnte eine Endlosschleife bewirken. Das könnte dann der Fall sein, wenn der Abstand spiegelnder Wände von der SSQ-Raum-Mitte $\Delta r_{\min}$ zufällig (das könnte bei „hineinragenden Wänden“ so sein) sehr viel kleiner als eine mittlere freie Weglänge ist, so dass der radiale Zuwachs der SSQ $2\Delta r_{\min} < \Delta r/2$ ist (s. Bilder 4.3.2). Damit dies zumindest sehr selten vorkommt, sollte Δr deutlich kleiner gewählt werden, also etwa in der Größenordnung dieses kleinsten Abstandes $\Delta r_{\min}$. Wie man anhand der Beispiele der Bilder 4.3.2. erahnen kann, wird dann ein mehrfaches Auftreten solcher Fälle extrem selten sein (nur im Fall von Bild a möglich). (Um eine Endlosschleife zu vermeiden, müsste sonst die Laufstrecke in den nächst höheren Δr -Bereich aufgerundet werden.)

Bild 4.3.2a Beispiel für nur geringfügiges Weiter-nach-Außen-Driften einer Spiegelquelle im SSQ-Raum: Innere Wand W_2 liegt dicht an der Mitte M des SSQ-Raums; deshalb liegt die Spiegelquelle zu S_n nächst höherer Ordnung S_{n+1} nur leicht weiter außen und landet wieder im selben Δr -Ring

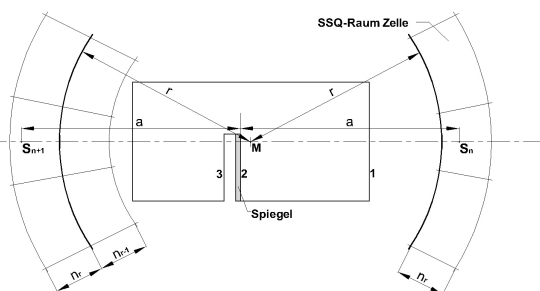
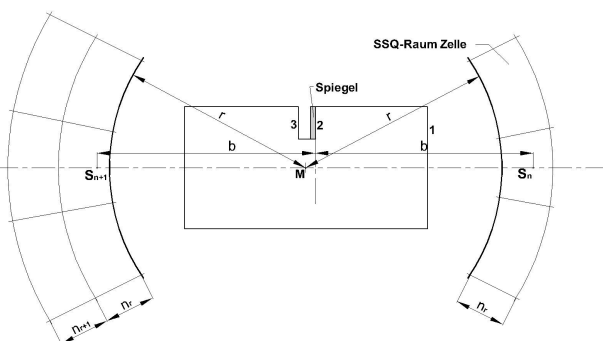


Bild 4.3.2b) Desgleichen für Weiter-nach-Innen-Rücken: Wand 2 liegt , von S_n aus gesehen, „vor“ M , so dass S_{n+1} sogar leicht weiter innen liegt; eine weitere Spiegelung an Wand 3 ist ausgeschlossen, da von S_{n+1} aus gesehen „vor“ der zuletzt gespiegelt habenden Wand 2 (vergl. Bild 4.2.21); im Pyr-Spiegelungs-Algorithmus wird so etwas dadurch verhindert, dass Wand 3 (nach Konvexzerlegung!) nicht in dem zu Wand 2 gehörigen Teilraum liegt.



Andererseits sollte Δr ganz einfach in der Größenordnung der (optimalerweise ja etwa gleich großen) Patches gewählt werden, denn in der werden sich die Sprünge der tatsächlichen Wegstrecken bewegen. Wenn ein kleineres Δr gewählt wird, können bei vorgegebenem Zellvolumen V ab dem inneren Grenzzadius gewährleistet sein soll, natürlich die Winkel $\Delta\delta, \Delta\varphi$ entsprechend größer gewählt werden. Δr zu klein zu wählen, dürfte auch wieder ineffizient werden, da zu häufige Umverteilungen die Folge sind; das müsste numerisch getestet werden.

Zur Optimierung der Raumwinkelsegmentierung $\Delta\delta$ und $\Delta\varphi$

Sollen die SSQ-Raum-Zellen das Raumvolumen $V_{SSQR} = r^2 \Delta r \cdot \Delta\varphi \cdot \sin\delta \cdot \Delta\delta = V$ beibehalten, müssten die Quantisierungswinkel $\Delta\delta$ und $\Delta\varphi$ mit wachsendem r immer kleiner werden. Das aber ist nicht Sinn der Sache: Ein immer größerer Vereinfachungs- und Wiedervereinigungseffekt mit steigender Reallaufzeit („Nachhallzeit“) ist ja erwünscht. Die Anzahl der Segmente pro Kugelschale sollte also konstant sein. Oder sollte, um eine gewisse Feinstrukturauflösung zu gewährleisten, ihre Anzahl der Komplexität des Raumes angepasst werden? Dann müsste sie in einem vernünftigen Verhältnis zur Anzahl K_0 der Wandelemente stehen. Dies aber ist auch nicht sinnvoll, denn der Nachhall hängt ja quantitativ nicht von der Zerstückelung der Raumbooberfläche ab. Die genauere Berücksichtigung des Schalleinfalls von Reflexionen niedriger Ordnung wurde ja bereits durch das zunächst unquantisierte Pyr-Tracing gewährleistet. Also sollte die Raumwinkelauflösung $\Delta\delta$ und $\Delta\varphi$ sich nach individuellen Bedürfnissen oder empirisch nach Genauigkeitsanforderungen richten. Sinnvoll wäre eine Ausrichtung an der Hörbarkeit von Richtungsunterschieden.

Plausibel wäre z.B. eine Wahl von 10 Winkelgraden entspr. $\Delta\delta = \Delta\varphi = \pi/18 \approx 0.175$. $\Delta\varphi$ sollte jedoch nur bei $\delta = \pi/2$ (auf dem „Äquator“ bzw. in der xy -Ebene) 10° betragen, in Polnähe sollte $\Delta\varphi$ größer werden, so dass der Raumwinkel „des Äquators“ $\Delta\Omega_\delta = \Delta\varphi \cdot \Delta\delta \approx 0.03$ konstant bliebe ($\Delta\varphi(\delta) = \Delta\varphi_0 / \sin\delta$) (s. Bild 4.3.1b). Das entspräche der Aufteilung des Gesamttraumwinkels 4π in $4\pi/0.03 \approx 413$ aufgerundet ca. $m=500$ Segmente.

4.3.3. Zum systematischen Fehler der Sichtbarkeit beim Zurechtrücken der Pyre, zur Optimierung eines inneren Grenzradius r_{min} und der Schrittweite Δr

Natürlich wird bei jenem Zurechtrücken ein Fehler gemacht. Manche SSQ wird man danach vom Empfangspunkt aus nicht mehr „sehen“ können, manch andere, vorher unmögliche danach doch. Natürlich ist dieser Fehler umso kleiner, je kleiner die SSQ-Raum-Zellen sind im Vergleich zum Abstand zum Originalraum. Deren Größe nimmt zwar nach außen hin zu, aber deshalb ja auch die Spiegelquellenanzahl darin, so dass sich die Verrückungsfehler im statistischen Mittel zunehmend ausgleichen und erstreckt nicht mehr hörbar sein werden.

Schon deshalb sollte die SSQ-Raum-Quantisierung erst ab einem Mindestabstand r_{min} von der Raummitte einsetzen, darunter fände unquantisiertes *pyr tracing* statt, s. Bild 4.3.3. Außerdem lohnt eine Quantisierung nicht innerhalb eines gewissen Radius – jedenfalls nicht bei rein spiegelnden, d.h. eindeutigen, nicht streuenden Reflexionen – weil ein Wiedervereinigungseffekt auch viel zu selten auftritt. Zudem werden die „Urpyre“, d.h. die von der Originalquelle ausgehenden, ja ohnehin (daher ja die Pyramidenstrahlentwicklung) aus jener als Spitze und den Wandpolygonen gebildet werden. Deshalb stellt sich die Frage, ob man einen nicht-quantisierten inneren SSQ-Raum abtrennen sollte. Bei einem gewählten inneren Grenzradius r_{min} und einer Schrittweite Δr_{min} beträgt das Volumen der innersten SSQ-Raum-Zellen $V_{ISSQRZ} = r_{min}^2 \cdot \Delta r_{min} \cdot \Delta\Omega$. Erst falls nun also V_{ISSQRZ} größer als das Raumvolumen V ist, ergibt sich der gewünschte Wiedervereinigungseffekt schon für die innersten Zellen – erst recht für die weiter äußeren, denn die V_{SSQRZ} steigen ja quadratisch mit r .

r_{min} müsste im Übrigen mindestens so groß sein, dass alle Empfangspunkte noch innerhalb des innersten Rings liegen.

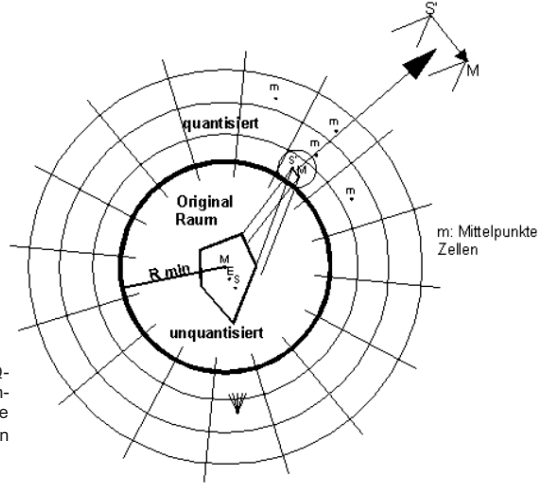


Bild 4.3.3. Zur Aufteilung des SSQ-Raumes (s. Bild 4.3.1.) in einen unquantisierten Innen-Raum (Grenze hier Kreis mit Radius r_{min}) und einen äußeren quantisierten.

Aus
$$r_{min}^2 \cdot \Delta r_{min} \cdot \Delta \Omega = V \quad (4.17)$$

könnte man nun r_{min} bestimmen, sofern Δr_{min} und die Raumwinkelsegmentierung so gewählt bleiben wie oben beschrieben. Ist L_{min} die Anzahl Reflexionen, ab der im Mittel die Quantisierung beginnen sollte, so kann man den Inneren Grenzradius auch schreiben als

$$r_{min} \approx L_{min} \cdot \Lambda \quad (4.18)$$

mit Λ als mittlerer freier Weglänge. Gng. 4.18 eingesetzt in Gng. 4.11 liefert

$$L_{min}^2 \cdot \Lambda^2 \cdot \Delta r_{min} \cdot \Delta \Omega = V \quad (4.19).$$

Statt der bei den Spiegelungen „kleinsten vorkommenden“ radialen Schrittweite (s.o.) sollte eine nur selten unterschrittene Größe

$$\Delta r_{min} = \Lambda / n_t \quad (4.20)$$

festgelegt werden mit z.B. einer Teilungszahl von $n_t = 10$.

Mit der Raumwinkelteilungszahl m (sodass $\Delta \Omega = 4\pi / m$) schreibt sich Gng. 4.19

$$\frac{L_{min}^2 \cdot \Lambda^3 \cdot 4\pi}{n_t \cdot m} = V \quad (4.21).$$

woraus man L_{min} bestimmen kann. Nach /H3/ lässt sich das Raumvolumen auch aus der mittleren freien Weglänge Λ und einem

„Formfaktor“ $\sigma = \sqrt[3]{36\pi} \cdot \frac{V^{2/3}}{S}$ (per definitionem für eine Kugel = 1) (4.22)

bestimmen nach $V = \frac{9\pi}{16} \cdot \frac{\Lambda^3}{\sigma^3}$ (4.23).

Eingesetzt in Glng. 4.21 ergibt sich $L_{\min}^2 = \frac{9}{64 \cdot \sigma^3} \cdot n_t \cdot m$ und schließlich

$$L_{\min} = \frac{3}{8 \cdot \sigma^{3/2}} \cdot \sqrt{n_t \cdot m} \quad (4.24).$$

Mit den o.g. plausiblen Parameterfestlegungen und mit $\sigma \approx 0.5$ (für einen mittelmäßig zerklüfteten, nicht-konvexen Raum mit den groben Hauptabmessungen von etwa 1:2:4) ergibt sich z.B. eine mittlere Reflexionsordnung von etwa $L_{\min} = 75$, ab der die Quantisierung erst nutzbringend würde. Ohne Teilungsfaktor ($n_t = 1$) ergäbe sich $L_{\min} \approx 24$ - auch scheinbar recht hoch. Dies ergibt sich jedoch nur bei reinen Spiegelungen. Falls Streuungen ins Spiel kommen (was durch eine entsprechend „streuende“ Energieumverteilung auf jeweils viele andere SSQ-Raum-Zellen realisiert wird, s. Kap.5.) wird sich jedoch eine Quantisierung bereits ab viel niedrigeren Reflexionsordnungen $L_{\min}$ bzw. kleineren Radien $r_{\min}$ lohnen.

Bei hochgradig zerklüfteten (nicht-konvexen) Räumen können SSQ in den Raum selbst fallen. Innerste SSQ-Raum-Ringe sollten aber natürlich stets außerhalb der Räume liegen. Schon deshalb sollten die **quantisierten SSQ-Räume für alle konvexen Teilräume separat definiert werden.**

4.3.4. Klassen von Pyren

Zwischenbilanz zur Raumaufteilung: Es ergäben sich also eventuell folgende „Klassen von SSQ-Raum-Zellen“:

- U) unquantisierte, d.h. nicht zurechtgerückte Pyre bzw. Spiegelquellen innerhalb eines bestimmten Radius nach Glngn. 4.18 und $L_{\min}$ nach 4.21; hierauf wird die Methode der Verfolgung unquantisierter Pyre (bzw. Konstruktion von Spiegelquellen) angewandt – jedoch nicht in rekursiver Abarbeitungsfolge, sondern in der noch in Kap.4.5. zu beschreibenden iterativen;
- Q) quantisierte, d.h. zurechtgerückte Pyre außerhalb des o.g. Grenzradius’;
- B) quantisierte Pyre, evtl. besonderer Form – „Kantenstrahler“ zur Simulation der Beugung (s. Kap.5.);
- D) Pyre mit Spitzen auf, statt hinter Raumwänden zur Simulation diffuser statt geometrischer Reflexionen, aber mit Information über ihre tatsächliche Laufstrecke - zur Vereinfachung bei inzwischen total-diffusen Reflexionen.

Eine solche Raumaufteilung erfordert allerdings ein flexibleres Speicherkonzept: Während im unquantisierten Teil neben dem eigentlichen Pyr-Inhalt, den Schallenergien, auch die geometrischen Pyr-Daten (exakte Positionen der Pyrspitzen und Pyrkanten) explizit gespeichert werden (s. Tab. 4.1.1.), werden im äußeren quantisierten Teil ab $r_{\min}$ nur Quantenzahlen gespeichert, eventuell sogar nicht mal die (s. Tab. 4.3.1.).

hen wie die des SSQ-Raums selbst.³⁰ Von jeder SSQ-Raum-Zellmitte ginge dann ein „Büschel“ sehr vieler normierter Pyre aus, in die je nach Überlapp aufgesplittet und einsortiert wird (s. Bild 4.3.1.). Jeder Teilraumwinkel (mit mittlerem Polarwinkel α und mittlerem Azimutalwinkel β) bzw. Pyr könnte, ähnlich wie bei der Teilung des SSQ-Raums, durch zwei weitere, untergeordnete Quantenzahlen n_α und n_β festgehalten werden oder besser wieder durch eine eindeutig zugeordnete Durchnumerierung des Rückstrahlraumwinkels $n_\Omega' = 1 \dots N_\Omega' = 4\pi / \Delta\Omega'$. Damit wäre das für richtig erkannte Ziel einer Raum- und Raumwinkelteilung im Prinzip erreicht; die Pyre wären durch die „Quantenzahlen“ n_R, n_Ω für den Raum und n_Ω' für den Rückstrahlraumwinkel nummeriert. Es gäbe davon allerdings eine riesige Anzahl mit riesigem Speicherplatzbedarf. Dieser wäre, obwohl der Radius r unbegrenzt ist, nur scheinbar unendlich, denn es wurde ja bereits (in Abschn. 2.3) erkannt, dass es nur eine endliche Anzahl von besetzten SSQ-Raum-Ringen gibt, die in der Größenordnung von $N_{R\max} = 2R_{\max} / \Delta r \approx 100$ liegt; gleichzeitig zu speichern wären, bei je 1000 Raumwinkelsegmenten für Immission und Emission, die Daten von größenordnungsmäßig $100 \cdot 1000 \cdot 1000 = 10^8$ Pyren vorher festgelegter Form, in die nun also, je nach Raumwinkelüberlappung, Teilenergien gespiegelter und zurechtgerückter Pyre einzusortieren wären – was auch Aufteilung bedeutet. Sobald ein innerer Ring des SSQ-Raums frei geworden ist, müssten neue solcher „Normpyre“, d.h. ihre Daten, für den nächsten äußersten Ring kriert werden. Alle Pyre werden nun – geometrisch wie beim unquantisierten Pyramidenstrahlverfahren, wenn auch in der Reihenfolge „jeweils der älteste zuerst“ – auf den Originalraum projiziert, d.h. jeweils der Reihe nach auf dessen Wände bzw. konvexen Polygone, je nach Überlappung aufgesplittet und gespiegelt, usw. - wobei sich ihre Energien und Wege **nochmals** aufsplitten – ein unerhört komplizierter Vorgang – der vermutlich nicht effizient ist.

Als nächstes wird jedoch klar: Es müssen doch gar nicht alle Pyre im SSQ-Raum in **alle** Raumrichtungen abstrahlen ! Denn (s. Bild 4.3.1.) nur ein kleiner Teil der Pyre wird Teile des Originalraums treffen – von je weiter weg bzw. je höher die Reflexionsordnung, umso weniger. Auch dürften die Rückstrahlraumwinkel $\Delta\Omega'$ mit zunehmender Entfernung vom Originalraum nicht gleich groß bleiben, denn sonst würde die Raumauflösung bald zu grob werden (bei einem bestimmten Abstand würde gar der ganze Raum durch einen einzigen Pyr abgedeckt).

Die Rückstrahlraumwinkelteilung von den SSQ-Raum-Zellen aus wird daher am besten an der Teilung des Originalraums in die Polygone seiner Oberfläche ausgerichtet.

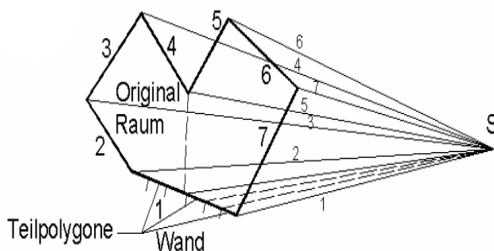
Eine Zerlegung in Teilraumwinkel findet im Rahmen der im unquantisierten Pyr-Verfahren (UPBT) vorgesehenen Schleifen über alle Wände bzw. Polygone ja ohnehin statt. Man muss sie nur ausnutzen ! Demnach gehen von jeder SSQ-Raum-Zelle, unabhängig vom Abstand r , gleich viele quantisierte Pyre aus, maximal so viele wie Polygone. Es werden einfach von jeder SSQ-Raum-Zellenmitte aus alle Polygone des Originalraums angepeilt, praktisch freilich nur die jeweils jenseitigen, wel-

³⁰ Eine Unterteilung in **genau** gleich große Raumwinkel ist ja (außer bei den 5 regulären Körpern) unmöglich, nur in ungefähr gleich große, z.B. wie in Bild 4.3.1b. Die Form dieser Teilung auf einer gedachten Kugel könnte sowohl dreieckig wie auch z.B. viereckig sein, jedenfalls möglichst einfach, so dass entsprechend etwa 3- oder 4-eckige Pyre entstehen, s. z.B. bei /K8/ , s. Bild 6.2.

che (im Sinne des Spiegelquellenverfahrens) dem Pyr ihre Vorderseite zuwenden, s. Bild 4.3.5.

Auf diese Weise besteht der einzige Unterschied zwischen der quantisierten und unquantisierten Pyramidenstahnenmethode in einer Änderung der Ausführungsreihenfolge: die durch Anpeilen der Wandpolygone entstehende Pyre (d.h. ihre Daten, bestehend aus Kanten, Flächen und eingeschlossenen Raumwinkeln) werden für alle SSQ-Raum-Zellen eines Ringes (genauer: einer Zeile, s. Abschnitt 4.5.) vorweg einmalig kreiert und dann ringweise nach außen statt hierarchisch abgearbeitet. Der Aufspaltungsvorgang findet so nicht, wie zunächst angedacht, zweimal (erst durch fiktive Raumwinkel, dann durch Polygone) sondern nur einmal statt, eben, wie ohnehin im Pyr-Verfahren, durch die teilweise getroffenen Polygone. Eine neue, künstliche Raumwinkelquantisierung (außer der natürlichen, durch die Polygone vorgegeben) erweist sich also als redundant. Unter Anderem diese Erkenntnis geht entscheidend über die noch 1996 in /H5/ veröffentlichte Lösung hinaus bzw. löst die dort noch formulierte Frage „wie findet man schnell benachbarte Pyre“ auf einfache Weise.

Bild 4.3.5. Anpeilen des Originalraums (hier links stark vereinfacht und zweidimensional) von einer SSQ-Raum-Zellenmitte aus (S, rechts); daraus ergibt sich die (Raum-)Winkelteilung von selbst; involviert sind dabei nur diejenigen Polygone, die S ihre Vorderseite zuwenden, also die von S aus jenseitigen (hier links); die konvexen Polygone des konvex-zerlegten Raums sind jedoch noch in etwa gleichgroße Teilpolygone zu zerlegen, wie hier bei Wand 1 unten angedeutet, so dass sich auch entsprechend mehr Pyre ergeben.



4.3.7. Zerlegung der Raumbereichsfläche in Teilpolygone

Jene Polygone wären übrigens, nach den Vorüberlegungen aus Kap. 4.2., nicht die ganzen Raumwände, sondern nur ihre nach Konvexzerlegung des Raumes entstandenen konvexen Teile, teils auch transparente Trennwände (an denen statt Spiegelung nur Teilung statt findet.) In der Regel werden sie von recht verschiedener Größe sein. Damit durch ihr Anpeilen eine ungefähr gleiche Raumwinkelteilung erreicht wird, sollten sie deshalb – freilich in einer dem gesamten QPBT-Verfahren vorgeschalteten nur einmalig ablaufenden weiteren Raumbereichsflächenzerteilungsprozedur - in ungefähr gleich große, 3- oder 4-eckige Teilpolygone zerteilt werden.³¹

³¹ Wie man konvexe Polygone in etwa gleich große Stücke zerlegt, am besten in reguläre Dreiecke oder Quadrate, soll hier, da für vielfältige numerische Anwendungen umfassend gelöst – z.B. bei der gleich motivierten Boundary-Elemente-Methode - nicht näher diskutiert werden. Triangulierung z.B.: durch Teilung eines n-Polygons von einer Ecke aus in n-2 Dreiecke, Zerlegung dieser Dreiecke durch gleichmäßige Teilung seiner Seitenkanten und Verbindungslinien in untereinander ähnliche Teildreiecke; Nachteil: es entstehen u.U. Gruppen recht unterschiedlich geformter, z.B. recht spitzer Dreiecke; besser erscheint eine Aufrasterung der Polygonflächen in kleine Quadrate durch ein entspre-

Die Teilpolygone sollten von der Größenordnung der kleinsten Wandstücke des Raumes sein. Diese sollten natürlich nicht beliebig klein kreiert werden schon aus Gründen der „Unschärfe“ bei tieferen Frequenzen bzw. längeren Wellenlängen. Deshalb sollten die Teilpolygone andererseits - damit auch geometrische Reflexionen an ihnen denkbar sind - mehrere Wellenlängen des mittleren Frequenzbands breit sein. Die „richtige“ Wahl wird ein Kompromiss sein müssen – ein noch offenes Problem. Da viele der K_0 Wände bereits konvex sind, und selten in wesentlich mehr als 10-100 Teilpolygone zerlegt werden, wird es in der Größenordnung von $N_p = 10 \cdot 100 \cdot K_0$, also größenordnungsmäßig meist $N_p = 10^3 \cdot 10^5$ Teilpolygone geben. Alle N_p Teilpolygone - und damit gleichbedeutend alle die Teilpolygone aneinandergrenzenden quantisierten Pyre ! - werden mit $n_p = 1 \dots N_p$, durchgängig über alle Teilräume, Wände, konvexen Polygone, durchnummeriert, d.h. sind eine Funktion der betreffenden Objektnummern. Umgekehrt müssen aus n_p die Nummern des Teilraums, der Wand und des konvexen Polygons aus der Nummer rekonstruierbar sein.

4.3.8. Der Datensatz eines gequantelten Pyr

Die Pyre sind jetzt also hinsichtlich der Geometrie „quantisiert“ durch

- n_R als Abstandszahl vom Mittelpunkt,
- n_Ω = Nummer des Raumwinkels (daraus eindeutig ableitbar $n_{\Delta\delta}$ und $n_{\Delta\varphi}$) für den Quellort des Pyrs im Spiegelquellenraum in Kugelkoordinaten;

und durch

- n_T = Nummer des aktuellen Teilraums des Originalraums (denn nur an dessen Wänden ist ja zu spiegeln);
- n_p = Nummer des angepeilten Teilpolygons, definierend die Rückstrahlrichtung, den Rückstrahlraumwinkel, implizit auch die Kantenvektoren.

Der Speicher für die Pyr-Daten ist zeilenweise organisiert: Die Zeilennummer N_Z im Speicher ist ein Maß für das „Alter der Pyre“, das (bis auf eine *modulo*-Funktion mit dem Faktor Δr) proportional ist zur Wegstrecke von der Pyrspitze bzw. Spiegelquelle zum reflektierenden und vereinigenden Teilpolygon (dessen Flächenschwerpunkt), maßgebend für die Abarbeitungsreihenfolge.

n_R dagegen ist ein Maß für den Pyrspitzenabstand zur *Raummitte*, maßgeblich für die Definition der Pyr-Geometrie, die ja gegeben ist durch die Lage im SSQ-Raum, Raumwinkel und Strahlendivergenz bzw. Nutzung des r^2 -Gesetzes bei der Immission³². n_R (oder r selbst) wird deshalb im Pyr-Datensatz gespeichert. n_Ω , n_T und n_p werden dagegen, zusammenfassend, umkehrbar-eindeutig eine „Spaltennummer“ im Speicher N_s zugeordnet. Damit ergeben sich diese drei Quantenzahlen aus der Adresse des Pyrdatensatzes und sind nicht mehr in ihm zu speichern.

chendes Liniennetz, wobei nur einige wenige nicht-quadratische Randflächen entstehen, s. z.B. Bild 5.3.

³² Achtung: Der Weg-Unterschied zwischen den zu n_z und n_r gehörenden Strecken ist nicht konstant, s. Bild 4.5.1. Diese Unterscheidung ist wichtig bei gestreuten statt gespiegelten Pyren, s. Kap. 5.

Die folgende kurze Tabelle fasst die zur Speicherplatzersparnis minimierten wenigen Daten eines Pyrs zusammen: sie bestehen praktisch nur noch aus den Schallenergien (verschiedener Frequenzbänder), keinen konkreten Ortsangaben oder Vektoren mehr, da sie implizit aus den Quantenzahlen und den angepeilten Teilpolygonen hervorgehen (vergl. Tab. 4.1.1. für den ungequantelten Pyr). Eine Speicherung dieser relativ vielen REAL-Zahlen wäre Speicherplatzverschwendung, zumal für alle Pyre gleicher Richtung, nur verschiedenen „Alters“ gleich. Auf eine Speicherung des Raumwinkels des Pyrs sollte (wie unten erläutert) ebenso verzichtet werden.

Tab. 4.3.1. Datensatz eines gequantelten Pyr in Zeile N_z und Spalte N_p des Speichers

- **Quantenzahl n_R**
- **Schallenergien bzw. Schallleistungen pro Raumwinkel für verschiedene Frequenzbänder**

Andererseits sollte, um die später bei der Einsortierung zu übertragende Energie interpolieren zu können, der **Raumwinkel der Pyre** durchaus als Variable zur Verfügung stehen. Der durch eine Pyramide aufgespannte Raumwinkel Ω ist gleich der Fläche auf der Einheitskugel, begrenzt durch z.B. 3 Großkreise durch die Ecken A,B,C, Durchstoßpunkte der Kantenvektoren $\mathbf{v}_i$, die ein sphärisches Polygon bilden (s. Bild 4.1.1.). Er ist leider - gemessen an der scheinbar einfachen Fragestellung und der Tatsache, dass es millionenfach zu berechnen ist - nur rechenzeitlich aufwändig zu bestimmen (s. Abschnitt 4.4.2.). Es kann jedoch näherungsweise darauf verzichtet werden.

4.3.9. Vorabschätzung zum Arbeitsspeicherbedarf

Es wird Speicherplatz für maximal $N_{R_{\max}} \cdot m_{\Omega} \cdot N_p \approx 10^7 \dots 10^{10}$ Pyre und damit ca. 10^8 bis 10^{11} REAL-Zahlen bzw. 100 MB bis 100GB Arbeitsspeicher vorgesehen werden müssen – ein sehr hoher Bedarf, der aber heute im Bereich des technisch Machbaren liegt. Wie in Kap. 4.5 noch gezeigt werden wird, kommt man jedoch mit 2 bis 10 mal weniger Speicherplatz aus, da im Mittel nur ein kleinerer Teil der bereitgestellten SSQ- Raumzellen besetzt ist.

4.3.10. Zusammenfassung

Das Modell der Raumwinkelteilung durch die Raumpolygone selbst ist gegenüber dem der konstanten Teilung des ganzen Raumwinkels klar vorzuziehen,

- a) weil durch den Verzicht auf eine explizite, „künstliche“ Raumwinkelquantisierung eine erhebliche geometrischen Vereinfachung erreicht wird;
- b) weil dadurch gleichzeitig auch ein anderes, früher als praktisch unlösbar angesehenes Problem gelöst wird:

Das Problem, wie man bei der Abarbeitung der Spiegelungen jeweils schnell „benachbarte“ Pyre bzw. deren Nummer n_{Ω}' findet, d.h. solche mit teilweise überlappendem Raumwinkelbereich (s. Bild 4.4.1.), erledigt sich nun durch das Pyr-Clipping an den Teilpolygonen von selbst bzw. wird gelöst durch Nutzung o.g. direkter Zuordnungen Teilpolygone-Pyre.

Quantisiert wird

- der Spiegelquellenraum, und zwar in Kugelkoordinaten mit der konstanten **Segmentierung** $\Delta r, \Delta \delta, \Delta \varphi$ um einen mittleren Empfangspunkt, und
- der Raumwinkel der Rückstrahlung von dort zum Originalraum, und zwar durch (vorweg zu erzeugende) kleine, etwa gleich große Teilpolygone seiner Oberfläche; durch Verbindung der Ecken jener Teilpolygone mit den Mitten der Zellen des SSQ-Raums entstehen, „genormte“ oder „gequantelte“ Pyramidenstrahlen („Pyre“);
- ein gequantelter Pyr ist deshalb ein Pyr mit einem im SSQ-Raum „zurechtgerückten“, „genormten“ Quellort (Spitze) und einem durch die Teilpolygone des Originalraums festgelegten Abstrahlraumwinkel.

Es wird nun im Prinzip die Spiegelquellenmethode in der effizienten Form der Pyramidenstrahlverfolgung angewandt; jedoch in einer

- anderen Reihenfolge: es werden die Spiegelquellen – „Pyre“ – nicht rekursiv, sondern iterativ nach Maßgabe ihres „Alters“, d.h. Abstands r von der Mitte des Spiegelquellenraums abgearbeitet, immer „der älteste zuerst“;
- nach den Spiegelungen werden die Spiegelquellen= Pyr-Spitzen auf die Mitten der Zellen des Spiegelquellenraumes „zurechtgerückt“;
- danach werden sie, sobald sie „dran“ sind, wieder auf den Originalraum projiziert – wobei ihre Energien sich, je nach den sich ergebenden Raumwinkeln der Überlappung mit dessen Teilpolygonen, auf die vorquantisierten neuen Pyre verteilen, „vererben“.

Dadurch entsteht effizient der erwünschte Wiedervereinigungseffekt.

4.4. Wiedervereinigung und Schalleistungsübertrag

4.4.1. Raumwinkel-bezogene Interpolation bei Überlappung von Pyren und Lösung der Frage „wie findet man schnell benachbarte Pyre“

Im Prinzip also soll die Energie eines „alten“ Pyr entsprechend dem Überlappungsgrad der Raumwinkel auf „neue“, benachbarte, vorquantisierte - Pyre verteilt werden, etwa nach der Gleichung:

$$\Delta E_{\text{übertrag}} = \Delta E_{\text{alterPyr}} \cdot \frac{\Delta \Omega_{\text{Überlapp}}}{\Delta \Omega_{\text{alterPyr}}} \quad (4.25)$$

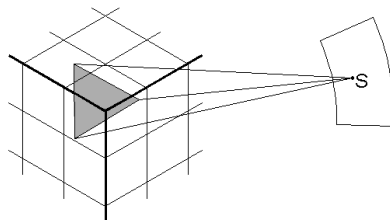
Da ja denselben „neuen“ Pyren Energie von mehreren „alten“ her „vererbt“ wird, wird dadurch der angestrebte Wiedervereinigungseffekt erreicht.

Wie aber können - beim millionenfach ablaufenden Umverteilalgorithmus - räumlich und raumwinkelmäßig benachbarte Pyre, in die einzusortieren wäre, schnell gefunden werden ?

Falls alles zweidimensional wäre (s. Bild 4.4.2.), wäre eine nächste Winkelnummer rasch gefunden, nicht aber, wie hier, in einem 5-dimensionalen Suchvorgang (3 Dimensionen im SSQ-Raum, 2 bei der Rückprojektion auf die Raumboherfläche, s. Bild 4.4.1). Dieses noch im Jahre 1996 /H5/ veröffentlichte Modell ist also nur im Prinzip richtig, praktisch kaum umsetzbar bzw. nicht effizient.

Nun wurde oben (s. Bild 4.3.5.) schon die neue Lösung erläutert: Die Raumwinkel-aufteilung wird implizit durch das ohnehin nötige Clipping der Pyre an den Teilpolygonen erreicht - nur eben nach seitlichem Versatz bzw. Zurechtrücken der Pyre. Damit sind zwar ungleiche Raumwinkel verbunden, aber dies macht nichts, wichtig ist ja nur: es sind endlich viele, vordefinierte. Entscheidender Vorteil: Im Rahmen der Projektion von Pyren auf den Originalraum und der dabei ohnehin abzulaufenden Schleife über alle (Teil-)Polygone (s. Abschn. 4.2.8) findet automatisch die „Einsortierung“ in (durch Teilpolygone gegebene) Teilraumwinkel statt, ohne „nächste Nachbarn“ explizit erst suchen zu müssen, die Reihenfolge ist egal, s. dazu Bild 4.4.1., schon Bild 4.2.1 zeigte das Clipping an **einem** Polygon räumlich.

Bild 4.4.1. Teilpolygone (hier Quadrate rund um eine rechtwinklige Ecke) in der Draufsicht auf den Originalraum von einer SSQ-Raum-Zelle aus gesehen: hellgrau der Bestrahlungsbereich eines dreieckigen Pyr und die damit entstehenden Teilflächen.



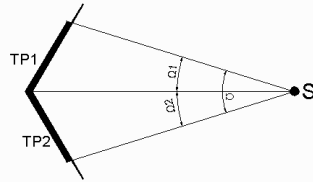
Berechnet man für alle Pyre – die alten wie die neuen – ihre Raumwinkel exakt, verteilen sich (ohne Richtwirkungen) ihre Schalleistungen korrekt. Eigentlich müssen die Raumwinkel ausgerechnet werden. Bei quantisierten Pyr, die von mehreren früheren Energie vererbt bekamen, ist nämlich, anders als beim unquantisierten Pyr-

Verfahren, ihre Energie pro Raumwinkel nicht mehr konstant, s. Bild 4.4.2. Im oberen Teil ist zum Vergleich noch einmal die Aufteilung eines unquantisierten Pyrs auf zwei neue unquantisierte dargestellt, wie sie beim UPBT durch das Clipping an den Kanten zwischen zwei Wandpolygonen **erst entstehen**.

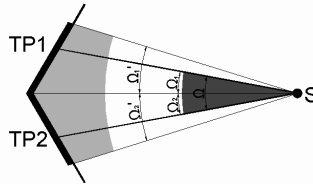
Bild 4.4.2. Zur Raumwinkel-bezogene Interpolation bei Überlappung von Pyren
(zweidimensionale Darstellung)

a) oben, **ohne** Quantisierung:

Aufteilung eines unquantisierten Pyrs von einem exakten Spiegelquellpunkt **S** (rechts) auf zwei Teilpolygone TP1 und TP2 eines Raumes (links), die als Schnittpolygon aus den projizierten Pyr- und Wandpolygonen **erst entstehen** (vergl. Bilder 4.2.11+12)



b) unten, **mit** Quantisierung: Aufteilung eines unquantisierten Pyrs (**fett**) von einem auf die Mitte einer SSQ-Raum-Zelle zurrechtgerückten Quellpunkt **S'** (rechts) auf zwei **vordefinierte** Teilpolygone TP1 und TP2 eines Raumes (links), wobei nur jeweils ein Teilraumwinkel des vorigen Pyrs sich mit denen durch die Teilpolygone **vorgegebenen** (dünn gezeichnet) überschneidet.



Ohne Quantisierung deckt demnach der Raumwinkel des alten Pyrs exakt die der beiden neuen Pyrs ab ($\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$) - und natürlich bleibt (ohne Absorption) auch die Energie erhalten ($E = E_1 + E_2$). Dabei bleiben die Proportionen bzw. die Abstrahldichten erhalten: $E/\Omega = E_1/\Omega_1 = E_2/\Omega_2$.

Mit Quantisierung (unten) dagegen sind die quantisierten Pyre mit ihren Raumwinkeln Ω_1' und Ω_2' durch die Teilpolygone TP1 und TP2 **bereits vorgegeben** – zusammen größer als die des alten Pyrs ($\Omega_1' + \Omega_2' > \Omega_1 + \Omega_2 = \Omega$). Die Energie muss natürlich auch hier erhalten bleiben, verteilt sich aber, je nach Überlappung, gemäß Glng. 4.25, auf die Raumwinkel Ω_1' und Ω_2' , wobei sich die Abstrahldichten zunächst „ausdünnen“: $E_1/\Omega_1' < E/\Omega$ und $E_2/\Omega_2' < E/\Omega$. Nach Vererbung von Energien mehrerer alter Pyre auf neue, können letztere mal eine etwas größere, mal eine etwas kleinere Abstrahldichte aufweisen.

4.4.2. Berechnung des Raumwinkels eines Pyramidenstrahls

Zur Ausführung dieser Raumwinkel-bezogenen Interpolation bedarf es natürlich erst einmal der Berechnung der Raumwinkel - ein nicht ganz so triviales Problem, da mit diversen trigonometrischen und damit rechenzeitintensiven Funktionen verbunden. Und jene Interpolationen sind ja „in der untersten Schleife“ milliardenfach auszuführen. Im Prinzip lässt sich der Raumwinkel eines Pyrs (man betrachte dazu Bild 4.1.1.) berechnen durch Ausnutzung eines Satzes aus der sphärischen Trigonometrie.

Danach ist der Raumwinkel eines sphärischen Dreiecks gleich dem "sphärischen Exzess" (d.h. Überschreiten den Winkelsumme 180°);

$$\Omega = \alpha + \beta + \gamma - \pi \quad (4.26),$$

wenn α, β, γ die auf der Einheitskugel mit Radius 1 um die Pyrspitze zwischen den Tangenten an die Großkreise gemessenen "sphärischen" Winkel sind. Von der (i.A. unendlichen) Pyramide werden also zur Berechnung ihres Raumwinkels nur die n auf den Betrag auf 1 normierten Kantenvektoren $\mathbf{v}_i$ benötigt (s. Datensatz unquantisierter Pyr, Tab. 4.1.1.; im Falle eines quantisierten Pyr vorzuberechnen). Für $n > 3$ Pyr-Kanten bzw. Ecken auf der Einheitskugel mit sphärischen Winkeln δ_i ist Glng. 4.26 sinngemäß (ein n -Polygon ist ja in $n-2$ Dreiecke zerlegbar) zu modifizieren zu

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \delta_i - (n-2)\pi \quad (4.27)$$

Nun gibt es 2 Möglichkeiten der Berechnung der δ_i aus den Kantenvektoren $\mathbf{v}_i$:

a) mit Hilfe von Formeln aus der sphärischen Trigonometrie; da dies nur dreiecksweise möglich ist, ist dies sehr umständlich: es sind neben $12n-20$ Additionen, $15n-25$ Multiplikationen, $5n-9$ transzendente Funktionsaufrufe notwendig. Letztere sind mit Abstand (oft 100 mal länger als etwa Multiplikationen) die rechenaufwändigsten- also kaum zu vertreten;

b) mit Hilfe der Nutzung der Winkel zwischen den Pyrseitenebenen als Winkel im sphärischen Polygon; dazu wären zwar die Normalenvektoren $\mathbf{n}_i$ auf den Pyr-Seitenebenen zu berechnen, aber die können wegen der Prüfungen, ob Empfangspunkte im Pyr enthalten sind, ohnehin als für jeden Pyr vorberechnet angenommen werden; weiter kann man ausnutzen, dass die Winkel im sphärischen Polygon gleich denen zwischen den Seitenebenen der Pyramide sind, denn in jenen liegen ja auch die Großkreise und die Tangenten, zwischen denen die sphärischen Winkel gemessen werden; deshalb ergeben sie sich einfach aus den Skalarprodukten aus den Seitenebenen-Normalenvektoren:

$$\delta_i = \pi - \arccos(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_{i-1}) \quad (4.28).$$

Bilanz:

Die Pyr-Seitenebenen-Normalenvektoren vorausgesetzt, werden neben $5n+1$ Additionen und $9n+1$ Multiplikationen nur noch n transzendente Funktionsaufrufe benötigt.

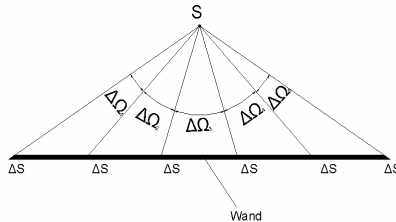
Es ist also klar, dass Methode b zu verwenden ist.

Nun wurde oben bereits dargelegt, dass eine Quantisierung des SSQ-Raums, Zurückrücken und Wiedervereinigen der Pyre erst ab einem gewissen Mindestabstand (etwa 3 mittleren freien Weglängen) vom Originalraum Sinn macht. Dann sind alle vorkommenden Raumwinkel klein, man kann eventuell auf die Berechnung der Raumwinkel der Pyre verzichten und näherungsweise zu einer flächenmäßigen Interpolation übergehen, also etwa nach:

$$\Delta E_{\text{übertrag}} \approx \Delta E_{\text{alterPyr}} \cdot \frac{\Delta S_{\text{Überlapp}}}{\Delta S_{\text{alterPyr}}} \quad (4.29)$$

Der **Fehler bei flächen- statt raumwinkelproportionalem Energieübertrag** ist bei entfernten Pyren gering, wie qualitativ Bild 4.4.3 verdeutlicht.

Bild 4.4.3. Zur Ungleichheit Raumwinkel- und Flächenteilung (hier zwei-dimensional): Hier z.B. werden 5 Teilpolygonflächen ΔS von einem relativ nahen SSQ-Raum-Quellpunkt S aus angepeilt; die Raumwinkel $\Delta\Omega_1$ und $\Delta\Omega_5$ am Rand sind dadurch deutlich kleiner als die in der Mitte.



Rechenbeispiel: Zur quantitativen Untersuchung wurde einmal die (recht breite) Pyramide betrachtet, die sich aus dem Mittelpunkt und der „Bodenfläche“ eines Würfels ergibt, deren Raumwinkel demnach $4\pi/6$ beträgt. Erweitert man hier die Bodenfläche seitlich um 10% - das entspräche bei der Zusammenführung von Pyramidenstrahlen bei der Quantisierung einem Elftel Überlapp mit der nächsten Pyramide - erhöht sich der Raumwinkel nur um rund 5%, also ein Fehler von 1:2. Bei einem halben Öffnungswinkel von nur ca. 18° statt 45° (Pyrspitze 3 mal höher), bewirkt eine gleichartige Grundflächenerweiterung um 10% nach links eine Raumwinkelerhöhung von bereits ca. 9%; der Fehler der flächenproportionalen gegenüber der raumwinkelproportionalen Rechnung beträgt also nur noch rund 10%. Er geht natürlich im Fernfeld, d.h. mit abnehmendem Ausgangswert des Raumwinkels, gegen null.

Andererseits ist der Mehraufwand zur Raumwinkelberechnung gering. Ob auch die Rechenzeit nur unwesentlich höher ist, ist angesichts der Aufrufe trigonometrischer Funktionen allerdings fraglich. Bei flächenproportionaler Näherung müsste beachtet werden, dass die Summe der Energieüberträge von einem Pyr her gleich der ankommenden ist (Energieerhaltung), d.h. die Anteile sind entsprechend zu normieren.

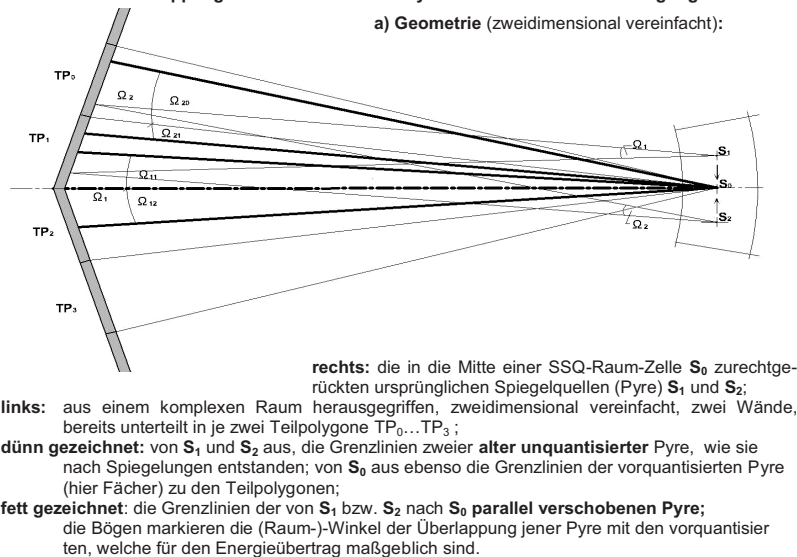
4.4.3. Zum Problem, dass die Originalschallquelle eine Richtwirkung aufweist

Wenn die Quelle eine hätte, hätten natürlich auch alle Spiegelquellen eine. Statt einfacher Proportionalrechnung (Glng. 4.25) müssten dann beim Energieübertrag Integrale über die Richtwirkung gebildet werden. Abgesehen vom Aufwand aber ginge dies nicht, denn gequantelte Pyre haben unterschiedliche Vorgeschichten (unterschiedliche Spiegelungsfolgen), d.h. ursprüngliche Abstrahlrichtungen sind nicht mehr eindeutig rekonstruierbar, Teilschallleistungen wurden bereits über ganze Raumwinkel „verschmiert“. Dieses Problem kann jedoch einfach dadurch gelöst werden, dass gleich zu Anfang genügend enge Pyre mit entsprechend unterschiedlichen Schallleistungen ausgesandt werden, die in sich homogen (mit konstanter Energie/Raumwinkel) sind – und homogen bleiben. Mit oder ohne Richtwirkung: Auch beim quantisierten Pyr-Tracing werden immer die aktuellen Teilenergien übertragen - ohne dass Vorgeschichten gespeichert zu werden brauchen. Ein besonderes Problem von Richtwirkungen stellt sich dann nicht mehr – übrigens auch nicht bei den Richtwirkungen unterwegs auftretender Beugung.

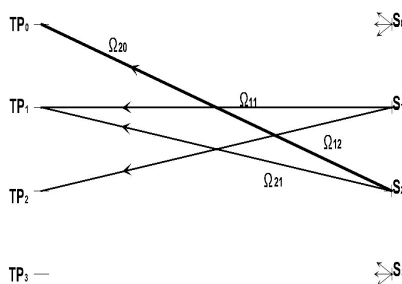
4.4.4. Die Wiedervereinigung

Im Folgenden soll der durch das Einsortieren in die quantisierten Pyre (genormter Raumwinkel) erzeugte Wiedervereinigungseffekt etwas näher betrachtet werden. Dabei braucht nur die Verzweigung eines Pyrs bei Projektion auf zwei Wände, umgekehrt auch die Wiedervereinigung von Energien aus nur zwei Pyren in jeweils einen quantisierten Pyr betrachtet werden (quasi ein Detail aus der Gesamt-Verzweigungsstruktur von Bild 4.1.6.). Sowohl die Verzweigung **auf** als auch die Wiedervereinigung **von** mehreren Pyren ist möglich. Im Endstadium findet aber im Mittel eine Umverteilung des „Erbes“ 1:1 statt, so dass die Anzahl „besetzter“ Pyre etwa konstant bleibt (s. Bild 4.1.7.). Bild 4.4.4a zeigt die Überlappung der Winkelbereiche, Teil b die damit verbundenen Energieströme.

Bild 4.4.4 Zur Überlappung der Raumwinkel von Pyren und zum Wiedervereinigungseffekt



b) Energieflüsse dazu symbolisch: von den ursprünglichen Spiegelquellen S_1 und S_2 in die durch die Teilpolygone quantisierten Pyre, die Energie von S_1 verteilt sich entsprechend der Überlappungsraumwinkel Ω_{11} und Ω_{12} , auf Pyre zu TP_1 und TP_2 , die von S_2 , entsprechend der Überlappungsraumwinkel Ω_{21} und Ω_{20} , auf TP_1 und TP_0 (s. Bild a); die von anderen ehemaligen Pyren (hier noch S_0 und S_3 angedeutet) verteilt sich ebenfalls, je nach Lage nach Spiegelung, auf verschiedene neue, quantisierte Pyre.



Mit den Verrückungen der Pyre sind freilich Quantisierungsfehler verbunden, wie schon oben diskutiert; es werden z.T. andere Teilpolygone getroffen – und an jenen Spiegelungen erzeugt – als ohne Verrückung; dieser Effekt erscheint in obigem Bild jedoch stark übertrieben; in Wirklichkeit sind alle involvierten Raumwinkel viel kleiner.

Bilanz (aus Bild 4.4.4b): Alle in obige SSQ-Raum-Zelle fallenden Pyre werden (rechenzeitlich nacheinander) in $\mathbf{S}_0$ vereinigt, teilen ihre Energie zwar jeweils auf mehrere Wandpolygone auf – es werden aber (im Mittel) nicht mehr.

4.5. Zur Ausführungsreihenfolge – Entwurf zu einem Gesamtalgorithmus

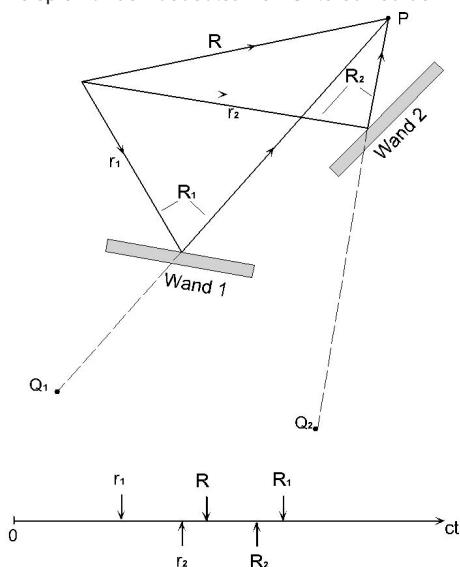
Einführend wurde das entscheidende Problem der Ausführungsreihenfolge der Energieumverteilungen angeschnitten („erst weitervererben, wenn alles von früher angekommen“). Immer ein „ältester Pyre“ soll deshalb als nächster bearbeitet werden. Diesen schnell zu finden ist nicht trivial. Im Folgenden werden, ohne Beachtung geometrischer Details, zunächst verschiedene Detailprobleme diskutiert, besonders die, die jüngst /H5/ noch ungelöst waren. Dann wird der Gesamt-Algorithmus vorgestellt.

4.5.1. Zum Vereinigungszeitpunkt

Scheinbar, so wurde früher aus der ersten Anschauung heraus formuliert und vermutet, findet die Wiedervereinigung beim Zusammenfallen der Pyrspitzen in derselben SSQ-Raum-Zelle statt. Das „Zurechtrücken“ dient aber nur einer Vor-Normierung. Beim genaueren Hinsehen wird klar: die eigentliche Vereinigung von Energien findet erst nach der von dort erfolgenden Projektion und teilweisen Überlappung auf einem Teilpolygon des Originalraums statt. Denn erst dabei kann das Kriterium „etwa gleicher Laufweg von der Quelle“ (das dritte der Zusammenfassungskriterien) Anwendung finden. Die Vereinigung geschieht also (wie bei *radiosity*) auf den Patches als Umverteilstationen. „Älteste Pyre“ im Sinn der zu gewährleistenden Reihenfolge sind also die mit dem kleinsten Abstand zu den **Reflexions**-Punkten, nicht zum Empfangspunkt bzw. Mittelpunkt. Nicht genau der „innerste Ring“ des SSQ-Raums (Bild 4.3.1.) muss also als erstes abgearbeitet werden, sondern (wie beim *ray tracing*) diejenigen Pyre mit etwa gleichem Laufweg zu den Patches (die liegen allerdings meist in der Mitte, insofern stimmt das Bild von der „nach außen driftenden Ringwolke“, s. Bild 4.5.3., schon). Bild 4.5.1. gibt ein Beispiel für den bedeutsamen Unterschied der Reihenfolgen.

Bild 4.5.1 a) oben: Immission an einem Punkt P von einer Quelle Q über zwei reflektierende Wände (W_1 und W_2), Q_1 und Q_2 sind die Spiegelquellen

b) unten die Zeitachse zu den oben dargestellten Vorgängen: Der Zeitpunkt der Reflexion an Wand 1, r_1 , liegt vor dem der Reflexion an Wand 2, r_2 , der Zeitpunkt der Immission über Wand 1, R_1 , ist aber nach dem der Immission über Wand 2, R_2 .



4.5.2. Vermeidung von „bösen Pyren“ durch Bezug auf konvexe Teilräume

Im Übrigen könnte das alte Kriterium „ältester Pyr zuerst“, im früheren Sinne „derjenige mit dem geringsten Abstand zu einem Empfangspunkt in der Mitte des SSQ-Raums“ für **mehrere** Empfangspunkte gleichzeitig gar nicht eingehalten werden. Denn Spiegelquellen wandern (wegen des Kausalitätsprinzips) nur bezüglich ein und desselben Empfangspunktes weiter nach außen, bezüglich eines anderen Empfangspunktes können sie (in konkaven Räumen) auch mal wieder näher kommen, weiter nach innen wandern; sie sind dann von jenem allerdings nicht „sichtbar“; solche früher als deshalb „böse“ bezeichneten Pyre müssen aber dennoch berechnet werden, da sie wieder sichtbare Pyre als Abkömmlinge haben können (wie in Abschn. 4.2.9 schon anhand Bild 4.2.21 erläutert). Im **Gesamt**-SSQ-Raum nach Bild 4.3.1. betrachtet würden im Laufe der Abarbeitung Pyr- Spitzen wieder nach innen wandern können, es könnte also nachträglich wieder besetzte, weiter innen liegende Ringe geben; eine Abarbeitung stets „von innen nach außen“ wäre nicht möglich, Sonderfälle wären zu behandeln.

In konvexen Räumen stellen sich diese Probleme nicht. Auch deshalb ist es konsequent (und auch erst eine jüngere Erkenntnis) für jeden konvexen Teilraum separat, d.h. mit entsprechend anderem Mittelpunkt, einen Raum aus SSQ-Raum-Zellen wie nach Bild 4.3.1. zu generieren, bzw. ihn sich vorzustellen - was nur wenig Mehraufwand bedeutet. Wird die Reihenfolge der Bearbeitung dann richtig gewählt und vermerkt, d.h. entsprechend den Auftreffzeitpunkten auf den Patchen unabhängig vom Teilraum (wie in Abschn. 4.5.4. definiert), so müssen o.g. „Sonderfälle“ nicht gesondert vermerkt werden. Es gibt dann keine wirklich „bösen“ Pyre mehr.

4.5.3. Zur Sortierung nach dem genauen „Alter“ bzw. der Laufstrecke

Der SSQ-Raum, und damit etwa das „Alter der Pyre“ ist radial in Δr -breite Ringe quantelt. Damit sind es auch die Laufstrecken zu den Patchen (nicht genau mit Δr , aber, je nach Einfallsrichtung δ , mit Strecken in der Größenordnung $\Delta r \cdot \cos \delta$). Die zugehörige Laufzeitintervallzahl und damit Ordnungszahl der Ausführungsreihenfolge sei n . Ist nun trotz dieser Quantelung bei der Frage der Reihenfolge der Bearbeitung aus den schon genannten Kausalitätsgründen auf die **genaue** Strecke, das **genaue** „Alter“ zu achten ?

Nein. Eine Untersortierung nach der genauen Strecke ist nicht nötig. Es wird dabei kein systematischer Fehler gemacht. Denn falls einmal nicht der absolut „älteste“, sondern ein etwas „jüngerer“ Pyr zuerst bearbeitet, also dessen „Speicher“ „entleert“ worden sein sollte, kann danach durchaus noch der älteste nachbearbeitet werden; falls dann ein Teil von dessen Energie ausgerechnet in den schon entleerten Speicher fallen sollte, müsste der zugehörige Pyr eben noch mal bearbeitet werden. Solche Fälle kommen (wegen der selten so kurzen freien Weglängen) jedoch sehr selten vor. Das Verfahren wird also bei nur ungefährrer Einhaltung der Ausführungsreihenfolge nach Alter, d.h. nach der Quantenzahl n statt nach n , oder r selbst, nur geringfügig ineffizienter. Der exakte Radius muss also in den Pyrdaten nicht gespeichert werden, sondern nur die Quantenzahl n_r , s. Tab. 4.3.1.

Die zu quantisierenden Pyre nach dem **genauen** Alter sortieren zu wollen ist auch inkonsequent, weil jeder Pyr Energien bereits leicht unterschiedlicher Laufzeiten sammelt bzw. aufaddiert hat. Das genaue „Alter“ ist also gar nicht mehr definiert; ei-

ne exakt zur Echtzeit parallele rechnerische Ausführung ist auch nicht möglich wegen der unterschiedlich langen Laufzeitintervalle. Rechenzeitlich geht es dabei natürlich nur nacheinander; aus Gründen der Effizienz sollte es aber „nahezu gleichzeitig“ sein. Das bedeutet eine **iterative statt** (wie vorher gemäß dem Spiegelquellen-Bildungs-Baum) **rekursive Bearbeitung**.

Die Daten real gleichzeitig existierender Pyre müssen bei der Rechnung gleichzeitig zur Verfügung stehen. Endlosschleifen können vermieden werden, indem einfach eine Mindest- Zeitintervall- Änderungszahl auf 1 gesetzt wird.

4.5.4. Benötigt man einen unendlichen Arbeitsspeicher ? - Entwicklung der Matrixform der Speicherorganisation

Von welchem Energieträger ungefähr gleichen „Alters“ (gleicher Zeitintervallzahl n) die Energie zuerst weiterverteilt wird, ist also egal. Man muss also nicht immer exakt **den** ältesten Energieträger finden, sondern nur **einen**, diesen aber möglichst schnell.

Diese Erkenntnis bedeutet nicht nur eine Vereinfachung, sondern den entscheidenden Fortschritt:

Die Datenstruktur aller Pyre bzw. der von ihnen transportierten Energien - kann von einfacher Matrixform sein (Elemente $E_{k,n'}$, s. Bild 4.5.4.).

Dabei entspricht

die Zeilennummer n' bzw. n_z der Zeitintervall- bzw. Laufstrecken-Quantenzahl n („Laufstrecke“ von der Quelle bis zum Patch eines Teilraums);

die Spaltennummer k bzw. n_s ist in umkehrbar-eindeutiger Weise zugeordnet, hierarchisch untergliedert, den folgenden 3 (implizit 5) Parametern:

n_T = Nummer des konvexen Teilraums;

n_Ω = Nummer der Zellen des Spiegelquellenraums,

- untergliedert je Teilraum nach

n_δ = Polarwinkelbereich,

n_φ = Azimutalwinkelbereich (Anzahl von δ abhängig) -

als Herkunfts-Raumwinkelbereich des Pyrs -;

n_P = durchnummerierte Nummer des einzelnen angepeilten Patches,

- angeleitet aus den Nummern des angepeilten Teilpolygons

und darunter des jeweiligen Patches -

als Definition für den Ziel-Raumwinkel des quantisierten Pyrs .

Zeilen- und Spaltennummer der Matrix sind nun also direkt – und die letztgenannten Parameter bzw. „Quantenzahlen“ indirekt - Ordnungsnummern für den Speicherplatz eines Pyrs, nicht mehr dessen Inhalt (s. Tab. 4.3.1. in Abschn. 4.3.8.).³⁴

³⁴ Bei dynamischer Speicherung müssen n_Ω , n_T und n_P Inhalt des Datensatzes sein; daneben muss dieser dann aber Verweise auf nächste „gleich alte“ und gleich-gerichtete, aber „nächst jüngere“ Pyre enthalten, s.U.

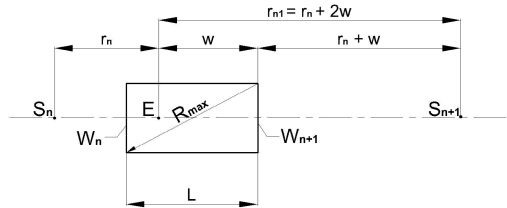
Im Bild dieser Matrix könnte nach obigen Überlegungen (Sortierung nach *genauem* Alter nicht notwendig) also die ganze „unterste Zeile“ der „ältesten Pyre“ in beliebiger Reihenfolge abgearbeitet werden.

Diese unterste Zeile zu „finden“ ist trivial, sie ergibt sich von selbst, indem man den Speicher ganz einfach zeilenweise von unten nach oben abarbeitet (wie unten näher erläutert). Das früher noch als praktisch nahezu unlösbar angesehene Problem, neben „Nachbarpyren“ nach einem zweiten Kriterium auch *den* ältesten Pyre aus einer riesigen Menge schnell zu finden, löst sich auf: Nachbarpyre werden durch das Clipping der Pyre, in der Schleife über alle Patche und damit auch Pyre von selbst gefunden (s. Abschn. 4.2.8).

Benötigt man nun (da die Zeit unbegrenzt fortschreitet und die Zeitintervallzahlgleich der Zeilenzahl der Matrix ist) einen unendlichen Arbeitsspeicher ?

Gespiegelte Pyre landen, wie schon früher bemerkt (s. Bild 4.5.2.) maximal eine doppelte Raum-diagonale des Originalraums $2R_{\max}$ weiter außen im SSQ-Raum (Bild 4.3.1.).

Bild 4.5.2. Originalraum, hier zur Vereinfachung schmales Rechteck, mit Raumdiagonale $R_{\max} \gg L =$ Raumlänge, darin ein Empfangspunkt **E** im Abstand w von einer spiegelnden Wand; außerhalb eine Spiegelquelle S_n im Abstand r_n von **E**; die gebildete Spiegelquelle nächst höherer Ordnung S_{n+1} ist von **E** um $2w$ weiter entfernt, kann höchstens um $2R_{\max}$ weiter entfernt sein.



Wird eine weiter innere Zelle einmal verlassen, wird sie für immer leer bleiben. Man könnte also diesen Speicherplatz zukünftigen anderen Pyren zur Verfügung stellen. Pyre werden also im Rotationsverfahren über einen gewissen Wegstrecken-Bereich neu generiert bzw. jeweils einer neuen innersten Zeile zugeordnet. Es gibt zwar unendlich viele Kugelschalen, aber nur endlich viele sind mit Energie (und Daten) besetzt. Die Erkenntnis ist deshalb³⁵:

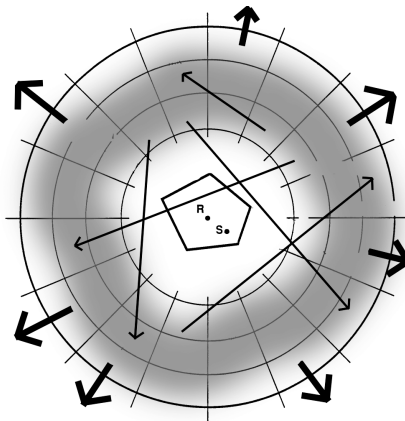
Man kommt mit einem endlichen Arbeitsspeicher aus.

Bildlich: Im Laufe der Zeit (Echtzeit wie Rechenzeit) wandern die besetzten SSQ-Raum-Zellen immer weiter nach außen. Im Rahmen der Spiegelungen – einem ständigen radialen Überholvorgang - driftet so eine „Ringwolke“ gerade besetzter (und auf dem innersten Ring gerade bearbeiteter) SSQ-Raum-Zellen nach außen, s. Bild

Diese Idee entwickelte unabhängig vom Autor auch Kludszuweit /R2/ für seine wellentheoretisch orientierte „Time Iterative Boundary Element Method“. Sie wurde auch von Kuttruff für die strukturell gleiche iterative Formulierung der Radiosity-Methode verwendet /R4/R6/.

4.5.3. Die radiale Streubreite der „Ringwolke“ entspricht der doppelte Raumdiagonalen $2R_{\max}$. Der Ringstruktur des SSQ-Raums entspricht die Zeilenstruktur der Matrix, der (ungefähr) ringweisen die zeilenweise Abarbeitung.

Bild 4.5.3. SSQ-Raum nach Bild 4.3.1; **innen (5-Eck)** der Originalraum; **grau:** gerade „besetzte“, d.h. mit weiter zu verteiler Schallenergie belegte Zellen; **Pfeile:** Spiegelungsvorgänge von Pyren, ringweise von innen nach außen abgearbeitet, damit verbunden Energieumverteilung von innen nach außen; dadurch driftet eine „Ringwolke“ besetzter Zellen nach außen.



Bei einem Ringabstand Δr gibt es $N_{R_{\max}} = \lceil 2R_{\max} / \Delta r \rceil$ Ringe. ($\lceil \cdot \rceil$ bedeutet Rundung auf ganze Zahlen). Wie Bild 4.5.2. aber auch zeigt, ändern sich die Wegstrecken r_W zu nächsten getroffenen Wänden – und **die** sind, wie erläutert, Maßgabe für den Vereinigungszeitpunkt – nur um maximal **ein** $R_{\max}$. Man braucht demnach nur

$$m_{\max} = \lceil R_{\max} / \Delta r \rceil \quad (4.30)$$

Zeilen im Arbeitsspeicher. Sobald nun also eine innerste Zeile im Arbeitsspeicher endgültig frei wird, kann man sie zur Speicherung der Daten der nächsten entferntesten Pyre nutzen. Es wird also eine zyklische Zuordnung Wegstreckenzahl $n = \lceil r / \Delta r \rceil$ zur Zeile n' im Speicher (s. Bild.4.5.4.) möglich:

$$n' = n \bmod m_{\max} \quad (4.31)$$

Falls $n_{\min}$ die Zeit-Intervall-Nummer der gerade „ältesten“ Pyre ist, wird im Speicher statt $n_{\min}$ stets die $n' = n_{\min} \bmod m_{\max}$ -te Zeile bearbeitet.

Man startet – für den Direktschall – mit $n_{\min} = 0$.

Nach Abarbeitung der „untersten“ Zeile wird $n_{\min}$ um 1 erhöht und n' aktualisiert.

Die gleichen Speicherplätze werden also zyklisch immer wieder genutzt. Hinter einer Zeile n' verbergen sich wegen der steigenden Abstände freilich sich stetig veränderliche Pyr-Geometrien (nämlich immer „engere“ Pyre.)

Der ganze Algorithmus – das war ja das Hauptziel – ist nicht an eine bestimmte Geometrie bzw. Art des Energieübertrags gebunden. Er erlaubt ohne Effizienzverlust, da in völlig gleicher Weise, eine beliebige Reihenfolge von geometrischen und diffusen Reflexionen, Beugungen oder Streuungen.

Bild 4.5.4. Zur Energie-Umverteilung beim QPBT in der Energie-Träger-Matrix $E_{k,n}$:

Die **Zeilennummern** N_z entsprechen den Laufstreckenbereichen bzw. Radien Δr im SSQ-Raum.

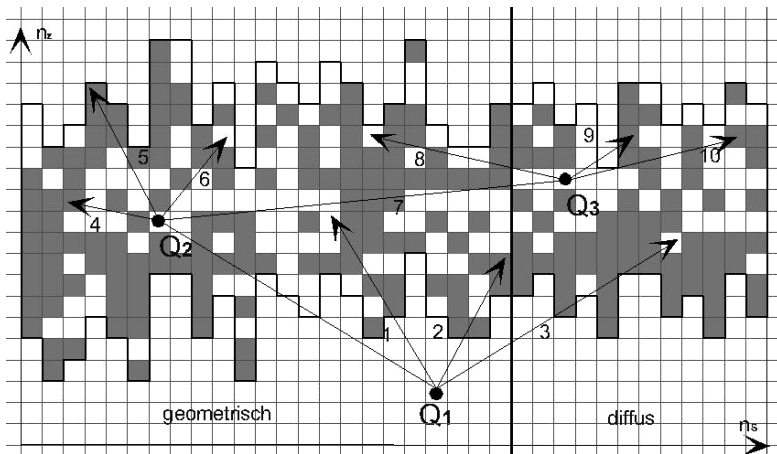
Die **Spaltennummern** N_s von links nach rechts entsprechen den Richtungen (Polar- und Azimutalwinkeln) im SSQ - Raum, sowie den Rückstrahl-Raumwinkelbereichen von da, gegeben jeweils durch die angepeilten Oberflächenstücke (*patches*), sortiert nach Teilräumen, Wänden, Polygonen, Teilpolygonen in mehrfach- geschachtelter Schleifenstruktur, s. Text.

Die **Kästchen** entsprechen den Speicherplätzen der **Pyre**.

Graue Felder indizieren, dass Pyre dort bereits „**existieren**“, d.h. Energie tragen.

Die **fett gezogenen Ränder** deuten die momentanen Grenzen des besetzten Teiles des SSQ-Raums (etwa der „Ringwolke“) an.

Die **Pfeile** symbolisieren, beispielhaft herausgegriffen, **Energieumverteilungen**.



Von einem Quellpunkt Q_1 „unterhalb“ der jetzigen Besetztgrenze (möglicherweise innerhalb des inneren Quantisierungsradius‘ des SSQ- Raumes) wurden früher einmal Energien in den quantisierten Teil übertragen, mit Pfad 3 z.B. in eine noch leere Zelle, die Energien von Pfaden 1 und 2 wurden mit einer Energie von woanders her vereinigt (Zielzelle besetzt).

Von Q_2 aus wird jetzt Energie über Pfade 4-7 übertragen, Pfad 4 z.B. erreicht, da Spiegelung an sehr naher Wand, eine Zelle in der nächsten Zeile (kaum weiter vom Empfangspunkt entfernt), Pfad 7 überträgt eine Teilenergie per Beugung (Zielzelle rechts im Gebiet diffuser oder gebeugter Energien).

Von Q_3 aus wird dann z.B. über Pfad 8 Energie wieder geometrisch- spiegelnd übertragen werden, über Pfade 9 und 10 z.B. weiter diffus.

Falls die Energie **von einer Quelle Q_4** aus (hier nicht eingezeichnet) nach Q_2 vor der Weiterverteilung von dort übertragen wurde, könnte sie vorher mit der von Q_1 vereinigt werden; falls **danach**, muss die Wiederbesetzung einer „unteren Zeile“ vermerkt worden sein, die Weiterverteilung muss dann – ineffizienterweise – noch einmal wiederholt werden.

Das Bild ist, nur zur Demonstration, symbolisch, in einen linken und rechten Bereich geteilt, welcher zuletzt diffus oder durch Beugung transportierte Schallenergien enthalten soll, was in der Matrix an sich nicht unterschieden wird.

4.5.5. Diskussion dynamischer Speichermethoden, Besetzungsdichte und Abarbeitung der Pyr-Matrix und Lösung des Problems, schnell benachbarte Pyre zu finden

Loht sich eine dynamische Speicherverwaltung und Abarbeitung ?

Bekanntlich hängt eine optimale Speicherorganisation von seiner wahrscheinlichsten Belegung bzw. Besetzungsdichte und der häufigsten Nutzungsart und -Dauer ab. Aus der Informatik ist beispielsweise der effiziente Zugriff zu großen Datenmengen durch Gliederung entsprechend einer Baum-Struktur bekannt. „Dynamisch“ heißt dabei: ohne feste, etwa Matrix-artig gegliederte Speicherplätze, diese sind stattdessen durch Zeiger verkettet bzw. vernetzt³⁶. Bei schwach besetzten Matrizen bietet sich auch die Hashing-Technik an /U2/.

Eine „sture“ Abarbeitung der untersten Zeile „von links nach rechts“, d.h. ein Matrixelement nach dem anderen, wäre nur sinnvoll, wenn es dabei nur wenige erfolglose Iterationen gäbe, also die meisten SSQ-Raum-Zellen besetzt, die Matrixelemente nicht 0 wären. Genauer: Diese sture Abarbeitung lohnt sich nur dann, wenn die Rechenzeit zur Abwicklung leerer Elemente vernachlässigbar ist gegenüber der Rechenzeit zur Umverteilung und Einsortierung der Energien in „obere“ Zeilen, also dann, wenn es nur „wenige“ leere Elemente gibt. (Es wird sich noch zeigen, dass selbst wenn die Matrix nur zu 1/100 besetzt ist, sich diese „sture“ Methode bereits lohnen könnte.) Die Rechenzeit für eine einzige Umverteilung inklusive des geometrisch komplizierten Clippings ist bei sehr vielen Patchen relativ groß; selbst viele sinnlose Iterationen über leere Zellen fielen dann nicht ins Gewicht, selbst ein „stures“ Abarbeiten der untersten Zeile würde also, relativ gesehen, nicht übermäßig viel Rechenzeit vergeuden. Aber auch absolut gesehen darf man nicht verschwenderisch sein. Andererseits hat man es mit größenordnungsmäßig mit 10^4 – 10^8 gleichzeitig existierenden Pyren zu tun, und größenordnungsmäßig 10^2 Zeit-Iterationen. **Es ist deshalb extrem wichtig, wie man besetzte Pyre effizient und schnell findet.**

Als Sortierv Verfahren zum Schnellen Ein- und Aussortieren nach „Alter“ bieten sich im Prinzip vor allem zwei Verfahren an:

- a) bei nicht allzu vielen Elementen: verkettete Listen (lineare Sortierung);
die mittlere Anzahl der Vergleiche ist bei N Elementen $N/4$;
- b) bei sehr vielen Elementen: binäre Bäume (hierarchy Sortierung);
die mittlere Anzahl der Vergleiche ist dabei $\log_2(N)$.

Denkt man daran, dass man es mit einem zweidimensionalen zu sortierenden Feld, also erstreckt vielen Elementen zu tun hat (denen man zunächst eine durchlaufende Nummerierung geben könnte), könnte man geneigt sein, eine „effiziente Massensortierung“ wie nach einem binären Baum zu bevorzugen. Dies erweist sich aber als nicht notwendig, da ja innerhalb der durch die Umverteilungen quasi-zufällig entstandenen Zeilen (etwa nach dem **genauen** „Alter“) gar nicht sortiert werden muss, leere

³⁶ Zeiger bzw. *pointer* können vor allem in den verbreiteten Programmiersprachen PASCAL und C formuliert werden, in moderneren objektorientierten Sprachen wie JAVA geht das implizit.

Elemente in den Zeilen nur übersprungen zu werden brauchen. Die Zeilen als Ganze sind entsprechend dem Alter der Pyre ohnehin sortiert, die „zweitunterste“ ergibt sich nach „Entleerung“ der untersten von selbst. Nach Alter **sortiert** werden müssen sie also nicht mehr. Es müssten aber eventuelle ganz leere Zeilen übersprungen werden. Es geht also nur um Verkettungen nicht-leerer Zeilen und nicht-leerer Elemente in den Zeilen.

Baumsortierung oder andere auf Untergliederungen beruhende Verfahren dynamischer Speicherverwaltung sind hier also (überraschend) nicht sinnvoll.

Es bleibt die Frage, ob sich eine Verkettung nicht-leerer Zeilen überhaupt lohnt, ob es **häufig ganz leere Zeilen der Matrix** (ganze nicht besetzte SSQ-Raum-Ringe eines Zeitintervalls) gibt, oder allgemein um die Frage:

Wie hoch ist die Besetzungsdichte der Pyr-Matrix ?

Hierzu könnte die **Freie-Weglängen-Verteilung** in Räumen untersucht werden. Näherungsweise kann man annehmen, dass die Verteilung Poisson-förmig ist³⁷. Poisson-verteilt sind aber nur die einzelnen Weglängen, Energien werden aber ständig weiterverteilt, dann zählt die Verteilung der **Summen** der Weglängen modulo Raumdiagonale bzw. die entsprechende Intervallzahl oder Zeilennummer n' in Bild 4.5.4. Auf diese Weise wird, sozusagen durch Überlagerung entsprechend verschobener Poisson-Verteilungen, die Verteilung der Zeitintervallzahlen n' nach wenigen Reflexionen praktisch einer Gleichverteilung zustreben. Es wird aber auch ohne nähere Betrachtung der Art der Verteilung klar: Wenn von jedem Pyr aus zu nahezu allen anderen hin umverteilt wird, aber mit $m_{\max}$ unterschiedlichen Zeitverzögerungen (in der Matrix: auf $m_{\max}$ unterschiedliche Zeilen), dann wird – nach **einer** Generation von Umverteilvorgängen aus der untersten Zeile – jede Zeile nur zum Grade $1/m_{\max}$ besetzt sein. Dann folgt im Mittel erst auf $m_{\max}$ Leerzellen eine besetzte. Wenn von jeher aus k_0 Umverteilvorgänge aus gestartet werden, von denen jene ein Mehrfaches (p) an Rechenzeit benötigt wie die Erkennung einer Leerzelle, so wird durch die „sture“ Vorgehensweise anteilmäßig nur $m_{\max}/(p \cdot k_0)$ an Rechenzeit vergeudet, was bei typischen Werten von $m_{\max}=100$, $k_0=10^4$, $p=10$ sehr wenig ist. Bei einer sehr großen Zahl k_0 von Pyren pro Zeile wäre der Erwartungswert für die Anzahl besetzter SSQ-Zellen pro Zeile $k_0 / m_{\max}$, bei typischen Werten von 10^4 bzw. 10^2 also in der Größenordnung von 100. Dann ist die poissonverteilte Wahrscheinlichkeit für 0 besetzte Zellen pro Zeile in der Größenordnung von $e^{-100} \approx 10^{-23}$; das bedeutet: Es ist extrem unwahrscheinlich, dass eine Zeile der Matrix ganz unbesetzt ist.

³⁷ Nach einer Regel der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt die Poissonverteilung für Intervalle zwischen „seltenen“ zufallsverteilten Ereignissen. Kuttruff /R3/ zeigte, dass die Verteilung freier Weglängen in der Raumakustik eigentlich genauer Γ -förmig ist und gelangte damit zu dem Schluss, dass die Poissonverteilung nur eine Näherung ist. Nach einer Regel der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt die Poissonverteilung für Intervalle zwischen „seltenen“ zufallsverteilten Ereignissen. Kuttruff /R3/ zeigte, dass die Verteilung freier Weglängen in der Raumakustik eigentlich genauer Γ -förmig ist und gelangte damit zu dem Schluss, dass die Poissonverteilung nur eine Näherung ist.

Vorläufige Schlussfolgerungen:

- In vertikaler, bzw. Zeit- Richtung lohnt sich eine Verkettung der Zeilen auf keinen Fall, da praktisch keine Zeile leer ist; die Zeile der Matrix kann direkt adressiert werden.
- In horizontaler, Orts- bzw. k-Richtung könnte sich eine Verkettung besetzter Matrixelemente (d.h. Überspringen leerer) bei schwacher Matrix-Besetzung lohnen.

Nach vielen ($m_{\max}$) Umverteilungsvorgängen - nachdem jede Zeile einmal zur untersten geworden ist - und dies ist das relevante Stadium, das unmittelbar vor Weiterverteilung aus der untersten Zeile angetroffen wird - wird die **Matrix weitgehend homogen besetzt sein**. Nun wird beim Radiosity- Verfahren nach jeder vollen Generation von Umverteilungsvorgängen (entsprechend Umverteilung von allen Zeitintervallen bzw. Zeilen her) **jedes Patch auch von überall her** (mindestens) einmal getroffen. Das folgt aus dem Reziprozitätsprinzip. Orientiert man sich an solch einer Schlussbilanz, kann man den mittleren Besetzungsgrad der $E_{k,n}$ -Matrix abschätzen: Alle Energie wird im Mittel auf einen Zeitbereich entsprechend einer mittleren freien Weglänge Λ , entsprechend m Zeitintervallen bzw. Zeilen umverteilt. Der Speicherbereich umfasst jedoch $m_{\max}$ Zeilen, entsprechend einer maximalen freien Weglänge $R_{\max}$.

Der **mittlere Besetzungsgrad der Pyr- Matrix** ist also:

$$b = \frac{m}{m_{\max}} = \frac{\Lambda}{R_{\max}} \quad (4.32)$$

Dies ist ein Faktor, der von den Raumproportionen oder vom Volumen/Oberflächen-Verhältnis abhängt und nicht extrem viel kleiner als 1 ist. Das bedeutet:

Die Matrix ist nie nur „schwach besetzt“.

Weiteres Zwischenergebnis also:

Aus Rechenzeitgründen wird sich nicht einmal eine Verkettung nicht- leerer Matrix-Elemente lohnen; die „sture“, d.h. zeilenweise Abarbeitungsmethode ist nicht nur die einfachste, sondern meist auch die schnellste.

Ein weiterer Grund für die Konvex-Zerlegung

Um den Besetzungsgrad der Matrix oder die Effizienz zu steigern, dürfte $R_{\max} / \Lambda$ nicht zu groß sein, d.h. der Raum nicht zu ungleiche Hauptabmessungen haben, nicht zu viele „hineinragende“, die Konvexität störende Zwischenwände haben, nicht „zu zerklüftet“ sein. Dies wird durch die vorherige Zerlegung in konvexe Teilräume erreicht. Durch die Konvex-Zerlegung können extrem lange Räume, die ja meist nicht-konvex sind, in kürzere mit viel kleinerem $R_{\max}$, aber oft nur wenig kleinerem Λ zerlegt werden. Nach Glng. 4.32 erhöht sich dadurch der Besetzungsgrad der Matrix. Der Besetzungsgrad b ist bei konvexen Teilräumen nicht sehr viel kleiner als 1, z.B. bei einem 1:2:4-Quader ca. 25%, beim Würfel 39%, bei der Kugel wäre er 2/3; nur bei stark zerklüfteten konkaven Räumen wäre er viel kleiner; dies ist aber irrelevant, denn die Iteration wird ja stets auf den Zwischenwänden zwischen den konvexen Teilräumen angehalten (wobei es statistisch keine Rolle spielt, dass dabei Transmis-

sion statt Reflexion stattfindet). Vereinigt werden können dann übrigens (weil ja für einen Pyr stets nur im „eigenen“ Teilraum nach Pyr- Wand –Schnitt gesucht wird) auf einem *patch* eines Teilraums formal nur Pyre, die von SSQ- Raum- Zellen desselben Teilraums kommen, praktisch aber durchaus auch andere, wenn auch erst nach vorherigem Durchtritt aus diesem in den ersteren. Es zeigt sich also einmal mehr, dass eine Konvexzerlegung des Raumes nicht nur sehr vorteilhaft ist, sondern angesichts der dringend notwendigen Reduzierung des nötigen Speicherplatzes praktisch zwingend.

Nach obigen Vorüberlegungen wären zeilenweise einfach –verkettete Listen optimal, d.h. die Matrix der $E_{k,n}$ wird „von unten nach oben abgearbeitet, dabei jeweils zeilenweise von links nach rechts“, dabei erfolgt

- in vertikaler (n -) Richtung ein direkter Zugriff auf die $E_{k,n}$;
in n -Richtung (Spalten in Bild 4.5.4.) findet ja eine starre Speicherung wie in einer Matrix statt, wenn auch im Rotationsverfahren in Zeile $n' = n \bmod m_{max}$;
- in horizontaler (k) –Richtung ein Zugriff mithilfe einer einfach-verketteten Liste.

In solchen Listen ist in jedem Element (hier Pyr-Datensatz) eine Zeigervariable enthalten, die auf die Adresse des nächsten besetzten verweist /U2/. Zur Minimierung des Aufwands kann man sich dabei weiter zu Nutze machen, dass hier sowohl die Aussortiertvorgänge aus der untersten Zeile als auch die Einsortiertvorgänge in die oberen stets von links nach rechts, also mit steigendem k erfolgen; man kann deshalb zur Erinnerung an den letzten Eintrag „Einsortiermarken“ $k_E(n')$ einführen.

Pyre gleichen Teilraums n_T und Raumwinkels n_Ω aber verschiedenen Ziel-patches n_P (s. Untergliederung in Abschn. 4.5.3.) werden während der bei der Projektion auf die Raumbofläche auftretenden Schleife über alle Teilpolygone eines Teilraumes, d.h. pro Teilraum und pro SSQ- Raum- Zelle in geordneter Reihenfolge, blockweise (in „schnellster Schleife“) erzeugt (s. Gesamtalgorithmus unten) – sofern jeweils nötig, d.h. falls während des Clippings ein Überlapp mit dem Raumwinkel des entsprechenden Pyrs festgestellt wird. Werden die Pyr- Daten entsprechend dieser Hierarchie geordnet gehalten, bleibt gewährleistet, dass „benachbarte“, d.h. benachbarte patches treffende, Pyre, d.h. nur nächster Nummer n_P , „von selbst“ und sofort gefunden werden. Es muss allerdings noch notiert werden, welche Pyre („Quantenzahlenkombinationen“) existieren und welche nicht (=besetzte Felder in Bild 4.5.4.)

Bei starrer, matrix-artiger Formulierung ist damit nicht nur das Problem, älteste Pyre schnell zu finden, sondern auch das (früher, in /H5/, noch als schwierig angesehene) Problem, gleichzeitig auch benachbarte Pyre schnell zu finden, gelöst, und der Algorithmus genau formulierbar (s. Tab. 4.5.1. unten).

Nun könnte sich aber, falls nicht nur die Rechenzeit, sondern auch die Reduzierung des (riesigen) Speicherplatzes angestrebt wird, statt einer einfachen Verkettung nicht-leerer Matrixelemente **doch** eine „dynamische“ Speicherungsmethode lohnen, bei der leere Matrixelemente (d.h. Pyr-Datensätze mit Null-Energie-Eintrag) gar nicht

erst - oder wenigstens weniger häufig - existieren. Dies könnte sogar zwingend werden, wenn, wie unten noch abgeschätzt wird, der Speicherplatzbedarf über 1GB ansteigt, der heutigen Grenze der Adressierbarkeit mit 32bit-Rechnern.

Eine relativ einfache, da nur jeweils separat auf eine Zeile o.g. Matrix anzuwendende, und überschaubare Methode ist die **Hashing-Methode** /U2/. Dabei wird eine größeres, schwach besetztes (d.h. mit vielen Nullen durchsetztes) Datenfeld bzw. ein größerer Indexbereich k durch eine Hash-Funktion $k' = h(k)$ auf ein kleineres Datenfeld bzw. einen kleineren Indexbereich k' komprimiert. Im Idealfall könnte dieser um den Besetzungsgrad b der Matrix kleiner sein; da jener jedoch nur als statistisches Mittel gegeben ist, wird ein um einen Sicherheitsfaktor 3-5 größerer Indexbereich vorgesehen. z.B. könnte $h(k) = \lfloor 5 \cdot b \cdot k \rfloor$ sein; ($\lfloor \cdot \rfloor$ = Abrundung auf nächst kleinere natürliche Zahl). $h(k)$ ist natürlich nicht umkehrbar-eindeutig; bei einem deshalb natürlich möglichen nochmaligen Zuweisungs- oder Leseversuch eines Elementes auf denselben Speicherplatz bzw. von demselben wird weiter verschoben auf den nächst leeren. Um dies überprüfen zu können, muss außer dem Wert des Elementes (hier ursprünglich eine Energie $E(k)$) natürlich noch der alte Index k gespeichert werden (oder alle sich dahinter verbergenden Quantenzahlen). Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit müssen freilich bei „Fehladressierung“ einige Such-Iterationen durchlaufen werden. Nach einer Faustregel lohnt sich Hashing erst unterhalb eines Besetzungsgrades von $b < 1/10$, d.h. der Speicherplatz wird nur um etwa den Faktor $10b$ reduziert. Bei vorheriger Konvexzerlegung ist dies aber fraglich, da Teilräume von einfacher Form sind, und b meist im Bereich 20-40% liegt, s.o.

Noch effizienter könnte eine **freie, dynamische Speicherung** sein, bei der es überhaupt keine starre „Matrix“ mehr gibt, sondern nur durch Zeiger individuell und variabel verbundene Pyr-Datensätze. Für diese müsste erst jeweils bei Bedarf, d.h. „Geburt“ eines Pyrs, Speicherplatz reserviert werden, wobei Verweise (Zeiger) neu geschaffen oder aktualisiert werden. In jedem Pyr-Datensatz müssten dann freilich (anders als in Tab. 4.3.1. angegeben, wie aber davor diskutiert) alle sonst in der Adresse enthaltenen Ordnungs- bzw. Quantenzahlen n_T , n_Ω bzw. n_δ und n_ϕ sowie n_P enthalten sein. Ferner müssten im Pyr-Datensatz folgende Zeiger (*Pointer*) auf andere Pyre enthalten sein, die im Wesentlichen die bisherige zweidimensionale, Zeilen- und Spaltenweise Ordnung der Matrix ersetzen.

Und zwar in der gleichen Zeile:

1a) Zeiger zu einem nächsten „gleich alten“ Pyr (Reihenfolge egal);

1b) Zeiger zu einem (auch leeren) räumlich benachbarten Pyr,

(d.h. einem, der ein benachbartes Patch desselben Teilraums trifft).

Die beim Teilraumübergang noch nötige Verkettung von Pyren gleicher Ankunftszeit und räumlich identischen Polygons, **aber anderen Teilraums** wird ermöglicht durch separate Zuordnungen von der Polygon-Nummer im diesseitigen zur Nummer im jenseitigen Teilraum.

Bei der (unten dargestellten) Schleife über alle Patche eines Teilraums (mit Hilfe Zeiger 1b) sind aber noch nicht die unterschiedlichen Ankunftszeiten bzw. –Zeilen der Pyre berücksichtigt (s. springende Zielzeilen in Bild 4.5.4.). Bei einer zeilenweise verschieden komprimierten, ehemals schwach besetzten Matrix verrücken sich sozusagen ehemals vertikal übereinander stehende Zellen gegeneinander, so dass die ehemaligen „Spalten“ zu rekonstruieren sind. Es bedarf deshalb noch einer „vertikalen Verknüpfung“ in Zeit- bzw. Spaltenrichtung:

2) Zeiger zum nächst älteren Pyr, auf das gleiche Patch zielend.

Die Berechnung der überlappenden Raumwinkel (s. Kap.4.4.) ist unabhängig von der Ankunftszeit, sodass geometrische Daten nicht in jedem Pyr gespeichert zu werden brauchen.

Mit Zeigern 1b (horizontal) und 2 (ehemals vertikal) wird so die richtige „Ziel-Zelle“ (im Bild der ehemaligen Matrix) schnell gefunden.

Nachteil dieser Verkettung mit Zeigern ist jedoch: Die Quantenzahlen sind als Inhalt der Pyrdatensätze mit zu speichern. Möglicherweise überwiegen nach Berücksichtigung der dadurch wieder reduzierten Speicherplatzersparnis dann doch die Vorteile der „sturen“ zeilenweisen Abarbeitung.

4.5.6. Der Gesamtalgorithmus des „Quantized Pyramidal Beam Tracing“ (QPBT)

Dieser Algorithmus soll hier nur grob vorgestellt werden, und zwar für den Fall der „sturen“ Matrix-Abarbeitung.³⁸ Die Pyr-Projektions-, Aufspaltungs- und Spiegelungs- oder Streu-Prozeduren bleiben – vielleicht erstaunlicherweise – alle gleich wie beim unquantisierten Verfahren (vergl. die Tab. Kap. 4.2.4). Neu ist eigentlich „nur“:

- die ringweise („generationenweise“) **vorherige** Definition **genormter** Pyre durch Teilpolygone (statt Bildung von Teilpolygonen und –Pyren durch aktuelles Clipping an den Raumkanten),
- das iterative statt rekursive Abarbeiten der Pyr-Spiegelungen und
- das Zurechtrücken der Pyrspitzen in den SSQ-Raum-Zellen und
- die Aufaddition von Pyr-Energien - physikalisch: auf den *patches*, rechnerisch: in den Matrix-Elementen der Energieträger-Matrix $E_{k,n}$ - und damit die Wiedervereinigung der Schallenergien.

Den Pyr-Clipping- und Spiegelungs-Prozeduren ist nun aber der oben beschriebene **iterative Rahmen-Algorithmus** übergeordnet, der die Abarbeitungsreihenfolge der Energieumverteilung regelt, das „**Pyr-Management**“. Nach den Spiegelungen erfolgt kein rekursiver Selbstaufruf derselben, sondern, nach der Aufaddition der Schallenergien in den quantisierten Nachbar-Pyren – der Wiedervereinigung -, ein Rück-

³⁸ Die nötigen Prozeduren zur Generierung neuer Pyr-Datensätze und, nach Abarbeitung, zu deren Löschung wären sonst noch sinngemäß einzufügen. Die Verknüpfungen mit Zeigern müssten selbstverständlich bei jedem Neubesetzen von Matrixzellen mit Energie bzw. Einfügen neuer Pyre streng aktualisiert werden im oben genannten Sinne.

sprung zur übergeordneten Iteration. Von da erfolgt jeweils zuerst der Aufruf der **Pyr-Spiegelungs**-Prozedur, dann die der **Pyr-Umverteilung** inklusive Projektion, ggf. Neu-Erzeugung und Clipping. Der Gesamtalgorithmus ist in Tabelle 4.5.1. dargestellt, Kommentare in Fußnoten.

Tab 4.5.1. Skizze des Gesamtalgorithmus' von QPBT

Initialisierung:

Für jede Schallquelle S: *Kreieren der **Urpyre** der ersten Generation (für Direktschall), d.h.*
 Schleife über alle Wandpolygone des Teilraums, in dem S ist,
 durch Verbinden von S mit den Teilpolygonecken,

oder *gleich quantisierte Pyre mit Dreiecksquerschnitt, entwickelt aus Ikosader (Bild 6.2.)*

dabei *Berechnung der Raumwinkel und erste Zuordnung von Schallenergien je nach Raumwinkel*

Start

Pyr- Management d.h. „zeilenweise“ Abarbeitung von Pyren: „die ältesten zuerst“,
 innerhalb der „Zeilen“ (Schleife über alle Teilräume und SSQ-Raum-Zellen):

***vorgegeben wird jeweils ein Pyr;**

falls nicht unmittelbar nach Initialisierung:

↔ zu Pyr-Spiegelung *(falls Streuung, entstehen mehrere Pyre),*
 in diesem Fall, Aufruf Pyr-Umverteilung in entspr. Schleife)

↔ zu Pyr- Umverteilung *(s. nächste Seite)*
nächster Pyr (-> *)

Ende /Abbruch, falls

die vorgegebene Echtlaufzeit erreicht oder
 die Gesamtenergie aller existenten Pyre (oder eventuell nur eines Ringes)
 unter ein vorgegebenen Minimum gesunken ist.

Pyr-Spiegelung Spiegelung, Streuung oder Transmission eines ggf. quantisierten Pyrs

Status: Aktualisierte Energie des Pyrs, zugeordnet einer SSQ-Raum-Zelle und einem Teilpolygon
 falls Teilpolygon

spiegelnd: Spiegelung des Pyr³⁹

Multiplikation der Pyr-Energien mit den Wand-Reflexionsgraden

diffus reflektierend: Streuung des Pyr⁴⁰ entsprechend Diffusitätsgrad

transparent: Transmission des Pyr, d.h. nur

Änderung der Teilraumzugehörigkeit

beugend⁴¹: Aufspaltung des Pyr in mehrere neue
 *entsprechend Winkelfunktionen (**Schleife !**)*

Identifikation der SSQ-Raum-Zelle und „Zurechtrücken“ der Pyr-Spitze.

³⁹ nach den Formeln in Kap. 4.2.9.; die Sichtbarkeit, d.h. bei Spiegelung, dass der Pyr auch „von vorne“ kommt, ist schon in der Schleife in „Pyr- Umverteilung“ über alle Teilpolygone berücksichtigt worden, dadurch, dass der Originalraum konvex- zerlegt ist, und durch das Clipping;

⁴⁰ d.h. Aufteilung auf viele neue Pyre, im SSQ-Raum springend, mit Energien je nach gewünschter Winkelabhängigkeit, wie in Kap. 5. beschrieben; da mehrere Pyre, muss der Umverteilungsalgorithmus **in einer Schleife** aufgerufen werden.

⁴¹ Randflächen von Wänden, vor allem transparenter Trennwände, aber auch reflektierender, können als beugend deklariert werden, s. Kap. 5.

Fortsetzung Tab 4.5.1. Skizze des Gesamtalgorithmus' von QPBT

Pyr-Umverteilung	eines vom iterativen Management gegebenen Pyrs ⁴² :
Berechnung der Immissionen , (nach Kap.4.2.10), d.h. Schleifen über alle Empfangspunkte des Teilraums und alle Frequenzbänder	
Projektion auf den Originalraum, d.h. Schleife über alle von vorne sichtbaren Teilpolygone (Patche) d. aktuellen Teilraums⁴³:	
Vorabfrage, ob übergeordnetes Wandpolygon geschnitten	
falls nein: nächstes Polygon	
falls ja: Projektion Pyr auf Polygonebene (des akt. Teilraums)	
Unterschleife über alle Patche (Teilpolygone) des Wandpolygons	
falls Pyr dazu nicht existent (d.h. von Energie besetzt):	
Neuerschaffung quantisierter durch diese genormter Pyre	
Pyr-Clipping	
falls kein Schnittpolygon: -> „nächster Pyr“	
falls Schnittpolygon:	
Berechnung der Schnitt- bzw. Überlappungsfläche des Schnittpolygons mit d. Teilpolygon und des Flächenanteils⁴⁴	
oder besser: Berechnung d. entspr. Raumwinkelanteils	
Übertrag und Aufaddition der Pyr-Energie zur Energie des durch das teilweise bestrahlte Teilpolygon genormten, quantisierten Pyrs⁴⁵	
nächstes Patch	
nächster Pyr, d.h. zurück zum Pyr-Management.	

4.5.7. Zusammenfassung:

Gesamtverhalten von QPBT qualitativ / Interpretation der Energieumverteilung

Das Gesamtverhalten war bereits in Kap. 4.1. vorausgesagt worden (s. Bild 4.1.7.): Rekombination bzw. Wiedervereinigung von Pyren bzw. ihren Energien tritt auf, wenn Pyrspitzen in dieselbe SSQ-Raum-Zelle fallen und mindestens ein Teil des von dort gemessenen Raumwinkels sich mit den durch die Teilpolygone des Originalraums definierten quantisierten Pyren überlappt. Dieser Effekt wird zu Anfang, ab dem Direktschall, noch sehr selten auftreten, so dass sich die Pyre (d.h. die Anzahl mit Energie besetzter Zellen) noch vermehren, ohne Streuung etwa mit dem Quadrat des Abstands von der Mitte, mit Streuung schneller. Danach wird der Wiedervereini-

⁴² vergl. „rekursiver Einstieg in 'Verfolge Pyr'“ in der „Skizze des rekursiven pyr tracing Algorithmus“ am Ende von Abschn. 4.2.4.

⁴³ hierbei findet wie bei UPBT implizit die Aufspaltung der Pyre und Energien statt, jedoch nicht mehr rekursiv, sondern es bleibt einfach von selbst pro Teilpolygon nur eine Teilenergie übrig, auch wird hierbei ein nächstes Nachbar-Polygon und damit ein nächster Nachbar-Pyr von selbst gefunden; die anderen Pyre werden daneben, iterativ bearbeitet.

⁴⁴ nicht wie bei UPBT Beschränkung auf ein Schnittpolygon, Bildung eines beschränkten Pyrs und Weiterverfolgung

⁴⁵ hierbei geschieht die Wiedervereinigung !

gungeffekt immer wahrscheinlicher werden, und die Anzahl Pyre wird alternierend gegen ein (durch die Raumwinkel- und radiale Teilung des SSQ-Raums sowie die Wahl der Größe der Raumboberflächenteilpolygone vorgegebenes) Maximum konvergieren. Zwischen den vielen kleinen Oberflächenstücken wird praktisch nur noch umverteilt, ohne Streuung jeweils nur zu wenigen anderen, mit Streuung jeweils zu vielen anderen – wobei wegen der mit wachsender Laufstrecke steigenden Diffusionsgrade aber praktisch nur noch diffuse Streuung auftritt. Dabei wird die Anzahl existierender Pyre (Anzahl Zeilen mal Spalten in Bild 4.5.4. mal dem mittleren Besetzungsgrad $\Lambda / R_{\max}$) statistisch um einen Mittelwert schwanken, der dem gewählten oder zur Verfügung stehenden Speicherplatz entspricht.

4.5.8. Abschätzung Speicherplatzbedarf

Der benötigte Speicherplatz ist sehr hoch, hängt extrem von der Raumkomplexität (Anzahl Wände), damit aber auch von der mittleren betrachteten Wellenlänge sowie weiteren vom Benutzer vorgebbaren Genauigkeitsparametern wie etwa der Raumwinkelauflösung ab. Sei K_0 die ursprünglich gewählte Anzahl Wandpolygone, bei raumakustischen Anwendungen meist in der Größenordnung von 100-1000, bei ganzen Städten freilich mehr. Die Anzahl der nach Konvexzerlegung entstandenen Polygone wird nicht viel größer als K_0 sein, wohl selten mehr als $2 * K_0$, meist, da rechtwinklige Strukturen, werden konvexe Teilräume aus etwa 6 Teilpolygonen bestehen, von denen maximal die Hälfte neu kreiert sind. Die weitere Unterteilung dieser Teilpolygone in etwa gleich große Patche zur Homogenisierung der Pyr-Größen als auch – besonders am Rande transparenter Wände- zur Erfassung der Beugung wird allerdings zu wesentlich mehr Teilflächen führen. Sei b die typische Abmessung dieser Patche; dann müssen die Randpatche in der Größenordnung einer halben Wellenlänge breit sein; bei mittleren Frequenzen (500-1000Hz) also etwa 0.3...0.6m, dann dürfte dies zu größenordnungsmäßig 10...100 mal mehr Patchen als ursprüngliche Wandpolygone führen, also zu $10^3 \dots 10^5$ Oberflächenstücken (da von Struktur bzw. „Zerklüftung“ der Raumes abhängig, schwer zu schätzen). Im Gegensatz zu voll wellentheoretisch basierten numerischen Methoden wie der *boundary element method* (BEM) oder ihrer zeititerativen Formulierung TIBEM /R2/ müssen (bei gleichen Anwendungsfeldern bzw. Raumkomplexitäten und –Größen) aber **nicht alle Patche** in der Größenordnung unter einer halben Wellenlänge groß sein, sondern nur Randpatche. Bei eben diesen Patchgrößen dürften Raumdiagonalen ca. 10...100 mal länger sein - das ergibt die Anzahl Zeitintervalle bzw. die Zeilenzahl in obiger Matrix. Weiter gibt es typischerweise ca. 10^3 Raumwinkелеlemente des SSQ-Raums. Dies führt zu größenordnungsmäßig $10^6 \dots 10^8$ „gleichzeitig“ zu verfolgenden Pyren und $10^7 \dots 10^{10}$ Matricelementen, bei nur wenigen darin enthaltenen Variablen nur mit jeweils wenigen byte Speicherplatzbedarf.

Der Gesamtspeicherplatz-Bedarf liegt also in der Größenordnung von 100MB... 100GB. Mit Nutzung o.g. dynamischer Speicherverwaltung reduziert sich dieser noch maximal um einen Faktor in der Größenordnung von 10 ($R_{\max} / \Lambda$), durch weitere Sparmaßnahmen ließe er sich möglicherweise noch weiter reduzieren. **Der Speicherplatz hängt aber nicht vom Grade ab, mit dem Beugungen oder Streuungen berücksichtigt werden.**

4.5.9. Abschätzung der Gesamt-Rechenzeit

Als Anhaltspunkt mag hier die Rechenzeit bisheriger Schallteilchen-Simulationen dienen, die (1998) bei der erwähnten Rechenzeiteinheit von 0.1ms für die Findung von Wandschnittpunkten, größenordnungsmäßig 100 Wänden, 10000 Schallteilchen à 10 Reflexionen und PC mit 200MHz Taktfrequenz sowie rund 1dB Immissionspegelgenauigkeit in der Größenordnung von nur noch Minuten lag, heute (bei rund 2GHz Taktfrequenz) also unter einer Minute. Mit Pyramidenstrahlen, die ja jeweils aus mehreren Kanten bestehen, und von denen es gleichzeitig wesentlich mehr geben wird als früher Schallteilchen, wird der Aufwand - bei gleicher Raumkomplexität, aber konvex-zerlegt, Reflexionsordnung und Genauigkeit – deutlich größer sein (Faktor 100-1000) . Die iterative statt rekursive Ausführungsreihenfolge spielt dabei keine Rolle und, entscheidend: **der Einbau der Streuung wird - nach Wiedervereinigung – die Rechenzeit nicht mehr um Größenordnungen erhöhen.**

Ein allgemeiner Nachteil der (notwendigen) iterativen Abarbeitung einer derart großen Anzahl parallel existierender Pyre bei quasi-zufälligem Zugriff ist aber: die Zugriffszeiten heutiger Rechner auf den Haupt-Arbeitsspeicher sind um Größenordnungen (typisch 100) länger als die Taktzeiten der CPU (*central processing unit*)⁴⁶. Der Preis für den zufälligen Zugriff auf einen derart großen Speicher ist also auch eine deutlich langsamere Ausführung.

Dennoch wird die Gesamtrechenzeit in vielen typischen Anwendungsfällen - auch mit Beugung - wohl nicht über wenige Stunden hinausgehen.

4.5.10. Alternative Parallelausführung

Eine höchst interessante Variante der Ausführung der Energie-Umverteilungsschleifen wäre die auf Parallelrechnern. Wie obige Überlegung zeigt, nützen dabei aber keine, die nur etwa Matrizenrechnungen zeilenweise, exakt-gleichzeitig ausführen; es müsste sich um eine große Zahl unabhängiger Einzelprozessoren handeln, die auf gleichen Datenbasen arbeiten; diese könnten die „unterste Zeile“ fast gleich alter Pyr quasi-parallel abarbeiten. (Falls es so viel Prozessoren wie Energieträger, also 10^6 – 10^8 , geben könnte, ginge die Abarbeitung sogar in Echtzeit oder schneller.) Der jeweils auszuführende elementare Job eines Prozessors wäre gerade der der Pyr-Spiegelungs- und Umverteilungs-Prozedur.

⁴⁶ Der Cache (der schnelle Zwischenspeicher) fasst nur eine kleine Datenmenge. Um bei dem quasi-zufälligen Zugriff auf den Hauptspeicher ein ständiges Umladen von und zu diesem aus dem Cache zu vermeiden, was sonst automatisch passieren könnte, müsste eventuell der Cache deaktiviert werden.

5. Zum Einbau von Streuung und Beugung von Pyramidenstrahlen

Das algorithmische Haupthindernis, die befürchtete Rechenzeitexplosion, kann nun also durch die Methode der quantisierten Pyramidenstrahlen als beseitigt betrachtet werden. Auch die zweite Problematik, dass ideal-dünne Strahlen beugende Kanten nie exakt treffen, wird durch die Wahl von Pyramidenstrahlen aufgelöst. Damit sind auch die Probleme mit den „Fähnchen“, die zur Erfassung von Beugungsfällen dienen (Abschn. 3.5.3.) hinfällig. Dies wird elegant gelöst durch die Einführung der Zerlegung von Räumen in konvexe Teilräume (s. Abschn. 4.2.3.). Bei den Hypothesen zum Einbau von Beugung - Kanten als Grundelemente, energetischer Ansatz, sowie abstandsabhängige Ablenkungsfunktionen (Abschn. 3.3.1.) - soll es bleiben. Passende Winkelabhängigkeiten der Beugungsfunktionen wurden, wenn auch mit Defiziten, mit dem „Stuttgarter“ und „Trondheimer“ Schallteilchen-Beugungsmodell entwickelt (Abschn. 3.3.3. und 3.4.6.). Um diese Winkelabhängigkeiten wird es im Folgenden **nicht** gehen, sondern, angesichts mangelnder Ausführung und Testung des komplizierten Gesamtalgorithmus¹ von QPBT, nur um eine qualitative Diskussion.

Einbau von Beugung bedeutet jetzt sozusagen nur noch Vervielfältigung und Richtungsmanipulation bei der Umverteilung der Pyramidenstrahlen an der betreffenden Schnittstelle im Algorithmus („Pyr-Spiegelung“ in Tab. 4.5.1.). Einziger qualitativer Unterschied: Der neue Quellpunkt sitzt jetzt (näherungsweise, nach dem Huygens'schen Prinzip) **auf** den Oberflächen bzw. deren Kanten anstatt davor. Die Ausführungsreihenfolge bleibt die gleiche (schon deshalb kann der Abstand eines Quellpunktes zum Ursprung des SSQ-Raumes kein Kriterium für die Ausführungsreihenfolge sein). Die Wellenformen von an beliebig orientierten Kanten und Flächen gebeugten Wellen sind zwar eigentlich beliebig verformt und die Abstandsgesetze modifiziert. Es soll hier aber zur Vereinfachung **angenommen** werden:

Die Beugungskanten, oder näherungsweise auf ihnen verteilte endlich viele Punkte, sind die letztgültigen Quellen, von denen aus die Strahlen divergieren, also die Quellpunkte neuer Pyramiden -Strahlen; von der früheren Vorgeschichte zählt nur die Laufzeit bzw. -Strecke von der Ursprungsquelle zu den Beugungskanten, bei neuen Beugungskanten die Strecke von der vorigen.

5.1. Simulation diffuser Reflexionen

Auch diffuse Strahler sitzen **auf** den Wänden, statt wie Spiegelquellen hinter ihnen¹. Dies zu simulieren ist ohne strukturelle Änderungen möglich, denn die Information über Herkunft und Divergenz der Pyre ist in Form von n_R im Datensatz (Tab. 4.3.1.)

¹ Eine Alternative wäre das „Streuspiegelungsmodell“: Um die wichtige Laufzeitinformation zu erhalten, könnte man die Spiegelungsmethode im Prinzip auch beibehalten, sich „verwackelte“, genauer: auf eine Halbkugel „verschmierte“ Spiegelquellen hinter Wänden vorstellen; um Lambert'sch -diffuse Reflexionen zu erreichen, müsste man dann die Energie der ursprünglichen Quelle möglichst gleichmäßig auf eine höhere Anzahl solcher (später „zurechtzurückenden“) Ersatzquellen in gleichem Radius hinter einer Wand verteilen; das $\cos\delta$ -Gesetz ergäbe sich dabei automatisch, da mit zunehmendem Winkel δ der wirksame Raumwinkel jeder Teilquelle durch ein entsprechend kleineres Projektionsfenster der spiegelnden Wand eingeschränkt würde.

gespeichert. Die Ausführungsreihenfolge bleibt unverändert. Als Konstanten vorberechnet sein müssen allerdings die Flächenschwerpunkte als eventuelle Quellpunkte.

Im Falle, dass als „diffus reflektierend“ deklarierte Teilpolygone getroffen werden, würde dann Folgendes zusätzlich passieren (s. Gesamtalgorithmus, Tab 4.5.1./ Spiegelung):

- Berechnung der aufgetroffenen und (bis auf den Absorptionsgrad) wieder abustrahlenden Energie aus dem Abstand zur vorigen (Spiegel-)Quelle r und der Fläche S_{TP} des Teilpolygons ($\propto S_{TP} / r^2$);
- Schleife über eine genügende Anzahl sekundärer Pyre.

Was eine „genügende“ Anzahl ist, kann mangels tatsächlicher Programmierung hier nicht gesagt werden; wahrscheinlich genügen nur wenige (bei 10°-Polar- und Azimutalwinkeln über den Halbraum wären es je ca. 200 Pyre, bei 30°-Winkeln nur ca. 25); der Rechenzeit-Effekt ist wegen der Wiedervereinigung gering.

Ist ein Teilpolygon eventuell, entsprechend einem Streugrad (der natürlich von den Daten der Wand, zu der es gehört, bezogen werden müsste) nur teilweise diffus reflektierend, werden (anders als beim Zufallsmodell bei Schallteilchen) die Modelle für die geometrische und diffuse Reflexion von Pyren kombiniert, d.h. es werden sowohl ein geometrisch reflektierter Pyr **und** eine Gruppe diffus reflektierter Pyre neu erzeugt (welche sich später – wie andere auch – mit anderen überlagern).

Auch mit Pyramidenstrahlen ist also Simulation diffuser oder teilweise diffuser Reflexionen neben spiegelnden möglich, und zwar in beliebiger Reihenfolge und, durch entsprechend optimierte Umverteilungskoeffizienten, für mehrere Frequenzbänder gleichzeitig (wie grundsätzlich beschrieben in Abschn. 2.2.1.). Ein Nachteil ist (wie aber bei jedem numerischen Modell) die Konzentration auf Flächenschwerpunkte (statt von ganzen, z.B. „rauen“ Flächen); dieser Fehler kann freilich durch Wahl kleiner Teilpolygone verringert werden

5.2. Simulation von Beugung

Hierzu sind vor allem zwei geometrisch verschiedene Modelle denkbar:

5.2.1.: Modell 1: Kanten- statt Punktstrahler

Angeichts beugender Kanten erscheint es konsequenter, jene auch als Quellen elementarer Strahler zu benutzen. Solche besonderen „**Beugungskantenstrahler**“ wären dann aber **Prismen statt Pyramiden** (s.Bild 5.1.). Die beugende Kante, genauer: der von einem vorangegangenen Pyr bestrahlte Kantenabschnitt eines Teilpolygons am Rand einer Wand, ersetzt den Quellpunkt; von den Enden der Kanten gehen je zwei Kanten des Prismenstrahls aus; dadurch ist ein solcher Prismenstrahl also in jedem Falle von 4-eckigem Querschnitt (nicht notwendig rechteckigem, man könnte ihn aber darauf festlegen).

Dieses Prismenmodell ist auch deshalb konsequent, als ja nach dem Fermat'schen Extremal-Prinzip um Kanten gebeugte Strahlen, dem Prinzip „Ausfalls- =Einfallswinkel zur Kante“ gehorchen, und allesamt auf einem Kegel liegen (s. Bild 3.2.2. und Bild 5.2.). Durch Prismen können Strahlen, die in einem Winkelbereich liegen, einfach zusammengefasst werden. Allerdings müsste das Abstandsgesetz von Kantenstrahlern statt von Punktstrahlern reproduziert werden. Nach den Ergebnissen aus den Teilchenbeugungen (Abschn. 3.3.4. und 3.4.8.) braucht man größenordnungsmäßig je 10 bis 100 Prismen, wobei diese in 3 Winkelbereichen um die beugende Kante liegen: dem reflektierten, dem sichtbaren, und dem gebeugten Winkelbereich (s. Bild. 5.2.):

Bild 5.1. Prismenstrahl (rechts, perspektivisch), ausgehend vom Teil einer Kante eines Wandpolygons (links); von den Enden der Kante eines Teilpolygons der Wand (fett) gehen je zwei Kanten des Prismenstrahls aus - nicht ganz beliebig, sondern so, dass durch sie 4 ebene Flächen, 2 Dreiecke und 2 Vierecke aufgespannt werden, die das Prisma begrenzen; rechts entsteht dadurch ein viereckiger Querschnitt, der hier jedoch an willkürlicher Schnittstelle gezeichnet ist, da er sich unendlich nach rechts fortplant.

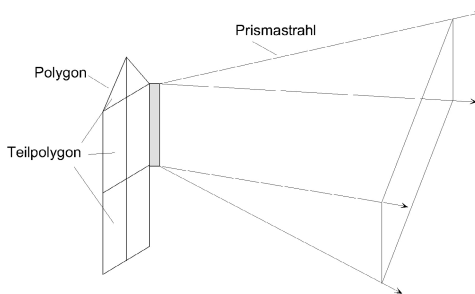
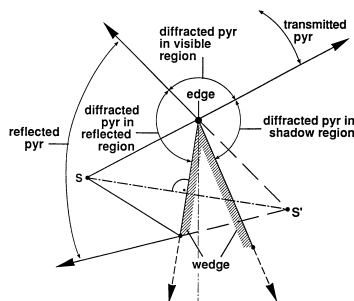
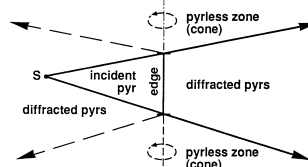


Bild 5.2. zur Beugung von Prismenstrahlen: Oben, „von der Seite“: schraffiert: in einem Raum nach innen ragender Keil (*wedge*), gebildet aus zwei Wänden:

oben, senkrecht zur Zeichenebene, die beugende Kante (*edge*), links ein Quellpunkt *S*, von dem aus (in Form eines Pyrs oder, bei schon vorangegangener Beugung, eines Prismas) die Kante bestrahlt wird; der gesamte Winkelbereich um die Kante ist in **drei Bereiche** unterteilt: **den reflektierten, den sichtbaren, und den gebeugten.**



Unten, das Gleiche „von oben“: links wieder der Quellpunkt *S*, der, mit den Enden der beugenden Kante in der Mitte, die seitliche Divergenz des Prismenstrahls definiert (vergl. Bild 5.1.); die Randkantenstrahlen der gebeugten Prismen liegen allesamt auf zwei Kegeln mit den Endpunkten der beugenden Kante als Spitzen; jenseits dieser Kegel (*pyrless zone*) liegen keine gebeugten Strahlen.



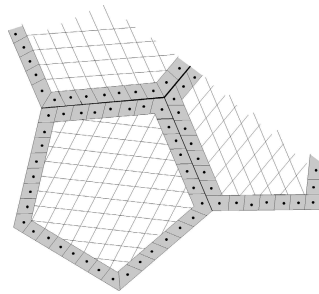
Da hier exakt die Kanten als Strahler verwendet werden könnte ein solches Modell scheinbar mit der UTD (Abschn.3.2.) kombiniert werden. Diese jedoch involviert flankierende Wände als Randbedingungen und ist inkompatibel mit dem energetischen Ansatz von QPBT.

Weitere Nachteile dieses schon früher /H5/ vorgestellten Beugungsmodell sind: Prismen als Sonderformen verkomplizieren den Algorithmus, außerdem müssten Raumkanten in mehrere kürzere zerlegt werden. Eine Zerlegung der beugenden Kanten in eine Kette von Punkten ist auch inkonsequent. Kanten als „umverteilende Objekte“ kommen in QPBT nicht vor, sondern nur kleine Flächen. Konsequenter und einfacher sind deshalb Punktstrahler.

5.2.2. Modell 2: Punktstrahler auf den Flächenschwerpunkten der Randpatche transparenter Zwischenwände:

Bild 5.3.: **Randpatche** (bzw. Teilpolygone, hellgrau unterlegt, mit markierten Flächenschwerpunkten) **nahe beugender Kanten (fett)** dreier in einer Raumecke zusammenstoßender Wände;

die **Flächenschwerpunkte** dienen als **Quellen** (Spitzen) neuer, gebeugter Pyre.



Auch zur optimalen Erfassung gebeugter Strahlen wurde ja die Konvexzerlegung durch „transparente Wände“ eingeführt (s. Bilder 4.2.4). Man könnte sich also auf die Randpatche solcher transparenter Wände beschränken. Dagegen spräche, dass (nach Babinet) die Randzonen von reflektierenden Wänden prinzipiell genauso zur Beugung beitragen – vermutlich aber, energetisch, nur in seltenen Fällen. Das Problem, eine Zerlegungsprozedur zu finden, die ein Polygon in Teilpolygone zerlegt, so, dass eine geeignete, separierbare Kette kleiner, in der Größe in etwa festlegbarer Randpolygone (meist Vierecke) entsteht, sei einmal als gelöst angenommen. Solche Vorprozeduren existieren im Rahmen von BEM -Programmen. Hinzufügbar sein sollte jedoch der Sonderwunsch, dass die Randpatche von definierter Breite sein sollten (und nur das restliche, innere Polygon beliebig zerlegt wird.)

Der große Vorteil dieses Modells ist: Es ist - wie das Modell für diffuse Strahler - voll kompatibel mit QPBT. Verschieden sind nur die (noch zu findenden) Winkelfunktionen, u.a. als Funktion des Abstands r_q zum letzten Ersatzquellpunkt (ob Spiegelquelle oder Beugungspunkt) ; dieser wird, quantisiert in Form der Zahl n_r , ohnehin gespeichert. Ferner spielt noch Lage und Orientierung der beugenden Kante eine Rolle, die den ersatzweise beugenden Randpatchen zugeordnet und im Falle des Auftreffens eines Pyres indirekt abgerufen werden müsste; dies bedeutet aber nicht,

dass diese Daten in den Pyr-Datensätzen selbst zu speichern wären, denn nach Spiegelung oder Beugung werden ja die Pyre (s. Rücksprung Tab. 4.5.1. Ende zum Pyr- Management) unmittelbar umverteilt, also ihre Daten nicht erst zwischengespeichert. Es bedarf also keiner Erweiterung des Pyr-Datensatzes (Tab. 4.3.1.)²

Beugung wird also – nahezu ohne Einfluss auf die Rechenzeit - genauso unproblematisch wie Diffusion in den Gesamtalgorithmus von QPBT eingebaut (s. Ende Tab. 4.5.1.). **Es wird deshalb für Modell 2 plädiert.**

Auch eine **Mehrfachbeugung nacheinander** ist – vom Algorithmus her – kein Problem: Falls von einem gerade gebeugten Pyr erneut eine beugende Kante getroffen wird - genauer: ein Randpatch neben einer solchen Kante – wird die Immission dort wie bei einem Empfangspunkt berechnet, nämlich aus der gespeicherten Wegstrecke von der früheren Kante; diese Parameter werden an den jeweils sekundär gebeugten Pyr „weitervererbt“.

In jedem Falle müssten geeignete Winkelfunktionen für „Ersatzstrahler“ auf Randflächen gefunden werden, und zwar getreu dem Gesamtansatz des QPBT-Modells – **für energetische (inkohärente) Überlagerung.**

5.3. Kohärente Beugungsansätze, der Ansatz von Svensson

Ein viel versprechender Ansatz aus der Akustik ist der von Svensson et.al. /R13/. Dieser fußt auf exakten Lösungen von Biot und Tolstoy für den klassischen Keil aus zwei schallharten Wänden – die schon genauer sind als die von Kirchhoff - , und geht konsequent aus vom Ansatz sekundärer Kanten-Quellen, als Korrektiv zu Spiegelquellen. Sein Ziel ist eine zeitabhängige Berechnung der exakten Impulsantworten, demnach durch kohärente Überlagerung. Svensson leitet die benötigten Winkelfunktionen für den zusätzlichen Kanteneffekt her und zeigt, dass dieser Ansatz - erstaunlicherweise mit nur geringen Fehlern - sogar auch für die Mehrfachbeugung taugt. Vergleiche mit numerischen Berechnungen für die Rechteckplatte zeigen hervorragende Übereinstimmungen.

Beides, die Flächenbezogenheit wie der energetische Ansatz von QPBT, sind aber, (wie in Abschn. 3.2. diskutiert) inkompatibel mit der (uniformen) Geometrischen Theorie der Beugung, wie auch mit anderen kohärenten Ansätzen, wie dem nach Svensson. Denn die Grundidee von QPBT ist die Wiedervereinigung durch „Zurechtrücken“ im Spiegelquellenraum – womit ja Phasenfehler verbunden sind (die aber in Kauf genommen werden). Per Fouriertransformation, Quadrierung und Mittelung über Frequenzbänder könnten zwar Impulsantworten im Prinzip in die bei QPBT benötigten energetischen Korrekturen umgerechnet werden. Ob dann die Übereinstimmung mit Referenzfällen noch gut ist, ist fraglich. Es müssten in manchen Fällen ja

² Ein scheinbar weiteres Problem besteht darin, dass die „richtigen“ Beugungskoeffizienten (da ja auch von r_p abhängig) erst nach Bekanntwerden des Empfangspunktes berechnet werden können. Dies ist jedoch qualitativ nichts Neues, da - ob echter Empfangspunkt oder empfangendes Teilpolygon, kompliziertere Abstandsfunktion oder nicht - immittierte Energien immer erst im Moment des Auftreffens berechnet werden.

auch negative Energiebeiträge als Korrektur zu dem von den Wandflächen reflektierten Feld eingesetzt werden, die, wie schon gezeigt, zu Widersprüchen führen. Es bleibt auch das Problem der Abstrahlung von den Randpatchen *neben* den Kanten anstelle von ihnen selbst. Eine einfache Entlehnung „exakter“ Winkelfunktionen von der UTD oder anderswo wäre also fragwürdig.

5.4. Kombination von QPBT mit einem der selbst entwickelten Beugungsmodelle

Möglicherweise ist ein **Kombination von QPBT mit einem der selbst entwickelten Beugungsmodelle, dem „Stuttgarter“ oder dem „Trondheimer“**, obwohl mehr oder weniger heuristisch hergeleitet, doch geeigneter, da jene ja als einzige Modelle ausdrücklich von „Schallteilchen-Vorbeiflügen“ nahe Kanten (anstelle exakt von Kanten) ausgehen. Dabei wäre das „Stuttgarter“ Modell, da unabhängig vom Immissionsabstand, sogar noch wesentlich einfacher. Kantenvorbeiflüge vieler Teilchen mit den jeweiligen Winkelfunktionen könnten dabei – bei geeigneter Wahl der Breite der Randpatche in der Größenordnung einer Wellenlänge – durch zusammenfassende Winkelfunktionen für die Beugung von Pyren ersetzt werden. Wählt man mehrere Reihen verschieden breiter Randpatche, könnten deren „Beugungsstärken“ von der Nähe der Patche zur Kante abhängig gemacht werden, mit der Folge unterschiedlich breiter Ablenkwinkelverteilungen.

6. Diskussion alternativer Algorithmen aus der Literatur, potentiell geeignet zum effizienten Einbau von Beugung ohne Rechenzeitexplosion

Bewusst erst nachträglich, da erst nach den ausführlichen Beschreibungen der vorigen Kapitel zu würdigen, sollen an dieser Stelle exemplarisch drei alternative Methoden aus der Literatur vorgestellt und diskutiert werden. Es werden sich dabei noch nachträglich Bestätigungen für den eingeschlagenen Weg ergeben. Dabei sollen nur im Sinne des genannten Problems wirklich innovative, d.h. qualitativ fortschrittliche Algorithmen Berücksichtigung finden.

Zu Verfahren, die, typisch raumakustisch, d.h. an verbesserter Nachhallzeitberechnung und Auralisation interessiert, einen fließenden und effizienten (wenn auch rechenzeitlich nacheinander behandelten) Übergang von geometrischen zu diffusen Reflexionen erlauben, gehören die nach Dalenbäck /D1/ und Lewers /K8/.

6.1. Das Verfahren von Dalenbäck

Dalenbäck verwendet zunächst einmal ein **cone tracing** als Basis, d.h. verfolgt Kegelstrahlen, bei Aussendung partiell überlappend, ohne Aufspaltung, d.h. reflektiert je nach Reflexion ihrer Mittelstrahlen, detektiert nach Spiegelquellengesetz, d.h. falls Empfangspunkt im Kegel. Dies ist (wegen des Überlappungsproblems) zwar ungenau, aber effizient. Solche Strahlen können im Prinzip in beliebiger Reihenfolge geometrisch oder diffus reflektiert werden. Werden diffuse Reflexionen jedoch stets „ausgewürfelt“ (sowohl das *Ob* also auch das *Wohin*, s. Abschn.2.2.1.) werden die berechneten Impulsantworten jedoch arg grob - oder man muss extrem viele Strahlen immer wieder von vorne aussenden. Entsprechend einer Simulation des Prinzips „jede Oberfläche kann eine Quelle diffuser Reflexionen sein“ wäre eine rekursive Behandlung adäquat – wenn da eben nicht das Problem der Baumstruktur wäre.

Dalenbäcks Lösung:

- Es wird im Prinzip tatsächlich eine Baumstruktur geometrischer und diffuser Reflexionen bearbeitet (s. Bild 6.1.);
- diese wird aber nicht rekursiv, sondern iterativ, in verschiedenen Durchgängen („multiple passes“) abgearbeitet, indem
- zunächst von der Originalquelle aus nur geometrische Reflexionen verfolgt werden, wobei allerdings an den Wänden den Strahlen außer den absorbierten auch die diffus reflektierten Energieanteile entzogen werden, und jene diffus reflektierten Energien, sortiert nach Zeitbereichen ($\Delta t \approx 1ms$) des Auftreffens, dort gespeichert werden und zu den im selben Zeitbereich von woanders her empfangenen Energien aufaddiert werden; Dalenbäck nennt dies nur ganz nebenher **„jumping together“**, dahinter steckt aber nichts Geringeres als **der für die Effizienz entscheidende Wiedervereinigungseffekt !**
- In einem zweiten Durchgang werden (in einer entsprechenden Schleife über alle Wände) die an den Wänden zwischengespeicherten diffusen Energieanteile weiterbearbeitet, und zwar genau so wie die von der Originalquelle: in einer Schleife über eine gewisse Anzahl jeweiliger Sekundärstrahlen nach Lambert'schem Gesetz wird wieder eine „Kaskade“ von geometrischen Reflexio-

nen von dort ab verfolgt und die eventuell diffus zu reflektierenden Energieanteile auf den unterwegs getroffenen Wänden zwischengespeichert.

- So werden „wandbezogene“, d.h. in Quellort und Startzeit verschiedene Echogramme erzeugt – die woanders wieder den „Keim“ für neue „Kaskaden“ liefern – die in einem dritten Durchgang abgearbeitet werden usw.
- Diese „wandbezogenen Echogramme“ sind (für einen bestimmten Empfangspunkt) außer dem Zeitversatz und unterschiedlichen Startenergien stets die gleichen, brauchen also nur einmal berechnet und gespeichert zu werden.
- Die Anzahl jeweiliger sekundärer, diffuser Strahlen muss (und kann) aus Rechenzeitgründen jedoch von Durchgang zu Durchgang reduziert werden.

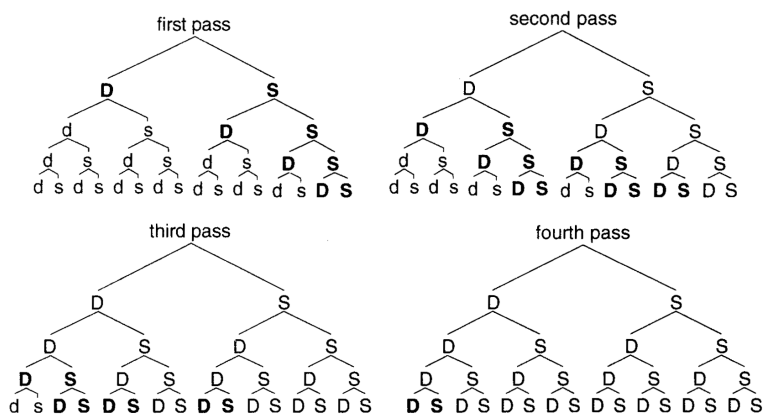


Bild 6.1. Prinzip des rekursiven „multiple passes“-Verfahrens von Dalenbäck zur Behandlung geometrischer und diffuser Reflexionen (*specular*=S und *diffuse*=D reflections.):

Im **first pass** werden zunächst nur Kaskaden von geometrischen Reflexionen verfolgt (die S ganz rechts im Baum), nebenher diffus reflektierte Energien abgezweigt und zwischengespeichert (jeweils die D links unten von den S-Knoten ganz rechts, **fett**);

im **second pass** wird an diesen D-Knoten angeknüpft und von dort weitere, untergeordnete Kaskaden von geometrischen Reflexionen gestartet (jeweils die Kette der S nach rechts unten), dabei wieder diffuse Energien (zu den D links unterhalb der S-Knoten) abgezweigt und zwischengespeichert; usw. im dritten und vierten Durchgang. (aus /D1/.)

Je nach Energieverlust (der wegen des Übergangs zu diffusen Reflexionen ziemlich schnell eintritt) wird irgendwann einmal abgebrochen, und werden die restlichen Energien auf den Wänden rein diffus per Zufall im unverzweigten *cone tracing* abgearbeitet, bis auch dies abgebrochen wird.

Nun wird natürlich stets von Flächenschwerpunkten aus gestartet. Zur Erzeugung einer gleichförmigeren räumlichen Aufteilung wird deshalb die Raumbereichfläche in kleinere, etwa gleich große Teilpolygone aufgeteilt. Das Verfahren kann im Übrigen

für mehrere Frequenzbänder gleichzeitig bearbeiten, da ja stets von allen Oberflächen in alle Richtungen diffus gestreut wird.

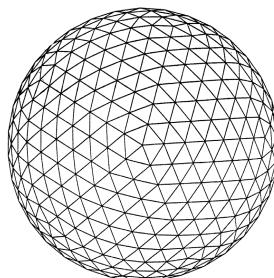
Damit setzt Dalenbäck faktisch (unabhängig vom Autor¹) entscheidende Prinzipien des **Quantized Pyramidal Beam Tracing um** - welches jedoch wegen strikter Einhaltung einer Synchronisation („Weiterverteilung von Energie von einer Oberfläche erst dann, wenn nichts mehr von woanders her ankommen kann“) noch effizienter und variabler ist.

6.2. Das Verfahren von Lewers

Lewers' zentrale Idee ist die Verfolgung von **Pyramidenstrahlen mit dreieckigem Querschnitt**. Damit vermeidet er schon mal die Überlappungsfehler. Allerdings werden die Strahlen nicht aufgespalten, je nach Auftreffen ihres Mittelstrahls als Ganzes reflektiert – womit sich natürlich wieder systematische Sichtbarkeitsfehler ergeben. Die Methode ist also **nicht rekursiv**². Die Pyramidenform spielt also nur bei der Immission eine Rolle (eben wenn ein Empfangspunkt im Pyr liegt), ansonsten wird konventionelles *ray tracing* (der Mittelstrahlen) veranstaltet wie für rein geometrische Reflexionen. Um eine möglichst gleichförmige Abstrahlung zu erhalten, verwendet Lewers die aus der Geodäsie bekannte Methode der Zerteilung einer Kugeloberfläche in viele kleine Dreiecke auf Basis eines Ikosaeders (s. Bild 6.2).³

Diese Methode könnte auch als alternative Startmethode bei QPBT dienen.

Bild 6.2. Zur möglichst gleichförmigen Aussendung von Pyramidenstrahlen mit dreieckigem Querschnitt von einem Quellpunkt aus: Aufteilung einer Kugeloberfläche durch einen Ikosaeder (20 gleichseitige Hauptdreiecke), unterteilt in ein Netz von Dreiecken (hier in der Länge 7 pro Hauptdreieck). aus /K8/



Lewers zweite wesentliche Idee ist der **Übergang zu einem Radiosity-Verfahren** zur Simulation der späten diffusen Reflexionen – aber ein allmählicher; außerdem werden die benötigten Formfaktoren (für den Strahlungsaustausch zwischen einem i. und j. Oberflächenelement) ähnlich dem (vom optischen Ray-Tracing bekannten) Hemi-Cube-Verfahren /C7/ numerisch bestimmt – passenderweise ebenfalls mittels der dreieckigen Pyramiden und der „geodätischen“ Raumwinkelauflteilung. Ähnlich

¹ QPBT wurde im Wesentlichen bereits 1991 /1992 in Trondheim entwickelt, das Verfahren von Dalenbäck in seiner Dissertation /D1/ erst 1995 veröffentlicht.

² Farina /K4/ ist bislang sonst der einzige Autor aus dem Bereich der Raumakustik, der Pyramidenstrahlen benutzt, jedoch ebenfalls ohne rekursive Aufspaltung.

³ Diese Abschussmethode ist auch im Bereich des *ray tracings* in der (elektromagnetischen) Hochfrequenztechnik bekannt; auch Schöberl /D8/ benutzt sie, verfolgt allerdings dann dünne Strahlen durch die Dreiecksmittelpunkte.

Dalenbäcks Idee⁴ werden die während des primären *ray-* bzw. *pyr tracings* nicht absorbierten oder geometrisch reflektierten Energien auf den Oberflächenstücken gesammelt und dienen dann als Startenergie für die Abarbeitung vorsepeicherbarer flächen- und empfängerbezogener Echogramme; diese basieren jedoch nicht auf geometrischen, sondern auf rein-diffusen (Lambert'schen) Reflexionen im Rahmen eines zeititerativen Radiosity-Verfahrens (s. Abschn. 2.3.3.). Als Verfeinerung zum Problem der ja sehr unterschiedlichen Laufzeiten zwischen Paaren von Oberflächenteilstücken an verschiedenen Enden von Wänden werden - um eine wesentlich kleinere Anzahl von Oberflächenstücken bewältigen zu müssen - die Laufzeiten zwischen den Oberflächenstücken, nach Erstellung und Interpolation eines Histogramms, per Zufall bestimmt. Anders als bei der variablen Methode nach Dalenbäck kann bei Lewers also Energie grundsätzlich nur von geometrisch reflektierter in diffus reflektierte übergehen, nicht umgekehrt. **Erst** werden für jedes Zeitintervall Δt alle „Startflächen“ abgearbeitet, **dann** Dasselbe für das nächste Zeitintervall usw. Dies entspricht der beim QPBT vorgetragenen Idee zur „zeilenweisen“ Abarbeitungsreihenfolge. Diese ist ja besonders effizient, weil „erst weiterverteilt wird, wenn nichts mehr auf einer Fläche angekommen kann“. Damit erscheint Lewers' Idee noch konsequenter als Dalenbäcks, und – wegen der Pyramidenstrahlen – noch dichter an der vom Autor entwickelten Methode.

Defizite beider Verfahren im Vergleich zu QPBT sind jedoch:

- keine Vorkehrungen zur Rechenzeitreduktion beim eigentlichen *ray tracing* – wie etwa Konvexzerlegung;
- nur diffuse Reflexionen, keine Beugung mit beliebiger Richtwirkung;
- systematische Fehler durch Verzicht auf Aufspaltung der Strahlen (bei Dalenbäck auch durch Wahl nicht dicht gepackter Kegel statt Pyramiden).

Immerhin sind nach Kenntnis des Autors Dalenbäck und Lewers bislang die einzigen, die Strahlverfolgung mit Wiedervereinigungseffekt betreiben.

6.3. Das Verfahren von Funkhouser

Die einzige dem Autor bekannte, für die Raumakustik vorgeschlagene Veröffentlichung, die ein **rekursives** Pyramidenstrahlverfahren, d.h. mit Aufspaltung vorstellt, ist die von **Funkhouser et.al. /K5/**. Diese Autoren arbeiten an *Virtual-Reality*-, also „Echtzeit“-Anwendungen hauptsächlich mit dem Ziel der Visualisierung bzw. Simulation der Lichtausbreitung und haben deshalb vornehmlich die Rechenzeitminimierung im Blick. Die Raum-Szenarien sind ebenfalls untypisch für Raumakustiker: Es geht diesen Autoren neben der Visualisierung um eine möglichst ebenso schnelle Simulation von Höreindrücken (Auralisation) „beim Herumgehen“ in größeren, durch viele Teilräume stark zerklüfteten Gebäuden.

Schlüsselidee dieser Arbeit ist die Zerlegung des Gebäudes in konvexe Zellen (s. Abschn. 4.2.3). Im Gegensatz zum Ansatz des Autors (der eher auf größtmögliche konvexe Teilräume hinausläuft) wird hier eine schematisch-rekursive jeweilige Zweiteilung des Raumes durch starre (xy-, yz- und zx-)Ebenen vorgenommen

⁴ - jedoch schon 1991, 4 Jahre früher vorgetragen auf einem Workshop in Lyngby /Kopenhagen

(„**Binary Space Partition**“ **BSP**, s. z.B. /C3,C7/), solange, bis die abgeschnittenen Teilräume konvex sind. Zusätzlich werden in diesem, natürlich nur einmalig vorweg durchgeführten Verfahren, Informationen darüber abgelegt, welche Zellen direkt aneinander grenzen („**adjacency graph**“, s. Bild 6.3.).

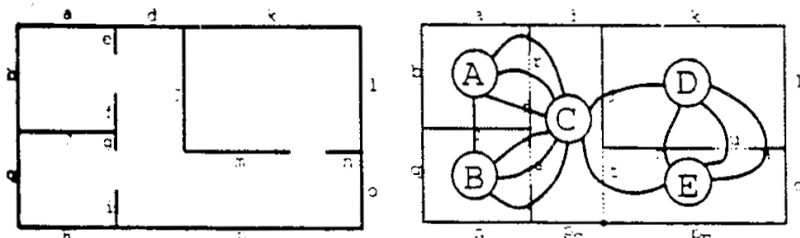


Bild 6.3. Einfacher Gebäudeplan (links) und Beispiel für die zugehörige Konvexzerlegung (zusätzliche „Wände“) und den zugehörigen **cell-adjacency**-Graphen (rechts) (aus /K5/).

Erst hiermit, so wird herausgestellt, ist der immense (von allen anderen Autoren gescheute) Rechenaufwand überhaupt effizient zu bewältigen. Dies entspricht dem Konzept der „transparenten Trennwände“ des Autors mit der Zuordnung der vorder- und rückseitig angrenzenden Teilräume, die die gleiche Information liefern.

Dies ist eine sehr befriedigende Bestätigung für den eigenen Vorschlag.

In einem zweiten Schritt wird die eigentliche rekursive Pyramidenstrahl-Verfolgung durchgeführt, mit all seinen Clipping- und Spiegelungsprozessen (s. Abschn. 4.2.8 und 4.2.9), wobei (in Begriffen des Autors gesprochen) „bei Transmission in benachbarte Teilräume“ zur Findung des nächsten der **adjacency graph** genutzt wird. Die weitere besondere Idee ist aber: Auch dieses *pyr tracing* wird – für jeweils nur einen Quellpunkt pro Teilraum- nur einmalig vorweg ausgeführt, um **nur die prinzipiell möglichen Wege zwischen den Teilräumen** und ihren (jeweils nur wenigen) Oberflächenpolygonen zu finden, d.h. einen festen „**beam tree**“ zu kreieren (Bild 6.4.).

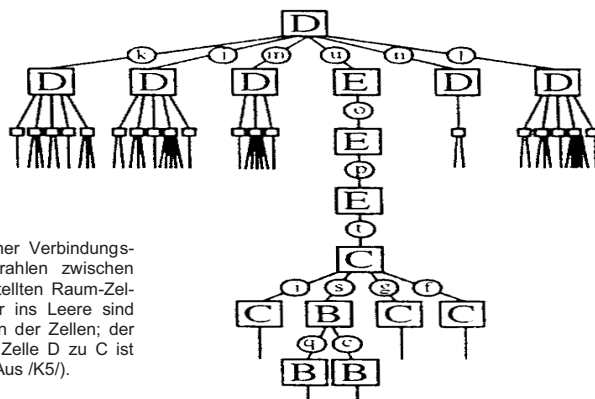


Bild 6.4. Baum möglicher Verbindungswege via Pyramidenstrahlen zwischen den in Bild 6.3. dargestellten Raum-Zellen; die Äste scheinbar ins Leere sind jene zu Einzelpolygonen der Zellen; der direkte Übergang von Zelle D zu C ist z.B. hier nicht möglich. (Aus /K5/).

In jener Baumstruktur sind auch die (ja konstanten) Abminderungsfaktoren vor allem durch Absorption gespeichert. Die Vorberechnung eines solchen *beam trees* lohnt sich jedoch nur bei der von den Funkhouser et. al. angestrebten Anwendung für *virtual reality*, bei der die Empfangspunkte „wandern“. Bei den hier eher anvisierten Anwendungen ist dies jedoch nicht der Fall, es werden ohnehin stets gleich alle vordefinierten Empfangspunkte bedient. Das eigene Konzept der Konvexzerlegung und der transparenten „umschaltenden“ Trennwände ist hierfür schon eine ausreichende, sehr gute Verbesserung.

Nach Funkhouser kann jetzt, drittens, die interaktive *virtual reality*-Anwendung starten. Zur Berechnung der Impulsantworten müssen hierbei alle (oder zumindest alle frühen) Wege zwischen den Schallquellen und den (typischerweise ständig wechselnden) Empfangspunkten gefunden und berechnet werden („**path generation**“). Hierbei hilft entscheidend jener **beam tree**, denn alle „sichtbaren“ Strahlen müssen ja innerhalb der Pyramidenstrahlen laufen, deren Spiegelungsprozesse im **beam tree** abgespeichert wurden.

Die Anzahl der Verbindungsmöglichkeiten unter K_0 Oberflächenpolygone so konvex-zerlegter Räume ist damit nicht etwa, wie sonst theoretisch, proportional K_0^2 , sondern steigt nur noch linear mit K_0 . Dabei ist die Anzahl der Teilräume ebenfalls proportional der Anzahl Polygone, z.B. ergaben sich bei einem Gebäude mit vielen Teilräumen und 10000 Polygonen, 4500 konvexe Zellen - wozu übrigens 640MB Arbeitsspeicher benötigt wurden – ähnlich wie für QPBT prognostiziert. **Die Rechenzeit zur Findung aller Wege zwischen Sende- und Empfangspunkt bis zu einer gegebenen Reflexionsordnung ist so von der Anzahl der Polygone kaum noch abhängig.** Statt dass (wie theoretisch bei der „klassischen“ Spiegelquellenmethode ohne jegliche Beschleunigungstechniken) für o.g. Beispiel bei Reflexionen bis zur 8.Ordnung

ca. $\sum_{i=0}^8 (1000/2)^i$ Spiegelquellen erzeugen zu müssen, werden „nur“ ca. $2 \cdot 10^9$ erzeugt.

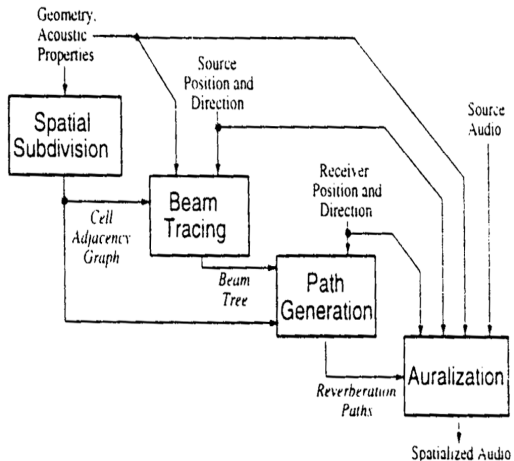
Bild 6.5. Gesamttablauf des Pyramidal Beam Tracing nach Funkhouser et al.:

von links nach rechts:

Einmalig vorweg berechnet:

- 1.) Raum-Konvexzerlegung mit Anlegen eines Graphen benachbarter Zellen
- 2.) damit *beam tracing* zur Erzeugung einer Baumstruktur möglicher Pfade („*beam tree*“) darauf basierend, **wiederholt und schnell ablaufend:**

- 3.) Erzeugung der aktuellen (reflektierten) Pfade zwischen Quellen und jeweiligem Empfänger
- 4.) Auralisation, d.h. Erzeugung und Faltung der Impulsantworten (Aus /K5/).



Funkhouser gibt für den o.g. Raum (bei einem Prozessor mit damals nur ca. 200 MHz Taktfrequenz) Rechenzeiten in der Größenordnung von 0.2s an, womit die „Echtzeit-Fähigkeit“ gesichert war.

Der vierte und letzte Prozess (s. Bild 6.5.) ist die Auralisierung, wie bekannt, durch Faltung der berechneten Impulsantworten mit den gewünschten Schallsignalen.

Diese Rechenmethode wurde bereits vollständig implementiert. Ihre Effizienz ist allerdings an eine Art von Gebäuden gebunden, die eine starke „Zerklüftung“ mit während des *ray tracing* überwiegend unmöglichen Flächenkombinationen aufweisen; sie ist also weniger geeignet für Raumakustik im engeren Sinne, also für überwiegend konvexe Räume mit freien Ausbreitungsbedingungen oder gar für die Schallausbreitung im „Freien“, aber mit vielen Hindernissen (Städte).

Die Methode ist (wie die meisten deterministischen Methoden) sehr gut nur bei Beschränkung auf wenige Reflexionen oder Streuungen, also wenn eher Schnelligkeit statt Genauigkeit verlangt ist.

Funkhouser et. al stellen zu Recht heraus, dass die Pyramidenstrahlmethode mit Konvexzerlegung hervorragend geeignet ist, die ja vornehmlich an „hineinragenden“ Kanten passierende Beugung zu realisieren, aber auch, dass dies geometrisch schwierig sei, eben weil Quellpunkte durch Quellkanten zu ersetzen sind. Für die Umsetzung, d.h. was geeignete Winkelfunktionen betrifft, schlagen sie die Verwendung der „Geometrischen Theorie der Beugung“ oder ihre Weiterentwicklung, die UTD vor [B2,4], wie sie in der (elektromagnetischen) Hochfrequenztechnik zur Simulation der Strahlenausbreitung bei Mobilfunknetzen in eben solchen Gebäudestrukturen mit Erfolg angewandt wird. Im Jahre 2001 veröffentlichten die Autoren die Ergebnisse der Umsetzung. Danach konnte (wie zu erwarten) durch Einbau von Beugung u.a. die Qualität der Auralisation stark verbessert werden [B14]. Das Rechenzeitproblem scheint nicht nennenswert gewesen zu sein, vermutlich haben also Beugungen höherer Ordnung nicht dominiert.

6.4. In der Hochfrequenztechnik eingesetzte Methoden

Schöberl [D8] und Frach [D9] z.B. (um hier nur zwei jüngere Dissertationen zu letzterem Anwendungsfeld zu nennen) verwenden wie Funkhouser ebenfalls die UTD als hochfrequente Näherung zur Kantenbeugung. Schöberl bleibt beim *ray tracing* (dünne Strahlen mit Detektion in Zählkugeln), wobei er das Problem des nicht exakten Treffens von Kanten sehr einfach, aber fragwürdig löst (s. Abschn. 3.2 und 3.5.2.). Frach verwendet, ebenso wie Funkhouser, adaptives *beam tracing* (in Form allerdings des einfacheren *cone tracings*) und ausgeklügelte Methoden wie BSP mit optimierten Raum-Partitionierungsbäumen. Zur Beschleunigung setzte Frach [D9] sogar Parallelrechner ein, wobei der Erfolg allerdings begrenzt war wegen der Probleme bei der Speicherallokation (wie schon in Abschn. 4.5.9. vorausgesehen). Probleme bereiteten u.a. die exakten Pfade bei Mehrfachbeugung (genauer bestimmt durch die Methode des *simulated annealing*). Zur Verbesserung der Genauigkeit verwendete er die Kombination mit der Spiegelungsmethode. Genaue Pfadlängen zu bestimmen ist aber nur dann wichtig, wenn man Interferenzeffekte und die durch sie verursach-

ten Feinheiten des Frequenzganges genau bestimmen will. Das ist jedoch in der Raumakustik unnötig.

Nicht gelöst wird durch all diese Methoden das Problem der mit Einbau von Streuungen bzw. der rekursiven Struktur drohenden Zersplitterung der Pyramidenstrahlen und damit der Rechenzeitexplosion. In zerklüfteten Gebäuden spielen weder beim Schall noch bei Funkwellen Reflexionen und Beugungen höherer Ordnung eine wichtige Rolle. Die Rechenzeiten sind deshalb noch moderat und durch die genannten Methoden hinreichend minimierbar. „Wiedervereinigung“ ist deshalb für diese Autoren kein Thema. Für die Anwendung in der Raumakustik muss dies qualitativ anders gesehen werden.

6.5. Zusammenfassung und Vergleich der Methoden untereinander und mit QPBT hinsichtlich Einbau von Beugung in die raumakustische Simulation

Abschließend seien die wesentlichen Eigenschaften und Lösungen der vorgestellten drei Methoden im Vergleich zur Methode der Quantisierten Pyramidenstrahlen des Autors dargestellt:

Tab. 6.1. Vergleich von vier innovativen Algorithmen hinsichtlich Einbau von Beugung in die raumakustische Simulation

Methode	Dalenbäck	Lewers	Funkhouser	Stephenson (QPBT)
Hauptverfahren	Cone-Tracing quasi-rekursiv, iterativ	Pyr-Tracing iterativ Übergang zu Radiosity	Pyr-Tracing rekursiv	Pyr-Tracing rekursiv quantisiert: iterativ
Verbesserungen	Polygonzerlegung flächenbezogene Echogramme	dreieckige Pyre für beide Prozesse	Konvexzerlegung beam tree adjacency graph	Konvexzerlegung Vorentscheide vor Projektion
Diffuse Reflexionen	X	X		X
Wiedervereinigungs- effekt	X	X		X
Einbau von Beugung			Im 2.Schritt realisiert mit der UTD	möglich durch Quantisierung
Implementiert	X	X	X	

7. Zusammenfassung, Bewertung, Ausblick

7. 1. Zusammenfassung

Die Gebiete der geometrischen Raumakustik und der Lärmimmissionsprognose wie auch der geometrischen Optik und Beleuchtungssimulation sind durch die gemeinsamen Annahmen gekennzeichnet, dass die Wellenlängen viel kürzer als typische Raumabmessungen sind, und dass deshalb Strahlen oder Teilchen verfolgt werden können, deren Energien addierbar sind. Dies bleibt auch die **Grundannahme und Arbeitshypothese dieser Dissertation**. Auf diesen Gebieten werden deshalb im Wesentlichen drei Algorithmen zur Berechnung der Schallausbreitung verwendet, die anfangs hinsichtlich ihrer Effizienz und der Einbaufähigkeit von Beugung diskutiert werden. Diese sind, sortiert nach steigender Reflexionsordnung ihrer hauptsächlichsten Anwendung:

- 1) die deterministische und (im Rahmen der Grundannahme) exakte Spiegelschallquellenmethode (SSQM), diese ist in ihrer klassischen Form nur für Reflexionen niedriger Ordnung geeignet;
- 2) die Strahlverfolgung (*ray* oder *beam tracing*), die die Schallausbreitung direkt simuliert; sie gestattet auch die Simulation diffuser Reflexionen, ist trotz statistischen Charakters effizienter als die SSQM, wird aber ineffizient bei höheren Reflexionsordnungen; eine interessante Variante des *beam tracings* ist die Verfolgung sich rekursiv aufspaltender Pyramidenstrahlen.

Ein prinzipieller Mangel aller Strahlenmethoden ist naturgemäß die mangelnde Berücksichtigung von Beugung; und: Strahlenanzahl und Rechenzeit von Ray-Tracing steigen exponentiell, wenn Beugungs- und Streueffekte eingebaut werden.

- 3) Im späteren Nachhall – wie auch in der Optik – dominieren diffuse, „vergessende“ Reflexionen, die die Anwendung einer Strahlungs-Austausch-(*Radiosity*-) Methode zwischen Paaren kleiner Oberflächenelemente (*Patches*) begünstigen – die jedoch nicht die Simulation geometrischer Reflexionen „mit Vorgeschichte“ gestattet; in stationärer Form läuft diese Methode auf das Lösen eines linearen Gleichungssystems hinaus, in zeitabhängiger auf eine Iteration. Auffallend ist, dass diese Methode mit einer konstant bleibenden Anzahl Strahlen auskommt.

Im Bereich der Lärmimmissionsprognose wird Beugung in Form von Abschirmung berechnet und dabei das einfache Umweggesetz genutzt, jedoch nur für Beugung erster Ordnung und kaum in Kombination mit Reflexionen. Schon in einfachsten Fällen neben-oder hintereinander erfolgender Beugung ergeben sich Widersprüche.

So war es **Ziel dieser Dissertation**, strahlengeometrisch-energetische Methoden durch Einbau von Beugungsmodulen auf tiefere Frequenzen bzw. längere Wellenlängen auszuweiten, bei denen der Raum zwar noch groß, aber nicht mehr sehr groß gegen die Wellenlänge ist, dazu einen einheitlichen, universellen Gesamtalgorithmus für Raumakustik und Lärmimmissionsprognose zu finden, der die beliebige Kopplung von Reflexionen und Beugungen gestattet, aber ohne Explosion der Rechenzeit. Verschiedene Algorithmen zur Rechenzeitverkürzung, hauptsächlich basierend auf verschiedenen Methoden der Raumunterteilung, wurden untersucht, erwie-

sen sich jedoch als nicht hinreichend. Es musste also eine qualitativ neue Lösung gefunden werden. Diese Dissertation konzentriert sich deshalb auf das Analytische und Konzeptionelle, mit Schwerpunkt auf algorithmischen Fragestellungen.

Zunächst wurden **Strahlen-Beugungs-Modelle** vorgestellt. Arbeitshypothesen dabei waren: Grundelement ist die Beugung an Kanten bzw. Keilen aus zwei flankierenden ebenen Flächen, kompliziertere Fälle müssen aus der Lösung hierzu abgeleitet werden. Gefragt war also ein Modul, das, aus der Wellentheorie abgeleitet, in ein Strahlenmodell eingebaut werden kann. Strenge Herleitungen, die auch die Randbedingungen schallharter flankierender Flächen einhalten, sind bekannt für den Fall einfacher Schirme oder für Keile; scheinbar geeignet ist die Uniforme Geometrische Theorie der Beugung (UTD), für den hochfrequenten Grenzfall hergeleitet für elektromagnetische Wellen. Allerdings widerspricht gerade die Einbeziehung der Randbedingungen, d.h. auch von Reflexionen, dem Ziel, ein Modul *nur* für Beugung entwickeln zu wollen, auch benötigt man Modelle, die, statt das genaue Auftreffen, auch den „Vorbeiflug“ von Teilchen nahe Kanten erfassen und bewerten. Deterministische Modelle, basierend auf dem Fermat'schen Prinzip des kleinsten Umwegs, sind also ungeeignet. Zwei neuartige Verfahren wurden entwickelt:

Das ältere **"Stuttgarter" Schallteilchen-Beugungsmodell** geht von der aus der „Unschärferelation“ entlehnten Vorstellung aus, dass eine Ablenkung umso wahrscheinlicher bzw. breiter gestreut sein sollte, je dichter ein Teilchen an einer Kante Spalt vorbeifliegt. Als „Ablenkungswahrscheinlichkeitsdichtefunktionen“ (AWWD) wurde die breitbandig gemittelte Spalt-Beugungsfunktion verwendet. Mit Hilfe der Einführung addierbarer „Kantenbeugungswirkungen“ (KBW) gelang auch die Modularisierung, also die Anwendung auf mehrere nahe Kanten. Numerische Versuche ergaben erstaunlich gute Übereinstimmungen mit den erwarteten Funktionen bei Schirm und Spalt. Unbefriedigend waren aber die fehlende Überprüfung der Abhängigkeit vom Abstand zum Empfangspunkt (Reziprozitätsprinzip) und die spekulative Herleitung.

Im **„Trondheimer“ Beugungsmodell** wurde deshalb eine analytische Ableitung der AWWD aus der Fresnelschen Beugung an einer Kante bzw. über eine Halbebene versucht. Dies gelang auch, und zwar mit Hilfe der Betrachtung der Änderung des Transmissionsgrades bzw. des Energieflusses über die beugende Kante, die sich bei einer vertikalen Verschiebung des Schirms ergibt. Auf diese Weise konnte bei numerischen Experimenten sehr gute Übereinstimmung mit der Abschirmfunktion des Schirmes erzielt werden, nicht jedoch am Spalt. D.h. das Modell ist schwer modulierbar, erweiterbar auf mehrere Kanten.

Generell ergeben sich Probleme bei der Beugungserfassung. Untersucht wurde die Erfassung „naher“ Kanten durch angesetzte, etwa eine Wellenlänge schmale „transparente Wände“, „Fähnchen“. Neben den Problemen mit der Mehrfachbeugung blieb vor allem ungelöst das grundlegende Problem der Rechenzeitexplosion bei rekursiver Anwendung.

Die prinzipiellen Lösungsideen dazu wurden Eigenarten der Radiosity-Methode und der Schallteilchen-Methode entnommen: „Wiedervereinigung von Strahlen“ durch „Quantisierung von Raumrichtungen **und** Raumbereich“, und auf jener Zusammenfassung mit einer gewissen Zeittoleranz gleichzeitig eintreffender Strahlen. Aus der Diskussion um die Verbesserung der SSQM wurde die Idee vom Pyramidenstrahl-Verfahren übernommen. Beides zusammen bedeutet „**Quantisierung des Spiegelquellenraums**“. Das Ergebnis ist „**Quantized Pyramidal Beam Tracing**“ (QPBT), das Verfolgen quantisierter Pyramidenstrahlen. Pyramidenstrahlen, als neue Art Elementarteilchen kurz „*Pyr*“ genannt, werden gebildet aus einem Quellpunkt als Spitze und einem Polygon der Raumbereich. Für die Einführung von *Pyren* sprach: nur räumliche ausgedehnte Strahlen bieten die Chance der Wiedervereinigung je nach raumwinkelmäßiger Überlappung; und die Spiegelquellenmethode bietet den Vorteil, dass auch die Laufstrecken- bzw. -Zeit-Information nicht verloren geht. Reflektierte *Pyre* sind nichts anderes als „Spiegelquellen mit eingebauten Sichtbarkeitsgrenzen“. Deshalb ist *pyr tracing* mit rekursiver Aufspaltung nichts anderes als eine effiziente Art der SSQM. Wegen des Auftretens des Polygon-Polygon-Schnittproblems, dem *clipping* an Raumkanten, ist *pyr tracing* jedoch hochkompliziert. Es zeigte sich, dass dazu eine vorherige Zerlegung der Oberfläche in kleinere Patche und des Gesamtraums in konvexe Teilräume praktisch unverzichtbar ist. Dies führt nicht nur zu einer erheblichen Vereinfachung des *Clippings* und Senkung der Rechenzeit, sondern an den dann ohnehin einzuziehenden transparenten Trennwänden kann auch Beugung effizient erfasst werden. Sowohl für das *Clipping*, Vorkriterien für das Auftreffen auf Wänden, als auch für die Konvexzerlegung wurden Algorithmen genau ausgearbeitet. Demnach werden „transparente Wände“ zwischen den konvexen Teilräumen eingeführt. *Pyre*, deren Spitzen in einen konstanten Raumwinkel- und Radius-Bereich, d.h. eine Zelle des Spiegelschallquellen-Raums fallen, werden auf dessen Mittelpunkt „zurechtgerückt“, ihre Energien werden bei Rückprojektion auf die Oberflächen des Originalraums, je nach Überlappungsgrad ihrer Raumwinkel, addiert und „einsortiert“ in vorweg definierten „quantisierten“ *Pyren*, d.h. solche vorgegebenen Richtungs- und Herkunftsbereichs.

Im Gegensatz zum *ray tracing* müssen jedoch, ähnlich der realen Schallenergie, viele *Pyre* gleichzeitig existieren und verfolgt werden. Das bedeutet: rekursive Aufspaltung, aber quasi-simultane Verfolgung, Iteration statt Rekursion. Das Problem des scheinbar unendlichen Speicherplatzbedarfs löst sich durch Wiederbenutzbarkeit des Speichers, denn der bei Spiegelung maximal übersprungene radiale Bereich des SSQ-Raums beträgt nur eine Raumdiagonale. Für die Probleme der Art der Raumwinkel-Quantisierung und des schnellen Findens überlappender *Pyre*, sowie jeweils „ältester“, als nächstes zu bearbeitender *Pyre*, wurden einfache Lösungen gefunden: Die Raumwinkel „neuer“ *Pyre* werden gebildet durch das „Anpeilen“ der Raumbereichspolygone selbst, sind also nicht konstant; dadurch werden Nachbar-*Pyre* von selbst gefunden. Da die zeit- und raumabhängig definierte Matrix von Energieträgern relativ stark besetzt ist, kann die Ausführungsreihenfolge einfach zeilenweise sein, denn innerhalb der Radius- bzw. Zeitquantisierung ist sie egal. Der Rahmen-Algorithmus ist der eines zeitabhängig-iterativen *radiosity-Verfahrens*. Unteralgorithmien sind der der Aufspaltung durch *Clipping* und der Wiedervereinigung durch Überlappen der Raumwinkel, der Transmission (an transparenten Zwischenwänden) oder Spiegelung, sowie der Streuung oder Beugung, d.h. Aufspaltung in mehrere *Pyre*. So konvergiert die Strahlenanzahl letztlich gegen ein vom Anwender vorgegbares Maximum, und das Ganze gegen eine „Energie-Umverteilung unter endlich vielen Stationen“.

Der **Einbau von Beugung** könnte prinzipiell auf zwei Arten erfolgen: kantenorientiert oder flächenorientiert. Erstere Methode passt zur UTD, würde aber Prismen- statt Pyramidenstrahlen erfordern; hätte außerdem o.g. Nachteile. Passender zu QPBT sind Pyre, die, statt von Zellen des SSQ-Raums, von den Mittelpunkten kleiner, etwa Viertelwellenlängen breiter, „beugender Flächen“ ausgehen, die Randflächen auf den die konvexen Teilräume trennenden transparenten (eventuell auch auf sonstigen) Flächen sind, also an Kanten unmittelbar grenzen. Würde deren KBW von der Nähe zu jenen abhängig gemacht, könnte das „Stuttgarter“ Beugungsmodell relativ leicht mit QPBT kombiniert werden; dies hätte gegenüber dem „Trondheimer“ den Vorteil der Modularisierbarkeit und Einfachheit.

Der **Arbeitsspeicherbedarf** von QPBT ist sehr hoch. Er ist - stark abhängig von Raumstruktur, schwächer von der Wellenlänge - proportional der Anzahl Patche (bei größenordnungsmäßig typischerweise 10^2 Wänden und mittleren Wellenlängen etwa 10^4) mal der Anzahl Raumwinklelemente (10^3) mal der Anzahl Zeit- bzw. Radienbereiche (etwa 10^2) mal wenige byte pro Pyr, und liegt demnach je nach Raumkomplexität, in der Größenordnung von 100MB-100GB. Das liegt heute aber im Bereich des technisch Machbaren. Er kann durch Konvexzerlegung als auch durch dynamische Speicherung der Energieträgerdaten jedoch um den Faktor 10...100 reduziert werden. Die Anzahl Patche und damit der Speicherbedarf ist dabei schwächer von der Wellenlänge abhängig als bei der wellentheoretisch ansetzenden Boundary-Elemente-Methode (BEM), da nicht alle, sondern nur die Randpatche kleiner als eine Viertelwellenlänge zu sein brauchen.

Die **Rechenzeiten** dürften, je nach Feinheit der Quantisierungen – aber unabhängig vom Grad der Streuungen –, deutlich länger als beim *ray-tracing* sein, das bedeutet aber, dass sie mit heutigen PC wohl auch nur wenige Minuten, bei komplexen Räumen maximal bei einige Stunden betragen werden.

7.2. Bewertung

Das Hauptziel der Entwicklung eines qualitativ neuen, universellen Algorithmus', der den Einbau von Beugung ohne Rechenzeitexplosion erlaubt, wurde erreicht. Der Algorithmus von QPBT wurde genau ausgearbeitet (genauer als in der vorgelegten Kurzfassung dieser Dissertation erkennbar). Andere Autoren haben in jüngerer Zeit zwar effiziente Algorithmen zur Simulation diffuser Reflexionen gefunden - zum Teil, durch Kombination mit der *radiosity*-Methode, mit Nutzung eines Wiedervereinigungseffekts - andere wiederum haben das Kantenbeugungsproblem gelöst – sogar exakter als der Autor – jedoch gab es bislang keinen auch nur annähernd erfolgversprechenden Vorschlag zur Lösung beider Probleme für den Fall von Reflexionen und Beugungen beliebig hoher Ordnung, wie sie gerade in geschlossenen Räumen auftreten. Die Entwicklung von QPBT bedeutet also einen Quantensprung vorwärts.

Defizite sind aber:

A wie Algorithmus): QPBT wurde noch nicht implementiert. Er ist recht kompliziert und speicherintensiv. Einige Detailprobleme sind noch ungelöst, aber sicher lösbar, wie unten erläutert. Unsicherheit besteht noch hinsichtlich der tatsächlich erreichbaren Wiedervereinigungseffekte und der daraus folgenden Rechenzeiten.

B wie Beugung): Gravierender, da strenggenommen unlösbar, sind die prinzipiellen Probleme, die vor allem aus der Grundannahme inkohärenter Addierbarkeit bzw. aus dem Strahlenmodell resultieren: diese wurden schon beim Problem des Einbaus von Beugung diskutiert:

- Inwieweit liefern die gefundenen Näherungslösungen für die Winkelfunktionen auch bei Mehrfachbeugung noch „richtige“ Ergebnisse, bei welchen Abständen den neben- oder hintereinanderliegender beugender Kanten ?

Dies ist noch weitgehend ungeprüft. Das „Trondheimer Modell“ versagte bereits am Spalt, beim „Stuttgarter“ ist die Erfüllung des Reziprozitätsprinzips ungeprüft. Die Annahmen beider Modelle sind zwar plausibel, aber theoretisch nicht streng begründet, Randbedingungen werden verletzt. Beide Verfahren sind also nur eingeschränkt anwendbar, besonders das „Trondheimer“. Mit dem höchst plausiblen „Stuttgarter“ Modell könnte man weiter kommen, dies wäre aber noch ausführlich zu prüfen und zu begründen. **Ein überzeugendes Konzept für den tatsächlichen Einbau von Beugung in den neuen Rahmenalgorithmus QPBT wurde also nicht gefunden.** Immerhin lässt der Erfolg geometrischer Methoden in vielen praktischen Fällen von Raum- und Städtebau-Akustik erwarten, dass der Einbau der Beugungsmodelle, wie gewünscht, zumindest als nächst bessere Näherung taugt.

C) Weitere Fehlannahmen liegen schon in der Wahl des hinter QPBT stehenden Spiegelquellenmodells, das strenggenommen schon bei nicht ganz schallharten, nicht lokal-reagierenden Flächen oder bei streifendem Einfall falsch ist. Auch werden die veränderten Reflexionsgrade gekrümmter statt ebener Wellenfronten nicht berücksichtigt. Dies alles wurde freilich schon bei der getroffenen Vorauswahl geometrischer und numerischer Methoden in Kauf genommen, war demnach nicht Thema dieser Dissertation. Angesichts schmaler Pyre sehr geringen Raumwinkels dürften diese Fehler gegenüber den unter B genannten auch vernachlässigbar sein, wie die bisherigen Erfolge solcher Methoden zumindest in den Fällen zeigen, wo aufgrund der Statistik Beugung und Streuung nicht bedeutsam sind.

D) Frequenzabhängigkeit: Grundsätzlich kritisch zu bewerten bleibt der mit dem energetischen Ansatz verbundene Aspekt der Frequenzabhängigkeit. Damit verbunden ist die Frage der nötigen Detailtreue der Raumgeometrie und der erlaubten Größen des Ausbreitungsraumes:

- Wie „klein“ (gegen die Wellenlänge) dürfen die Räume sein ?

Typische Oberflächenabmessungen sollten mehrere Wellenlängen breit sein, welche jedoch (für die 6 Hauptoktavgbänder) eine Spannweite entsprechend dem Faktor $2^5=64$ aufweisen. Andererseits bedarf es zur Beugungserfassung an den Rändern kleinster, noch „auflösender“ Oberflächenelemente im Viertelwellenlängenbereich. Ob sich dieses Problem tatsächlich mit einer einzigen Simulationsmethode bei entsprechend frequenzabhängig extrem unterschiedlichen Streugraden und anderen Parametern lösen lässt, bleibt fraglich.

Eine für lange Wellenlängen geeignete und erprobte, phasenrichtig arbeitende numerische Schallfeldberechnungsmethode ist die Boundary-Elemente-Methode (BEM). Die aber ist schon für mittlere bis hohe Frequenzen von Rechenzeit und Speicherbedarf her ungeeignet und wird es trotz wachsender Rechnerleistungen voraussichtlich auch bleiben – zumindest für sehr große Räume wie z.B. ganze Stadtgebiete, die hier ja ein mindestens ebenso wichtiges Thema wie die klassische Raumakustik sind.

Eine Alternative zur Erfassung auch von Interferenzeffekten wäre phasenrichtig und breitbandig arbeitende Strahlverfolgung. Die aber ist wegen der mit den Verrückungen verbundenen Phasenfehler mit QPBT nicht kombinierbar. Bei großen Wellenlängen bzw. kleinen Räumen stößt QPBT also unvermeidlich an seine Grenzen.

Die eingangs gestellte Frage, ob es eine „Marktlücke“ im Wellenlängenspektrum zwischen dem langen Wellenlängenbereich, wo die BEM taugt, und dem kurzwelligen Bereich, wo auch unquantisiertes *ray tracing* möglich ist, gibt, ist wohl mit Ja zu beantworten.

7.3. Offene Fragen und Probleme

Das Umsetzen der vorgeschlagenen neuen Algorithmen in ein funktionierendes Programm bleibt noch eine große Aufgabe. Insbesondere folgende Probleme sind noch zu lösen:

A) Algorithmische:

- Welches ist der optimale Moment zur Kreation neuer quantisierter Pyre ?
- Wie kann man den Speicherplatz nach Konvexzerlegung noch besser ausnutzen ?

Sowie einige, kleinere Probleme wie z.B.

- angepasste Algorithmen zur weiteren Unterteilung von Flächen, insbesondere der transparenten am Rand, in kleine Polygone – die sind aber aus BEM-Programmen bekannt -;
- Details der drei-dimensional optimierten Raum-Konvexzerlegung.

B) Die Simulation der Beugung betreffende:

Nachentwicklung und Testung von energetischen Strahlen-Beugungsmodellen,

- darunter des empirischen „Stuttgarter“ Schallteilchen- Beugungsmodells, Testung auf Erfüllung des Reziprozitätsprinzips bzw. der Abstandsabhängigkeit zum Empfangspunkt, womöglich nähere theoretische Begründung – oder
- Entwicklung eines energetischen Modells aus dem von Svensson;
- Weitere Optimierung der winkelabhängigen Beugungskoeffizienten in Abhängigkeit vom Kanten- Vorbeiflugabstand und Anpassung an das Modell der Rand-Patche auf transparenten „Wänden“;

- Testung verschiedener typischer Fälle von Mehrfachbeugung, bis zur welchen Abständen sind hier energetische Ansätze noch tauglich, inwieweit können die Randbedingungen flankierender Wände vernachlässigt werden ?

C) Nach Entwicklung vollständiger Programme:

- Tests an mittelkomplexen raumakustischen Anwendungen, z.B. „Orchestergraben“, bis hin zu hochkomplexen, z.B. „Manhattan-artigen“ Raumstrukturen, besonders im Hinblick auf die städtebauakustische Anwendung;
- unterhalb welchen Wellenlängen/Struktur-Verhältnisses wird QPBT ineffektiv?

D) Und für die weitere Zukunft bzw. noch allgemeinere Anwendbarkeit:

- Könnte eine Kombination aus QPBT mit BEM bzw. eine Kombination inkohärent und kohärent arbeitender Methoden entwickelt werden ?

7.4. Ausblick und Anwendungen

Ausreichend leistungsfähige Computer sind heute überall verfügbar. Die Rechenzeiten könnten sicher noch drastisch gesenkt werden. Der Energie-Umverteilungs-Algorithmus von QPBT ist hervorragend geeignet für eine Parallelisierung. Allerdings sind dabei kurze Zugriffszeiten - auch bei quasi-zufälligen Sprüngen - auf einen sehr großen Speicher wichtig. Echtzeitanwendungen werden wohl kaum erzielbar sein, wurden bislang aber auch nicht angestrebt.

Gelingt all dies noch – das Finden geeigneter Näherungen für die Mehrfachbeugung wie der konsistente Einbau in QPBT -, könnte in geschlossener Form die Qualität zahlreicher Anwendungen von Schallausbreitalgorithmen verbessert werden, die bislang an der mangelnden Berücksichtigung der Beugung krankten, bei denen aber neben Reflexionen Beugungen bzw. Abschrümmungen und Streuungen mehrfach oder in Kombination auftreten: von der Lärmimmissionsprognose im „Freien“ – Stadtgebiete und Industrieanlagen, wo bislang mit letztlich teuren Sicherheitsauflagen gearbeitet wird – über Fabrikhallen und Großraumbüros bis hin zur klassischen Raumakustik, wo es um die Verbesserung der Qualität der Simulation und Auralisation von Auditorien geht.

Es bestehen realistische Aussichten, dass dies mit dem neu entwickelten Rechenverfahren von QPBT in naher Zukunft gelingt.

Literatur

A Algorithmen zur Beugung

- A1 Benedetto, G., Spagnolo, R.: A Study of Barriers in Enclosures by a Ray Tracing Computer Model. Appl. Acoustics 17 (1984), 183.
- A2 Gabillet, Y.; Rosen, M.: A Simple Algorithm to Determine Acoustics Path between a Receiver and Complex Noise Sources. Proc. of. INTERNOISE, Avignon (1988), 1631-1634
- A3 Jaroch, A.; Jurkiewicz, J.; Rudno-Rudzinska, B.: A geometrical analysis of reflected-diffracted sound rays in three dimensional space. Proc. of INTERNOISE '90, Gothenburg/ Schweden, (1990), 239-242
- A4 Stephenson, U.; STRASCHIRM - ein Computerprogramm zur Prognose von Straßenlärm - Immissionspegeln mit verbesserter Abschirmwirkung; Zeitschrift für Lärmbekämpfung (36), 5/89, 142-143
- A5 Walerian, E.; Description of Noise Propagation in Built-Up-Area ; Habilitation, Polish Academy of Sciences, Inst.of. Fundamental Technological Research; Warszawa (Polen), 29/ 1995 .
- A6 Walerian,E.; Multiple diffraction at edges and right angle wedges; Acustica 78 (1993), 201-209
- A7 Walerian,E.; Janczur, R.; Acoustical Field in Space with Obstacles.
Part I: Description of the Geometrical field, Acustica 78 (1993), 154-162
- A8 Walerian,E.; Janczur, R.; Acoustical Field in Space with Obstacles.
Part II: Propagation between buildings, Acustica 78 (1993), 210-219

B Beugung

- B1a DIN 18005:Schallschutz im Städtebau,Teil I: Berechnungsverfahren; Beuth; Berlin
- B1b VDI 2720, Blatt 1: Schallschutz durch Abschirmung im Freien. VDI, Düsseldorf
- B2 Keller, J.B.:Geometrical Theory of Diffraction; J.of the Opt.Soc.of Am.,vol.52,no2 (1962), 116-130
- B3 Kirisits,H.; Berechnung und Optimierung schallabschirmender Objekte. Strassenforschung Heft 290, Forschungsgesellschaft für das Straßenwesen im OelAV, Wien 1986
- B4 Kouyoumjian, R.G., Pathak, P.H.: A Uniform Geometrical Theory of Diffraction for an Edge in a Perfectly Conduction Surface. Proc. of the IEEE, vol.62, (1974) 11, 1448-1461
- B5 Kurze, U.J.;Anderson,G.S.; Sound Attenuation by Barriers, Applied Acoustics (4),(1971), 34-53
- B6 Kurze, U.J.: Noise Reduction by barriers. J. Ac. Soc. Am. 55 (1974), 504.
- B7 Lam,Y.W.; Roberts, S.C.; A simple method for accurate prediction of finite barrier insertion loss, Journal of the Acoustical Society of America (JASA); vol 93 /3) (1993), 1445-1452
- B8 Maekawa, Z.; Noise Reduction by Screens, Appl.Ac. 1 (1968)
- B9 Pierce, A.D.: Diffraction of Sound around corners and over wide barriers. Journal of the Acoustical Society of America (JASA); vol 55 (1974).
- B10 Redfearn, S.W.: Some Acoustical Source-Observer Problems. Phil. Mag. 30 (1940).

- B11 Schroth, A.; Stein, V.: Moderne numerische Verfahren zur Lösung von Antennen- und Streuproblemen. München/Wien: Oldenburg (1985).
- B13 Svensson, U.Peter, Fred, R.I.; Vanderkooy, J.: An analytic secondary source model of edge diffraction impuls responses; to be appear in JASA November 1999
- B 14 Tsingos, N.; Funkhouser, T.; Ngan, A.; Carlbom, I.: "Modeling acoustics in virtual environments using the uniform theory of diffraction"; Proc.of ACM Computer Graphics, Siggraph 2001

C Ray- Tracing / Computer-Graphik

- C1 Arvo, J.; Kirk, D.: Fast ray tracing by ray classification. Comp. Graph. 21 (1987), 4, 55-64
- C2 Dadoun, N.; Kirkpatrick, D.G.: The geometry of beam tracing. Proc. of the Symposium on Computational Geometry, June 85, 55-61
- C3 Glassner, A. (ed.) : An Introduction to Ray Tracing; Academic Press Ltd. London, San Diego, 2nd Printing (1990)
- C7 Watt,A: 3D-Computer Graphics, 2nd ed., Addison Wesley; 1993

D Dissertationen Rechenverfahren Raumakustik

- D1 Dalenbäck, B.-I.: A New Model for Room Acoustic Prediction and Auralization; Diss. Chalmers University of Technology, Dep. Applied Acoustics; Göteborg (Schweden) 1995 (darin als Artikel 5: "Room Acoustic Prediction..." s. Kombinierte Verfahren)
- D3 Heinz, R.; Entwicklung und Beurteilung von computergestützten Methoden zur binauralen Raumsimulation; Diss. RWTH Aachen, Fak. Elektrotechnik; 1994; Verlag Shaker, Aachen, 1994
- D5 Lehnert, H.; Binaurale Raumsimulation: Ein ComputermodeLL zur Erzeugung virtueller auditiver Umgebungen; Diss.Ruhr-Universität Bochum, Fak.Elektrotechnik;1992; Shaker, Aachen, 1992
- D6 Mommertz, E.; Untersuchung akustischer Wandeigenschaften und Modellierung der Schallrückwürfe in der binauralen Raumsimulation; Diss. RWTH Aachen, Fak. Elektrotechnik; 1995; Verlag Shaker, Aachen, 1996
- D7 Vorländer, M.; Untersuchungen zur Leistungsfähigkeit des raumakustischen Schallteilchenmodells. Diss. RWTH Aachen, Fak. Elektrotechnik; Verlag Shaker, Aachen, 1989
- D8 Schöberl, Th.; Polarimetrische Modellierung der elektromagnetischen Wellenausbreitung in pikozeLLulären Funknetzen; Diss. RWTH Aachen, Fak. Elektrotechnik; Shaker, Aachen, 1997
- D9 Frach, Th.; Adaptives hierarchisches Ray Tracing Verfahren zur parallelen Berechnung der Wellenausbreitung in Funknetzen; Diss. RWTH Aachen, Fak. Elektrotechnik; Aachen, 2003

F Finite- und Boundary-Elemente- Methoden

- F1 Schwarz, H.R.: Methode der Finiten Elemente. Eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Rechenpraxis. 2. Aufl., Teubner, Stuttgart 1984.

- F2 Becker, P. und Waller, H.: Vergleich der Methoden der Finiten Elemente und der Boudary-Elemente bei der Berechnung von Schallfeldern. *Acustica* 60 (1986), 21-33.

G Diffusitätsgrad bzw. Streugrad Wände

- G0 Embrechts, J.J.: Broad spectrum diffusion model for room acoustics ray tracing algorithms; Vortrag auf Symposion der EAA, PTB Braunschweig, November 1999
Jetzt in: *Journal Acoust. Soc. America*, 107(4), April 2000, 2068-2081
- G1 Cox, T.J.: Predicting the scattering from reflectors and diffusers using two-dimensional boundary element methods; *J.Acoust.Soc.Am.* 96 (2), 1994
- G2 Mommertz, E.; Vorländer, M; Measurement of scattering coefficients of surfaces in the reverberation chamber and in the free field; In: *Proc. International Congress on Acoustics (ICA)*; Trondheim (Norwegen), 1995, 577-580
- G3 Vorländer, M; Ein Verfahren zur Messung der Schallstreuung an rauen Wänden.
In: *Fortschritte der Akustik, DAGA 1988*, DPG-Verlag, Bad Honnef, 1988, 761-764
- G4 Vorländer, M., Schauffelberger, T., Messung des Diffusitätsgrades rauer Flächen;
In: *Fortschritte der Akustik, DAGA 1990*, DPG-Verlag, Bad Honnef, 1990, 827-830
- G5 Kuttruff, H.; Some remarks on the simulation of sound reflection from curved walls; *ACUSTICA* 77, (1993), 176

H Hauptquellen Stephenson

- H0 Stephenson, U. und Nasshan, K.:
Berechnung der Schallausbreitung von Kraftwerksanlagen mit Hilfe der Schallteilchenmethode;
Bericht aus dem Fraunhofer-Institut für Bauphysik, Stuttgart; B-BA5/1991 und
Anhang: Schallteilchensimulation - Methoden zur Rechenzeitverkürzung und zur Beugung
- H1 Stephenson, U.; Eine Schallteilchen-Computer-Simulation zur Berechnung der für die Hörsamkeit in Konzertsälen maßgebenden Parameter. *ACUSTICA* 59(1985), 1-20.
- H2 Stephenson, U., Mechel, F.P.: Wie werden Schallteilchen gebeugt ? In: *Fortschritte der Akustik, DAGA 1986*, Oldenburg, DPG-Verlag, Bad Honnef, 1986, 605-608.
- H3 Stephenson, U.M.: Comparison of the Mirror Image Source Method and the Sound Particle Simulation Method. *Applied Acoustics* 29 (1990), 1, 35-72.
- H4 Stephenson, U.M.: Ein neuer Ansatz zur Schallteilchen-Beugung; In: *Fortschritte der Akustik, DAGA 1993*, Frankfurt, DPG-GmbH, Bad Honnef, 1993, 235-238
- H5 Stephenson, U.; Quantized Pyramidal Beam Tracing - a new algorithm for room acoustics and noise immission prognosis; *ACUSTICA united with acta acustica*, vol. 82 (1996), 517-525
- H6 Stephenson, U.M: Simulation von Streuung und Beugung ohne Rechenzeitexplosion ? Lösung durch Kombination der Schallteilchen- mit der Radiosity-Methode; in: *Fortschritte der Akustik, DAGA 2001*, Hrsg. DPG-GmbH, Bad Honnef, 2001
- H7 Stephenson, U.M: Analytical Derivation of the Reduction of Computation Time by the Voxel Crossing Technique; in: *proceedings of: CFA/ DAGA 2004*, Strassbourg

K Kombinierte numerische Verfahren oder Pyramidenstrahlen

- K3 Ederer, H.J.: Computermodellierung von Raumbeschallungsanlagen - Erfahrungen mit einem neuen Programmsystem an der TU Dresden; DAGA 1991, DPG-Verlag, Bad Honnef, 1991, 621-624
- K4 Farina, A.; RAMSETE - a New Pyramid Tracer for Medium and Large Scale Acoustic Problems; in: Proc. of. Euronoise '95, (Lyon) ; publ. by CETIM, Senlis (France), 1995, 55-60
- K5 Funkhouser, T.; Carbon, I.; Elko, G.; Pingali, G.; Sondhi, M.; West, J.: A Beam Tracing Approach to Acoustic Modeling for Interactive Virtual Environments; in: Proc. of Computer Graphics, SIGGRAPH '98 Annual Conference Series, 1998, 21-32
- K6 Heinz, R.: Binaurale Raumsimulation mit Hilfe eines kombinierten Verfahrens- Getrennte Simulation der geometrischen und diffusen Schallanteile; ACUSTICA 79 (1993), 207-220
- K8 Lewers, T.: A combined Beam Tracing and Radiant Exchange Computer Model of Room Acoustics; Appl. Acoustics 38 (1993), 2-4, 161- 178
- K10 Naylor, G.: Treatment of Early and Late Reflections in a Hybrid Computer Model for Room Acoustics. In Proc. of 124th ASA, New Orleans, 1992, paper 3aAA2
- K11 Vorländer, M.: Simulation of the transient and steady-state sound propagation in rooms using a new combined ray-tracing image source algorithm. J. Ac. Soc. Am. 86 (1989), 1, 172-190
- K12 Walsh, P.; The Design of Godot: A system for Computer-Aided Room Acoustical Modeling and Simulation; proc. of: 10. International Congress on Acoustics (ICA), Sydney, 1980; E-15.3

M Absorptionsmodelle

- MM Mechel, F.P.; Schallabsorber Bd. 1, S. Hirzel Verlag Stuttgart 1989
- MR Rindel, J.H.; Modelling the angle-dependent pressure reflection factor. Applied Acoustics 38 (1993), 223-234
- Mk Romanenko, G; Vorländer, M.; "Employment of surface wave reflection coefficients in room acoustics; In: proc. of: Research Symposium "Acoustic characteristics of surfaces"; Institute of Acoustics; Salford (UK), 2003
- M1 Becker, J; Mommertz, E.; Die Modellierung von Wandreflexionen in der raumakustischen Simulation; DAGA 1993, DPG-Verlag, Bad Honnef, 1993, 211-214
- M2 Meyer, E; Kuttruff, H., Schulte, F.; Versuche zur Schallausbreitung über Publikum. ACUSTICA 15 (1965), 175
- M3 Mommertz, E.; Einige Messungen zur streifenden Schallausbreitung über Publikum und Gestühl. ACUSTICA 79 (1993), 42-52

O Rechenzeitverkürzung Ray-Tracing Verfahren Akustik (s.a. *Computer Grafik*)

- O1 Forsberg, P.-A.: Fully Discrete Ray Tracing. Appl. Acoustics 18 (1985), 393-397
- O2 Lehnert, H.; Duerrer, B.: Untersuchungen zur Optimierung des Rechenzeitverhaltens des Strahlverfolgungsverfahrens; In: Fortschritte der Akustik, DAGA 1993, Frankfurt, DPG-GmbH, Bad Honnef, 1993, 227-230
- O3 Stephenson, U.: Room Acoustical Design of Concert Halls: Some Recent Improvements on the Sound Particle Simulation Technique; 29th Conference on Acoustics, Czechoslovak Acoustical Society (1990), Strebske Pleso, High Tatra, 259-264
- O4 Stephenson, U.M.: Raumakustik-Optimierung: Rechenzeitverkürzung bei der Schallteilchensimulation; In: 17. Tonmeistertagung, Karlsruhe, 1992, Bericht; Saur-Verlag, München 1993

P Polygonprobleme

- P1 Dobkin, D.P., Kirkpatrick, D.G.: Fast detection of polyhedral intersection. Theoretical Computer Science 17, 1983, 241-253
- P2 Zhou, X.: „Voruntersuchungen zu einem Pyramidenstrahlverfolgungsalgorithmus“; Bericht aus dem Fraunhofer-Institut für Bauphysik, Stuttgart, 1995
- P3 Kulowski, A.: Optimization of a Point-in-Polygon Algorithm for Computer Models of Sound Fields in Rooms; Applied Acoustics 35 (1992), 63-74

Q Spiegelschallquellenverfahren (SSQ)

- Q1 Borish, J.: Extension of the image model to arbitrary polyhedra. J.Ac.Soc.Am. 75 (1984), p.1827-1836
- Q2 Lee, H. & B.-H.: An Efficient Algorithm for the Image Model Technique. Applied Acoustics 24; (1988), 87-115
- Q3 Kirszenstein, J.: An Image Source Computer Model for Room Acoustics Analysis and Electro-acoustic Simulation. Appl. Acoustics 17 (1984), 275-290.
- Q4 Kristiansen, U.R.; Krokstad, A.; Follestad, T.: Extending the Image Method to Higher-Order Reflections; Appl. Acoustics 38 (1993), 195-202

R Strahlungsaustausch- (Radiosity-) - Verfahren

- R1 Gerlach, R.; Mellert, V.: Der Nachhallvorgang als Markoffsche Kette - Theorie und erste experimentelle Überprüfung. ACUSTICA 32 (1975), 211-227
- R2 Kludszweit, A.: Time Iterative Boundary Element Method (TIBEM) - ein neues numerisches Verfahren der 4-dimensionalen Systemanalyse von Wellenvorgängen zur Berechnung der Raumimpulsantwort. ACUSTICA 75 (1991), 17-27
- R3 Kuttruff, H.: Room Acoustics, 3. ed., Elsevier Science Publishers Ltd., Barking, England, 3rd ed. (1991).
- R4 Kuttruff, K.H.: Sound Decay in Enclosures with Non-diffuse Sound Field, Proc. W.C.Sabine Centennial Symposium, Cambridge, Mass. (USA), [1994], pAAa3

- R6 Kuttruff, H.; A Simple Iteration Scheme for the Computation of Decay Constants in Enclosures with Diffusely Reflecting Boundaries; J. Acoust.Soc. Am. 98 (1), 1995, 288-293
- R7 Kuttruff, H.; Energetic Sound Propagation in Rooms; Acustica / acta acustica vol 83 (1997), 622-628
- R8 Mathiak, F.U.; Berechnung von Konfigurationsfaktoren polygonal berandeter ebener Gebiete; in: Wärme- und Stoffübertragung 19, Springer-Verlag 1985, 273-278
- R9 Miles, R.N.; Sound Field in a Rectangular Enclosure with Diffusely Reflecting Boundaries; J. Sound. Vib. 92, (1984), 203-213
- R10 Korany, N.; Blauert, J.; Abdel Alim, O.; Acoustic Simulation of Rooms with Boundaries of Partially Specular Reflectivity; Appl. Acoust. 62, 875-887 (2001).

S Strahl- oder Teilchen- Verfolgungs - Verfahren

- S1 Krokstad, A., Strom, S., Sorsdahl, S.: Calculating the acoustical room response by the use of the ray tracing technique. J. Sound Vib. 8 (1968), 118
- S2 Stephenson, U.M.; Vom Konzertsaal bis zur Fabrikhalle - das raumakustische Simulationsprogramm SOPRAN; TAB-Technik am Bau 25 (1994), 2, 25-27
- S3 Vian, J.P.; v. Maercke, D.: Calculation of the room impulse response using a ray tracing method. Proc. 12th ICA (Vancouver Symposium) 1986, 74-78
- S4 Vorländer, M.: Ein Strahlverfolgungsverfahren zur Berechnung von Schallfeldern in Räumen. ACUSTICA 65 (1988), 138-148
- S6 Mommertz, E.; Müller, K.; Simulation der Schallübertragung in Räumen mit gekrümmten Wandflächen; in: Fortschritte der Akustik - DAGA 1995, DPG-GmbH, Bad Honnef 1995

U Mathematik, Algorithmen und Datenstrukturen

- U1 Abramowitz, Seagun: Handbook of Mathematical Functions
- U2 Wirth, N.: Algorithmen und Datenstrukturen; Teuber, Stuttgart, 1975.

V Vergleiche SSQ/ STS- Methode / Rechenzeitanalysen / Genauigkeiten

- V1 Dalenbäck, B.I.; Kleiner, M., Svensson, P.; Audibility of Changes in Geometric Shape, Source Directivity and Absorptive Treatment- Experiments in Auralization, J. Audio Engineering Soc. 41(11) (1993), 905-913
- V2 Lehnert, H.; Systematic Errors of the Ray Tracing Algorithm; Applied Acoustics, vol. 38 (1993), 2-4, 207-211
- V4 Vorländer, M.; Die Genauigkeit von Berechnungen mit dem raumakustischen Schallteilchenmodell und ihre Abhängigkeit von der Rechenzeit; Acustica 65 (1988),
- V5 Vorländer, M.; International Round Robin on Room Acoustical Computer Simulations; In: Proc. International Congress on Acoustics (ICA); Trondheim (Norwegen), 1995, 689-692

X Extra-Quellen Stephenson

- X3 Stephenson, U.: The Sound Particle Simulation Technique - An Efficient Prediction Method for Room Acoustical Parameters of Concert Halls. Reprint of the Audio Engineering Society, New York (1989), 86th AES Convention, Hamburg (1989).
- X12 Stephenson, U.M.: Auralisation in Real Time ? Some New Approaches in Room Acoustical Simulation and Auralisation; In: Virtual Reality World '95; Conference documentation; Hrsg. Computerwoche Verlag GmbH, München, 1995, 379 -392.
- X15 Stephenson,U.;" Against an Uncritical Use of the Sabine-Formula - towards a Deeper Understanding of Reverberation " in: proc. of „International Seminar on Technical Aspects in Architectural Education", Gdansk, Poland, Sept.17-19, 1997

Z Raumakustische Zielgrößen

- Z1 Barron,M.; The effects of early reflections on subjective acoustical quality of concert halls; Diss. University of Southampton, 1974
- Z3 Beranek,L.L.; Concert Hall Acoustics -1992. J. Acoust. Soc. Am. 92 (1992), 1, 1-39
- Z4 Dietsch, L.; Kraak, W.; Ein objektives Kriterium zur Erfassung von Echostörungen bei Musik- und Sprachdarbietungen; Acustica 60 (1986), 205-216
- Z5 Fasold, W., Stephenson, U.; Gute Akustik von Auditorien. Planung mittels Rechnersimulation und Modellmeßtechnik. Bauphysik 15 (1993), 2, 40-49.
- Z6 Gottlob, D.: Vergleich objektiver akustischer Parameter mit Ergebnissen subjektiver Untersuchungen an Konzertsälen. Diss. University of Göttingen, 1973
- Z7 Jordan,V.L.; A group of objective acoustical criteria for concert halls; Appl. Acoustics 14, 1981, 253
- Z8 Lehmann,P.; Über die Ermittlung raumakustischer Kriterien und deren Zusammenhang mit subjektiven Beurteilungen. Diss. TU Berlin (1976)
- Z9 Mommertz, E.; Aprath, S.; Zur Quantisierung der Schalleinfallrichtungen in der binauralen Simulation; DAGA 1993, Hrsg. DPG-GmbH, Bad Honnef, 1993, 219-222

Danksagung

Die Vorarbeiten zu dieser Dissertation reichen (ohne Zählung der Diplomarbeit 1981/82 am Institut für Technische Akustik der RWTH Aachen, ITA, über Schallteilchensimulation) zurück bis etwa in das Jahr 1986, wo es bereits um den Einbau der Beugung ging. Sie wurden anfangs mitfinanziert durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG), standen 1989-91 im Zusammenhang mit dem "Kühlturm- Projekt", finanziert durch die Vereinigung der Grosskraftwerksbetreiber (VGB). Die umfangreichen Arbeiten zu dem grundlegenden Bericht dazu, der viele frühere Arbeiten zusammenfasste, wurden im Zusammenhang mit mehreren Projekten von meinem langjährigen Arbeitgeber, dem Fraunhofer-Institut für Bauphysik in Stuttgart (IBP), mitfinanziert.

Die entscheidende Zeit der Dissertation an der Norwegischen Technisch-Naturwissenschaftlichen Universität (NTNU) in Trondheim 1991/1992 wurde durch ein Stipendium der Deminex-Gesellschaft, vergeben durch den Norwegischen Technisch-Naturwissenschaftlichen Forschungsrat ermöglicht. All jenen Institutionen sei an dieser Stelle gedankt.

Von den Personen, die diese Arbeit gefördert haben, danke ich an erster Stelle, als Mit-Urheber dieser Dissertation, Herrn Prof. Dr. rer.nat. Dr. h.c. Heinrich Kuttruff (ehemaliger Leiter des ITA), der mein wissenschaftliches Leben seit der Diplomarbeit 1981 bis heute begleitete, sich stets für das Thema und den Fortgang der Dissertation interessierte und mich trotz widriger beruflicher oder privater Umstände immer wieder ermutigte.

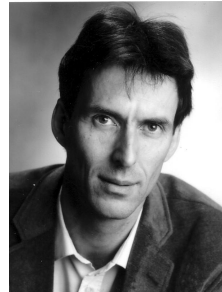
Für viele nützliche Diskussionen und Hinweise sei gedankt Prof. Dr. Asbjörn Krokstad, der mich nach Trondheim lud, Prof. Dr. Ulf Kristiansen, dem Betreuer an der NTNU Trondheim, den Kollegen Dipl.phys. Klaus Nasshan (IBP Stuttgart), Dr. Hans-Jörg Ederer, Akustik-Bureau, Dresden, sowie meinem Freund Prof. Dr. dipl. inform. Georg Hartung, Aachen.

Mein großer Dank gilt Herrn Prof. Dr. rer. nat. Michael Vorländer, Leiter des ITA, der die Betreuung der Arbeit nach Abgabe der Urfassung im März 2003 übernahm, für die Übernahme des Hauptreferats, für seine große Geduld und viele nützliche Hinweise zur Optimierung der Darstellung der Arbeit. Herrn Prof. Dr. Ing. Bernhard Rembold (Leiter des Instituts für Hochfrequenztechnik der RWTH Aachen) danke ich für die Übernahme des Ko-referats.

Gedankt sei auch meiner früheren Frau Maria Uhle-Stephenson sowie meiner heutigen Frau Sigrid für die Geduld, mit der sie, neben meinem Beruf, während all der Jahre die vielen ungezählten Stunden Abwesenheit von der Familie für die Doktorarbeit ertragen haben.

Tabellarischer Lebenslauf und Bildungsweg

Uwe Martin Stephenson, 1955-1960 1960-1963 1963-1975 1966-1974 1974 März 1975 – Juli 1976	geboren 24.8.1955 in Koblenz bei Bonn-Bad Godesberg in Mainz, Grundschule ab 1962 in Traisa bei Darmstadt, Grundschule bis 1966 Ludwig-Georgs-Gymnasium Darmstadt Abitur im naturwiss. Zweig Zivildienst an der Theodor-Heuss-Akademie in Gummersbach
---	---



Studium

Oktober 1976 - Juli 1978 1978 Oktober 1978 - Juli 1983 August '81-Oktober 82 '	Physikstudium an der Universität München, Vordiplom Physikstudium an der RWTH Aachen Wahlfächer: Technische Akustik und Festkörperphysik Diplomarbeit am Institut für Technische Akustik über die Bestimmung raumakustischer Paramameter von Konzertsälen (Entwicklung eines Computerprogrammes und Messung in Aachener Sälen)
August 1983	Diplom in Physik an der RWTH Aachen

Beruf

Januar 1984 –Juli 1991+ August 1992 –Dez.1995	wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fraunhofer-Institut für Bauphysik Stuttgart, Abteilungen Bauakustik und Raumakustik Entwicklung von Schallteilchensimulationsprogrammen für Straßenlärm, Fabrikhallen, Kraftwerksanlagen, VR Untersuchung von Methoden zur Rechenzeitverkürzung
seit März 1996	Professor für Mathematik, Bauphysik, Raumakustik an der Hochschule für angewandte Wissenschaften, Hamburg
seit 1999	Fachbereiche Bauingenieurwesen und Architektur, Lehrauftrag für Raumakustik an der Hochschule für Bildende Künste, Hamburg

Dissertation

1985 August 1991- Juli 1992	erster Ansatz zur Schallteilchenbeugung Forschung am Institut für Teleteknikk/Akustikk der NTNU Trondheim - Kern- Arbeit an der Dissertation über den Einbau der Beugung in raumakustische Strahlverfolgungsprogramme, Erfindung der Methode der quantisierten Pyramidenstrahlen
Juli 1999 - März 2003 21.3. 2003	(in den Sommern) Niederschrift der Dissertation Fertigstellung der Vollversion
September '03-Januar '04 Juni bis Juli 2004	Erstellung der Kurzfassung Erstellung der Druckfassung