

Veröffentlichung des Geodätischen Instituts der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

Nr. 63

Differentialgeometrische Extraktion von 3D-Objektprimitiven aus terrestrischen Laserscannerdaten

von

Ralf Becker

2005

ISSN 0515-0574

DIFFERENTIALGEOMETRISCHE EXTRAKTION VON 3D-OBJEKTPRIMITIVEN AUS TERRESTRISCHEN LASERSCANNERDATEN

Von der Fakultät für Bauingenieurwesen
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Ingenieurwissenschaften
genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Ralf Becker

aus

Köln

Berichter: Universitätsprofessor Dr.-Ing. Wilhelm Benning
 Universitätsprofessor Dr.-Ing. habil. Michael Scherer

Tag der mündlichen Prüfung: 05. April 2005

Veröffentlichung des Geodätischen Instituts der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
Templergraben 55, 52062 Aachen

Nr. 63

2005
ISSN 0515-0574

Zusammenfassung

Zur Bestandsdokumentation und Planung von baulichen Anlagen ist die Kenntnis der bestehenden Objektgeometrie von großer Bedeutung. Die Objektgeometrien werden in den digitalen Planungs- bzw. Dokumentationssystemen in den dort gebräuchlichen Modellen benötigt. Die Modelle in den Geoinformationssystemen basieren auf einer begrenzten Anzahl von geometrischen Primitiven. Durch sie werden Kanten, Oberflächen bzw. Volumenelemente des Realweltobjekts repräsentiert. Zur Massendatenerfassung bietet sich heute die terrestrische Laserscannervermessung an. Messbar sind die sichtbaren Teile, die Oberflächen der Realweltobjekte. Flächen lassen sich mathematisch lokal mit Hilfe der Differentialgeometrie beschreiben. In dieser Arbeit wird ein Ansatz zur automatisierten Extraktion von geometrischen Primitiven aus terrestrischen Scannerdaten, basierend auf den Methoden der diskreten Differentialgeometrie vorgestellt. Zur Parameterbestimmung werden die Methoden der Ausgleichsrechnung benutzt. Möglichkeiten zur Kombination mit der photogrammetrischen Auswertung und zur Weiterverarbeitung der extrahierten Primitive unter Nutzung von CAD-Funktionalitäten werden vorgestellt. Die Praxistauglichkeit wird anhand eines umfangreichen Projekts gezeigt.

For as-build-documentation and planning of structural facilities the knowledge of the existing object geometry is of great importance. Object geometry is needed in models used in digital planning and/or documentation systems. Such models base on a limited number of geometrical primitives. They represent edges, surfaces and/or volume elements of the real world objects. For mass data collection today terrestrial laserscanners are predestinated. The visible parts, the surfaces of the real world objects are measurable. Surfaces can be described mathematically locally by the help of differential geometry. In this work a concept for the automatical extraction of geometric primitives from terrestrial scanner data, based on the methods of the discrete differential geometry, is introduced. For the determination of parameters of geometric primitives the adjustment method is used. Possibilities for the combination with the photogrammetric evaluation and for the subsequent treatment of the extracted primitives by use of CAD-functionalities are presented. The practice fitness and prototyping success is shown on the basis of an extensive project.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Grundlagen	3
2.1	Koordinaten und Koordinatensysteme.....	3
2.1.1	Kartesische Koordinaten	3
2.1.2	Polarkoordinaten	4
2.1.3	Zylindrische Koordinaten.....	5
2.1.4	Transformation zwischen Koordinatensystemen	6
2.2	Differentialgeometrie.....	7
2.2.1	Differentialgeometrie der Kurve	7
2.2.1.1	Tangentenvektor und Normalebene.....	7
2.2.1.2	Krümmung einer Kurve	8
2.2.1.3	Torsion einer Kurve.....	9
2.2.1.4	Frenet'sche Ableitungsformeln.....	10
2.2.2	Differentialgeometrie der Fläche	10
2.2.2.1	Tangentenvektoren und Tangentialebene	11
2.2.2.2	Regularität.....	12
2.2.2.3	1. Fundamentalform.....	12
2.2.2.4	Normalenvektor	13
2.2.2.5	2. Fundamentalform.....	13
2.2.2.6	Krümmung.....	14
3	Objekterfassung und -modellierung	19
3.1	Objekterfassung	19
3.1.1	Handaufmaß	19
3.1.2	Polaraufnahme mit dem Tachymeter	19
3.1.3	Photogrammetrische Aufnahme	20
3.1.4	Terrestrisches Laserscanning	21
3.1.5	Gegenüberstellung	22
3.2	Objektmodellierung	24
3.2.1	Volumenmodell.....	24
3.2.1.1	Generierung	25
3.2.1.2	Datenstruktur	25
3.2.1.2.1	Vollkörpermodell	25
3.2.1.2.2	Randflächenmodell.....	26
3.2.1.2.3	Zellmodell	27
3.2.2	Flächenmodell.....	27
3.2.3	Kantenmodell	28
4	Parametrisierung und Parameterschätzung	29
4.1	Parametrisierung von Primitiven im Raum.....	29
4.1.1	Zylinderflächen	30
4.1.2	Ebenen.....	32
4.1.3	Geraden	33
4.1.4	Ellipsen.....	34
4.2	Parameterschätzung und Ausreißerelimination	35
4.2.1	Ausgleichung im Gauß-Markoff-Modell	35
4.2.2	Ausgleichung von Flächen 2. Ordnung.....	37
4.2.2.1	Ebene	39
4.2.2.2	Zylinderfläche.....	40
4.2.3	Ausreißerelimination.....	40

5	Extraktion von Flächenprimitiven	29
5.1	Gewählte Methodik.....	43
5.1.1	Vorbereitung.....	44
5.1.2	Partitionierung	44
5.1.3	Differentialgeometrie an der Objektoberfläche	45
5.1.4	Homogenität der Objektoberfläche	46
5.1.5	Überblick zur Vorgehensweise.....	46
5.2	Eigenschaften von speziellen Flächenprimitiven.....	47
5.2.1	Senkrechte Kreiskegelfläche	47
5.2.2	Senkrechte Kreiszylinderfläche	49
5.2.3	Ebene	50
5.3	Lokale Approximation der Objektoberfläche	52
5.3.1	Triangulationen	52
5.3.1.1	Ebene Delaunay-Triangulation	52
5.3.1.1.1	Ebene Triangulation in einer Parallelprojektion.....	54
5.3.1.1.2	Ebene Triangulation in einer zylindrischen Abbildung.....	54
5.3.1.2	3D-Dreiecksvermaschung von Oberflächen	56
5.3.1.3	Räumliche Delaunay-Triangulation	56
5.3.1.4	Berechnung der Flächennormalenvektoren.....	57
5.3.1.5	Genauigkeitsbetrachtung.....	58
5.3.2	Ausgleichungsrechnung	59
5.3.2.1	Punktauswahl	59
5.3.2.2	Berechnung der Flächennormalenvektoren.....	60
5.3.2.3	Ausreißerelimination.....	62
5.4	Partitionierung.....	64
5.4.1	Topologie	64
5.4.2	Differentialgeometrie	65
5.4.2.1	Abstand benachbarter Punkte.....	65
5.4.2.2	Abstand zur lokalen Ebene	65
5.4.2.3	Normalenvektoren.....	66
5.4.2.4	Parameterräume	67
5.4.2.5	Krümmung	68
5.4.3	Ausgleichungsrechnung und Ausreißerelimination.....	71
5.4.4	Angewandte Vorgehensweise	72
5.5	Klassifikation	73
5.6	Parametrisierung	75
5.6.1	Näherungslösung	76
5.6.2	Parameterschätzung.....	76
5.6.3	Ausreißerelimination	76
5.7	Formalisierung des Funktionalen	47
5.7.1	Hinzuziehung zusätzlicher, randnaher Punkte.....	77
5.7.2	Geometrie des Randes	78
5.7.3	Abbildung in eine Ebene (Abwicklung).....	79
5.7.4	Alpha-Shape	80
5.7.5	Generalisierung	80
5.7.5.1	Generalisierungsmittel	81
5.7.5.2	Vereinfachung.....	81
5.7.5.3	Glättung.....	84
5.7.5.4	Zusammenfassung.....	85
5.7.5.5	Ausgleichung und Schnitt	86
6	Extraktion von Kanten, Ecken und Profilen	89
6.1	Kanten und Ecken	89
6.1.1	Manuelle Auswertung	89
6.1.2	Einzelpunktmessung.....	91

6.1.3	Schnitt angrenzender Flächen	91
6.2	Profile	93
6.2.1	Manuell-visuelle Profilextraktion	93
6.2.2	Profil als Schnitt mit einer Triangulation.....	94
6.2.3	Profilbestimmung aus extrahierten Oberflächen.....	94
7	Implementation und Anwendungsbeispiele	95
7.1	Implementation im Auswertesystem PHIDIAS	95
7.2	Kombinierte Auswertemöglichkeiten	96
7.3	Anwendungsbeispiel	97
8	Zusammenfassung und Ausblick	101

Abbildungsverzeichnis

2.1:	Kartesische Koordinaten	3
2.2:	Sphärische Polarkoordinaten	4
2.3:	Zylindrische Koordinaten	5
2.4:	Differentialgeometrie der Fläche	11
2.5:	Flächenkrümmung	14
3.1:	Punktwolke, Darstellung von oben	21
3.2:	Punktwolke, Darstellung von der Seite	21
3.3:	Genauigkeit der Aufnahmeverfahren in Längsrichtung und Auflösung in Querrichtung. Aus: [BECKER, BENNING & EFFKEMANN 2004]	22
3.4:	Riegl-Scanner LMS-Z420i mit aufgesetzter Kamera Nikon D100	23
3.5:	kölnerstadtmodell, Copyright: 2001 by Initiative Kölner Stadtmodell	24
3.6:	Anwendung mengentheoretischer Operationen. Aus: [BRÖKER, NÜBEL, BERNREUTHER & FIRMENICH 2002]	25
3.7:	Vollkörpermodell eines Hauses	26
3.8:	Datenstruktur eines CSG-Modellierers. Aus: [BRÖKER, NÜBEL, BERNREUTHER & FIRMENICH 2002].	26
3.9:	Randflächenmodell eines Hauses. Aus: [BILL & FRITSCH 1999].	27
3.10:	Beispiel für einen „Nicht-Körper“ im Flächenmodell	27
3.11:	Beispiel für einen nicht möglichen Körper im Kantenmodell. Aus: [BRÖKER, NÜBEL, BERNREUTHER & FIRMENICH 2002]	28
4.1:	Conic Section. Aus: http://mathworld.wolfram.com/ConicSection.html	30
4.2:	Parametrisierung 1 der Zylinderfläche	31
4.3:	Parametrisierung 2 der Zylinderfläche	31
5.1:	Ablaufdiagramm	46
5.2:	Senkrechte Kreiskegelfläche, Gauß'sche Flächenkoordinaten	47
5.3:	Senkrechte Kreiszylinderfläche, Gauß'sche Flächenkoordinaten	49
5.4:	Ebene Triangulation. Aus: [HETTWER 2003]	52
5.5:	Delaunay-Triangulation aus vier Punkten	53
5.6:	Umkreiskriterium	54
5.7:	Verzerrung des Triangulationsdreiecks vom Einheitszylinder zur Realwelt	55
5.8:	Räumliche Delaunay-Triangulation. Aus: http://www.cgal.org/Manual	57
5.9:	Genauigkeitsbetrachtung	59
5.10:	Ermittlung eines Flächennormalenvektors (weiß) in einer lokalen Umgebung von in der Ausgleichung verbliebenen (rot) und ausgeschlossenen (grün) Scannerpunkten	60
5.11:	Ermittlung der lokalen Flächennormalenvektoren	61
5.12:	Nicht zu modellierende Oberflächenstrukturen am Beispiel eines Steins	61
5.13:	Ermittlung eines Flächennormalenvektors (weiß) unter Ausschluss der Ausreißer (grün) in einer lokalen Umgebung	63
5.14:	Normalenvektor in der Nähe einer Kante: Die Punkte in roter Färbung wurden als Ausreißer klassifiziert und für die Normalenvektorbestimmung nicht verwandt.	63
5.15:	Simple house, segmented. Aus: [GORTE 2002].	66
5.16:	Normalkrümmungen κ_n aufgetragen gegen die Richtungen α (blau), Ausgleichende Funktion der Normalkrümmungen an den Stellen α in rot	69
5.17:	Krümmungsbilder	70
5.18:	Aggregierte Scannerpunkte	71
5.19:	Objektstruktur am Beispiel eines Trapezbleches	75
5.20:	Ausschnitte von Zylinderflächen an Gebäuden	77
5.21:	Randermittlung an der Gebäudekante ohne (rot) und mit (blau) zusätzlichen Punkten	78
5.22:	Formalisierung einer Punktmenge	80
5.23:	Randermittlung bei Geraden	86
5.24:	Formalisierung mit und ohne zusätzlicher randnaher Punkte	87

Abbildungsverzeichnis

6.1:	Bild	89
6.2:	Modell.....	89
6.3:	Abrundung einer Kante.....	89
6.4:	Punktwolke im Bereich einer Kante	90
6.5:	Punktwolke an einer Kante in einer ausgewählten Höhe.....	90
6.6:	Kante, definiert durch zwei Scannerpunkte.....	90
6.7:	Einzelpunktbestimmung mit gescannter Punktumgebung.....	91
6.8:	Kamerazentrische, zentralperspektivische Punktauswahl	92
6.9:	Kante eines Steins, definiert durch Schnitt angrenzender Ebenen	92
6.10:	Kante einer Wand, definiert durch Schnitt angrenzender Ebenen.....	93
6.11:	Extrahiertes Profil.....	94
7.1:	Visualisierung von Laserscanner- und photogrammetrischen Daten in Superimposition.....	95
7.2:	Lokale Koordinatensysteme	96
7.3:	Axiale Verlängerung eines automatisch extrahierten Zylinders durch Monobildmessung.....	97
7.4:	Vergleich der Detailauflösung von Foto und Punktwolke in 10 m Entfernung.....	98
7.5:	Überlagerung von Bild und Zeichnungselementen	99
7.6:	Darstellung einer auf der Grundlage der Farbdaten aus der photogrammetrischen Aufnahme eingefärbten 3D-Punktwolke mit Überlagerung von CAD-Zeichnungselementen. Aus: [BECKER, BENNING & EFFKEMANN 2004].	99

1 Einführung

Für die Planung von An- und/oder Einbauten an bzw. in bestehenden Gebäuden oder Industrieanlagen, für die Dokumentation baulicher Anlagen oder die Restaurierung von denkmalgeschützten Anlagen ist die Kenntnis der bestehenden Objektgeometrie von großer Bedeutung. Die Nachfrage nach digital erfassten und gespeicherten Objekten aller Art in digitalen Modellen nimmt zu. Die bauliche Anlage, das Realweltobjekt, muss in ein Planungs- bzw. Dokumentationssystem überführt werden. Dies können heute Geoinformationssysteme sein. Die Darstellung in digitalen Dokumentationssystemen basiert auf einer begrenzten Anzahl modellierter Grundformen von Linien, Flächen und Körpern wie Geraden, Ebenen und Quadern, um nur die einfachsten Typen zu nennen. Durch sie werden Kanten, Oberflächen bzw. Volumenelemente des Realweltobjekts repräsentiert. Das entstehende Modell des Realweltobjekts muss in einer für den Zweck ausreichenden Genauigkeit mit der realen Welt übereinstimmen. Aus den gemessenen Rohdaten werden geometrische Primitive wie Punkte, Linien und Flächen extrahiert und zu einem Modell des Objekts zusammengefügt.

Zur Rohdatenerfassung wurden im Laufe der Zeit Verfahren mit unterschiedlichen Eigenschaften entwickelt. Zur Massendatenerfassung bietet sich heute neben der bekannten photogrammetrischen Aufnahme die terrestrische Laserscannervermessung an. Sie ist in der Lage, große Datenmengen in kurzer Zeit zu erfassen. Eine objektbezogene Attributierung der gemessenen Daten findet – bis auf Intensitäts-, Grauwert- und Farbinformationen – während der Aufnahme nicht statt. Die Überführung der Daten in ein Modell des Realweltobjekts ist noch mit viel manueller Auswertearbeit verbunden. Einige Ansätze zur Automatisierung der Auswertung von terrestrischen wie auch für Airborne-Scannerdaten bestehen. Sie werden im Verlauf dieser Arbeit vorgestellt. Manche wurden für spezielle Auswertungszwecke wie Gebäudedächer oder Baumstämme entwickelt. Vielfach basieren sie ausschließlich auf Scannerdaten.

In dieser Arbeit wird ein Verfahren zur Scannerdatenauswertung vorgestellt, das universell für die Auswertung von Daten unterschiedlichster Realweltobjekte dienen soll. Das Verfahren wird deshalb nicht auf spezielle zu extrahierende Objekte, sondern allgemein auf einfache, häufig vorkommende Primitive bezogen. Die extrahierten Primitive bilden einen wesentlichen Teil einer semiautomatischen, benutzergeführten Auswertung zum Objektmodell. Dabei werden Vorteile, die durch eine gleichzeitige photogrammetrische Aufnahme des Objekts entstehen, genutzt.

Bei der Scannervermessung werden Punkte der Objektoberfläche dreidimensional erfasst. Die Punkte werden im Verlauf der Auswertung in unterschiedlichen Koordinatensystemen benötigt. Im Grundlagenkapitel 2 werden deshalb die verschiedenen Koordinatensysteme und deren gegenseitige Zuordnung vorgestellt. Grundlage der Modellierung ist die Form der Oberfläche des zu modellierenden Objekts. Im zweiten Teil des Kapitels werden Kurven und Flächen im Raum mit den Mitteln der Differentialgeometrie beschrieben.

Kapitel 3 führt zunächst über die verschiedenen existenten Aufnahmemethoden zur kombinierten Aufnahme durch den Laserscanner und die photogrammetrische Kamera. Im zweiten Teil des Kapitels wird in die Grundlagen der Darstellung von Objekten in geometrischen Modellen eingeführt. Ergebnis ist die Modellierung durch Linien-, Flächen- und/oder Volumenprimitive.

Die Parametrisierung der in dieser Arbeit verwendeten Primitivtypen stellt der erste Teil des Kapitels 4 dar. Die Modellprimitive sollen die einer bestimmten Fläche zugehörige Scannerpunktwolke bestmöglich approximieren. Im zweiten Teil des Kapitels wird hierfür die Schätzung der Primitivparameter mit dem Ausgleichungsverfahren im Gauß-Markoff-Modell allgemein und speziell für die vorkommenden Primitivtypen beschrieben. Die Elimination von Ausreißern in Ausreißertests wird erläutert.

Zentrales Element der Arbeit ist das Verfahren zur Extraktion von Flächenprimitiven aus einer Scannerpunktwolke. Sie wird im Kapitel 5 beschrieben, das mit einer Vorstellung der grundsätzlichen Vorgehensweise beginnt. Im zweiten Teil wird die allgemeine Darstellung der differentialgeometrischen Eigenschaften von Flächen auf die verwendeten Flächenprimitivtypen übertragen. Im nächsten Abschnitt werden Verfahren zur lokalen Approximation der Oberfläche vorgestellt und in Bezug auf den in dieser Arbeit verfolgten Zweck bewertet. Einen großen Raum nimmt anschließend die Vorstellung und Auswahl von Aggregationsverfahren für die einer abgegrenzten Fläche zugehörigen Punkte ein. Die zu modellierende Fläche wird dann klassifiziert und parametrisiert. Das Verfahren zur Formalisierung der parametrisierten Fläche wird erläutert. Bestandteil der Formalisierung ist eine Generalisierung zur Vereinfachung des Randpolygons.

Kapitel 6 beschreibt die Extraktion von Ecken, Kanten und Profilen. Sie basiert auf den mit den Mitteln des vorherigen Kapitels extrahierten Flächen.

In Kapitel 7 wird die Implementation des Extraktionsverfahrens in das digitale photogrammetrische Auswertesystem PHIDIAS beschrieben. Kombinierte Auswertemöglichkeiten mit den photogrammetriebasierten Funktionen von PHIDIAS und CAD-Funktionen des Systems MicroStation werden aufgezeigt. Abschließend wird die Anwendungsreife anhand eines am Geodätischen Institut der RWTH Aachen durchgeführten Projektes gezeigt.

Das abschließende Kapitel 8 gibt eine Zusammenfassung der Arbeit und einen Ausblick auf weitere Entwicklungsmöglichkeiten.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden zunächst die benutzten Koordinaten und Koordinatensysteme sowie gegenseitige Transformationsvorschriften vorgestellt. Den größeren Raum nimmt anschließend die differentialgeometrische Betrachtungsweise von Kurven und Flächen im Raum ein.

2.1 Koordinaten und Koordinatensysteme

Zur Festlegung der Lage von Objektpunkten im Raum bedarf es geeigneter eindeutiger Beschreibungsregeln. Eine geeignete eindeutige Beschreibung bieten Koordinatensysteme. Ein Koordinatensystem ist festgelegt durch die Lage des Ursprungs sowie Lage und Verlauf der Koordinatenlinien, auf denen die Koordinaten gezählt werden. In der Beschreibung von Geodaten nennt man die Festlegung der Lage Georeferenzierung.

2.1.1 Kartesische Koordinaten

Für die Zwecke der Beschreibung von Objektpunkten der realen Welt in digitalen Auswertesystemen und zur Verarbeitung der Objektpunkte besonders geeignet sind dreidimensionale kartesische Koordinaten

$$P: \mathbf{x} = \mathbf{x}(x_1, x_2, x_3). \quad (2.1)$$

Kartesische Koordinaten zeichnen sich durch drei (im R_2 zwei) zueinander orthogonale, geradlinige Koordinatenachsen aus. Die Koordinatenlinien sind parallele Geraden. Ein Punkt P mit dem Ortsvektor $\mathbf{x}$ hat die Koordinatenwerte x_1 , x_2 und x_3 (Abbildung 2.1).

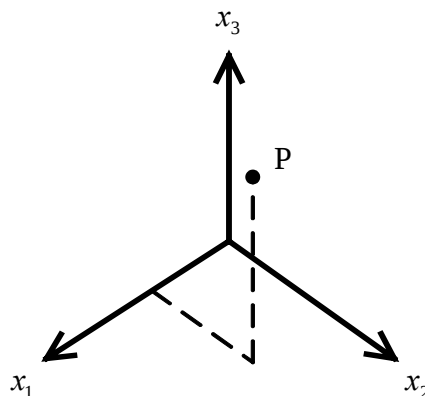


Abbildung 2.1: Kartesische Koordinaten

Kartesische Koordinaten sind wegen ihrer gleichartig metrischen Koordinatenwerte in vielen Fällen am einfachsten zu handhaben. Sie bilden daher die Grundlage der Lageinformation. Für bestimmte Anwendungen sind andere Koordinatenarten günstiger.

2.1.2 Polarkoordinaten

Die Beschreibung eines Punktes P im Raum durch einen Winkel φ zwischen positiver x_1 -Achse und Projektion des Ortsvektors von P in die x_1x_2 -Ebene, einen Winkel ϕ zwischen positiver x_3 -Achse und dem Ortsvektor von P und den Abstand r von P zum Ursprung bezeichnet man als sphärische Polarkoordinaten

$$P : \mathbf{x} = \mathbf{x}(\varphi, \phi, r) \quad (2.2)$$

(Abbildung 2.2).

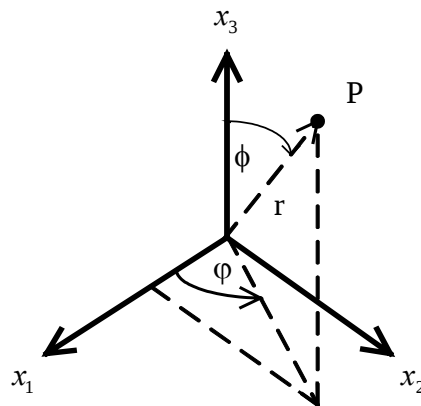


Abbildung 2.2: Sphärische Polarkoordinaten

Der Zusammenhang für einen Punkt P in kartesischen Koordinaten (2.1) und sphärischen Polarkoordinaten ist aufgelöst nach sphärischen Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan \frac{x_2}{x_1}, \\ \phi &= \arccos \frac{x_3}{r}, \\ r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = |\mathbf{x}| \end{aligned} \quad (2.3)$$

und aufgelöst nach kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \phi \cos \varphi, \\ x_2 &= r \sin \phi \sin \varphi, \\ x_3 &= r \cos \phi. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Für $x_3 = 0$ bzw. $\phi = 100$ gon erhält man aus den sphärischen die ebenen Polarkoordinaten für einen Punkt

$$P : \mathbf{x} = \mathbf{x}(x_1, x_2) \quad (2.5)$$

mit

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

$$\varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1}$$
(2.6)

bzw.

$$x_1 = r \cos \varphi,$$

$$x_2 = r \sin \varphi.$$
(2.7)

2.1.3 Zylindrische Koordinaten

Zylindrische Koordinaten beschreiben einen Punkt P im Raum durch einen Winkel φ zwischen positiver x_1 -Achse und der Projektion des Vektors zum Punkt P in die x_1x_2 -Ebene, einen Abstand r der Projektion des Punktes P in die x_1x_2 -Ebene zum Ursprung und einen Abstand h des Punktes P zur x_1x_2 -Ebene.

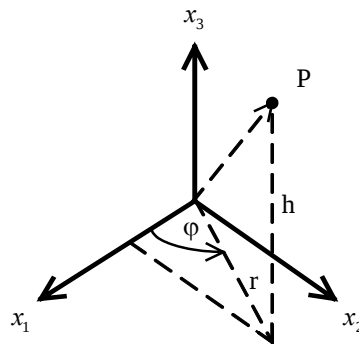


Abbildung 2.3: Zylindrische Koordinaten

Der Zusammenhang für einen Punkt P in kartesischen Koordinaten (2.1) und zylindrischen Koordinaten

$$P: \mathbf{x} = \mathbf{x}(r, \varphi, h)$$
(2.8)

ist aufgelöst nach zylindrischen Koordinaten

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1}$$

$$h = x_3$$
(2.9)

und aufgelöst nach kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \varphi \\x_2 &= r \sin \varphi \\x_3 &= h.\end{aligned}\tag{2.10}$$

2.1.4 Transformation zwischen Koordinatensystemen

Die Transformation eines Punktes P in kartesischen Koordinaten aus einem System S in ein System $\bar{S}$ ist beschrieben durch

$$\bar{x}_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k + b_i, \quad i = 1, 2, 3.\tag{2.11}$$

Die Koeffizienten a_{ik} können in einer Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\tag{2.12}$$

zusammengefasst werden. Sie bewirken die drei Rotationen mit der Matrix $\mathbf{A}$ als Rotationsmatrix. Die Koeffizienten sind nicht voneinander unabhängig. Sie müssen, um Formveränderungen auszuschließen, den Bedingungen

$$\sum_{i=1}^3 a_{ik} a_{il} = \delta_{kl} = \begin{cases} 0 (k \neq l) \\ 1 (k = l) \end{cases}, \quad k, l = 1, 2, 3\tag{2.13}$$

und

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1\tag{2.14}$$

genügen. Die Koeffizienten b_i können in einem Vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\tag{2.15}$$

zusammengefasst werden. Sie bewirken eine Translation zwischen den Ursprüngen der beiden Systeme. Der Vektor wird Translationsvektor genannt. In Vektorschreibweise erhält man für die Transformation eines Punktes insgesamt

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}.\tag{2.16}$$

2.2 Differentialgeometrie

Zur Anwendung der Methoden der Differentialgeometrie mit Hilfe der Infinitesimalrechnung [KREYSZIG 1957] ist es erforderlich, dass die betrachtete Funktion, sei es eine Kurve oder eine Fläche, hinreichend oft stetig differenzierbar ist. Eine Funktion heißt stetig an einer Stelle, wenn sich ihr Funktionswert an der Stelle genügend wenig ändert, solange man nur das Funktionsargument genügend wenig ändert [BRONSTEIN, SEMENDJAJEW, MUSIOL & MÜHLIG 1995]. Die Funktion heißt stetig, falls sie in allen Punkten des Definitionsbereichs stetig ist. Es muss zudem eine hinreichende Anzahl partieller Ableitungen existieren. Ist die Fläche unendlich oft stetig differenzierbar, wird sie als glatt bezeichnet.

2.2.1 Differentialgeometrie der Kurve

Eine Raumkurve C ist durch einen Parameter t in der Form

$$C : \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \quad (2.17)$$

beschrieben. Die Bogenlänge s der Kurve zwischen den Stellen t_o und t erhält man durch die Integration

$$s(t) = \int_{t_o}^t \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2} dt = \int_{t_o}^t \sqrt{\frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{d\mathbf{x}}{dt}} dt = \int_{t_o}^t \sqrt{\mathbf{x}'(t) \mathbf{x}'(t)} dt. \quad (2.18)$$

Die Bogenlänge s ist unabhängig von der speziellen Wahl der Darstellung der Kurve. Differenziert man nach dem Parameter t und quadriert anschließend, ergibt sich

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (2.19)$$

bzw.

$$ds^2 = d\mathbf{x} d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 (dx_i)^2. \quad (2.20)$$

ds ist das Bogenelement oder Bogendifferential der Kurve C . Die Bogenlänge s ist ebenfalls ein möglicher Parameter für die Darstellung der Kurve.

2.2.1.1 Tangentenvektor und Normalebene

Die Richtung der Kurve C mit der Bogenlänge s als Parameter bildet der normierte Differenzvektor zweier aufeinander folgender Kurvenpunkte an den Stellen $P_s: \mathbf{x}(s)$ und $P_{s+h}: \mathbf{x}(s+h)$, wobei für h der Grenzwert gegen Null gebildet wird, also

$$\mathbf{t}(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(s+h) - \mathbf{x}(s)}{h} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} =: \dot{\mathbf{x}}(s). \quad (2.21)$$

Die Ableitung nach der Bogenlänge wird stets mit Punkten, nach anderen Kurvenparametern mit Strichen gekennzeichnet. Mit Einführung eines anderen zulässigen Kurvenparameters t folgt aus (2.21) mit (2.18)

$$\mathbf{t}(t) = \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{x}'(t)}{s'(t)} = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\sqrt{\mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}'(t)}} = \frac{\mathbf{x}'(t)}{|\mathbf{x}'(t)|}. \quad (2.22)$$

Quadrieren zeigt, dass der Tangentenvektor ein Einheitsvektor ist, denn es gilt

$$\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{|\mathbf{x}'(t)|} \cdot \frac{\mathbf{x}'(t)}{|\mathbf{x}'(t)|} = 1. \quad (2.23)$$

2.2.1.2 Krümmung einer Kurve

Der Krümmungsvektor $\mathbf{k}(s)$ einer Kurve C im Punkt $P: \mathbf{x}(s)$ ist als 2. Differential nach der Bogenlänge definiert:

$$\mathbf{k}(s) = \frac{d^2 \mathbf{x}(s)}{ds^2} = \ddot{\mathbf{x}}(s). \quad (2.24)$$

Der Betrag

$$\kappa(s) = |\mathbf{k}(s)| \quad (2.25)$$

wird als Krümmung und der Betrag

$$\rho = \frac{1}{\kappa}, \quad \kappa \neq 0 \quad (2.26)$$

als Krümmungsradius der Kurve an der Stelle $\mathbf{x}(s)$ bezeichnet. Der Einheitsvektor

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{k}(s)}{|\mathbf{k}(s)|} = \frac{\dot{\mathbf{t}}(s)}{\kappa} \quad (2.27)$$

heißt Hauptnormalenvektor der Kurve an der Stelle $\mathbf{x}(s)$. Der Vektor, der senkrecht auf dem Tangenten- und dem Normalenvektor steht, heißt der Binormalenvektor

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s), \quad (2.28)$$

und hat, weil Tangenten- und Normalenvektor bereits Einheitsvektoren sind, ebenfalls die Länge Eins. Tangenten-, Hauptnormalen- und Binormalenvektor bilden das begleitende Dreibein der Kurve C . Da die Vektoren des begleitenden Dreibeins Einheitsvektoren sind, gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) &= 1, \\
\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{n}(s) &= 1, \\
\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{b}(s) &= 1.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Durch die Differentiation der 1. Gleichung (2.29) nach der Bogenlänge s

$$\mathbf{t}(s) \cdot \dot{\mathbf{t}}(s) = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{k}(s) = \mathbf{t}(s) \cdot \kappa(s) \mathbf{n}(s) = 0 \tag{2.30}$$

bzw. wegen (2.28) gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{n}(s) &= 0, \\
\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{b}(s) &= 0, \\
\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{t}(s) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Krümmungsvektor $\mathbf{k}(s)$ und Tangentenvektor $\mathbf{t}(s)$ sind zueinander orthogonal und damit voneinander linear unabhängig. Durch Differentiation der Beziehungen (2.29) nach der Bogenlänge s erhält man

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}(s) \cdot \dot{\mathbf{t}}(s) &= 0, \\
\mathbf{n}(s) \cdot \dot{\mathbf{n}}(s) &= 0, \\
\mathbf{b}(s) \cdot \dot{\mathbf{b}}(s) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Die Differentiationen der Beziehungen (2.31) nach der Bogenlänge liefern

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{t}}(s) \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \dot{\mathbf{n}}(s) &= 0, \\
\dot{\mathbf{n}}(s) \mathbf{b}(s) + \mathbf{n}(s) \dot{\mathbf{b}}(s) &= 0, \\
\dot{\mathbf{b}}(s) \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \dot{\mathbf{t}}(s) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

2.2.1.3 Torsion einer Kurve

Unter Benutzung der Definition des Binormalenvektors (2.28) und der 2. Beziehung (2.31) erhält man aus der 3. Beziehung (2.33)

$$\dot{\mathbf{b}}(s) \mathbf{t}(s) = -\mathbf{b}(s) \dot{\mathbf{t}}(s) = -\kappa(s) \mathbf{b}(s) \mathbf{n}(s) = 0. \tag{2.34}$$

Weil der Vektor $\dot{\mathbf{b}}(s)$ wegen (2.34) auf dem Tangenten- und wegen (2.32) auf dem Binormalenvektor senkrecht steht, muss er ein Vielfaches des Hauptnormalenvektors $\mathbf{n}(s)$, d.h. von der Form

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = -\tau(s) \mathbf{n}(s) \tag{2.35}$$

sein. Durch Skalarmultiplikation mit dem Normalenvektor $\mathbf{n}(s)$ erhält man

$$\tau(s) = -\mathbf{n}(s) \cdot \dot{\mathbf{b}}(s). \tag{2.36}$$

$\tau(s)$ ist die Torsion der Kurve C an der Stelle $\mathbf{x}(s)$.

2.2.1.4 Frenet'sche Ableitungsformeln

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren des begleitenden Dreibeins (2.31) muss sich jeder beliebige Vektor, auch die Differentiale der Vektoren des begleitenden Dreibeins nach der Bogenlänge, durch eine Linearkombination der Dreibeinvektoren ausdrücken lassen. Mit den neu eingeführten Faktoren a_i , $i = 1, 2, 3$, erhält man für die Ableitung des Hauptnormalenvektors

$$\dot{\mathbf{n}}(s) = a_1 \mathbf{t}(s) + a_2 \mathbf{n}(s) + a_3 \mathbf{b}(s) \quad (2.37)$$

und nach Multiplikation mit den Dreibeinvektoren $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ bzw. $\mathbf{b}$ wegen der Orthogonalitäten (2.31)

$$\begin{aligned} a_1 &= \dot{\mathbf{n}}(s) \cdot \mathbf{t}(s), \\ a_2 &= 0, \\ a_3 &= \dot{\mathbf{n}}(s) \cdot \mathbf{b}(s). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Wieder eingesetzt in (2.37) unter Berücksichtigung der Beziehungen (2.33) erhält man

$$\dot{\mathbf{n}}(s) = -\dot{\mathbf{t}}(s) \cdot \mathbf{n}(s) \mathbf{t}(s) - \mathbf{n}(s) \cdot \dot{\mathbf{b}}(s) \mathbf{b}(s) \quad (2.39)$$

und unter Berücksichtigung der Definitionen der Krümmung (2.27) und der Torsion (2.36)

$$\dot{\mathbf{n}}(s) = -\kappa(s) \mathbf{t}(s) + \tau(s) \mathbf{b}(s). \quad (2.40)$$

Die Beziehung bildet zusammen mit den Beziehungen (2.27) und (2.35) die Frenet'schen Ableitungsformeln

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{t}}(s) &= \kappa(s) \mathbf{n}(s), \\ \dot{\mathbf{n}}(s) &= -\kappa(s) \mathbf{t}(s) + \tau(s) \mathbf{b}(s), \\ \dot{\mathbf{b}}(s) &= -\tau(s) \mathbf{n}(s). \end{aligned} \quad (2.41)$$

2.2.2 Differentialgeometrie der Fläche

Eine Fläche F im dreidimensionalen Raum R_3 (Abbildung 2.4) ist definiert als Funktion von zwei linear unabhängigen reellen Veränderlichen u^1 und u^2 . Die Koordinaten (u^1, u^2) eines Punktes P auf F heißen Gauß'sche Koordinaten. Zur Anwendbarkeit der Differentialgeometrie müssen die Veränderlichen u^1 und u^2 in einem einfach zusammenhängenden, beschränkten Gebiet B der $u^1 u^2$ -Ebene des R_2 definiert sein. Im kartesischen Koordinatensystem des Raumes R_3 werden die Punkte P der Fläche F durch die Ortsvektoren

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = (x_1(u^1, u^2), x_2(u^1, u^2), x_3(u^1, u^2)) \quad (2.42)$$

als Funktion der Veränderlichen u^1 und u^2 beschrieben. Die Funktion ordnet jedem Punkt P : $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ des Gebiets B eindeutig einen Punkt im R_3 mit dem Ortsvektor $\mathbf{x}$ zu. Für konstante u^1 bzw. u^2 sind dies die Koordinatenlinien der Fläche.

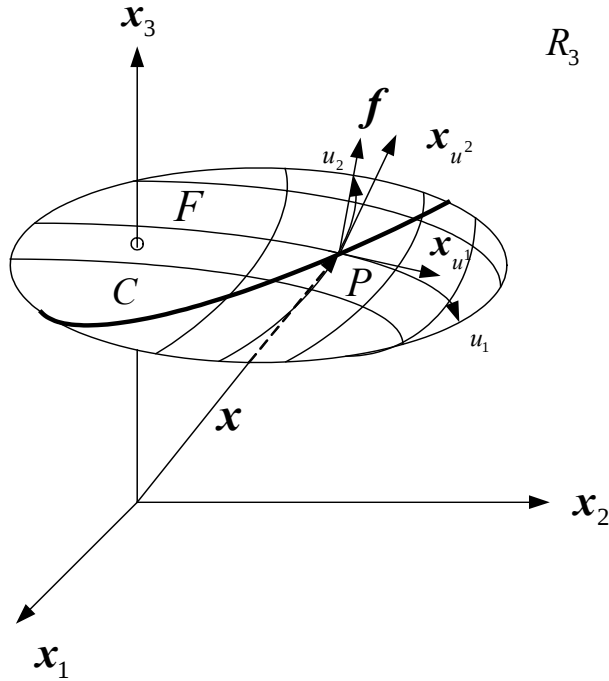


Abbildung 2.4: Differentialgeometrie der Fläche

Unter Nutzung der reellen Variablen t erhält man mit der Parameterdarstellung

$$u^1 = u^1(t) \text{ und } u^2 = u^2(t) \quad (2.43)$$

eine Kurve C entsprechend der Kurvendarstellung (2.17) auf der Fläche F mit der Darstellung

$$C : \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(x_1(u^1(t), u^2(t)), x_2(u^1(t), u^2(t)), x_3(u^1(t), u^2(t))). \quad (2.44)$$

2.2.2.1 Tangentenvektoren und Tangentialebene

Die Tangentenrichtung einer beliebigen Kurve C mit der Bogenlänge s auf der Fläche F erhält man durch Differentiation von (2.44) entsprechend (2.21) zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \frac{du^1}{ds} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} \frac{du^2}{ds} = \mathbf{x}_{u^1} \dot{u}^1 + \mathbf{x}_{u^2} \dot{u}^2 = \mathbf{x}_{u^\mu} \dot{u}^\mu \quad (2.45)$$

unter Nutzung der Definition

$$\mathbf{x}_{u^\alpha} := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.46)$$

für die partiellen Ableitungen und einer Summationsvereinbarung

$$a_i b^i := \sum_{i=1}^n a_i b^i \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.47)$$

Die Summationsvereinbarung, besagt, dass über einen Index, der in einem Produkt zweimal, und zwar einmal als unterer und einmal als oberer Index, vorkommt, zu summieren ist. Die Summierung läuft über den Definitionsbereich des Indexes. Sie wird im Folgenden weiter verwendet.

Für konstant gewählte Flächenparameter u^1 bzw. u^2 erhält man die Tangentenvektoren der Fläche an der Stelle $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ in Richtung der Koordinatenlinien. Sie spannen die Tangentialebene der Fläche an der Stelle $\mathbf{x}$ auf. Die Tangentialebene bildet die Fläche in einem infinitesimalen Teilstück.

2.2.2.2 Regularität

Eine Fläche F ist an den Stellen $\mathbf{x}(u^1, u^2)$, an denen die Veränderlichen u^1 und u^2 Tangentenvektoren linear abhängig sind, also

$$\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2} = \mathbf{0} \quad (2.48)$$

gilt, singular. Entsprechend muss für die Existenz einer echten Fläche an allen Stellen die Regularitätsbedingung

$$\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2} \neq \mathbf{0} \quad (2.49)$$

gelten. Bei einigen speziellen Flächentypen ist es notwendig, zuzulassen, dass die Fläche an einzelnen Stellen nicht der Regularitätsbedingung (2.49) genügt. Singularität kann an einzelnen Stellen bezüglich einer bestimmten Darstellung der Fläche, z.B. einer Ebene in Polarkoordinaten, auftreten. Dann lässt sich eine andere Darstellung finden, in der auch diese Punkte regulär sind. In den folgenden Betrachtungen soll die Regularität an allen Stellen der Fläche gegeben sein.

2.2.2.3 1. Fundamentalform

Das Quadrat der Bogenlänge der Kurve C erhält man aus (2.20) mit den partiellen Ableitungen (2.46)

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} du^2 \right)^2 = \mathbf{x}_{u^\mu} \mathbf{x}_{u^\nu} du^\mu du^\nu. \quad (2.50)$$

Mit den Definitionen

$$\mathbf{x}_{u^\mu} \mathbf{x}_{u^\nu} =: g_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2 \quad (2.51)$$

erhält man den Ausdruck

$$I := ds^2 = g_{\mu\nu} du^\mu du^\nu = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}, \quad (2.52)$$

der als 1. Fundamentalform der Flächentheorie bezeichnet wird. Das Bogenelement s hat eine von den Koordinaten auf der Fläche unabhängige Bedeutung. Es muss daher invariant gegenüber zulässigen Koordinatentransformationen sein. Die Diskriminante eines Tensors, gebildet aus den $g_{\mu\nu}$, heißt

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2. \quad (2.53)$$

2.2.2.4 Normalenvektor

Das Kreuzprodukt der Tangentenvektoren in Richtung der Koordinatenlinien steht senkrecht auf der Fläche. Durch Normierung erhält man den Normalenvektor der Fläche an der Stelle $\mathbf{x}(u^1, u^2)$:

$$\mathbf{f}(u^1, u^2) = \frac{\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}}{|\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}|}, \quad \mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2} \neq \mathbf{0}. \quad (2.54)$$

Der Flächennormalenvektor ist bis auf das Vorzeichen invariant gegenüber Parametertransformationen.

2.2.2.5 2. Fundamentalform

Nach Differentiation der Tangentenrichtung (2.45) nach der Bogenlänge s erhält man die Ableitungen

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{u^1 u^1} \dot{u}^1 \dot{u}^1 + \mathbf{x}_{u^1 u^2} \dot{u}^2 \dot{u}^1 + \mathbf{x}_{u^2 u^1} \dot{u}^1 \dot{u}^2 + \mathbf{x}_{u^2 u^2} \dot{u}^2 \dot{u}^2 + \mathbf{x}_{u^2} \ddot{u}^2 = \mathbf{x}_{u^\mu u^\nu} \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu + \mathbf{x}_{u^\mu} \ddot{u}^\mu. \quad (2.55)$$

Wegen der Orthogonalität (2.54) der Tangentenrichtungen $\mathbf{x}_{u^\alpha}$ zum Flächennormalenvektor $\mathbf{f}$ folgt nach Skalarmultiplikation mit $\mathbf{f}$ aus (2.55)

$$\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{f} = (\mathbf{x}_{u^\mu u^\nu} \cdot \mathbf{f}) \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu. \quad (2.56)$$

Mit der Definition

$$b_{\mu\nu} := \mathbf{x}_{u^\mu u^\nu} \cdot \mathbf{f}, \quad \mu, \nu = 1, 2 \quad (2.57)$$

erhält man

$$\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{f} = b_{u^\mu u^\nu} \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu. \quad (2.58)$$

Die Koeffizienten $b_{\mu\nu}$ hängen nur von der Fläche F , nicht von der Kurve C ab, und sind symmetrisch. Die quadratische Form

$$II := b_{\mu\nu} du^\mu du^\nu \quad (2.59)$$

heißt 2. Fundamentalform der Flächentheorie. Die partielle Differentiation von $\mathbf{x}_{u^\eta} \cdot \mathbf{f} = 0$ nach u^ν bringt

$$\mathbf{x}_{u^\eta u^\nu} \cdot \mathbf{f} + \mathbf{x}_{u^\eta} \cdot \mathbf{f}_{u^\nu} = 0. \quad (2.60)$$

Damit geht (2.57) über in

$$b_{\mu\nu} = -\mathbf{x}_{u^\mu} \mathbf{f}_{u^\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2 \quad (2.61)$$

und die 2. Fundamentalform (2.62) entsprechend (2.50) über in

$$II = b_{\mu\nu} du^\mu du^\nu = -d\mathbf{x} d\mathbf{f}. \quad (2.62)$$

Die 2. Fundamentalform ist bis auf den Richtungssinn des Flächennormalenvektors invariant gegenüber zulässigen Transformationen der Gauß'schen Koordinaten. Die Diskriminante eines Tensors, gebildet aus den $b_{\mu\nu}$, heißt

$$b = b_{11}b_{22} - b_{12}^2. \quad (2.63)$$

Approximiert man eine Fläche F in der Umgebung eines Flächenpunktes P durch eine Taylorentwicklung

$$\mathbf{x}(u^1 + du^1, u^2 + du^2) = \mathbf{x}(u^1, u^2) + \mathbf{x}_{u^\mu} du^\mu + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{u^\mu u^\nu} du^\mu du^\nu + O(|du|^3),$$

so repräsentieren die ersten beiden Summanden der rechten Seite die Tangentialebene und der dritte (quadratische) Summand die Abweichung hiervon. Man erhält die Abweichung durch Multiplikation mit dem Flächennormalenvektor $\mathbf{f}$. Bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$ ist dies die 2. Fundamentalform.

2.2.2.6 Krümmung

Für den Winkel γ zwischen dem Flächennormalenvektor $\mathbf{f}$ einer Fläche F und dem Hauptnormalenvektor $\mathbf{n}$ einer beliebigen, gekrümmten Kurve C auf F mit der Bogenlänge s als Parameter gilt

$$\cos \gamma = \mathbf{n} \mathbf{f}. \quad (2.64)$$

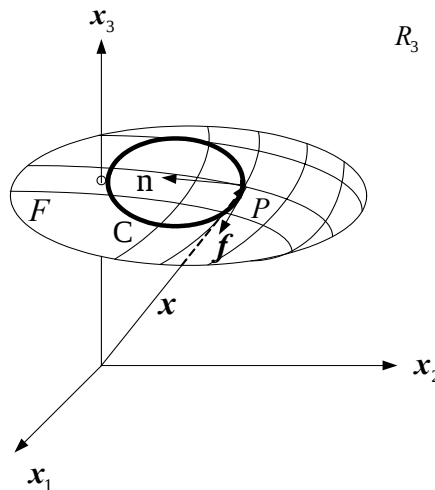


Abbildung 2.5: Flächenkrümmung

Mit der ersten der Frenet'schen Ableitungsformeln (2.41) und (2.24) erhält man

$$\kappa \cos \gamma = \dot{\mathbf{t}} \cdot \ddot{\mathbf{f}} = \ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}, \quad \kappa > 0. \quad (2.65)$$

(2.58) eingesetzt in (2.65) ergibt

$$\kappa \cos \gamma = b_{\mu\nu} \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu. \quad (2.66)$$

Mit Einführung eines beliebigen, zulässigen Kurvenparameters t erhält man wegen $\dot{u}^\mu = (du^\mu / dt) \cdot (dt / ds)$

$$\kappa \cos \gamma = b_{\mu\nu} \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu = \frac{b_{\mu\nu} du^\mu du^\nu}{ds^2} \quad (2.67)$$

und mit den beiden Fundamentalformen (2.52) und (2.62)

$$\kappa \cos \gamma = b_{\mu\nu} \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu = \frac{b_{\mu\nu} du^\mu du^\nu}{g_{\mu\nu} du^\mu du^\nu} = \frac{II}{I}. \quad (2.68)$$

Das Verhältnis der Tangentenrichtungen der Koordinatenlinien $q := du^2 / du^1$ bedeutet die Richtung des Tangentenvektors $\mathbf{t}$ der Kurve C . Die Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ und $b_{\mu\nu}$ sind invariant gegenüber zulässigen Koordinatentransformation; also ist die Krümmung κ der Flächenkurve in einem Punkt P lediglich von der Richtung des Tangentenvektors $\mathbf{t}$ und dem Winkel γ (bzw. der Richtung des Hauptnormalenvektors $\mathbf{n}$) der Kurve C abhängig. Die beiden Vektoren spannen die Schmiegeebene der Kurve auf. Alle Kurven, die die gleiche Schmiegeebene besitzen und durch P laufen, haben dieselbe Krümmung. Es wird deshalb fortan nur die ebene Kurve, die Schnittkurve der Schmiegeebene mit der Fläche F betrachtet. Es wird definiert

$$\kappa_n := \kappa \cos \gamma = \frac{b_{\mu\nu} du^\mu du^\nu}{g_{\mu\nu} du^\mu du^\nu} = \frac{II}{I} \quad (2.69)$$

als Normalkrümmung der Fläche F im Punkt P . Der zugehörige Normalkrümmungsvektor ist

$$\mathbf{k}_n = \kappa_n \mathbf{f}. \quad (2.70)$$

Normalkrümmung und Normalkrümmungsvektor sind ausschließlich abhängig von der gemeinsamen Tangentenrichtung der Flächenkurven durch P . Für $\gamma = 0$ sind der Hauptnormalenvektor $\mathbf{n}$ der Kurve und der Flächennormalenvektor $\mathbf{f}$ gleich oder in Gegenrichtung orientiert. Der Schnitt von Schmiegeebene der Kurve und der Fläche heißt in diesem Fall Normalschnitt und bildet die Normalschnittkurve. Durch Inversion der Normalkrümmung erhält man den Krümmungsradius

$$R = \frac{1}{|\kappa_n|} \quad (2.71)$$

der betreffenden Normalschnittkurve. Führt man in (2.69) die Richtung q der Tangente $\mathbf{t}$ der Kurve C ein, erhält man die Normalkrümmung als Funktion der Richtung q :

$$\kappa_n(q) = \frac{b_{11} + 2b_{12}q + b_{22}q^2}{g_{11} + 2g_{12}q + g_{22}q^2}. \quad (2.72)$$

Die Normalkrümmung besitzt Extremwerte für

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa_n}{dq} &= (2b_{12} + 2b_{22}q)(g_{11} + 2g_{12}q + g_{22}q^2) - (b_{11} + 2b_{12}q + b_{22}q^2)(2g_{12} + 2g_{22}q) = \\ &= \frac{2(b_{12}g_{11} - b_{11}g_{12}) + 2(b_{22}g_{11} - b_{11}g_{22})q + 2(b_{12}g_{22} - b_{11}g_{22})q^2}{(g_{11} + 2g_{12}q + g_{22}q^2)^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Die quadratische Form

$$(b_{12}g_{11} - b_{11}g_{12}) + (b_{22}g_{11} - b_{11}g_{22})q + (b_{12}g_{22} - b_{11}g_{22})q^2 = 0 \quad (2.74)$$

birgt zwei Lösungen und somit zwei Extrema für die Normalkrümmungswerte. Die Extrema werden als die Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 in den beiden Haupt(krümmungs)richtungen q_1 und q_2 der Fläche bezeichnet. Die Hauptkrümmungsrichtungen stehen senkrecht aufeinander [KREYSZIG 1957]. Sie existieren in jedem Punkt der Fläche, außer in Nabelpunkten, und bilden ein orthogonales Netz von Krümmungslinien. Die Krümmungslinien lassen sich als Koordinatenlinien nutzen.

Zur Bestimmung der Hauptkrümmungen wird die Form (2.72) umgestellt zur Form

$$(b_{22} - \kappa_n g_{22})q^2 + 2(b_{12} - \kappa_n g_{12})q + (b_{11} - \kappa_n g_{11}) = 0. \quad (2.75)$$

Nach Differentiation und mit der Extremabedingung $d\kappa_n / dq = 0$ erhält man

$$(b_{22} - \kappa_n g_{22})q + (b_{12} - \kappa_n g_{12}) = 0. \quad (2.76)$$

Eingesetzt in (2.75) folgt

$$(b_{12} - \kappa_n g_{12})q + (b_{11} - \kappa_n g_{11}) = 0. \quad (2.77)$$

Das Gleichsetzen der nach q aufgelösten Gleichungen (2.76) und (2.77) liefert nach einigen Umstellungen unter Berücksichtigung von (2.53) und (2.63)

$$\kappa_n^2 - \frac{b_{11}g_{22} + b_{22}g_{11} - 2b_{12}g_{12}}{g} \kappa_n + \frac{b}{g} = 0. \quad (2.78)$$

Die beiden Lösungen dieser Gleichung sind die Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 . Im Fall in jedem Punkt der Fläche orthogonaler Koordinatenlinien ($\mathbf{x}_{u^1} \mathbf{x}_{u^2} = 0$), die mit den Hauptkrümmungslinien zusammenfallen, folgt $g_{12} = b_{12} = 0$. Dann erhält man als Lösungen für (2.78)

$$\kappa_1 = \frac{b_{11}}{g_{11}} \quad \text{und} \quad \kappa_2 = \frac{b_{22}}{g_{22}}. \quad (2.79)$$

(2.69) lässt sich vereinfachen zu

$$\kappa_n = \frac{b_{\mu\mu}(du^\mu)^2}{g_{\mu\mu}(du^\mu)^2} \quad (2.80)$$

und mit (2.79) umformen zu

$$\kappa_n = \frac{\kappa_1 g_{11}(du^1)^2}{ds^2} + \frac{\kappa_2 g_{22}(du^2)^2}{ds^2} = \kappa_1 g_{11}(\dot{u}^1)^2 + \kappa_2 g_{22}(\dot{u}^2)^2. \quad (2.81)$$

Mit (2.45) und (2.51) gilt für den Winkel α zwischen der u^1 -Linie und der Tangentenrichtung der betrachteten Kurve unter Berücksichtigung von $|\dot{\mathbf{x}}| = 1$ und der Orthogonalität der Krümmungslinien

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{x}_{u^1} \cdot \dot{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}_{u^1}| |\dot{\mathbf{x}}|} = \sqrt{g_{11}} \dot{u}^1 \quad \text{und} \quad \sin \alpha = \frac{\mathbf{x}_{u^2} \cdot \dot{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}_{u^2}| |\dot{\mathbf{x}}|} = \sqrt{g_{22}} \dot{u}^2 \quad (2.82)$$

und eingesetzt in (2.81)

$$\kappa_n(\alpha) = \kappa_1 \cos^2 \alpha + \kappa_2 \sin^2 \alpha \quad (2.83)$$

(Satz von L. Euler, Recherches sur la courbure des surfaces. Mém. de l'Acad. des Sciences 16, S. 119-143, Berlin 1760). Trägt man in einem ebenen kartesischen Koordinatensystem die Punkte $(1/\sqrt{|\kappa_1|}, 1/\sqrt{|\kappa_2|})$ auf, so erhält man eine anschauliche Darstellung der Krümmungsverhältnisse, genannt die Dupin'sche Indikatrix (C. Dupin, Développements de géométrie, 1813). Haben κ_1 und κ_2 dasselbe Vorzeichen, dann ist die Fläche elliptisch, sonst hyperbolisch gekrümmt.

Anders ausgedrückt ist die Normalkrümmung (2.83)

$$\kappa_n(\alpha) = \kappa_1 \cos^2 \alpha + \kappa_2 (1 - \cos^2 \alpha) = \kappa_2 + (\kappa_1 - \kappa_2) \cos^2 \alpha \quad (2.84)$$

und damit eine Kosinus-Quadrat-Funktion mit der Additionskonstante $h = \kappa_2$ und der Amplitude $A = \kappa_1 - \kappa_2$. Die Ausgangsrichtung wird durch eine Orientierungsunbekannte φ_0 festgelegt.

3 Objekterfassung und -modellierung

Die Dokumentation von bestehenden Objekten beginnt mit der Datenerfassung. Die gemessenen Rohdaten müssen mit geeigneten Methoden in ein Modell überführt werden. Dokumentations- und Planungsmedium ist heute für Objekte, die in ihrer Dimension einfache Gebäude wie Einfamilienhäuser übersteigen, das CAD-System. Planungen und Auswertungen können hier mit Hilfe von CAD-Methoden eingefügt bzw. durchgeführt werden. Änderungen der Pläne sind jederzeit einfach möglich. Das Objekt lässt sich in jedem Maßstab und aus jedem Blickwinkel dreidimensional und blattschnittfrei darstellen und in analoge Formen überführen.

3.1 Objekterfassung

Die Erfassung von Objekten ist nichts Neues. Selbst in frühester Zeit mussten z.B. Ausmaße von Gebäuden festgestellt werden. Seither wurden Methoden der räumlichen Erfassung des Bestandes entwickelt.

3.1.1 Handaufmaß

Die messtechnisch einfachste Methode zur Erfassung der Ausmaße von Objekten ist das Handaufmaß. Für das Handaufmaß sind Mittel geeignet wie die Schrittlänge eines Menschen, der Gliedermessstab, das Bandmaß und der Handlaserdistanzmesser. Die Wahl des Mittels hängt von der erforderlichen Genauigkeit des Aufmaßes ab. Die Geräte messen Strecken, d.h. sie ermitteln die kürzeste Entfernung zwischen zwei Raumpunkten. Die Messung ist eindimensional. Sofern zwei- oder dreidimensionale Situationen erfasst werden sollen, wird dies durch Schnitte der gemessenen Strecken, z.B. den Vorwärtsschnitt, und/oder durch Einfügen geometrischer Bedingungen wie Orthogonalitäten oder Parallelitäten erreicht. Zur Bestimmung der geometrischen Bedingungen müssen geeignete Messgeräte, z.B. Winkelprismen, herangezogen werden.

3.1.2 Polaraufnahme mit dem Tachymeter

Bei der Polaraufnahme werden Polarkoordinaten (2.2) gemessen. Zur Messung der beiden Winkel bzw. Richtungen werden Theodolite verwandt. Erfolgt die Ablesung der Richtungen nicht optisch visuell, sondern durch opto- und mikroelektronische Bauteile automatisch, spricht man von einem elektronischen Theodolit. Die Strecke kann mit einem Messband oder einem elektrooptischen Entfernungsmessgerät bestimmt werden. Wird der Theodolit um einen elektrooptischen Entfernungsmesser ergänzt, spricht man von einem Tachymeter. Durch Anbau eines Speichermediums an den Tachymeter lassen sich die Messdaten automatisch aufzeichnen und per automatischem Datenfluss in Auswertesoftware überführen. Die Messwerte werden bei der Aufnahme im Horizontsystem des Theodolits bzw. des Tachymeters mit Horizontalrichtung H_z , Vertikalwinkel V und Strecke s bezeichnet.

Kartesische Koordinaten (2.1) der Objektpunkte im Horizontsystem des Tachymeters erhält man durch den Zusammenhang (2.4). Die Darstellung der Objektpunkte in kartesischen Koordinaten (2.1) eines anderen, maßstabsgleichen kartesischen Koordinatensystems erfordert eine Transformation (2.16).

Besteht die Transformation lediglich aus einer Translation und einer Rotation o um die Vertikalachse, kann das Verfahren des polaren Anhängens verwendet werden. Man erhält die kartesischen Koordinaten des Objektpunktes im übergeordneten Horizontkoordinatensystem direkt aus den örtlichen Polarkoordinaten mit Ursprung im Punkt P_S anhand der Beziehungen

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_S + s \begin{pmatrix} \sin V \cos(Hz + o) \\ \sin V \sin(Hz + o) \\ \cos V \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Umgekehrt erhält man mit den Koordinatendifferenzen

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_S \quad (3.2)$$

die örtlichen Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2}, \\ Hz &= \arctan \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} - o, \\ V &= \arccos s. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Die Orientierungsunbekannte o muss anhand der Messung zu einem in beiden Koordinatensystemen bekannten Anschlusspunkt A mit

$$o = \arctan \frac{\Delta x_{A,1}}{\Delta x_{A,2}} - Hz_A \quad (3.4)$$

bestimmt werden.

3.1.3 Photogrammetrische Aufnahme

Die photogrammetrische Aufnahme ist ein Richtungsmessverfahren. Die reale Welt wird in Form von Grauwert- oder Farbbildern durch lichtempfindliche Photoschichten oder regelmäßig angeordnete Sensoren erfasst. Die Auflösung hängt von der Kameraoptik und – im Fall der heute üblichen Digitalkameras – von Größe und Anzahl der lichtempfindlichen Sensoren sowie der Brennweite der Kamera ab. Sie kann, da die Aufnahme (Belichtung) für alle aufgenommenen Punkte parallel erfolgt, wesentlich höher als bei seriell messenden Aufnahmeverfahren sein. Gemessen werden zweidimensionale Bildkoordinaten, die auf der Grundlage der bekannten Aufnahmegeometrie in Bildstrahlen umgerechnet werden können. Die Bildstrahlen entsprechen der Richtungsmessung der tachymetrischen Aufnahme. Wegen der fehlenden Entfernungsmessung ist eine dreidimensionale Punktbestimmung aus lediglich einer Aufnahme nicht möglich. Die dritte Dimension ergibt sich aus einer zweiten photogrammetrischen Aufnahme desselben Objektpunktes unter Berücksichtigung der gegenseitigen Orientierung durch Schnitt der Zielstrahlen. Mit wachsender Entfernung zu den beiden Aufnahmestandpunkten sinkt die Güte der Entfernungsbestimmung.

3.1.4 Terrestrisches Laserscanning

Der Laserscanner erfasst Punkte analog der tachymetrischen Aufnahme dreidimensional durch Messung von Polarkoordinaten (2.2) in Form einer Horizontalrichtung und eines Vertikalwinkels bezogen auf die Stehachse des Instrumentes sowie der Raumstrecke. Die Streckenmessung erfolgt mittels elektrooptischer Entfernungsmessung im – je nach Gerätetyp – Impuls- oder Phasenvergleichsverfahren. Mit Hilfe der trigonometrischen Operationen (2.4) erhält man die gemessenen Objektpunkte in einem scannerbezogenen kartesischen Koordinatensystem (Abbildung 3.1 und Abbildung 3.2). Eine Horizon-tierung des Gerätes ist nicht zwingend erforderlich, da die Transformation der scannerbezogenen Ko-ordinaten in ein übergeordnetes Koordinatensystem i.d.R. durch eine 6-Parametertransformation mit drei Translationen und drei Rotationen (2.16) erfolgt. Die Transformationsparameter werden durch Passpunkte oder Passebenen bestimmt.

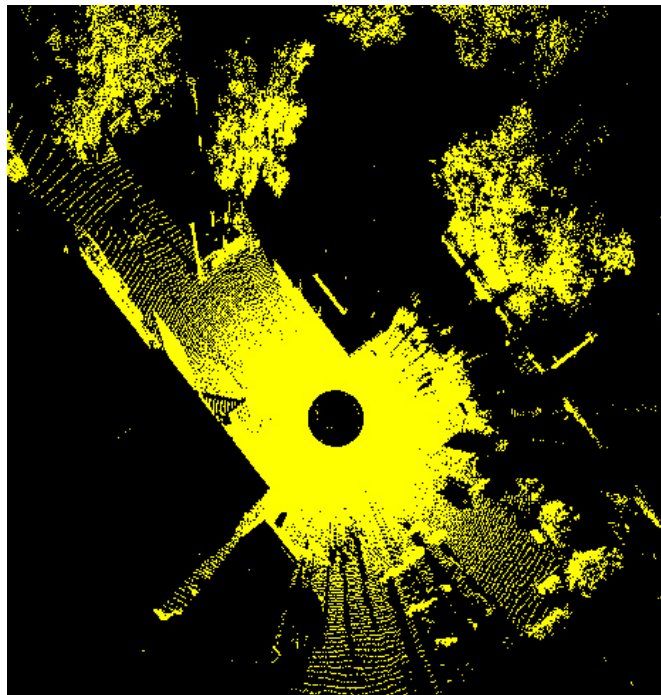


Abbildung 3.1: Punktwolke, Darstellung von oben

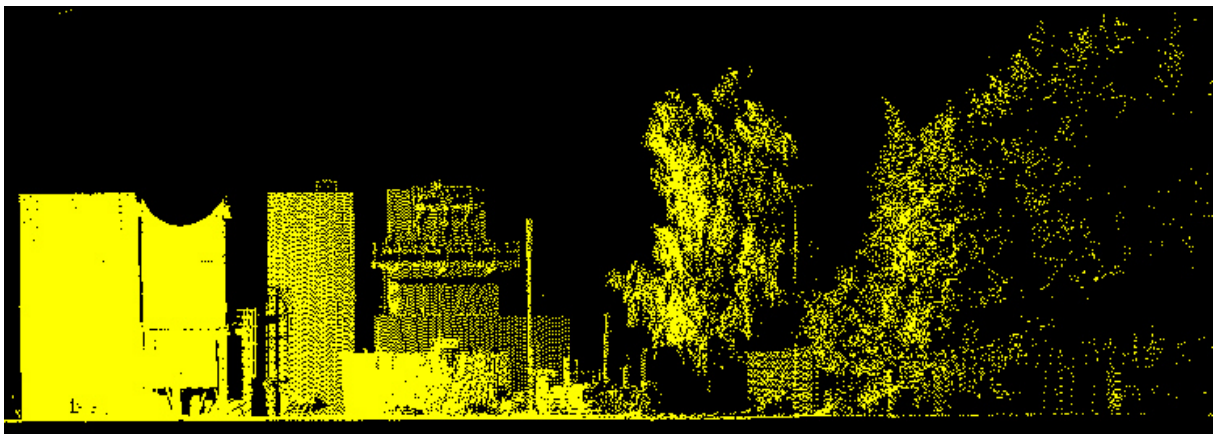


Abbildung 3.2: Punktwolke, Darstellung von der Seite

Horizontalrichtung und Vertikalwinkel werden automatisch in einer zuvor festgelegten Schrittweite verändert. Damit ergibt sich unter Berücksichtigung der Entfernung des Objekts vom Aufnahmestandpunkt und der Verkippung der Objektoberfläche zur Aufnahmerichtung die Punktauflösung am Objekt. Die automatisierte Punktaufnahme ermöglicht eine hohe Datenerfassungsrate.

Auf dem Markt haben sich einige Hersteller von Laserscannern etabliert. Dies sind u.a. die Firmen Callidus Precision Systems GmbH, LEICA, Mensi und Riegl. Eine Zusammenstellung findet sich z.B. in [KERN 2003].

3.1.5 Gegenüberstellung

Bei der Anwendung der verschiedenen Aufnahmesysteme zur Objekterfassung müssen Aufwand und Zweck im Einklang stehen. So sind Handaufmaß und Tachymeteraufnahme zu favorisieren, wenn einzelne Objektpunkte attributiert erfasst werden sollen. Bei großräumigen und detaillierten Erfassungen sind die Massenaufnahmeverfahren Photogrammetrie und Laserscanning von Vorteil.

Die photogrammetrische Aufnahme besitzt orthogonal zur Aufnahmerichtung eine höhere Auflösung als der Laserscanner. Die Entfernungsbestimmung ist im photogrammetrischen Verfahren wegen der ungünstigen schiefen Schnitte schlechter als die direkte Entfernungsmessung des Laserscannings (Abbildung 3.3). Im photogrammetrischen Erfassungsverfahren müssen die Objektpunkte zur dreidimensionalen Punktbestimmung in mindestens zwei Bildern eindeutig identifiziert werden, was auf unstrukturierten und farbgleichen Oberflächen schwierig ist. Das direkte Messverfahren macht die Entfernungsmessung des Laserscanners im Vergleich zur photogrammetrischen Entfernungsbestimmung durch Strahlenschnitt weitestgehend entfernungsunabhängig. Die Aufnahmegeschwindigkeit des Laserscanners reicht wegen der seriellen Erfassungsweise nicht an die parallel erfassende photogrammetrische Aufnahme heran.

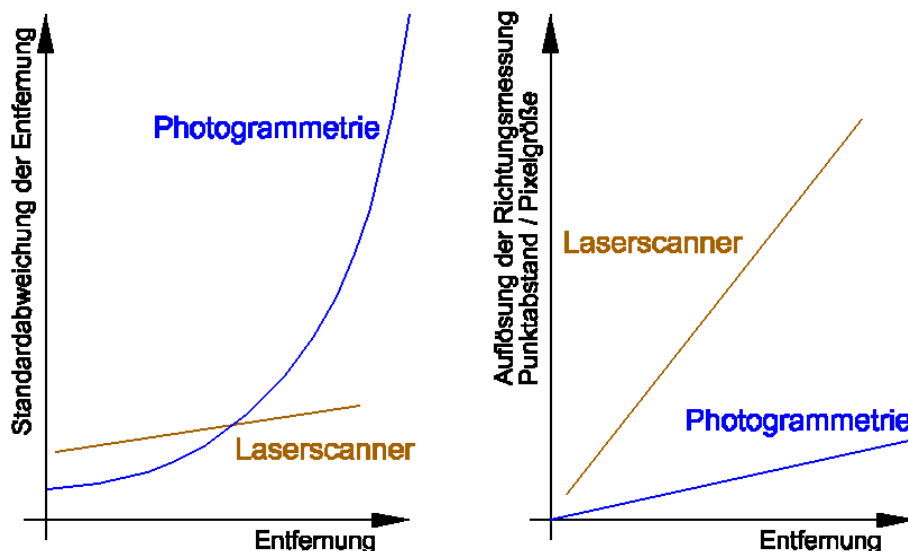


Abbildung 3.3: Genauigkeit der Aufnahmeverfahren in Längsrichtung und Auflösung in Querrichtung.
Aus: [BECKER, BENNING & EFFKEMANN 2004].

Für die Auswertung der Aufnahmen ist eine möglichst anschauliche Visualisierung im Auswertesystem erforderlich. Eine Aufnahme, sei es die Punktwolke der Laserscanneraufnahme oder seien es die Bildpunkte der photogrammetrischen Aufnahme, wird durch Schattierung und/oder Farbgebung der Punkte für den Betrachter anschaulich und interpretierbar. Die Grauwert- bzw. Farbwertstufen der photogrammetrischen Aufnahme sind wesentliche attributive Bestandteile. Laserscanner liefern dagegen lediglich Intensitätsmessungen des zurückkehrenden Impulssignals.



Abbildung 3.4: Riegl-Scanner LMS-Z420i mit aufgesetzter Kamera Nikon D100

Die aufnahme- und auswertespezifischen Vorteile von Laserscanning bzw. Photogrammetrie können durch die Kombination beider Systeme bei der Objektaufnahme und -auswertung optimal genutzt werden. Der Hersteller RIEGL hat seinen Laserscanner hierzu mit einer hochauflösenden photogrammetrischen Kamera bestückt (Abbildung 3.4, Tabellen 3.1 und 3.2).

Modellbezeichnung	RIEGL LMS-Z420i
Scanbereich horizontal	360°
Schrittweite horizontal	min. 0.008°
Scanbereich vertikal	80°
Schrittweite vertikal	min. 0.010°
Streckenmessgenauigkeit	+/- 10 mm (Einzelmessung)
Datenrate	8000 Punkte / Sekunde
Winkelauflösung horiz. in 10 m Entf. bei Schrittweite von 0.1°	17 mm

Tabelle 3.1: Eigenschaften des 3D Laserscanners

Modellbezeichnung	Nikon D100
Anzahl Pixel	3008 x 2000
Sensorgroße	23,46 mm x 15,6 mm
Pixelgröße des Bildsensors	7,8 µm
Objektiv	20 mm Festbrennweite
Pixelgröße in 10 m Entfernung	4 mm

Tabelle 3.2: Eigenschaften der Digitalkamera

Aus den Tabellen wird ersichtlich, dass bei akzeptablen Messzeiten von unter 5 Minuten (Schrittweite von $0,1^\circ$ statt der minimal möglichen von $0,008^\circ$ bzw. $0,01^\circ$) pro Standpunkt für die serielle Scannermessung die Bildauflösung mit 4 mm um den Faktor 4,25 besser ist als die Auflösung der Punktwolke mit 17 mm. Die Detailerkennbarkeit im Digitalbild kann durch Verwendung von Objektiven mit längeren Brennweiten noch gesteigert werden. Die Kopplung der Kamera mit dem Scanner hat den Vorteil, dass sich die Orientierungsdaten der photogrammetrischen Aufnahmen wegen der festen gegenseitigen Orientierung zwischen Scanner und Kamera automatisch mit der Orientierungsberechnung für die Punktwolken ergeben. Die bei freihändigen Aufnahmen notwendigen Bildpunktmessungen und Orientierungsberechnungen können entfallen.

3.2 Objektmodellierung

Objekte der realen Welt werden in CAD-Systemen durch geometrische Primitive repräsentiert. Die Primitive müssen das Objekt im für den Erfassungszweck ausreichenden Maß approximieren. Dreidimensionale Objekte, z.B. Baukörper, lassen sich in Modellen unterschiedlicher Dimensionen modellieren [BILL & FRITSCH 1999, BRÖKER, NÜBEL, BERNREUTHER & FIRMENICH 2002].

3.2.1 Volumenmodell

Die Räumlichkeit von z.B. baulichen Anlagen legt die Modellierung durch ein Volumenmodell nahe. Der Gesamtkörper wird aus Teilkörpern zusammengesetzt. Man denke an vielfach realisierte Bauklötzchenmodelle von Innenstädten oder Gebäudeensemble aus Holz oder anderen Materialien (Abbildung 3.5). Sie dienen z.B. der Beurteilung geplanter Bauvorhaben in die bestehende Stadt hinsichtlich ihrer gestalterischen Wirkung. Die Modelle werden aus dreidimensionalen Werkstücken zusammengesetzt.

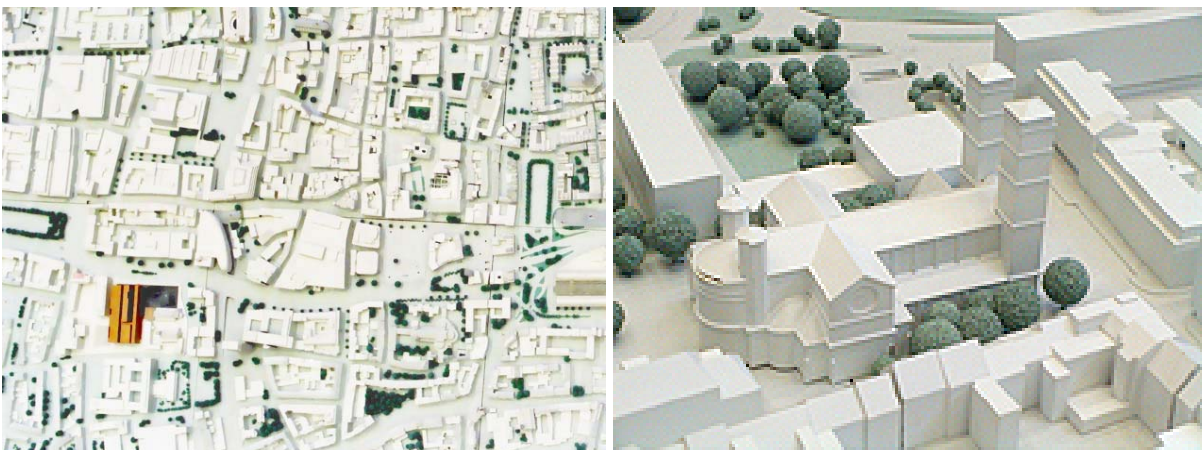


Abbildung 3.5: **kölnerstadtmodell**, Copyright: 2001 by Initiative Kölner Stadtmodell

a) Draufsicht: Altstadt - zwischen Appelhofplatz
und Gürzenich

b) Detail: Neu St. Heribert 1891-1896

3.2.1.1 Generierung

Die Modellierung in digitalen Auswertesystemen erfolgt anhand einer Anzahl von Körperprimitivtypen wie Quader, Pyramide, Prisma, Kugel, Kegel, Ellipsoid und Torus. Jedes Körperprimitiv ist definiert durch eine Anzahl von Formparametern in einem körpereigenen Koordinatensystem. Ein Quader wird beispielsweise durch drei Seitenlängen, ein Zylinder durch den Radius und die Länge vollständig und eindeutig beschrieben. Durch Positionsparameter in Form eines Translationsvektors und Rotationsparameter z.B. in Form einer Rotationsmatrix ist die Lage des Körperprimitivs im Raum eindeutig bestimmt. Translationsvektor und Rotationsmatrix bilden eine Transformation zwischen einem globalen und dem körpereigenen Koordinatensystem. Durch die mengentheoretischen Operationen „Vereinigung“, „Durchschnitt“ und „Differenz“ werden aus den Körperprimitiven komplexe Körper gebildet [BRÖKER, NÜBEL, BERNREUTHER & FIRMENICH 2002].

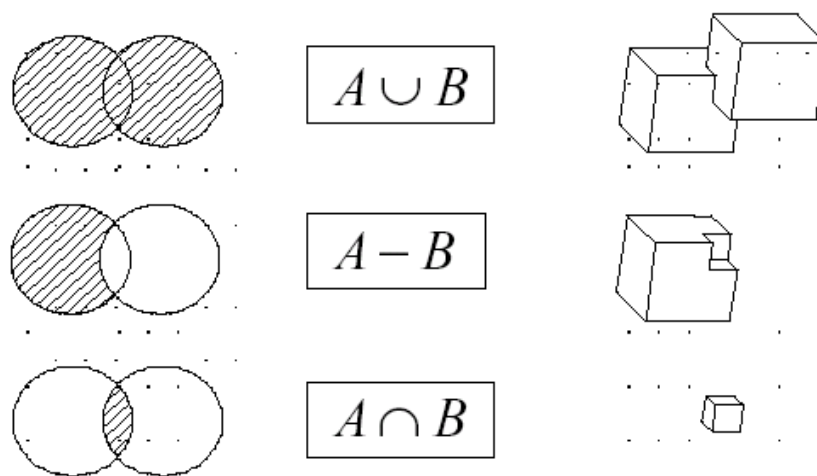


Abbildung 3.6: Anwendung mengentheoretischer Operationen.
Aus: [BRÖKER, NÜBEL, BERNREUTHER & FIRMENICH 2002].

Volumenelemente lassen sich auch auf der Grundlage ebener Flächen durch Extrusion generieren. Die ebene Fläche wird um einen festgelegten Betrag entlang einer vorgegebenen Kurve bewegt. Der überstrichene Raum bildet den generierten Körper.

3.2.1.2 Datenstruktur

Zur Speicherung der Volumenelemente existieren unterschiedliche Techniken [BRÖKER, NÜBEL, BERNREUTHER & FIRMENICH 2002].

3.2.1.2.1 Vollkörpermodell

Den Körperprimitiven am nächsten kommt die „Vollkörpermodell“ oder „Constructive Solid Geometry“ (CSG) genannte Technik. Transformations- und Formparameter der einzelnen Körperprimitive (Abbildung 3.7) werden gespeichert.

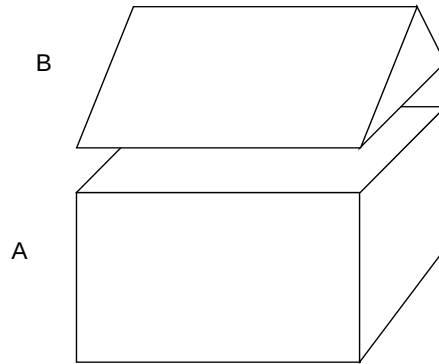


Abbildung 3.7: Vollkörpermodell eines Hauses

Zur Speicherung von komplexen Körpern, die durch mengentheoretische Operationen entstanden sind, wird eine baumartige Datenstruktur, ein CSG-Baum, verwandt (Abbildung 3.8). An den Enden des CSG-Baums befinden sich die Basiskörperprimitive. Die Knoten stellen die auf die Körper angewandten mengentheoretischen Operationen dar. In der Baumstruktur bleibt der Bildungsprozess des komplexen Körpers erhalten.

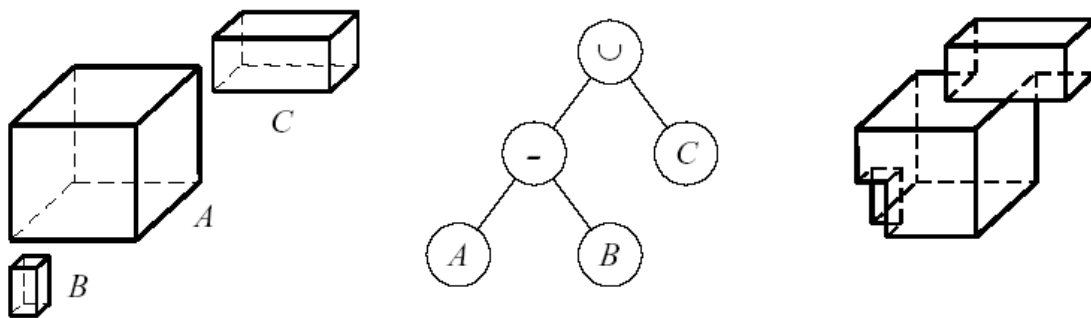


Abbildung 3.8: Datenstruktur eines CSG-Modellierers.

Aus: [BRÖKER, NÜBEL, BERNREUTHER & FIRMENICH 2002].

a) Basiskörper

b) CSG-Baum

c) Evaluierung

3.2.1.2.2 Randflächenmodell

Beim Randflächenmodell oder Boundary Representation Modellierer (BREP) wird der Körper zur Speicherung in seine begrenzenden Oberflächen zerlegt. Jede Oberfläche muss mit einer Zugehörigkeitsinformation zu einem Körper und einer Orientierungsinformation bezüglich Innen- bzw. Außenseite des Körpers ausgestattet sein. Jeder Körper muss seine Oberflächenelemente kennen (topologische Information). Die Repräsentation der Oberflächen im Raum entspricht bis auf die Orientierungsinformation derjenigen im Flächenmodell (vgl. Abschnitt 3.2.2). Die geometrische Information der einzelnen Oberflächenstücke beinhaltet Lage- und Formparameter.

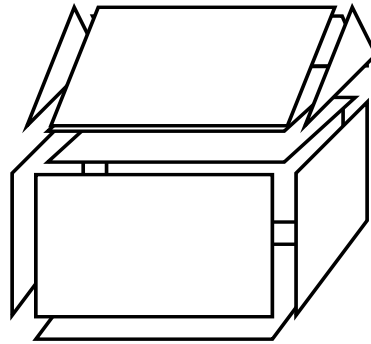


Abbildung 3.9: Randflächenmodell eines Hauses. Aus: [BILL & FRITSCH 1999].

3.2.1.2.3 Zellmodell

Der Zellmodellierer teilt den Raum in inhaltsgleiche, regelmäßig angeordnete Zellen (Voxel) in Form von Kuben auf. Die Seitenlängen hängen von der gewünschten Auflösung ab. Die Zellen werden gemäß Zugehörigkeit bzw. Nicht-Zugehörigkeit zum ursprünglich parametrisierten Körper binär kodiert. Die anfallende Datenmenge kann durch Speicherung in einer Octree-Datenstruktur reduziert werden.

3.2.2 Flächenmodell

Im Flächenmodell werden Objekte im Raum durch parametrisierte Flächen beschrieben [BILL & FRITSCH 1999, BRÖKER, NÜBEL, BERNREUTHER & FIRMENICH 2002]. Zweidimensionale Flächen im Raum können z.B. die Außenhüte von Modellen von Fahr- oder Flugzeugen oder die Modellierung einer Geländeoberfläche sein. Hierbei ist die innere Struktur des Körpers - Flugzeug bzw. Erdinneres - nicht von Interesse. Das Flächenmodell zeichnet sich dadurch aus, dass lediglich Flächen definiert werden. Die Flächen können topologische Beziehungen eingehen. Informationen zur Zugehörigkeit zu einem Körper sind nicht zulässig. Benachbarte Flächen können - ohne es zu wissen - Körper bilden, wenn in den Nachbarschaftsbeziehungen jede Kante jeder Fläche in jedem Punkt an genau eine Nachbarfläche grenzt. Die entstehenden Gebilde sind, wie Abbildung 3.10 zeigt, nicht zwangsläufig Körper. Sie sind im Volumenmodell nicht erzeugbar. Das Flächenmodell wird analog dem Volumenmodell aus einer Anzahl von Primitiven, hier Flächenprimitive wie ebenen Vielecken, Zylinder-, Kegel- und Kugelflächen sowie Flächenpolynomen und Freiformflächen gebildet. Die Flächenprimitive werden durch Form- und Transformationsparameter eindeutig beschrieben.

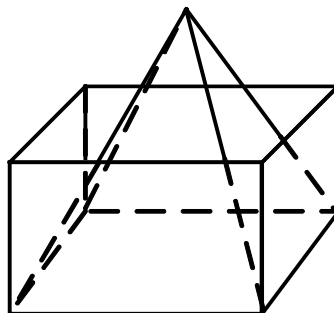


Abbildung 3.10: Beispiel für einen „Nicht-Körper“ im Flächenmodell

3.2.3 Kantenmodell

Im Kantenmodell, auch Drahtmodell genannt, wird ausschließlich mit Linienprimitiven modelliert. Den einzelnen Kanten ist nicht bekannt, zu welchen Flächen oder Körpern sie gehören. In der Folge können auch hier, will man aus Kanten Körper generieren, unsinnige bzw. nicht mögliche Körper entstehen (Abbildung 3.11).

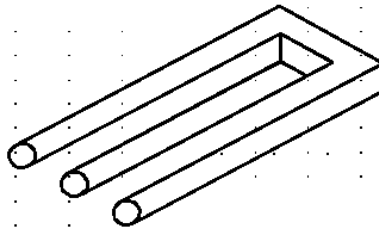


Abbildung 3.11: Beispiel für einen nicht möglichen Körper im Kantenmodell.

Aus: [BRÖKER, NÜBEL, BERNREUTHER & FIRMENICH 2002].

Die Primitive des Kantenmodells reichen vom Geradenstück über Kreis- und Ellipsenbögen bis zu den Polynomen und den Splines. Auch Kantenprimitive werden durch Form- und Transformationsparameter nach Form und Lage beschrieben.

4 Parametrisierung und Parameterschätzung

Die in den Modellen des vorigen Kapitels verwendeten Primitive sind zu parametrisieren. Hierfür ist ein geeignetes Modell aufzustellen. Die Parameterwerte sind für die einzelnen Instanzen der Primitive zu ermitteln. Liegen Beobachtungen in Form der Messdaten redundant vor, ist die Parameterschätzung ein geeignetes Mittel zur ausgleichenden Bestimmung der Parameterwerte.

4.1 Parametrisierung von Primitiven im Raum

Die Parametrisierung von Primitiven im Raum setzt sich aus Form- und Lageparameter zusammen. Im Vorgriff auf ihre spätere Verwendung werden hier die funktionalen Modelle der später benötigten Primitive beschrieben.

Flächen im Raum lassen sich durch Polynome beschreiben. Das funktionale Modell eines Polynoms n -ten Grades lautet

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x_1^i \sum_{j=0}^n \beta_j x_2^j \sum_{k=0}^n \gamma_k x_3^k = 0 \quad (4.1)$$

[WEISSTEIN 1999]. Die in Oberflächen- und Kantenmodellen gebräuchlichen Flächen und Linien lassen sich allgemein mit Polynomen der 2. Ordnung erfassen. Die Gleichung (4.1) lässt sich dann unter Verwendung einer Quadrikenmatrix $\mathbf{Q}$ und einem Quadrikenvektor $\mathbf{q}$ mit neuen Koeffizienten in der Form

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{q} + q_0 = 0 \quad (4.2)$$

mit

$$\mathbf{Q} = (q_{ij}) = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}, \quad q_{ij} = q_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.3)$$

$$\mathbf{q} = (q_i) = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.4)$$

schreiben. Ausmultipliziert erhält man

$$q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + q_{33}x_3^2 + 2q_{23}x_2x_3 + 2q_{13}x_3x_1 + 2q_{12}x_1x_2 + 2q_1x_1 + 2q_2x_2 + 2q_3x_3 + q_0 = 0. \quad (4.5)$$

Durch Koeffizientenvergleich lässt sich der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten α_i , β_j , γ_k in (4.1) und den Quadriken q_{ij} , q_k , $i, j = 1, 2, 3$, $k = 0, 1, 2, 3$ herstellen.

Die entstehenden Flächen werden wegen der 2. Ordnung des Polynoms quadratisch genannt. Alle Flächen und Linien sind echte oder degenerierte Kegel. Sie entstehen durch entsprechende Festlegung der Quadriken q_{ij} , q_i und q_o . Beispiele für u.a. Kreis und Ellipse zeigt Abbildung 4.1.

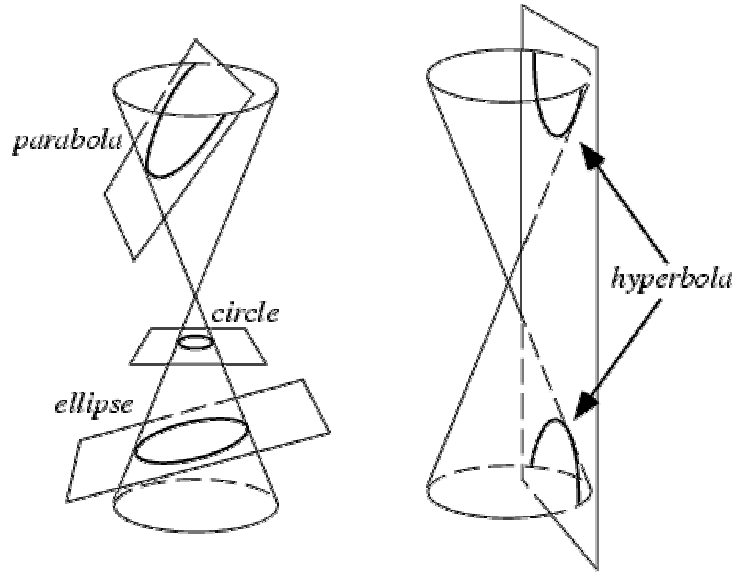


Abbildung 4.1: Conic Section. Aus: <http://mathworld.wolfram.com/ConicSection.html>.

Zylinderflächen besitzen einen konstanten, Ebenen einen unendlich großen Radius. Die Vorteile einer solchen Modellierung sind gemäß [FOLEY & VAN DAM 1996], dass Normalenbestimmungen für unterschiedliche Primitive und Schnitte zwischen verschiedenen Flächentypen in demselben funktionalen Modell durchführbar sind. Dennoch ist es bei der Behandlung spezieller, im Rechenablauf bekannter Primitive sinnvoll, das allgemeine Quadrikenmodell in elementspezifische Modelle zu überführen, um den Modellierungs- und Rechenaufwand zu vermindern.

4.1.1 Zylinderflächen

Die Oberfläche des senkrechten Zylinders besitzt unter Verwendung des Radius $r = r_1 = r_2$ als Formparameter in einem kartesischen Koordinatensystem $\bar{S}$, dessen x_3 -Achse der Zylinderachse entspricht, die Gleichung

$$\frac{x_1^2}{r_1^2} + \frac{x_2^2}{r_2^2} - 1 = \bar{\mathbf{x}}^T \begin{bmatrix} 1/r_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} - 1 = 0 \quad (4.6)$$

(Abbildung 4.2). Durch Koeffizientenvergleich mit (4.2) erhält man für die Quadriken des Kreiszylinders ($r = r_1 = r_2$) im System $\bar{S}$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad \bar{q}_o = -1. \quad (4.7)$$

Unter Berücksichtigung der Transformationsparameter zur Lagedefinition (2.16) folgt im System S

$$\bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{x}} - 1 = (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})^T \bar{\mathbf{Q}} (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}) - 1 = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{A} \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{b} - 1 = 0 \quad (4.8)$$

mit den Quadriken

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} & a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} & a_{12}^2 + a_{22}^2 & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} \\ a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} & a_{13}^2 + a_{23}^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{b} = \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{21}b_2 \\ a_{12}b_1 + a_{22}b_2 \\ a_{13}b_1 + a_{23}b_2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad q_0 = \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{b} - 1 = \frac{b_1^2 + b_2^2}{r^2} - 1. \quad (4.9)$$

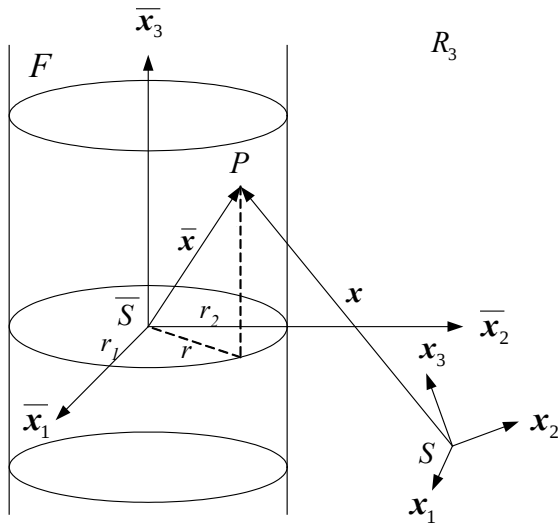


Abbildung 4.2: Parametrisierung 1 der Zylinderfläche

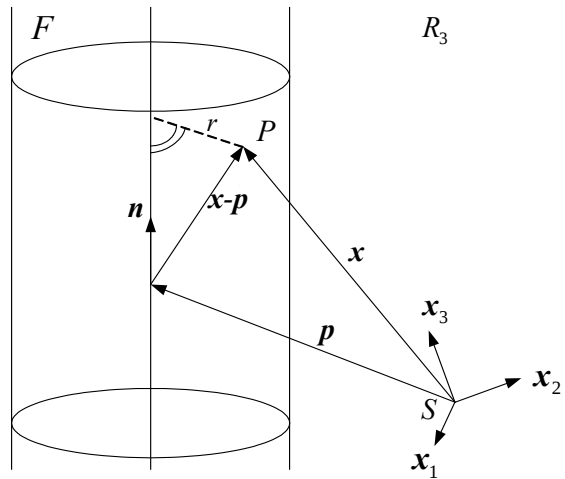


Abbildung 4.3: Parametrisierung 2 der Zylinderfläche

Der Kreiszylinder lässt sich alternativ durch einen Punkt $\mathbf{p}$ auf der Zylinderachse, die Richtung der Zylinderachse $\mathbf{n}$, $|\mathbf{n}| = 1$, und den Radius r parametrisieren (Abbildung 4.3). Der Punkt $\mathbf{p}$ und die Richtung $\mathbf{n}$ besitzen jeweils lediglich zwei unabhängige Werte. Umgesetzt in eine Gleichung gilt

$$\begin{aligned} |(\mathbf{x} - \mathbf{p})|^2 &= r^2 + ((\mathbf{x} - \mathbf{p}) \mathbf{n})^2 \\ \Leftrightarrow |(\mathbf{x} - \mathbf{p})|^2 &= r^2 + (\mathbf{x}\mathbf{n} - \mathbf{p}\mathbf{n})^2 \\ \Leftrightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{x} - 2\mathbf{x}\mathbf{p} - \mathbf{p}^T \mathbf{p} &= r^2 + (\mathbf{x}\mathbf{n})^2 - 2(\mathbf{x}\mathbf{n})(\mathbf{p}\mathbf{n}) + (\mathbf{p}\mathbf{n})^2 \\ \Leftrightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{p} - \mathbf{p}^T \mathbf{p} &= r^2 + \mathbf{x}^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{p} - \mathbf{p}^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{p} \\ \Leftrightarrow \mathbf{x}^T (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T (-\mathbf{p} + \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{p}) - \mathbf{p}^T \mathbf{p} - r^2 &+ \mathbf{p}^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{p} = 0 \\ \Leftrightarrow \mathbf{x}^T (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T (-\mathbf{I} + \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \mathbf{p} - \mathbf{p}^T (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \mathbf{p} - r^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man für die Quadriken

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1-n_1^2 & -n_1n_2 & -n_1n_3 \\ -n_1n_2 & 1-n_2^2 & -n_2n_3 \\ -n_1n_3 & -n_2n_3 & 1-n_3^2 \end{bmatrix} = \mathbf{I} - \mathbf{nn}^T, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -p_1 + n_1(\mathbf{np}) \\ -p_2 + n_2(\mathbf{np}) \\ -p_3 + n_3(\mathbf{np}) \end{bmatrix} = (-\mathbf{I} + \mathbf{nn}^T)\mathbf{p}, \quad (4.11)$$

$$q_0 = -\mathbf{p}^T(\mathbf{I} - \mathbf{nn}^T)\mathbf{p} - r^2.$$

Für einen Zylinder mit der Achse in Richtung der positiven x_3 -Achse (System $\bar{S}$), also

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

geht (4.11) nach Multiplikation mit r^{-2} über in die Quadriken im System $\bar{S}$ (4.7).

4.1.2 Ebenen

Die zur x_1x_2 -Ebene mit dem Abstand c parallele Ebene wird durch die Gleichung

$$\bar{x}_3^2 = c^2 \Leftrightarrow \frac{\bar{x}_3}{c} - 1 = \bar{\mathbf{x}}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/c \end{bmatrix} - 1 = 0 \quad (4.13)$$

beschrieben. Durch Koeffizientenvergleich mit (4.2) erhält man für die Quadriken der Ebene im System $\bar{S}$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{q}} = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ und } \bar{q}_0 = -1. \quad (4.14)$$

Unter Berücksichtigung der Transformationsparameter zur Lagedefinition (2.16) folgt

$$\bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{q}} - 1 = (\mathbf{Ax} + \mathbf{b})^T \bar{\mathbf{q}} - 1 = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{q}} - 1 = 0 \quad (4.15)$$

mit den Quadriken

$$\mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q} = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} \text{ und } q_0 = \frac{b_3}{c} - 1. \quad (4.16)$$

Unter Verzicht auf die Quadriken mit dem Wert Null erhält man aus (4.2) allgemein für die Gleichung einer Ebene

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} + q_0 = 0. \quad (4.17)$$

Mit der Bedingung

$$\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = 1 \quad (4.18)$$

wird der Vektor $\mathbf{q}$ zum Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}$ normiert. q_o ist dann der Abstand d der Ebene vom Ursprung. Die Ebenengleichung lautet dann

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 - d = 0 \quad (4.19)$$

und in Vektorschreibweise

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - d = 0 \text{ mit der Bedingung } |\mathbf{n}| = 1. \quad (4.20)$$

Die Quadriken lassen sich zusammenfassen zu

$$\mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{n}, \quad q_o = -d. \quad (4.21)$$

Der gerichtete Abstand d ist das Skalarprodukt eines beliebigen Ortsvektors $\mathbf{x}_o$ der Ebene mit dem Normalenvektor, also

$$d = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_o. \quad (4.22)$$

Man erhält dann aus (4.20) die Darstellung

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_o = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) = 0. \quad (4.23)$$

4.1.3 Geraden

Die Gerade im Raum genügt der Gleichung

$$q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3 + q_o = \mathbf{q} \cdot \mathbf{x} + q_o = 0 \quad (4.24)$$

mit den Quadriken

$$\mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \text{ und } q_o = c. \quad (4.25)$$

Für die Gerade in der $x_1 x_2$ -Ebene folgt mit $q_3 = 0$ die Gleichung

$$q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_o = \mathbf{q} \cdot \mathbf{x} + q_o = 0 \quad (4.26)$$

mit den Quadriken

$$\mathbf{Q} = \mathbf{0}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ und } q_0 = c. \quad (4.27)$$

Umgestellt erhält man die Beziehung

$$x_2 = -\frac{q_1 x_1 + q_0}{q_2} =: m x_1 + b \quad (4.28)$$

mit der Steigung m und dem Achsenabschnitt b .

4.1.4 Ellipsen

Die Ellipse in der $x_1 x_2$ -Ebene mit dem Mittelpunkt auf der x_3 -Achse hat in einem kartesischen Koordinatensystem $\bar{S}$ die Gleichung

$$\frac{\bar{x}_1^2}{r_1^2} + \frac{\bar{x}_2^2}{r_2^2} - 1 = \bar{\mathbf{x}}^T \begin{bmatrix} 1/r_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} - 1 = 0, \quad x_3 = 0. \quad (4.29)$$

Durch Koeffizientenvergleich mit (4.2) lauten die Quadriken der Ellipse im System $\bar{S}$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 1/r_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \text{ und } \bar{q}_0 = -1. \quad (4.30)$$

Unter Berücksichtigung der Transformationsparameter zur Lagedefinition (2.16) folgt im System S

$$\bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{x}} - 1 = (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})^T \bar{\mathbf{Q}} (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}) - 1 = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{A} \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{b} - 1 = 0 \quad (4.31)$$

für die Quadriken

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}^2/r_1^2 + a_{21}^2/r_2^2 & a_{11}a_{12}/r_1^2 + a_{21}a_{22}/r_2^2 & a_{11}a_{13}/r_1^2 + a_{21}a_{23}/r_2^2 \\ a_{11}a_{12}/r_1^2 + a_{21}a_{22}/r_2^2 & a_{12}^2/r_1^2 + a_{22}^2/r_2^2 & a_{12}a_{13}/r_1^2 + a_{22}a_{23}/r_2^2 \\ a_{11}a_{13}/r_1^2 + a_{21}a_{23}/r_2^2 & a_{12}a_{13}/r_1^2 + a_{22}a_{23}/r_2^2 & a_{13}^2/r_1^2 + a_{23}^2/r_2^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1/r_1^2 + a_{21}b_2/r_2^2 \\ a_{12}b_1/r_1^2 + a_{22}b_2/r_2^2 \\ a_{13}b_1/r_1^2 + a_{23}b_2/r_2^2 \end{bmatrix} \text{ und } q_0 = \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{b} - 1 = \frac{b_1^2}{r_1^2} + \frac{b_2^2}{r_2^2} - 1. \quad (4.32)$$

4.2 Parameterschätzung und Ausreißerelimination

Die Parameterschätzung dient der Ermittlung der unbekannten Parameter der modellierten Primitive auf der Grundlage gegebener Beobachtungen. Ausreißer in den Beobachtungen verfälschen die Schätzung der Parameter und müssen deshalb mit geeigneten Verfahren identifiziert und eliminiert werden.

4.2.1 Ausgleichung im Gauß-Markoff-Modell

Die Ausgleichungsrechnung im Gauß-Markoff-Modell ist eine statistische Form der Parameterschätzung. Sie beruht auf der Methode der kleinsten Quadrate, d.h. die Quadratsumme der Abweichungen e_i der Beobachtungen y_i von den Schätzwerten $s(E(y_i))$ ihrer Erwartungswerte $E(y_i)$ soll minimiert werden. Fasst man die Beobachtungen y_i in einem Vektor $\mathbf{y}$ und die auch Verbesserungen genannten Abweichungen e_i in einem Vektor $\mathbf{e}$ zusammen, so muss

$$(\mathbf{y} - s(E(\mathbf{y})))^T (\mathbf{y} - s(E(\mathbf{y}))) = \mathbf{e}^T \mathbf{e} = \text{Min.} \quad (4.33)$$

sein [KOCH 1987]. Setzt man zusätzlich eine Kovarianzmatrix $D(\mathbf{y})$ an, die der Inversen einer Gewichtsmatrix P entspricht, geht man zu

$$(\mathbf{y} - s(E(\mathbf{y})))^T P (\mathbf{y} - s(E(\mathbf{y}))) = \mathbf{e}^T P \mathbf{e} = \text{Min.} \quad (4.34)$$

über. Die Erwartungswerte $E(y_i)$ der Beobachtungen y_i sind Funktionen $f_i(\boldsymbol{\beta})$ der zu schätzenden, unbekannten Parameter $\boldsymbol{\beta}_j$. Die Beobachtungen y_i unterscheiden sich von den Funktionen $f_i(\boldsymbol{\beta})$, und zwar um die Verbesserungen e_i . Man schreibt

$$f_i(\boldsymbol{\beta}) = y_i + e_i. \quad (4.35)$$

Das Gauß-Markoff-Modell ist definiert durch die Gleichung

$$X\boldsymbol{\beta} = E(\mathbf{y}) \quad \text{mit} \quad D(\mathbf{y}) = \sigma^2 P^{-1}. \quad (4.36)$$

Es werden lediglich Linearkombinationen der unbekannten Parameter zugelassen. Die Funktion der Parameter muss, sofern sie nicht bereits linear ist, durch eine linearisierte Form, eine nach den linearen Gliedern abgebrochene Taylorreihe,

$$f_i(\boldsymbol{\beta}) \approx f_i(\boldsymbol{\beta}_o) + \sum_j (\partial f_i / \partial \beta_j) \Delta \beta_j = f_i(\boldsymbol{\beta}_o) + (X \Delta \boldsymbol{\beta})_i \quad (4.37)$$

und umgestellt

$$\Delta y_i := f_i(\boldsymbol{\beta}) - f_i(\boldsymbol{\beta}_o) \approx X \Delta \boldsymbol{\beta} \quad (4.38)$$

mit

$$X := (\partial f_i / \partial \beta_j). \quad (4.39)$$

approximiert werden. Zu schätzen sind die Zuschläge $\Delta\beta$, so dass der Beobachtungsvektor y um seine rechnerische Näherungslösung $y_o = f(\beta_o)$ vermindert werden kann. Als Parametervektor β in (4.36) wird der Vektor der Zuschläge $\Delta\beta$ eingeführt:

$$X \Delta\beta = E(\Delta y) \quad \text{mit} \quad D(y) = D(\Delta y) = \sigma^2 P^{-1}. \quad (4.40)$$

Die Erwartungswerte für die Beobachtungen unterscheiden sich von den Beobachtungen um die Verbesserungen e_i , so dass (4.36) und (4.40) in

$$X\beta = y + e \quad \text{mit} \quad D(y) = D(e) = \sigma^2 P^{-1} \quad \text{und} \quad E(e) = 0 \quad (4.41)$$

bzw.

$$X \Delta\beta = \Delta y + e \quad \text{mit} \quad D(y) = D(e) = \sigma^2 P^{-1} \quad \text{und} \quad E(e) = 0 \quad (4.42)$$

übergehen. Eingesetzt in die Minimumbedingung (4.34) erhält man

$$(\Delta y - X \Delta\beta)^T P (\Delta y - X \Delta\beta) = \text{Min}. \quad (4.43)$$

Durch Differentiation nach den zu schätzenden unbekannten Parametern $\Delta\beta$

$$\partial((\Delta y - X \Delta\beta)^T P (\Delta y - X \Delta\beta)) / \partial \beta = -2X^T P \Delta y + 2X^T P X \Delta\beta = 0 \quad (4.44)$$

folgt die Schätzung für die Zuschläge der unbekannten Parameter

$$\Delta\hat{\beta} = (X^T P X)^{-1} X^T P \Delta y. \quad (4.45)$$

Durch Addition zu den Näherungswerten erhält man die unbekannten Parameter

$$\hat{\beta} = \beta_o + \Delta\hat{\beta}. \quad (4.46)$$

Die Schätzwerte für die Verbesserungen (Residuen) e_i sind nach (4.42)

$$\hat{e} = X \Delta\hat{\beta} - \Delta y. \quad (4.47)$$

Den Schätzwert für die Varianz der Gewichtseinheit oder Residuenvarianz [BENNING 2002] erhält man mit

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{e}^T P \hat{e}}{n - u}, \quad (4.48)$$

worin n die Anzahl der Beobachtungen und u die Anzahl der Unbekannten ist. Die Kovarianzmatrix der unbekannten Parameter ist aufgrund des Varianzfortpflanzungsgesetzes, angewandt auf (4.45),

$$D(\hat{\beta}) = D(\Delta\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2 (X^T P X)^{-1}. \quad (4.49)$$

Die Schätzwerte für die Erwartungswerte der Beobachtungen sind wegen (4.42)

$$\hat{y} = y_o + \Delta\hat{y} = y + \hat{e} \quad \text{mit} \quad \Delta\hat{y} = \Delta y + \hat{e} \quad (4.50)$$

und deren Kovarianzmatrix

$$D(\hat{y}) = D(\Delta\hat{y}) = \hat{\sigma}^2 X (X^T P X)^{-1} X^T. \quad (4.51)$$

Die Kovarianzmatrix der Verbesserungen ist

$$D(\hat{e}) = \hat{\sigma}^2 Q_{\hat{e}} = \hat{\sigma}^2 (P^{-1} - X (X^T P X)^{-1} X^T). \quad (4.52)$$

Die normierte Verbesserung erhält man durch die Division

$$\hat{e}_{N,i} = \frac{\hat{e}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{e}_i}}. \quad (4.53)$$

Die Redundanzanteile der einzelnen Beobachtungen sind die Hauptdiagonalelemente der Matrix

$$R = Q_{\hat{e}} P. \quad (4.54)$$

Bei nichtlinearen Beobachtungsgleichungen wird wegen der Approximation (4.37) nur eine Näherungslösung erzielt. Die Näherungslösung muss in iterativer Vorgehensweise sukzessive verbessert werden, bis die Konvergenz einen festgelegten Grenzwert unterschreitet.

Man nennt das Modell „Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen“ [WOLF 1968], [KOCH 1987], weil in den Beobachtungsgleichungen nur jeweils eine Verbesserung vorkommt.

4.2.2 Ausgleichung von Flächen 2. Ordnung

Für Flächen 2. Ordnung können die Gleichungen in der Quadrikenform (4.2) als Beobachtungsgleichungen eingeführt werden. Jedes Koordinatentripel x der Scannerpunkte liefert drei Beobachtungen in Form der drei Koordinatenwerte x_1, x_2, x_3 . Jede der Flächengleichungen ist Funktion der unbekannten Flächenparameter und der drei Beobachtungen eines Koordinatentripels und enthält je drei Verbesserungswerte e_1, e_2, e_3 . Durch Einführung einer Funktion der Komponenten eines Koordinatentripels $f(x_1, x_2, x_3)$ als Beobachtung mit einer entsprechenden Funktionsverbesserung e lassen sich die Flächengleichungen in ein Modell der quasivermittelnden Beobachtungen überführen [WOLF 1968], das dann wie das Modell der vermittelnden Beobachtungen behandelt werden kann.

Ziel ist es, die Quadratsumme der orthogonalen Punktabstände von der gesuchten Fläche

$$\sum_i (e_i)^2 \quad (4.55)$$

zu minimieren. Als Beobachtungen werden die Abstände der Scannerpunkte zu der gesuchten Fläche in das Ausgleichungsmodell eingeführt. Teilt man die Punktkoordinaten eines Punktes $P_i: \mathbf{x}_i(x_1, x_2, x_3)$ in die Beobachtungen $\mathbf{x}_i$ und Verbesserungen $\mathbf{e}_{x_i}$ auf, erhält man aus (4.2) für jeden Scannerpunkt P_i eine Gleichung

$$(\mathbf{x}_i + \mathbf{e}_{x_i})^T \mathbf{Q}(\mathbf{x}_i + \mathbf{e}_{x_i}) + (\mathbf{x}_i + \mathbf{e}_{x_i})^T \mathbf{q} + q_0 = 0 \quad (4.56)$$

[KAMPMANN & RENNER 1998] und nach Ausmultiplikation

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_i^T \mathbf{q} + q_0 + \mathbf{e}_{x_i}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{x_i} + 2\mathbf{x}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{x_i} + \mathbf{e}_{x_i}^T \mathbf{q} = 0. \quad (4.57)$$

Unter Einführung der rechten Seiten der Gleichungen als Quasibeobachtungen

$$y_i = 0 \quad (4.58)$$

und den Zusammenfassungen

$$\mathbf{e}_i := -(\mathbf{e}_{x_i}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{x_i} + 2\mathbf{x}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{x_i} + \mathbf{e}_{x_i}^T \mathbf{q}) = -((\mathbf{e}_{x_i}^T + 2\mathbf{x}_i^T) \mathbf{Q} \mathbf{e}_{x_i} + \mathbf{e}_{x_i}^T \mathbf{q}) \quad (4.59)$$

als zugehörigen Verbesserungen [KAMPMANN & RENNER 2004] erhält man aus (4.57)

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_i^T \mathbf{q} + q_0 = y_i + \mathbf{e}_i. \quad (4.60)$$

Mit der Zusammenfassung der unbekannten Parameter in Form der Quadriken im Parametervektor $\boldsymbol{\beta}$ lässt sich die linke Seite der Gleichung (4.60) als Funktion

$$f_i(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{x}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_i^T \mathbf{q} + q_0 \quad (4.61)$$

von $\boldsymbol{\beta}$ schreiben, so dass die Gleichung (4.60) die allgemeine Form der Beobachtungsgleichung (4.35)

$$f_i(\boldsymbol{\beta}) = y_i + \mathbf{e}_i \quad (4.62)$$

erhält. Bei Verwendung der Quadriken als unbekannte Parameter ist die Funktion f_i bereits linear, so dass man mit der Koeffizientenmatrix $\mathbf{X}$ das Modell (4.41)

$$\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{y} + \mathbf{e} \quad (4.63)$$

aufstellen kann. Ersetzt man die Quadriken durch Funktionen anderer unbekannter Parameter zur Beschreibung der Fläche, so kann die Beobachtungsgleichung nichtlinear bezüglich der unbekannten Parameter sein. Zur Einführung in ein Gauß-Markoff-Modell ist in diesem Fall eine Linearisierung in Form der Taylorentwicklung (4.37) durchzuführen, die zur Aufteilung der unbekannten Quadriken in eine Näherungslösung

$$y_{i,o} = f_i(\boldsymbol{\beta}_o) = \mathbf{x}_i^T (\mathbf{Q})_o \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_i^T (\mathbf{q})_o + (q_0)_o \quad (4.64)$$

und Zuschläge

$$(X \Delta \beta)_i = \sum_j (\partial f_i / \partial \beta_j) \Delta \beta_j \quad (4.65)$$

führt. Mit Einführung der Differenz

$$\Delta y_i = y_i - y_{i,o} \quad (4.66)$$

als neuer Beobachtung im linearisierten Modell, erhält man – (4.42) entsprechend – für linearisierte Beobachtungsgleichungen unter Berücksichtigung von (4.58) die Form

$$X \Delta \beta = \Delta y + e = -y_o + e \quad (4.67)$$

im Gauß-Markoff-Modell der quasivermittelnden Beobachtungen. Nach jeder Iteration erhält man gemäß (4.46) einen neuen Vektor der Näherungswerte.

4.2.2.1 Ebene

Für die Ebene wird von der Darstellung (4.20) ausgegangen. Mit den Quadriken (4.21) erhält man mit dem Vektor der unbekannten Zuschläge

$$\Delta \beta = (\Delta n_1 \quad \Delta n_2 \quad \Delta n_3 \quad \Delta d)^T \quad (4.68)$$

in (4.67) für die Matrix

$$X = (\partial f_i / \partial \beta_j) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i,1} & x_{i,2} & x_{i,3} & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \quad (4.69)$$

für den Vektor (4.66)

$$\Delta y_i = -f_i(\beta_o) = -(n_o x_i - d_o), \quad (4.70)$$

und mit (4.59) für den Vektor der Verbesserungen

$$e_i = -e_{x_i} n. \quad (4.71)$$

Die Parameter (4.68) sind linear abhängig. Daher muss eine Restriktionsgleichung eingefügt werden. Verwendet wird die Bedingung

$$|n| = 1 \quad (4.72)$$

aus (4.20). Während die Ebenengleichungen (4.20) bereits linear sind, muss die Restriktionsgleichung linearisiert werden. Man erhält

$$\frac{1}{|\mathbf{n}_o|} \mathbf{n}_o \Delta \mathbf{n} = 0. \quad (4.73)$$

Die Restriktion kann statt durch Aufstellung eines Modells mit Restriktionen in das Modell ohne Restriktionen eingefügt werden, wenn man die Restriktionsbeobachtung ausreichend hoch gewichtet. Die Koeffizientenmatrix lautet um eine entsprechende Zeile ergänzt

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i,1} & x_{i,2} & x_{i,3} & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{o,1}/|\mathbf{n}_o| & n_{o,2}/|\mathbf{n}_o| & n_{o,3}/|\mathbf{n}_o| & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.74)$$

Die Verbesserungen e_i (4.71) bedeuten durch die Skalarmultiplikation des geschätzten Flächennormalenvektors $\mathbf{n}$ mit den Anteilen der Verbesserungsvektoren e_{x_i} den Abstand des Scannerpunktes zur geschätzten Ebene.

4.2.2.2 Zylinderfläche

Die Gleichung der Zylinderfläche (4.10) muss linearisiert werden. Nach partieller Differentiation erhält man

$$-\mathbf{x}^T \mathbf{n}_o \Delta \mathbf{n}^T \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{n}_o \Delta \mathbf{n}^T \mathbf{p}_o + \mathbf{p}_o^T \mathbf{n}_o \Delta \mathbf{n}^T \mathbf{p}_o + \mathbf{x}^T \mathbf{n}_o \mathbf{n}_o^T \Delta \mathbf{p} - \mathbf{p}_o^T (\mathbf{I} - \mathbf{n}_o \mathbf{n}_o^T) \Delta \mathbf{p} - r_o \Delta r = 0. \quad (4.75)$$

Die Zylinderachse wird durch den Ortsvektor $\mathbf{p}$ eines darauf liegenden Punktes und ihre Richtung $\mathbf{n}$ parametrisiert. Damit ist die Achse zweifach überparametrisiert. Zur Vermeidung der Überparametrisierung können z.B. die Bedingungen $p_3 = 0$ und $|\mathbf{n}| = 1$ gesetzt werden. p_3 fällt damit als Unbekannte weg. Für die Normierung des Achsrichtungsvektors muss eine Restriktionsgleichung analog (4.72) in das Modell eingeführt werden. Damit kann die Koeffizientenmatrix $\mathbf{X}$ für den gesuchten Zuschlagsvektor

$$\Delta \boldsymbol{\beta} = (\Delta n_1 \quad \Delta n_2 \quad \Delta n_3 \quad \Delta p_1 \quad \Delta p_2 \quad \Delta r)^T \text{ mit der Bedingung } |\mathbf{n}| = 1 \quad (4.76)$$

aufgestellt werden. Man erhält im Modell (4.67) für die Beobachtungen (4.66) und die Verbesserungen (4.59)

$$\Delta y_i = -f_i(\boldsymbol{\beta}_o) = -(\mathbf{x}_i^T (\mathbf{I} - \mathbf{n}_o \mathbf{n}_o^T) \mathbf{x}_i + 2\mathbf{x}_i^T (-\mathbf{I} + \mathbf{n}_o \mathbf{n}_o^T) \mathbf{p}_o - \mathbf{p}_o^T (\mathbf{I} - \mathbf{n}_o \mathbf{n}_o^T) \mathbf{p}_o - r_o^2), \quad (4.77)$$

$$e_i = -((\mathbf{e}_{x_i}^T + 2\mathbf{x}_i^T)(\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T)\mathbf{e}_{x_i} + 2\mathbf{e}_{x_i}^T (-\mathbf{I} + \mathbf{n}\mathbf{n}^T)\mathbf{p}). \quad (4.78)$$

4.2.3 Ausreißerelimination

Zur Identifikation und Elimination einzelner Ausreißer in den Beobachtungen können entsprechende Testverfahren auf die Daten angewendet werden. Normalverteilte Beobachtungen genügen der Dichte-

funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2}, \quad (4.79)$$

kurz

$$x \sim N(\mu, \sigma^2), \quad (4.80)$$

mit dem Erwartungswert μ und der Varianz σ^2 . Wählt man den Erwartungswert zu Null und die Varianz zu Eins, erhält man die Standardnormalverteilung $z \sim N(0,1)$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2 / 2}, \quad (4.81)$$

x und z besitzen die Beziehung

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}. \quad (4.82)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable x bzw. z im Intervall $[\mu - n\sigma, \mu + n\sigma]$ bzw. $[-n, +n]$ mit dem Quantil n liegt, beträgt

$$P(\mu - n\sigma < x < \mu + n\sigma) = P(-n < z < +n) = F(+n) - F(-n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{+n} e^{-z^2 / 2} dz. \quad (4.83)$$

Für die Quantile 1, 2 und 3 ergeben sich Sicherheitswahrscheinlichkeiten $(1 - \alpha)$ von 68,3 %, 95,5 % bzw. 99,7 %. α wird die Irrtumswahrscheinlichkeit oder das Signifikanzniveau genannt [BENNING 2002]. Das Intervall $[\mu - n\sigma, \mu + n\sigma]$ ist das Konfidenzintervall. Umgekehrt führen gebräuchliche Sicherheitswahrscheinlichkeiten von 95 %, 99 % und 99,9 % zu Quantilen von 1,96, 2,58 und 3,29. Als Testgröße schlägt [BAARDA 1968] in seinem „data-snooping“ genannten Verfahren den Betrag der normierten Verbesserung (4.53) vor:

$$T_{Baarda} = \frac{|\hat{e}_i|}{\sigma_{\hat{e}_i}} = \frac{|\hat{e}_i|}{\sigma \sqrt{q_{\hat{e}_i}}}. \quad (4.84)$$

Er testet sie gegen das Quantil der Standardnormalverteilung für eine vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit. Voraussetzung ist die Kenntnis der A-priori-Standardabweichung σ . Ersetzt man die A-priori-Standardabweichung σ durch ihren erwartungstreuen Schätzwert $\hat{\sigma}$, so ist bei der Ermittlung der Testgröße die Verteilung der Summe der Quadrate der Verbesserungen (4.47) zu berücksichtigen.

Die Summe u der Quadrate standardnormalverteilter Zufallsvariablen $z \sim n(0;1)$ folgt der χ^2 -Verteilung. Unter Verzicht auf eine Gewichtung der Beobachtungen lautet sie

$$u = \sum z_i^2 = \sum \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{e}}}{\sigma^2} \sim \chi^2(f) \quad (4.85)$$

Wenn $z \sim n(0;1)$ standardnormalverteilt und $u \sim \chi^2(f)$ chiquadratverteilt mit $f = n - u$ als der Anzahl der Freiheitsgrade ist, dann ist der Quotient

$$\frac{z}{\sqrt{u/f}} \sim t(f) \quad (4.86)$$

t-verteilt [BENNING 2002]. Unter Einsetzen der normierten Verbesserung (4.53)

$$z = (x - \mu) / \sigma = \hat{e}_i / \hat{\sigma}_{\hat{e}_i} \quad (4.87)$$

folgt mit (4.48)

$$\frac{z}{\sqrt{u/f}} = \frac{\hat{e}_i}{\hat{\sigma} \sqrt{q_{\hat{e}_i}}} \sim t(f). \quad (4.88)$$

Ist die Gewichtsmatrix $\mathbf{P}$ gleich der Einheitsmatrix $\mathbf{I}$, gilt für die Redundanzanteile r_i aus (4.54)

$$r_i = (\mathbf{R})_{ii} = (\mathbf{Q}_{\hat{e}} \mathbf{I})_{ii} = q_{\hat{e}_i} \quad (4.89)$$

Für gleichgewichtete Beobachtungen schlägt [POPE 1976] vor, die Redundanzanteile r_i durch die mittlere Redundanz

$$r_M = \frac{\sum r_i}{n} = \frac{n - u}{n} \quad (4.90)$$

zu ersetzen, so dass die Testgröße für $n \gg u$ zu

$$T_i = \frac{|\hat{e}_i|}{\hat{\sigma} \sqrt{q_{\hat{e}_i}}} = \frac{|\hat{e}_i|}{\hat{\sigma} \sqrt{r_M}} \approx \frac{|\hat{e}_i|}{\hat{\sigma}} \quad (4.91)$$

übergeht. Bei Anwendung dieser Näherung sollten die Beobachtungsgleichungen gleichen Typs sowie gleichmäßig miteinander verknüpft sein [HETTWER 2003].

5 Extraktion von Flächenprimitiven

Nach der örtlichen Objekterfassung stehen zur Auswertung die dreidimensionalen Daten der Laserscannermessung - die Punktwolke - und ggf. die zweidimensionalen Daten der photogrammetrischen Aufnahmen - die Bilder - zur Verfügung. Es werden die vom jeweiligen Standpunkt aus sichtbaren Oberflächen des zu modellierenden Objekts erfasst. Die entstehenden Koordinatentripel bzw. -paare repräsentieren einzelne Punkte der Objektoberfläche im Rahmen der Genauigkeit des Aufnahmeverfahrens. Es entsteht eine einfache, unstrukturierte Beschreibung der Objektoberfläche, die in ein Modell, wie es in Abschnitt 3.2 beschrieben wurde, umzusetzen ist.

Das Objektinnere kann nicht erfasst werden. Dazu bedürfte es Verfahren wie des Röntgenverfahrens oder der Computertomographie, bei denen die Streckenmesssignale in das Objekt eindringen können. Deshalb ist es sinnvoll, das Realweltobjekt zunächst in ein Kanten- oder Oberflächenmodell abzubilden. Ein Volumenmodell kann bei der Auswertung als Zusammensetzung einzelner Oberflächen und/oder Kanten entstehen. Oberflächen wie Zylinderflächen können direkt als Volumenprimitive bestimmt werden.

Bei der Modellierung sollten die Vorteile beider Datentypen optimal genutzt werden. Entsprechende, beide Datentypen unterschiedlich intensiv und kombiniert nutzende Methoden werden in den folgenden Kapiteln vorgestellt. Während Techniken, die wie die Stereobildauswertung allein Bilddaten nutzen, hinreichend bekannt sind und genutzt werden, sind Auswertemethoden für Scannerdaten, die gegebenenfalls durch Bilddaten gestützt werden, noch weniger vertreten. Das Hauptaugenmerk soll deshalb auf Techniken zur Modellierung von Primitiven aus Scannerdaten liegen.

5.1 Gewählte Methodik

Zur Ermittlung geometrischer Zusammenhänge ist eine Interpretation der Punktwolke erforderlich. Sie ist in geometrische Elemente (Primitive) wie Punkte, Kanten und Flächen mit attributiver Information zu überführen. Die Kanten – Schnitte der Oberflächen – und Ecken – Schnitte der Kanten – sind im Modell infinitesimaler Natur. In der Realwelt sind sie wegen Abrundungen nicht wirklich existent. In einem Modell mit eindeutigen (scharfen) Kanten und Ecken grenzen die jeweils höherwertigen Primitive im Begrenzungselement aneinander. Das Begrenzungsprimitiv ist Bestandteil beider höherwertiger Primitive.

Es macht Sinn, zunächst die Oberflächen des Objekts zu extrahieren, um diese zu Kanten und Ecken zu verschneiden. Die repräsentativen Scannerpunkte der einzelnen Oberflächen sind in Punktmengen zusammenzufassen, um aus ihrer jeweiligen Gesamtheit Form- und Lageparameter von Flächenprimitiven zu berechnen. Ein an einer Kante oder Ecke gemessener Scannerpunkt sollte wegen der vom Modell abweichenden Realität des Objekts durchaus mehr als einer Punktmenge zugeordnet werden können.

Die Bildung der Punktmenge für ein Flächenprimitiv erfolgt im einfachsten Fall manuell, in dem die Punktwolke durch Selektionsfunktionalitäten des Auswertesystems derart reduziert wird, dass ausreichend viele approximierende Scannerpunkte verbleiben. Wird das Primitiv manuell modelliert, bleiben nicht zugehörige Scannerpunkte durch das Wissen des Auswerters unberücksichtigt, wenn die Er-

kennbarkeit hinreichend gewährleistet ist. Wird die selektierte Punktmenge in eine Ausgleichung zur Bestimmung der Primitivparameter eingeführt, muss Sorge dafür getragen werden, dass nur die zugehörigen Punkte selektiert wurden. Von [JAHN, KERSTEN & KINZEL 2004] wurde das Verfahren der manuellen Selektion und Modellierung am Beispiel der Erfassung von zylinderförmigen Rohrleitungen mit Hilfe des Softwarepakets *Cyclone* Version 4.0.2 der Firma Leica durchgeführt. Der Selektion wurde ein hoher manueller Aufwand bescheinigt. Auch [WAGNER & HASSE 2004] haben mit der *Cyclone*-Software gearbeitet und insbesondere bei der Modellierung noch Entwicklungsbedarf gesehen, um den Zeitaufwand für diesen Teil der Auswertung zu reduzieren. In anderen Ansätzen wird von Primitiven mit fest vorgegebenen Formparametern ausgegangen, die in Katalogen angeboten werden. Bestimmt werden müssen lediglich die Lageparameter. Die wahrscheinlichste Lage wird mit Hilfe von Best-fit-Algorithmen ermittelt [CYRA 2003]. Die Kenntnis der Formparameter ist im Anlagenbau sicher verschiedentlich vorhanden. Gerade bei der Bestandserfassung von Altanlagen und Gebäuden kann jedoch oftmals nicht von wohldefinierten Formen ausgegangen werden.

Der hohe Zeitaufwand der Scannerpunktselektion kann mit Hilfe von automatischen Methoden reduziert werden.

5.1.1 Vorbereitung

Zur gemeinsamen Verarbeitung der Scanner- und Bilddaten unterschiedlicher Aufnahmestandorte ist – falls noch nicht erfolgt – eine Transformation der Scannerdaten in ein gemeinsames kartesisches Koordinatensystem erforderlich. Vielfach wird dieser Vorgang auch mit Registrierung bezeichnet. Die Bildpunkte liegen in einer der Kameraausrichtung entsprechenden, zentralperspektivischen Ansicht vor. Die Orientierung der Bilddaten muss bekannt sein. Durch Transformation der Scannerdaten in die Zentralperspektive der Bilder lassen sich beide Datentypen durch Superimposition betrachten.

5.1.2 Partitionierung

Die Aufteilung eines Raumes in Teilräume bestimmter Eigenschaften bezeichnet man als Segmentierung. Die Teilräume werden durch zu detektierende und zu identifizierende geometrische Primitive wie Punkte, Linien oder Flächen begrenzt. Bestehen die Teilräume aus Teilmengen einer Gesamtmenge von Einzelementen wie 3D-Punkten, spricht man von der Partitionierung einer Elementmenge.

Partitionierungsverfahren basieren auf dem Vergleich von homogenen Eigenschaften, die aus den zur Verfügung stehenden Daten berechnet wurden. Bei der Partitionierung kann in unterschiedlicher Weise vorgegangen werden [SCHUSTER & FÖRSTNER 2003]:

- durch Teilung oder Aggregation,
- sequentiell oder parallel,
- im Ortsraum (2,5D, 3D) oder im Eigenschaftsraum.

Bei der Teilungsstrategie werden die Eigenschaften zunächst für die Gesamtdatenmenge berechnet. Bei Nicht-Erfüllung wird die Gesamtdatenmenge so lange in Untermengen geteilt, bis die festgelegten Eigenschaften für die Untermenge erfüllt sind. Die Daten aller Teilräume mit gleichen Eigenschaften werden zu einer Partition zusammengefasst. Die Vorgehensweise ist günstig, wenn die gesamte Da-

tenmenge untersucht werden soll. Das Aggregationsverfahren startet an einem einzelnen Datum, um - von diesem ausgehend - benachbarte Daten bei Erfüllung der Eigenschaften der bereits aggregierten Datenmenge hinzuzufügen. Dabei können die Eigenschaften jeweils lokal für einzelne Punktpaare oder bezogen auf die gesamte bisher aggregierte Punktmenge berechnet und verglichen werden.

Partitionierungsverfahren können sequentiell oder parallel durchgeführt werden. Parallele Verfahren sind möglich, wenn die Grenzwerte für die Erfüllung von Eigenschaften nicht von einer bereits aggregierten Teildatenmenge abhängen, also z.B. sukzessive verbessert werden. Ein sequentieller Ablauf ist auch erforderlich, wenn Nachbarschaften zu berücksichtigen sind.

Die Unterscheidung in den Ortsraum und den Eigenschaftsraum betrifft den bereits erwähnten Bezug zur Nachbarschaft. Bei einer Partitionierung im Eigenschaftsraum ist ein räumlicher Zusammenhang zwischen den einer Partition zugehörigen Daten nicht gefordert, jedoch bei einer Partitionierung in Ortsräumen.

Die Teilungsstrategie lässt sich unbeaufsichtigt auf einen großen Datensatz anwenden. Es wird eine mehr oder weniger große Anzahl Flächen extrahiert, abhängig von der Ähnlichkeit der vorkommenden Daten, die die vorgegebenen Eigenschaften erfüllen. Der Auswerter muss aus der ggf. großen Anzahl von Flächen diejenigen auswählen, die zur Modellierung des Objekts beitragen, sie weiter verarbeiten und attributieren. Im Konzept der nutzergeführten Extraktion wählt der Auswerter anhand der Punktwolke und des Bildes die Stelle aus, an der ein Primitiv extrahiert werden soll, und kann es – im direkten Augenschein – attributieren und zur Weiterbearbeitung nutzen. Die Wahl eines Ausgangsortes durch den Auswerter führt zu einem aggregierenden Partitionierungsverfahren.

Mit dem aggregierenden Partitionierungsverfahren eröffnet sich die Möglichkeit der sukzessiven Anpassung von Schwellwerten für den Eigenschaftsvergleich. Während die Aggregation grundsätzlich die Möglichkeit der Parallelverarbeitung offen lässt, wenn man nur Sorge trägt, dass jedes Datum nicht mehr als einmal verwendet wird, so wird der Aufbau einer Parallelverarbeitung bei Schwellwertanpassungen erschwert. Gleichwohl ist eine parallel arbeitende Vorverarbeitung zur Berechnung von lokalen Eigenschaften denkbar. Die interaktive Extraktion kann dann durch Rückgriff auf die bereits berechneten lokalen Eigenschaften beschleunigt erfolgen.

Bauliche Anlagen besitzen regelmäßig zusammenhängende Oberflächen. Fenster z.B. bilden allenfalls Löcher in der Oberfläche. Selbstverständlich existieren Fälle, in denen Oberflächen z.B. bei Rohren durch aufgesetzte Schellen unterbrochen werden. Ein strenges Oberflächenmodell ist bei durchgehend angenommenem Rohr bereits nicht mehr gegeben. Günstig für die weitere Modellierung ist in einem solchen Fall, das Rohr trotz der Unterbrechung durch die Schelle als eine einzige Fläche zu extrahieren. Zur Gewährleistung des räumlichen Zusammenhangs der Daten einer Partition ist ebenfalls eine Aggregation gefordert.

5.1.3 Differentialgeometrie an der Objektoberfläche

Lokale Eigenschaften beziehen sich auf kleine, räumlich abgegrenzte Bereiche der Oberfläche bzw. des Raumes. Die Räume können in Form von Voxeln regelmäßig angeordnet sein oder durch punktbezogene Raumintervalle gebildet werden. Die Aggregation beginnt regelmäßig an einem Voxel oder Raumintervall mit den dort berechneten Eigenschaften. Während des Aggregationsprozesses können

die Eigenschaften entweder weiterhin lokal für einzelne Punkte oder Voxel unabhängig von der bereits aggregierten Punktmenge oder global für die bereits aggregierte Punktmenge unter Hinzunahme des gerade untersuchten Punktes bzw. der Punkte des nächsten Voxels bestimmt werden. Wegen der Unabhängigkeit der Bestimmung soll hier der lokalen Eigenschaftsberechnung der Vorzug gegeben werden.

Mit der Untersuchung von lokalen Eigenschaften befasst sich die Differentialgeometrie. Um die Differentialgeometrie anwenden zu können, müssen die zu modellierenden Oberflächen die Stetigkeitsvoraussetzung zur Anwendung der Infinitesimalrechnung aus Abschnitt 2.2 mindestens innerhalb von zusammenhängenden Gebieten erfüllen. Die Oberfläche jedes realen Objekts ist, wenn man nur hoch genug auflöst, glatt, also unendlich oft stetig differenzierbar. Die Differenzierbarkeitsvoraussetzung aus Abschnitt 2.2 ist damit ebenfalls erfüllt. Folglich lassen sich auf die in der Realwelt gemessenen Scannerpunkte die Methoden der diskreten Infinitesimalrechnung zur Ermittlung von differentialgeometrischen, lokalen Eigenschaften der Objektoberfläche anwenden, wenn die Punktwolke in ausreichender Dichte und Genauigkeit vorliegt.

Im Modell wird die Gesamtoberfläche durch aneinander grenzende Primitive gebildet. An den Grenzstellen ist die Oberflächenfunktion nicht stetig differenzierbar. Die Gesamtoberfläche eines Objekts kann nur noch als abschnittsweise glatt betrachtet werden.

5.1.4 Homogenität der Objektoberfläche

Homogenität ist die Unabhängigkeit einer Eigenschaft (innerhalb eines Körpers/Systems) vom Ort. In vielen Fällen sind lokale Eigenschaften einer Objektoberfläche in einem beschränkten Abschnitt identisch, also ortsunabhängig. Die Oberfläche kann in dem abgegrenzten Abschnitt als homogen bezüglich der betrachteten Eigenschaft bezeichnet werden. Eine Vielzahl der Primitive, mit denen Realweltobjekte modelliert werden, besitzt homogene Eigenschaften. Es liegt also nahe, diese Eigenschaften zur Suche nach Scannerpunkten zu nutzen, die dasselbe Primitiv repräsentieren.

5.1.5 Überblick zur Vorgehensweise

Lokale Eigenschaften der Objektoberfläche spezieller Flächenprimitive (Abschnitt 5.2), berechnet mit den Methoden der diskreten Infinitesimalrechnung, werden auf Homogenität bezüglich des Ortes geprüft und die repräsentierenden Scannerpunkte aggregiert, um sie einer Partition von Scannerpunkten zuzuordnen und gemeinsam in ein parametrisiertes Flächenprimitiv zu überführen (Abschnitt 5.4). Nachbarschaftliches Vorgehen bei der Partitionierung stellt sicher, dass nur Scannerpunkte desselben Flächenprimitivs aggregiert werden. Die Punktnachbarschaften – durch Triangulation (Abschnitt 5.3.1) realisiert – werden entlang einer lokalen Approximation der Objektoberfläche (Abschnitt 5.3) benötigt. Die mit der Partitionierung entstandenen Punktmengen

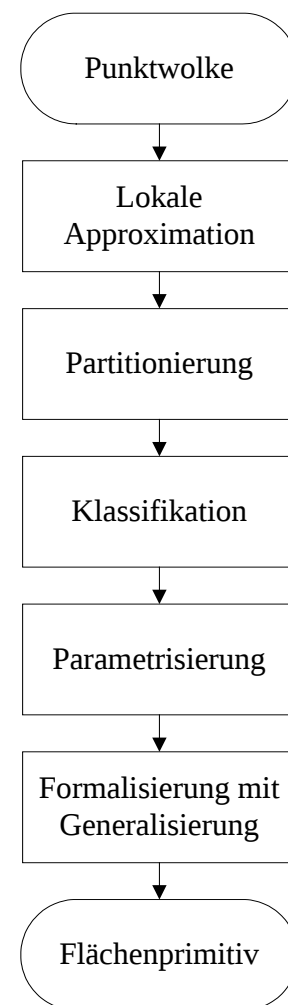


Abbildung 5.1:
Ablaufdiagramm

werden, sofern die Klasse nicht vorgegeben, zu einem Primitivtyp klassifiziert (Abschnitt 5.5). Die Parameter der Flächenprimitive werden mit der Parametrisierung (Abschnitt 5.6) bestimmt. Ggf. benötigte Ränder der extrahierten Flächen werden schließlich durch Formalisierung festgelegt (Abschnitt 5.2). Die hohe Punktdichte des Randpolygons erfordert eine Generalisierung in Form einer Vereinfachung und einer Glättung.

5.2 Eigenschaften von speziellen Flächenprimitiven

Zur differentialgeometrischen Berechnung von lokalen Eigenschaften spezieller Flächenprimitive muss für die zu untersuchenden Primitivtypen von der bisherigen Darstellung zu einer Darstellung in Gauß'schen Flächenkoordinaten (2.42) übergegangen werden.

5.2.1 Senkrechte Kreiskegelfläche

Für die Darstellung der senkrechten Kreiskegelfläche im Raum wird ein System von Zylinderkoordinaten (2.10) mit den Veränderlichen $u^1 = h$, der Höhe, und $u^2 = \varphi$, dem Bogenmaß, gewählt (Abbildung 5.2). Der Radius ist $r = a h$, $a = \text{const.}$ ist abhängig von der Höhe h . Der Faktor a ist Maß für die Neigung des Kegelmantels. Die senkrechte Kreiskegelfläche genügt dann der Darstellung

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = (a u^1 \cos u^2, a u^1 \sin u^2, u^1). \quad (5.1)$$

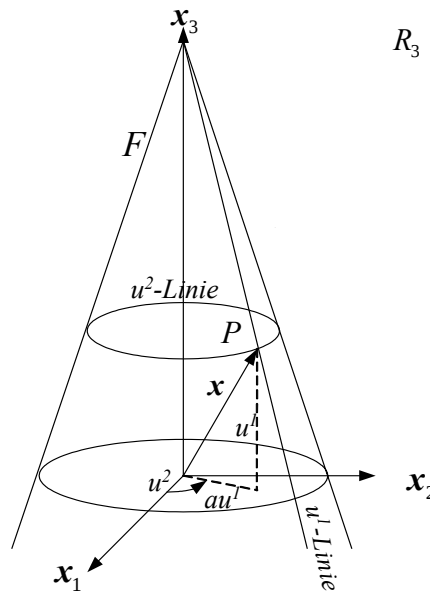


Abbildung 5.2: Senkrechte Kreiskegelfläche, Gauß'sche Flächenkoordinaten

Die Richtungen der Koordinatenlinien sind gemäß (2.46)

$$\mathbf{x}_{u^1}(u^1, u^2) = (a \cos u^2, a \sin u^2, 1), \quad (5.2)$$

$$\mathbf{x}_{u^2}(u^1, u^2) = (-a u^1 \sin u^2, a u^1 \cos u^2, 0). \quad (5.3)$$

Die Koordinatenlinien sind orthogonal zueinander, denn es ist $x_{u^1} x_{u^2} = 0$. Die Koeffizienten (2.51) der 1. Fundamentalform (2.52) und deren Diskriminante (2.53) sind

$$\begin{aligned} g_{11} &= a^2 + 1, \\ g_{12} &= 0, \\ g_{22} &= a^2 (u^1)^2, \\ g &= (a^2 + 1) a^2 (u^1)^2. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Der Flächennormalenvektor ist nach (2.54)

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} (-\cos u^2, -\sin u^2, a). \tag{5.5}$$

Die Richtung des Flächennormalenvektors ist unabhängig von u^1 . Die Koeffizienten der 2. Fundamentalform (2.62) und deren Diskriminante lauten nach (2.57) bzw. (2.63)

$$\begin{aligned} b_{11} &= 0, \\ b_{12} &= 0, \\ b_{22} &= \frac{a u^1}{\sqrt{1+a^2}}, \\ b &= 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Die Normalkrümmung ist gemäß (2.69)

$$\kappa_n = \frac{\frac{a u^1}{\sqrt{1+a^2}} (du^2)^2}{(a^2 + 1)(du^1)^2 + a^2 (u^1)^2 (du^2)^2} \tag{5.7}$$

und damit abhängig von der Koordinate u^1 . Die Krümmung an den Extremstellen ist wegen (2.78)

$$\kappa_n^2 + \frac{1}{a u^1 \sqrt{1+a^2}} \kappa_n = 0. \tag{5.8}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 0, \\ \kappa_2 &= -\frac{1}{u^1 a \sqrt{1+a^2}}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Die von Null verschiedene Hauptkrümmung ist abhängig von der Koordinate u^1 .

5.2.2 Senkrechte Kreiszylinderfläche

Für die Darstellung der Zylinderfläche im Raum wird ein System von Zylinderkoordinaten (2.10) mit den Veränderlichen $u^1 = h$, der Höhe, und $u^2 = \varphi$, dem Bogenmaß, gewählt (Abbildung 5.3). Der Radius r ist konstant. Damit vereinfacht sich die Darstellung (5.1) wegen $u^1 = l = \text{const.}$ und $a = r$ in den ersten beiden Koordinatenwerten zu

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = (r \cos u^2, r \sin u^2, u^1). \quad (5.10)$$

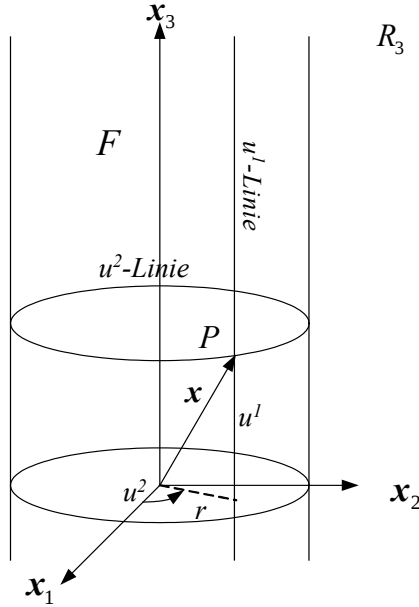


Abbildung 5.3: Senkrechte Kreiszylinderfläche, Gauß'sche Flächenkoordinaten

Die Richtungen der Koordinatenlinien sind gemäß (2.46)

$$\mathbf{x}_{u^1}(u^1, u^2) = (0, 0, 1) \quad (5.11)$$

$$\mathbf{x}_{u^2}(u^1, u^2) = (-r \sin u^2, r \cos u^2, 0). \quad (5.12)$$

Die Koordinatenlinien sind orthogonal zueinander, denn es ist $\mathbf{x}_{u^1} \cdot \mathbf{x}_{u^2} = 0$. Die Koeffizienten (2.51) der 1. Fundamentalform (2.52) und deren Diskriminante (2.53) sind

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1, \\ g_{12} &= 0, \\ g_{22} &= r^2, \\ g &= r^2. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Der Flächennormalenvektor ist nach (2.54)

$$\mathbf{f} = (-\cos u^2, -\sin u^2, 0). \quad (5.14)$$

Er ist unabhängig von u^l . Die Koeffizienten der 2. Fundamentalform (2.62) und deren Diskriminante lauten nach (2.57) bzw. (2.63)

$$\begin{aligned} b_{11} &= 0, \\ b_{12} &= 0, \\ b_{22} &= r, \\ b &= 0. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Die Normalkrümmung ist gemäß (2.69)

$$\kappa_n = \frac{r(du^2)^2}{(du^1)^2 + r^2(du^2)^2}. \tag{5.16}$$

Die Krümmungen an den Extremstellen genügen mit (2.78) der Gleichung

$$\kappa_n^2 + \frac{r}{r^2} \kappa_n = \kappa_n \left(\kappa_n + \frac{1}{r} \right) = 0. \tag{5.17}$$

Sie betragen

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 0, \\ \kappa_2 &= -\frac{1}{r} = \text{const.} \end{aligned} \tag{5.18}$$

für alle Punkte einer Zylinderfläche.

Wegen $g_{12} = b_{12} = 0$ fallen die Koordinatenlinien der Zylinderfläche mit den Krümmungslinien zusammen. Die Krümmung entlang der Koordinatenlinien $u^2 = \text{const.}$ ist gleich Null; die Koordinatenlinien sind also Geraden. Entlang der Koordinatenlinien $u^1 = \text{const.}$ ist die Krümmung konstant; die Koordinatenlinien sind Kreise.

Der Satz von Euler (2.83) lautet, angewendet auf die Zylinderfläche,

$$\kappa_n = \kappa_2 \sin^2 \alpha. \tag{5.19}$$

5.2.3 Ebene

Eine Ebene $x_3 = a = \text{const.}$ parallel zur x_1x_2 -Ebene lässt sich z.B. durch kartesische Koordinaten (2.1) darstellen:

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = (u^1, u^2, a). \tag{5.20}$$

Die Richtungen der Koordinatenlinien sind gemäß (2.46)

$$\mathbf{x}_{u^1}(u^1, u^2) = (1, 0, 0), \quad (5.21)$$

$$\mathbf{x}_{u^2}(u^1, u^2) = (0, 1, 0). \quad (5.22)$$

Die Koordinatenlinien sind orthogonal zueinander, denn es ist $\mathbf{x}_{u^1} \mathbf{x}_{u^2} = 0$. Die Koeffizienten (2.51) der 1. Fundamentalform (2.52) und deren Diskriminante (2.53) sind

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1, \\ g_{12} &= 0, \\ g_{22} &= 1, \\ g &= 1. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Der Flächennormalenvektor ist nach (2.54)

$$\mathbf{f} = (0, 0, 1) \quad (5.24)$$

Er ist unabhängig von u^1 und u^2 . Die Koeffizienten der 2. Fundamentalform (2.62) und deren Diskriminante lauten nach (2.57) bzw. (2.63)

$$\begin{aligned} b_{11} &= 0, \\ b_{12} &= 0, \\ b_{22} &= 0, \\ b &= 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Die Normalkrümmung ist gemäß (2.69)

$$\kappa_n = \frac{0}{(du^1)^2 + (du^2)^2} = 0 \quad (5.26)$$

für alle Punkte der Ebene und ist damit unabhängig von den Koordinaten u^1 und u^2 und gleich Null für alle Richtungen. Damit gilt auch für die Hauptkrümmungen

$$\kappa_1 = \kappa_2 = 0. \quad (5.27)$$

Lässt man in den Hauptkrümmungen der Zylinder (5.18) den Radius r gegen unendlich streben, erhält man die Ebene als Spezialfall der Zylinderfläche.

Die Hauptkrümmungen sind wegen ihrer Konstanz homogene Eigenschaften von Ebene und Zylinderfläche. Sie können somit zur Aggregation von flächenzugehörigen Punkten genutzt werden.

5.3 Lokale Approximation der Objektoberfläche

Die infinitesimale Differentialgeometrie basiert auf den Differenzen benachbarter Ortsvektoren, die hier durch die Koordinaten der Scannerpunkte diskret gegeben sind. Die Nachbarschaftsbeziehungen zwischen den Scannerpunkten sind zunächst unbekannt. Eine geeignete Form zur Realisierung von Punktnachbarschaften auf einer Fläche ist die Vermaschung der Punkte durch aneinander grenzende Flächenstücke. Als Alternative wird als zweites eine Oberflächenapproximation durch ausgeglichene, lokale Ebenen vorgestellt.

5.3.1 Triangulationen

Mit der Triangulation erhält man zwischen den vermaschten Punkten die einfachste Form von Flächen, nämlich Dreiecke. In Unkenntnis des Verhaltens der Oberfläche zwischen den Eckpunkten werden (ebene) Dreiecke verwendet. Da die Dreiecke eine im Allgemeinen gekrümmte Fläche approximieren, tritt innerhalb einer jeden Masche ein Approximationsfehler auf. Je stärker die Fläche gekrümmt ist und je länger die Seiten des Dreiecks sind, desto größer ist der Fehler. Die Approximationsebene unterschneidet regelmäßig die wahre Fläche.

5.3.1.1 Ebene Delaunay-Triangulation

Die ebene Triangulation ist die Aufteilung der konvexen Hülle einer zweidimensionalen planaren Punktmenge M in Dreiecke (Abbildung 5.4). Die Punkte $\mathbf{x}_i \in R_2$ der Menge M bilden die Knoten der Dreiecksvermaschung. Die konvexe Hülle ist das konvexe Ringpolygon, das alle Punkte von M umschließt. Alle geraden Verbindungen zwischen beliebigen Punkten von M müssen innerhalb oder auf dem Rand der von der konvexen Hülle umschlossenen Fläche liegen.

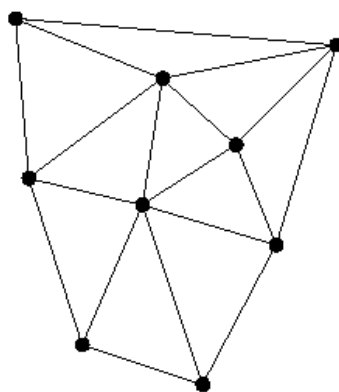


Abbildung 5.4: Ebene Triangulation. Aus: [HETTWER 2003].

Ebene Triangulationen eignen sich für zweidimensionale Anwendungen. Eine dritte Dimension, z.B. eine Höhenangabe, kann als attributive Information angegeben werden. Dies ist z.B. bei digitalen Geländemodellen der Fall. Man spricht von 2,5-dimensionalen Modellen [KRAUS 2000].

Für eine Menge von Punkten gibt es, abgesehen vom trivialen Fall einer Punktmenge bestehend aus drei Punkten, mehr als eine, jedoch endlich viele Triangulationen. Bei einer Menge von vier Punkten gibt es genau die in Abbildung 5.5 dargestellten zwei Möglichkeiten.

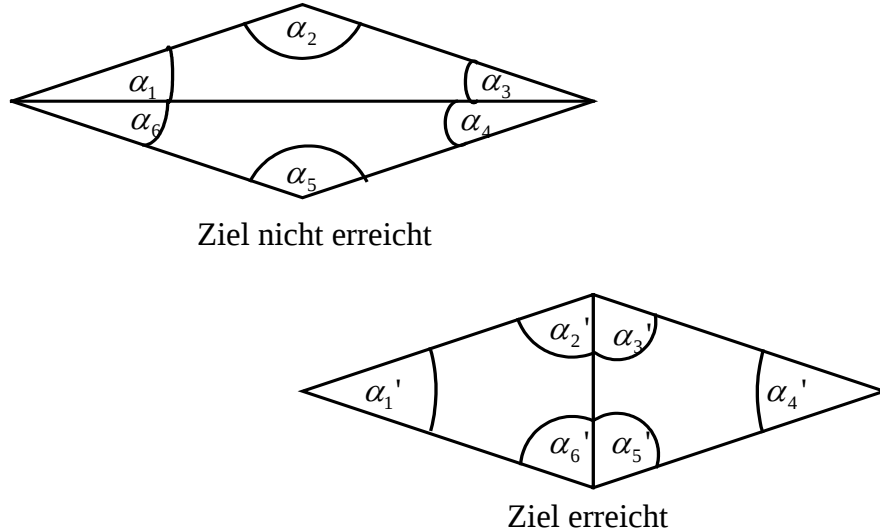


Abbildung 5.5: Delaunay-Triangulation aus vier Punkten

Zur Entscheidung für eine bestimmte Triangulation sind Bedingungen für die Wahl der Punktverbindungen festzulegen. Eine zweckmäßige Triangulation ist die Delaunay-Triangulation. Bedingungen der Delaunay-Triangulation sind

- eine Winkeloptimierung in der Form der Maximierung des minimalen Winkels der Triangulationsdreiecke,
- dass innerhalb des Umkreises, gebildet durch die drei Eckpunkte eines Dreiecks, kein weiterer Punkt liegt,
- die Bildung von kleinstmöglichen Umkreisen und
- möglichst geringe Unterschiede in den Längen der Dreiecksseiten (möglichst gleichseitige Dreiecke)

[KRAUS 2000]. Die Bedingungen sind gleichzeitig gültig, also gegenseitig auswechselbar. Die Winkeloptimierung ist bei einer Aufteilung A' eines Vierecks in zwei Dreiecke gegenüber der Aufteilung A (Abbildung 5.5) erreicht, wenn

$$\min\{\alpha_i / 1 \leq i \leq 6\} < \min\{\alpha'_i / 1 \leq i \leq 6\} \quad (5.28)$$

gilt. Die Triangulation ist lokal winkeloptimal, wenn die Bedingung (5.28) für alle Vierecke der Triangulation erfüllt ist. Geometrisch entsteht das Umkreiskriterium (Abbildung 5.6). Man erkennt unschwer, dass bei Erfüllung der Bedingung der Winkeloptimierung bzw. der Umkreisbedingung die jeweils kleineren Umkreise entstehen. Die Längen der Dreiecksseiten sind gleichmäßiger.

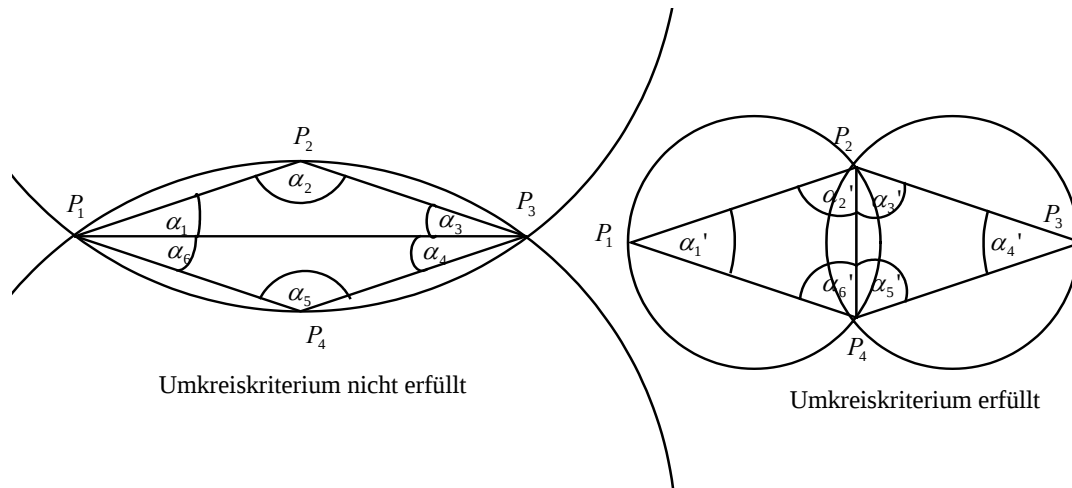


Abbildung 5.6: Umkreiskriterium

5.3.1.1.1 Ebene Triangulation in einer Parallelprojektion

Zur Anwendung der ebenen Delaunay-Triangulation müssen die dreidimensionalen Koordinaten in zweidimensionale (ebene) Flächenkoordinaten abgebildet werden. Die dritte Dimension, die „Höhe“, wird lediglich als attributive Information zweidimensionaler „Lage“-Daten geführt. In einer (ebenen) Delaunay-Triangulation dieses so genannten 2,5D-Modells sind wegen der im Allgemeinen fehlenden Winkel- und Abstandstreue der Abbildung die Bedingungen der Delaunay-Triangulation lediglich in der Abbildung, nicht aber für die in den Raum zurücktransformierten Dreiecke erfüllt. Mehrere Objektflächen in derselben Abbildungsrichtung sind in der Projektion ohne die attributive Höheninformation nicht unterscheidbar. Zur Erhaltung der Topologie in der Abbildung und einer möglichst großen Winkel- und Abstandstreue ist eine Vorkenntnis bezüglich der Oberflächengeometrie notwendig. Sie ist jedoch zu diesem Zeitpunkt – die Oberfläche soll ja erst modelliert werden – nicht bekannt.

Zur Verwendung von Airborne-Laserscanning-Daten für digitale Höhen- oder Situationsmodelle wird regelmäßig ein 2,5D-Modell erstellt. Die 3D-Scannerdaten werden durch Parallelprojektion in die (bekannte) Horizontalebene der Erdoberfläche abgebildet. Erwartet wird regelmäßig eine relativ wenig bewegte, horizontnahe Geomorphologie ohne Überhänge und Höhlen. [LENK 2003] stellt ebene Triangulationen zur Verwendung bei 2,5D-Oberflächendaten am Beispiel von Befliegungsdaten und Fächerecholotdaten für digitale Höhenmodelle der Erdoberfläche über bzw. unter Wasser vor. [GORTE 2002] verwendet sie bei digitalen Situationsmodellen zur Extraktion von Gebäudedachflächen. (Terrestrische) Aufnahmen von Gebäudefassaden sind vergleichbar, wenn sichergestellt ist, dass in der gewählten Projektionsrichtung nicht mehr als ein Teil der Objektoberfläche existiert.

5.3.1.1.2 Ebene Triangulation in einer zylindrischen Abbildung

Eine Ausnahme bildet die getrennte Auswertung der Scannerpunkte einzelner Aufnahmestandpunkte. Horizontalrichtung H_z und Vertikalwinkel V der Scannermessung werden als ebenes Koordinatenpaar $u = u(\text{arc } H_z, \text{arc } V)$ eines ebenen kartesischen Koordinatensystems interpretiert und in eine 2D-Delaunay-Triangulation eingeführt. Liegen kartesische Koordinaten der Scannerpunkte vor, sind sie in das jeweilige örtliche kartesische Scannerkoordinatensystem mit (2.16) zu transformieren und mit (2.3) in sphärische Polarkoordinaten (2.2) umzurechnen. Es entsteht eine zylindrische Abbildung der Objektpunkte auf dem Einheitszylinder. Jeder gemessenen Richtung (H_z, V) ist die Strecke s als attri-

butive Information zugeordnet, nämlich die zur nächstgelegenen (sichtbaren) Objektoberfläche in Messrichtung. Es entsteht ein 2,5D-Modell. Die topologischen Beziehungen zwischen den gemessenen Punkten bleiben durch Nicht-Erfassung der verdeckten Oberflächen gewahrt.

Die Vorgehensweise birgt Nachteile:

- Durch die fehlende Erfassung verdeckter Objektteile verbleiben an der Objektoberfläche morphologisch bewegter Objekte, z.B. bauliche Anlagen, erhebliche Datenlücken. Die Ergebnisse der Auswertung der Triangulation in Form von z.B. extrahierten Flächen müssen im Nachhinein zusammengeführt werden.
- Die Verarbeitung der Punkte ist nur getrennt nach Scannerstandpunkten möglich. Benachbarte Punkte an der Oberfläche, die von anderen Scannerstandpunkten aus gemessen wurden, bleiben bei der Triangulation unberücksichtigt.
- Die Triangulation findet nicht auf der Objektoberfläche F_O , sondern auf einer Einheitszylinderfläche $F_{Zyl,E}$ um die Scannerachse statt. Sie ist daher optimal für Projektionspunkte P_i' der Scannerpunkte P_i auf der Einheitszylinderfläche. Die Abbildung ist weder winkel- noch längentreu für den Winkel zwischen zwei Dreiecksseiten bzw. den Abstand zweier Knotenpunkte einer dreidimensionalen Dreiecksvermaschung auf der Objektoberfläche. Nach der Rückrechnung in das dreidimensionale Koordinatensystem sind die gebildeten Dreiecke verzerrt (Abbildung 5.7). Die Verzerrung ist umso größer, je mehr die mittlere Zylinderflächennormale an der Stelle des projizierten Dreiecks n' und die Dreiecksnormale im 3D-Koordinatensystem n voneinander abweichen.

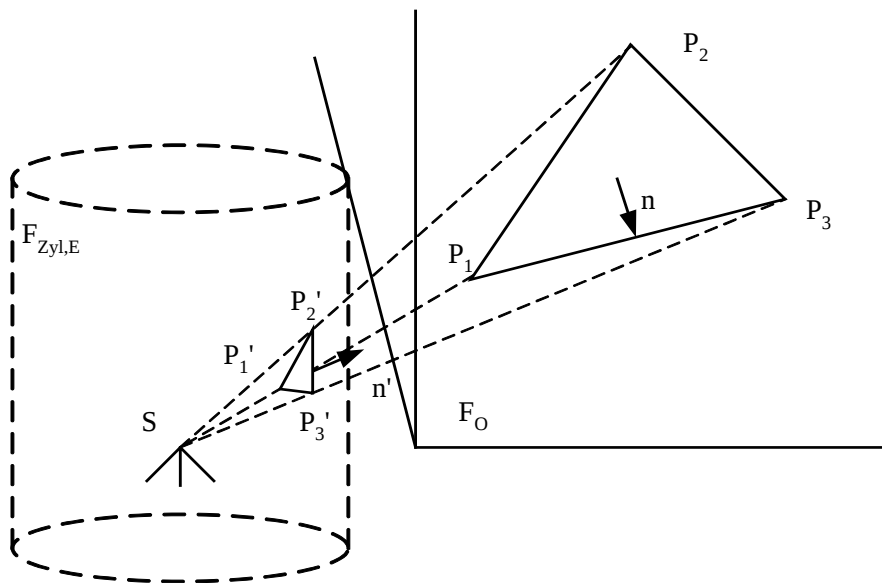


Abbildung 5.7: Verzerrung des Triangulationsdreiecks vom Einheitszylinder zur Realwelt

Das Verfahren wurde von [KERN 2003] als Grundlage der Oberflächenmodellierung eines Objekts „Innenraum“ benutzt, wobei nicht mehr als ein Scannerstandpunkt zur umfassenden Erfassung erforderlich war. [KRESS-LORENZ, ECKERT & SCHAEFFER 2004] benutzen eine Dreiecksvermaschung der Scannerdaten einzelner Scannerstandpunkte als Grundlage zur Erkennung von Verkehrsschildern im Straßenraum. In der Dreiecksvermaschung werden in einem „region-growing“-Prozess auf der Grundlage gleich im Raum orientierter Dreiecke Punktpartitionen aggregiert. Sie bewegen sich dabei

im 2,5D-Modell der zylindrischen Abbildung mit Zentrum im jeweiligen Scannerstandpunkt.

5.3.1.2 3D-Dreiecksvermaschung von Oberflächen

[KRAUS 2000] stellt ein Konzept vor, das auf einer flächenhaften 3D-Dreiecksvermaschung im Raum in Anlehnung an die 2D-Triangulation nach Delaunay beruht. Dafür müssen vier Aufgaben gelöst werden:

- das Auffinden des zu einem Neupunkt gehörenden Dreiecks,
- das Einbinden des Neupunktes in den Dreiecksverband,
- die Optimierung der Triangulation in der Umgebung des Neupunktes,
- die Berücksichtigung von Unstetigkeitsstellen.

Die Dreiecksvermaschung wird sukzessive von Punkt zu Punkt aufgebaut, wobei sich Änderungen an der bestehenden Vermaschung nach Einfügen des Neupunktes auf einen lokalen Bereich begrenzen müssen. Für die 3D-Dreiecksvermaschung existieren noch keine Standardlösungen [KRAUS 2000].

[GÜHRING 2002] benutzt ein zweistufiges Verfahren zur Generierung eines flächenhaften Dreiecksnetzes für Oberflächen im Raum. Er verwendet zunächst ein volumetrisches Verfahren, nämlich den von [LORENSEN & CLINE 1987] beschriebenen Marching-Cubes-Algorithmus zur Topologierekonstruktion in einem groben Netz. Der Algorithmus beruht auf der Berechnung von vorzeichenbehafteten Abstandsfunktionen für regelmäßig angeordnete Voxel. Hierbei bleiben unterschiedlich dichte Punktverteilungen aufgrund der Rasterstruktur unberücksichtigt. Das entstandene grobmaschige Netz wird in einem zweiten Schritt durch adaptive Unterteilung der gebildeten Dreiecke verdichtet. In Tests wurden Rekonstruktionen unregelmäßig gekrümmter Oberflächen von Objekten wie Modellautos und Statuen durchgeführt.

5.3.1.3 Räumliche Delaunay-Triangulation

Die räumliche Triangulation ist die Erweiterung der ebenen Triangulation in die dritte Dimension. Die räumliche konvexe Hülle einer Punktmenge M wird in Tetraeder mit den Scannerpunkten als Knotenpunkte aufgeteilt (Abbildung 5.8). Die räumliche konvexe Hülle ist ein räumliches Dreiecksnetz, das alle Punkte der Punktmenge umschließt, ohne dass eine Punktverbindung das Dreiecksnetz durchstößt. Die Delaunay-Triangulation hat übertragen auf die dritte Dimension das Ziel, den minimalen Raumwinkel zu maximieren. Die Triangulation ist winkeloptymal, wenn das Ziel für alle benachbarten Tetraeder erreicht ist. Das Ziel lässt sich entsprechend dem Umkreiskriterium im Zweidimensionalen hier als Kriterium der umgebenden Kugelfläche beschreiben. Eine Triangulation erfüllt das Kriterium genau dann, wenn die umgebende Kugelfläche eines jeden Tetraeders keinen weiteren Punkt von M enthält.

Mit Hilfe der räumlichen Delaunay-Triangulation lassen sich die dreidimensional vorliegenden Scannerdaten im kartesisch-globalen Koordinatensystem in eine Vermaschung aus Volumenelementen der einfachsten nicht degenerierten Form, den Tetraedern, überführen. Dabei ist es unerheblich, von welchem Scannerstandpunkt die Punktdaten stammen. Die Kriterien zur Winkeloptymierung werden auf die dreidimensionalen Punktkoordinaten, nicht auf eine Abbildung der Koordinaten angewandt. Die bei der zweidimensionalen Triangulation auftretenden Nachteile (vgl. Abschnitt 5.3.1.1.2) fallen weg.

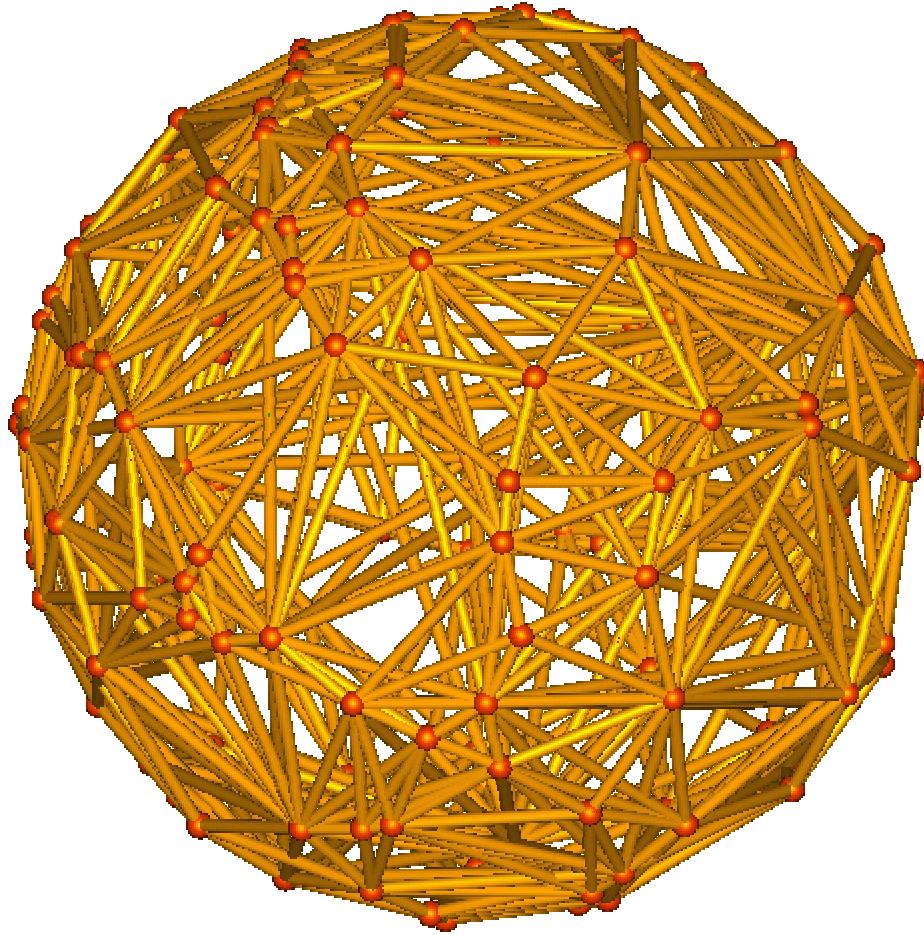


Abbildung 5.8: Räumliche Delaunay-Triangulation. Aus: <http://www.cgal.org/Manual>.

Die Tetraeder liegen entweder innerhalb oder außerhalb des Objekts. Wegen der inhomogenen Punktverteilung im Raum entlang der Objektoberfläche entstehen viele flache Tetraeder. Die Objektoberfläche wird durch die gemeinsamen Tetraederseiten der am Rand des Innen- und am Rand des Außenraums befindlichen Tetraeder gebildet. Die Ausdünnung der gebildeten Tetraeder bzw. Tetraederseiten bis auf ein flächenhaftes Dreiecksnetz im Raum ist nicht trivial und soll hier deshalb auch nicht weiter verfolgt werden. Für die Ermittlung von Oberflächen ist die räumliche Delaunay-Triangulation erst dann geeignet, wenn mit weiteren Methoden diejenigen Dreiecke bestimmt werden können, die die Oberfläche approximieren.

5.3.1.4 Berechnung der Flächennormalenvektoren

Die einzelnen Dreiecke der Triangulationen werden durch die Ortsvektoren $\mathbf{x}_{P_i}, i = 1, 2, 3$ der Eckpunkte P_i beschrieben. Die Richtungen von P_1 nach P_2 und von P_1 nach P_3 lassen sich als Koordinatenlinien auf der Dreiecksfläche interpretieren, so dass der Flächennormalenvektor mit den Ortsvektordifferenzen gemäß (2.46)

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{u^1} &= \mathbf{x}_{P_2} - \mathbf{x}_{P_1}, \\ \mathbf{x}_{u^2} &= \mathbf{x}_{P_3} - \mathbf{x}_{P_1}\end{aligned}\tag{5.29}$$

gemäß (2.54)

$$\mathbf{f}(u^1, u^2) = \frac{\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}}{|\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}|}, \quad \mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2} \neq 0 \quad (5.30)$$

lautet. Der Flächennormalenvektor ist Repräsentant der Triangulationsmasche. Betrachtet man die Triangulationsmasche als Tangentialebene an eine gekrümmte Fläche, muss der Normalenvektor für die Stelle des Schwerpunktes P_S

$$\mathbf{x}_S = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{x}_{P_i} \quad (5.31)$$

der Dreiecksfläche gelten. Für die ebene Fläche ist der Flächennormalenvektor gemäß (5.24) ortsunabhängig, besitzt also eine homogene Eigenschaft.

5.3.1.5 Genauigkeitsbetrachtung

In den triangulatorischen Verfahren sind die Oberflächenelemente ebene Dreiecke. Die Dreiecke werden gebildet aus drei, möglichst günstig benachbarten Scannerpunkten.

Die Scannerpunkte sind allerdings mit zufälligen Abweichungen behaftet:

- Die zufälligen Abweichungen aus Laserscannermessung selbst.
- Lokale Strukturen der Objektoberfläche, die nicht modelliert werden soll. Sie lassen sich als zufällige Abweichung interpretieren und behandeln.

Die genannten zufälligen Abweichungen führen nach dem Varianzfortpflanzungsgesetz zu zufälligen Abweichungen der Lage des Dreiecks. Für die differentialgeometrische Betrachtung ist insbesondere die rotatorische Lagegenauigkeit der Dreiecke von Bedeutung. Sie hängt – außer von der Genauigkeit der Scannerpunkte – auch von Form und Größe des Dreiecks ab. Setzt man nun gleich genaue Scannerpunkte und ein gleichseitiges Dreieck voraus, hängt die rotatorische Lagegenauigkeit des Dreiecks nur noch von der Größe des Dreiecks, also der Dichte der Scannerpunktswolke ab. Nimmt man als Maß für die Größe des gleichseitigen Dreiecks den Abstand r des Schwerpunktes P_S zu den Eckpunkten an, so gilt nach der bekannten geodätischen Formel

$$d\alpha = \rho \frac{db}{r} \quad (5.32)$$

mit dem Umrechnungsfaktor zwischen Bogen- und Winkelmaß ρ (Abbildung 5.9). Darin ist db die Lageabweichung eines Eckpunktes, verursacht durch die Lageabweichungen der drei Eckpunkte des Dreiecks. Gemäß dieser Beziehung verbessert sich die rotatorische Lagegenauigkeit $d\alpha$ mit zunehmendem Abstand r der Eckpunkte vom Schwerpunkt P_S des Dreiecks. Je dichter die Scannerpunktmenge ist, also je kleiner der Abstand r der Eckpunkte zum Schwerpunkt P_S , desto unsicherer wird die Ebenenbestimmung triangulierter Dreiecke aus drei benachbarten Punkten.

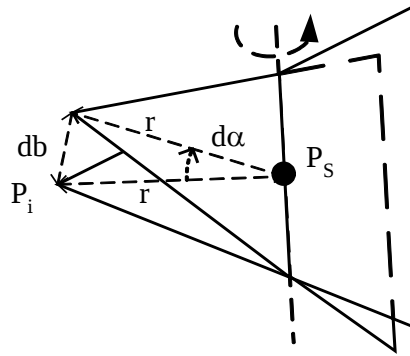


Abbildung 5.9: Genauigkeitsbetrachtung

Die Delaunay-Triangulation bietet eine optimale Vermaschung der vorhandenen Punkte. In Bereichen inhomogener Punktverteilung entstehen trotzdem spitzwinklige Dreiecke. Die spitzwinkligen Dreiecke genügen zwar den Bedingungen der Delaunay-Triangulation, verbinden dennoch aufgrund schlechter Punktverteilung oder Lücken in der Datenmenge Punkte über zu große Strecken. Man erhält nicht nur fehlertheoretisch schlechte, sondern auch grob falsche Ergebnisse.

5.3.2 Ausgleichungsrechnung

Die massenhafte Punktaufnahme beim Laserscanning führt in vielen Fällen dazu, dass lokal mehr Scannerpunkte als für die gewünschte Auflösung nötig gemessen werden. Damit werden die einzelnen Dreiecksflächen kleiner als die Größenordnung der gewünschten Punktauflösung. Die Genauigkeit der Ebenenbestimmung lässt sich durch Ausgleichung einer größeren Anzahl dieselbe Ebene beschreibender Scannerpunkte verbessern, denn die Varianz der Gewichtseinheit (4.48) sinkt mit wachsender Anzahl von Beobachtungen n . Die Genauigkeit des Normalenvektors der Ebene lässt sich zudem durch Verwendung von Scannerpunkten mit größerem Abstand vom Schwerpunkt steigern, sofern diese noch dieselbe Ebene beschreiben (vgl. Abschnitt 5.3.1.5).

5.3.2.1 Punktauswahl

Die Objektoberfläche wird durch Tangentialebenen in den Oberflächenpunkten infinitesimal approximiert. Die Tangentialebene kann als ausgleichende Ebene aus den Scannerpunkten der Objektoberfläche in einer abgegrenzten Umgebung um den Tangentialpunkt berechnet werden. Die Ausdehnung der Umgebung bzw. die Intervallgröße muss den folgenden Sachverhalten Rechnung tragen:

1. Die Umgebung darf eine festgelegte Größe nicht überschreiten, damit die resultierende Ebene die Tangentialebene noch hinreichend genau approximiert. Je größer die Umgebung gewählt wird, desto stärker wird die Oberfläche durch Glättung generalisiert.
2. Die Umgebung muss ausreichend groß sein, um die scanner- und objektbedingten zufälligen Abweichungen auszugleichen. Je mehr Scannerpunkte und damit Beobachtungen in die Ausgleichung eingeführt werden, desto genauer ist wegen der Bestimmungsgleichung der Varianz der Gewichtseinheit (4.48) in Zusammenhang mit der Kovarianzmatrix der Beobachtungen (4.51) das Ausgleichungsergebnis.

3. Eine Ebene lässt sich aus drei nicht kollinearen Punkten eindeutig, aus mehr als drei nicht kollinearen Punkten überbestimmt durch Ausgleichung berechnen. Die Anzahl der Scannerpunkte innerhalb eines Umgebungsraums muss also mindestens $n = 3$ sein, um eine gültige Lösung zu erhalten.
4. Die Form der Objektoberfläche zwischen den einzelnen Scannerpunkten ist unbekannt. Die Umgebung muss deshalb ein Volumenelement sein. Das Volumenelement muss ausreichend klein gewählt werden, um möglichst nur Scannerpunkte desselben, zusammenhängenden Oberflächenstückes zu enthalten.

Die Punkte 1 und 4 fordern eine möglichst kleine, die Punkte 2 und 3 eine möglichst große Umgebung. Für die Ausdehnung der Umgebung muss deshalb ein geeigneter Wert gewählt werden, der den genannten Sachverhalten ausreichend Rechnung trägt.

5.3.2.2 Berechnung der Flächennormalenvektoren

Setzt man für die in der allgemeinen Form (4.17) der Ebenengleichung linear abhängigen Parameter q_i , $i = 1, 2, 3$, und q_0 zusätzlich die Bedingung (4.18), erhält man aus der Ausgleichung direkt die Komponenten des Flächennormalenvektors f inklusive der Standardabweichung der Abstände der Punkte von der ausgeglichenen Ebene – resultierend aus der Varianz der Gewichtseinheit (4.48) – zur Ergebnisbeurteilung.

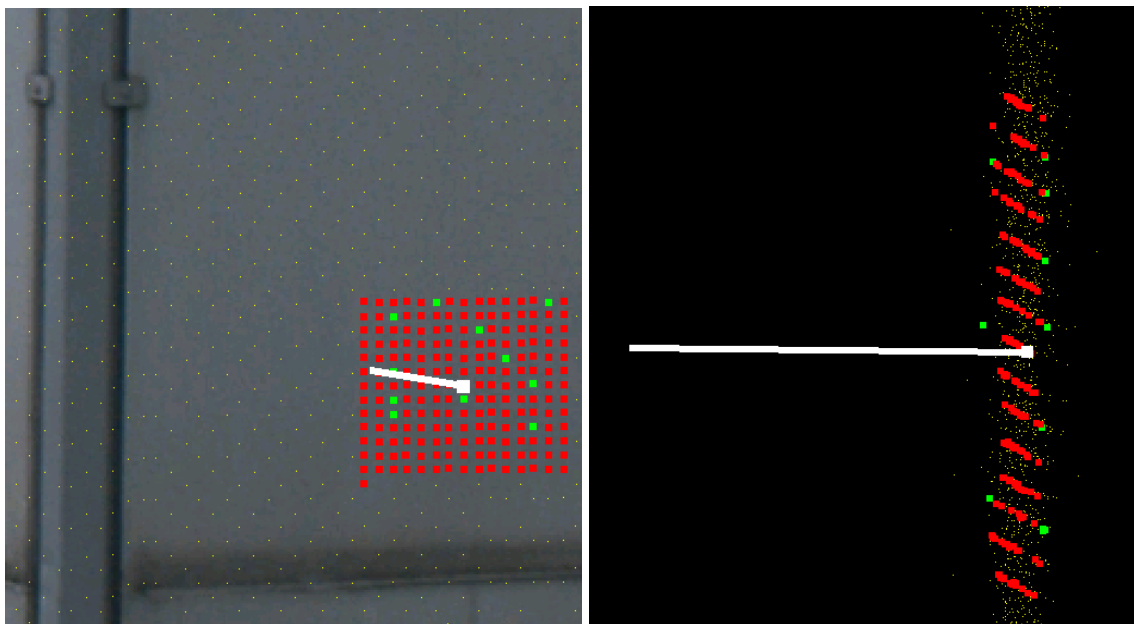


Abbildung 5.10: Ermittlung eines Flächennormalenvektors (weiß) in einer lokalen Umgebung von in der Ausgleichung verbliebenen (rot) und ausgeschlossenen (grün) Scannerpunkten
a) Ansicht von vorn, b) Ansicht von oben

In Abbildung 5.10 ist ein Normalenvektor (weiß) dargestellt, der durch Ausgleichungsrechnung aus den Scannerpunkten (rot und grün) ermittelt wurde. Er zeigt die lokale Ausrichtung der Objektoberfläche an der Stelle des Zentrums der lokalen Umgebung (weißer Punkt) an. Die grünen Punkte wurden nach dem im Abschnitt 4.2.3 beschriebenen Verfahren von der Ausgleichung als Ausreißer eliminiert.

Wendet man das Verfahren auf alle Scannerpunkte als Zentren lokaler Umgebungen an, erhält man für jeden Scannerpunkt einen lokalen Flächennormalenvektor der Objektoberfläche. Abbildung 5.11 zeigt die Schar der Flächennormalenvektoren für eine Anzahl von Scannerpunkten.

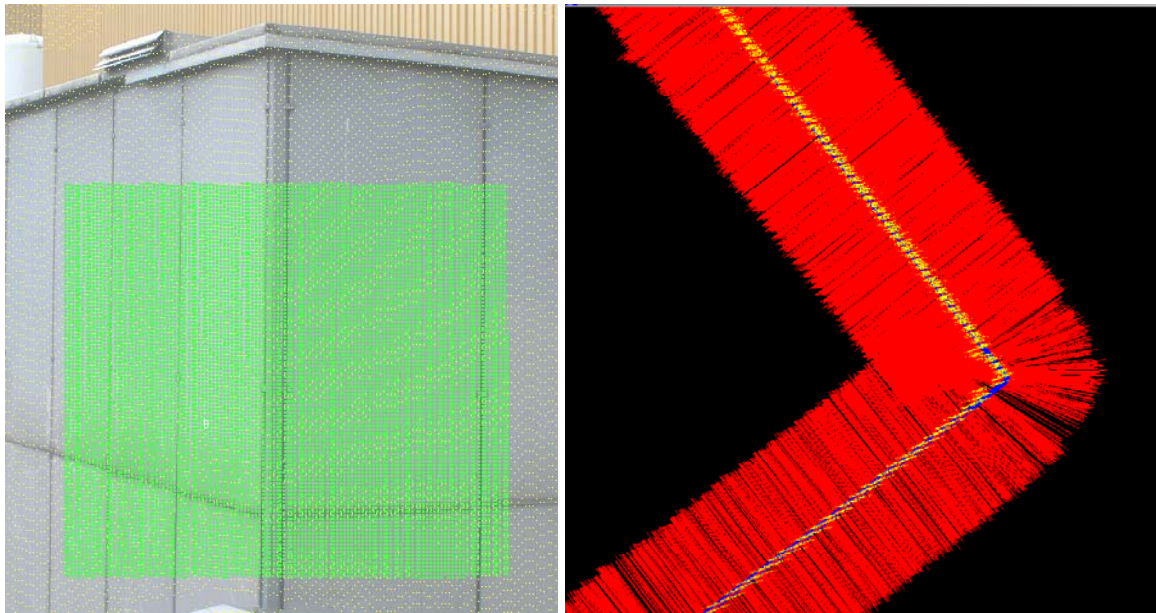


Abbildung 5.11: Ermittlung der lokalen Flächennormalenvektoren

a) Ansicht der Scannerpunkte von vorn

b) Ansicht der ermittelten Normalenvektoren von oben

Die Ausgleichung bewirkt eine Generalisierung in Form einer Glättungsfilterung. Im Bereich von Gebäudekanten (Abbildung 5.11) äußert sich die Glättung unerwünscht in Flächennormalenvektoren, die nicht orthogonal auf einer der beiden Oberflächen stehen. Erwünscht ist hingegen die Glättung von nicht durch Primitive zu modellierenden Oberflächenstrukturen, wie sie in Abbildung 5.12 zu sehen sind.

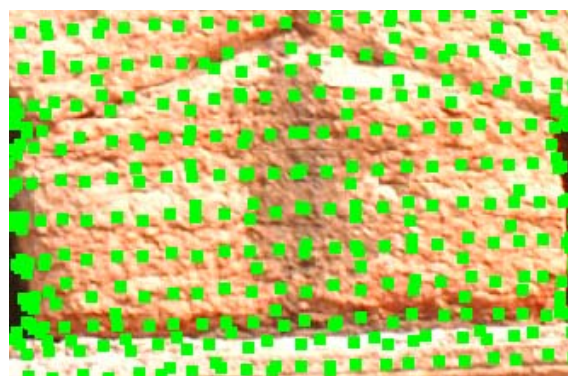


Abbildung 5.12: Nicht zu modellierende Oberflächenstrukturen am Beispiel eines Steins

Die Auswahl der in die Ebenenausgleichung eingehenden Scannerpunkte richtet sich nach den zu Beginn des Abschnitts 5.3.2 genannten Sachverhalten. Da die dort genannten Einflüsse gegeneinander wirken, obliegt es dem Auswerter, anhand von Grenzwertvorgaben die räumliche Umgebung der zu berücksichtigenden Punkte und damit das Glättungsmaß festzulegen.

5.3.2.3 Ausreißerelimination

Mit Hilfe der Varianz der Gewichtseinheit (4.48) und der Abstände der Punkte von der ausgeglichenen Ebene in Form der Residuen (4.47) lassen sich Punkte eliminieren, die besonders weit von der Ebene entfernt liegen. Damit bleiben einzelne fehlerbehaftete oder nicht der Fläche zugehörige Scannerpunkte bei der Normalenvektorbestimmung unberücksichtigt.

Die normierten Punktabstände (4.53) sind gemäß (4.86) und (4.88) t-verteilt. Das Konfidenzintervall für den Punktabstand ist analog (4.83) bei der t-Verteilung

$$P(\mu - t_{f;1-\alpha/2} \sigma < x < \mu + t_{f;1-\alpha/2} \sigma) = P(-t_{f;1-\alpha/2} < z < +t_{f;1-\alpha/2}) = 1 - \alpha. \quad (5.33)$$

Bei der Wahl eines Kubus für die Punktumgebung mit der Seitenlänge von zwei mal 3,5 Punktabständen fallen bei regelmäßig auf einer glatten Oberfläche verteilten Punkten 49 Scannerpunkte in den Kubus. Die Ausgleichung hat damit bei vier Parametern der Ebene im Raum einen Freiheitsgrad von $f = 45$. Für ein Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ erhält man für ein Quantil $t_{25;1-\alpha/2} = 0,975$ das Konfidenzintervall $\pm 2,01 \sigma$, also etwa die doppelte Standardabweichung. Bei einem Kubus mit einer Seitenlänge von zwei mal 2,5 Punktabständen mit durchschnittlich 25 enthaltenen Punkten hat das Konfidenzintervall die Größe $\pm 2,09 \sigma$. Mit größer werdendem Freiheitsgrad nähert sich die t-Verteilung der Normalverteilung an. Bei $f = \infty$ sind sie identisch. In der Praxis ist die Approximation der t-Verteilung durch die Standardnormalverteilung ab einem Freiheitsgrad von 30 hinreichend genau [BENNING 2002]. Das Konfidenzintervall der Standardnormalverteilung (4.83) beträgt für das Signifikanzniveau von 5% $\pm 1,96 \sigma$. Die Differenz der Konfidenzintervalle der t- und der Standardnormalverteilung beträgt bei 25 Punkten im Kubus weniger als 7% , bei 49 Scannerpunkten $2,5\%$. Da regelmäßig Punktzahlen von mehr als 49 Punkten in die Ausgleichung eingeführt werden, kann ohne wesentliche Einbußen statt der t-Verteilung die Standardnormalverteilung verwendet werden. Die Beobachtungen in Form der Scannerpunkte können gleich gewichtet werden. Die Beobachtungsgleichungen sind gleichen Typs. Daher kann die vereinfachte Testgröße (4.91) zur Ermittlung von Ausreißern benutzt werden. Die als Ausreißer klassifizierten Scannerpunkte werden in einer zweiten Ausgleichung nicht mehr berücksichtigt. Abbildung 5.13 zeigt, dass die Scannerpunkte, die in eine Nut der Oberfläche fallen, (grün) identifiziert werden. Sie werden bei einer erneuten Ausgleichung ausgeschlossen.

Die Ausgleichung bewirkt eine Glättung. Je größer die Umgebung der herangezogenen Scannerpunkte gewählt ist, desto stärker ist die Glättung. Bei unregelmäßigen Oberflächen (vgl. Abbildung 5.12) ist dies gewollt, nicht jedoch an Kanten. Die Ausreißerelimination führt in der Nähe von Kanten dazu, dass Punkte auf der jeweils anderen Seite der Kante als Ausreißer klassifiziert werden und bei der Normalenvektorenbestimmung unberücksichtigt bleiben (Abbildung 5.14), was gewollt ist. Der resultierende Normalenvektor repräsentiert noch in vollem Maße die gewünschte Ebene. Dies funktioniert allerdings nur so lange, wie sich nur wenige Scannerpunkte jenseits der Kante befinden.

Strenge Ausreißertests prüfen jeweils nur einen einzelnen Punkt auf Zugehörigkeit und sind daher relativ aufwendig und abhängig von der Reihenfolge der Punktprüfungen. Sie werden deshalb hier nicht eingesetzt.

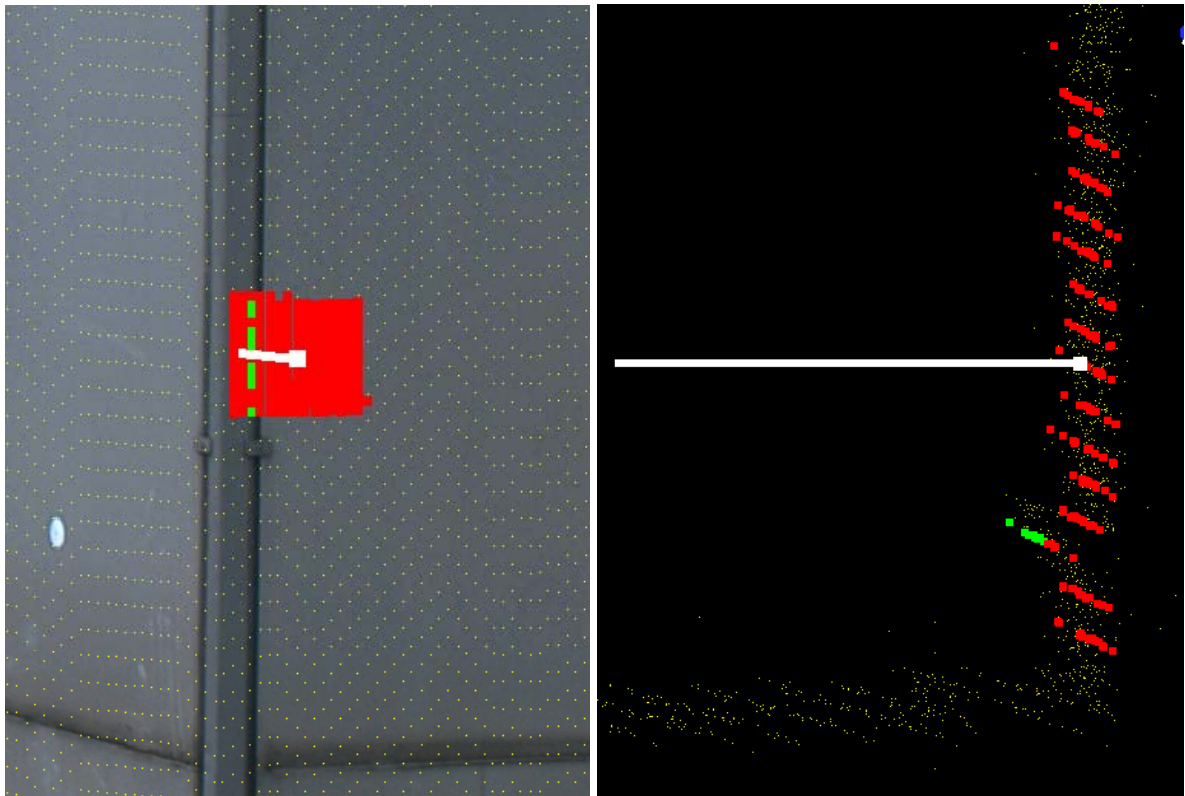


Abbildung 5.13: Ermittlung eines Flächennormalenvektors (weiß) unter Ausschluss der Ausreißer (grün) in einer lokalen Umgebung

a) Ansicht von vorn,

b) Ansicht von oben

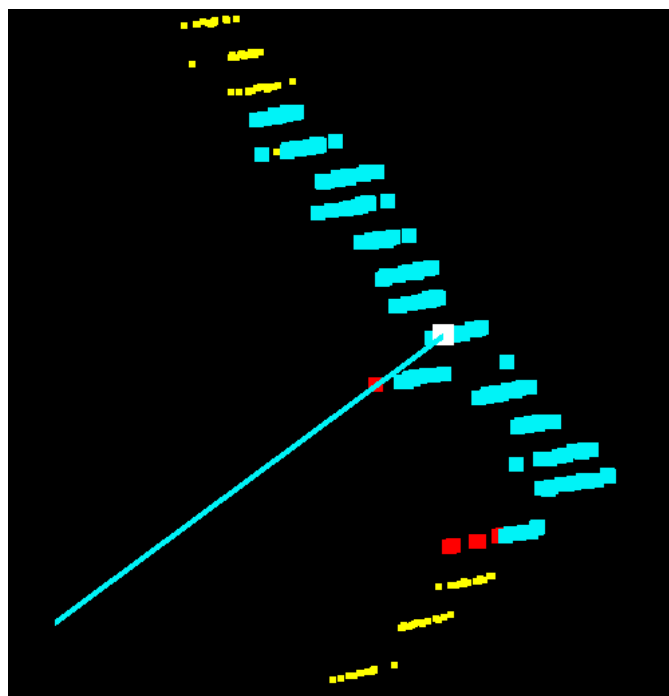


Abbildung 5.14: Normalenvektor in der Nähe einer Kante: Die Punkte in roter Färbung wurden als Ausreißer klassifiziert und für die Normalenvektorbestimmung nicht verwendet.

Die Formalisierung der approximierenden lokalen Ebenen erfolgt theoretisch durch Schnitte mit den benachbarten lokalen Ebenen. Für jeden Scannerpunkt entsteht eine ebene Facette. Die einzelnen Facetten werden zur Objektoberfläche zusammengesetzt. Wegen der Fehlerhaftigkeit der Scanneraufnahme und nicht ausreichender Dichte der Scannerpunkte wird die Objektoberfläche nicht ausreichend fein approximiert, um die genannte Vorgehensweise zur Oberflächenmodellierung zu realisieren.

Dennoch können die gefundenen Ebenenparameter, insbesondere der Normalenvektor, für die Extraktion von Flächen verwendet werden. Sie stellen eine Eigenschaft der Objektoberfläche an der Stelle des Scannerpunktes dar und können zur Berechnung weiterer Eigenschaften benutzt werden.

5.4 Partitionierung

Zur Partitionierung wird wegen der in Abschnitt 5.1 beschriebenen Vorteile das Verfahren der sequentiellen Aggregation im Ortsraum gewählt. Grundlage für die Zugehörigkeit eines Scannerpunktes zu einer Partition ist neben der Topologie die hinreichende Homogenität lokaler, differentialgeometrischer Eigenschaften benachbarter Punkte. Basis der Aggregation der Scannerpunkte, die potentiell dasselbe geometrische Primitiv bestimmen, ist die Auswahl geeigneter Mittel zur Beurteilung der Zugehörigkeit. Die Mittel lassen sich in drei Gruppen einordnen:

- Topologie,
- Differentialgeometrie,
- Ausgleichsrechnung und Ausreißerelimination.

5.4.1 Topologie

Zu den topologischen Eigenschaften gehören insbesondere die Punktnachbarschaften. Zu aggregierende Punkte müssen räumlich benachbart sein, da sonst Punkte nicht zusammenhängender Flächen aggregiert würden. Man kann hierzu benachbarte Voxel oder einzelne Scannerpunkte betrachten. Voxel bilden ein von der Punktdichte unabhängiges regelmäßiges Gefüge. Nachbarschaften zwischen den Punkten eines Voxels bleiben unberücksichtigt. Geeignete Nachbarschaftsbeziehungen zwischen inhomogen verteilten Punkten im Raum lassen sich mit Hilfe der räumlichen Delaunay-Triangulation erzeugen, wie sie in Abschnitt 5.3.1.3 vorgestellt wurde. Dies gilt jedenfalls so lange wie der Punktabstand auf der Oberfläche kleiner ist als der Abstand zweier Flächen. Eine zweidimensionale ebene Delaunay-Triangulation ist nicht geeignet, da sie nur für ebene Flächen gültig ist. Sie kann allerdings auf längen- und winkeltreu in eine Ebene abgebildete Punkte gültig angewendet werden. Dies trifft für die so genannten abwickelbaren Flächen zu. Jedoch ist die Kenntnis der Formparameter der Fläche, die erst ermittelt werden sollen, hierfür notwendig. Flächenhafte 3D-Dreiecksvermaschungen (vgl. Abschnitt 5.3.1.2) wären möglicherweise verwendbar, standen aber für diese Arbeit nicht zur Verfügung.

Die Aggregation erfolgt sequentiell entlang der Punktverbindungen der räumlichen Triangulation. In der Scannerpunktswolke vorhandene Ausreißer und zufällige Abweichungen dürfen nicht zu Abbrüchen führen. Ausreißer bleiben aufgrund der Räumlichkeit der Triangulation unberücksichtigt, da in diesen Fällen eine Verbindung über den „fehlenden“ Scannerpunkt hinaus zum nächsten richtig liegenden Scannerpunkt gebildet wird.

5.4.2 Differentialgeometrie

Differentialgeometrische Eigenschaften beziehen sich auf benachbarte Punkte. Voraussetzung ist daher die Kenntnis der Topologie in Form von Punktnachbarschaften. Verwendet wird auch hier die räumliche Delaunay-Triangulation. Unter den in der Flächentheorie (Abschnitt 2.2.2) entwickelten Eigenschaften sind für die praktische Anwendung unter Berücksichtigung der Güte der erzielbaren Ergebnisse und des Zeitbedarfs zielführende und rechentechnisch günstige auszuwählen.

5.4.2.1 Abstand benachbarter Punkte

Über das Flächenverhalten zwischen benachbarten Scannerpunkten können nur Vermutungen getroffen werden. Man nimmt ein kontinuierliches Verhalten an. Die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit dieser Annahme wächst mit der Dichte der Scannerpunktswolke. Sie sinkt also mit wachsendem Abstand der Scannerpunkte auf der Oberfläche. Der Abstand zwischen einem Ausgangspunkt $P_o(\mathbf{x})$ und einem benachbarten Punkt $P_i(\mathbf{x})$ entlang einer Fläche ist in der Differentialgeometrie die Bogenlänge ds , die 1. Fundamentalform der Flächentheorie. Diskretisiert erhält man aus (2.52)

$$\Delta s_i = |\Delta \mathbf{x}_i| = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_o|. \quad (5.34)$$

Je größer die Abstände, desto ungewisser ist die Lage der Fläche. Ab einem durch einen Schwellwert festzulegenden Abstand sollte auf die Vermutung einer glatten Fläche verzichtet und der betreffende Punkt der Partition nicht hinzugefügt werden. Durch Zulassen größerer Abstände lassen sich Lücken in den Daten, die durch Abschattungen oder trennende Objektteile hervorgerufen werden, überbrücken.

[VOSSELMANN, GORTE, SITHOLE & RABBANI 2004] schlagen ein Abstandskriterium mit und ohne Verwendung einer ebenen (Delaunay-)Triangulation von 2,5D-Daten für ein „surface-growing“-Verfahren vor. Sie weisen darauf hin, dass bei der Verwendung der ebenen (Delaunay-)Triangulation für die Nachbarschaftsbeziehungen Ausreißer in den Daten zu Abbrüchen führen. Dies wird durch die Verwendung der räumlichen Delaunay-Triangulation vermieden, da auch Verbindungen am Ausreißer vorbei gebildet werden.

5.4.2.2 Abstand zur lokalen Ebene

Der Abstand eines Punktes $P_i(\mathbf{x})$ zur lokalen Tangentialebene der Fläche in einem Ausgangspunkt $P_o(\mathbf{x})$ ist

$$\Delta z_i = \Delta \mathbf{x}_i \mathbf{f}_o = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_o) \mathbf{f}_o. \quad (5.35)$$

Darin ist $\mathbf{f}_o$ der Flächennormalenvektor (2.54) im Punkt P_o . Bei Abständen Δz_i größer als ein vorgegebener Schwellwert ist zu vermuten, dass - jedenfalls keine glatte - Fläche die beiden Punkte verbindet. Der Punkt P_i gehört zu einem anderen Flächen(teil)stück oder ist ein Ausreißer. Der Einfachheit halber wird hier auf die Berücksichtigung der Flächenkrümmung verzichtet.

Wegen des Flächenverlaufs orthogonal zur Flächennormale kann der Schwellwert für den Abstand zur

lokalen Ebene (5.35) geringer als derjenige für den Abstand benachbarter Punkte (5.34) gewählt werden. Denn während der Abstand zur lokalen Ebene die Inhomogenität der Fläche einschränkt, beschränkt der allgemeinere Abstand benachbarter Punkte die maximale Lücke zwischen gemessenen Objektpunkten.

Bei dem Vorschlag von [VOSELMANN, GORTE, SITHOLE & RABBANI 2004] wird diese Eigenschaft auf den nächstliegenden bereits aggregierten Flächenpunkt angewandt. Die Nachbarschaft ist durch einen maximalen Abstand begrenzt.

5.4.2.3 Normalenvektoren

[KERN 2003] benutzt den Winkel zwischen den Flächennormalenvektoren f_1 und f_2 benachbarter Dreiecke (5.30) einer ebenen Triangulation zur Aggregation von Scannerpunkten ebener Flächen. Er verzichtet damit auf einen Teil der Richtungsinformation des Flächennormalenvektors. Auch Form und Seitenlängen der Dreiecke bleiben unberücksichtigt. Der Erwartungswert für den Winkel ist nicht nur bei ebenen Flächen, sondern auch entlang der Erzeugenden aller anderen Regelflächen Null [KREYSZIG 1957], sodass Ebenen nicht von anderen Regelflächentypen unterschieden werden können. [KRESS-LORENZ, ECKERT & SCHAEFFER 2004] benutzen die Orientierung des Flächennormalenvektors im Raum. In den Untersuchungen von [KERN 2003] wie auch von [KRESS-LORENZ, ECKERT & SCHAEFFER 2004] werden ebene Regionen gesucht.

[VOSELMANN, GORTE, SITHOLE & RABBANI 2004] benutzen den Winkel zwischen Normalenvektoren lokal geschätzter Ebenen. Sie berechnen die Normalenvektoren des zu untersuchenden und des nächstliegenden, bereits aggregierten Punktes. Sie beschreiben außerdem ein ähnliches, von [GORTE 2002] vorgeschlagenes Verfahren, das wie das von [KERN 2003] auf einer ebenen Delaunay-Triangulation basiert. [GORTE 2002] betrachtet zusätzlich „Distanzmessungen“ zwischen einem Punkt und einem Dreieck bzw. zwischen je zwei Dreiecken der Triangulation. Erstere Distanz ist der Abstand des Punktes zur durch das Triangulationsdreieck gebildeten Ebene, vergleichbar mit dem „Abstand zur lokalen Ebene“. Als gerichtete Distanz eines Dreiecks zu einem anderen Dreieck definiert er das Maximum der Distanzen aller Punkte eines Dreiecks zum zweiten Dreieck. Die Distanz zwischen zwei Dreiecken ist das Minimum der beiden gegenseitigen gerichteten Distanzen [GEIBEL & STILLE 2000]. Kleine Distanzen bedeuten große Ähnlichkeit der Normalenvektoren. Ein Beispiel der Untersuchungen in [GORTE 2002] ist die Extraktion von ebenen Dachflächen aus Airborne-Laserscannerdaten (Abbildung 5.15).

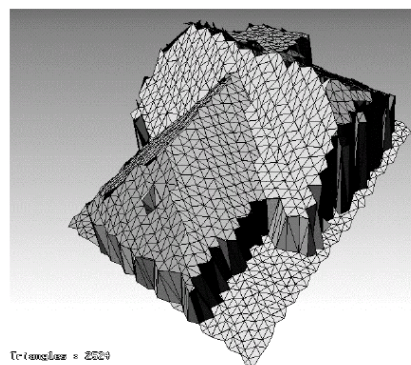


Abbildung 5.15: Simple house, segmented. Aus: [GORTE 2002].

Das Aggregationsverfahren von [FLYNN & JAIN 1991] benutzt zur Partitionierung die Position der Punkte und die Richtung eines Normalenvektors, berechnet durch Ebenenschätzung. Die sechs Parameter (je drei für Position und Normale) werden in einer Achter-Nachbarschaft verglichen. Sie benutzen die Aggregation zur Segmentierung von Abstandsbildern gescannter Werkstücke. Die industriell hergestellten, in CAD-Systemen entwickelten Werkstücke geringer Größe und unterschiedlicher, jedoch wohldefinierter Art sind einzelne Volumenprimitive oder aus wenigen Primitiven zusammengesetzt. Sie sollen lokalisiert und identifiziert werden. Es ist daher mit wenigen Ausreißern und klar abgegrenzten Formen zu rechnen. Nicht zu modellierende Objektteile kommen nicht vor.

[SCHUSTER 2004] benutzt einen Tensor

$$T = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3, \quad (5.36)$$

worin die λ_i die Halbachsen und die $\mathbf{e}_i$ die Hauptachsenrichtungen eines Ellipsoids sind. Die Parameter des Ellipsoids werden auf der Grundlage der in einem Raumintervall befindlichen Scannerpunkte bestimmt. Der Vektor $\mathbf{e}_3$ entspricht dem Flächennormalenvektor. Zur Ebenenextraktion wendet [SCHUSTER 2004] ein region-growing-Verfahren an, bei dem direkt benachbarte Punkte auf homogene Eigenschaften, entwickelt aus dem die Oberflächen beschreibenden Anteil des Tensors (5.36), verglichen werden. Das Homogenitätskriterium basiert auf dem minimum-description-length-Prinzip von [RISANEN 1987].

5.4.2.4 Parameterräume

Die von [HOUGH 1962] für die Linienextraktion in zweidimensionalen Daten entwickelte Houghtransform wurde von [VOSSELMANN, GORTE, SITHOLE & RABBANI 2004] für Ebenen im Raum erweitert. Die allgemeine Gleichung der Ebene (4.17) erhält unter der Bedingung $q_3 = -1$ mit den Steigungsparametern q_1 und q_2 und der Höhe der Ebene am Ursprung q_0 die Form

$$x_3 = q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_0. \quad (5.37)$$

Die Parameter bilden zusammen einen dreidimensionalen Parameterraum R_p mit dem Parametervektor $\mathbf{p} = (q_1, q_2, q_0)$. Jeder Scannerpunkt repräsentiert eine Ebene im Parameterraum. Stellen hoher Ebenendichte im Parameterraum zeigen Ebenen in der Punktwolke an. [MAAS & VOSSELMAN 1999] benutzen diese Technik zur Extraktion von ebenen Dachflächen aus Airborne-Laserscanner-Daten. Aggregiert werden alle einer Ebene zugehörigen Punkte, jedoch ohne den regelmäßig benötigten nachbarschaftlichen Zusammenhang zu berücksichtigen. Den topologischen Zusammenhang realisieren [MAAS & VOSSELMAN 1999] anhand einer ebenen Delaunay-Triangulation in der nun bekannten Ebene. Vereinfacht wird das Verfahren, wenn Flächennormalenvektoren aus lokalen Ebenenschätzungen oder Triangulationsdreiecken in den einzelnen Punkten vorliegen. Sie legen zusammen mit dem Ortsvektor des Punktes die Lage im Parameterraum fest. Stellen hoher Punktdichte im Parameterraum zeigen Ebenen in der Punktwolke an. Die Flächennormalenvektoren können anschaulich auf einer so genannten Gauß'schen Halbkugel angeordnet werden. Flächennormalen zylindrischer Flächen ordnen sich auf der Gauß'schen Halbkugel in einem Kreisbogen an. Die Normale dieses Kreisbogens ist die

Richtung der Zylinderachse. Punkte auf Zylinderflächen gleicher Achsrichtung ordnen sich in einer Projektion in eine zur Achsrichtung orthogonalen Ebene in Kreisen an. Die Kreise (Mittelpunkt und Radius) werden unter Nutzung eines von [KIMME, BALLARD & SKLANSKY 1975] für Kreise abgewandelten Algorithmus von Hough parametrisiert. Unterschiedliche Parameter bedeuten unterschiedliche Zylinderflächen. [VOSELNANN, GORTE, SITHOLE & RABBANI 2004] haben diese Vorgehensweise zur Extraktion von Röhren in industriellen Anlagen benutzt.

[HOFFMAN & JAIN 1987] benutzen einen Parameterraum bestehend aus zweidimensionalen Bildkoordinaten (r, c) , einem Tiefenwert als Funktion der Bildkoordinaten $z = f(r, c)$ sowie den drei Parametern eines in einer lokalen Umgebung per Parameterschätzung bestimmten Flächennormalenvektors $\mathbf{f}$. Sie partitionieren mit Hilfe des CLUSTER-Algorithmus [JAIN & DUBES 1988], der für die Anzahl n der in einem Cluster aggregierten Punkte die quadratische Fehlerfunktion

$$e^2 = \sum_{i=1}^n (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_M)^T (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_M) \quad (5.38)$$

des Parametervektors $\mathbf{p} = (r, c, z, f_1, f_2, f_3)$ zu minimieren versucht. Der Vektor

$$\mathbf{p}_M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \quad (5.39)$$

ist das Zentroid der Vektoren $\mathbf{p}_i$. Die Tests wurden mit Rastertiefenbildern von maximal 16384 Pixeln durchgeführt. CLUSTER sucht festgelegte Datenräume nach einer vorzugebenden Maximalanzahl von Partitionen ab. Die Fehlerfunktion berücksichtigt Punktabstände, Tiefendifferenzen und Normalenvektordifferenzen. Minimale Werte der Fehlerfunktion sind für zusammenhängende ebene Flächen zu erwarten.

5.4.2.5 Krümmung

Während die Abstandskriterien für jede glatte Fläche in gleicher Weise benutzt werden können (der Einfluss der Krümmung wird hier vernachlässigt), ist das Krümmungsverhalten und sind Krümmungswerte spezifisch bezüglich des Typs und der Formparameter von Flächenprimitiven. Alle wesentlichen Informationen über die Form einer Fläche 2. Ordnung geben die Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 , die beiden Lösungen der Gleichung (2.78). Mit diesem Wissen können Scannerpunkte speziell für einen vorgegebenen Primitivtyp aggregiert werden.

Zur Bestimmung der Oberflächenkrümmung aus den Scannerpunkten muss von der infinitesimalen in eine diskrete Betrachtungsweise der tangentialrichtungsabhängigen Normalkrümmungsfunktion (2.84) übergegangen werden. Die Normalkrümmungen sind in der Differentialgeometrie gemäß (2.69) die Quotienten aus 2. und 1. Fundamentalform. Für einen Zentralpunkt P_o mit den Koordinaten $\mathbf{x}_o$ erhält man mit (2.52) und (2.62) diskretisiert in den Richtungen $\Delta \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_o$ zu den Punkten $P_i(\mathbf{x})$ eines vorgegebenen Raumintervalls um den Zentralpunkt

$$\kappa_n(\alpha_i) = \frac{-\Delta \mathbf{x}_i \Delta \mathbf{f}_i}{(\Delta \mathbf{x}_i)^2} \quad (5.40)$$

mit der Differenz $\Delta \mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i - \mathbf{f}_0$ diskreter Flächennormalenvektoren. Die Flächennormalenvektoren wurden durch Ebenenausgleichung der Punkte eines Raumintervalls nach Abschnitt 5.3.2 berechnet. Die Ortsvektoren $\mathbf{x}_i$ beziehen sich auf die in die jeweilige lokale, ausgeglichene Ebene projizierten Scannerpunkte. Sie sind damit einer Glättung unterzogen worden. Die zufälligen Abweichungen der Ortsvektoren in Flächennormalenrichtung werden hierdurch gemindert. Der Winkel α_i ist der Richtungswinkel von P_o nach P_i , in einem ebenen Koordinatensystem in der geschätzten, lokalen Ebene. Für die Wahl der Ausdehnung der Raumintervalle gelten dieselben Sachverhalte wie bei der Wahl der Ausdehnung des Raumintervalls zur Bestimmung der Flächennormalenvektoren in Abschnitt 5.3.2. Abbildung 5.16 zeigt beispielhaft Normalkrümmungswerte, aufgetragen gegen die zugehörigen Richtungswinkel.

Die Parameter $h = \kappa_2$ und $A = \kappa_1 - \kappa_2$ der Normalkrümmungsfunktion (2.84) für den Punkt P_o lassen sich mit Hilfe der Ausgleichsrechnung bestimmen, wenn man die Funktion um eine Orientierungsunbekannte α_o für die unbekannte Richtung der κ_1 -Krümmungslinie zu

$$\kappa_n(\alpha) = h + A \cos^2(\alpha - \alpha_o) \quad (5.41)$$

erweitert. Da auch hier Ausreißer in den Daten zu erwarten sind, wird ein Ausreißertest angeschlossen. Hinsichtlich der Verteilungsfunktion und der Testgröße gelten dieselben Überlegungen wie bei der Ebenenausgleichung, so dass einzelne Punkte als Ausreißer von der Krümmungsberechnung ausgeschlossen werden. Die verbliebenen Normalkrümmungswerte werden einer erneuten Ausgleichung unterzogen. Genauigkeitsparameter dienen der Qualitätsbeurteilung. Die durch Ausgleichung verbesserten Werte der Normalkrümmungen sind beispielhaft in Abbildung 5.16 dargestellt. Die Hauptkrümmungen $\kappa_2 = h$ und $\kappa_1 = A + \kappa_2$ kann man in Krümmungsbildern der Objektoberfläche (Abbildung 5.17) visualisieren.

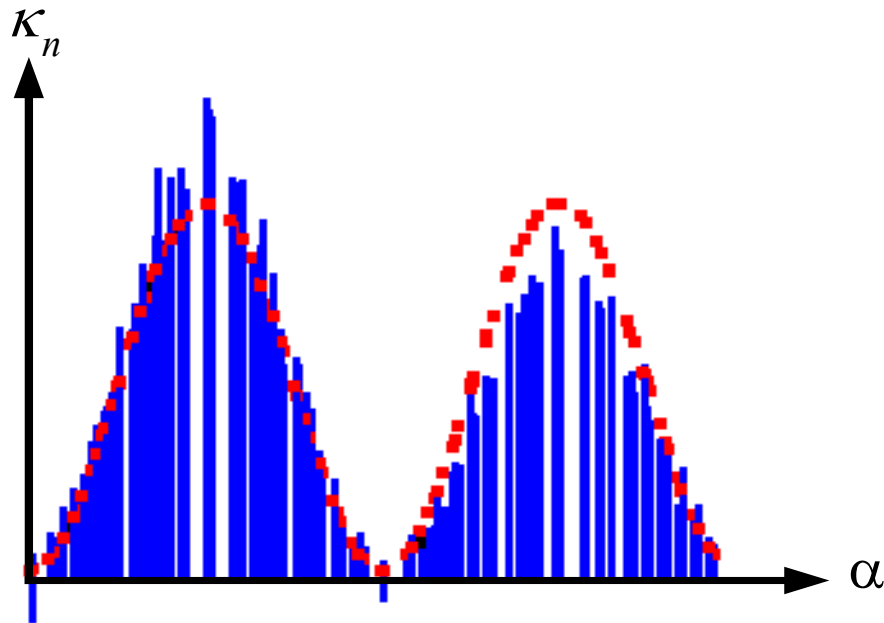


Abbildung 5.16: Normalkrümmungen κ_n aufgetragen gegen die Richtungen α (blau), Ausgleichende Funktion der Normalkrümmungen an den Stellen α in rot

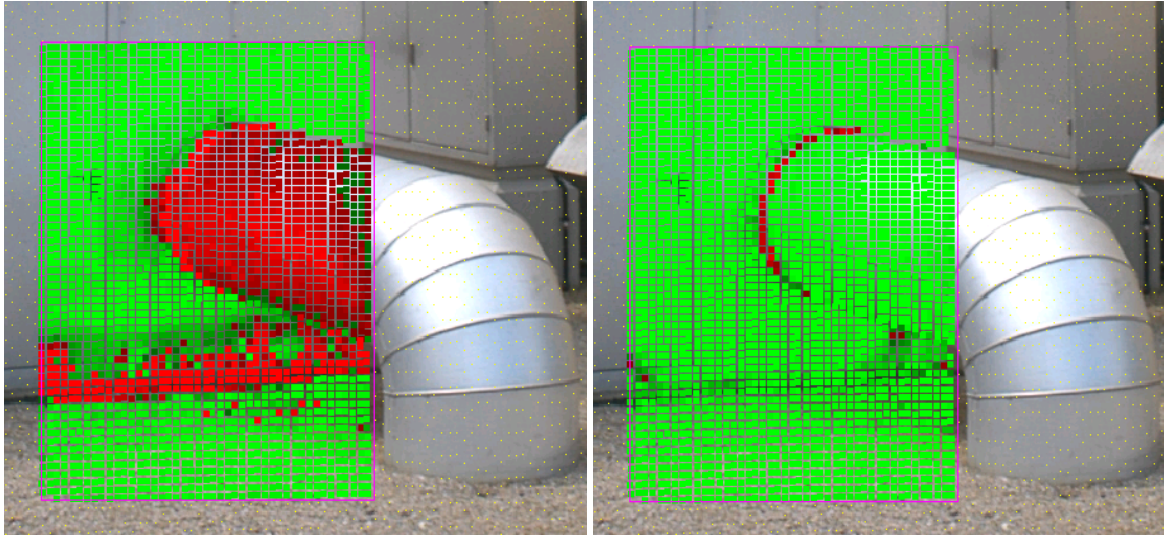


Abbildung 5.17: Krümmungsbilder (Betrag der Krümmung von hellgrün nach hellrot wachsend)
a) Maximale lokale Krümmungen b) Minimale lokale Krümmungen

Für die zu extrahierenden Primitivtypen Ebene und Zylinderfläche sind die Hauptkrümmungen gemäß (5.27) bzw. (5.18) konstant. Im Fall der Ebene sind sie beide gleich Null, im Fall der Zylinderfläche ist eine der beiden - abhängig vom Radius - verschieden von Null. Stimmen beide Hauptkrümmungen an der Stelle eines zu aggregierenden Scannerpunktes hinreichend genau mit vorgegebenen Werten für die Hauptkrümmungen überein, wird der untersuchte Scannerpunkt der bisher aggregierten Scannerpunktmenge hinzugefügt. Entscheidend für eine gute Aggregation ist die Wahl eines geeigneten Schwellwertes für die Übereinstimmungsentscheidung. Im Fall von zu extrahierenden Ebenen sind die vorzugebenden Werte für die Hauptkrümmungen Null. Alternativ können die Hauptkrümmungswerte zu Beginn des Aggregationsprozesses auf der Grundlage des ersten untersuchten Raumintervalls berechnet und mit den im Verlauf der Aggregation hinzugefügten Scannerpunkten durch Mittelbildung sukzessive verbessert werden. Nach der Aggregation des n -ten Punktes erhält man als neue Hauptkrümmungen

$$\begin{aligned}\kappa_{1,n} &= \frac{\kappa_1 + (n-1)\kappa_{1,n-1}}{n}, \\ \kappa_{2,n} &= \frac{\kappa_2 + (n-1)\kappa_{2,n-1}}{n}.\end{aligned}\tag{5.42}$$

Damit wird das Verfahren unabhängig von der Vorgabe von Krümmungswerten durch den Auswerter. Flächenzugehörige Punkte können unabhängig vom Typ aggregiert werden. Die Klassifikation der zugrunde liegenden Fläche erfolgt im Anschluss. Abbildung 5.18 zeigt eine aggregierte Punktmenge (rot) für eine Zylinderfläche. Hinter dem Rohr lagen bei diesem Beispiel Scannerpunkte aus einer zweiten, standpunktverschiedenen Scannermessung vor, sodass die räumliche Triangulation und Aggregation auch hinter dem Rohr im Vordergrund fortgesetzt wurde. Die räumliche Triangulation in Verbindung mit ausreichend großen Maximalabständen benachbarter Punkte ermöglicht, dass die Abschattungen durch das Gestell in der rechten unteren Bildecke keinen Abbruch der Aggregation hervorrufen.

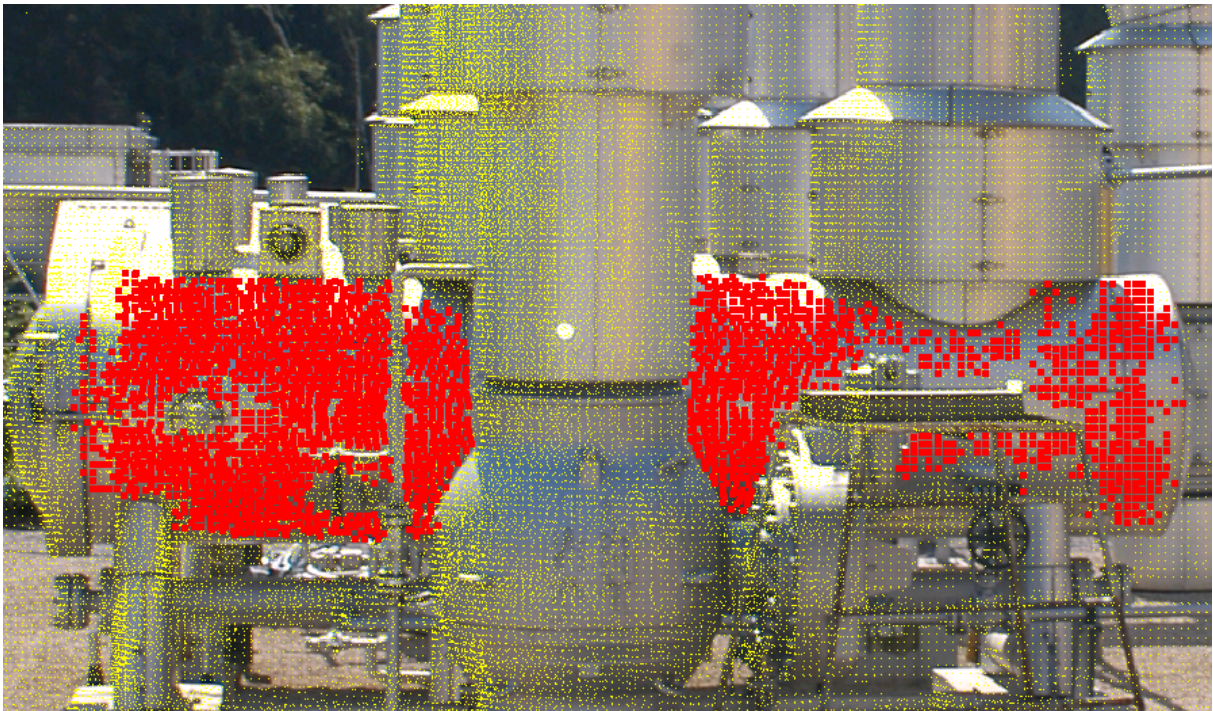


Abbildung 5.18: Aggregierte Scannerpunkte

5.4.3 Ausgleichungsrechnung und Ausreißerelimination

Punktmengen lassen sich mit Hilfe von Ausgleichungsverfahren auf Abweichungen von geometrischen Primitiven prüfen. Das Auftreten von Ausreißern ist häufig durch die Einführung von Scannerpunkten in die Ausgleichungsverfahren, die nicht zum erwarteten Primitiv gehören, bedingt. Die Beobachtungen in Form von Abständen zur gesuchten Fläche sind deshalb nicht normalverteilt. Zur Parameterschätzung geeignet sind wegen der hohen Zahl zu erwartender Ausreißer insbesondere robuste Schätzverfahren, wie sie z.B. von [ROUSSEUW & LEROY 1987] beschrieben werden. Wegen der fix vorzugebenden Punktmenge ist das Verfahren zur Partitionierung durch Teilen einer Gesamtpunktmenge geeignet. Zunächst werden alle Punkte in die Ausgleichung eingeführt. Dem Primitiv nicht zugehörige Punkte werden durch Ausreißertests identifiziert und eliminiert. Am Ende bleiben die repräsentativen Punkte übrig. Häufig ist die vorherige Festlegung auf einen Primitivtyp Voraussetzung.

[BOYER, MIRZA & GANGULY 1994] bilden für die Parameterschätzung ein 2,5D-Modell $x_3 = f(x_1, x_2)$ der Daten. Sie testen Distanzbilder einer Anzahl gegenseitig durchgesetzter, quader- und zylinderförmiger Pakete. Für abgeschlossene Datenpartitionen werden die Parameter verschiedener gegebener Flächenprimitivtypen mittels der iterativ regewichteten Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate (iteratively reweighted least squares (IRLS)) geschätzt. Beobachtungen, deren normierte Verbesserungen einen Schwellwert überschreiten, erhalten in den folgenden Ausgleichungsiterationen das Gewicht Null, die anderen das Gewicht Eins oder die Gewichte werden anhand einer Funktion festgelegt [ROUSSEUW & LEROY 1987]. Dies führt dazu, dass Ausreißer schlussendlich ein Gewicht Null erhalten und keinen Einfluss mehr auf das Schätzergebnis haben. [BENNING 1995 u. 2002] beschreibt neben der bereits erwähnten „data-snooping“ genannten Methode von [BAARDA 1968] eine IRLS-Methode, bei der die Beobachtungen i im Iterationsschritt j mit

$$\begin{aligned}
p_i^{j+1} &= \frac{p_i}{\sqrt{1 + a_i^2}} \quad j = 1, 2, 3, \\
p_i^{j+1} &= p_i e^{-a_i^2} \quad j \geq 4
\end{aligned} \tag{5.43}$$

mit

$$a_i = \frac{\hat{e}_i^j}{c \sigma_o^j \sqrt{r_i / p_i}} \tag{5.44}$$

regewichtet werden. Der Faktor c ist ein vorzugebender Dämpfungsfaktor.

[BOYER, MIRZA & GANGULY 1994] erweitern die Methode für expandierende Punktmengen. Sie beginnen mit einer Startpunktmenge, die mit der IRLS-Methode geschätzt und anschließend klassifiziert wurde, und fügen dem Satz der Beobachtungen sequentiell weitere Beobachtungen hinzu. Die Gewichte der hinzugefügten Beobachtungen basieren auf der bisherigen Parameterschätzung. Die sequentielle Aggregation wird fortgeführt, bis der Ausreißeranteil über 75 % steigt.

[PFEIFER & WINTERHALDER 2004] haben ein Verfahren zur Approximation von Querschnitten und Achsen von Baumstämmen und -ästen durch Zylinderstücke bzw. zylinderachsenbasierte Freiformkurven entwickelt. Grundlage ist eine terrestrische Aufnahme mit dem Laserscanner. Der Bearbeiter gibt durch ein Zentrum und einen Radius einen Ausschnitt der Punktwolke vor. Der Ausschnitt muss in seiner Ausdehnung einem Stammabschnitt entsprechen, der dann durch Schätzung im Modell der kleinsten Quadrate als Zylinder parametrisiert wird. Die notwendige Näherung für die Achsrichtung des Zylinders ist die Normale einer Ebene, gebildet aus den Normalen lokal angepasster Ebenen in den einzelnen Scannerpunkten. Die Näherung für die Position des Zylinders wird durch das Baryzentrum der betrachteten Scannerpunkte gebildet. Die Näherung des Radius ist der halbe Durchmesser des Punktwolkenausschnittes. Die äußersten Punkte in Achsrichtung definieren die Achslänge des Zylinders. Die geschätzten Parameter dieses Zylinderabschnittes werden als Näherungswerte für den angrenzenden, überlappenden Stamm- bzw. Astabschnitt verwendet. Der gesamte Stamm bzw. Ast wird aus einer Anzahl von Zylinderabschnitten zusammengesetzt. Die entstehende Folge von Stamm- bzw. Astmitten und -radien werden durch Polynome, im einfachsten Fall Geraden, approximiert. Bei dieser Vorgehensweise findet kein region-growing um einzelne Scannerpunkte, sondern um Zylinderabschnitte vorgegebener Achslängen statt. Achsverlauf und Achsradius werden als polynomiale Funktionen bestimmt. Voraussetzung für das Verfahren ist die Vorgabe einer bereits auf einen Stamm bzw. einen Ast reduzierten Scannerpunktmenge, die nur wenige Ausreißer enthält. Die Aggregationsentscheidung entfällt daher weitestgehend.

5.4.4 Angewandte Vorgehensweise

Das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren arbeitet nicht nach dem Teilungsprinzip, sondern nach dem Aggregationsprinzip, um die Untersuchung nicht benötigter Teilräume zu vermeiden. Im Aggregationsverfahren werden lokale, bis auf die Nachbarschaften von der bereits aggregierten Scannerpunktmenge unabhängige Eigenschaften für die Aggregation in Kombination benutzt. Wegen der heute möglichen, hohen Scannerpunktdichte wird sich bei der Berechnung der Eigenschaften nicht auf Drei-

ecke von Triangulationen beschränkt. Vielmehr werden die Eigenschaften auf der Grundlage von Scannerpunkten innerhalb von Raumintervallen berechnet.

Der Winkelvergleich von Normalenvektoren berücksichtigt nicht die Richtung der Verbindung der benachbarten Punkte. Vergleiche von lokalen Normalenvektoren berücksichtigen zwar die volle Information der Normalenvektoren, verzichten jedoch auf den Einfluss des Abstandes $\Delta \mathbf{x}$ der Punkte auf die Oberflächenkrümmung. Die diskrete Normalkrümmung (5.40) hingegen berücksichtigt sowohl die Punktabstände $\Delta \mathbf{x}$ als auch die Normalenvektorendifferenzen $\Delta \mathbf{f}$.

Bei der Punktaggregation wird vielfach nicht zwischen unterschiedlich gekrümmten Flächen unterschieden. Die Klassifikation der Flächen erfolgt in einem zweiten Arbeitsschritt. Die Schwellwerte für die Differenzen von Flächennormalen oder für den von ihnen eingeschlossenen Winkel können nur für die maximale Normalkrümmung der Fläche (bei Flächen 2. Ordnung die betragsmäßig größere Hauptkrümmung) gelten. Bei geringer gewähltem Schwellwert wird der Aggregationsfortschritt bei gekrümmten Regelflächen „mäanderförmig“ jeweils in Richtung bzw. Gegenrichtung der „Erzeugenden (Geraden)“ erfolgen. Deshalb wird bei dem hier vorgestellten Verfahren zu einem flächendifferenzierenden Verfahren übergegangen. Statt der Normalenvektoren bzw. deren Differenz werden neben den Eigenschaften „Abstand benachbarter Punkte“, „Abstand zur lokalen Ebene“ die lokalen Krümmungseigenschaften in Form der beiden Hauptkrümmungen benutzt. Der Berechnungsweg zur Ermittlung der Hauptkrümmungen wurde in Abschnitt 5.4.2.5 vorgestellt. Die Nachbarschaften für den Aggregationspfad werden aus den genannten Gründen durch eine räumliche Delaunay-Triangulation realisiert. Die Aggregation erfolgt flächentypunabhängig, berücksichtigt aber dennoch Krümmungsmaß und Krümmungseigenschaften der einzelnen Primitivtypen.

Gleichwohl ist es sinnvoll, im Rahmen der Parametrisierung der Fläche die aggregierte Punktmenge auf Ausreißer zu testen. Die zu erwartende Anzahl von Ausreißern ist wegen der vorgeschalteten Aggregation wesentlich geringer als bei alleiniger Anwendung von robusten Ausreißertests.

5.5 Klassifikation

Automatische Klassifikationsalgorithmen werden insbesondere dann benötigt, wenn Punktwolken ohne interaktive Vorauswahl des Primitivtyps durch den Auswerter ausgewertet werden sollen. Da jede Fläche 2. Ordnung durch die Quadriken (4.2) eindeutig beschrieben ist, bietet sich für sie eine Parameterschätzung der Quadriken in Verbindung mit geeigneten Schwellwerten zur Klassifikation an. Doch bereits [HOFFMAN & JAIN 1987] berichten von einer hohen Rauschempfindlichkeit dieser Klassifikationsmethode.

[BOYER, MIRZA & GANGULY 1994] benutzen eine generalisierte Form CAIC (consistent AIC) des Akaike Information Criterion (AIC) [BOZDOGAN 1987] für feste Punktpartitionen zur Klassifikation. Das CAIC

$$CAIC = -2L_u + u(\log(n) + 1) \quad (5.45)$$

mit

$$L_u = -\frac{(1+f)}{2} \sum_{i=1}^n p_i \log \left(1 + \frac{e_i^2}{f\sigma^2} \right) \quad (5.46)$$

basiert im Wesentlichen auf der Menge der eingehenden Daten und den normierten Verbesserungen aus dem Schätzverfahren. Darin ist u die Anzahl der Parameter, n die Anzahl der Beobachtungen, p_i die Gewichte und e_i die Residuen der Beobachtungen i . Es muss für jeden möglichen Flächentyp bestimmt werden. Die CAIC der einzelnen Typen werden für die Klassifikationsentscheidung verglichen, um den bestapproximierenden Primitivtyp zu ermitteln.

[HOFFMAN & JAIN 1987] schlagen vor, über die Punktpartitionen kumulierte, lokal berechnete Krümmungswerte der 3x3-Nachbarschaft eines Pixels, und zwar

- die durchschnittliche Krümmung,
- die minimale Krümmung
- die maximale Krümmung,
- die mittlere Krümmung,
- die Gauß'sche Krümmung,
- und das Verhältnis von minimaler und maximaler Krümmung

zur Klassifikation in planare, konkave und konvexe Flächen zu verwenden.

Bei Verwendung der Gauß'schen Halbkugel bilden sich Ebenen in Punkten und Zylinder in Kreisbögen ab, so dass hieran der Flächentyp abzulesen ist.

Bei einer interaktiven Vorgehensweise gibt der Auswerter in der Regel den Flächentyp vor. Andernfalls kann die Klassifikationsentscheidung anhand von berechneten Krümmungswerten, wie z.B. von [HOFFMAN & JAIN 1987] vorgeschlagen, getroffen werden. Alle von ihnen genannten Werte basieren auf den beiden Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 . Bereits [BESL & JAIN 1986] stellen dem entsprechend Tabelle 5.1 zur Klassifikation auf:

$\kappa_1 \setminus \kappa_2$	-	0	+
-	Spitze	Rücken	Sattel
0	Rücken	Ebene	Tal
+	Sattel	Tal	Senke

Tabelle 5.1: Flächenformen in Abhängigkeit der Hauptkrümmungen. Aus: [BESL & JAIN 1986].

Die Unterscheidung zwischen Rücken und Tal bzw. zwischen Spitze und Senke ist abhängig von der Betrachtungsseite. Übertragen auf Flächenprimitive und Beträge für die Hauptkrümmungen, sofern sie von Null verschieden sind, erhält man Tabelle 5.2.

$\kappa_1 \setminus \kappa_2$	-	0	+
-	Kugel	Zylinder	Sattel
0	Zylinder	Ebene	Zylinder
+	Sattel	Zylinder	Kugel

Tabelle 5.2: Flächentypen in Abhängigkeit der Hauptkrümmungen

Während für die Ebene im Rahmen der vorgegebenen Genauigkeit Hauptkrümmungswerte um Null

erwartet werden, wird für die Klassifikation von Zylinderflächen ein Hauptkrümmungswert wesentlich von Null verschieden vorausgesetzt.

In dem im Rahmen dieser Arbeit entstandenen Programm werden während des Aggregationsprozesses mittlere Hauptkrümmungen (5.42) berechnet. Sie sind repräsentativ für die aggregierte Punktmenge. Durch geeignete, vorzugebende Schwellwerte wird zwischen Ebene und Zylinder bzw. zwischen Ebene und Nicht-Ebene klassifiziert.

5.6 Parametrisierung

Zur Bestimmung der Form- und Lageparameter der Fläche sowie zum Ausgleich gerätebedingter, zufälliger Abweichungen der Scannerpunkte und zufällig verteilter, nicht zu modellierender Objektstrukturen (Abbildung 5.19) wird die Ausgleichsrechnung im Gauß-Markoff-Modell (Abschnitt 4.2.1) benutzt. Die Klassifikation der Fläche in eine der zulässigen Flächentypen Ebene und Zylinder erfolgte bereits im Vorfeld.

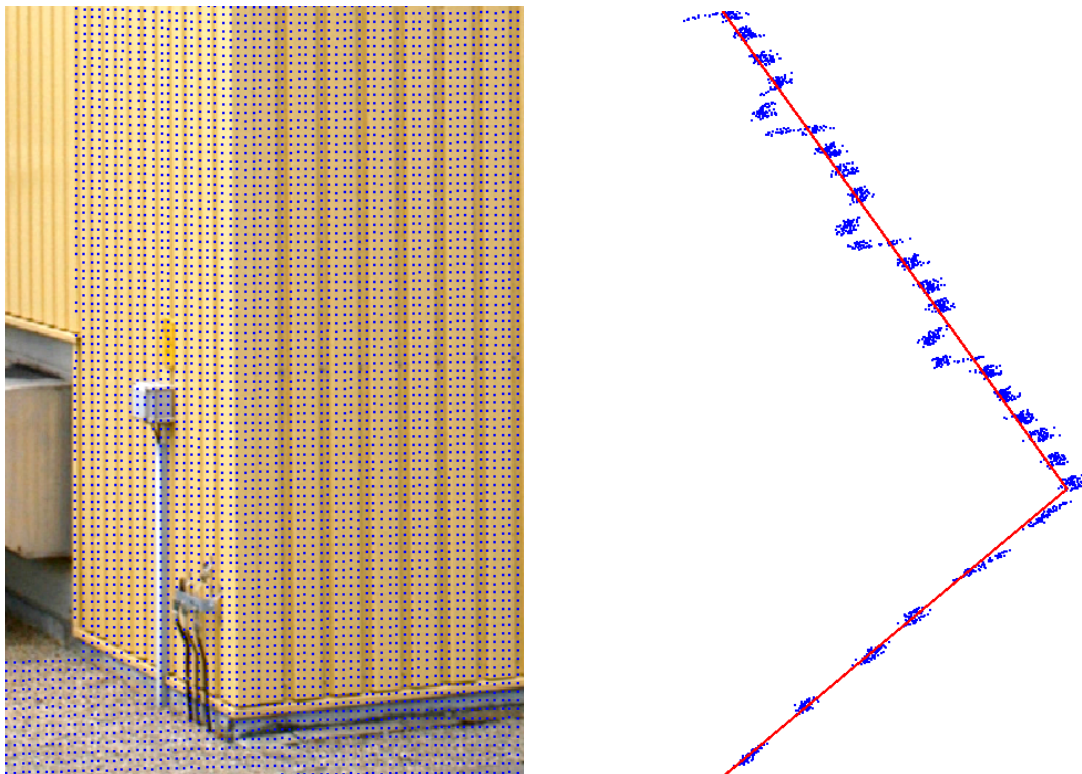


Abbildung 5.19: Objektstruktur am Beispiel eines Trapezbleches
a) Ansicht von vorne b) Ansicht von oben

Der Aufstellung von flächentypspezifischen Beobachtungsgleichungen wurde der Vorzug vor einer allgemein gehaltenen Ausgleichung für alle Flächen 2. Ordnung auf der Grundlage der Gleichung (4.2) gegeben. Eine Klassifikation in gängige Flächenprimitive wäre im Nachhinein z.B. durch Hypothesentests auf Signifikanz einzelner Quadriken oder primitivtypabhängiger Quadrikenverknüpfungen erforderlich. Mit der Wahl der flächenspezifischen Ausgleichung wird die Zahl der zu schätzenden Parameter klein gehalten.

5.6.1 Näherungslösung

Die Ausgleichung benötigt bei nichtlinearen Beobachtungsgleichungen Näherungswerte für die zu schätzenden Parameter. Die Beobachtungsgleichung der Ebene (4.20) ist linear. Erst durch die Restriktionsgleichung für die Normierung der Ebenennormalen (4.72) werden Näherungswerte benötigt. Die Beobachtungsgleichung der Zylinderfläche (4.10) ist quadratisch. Der Näherungswert für den Parameter Radius ist wegen (5.18) modellbedingt der reziproke Betrag der größeren der beiden Hauptkrümmungen aus dem Aggregationsverfahren für die Scannerpunkte. Die Näherungswerte für die Achsrichtung des Zylinders ergeben sich aus dem Kreuzprodukt einer Auswahl von über die aggregierte Punktmenge verteilten Flächennormalenvektoren. Die Lage der Zylinderachse ergibt sich aus den gemittelten Schnittpunkten einiger in eine Ebene senkrecht zur Achsrichtung projizierter Flächennormalenvektoren.

5.6.2 Parameterschätzung

Da durch die Wahl der Aggregationsmethode zur Bildung der Scannerpunktpartition nur noch mit einer geringen Anzahl von Ausreißern zu rechnen ist, kann hier auf robuste Schätzverfahren, wie sie in Abschnitt 5.4.3 im Ansatz vorgestellt wurden, verzichtet werden. Es wird deshalb das Gauß-Markoff-Modell (4.36) (Abschnitt 4.2.1) benutzt. Gründe für eine unterschiedliche Gewichtung der Beobachtungen liegen nicht vor, so dass im Modell (4.36) die Gewichtsmatrix $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ gewählt wird. Die Rechenzeiten werden nicht durch die Einführung einer Gewichtsmatrix erhöht.

Die Schätzung für den Zuschlagsvektor (4.45) zusammen mit dem Näherungsvektor (4.46) liefert – nach einer hinreichenden Anzahl von Iterationen – die geschätzten Parameter des Flächenprimitivs. Im Fall der Ebene erhält man den Einheitsnormalenvektor und den Ursprungsabstand. Im Fall der Zylinderfläche erhält man den Radius und die Zylinderachse. Die Ausdehnung der Zylinderfläche in Achsrichtung ist nicht Bestandteil der Ausgleichung. Sie richtet sich nach der maximalen Ausdehnung der Scannerpunkte entlang der Zylinderachse.

Die Verbesserungen der Einzelpunkte in Form der Abstände zur Fläche liefert (4.47). Als Maß für die Güte der Flächenbestimmung dient die Standardabweichung der Punktabstände aus (4.48).

5.6.3 Ausreißerelimination

Zur Identifikation und Elimination einzelner Ausreißer in den aggregierten Scannerpunkten sind Testverfahren auf die Daten anzuwenden, wie sie in Abschnitt 4.2.3 vorgestellt werden. Für normalverteilte Beobachtungen mit unbekannter A-priori-Standardabweichung σ ist die t-Verteilung (4.86) anzuhalten. Die Anzahl der Beobachtungen n ist viel größer als die Anzahl der Unbekannten u und die Beobachtungsgleichungen sind gleichen Typs sowie gleichmäßig miteinander verknüpft, so dass die Voraussetzungen für einen Ausreißertest mit vereinfachter Testgröße (4.91) vorliegen. Da bei der Aggregation der Scannerpunkte bereits vorselektiert wurde, kann für den Ausreißertest hier mit wenig verbliebenen Ausreißern gerechnet werden. Ein Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$, entspricht gemäß der Standardnormalverteilung (4.83) einem Quantil von 1,96, gerundet 2 für die Testgröße T . Das Konfidenzintervall beträgt $\pm T = 2$. Alle Punkte, für die die Testgröße

$$T_i = \frac{|\hat{e}_i|}{\hat{\sigma}} > T = 2 \quad (5.47)$$

ist, werden als der Fläche nicht zugehörig ausgeschlossen. Nach einer Neuausgleichung der restlichen Punkte erhält man die endgültigen Flächenparameter. Damit wurde ein im Vergleich zu Verfahren wie dem iterativen Regewichtungsverfahren einfaches und schnelles Verfahren für den Ausreißertest verwandt, das durch nur zwei notwendige Iterationen den Rechenaufwand gering hält.

5.7 Formalisierung des Funktionalis

Aus den aggregierten Scannerpunktmengen werden zunächst Flächen von im Prinzip unendlicher Ausdehnung extrahiert. Für Ebenen ist dies unmittelbar ersichtlich. Zylinderflächen sind zwar in Achsrichtung begrenzt; die Begrenzung ist auf der Grundlage der maximalen Ausbreitung der Scannerpunkte jedoch nur unzureichend festgelegt. In vielen Fällen werden formalisierte Flächen benötigt. Bei der Verwendung der extrahierten Flächen für die Kanten-, Ecken- und Profilextraktion ist die Kenntnis des Randverlaufs notwendig. An Gebäuden kommen z.B. Ausschnitte von Zylinderflächen vor (Abbildung 5.20).



Abbildung 5.20: Ausschnitte von Zylinderflächen an Gebäuden

5.7.1 Hinzuziehung zusätzlicher, randnaher Punkte

Die Nutzung der Scannerpunkte eines Raumintervalls bewirkt gleichzeitig eine Glättung, die zu einer Verstetigung der differentialgeometrischen Krümmungseigenschaften führt. Der rekursive Aggregationsprozess bricht deshalb in Abhängigkeit von der Größe des Schwellwertes für die Krümmungsänderung und vom Glättungsmaß in Form der Größe des Raumintervalls bereits bei kanten- und damit randnahen Punkten ab. Je größer das Raumintervall und je kleiner der Schwellwert für die Krümmungsänderung gewählt wird, desto größer ist der Abstand zu einer Kante. Für eine gute Flächenformalisierung notwendige, randnahe Scannerpunkte fehlen in der aggregierten Punktmenge.

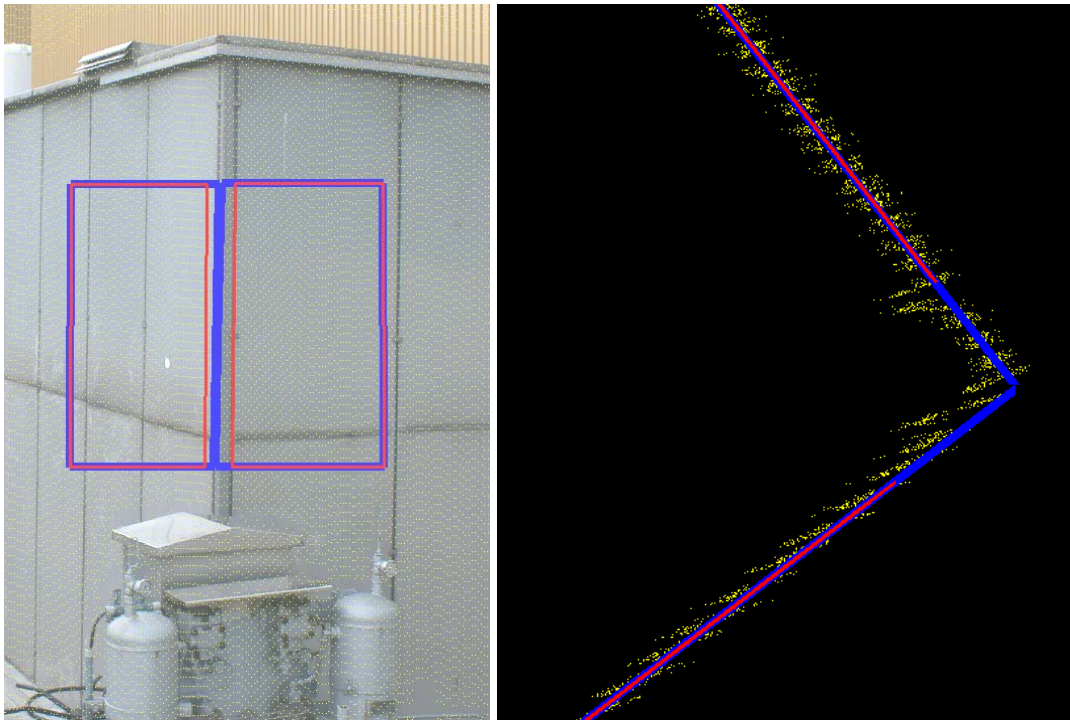


Abbildung 5.21: Randermittlung an der Gebäudekante ohne (rot) und mit (blau) zusätzlichen Punkten

Für die Formalisierung des Flächenrandes ist es deshalb sinnvoll, die Scannerpunkte, die zur Berechnung der punktbezogenen Flächennormalenvektoren beigetragen haben (und nicht als Ausreißer eliminiert wurden), der aggregierten Scannerpunktmenge für den Zweck der Formalisierung hinzuzuziehen. Das Beispiel in Abbildung 5.21 zeigt, dass der Ebenenrand im Bereich der Gebäudekante unter Hinzunahme der zusätzlichen Punkte wesentlich besser approximiert wird. In der Ebenenapproximation zeigt sich kein Unterschied.

5.7.2 Geometrie des Randes

Die Formalisierung der extrahierten Flächen führt zu Polygonen auf der Fläche zwischen benachbarten, als Randpunkte klassifizierten Scannerpunkten. Die Polygonstücke sind Abschnitte von - im Allgemeinen - gekrümmten Kurvenstücken. Im Fall von Ebenen sind sie Geradenstücke, denn die Normalkrümmung von Ebenen ist in allen Punkten in allen Richtungen gemäß (5.26) gleich Null. Ränder von zylinderförmigen Objekten werden regelmäßig durch Schnitte mit ebenen Flächen gebildet. Der Schnitt mit einer Ebene führt zu ebenen Schnittkurven. Zur Bildung des Schnitts wird die Gleichung der x_1x_2 -Ebene ((4.13) für $x_3 = c = 0$) in die allgemeine Gleichung der Zylinderfläche (4.8) eingesetzt. Für die Berechnung ist es wegen der Rotationssymmetrie bezüglich der x_3 -Achse unschädlich, durch Setzen von $a_{12} = 0$ auf eine Rotation der Zylinderfläche um die x_3 -Achse zu verzichten. Ebenfalls kann auf eine Translation der Zylinderfläche durch Setzen von $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ verzichtet werden. So erhält man aus der allgemeinen Zylindergleichung (4.8)

$$\frac{a_{11}^2 x_1^2}{r^2} + \frac{a_{22}^2 x_2^2}{r^2} - 1 = 0, \quad (5.48)$$

mit den Quadriken

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} a_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad q_0 = -1. \quad (5.49)$$

Durch Vergleich mit den Quadriken der Ellipse (4.30) erhält man die Haupttradien $r_1 = r/a_{11}$ und $r_2 = r/a_{22}$. Die ebenen Schnittkurven der Zylinderflächen sind also Ellipsenbögen.

5.7.3 Abbildung in eine Ebene (Abwicklung)

Flächen heißen abwickelbar, wenn in allen Punkten (außer Nabelpunkten), die Gauß'sche Krümmung

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = 0 \quad (5.50)$$

ist, also eine der Hauptkrümmungen gleich Null ist. Abwickelbare Flächen lassen sich winkel- und längentreu in eine Ebene abbilden. Für Ebenen gilt dies qua definitionem. Senkrechte Kreiszylinderflächen erfüllen mit (5.18) die Bedingung (5.50) der abwickelbaren Flächen.

Bildet man die Zylinderfläche in der Darstellung (5.10) zylindrischer Koordinaten (r, u^2, u^1) mit den Flächenkoordinaten u^α in eine Ebene, z.B. die x_1x_2 -Ebene ($a = 0$), in der Darstellung (5.20) kartesischer Koordinaten mit den Flächenkoordinaten $\bar{u}^\alpha$ und mit der Abbildungsvorschrift

$$\bar{\mathbf{x}} = (\bar{u}^1, \bar{u}^2, 0) = (r \operatorname{arc} u^2, u^1, 0), \quad u^2 \text{ in Bogenmaß}, \quad (5.51)$$

ab, so gilt für die Differentiale in Richtung der Koordinatenlinien gemäß (2.46)

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_{u^1} &= (0, 1, 0), \\ \bar{\mathbf{x}}_{u^2} &= (r, 0, 0). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Die Koeffizienten (2.51) der 1. Fundamentalform (2.52) sind

$$\begin{aligned} \bar{g}_{11} &= 1, \\ \bar{g}_{12} &= 0, \\ \bar{g}_{22} &= r^2. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Die Abbildung ist isometrisch, denn es gilt im Vergleich mit (5.13)

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2. \quad (5.54)$$

Die Abbildung ist konform, wenn die Koeffizienten der 1. Fundamentalform proportional zueinander sind [KREYSZIG 1957]:

$$g_{\mu\nu} = \eta(u^1, u^2) \bar{g}_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2. \quad (5.55)$$

Da die Koeffizienten (5.53) der Abbildung im vorliegenden Fall identisch mit den Koeffizienten (5.13) der Zylinderfläche sind, sind sie auch proportional zueinander. Die Abbildung der Zylinderfläche wird bei der Formalisierung analog der ebenen Fläche behandelt. Beachtet werden muss die Nahtstelle, an der die Zylinderfläche „aufgeschnitten“ wird. Nach der Formalisierung wird das gefundene Randpolygon zurück auf die Zylinderfläche transformiert. Die Formalisierung kann nun im R_2 erfolgen.

5.7.4 Alpha-Shape

Das die extrahierte Fläche formalisierende Polygon muss alle aggregierten Scannerpunkte (Abbildung 5.22a) umschließen und gleichzeitig Einbuchtungen im Rand und Löcher innerhalb der Fläche aussparen. Das geeignete Mittel für eine Umschließung, die konvexe Hülle (Abbildung 5.22b), wurde bereits in Abschnitt 5.3.1.1 vorgestellt. Einbuchtungen und Löcher werden nicht berücksichtigt. Das Alpha-Shape (Abbildung 5.22c) ist definiert als das Randpolygon der Menge aller möglichen Punktverbindungen, die eine vorgegebene Länge nicht überschreiten. Es berücksichtigt im Rahmen eines vorzuziehenden Längenschwellwertes Einbuchtungen und Löcher in der Punktmenge. Basis des Alpha-Shapes ist eine zweidimensionale Delaunay-Triangulation der ggf. in eine Ebene abgebildeten Scannerpunkte.

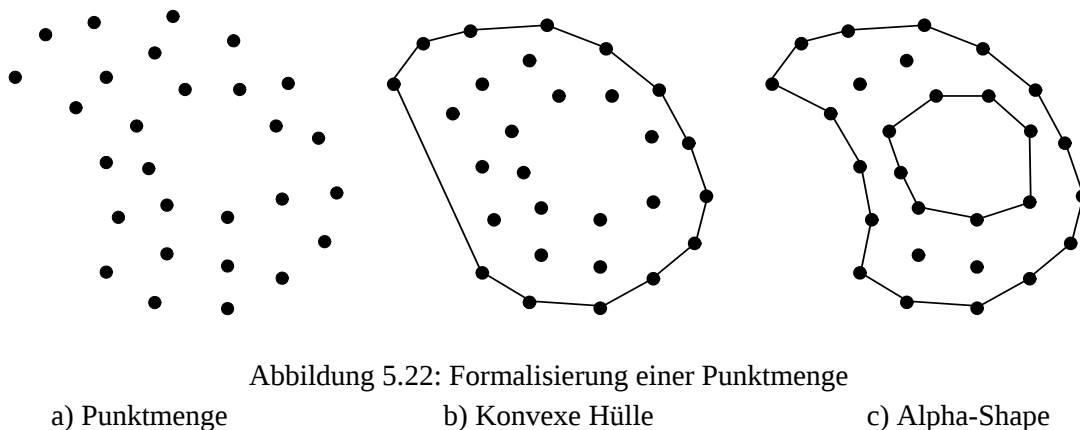


Abbildung 5.22: Formalisierung einer Punktmenge

a) Punktmenge

b) Konvexe Hülle

c) Alpha-Shape

5.7.5 Generalisierung

Für die weitere Verwendung der extrahierten Flächen ist der durch die Dichte der Punktwolke gegebene Detailgrad der Formalisierung nicht erforderlich. Es ist ausreichend, sich auf signifikante Stellen des Randpolygons zu beschränken. Signifikante Stellen des Randpolygons lassen sich mit Hilfe der Generalisierung finden.

Die Generalisierung ist insbesondere aus der Kartographie hinreichend bekannt. Objekte der realen Welt werden in maßstäbliche Karten abgebildet. Die visuelle Erkennbarkeit erfordert eine geometrische Mindestgröße der Objekte in der maßstäblichen Darstellung, die sich aus der optischen Geometrie zwischen Zeichnung und den Augen des Betrachters ergeben. Dies führt dazu, dass in Gebieten großer Detailliertheit in der Abbildung räumliche Konflikte zwischen den darzustellenden Objekten und Objektteilen entstehen.

5.7.5.1 Generalisierungsmittel

Als Mittel der Generalisierung stehen in der Kartographie nach [HAKE & GRÜNREICH 1994]

- das Vereinfachen mit der Untermenge Glätten,
- das Vergrößern mit der Untermenge Verbreitern,
- das Verdrängen als Folge des Verbreiterns,
- das Zusammenfassen,
- das Auswählen/Weglassen,
- das Klassifizieren bzw. Typisieren und
- das Bewerten

zur Verfügung. Eine anschauliche Darstellung der Arten der Generalisierung am Beispiel der kartographischen Generalisierung findet sich in [HAKE & GRÜNREICH 1994]. Die ersten drei Arten sind rein geometrische, die weiteren geometrisch-begriffliche Generalisierungen. Das [AGENT CONSORTIUM 1999] trennt nach attributiven und geometrischen Generalisierungen. Die attributiven Generalisierungen werden in eine thematische und eine zusammenfassende Selektion unterschieden. Alle anderen Generalisierungsarten fallen unter die geometrische Generalisierung.

Werden Details der Objektstrukturen nicht benötigt, wird das Mittel der Vereinfachung benutzt. Die Vereinfachung kann durch das Weglassen von Objektdetails, z.B. Gebäudevorsprüngen bei der Generalisierung für topographische Karten, erreicht werden. Detailstrukturen können entfallen, wenn sie nicht benötigt werden. Zu berücksichtigen sind dabei ggf. die signifikanten Strukturen des Objekts. Im Report [AGENT CONSORTIUM 1999] wird für die Vereinfachung von Polygonen zwischen Vorgehensweisen unterschieden, bei denen einzelne Punkte auf der Grundlage von Auswahlkriterien weggelassen werden und bei denen anhand von Algorithmen bestmöglich repräsentierende Punkte berechnet werden. Insbesondere letztere führen zu einer Glättung, also zur Elimination nicht benötigter Details unter Beibehaltung der signifikanten Stellen. In der Bildverarbeitung werden diese Algorithmen als Glättungsfilter bezeichnet.

Bei der im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Flächenextraktion werden die Flächen bisher durch ein Alpha-Shape formalisiert. Die Richtungen der Polygonseiten des Alpha-Shapes ändern sich an jedem Alpha-Shape-Punkt. Es ist deshalb sinnvoll, das Randpolygon einer Generalisierung, hier der Vereinfachung, zu unterziehen.

5.7.5.2 Vereinfachung

Für die Generalisierung von Polygonen existieren bereits viele Ansätze. [MCMASTER 1987 und 1989] klassifiziert die Vereinfachungsalgorithmen für Punktpolygone in fünf Klassen nach dem geometrischen Ausmaß der Vereinfachung:

- Independent point algorithms: Es werden keine mathematischen Beziehungen zwischen den benachbarten Punkten benutzt.
- Local processing routines: Sie berücksichtigen Charakteristika der unmittelbar benachbarten Punkte z.B. deren Distanz oder die Änderung der Richtungen benachbarter Polygonseiten bei der Punktselektion bzw. -rejektion.

- Constrained extendet local processing routines: Sie werten eine Anzahl benachbarter Punkte aus. Die Anzahl der Punkte hängt von der Distanz, den Unterschieden in den Richtungswinkeln der Polygonseiten oder der Anzahl der Punkte ab. Lösungen bieten laut [MCMASTER 1989] Lang, Oppheim, Johannsen, Deveau und Roberge an.
- Unconstrained extendet local processing routines: Diese Algorithmen arbeiten wie die vorgenannten, allerdings wird der Suchraum nicht durch feste Parameter wie eine Punktzahl oder Maximaldistanzen, sondern durch die geomorphologische Komplexität des Polygons begrenzt.
- Global routines: Diese Routinen testen das Polygon als Gesamtes iterativ auf signifikante Punkte. Beispiel ist der Algorithmus von Douglas [DOUGLAS & PEUCKER 1973].

Von oben nach unten wird der Aufwand bei der linearen Suche im mathematischen Prozess größer.

Ein sehr einfacher Ansatz selektiert lediglich jeden n -ten Punkt des Randpolygons. Er gehört damit zur Gruppe der „Independent point algorithms“. Die Information der weggelassenen Polygonpunkte bleibt ungenutzt. Die Information aller Punkte wird genutzt, wenn aus einer festgelegten Anzahl von n aufeinander folgenden Punkten durch Mittelung der Punktkoordinaten ein neuer Punkt gebildet wird. Diese „Constrained extendet local processing routine“ führt bei unstrukturierten Polygonen zu akzeptablen Ergebnissen. Bei Polygonen, die in Teilstücken lange Geraden repräsentieren, erhält man unnötig viele Punkte auf den geraden Teilstücken. Stellen signifikanter Richtungsänderungen werden übermäßig geglättet. Lange Linienprimitive, z.B. Geraden, und signifikante nicht glatte Richtungsänderungen in Form von Knicken kommen an baulichen Anlagen häufig vor. Deshalb wird hier ein Vereinfachungsverfahren verwendet, das signifikante Stellen zwischen aneinander grenzenden Linienprimitiven im Randpolygon erkennt. Die Anzahl von Punkten zwischen zwei signifikanten Stellen sollte nicht begrenzt werden, um sowohl lange als auch kurze Linienstücke berücksichtigen zu können. Die Linienstücke sollten als Linienprimitive durch Ausgleichung parametrisiert werden. Die Schnittpunkte der Primitive bilden – bis auf Ausnahmen, die später behandelt werden – die Knickpunkte des vereinfachten Polygons. Man erhält eine „Unconstrained extendet local processing routine“.

Betrachtet man die Generalisierung aus der Sicht des zu erstellenden Realweltmodells, so repräsentiert der Rand näherungsweise nicht glatte Stellen der Objektoberfläche, also die Kanten. Die Kanten sind Linien im Raum und Schnitte von aneinander grenzenden Objektflächen. Sie besitzen die sich aus dem Schnitt ergebende Gestalt. Das sind im Fall von Schnitten von zwei Ebenen Geraden, im Fall von Schnitten einer Ebene mit einer Zylinderfläche Ellipsenbögen. Die bisher realisierte, einfachste Linienform ist die Gerade. Künftig sollten jedoch auch andere Linienprimitive, z.B. Kreis- und Ellipsenbögen als Flächenrandstücke approximierbar sein.

Betrachtet man den Flächenrand als Kurve der Differentialgeometrie, diskretisiert durch ein Polygon von Geradenstücken zwischen den Scannerpunkten des Alpha-Shapes, so ist das Maß der Richtungsänderung die Krümmung. Für Geraden als spezielle Kurven C gilt in der x_1x_2 -Ebene des R_3 mit (4.28) die Darstellung

$$x(u^1) = (u^1, mu^1 + b, 0). \quad (5.56)$$

Die Tangentenrichtung der Geraden ist gemäß (2.22)

$$\mathbf{t}(u^1) = \frac{1}{1+m^2} (1, m, 0) = \text{const.} \quad (5.57)$$

konstant. Die Krümmung k ist gemäß (2.25) gleich Null. Die Geradenbedingung ist nicht erfüllt, wenn die Richtungsdivergenz $\mathbf{t}_{i+1} - \mathbf{t}_i$ zwischen je zwei benachbarten Polygonseiten von Null verschieden ist. Die Richtung einer Polygonseite entspricht dem lokalen Tangentenvektor einer durch die Polygonpunkte gebildeten Kurve. Man erhält, diskretisiert aus (2.22), mit der Ortsvektorendifferenz

$$\Delta \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i \quad (5.58)$$

den Tangentenvektor

$$\mathbf{t}_i(\mathbf{x}_i) = \frac{\Delta \mathbf{x}_i}{|\Delta \mathbf{x}_i|} \quad (5.59)$$

bzw. als Richtungswinkel ausgedrückt

$$r_i^{i+1} = \arctan \frac{\Delta x_{i,2}}{\Delta x_{i,1}}. \quad (5.60)$$

Der gerichtete Betrag der Differenz aufeinander folgender Tangentenvektoren

$$\Delta \mathbf{t}_i = \mathbf{t}_i - \mathbf{t}_{i-1} \quad (5.61)$$

entspricht der Differenz der Richtungswinkel

$$\Delta r_i = r_i^{i+1} - r_{i-1}^i. \quad (5.62)$$

Der Krümmungsvektor (2.24) ist diskretisiert

$$\mathbf{k}_i = \frac{\Delta \mathbf{t}_i}{|\Delta \mathbf{x}_i|}. \quad (5.63)$$

Der Betrag des Krümmungsvektors ist gemäß (2.25) die Krümmung κ . Wegen der Rasterförmigkeit der Punktaufnahme ist regelmäßig mit etwa gleichabständigen Polygonpunkten zu rechnen. Zur Reduzierung des Rechenaufwandes wird deshalb auf eine Berücksichtigung der Punktabstände $|\Delta \mathbf{x}_i|$ verzichtet. Mit der Wahl $|\Delta \mathbf{x}_i| = 1$ geht die Krümmung κ in die Richtungswinkeldifferenz (in Bogenmaß) (5.62) über. Die Differenzbildung (5.62) kann als auf die Richtungswinkeldifferenzen angewandter Gradientenfilter (Hochpassfilter)

$$h_D = (\cdots \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad \cdots), \quad (5.64)$$

gebildet über die Punkte des Randpolygons, aufgefasst werden.

5.7.5.3 Glättung

Zum Ausgleich einer zu hohen Punktdichte in Verbindung mit der Rasterstruktur der Scannerdaten wird der Ermittlung der Krümmung bzw. Richtungsänderung eine Glättung vorgeschaltet. Sie fördert eine fehlertheoretisch gute Gradientenbildung, denn es gilt für diskrete Folgen von Richtungswinkeln

$$\frac{dr(i)}{di} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(i+h) - r(i)}{h}. \quad (5.65)$$

Für unterschiedliche Weiten h ist

$$\Delta r_i(h) = \frac{1}{h} (r_i^{i+h} - r_i^{i-h}), \quad (5.66)$$

wobei ein glatter Verlauf angenommen wird. Die Abweichung nimmt mit wachsender Weite h ab, denn fehlertheoretisch gilt

$$\sigma_{\Delta r}^2(h) = \frac{1}{h} (\sigma_r^2 + \sigma_r^2) = \frac{2}{h} \sigma_r^2. \quad (5.67)$$

Glättungsalgorithmen für Punktpolygone wurden von [MCMASTER 1989] in drei Klassen eingeteilt:

- Basic averaging techniques: Für jeden einzelnen Punkt des Polygons werden auf der Grundlage des gewichteten Mittels einer Anzahl von Nachbarpunkten neue Koordinaten berechnet. Die Wahl des Gewichtungsansatzes bestimmt das Glättungsmaß.
- Epsilon filtering: Ein Kreis mit dem Radius epsilon wird entlang des Polygons bewegt. Punkte, die nicht von der Kreisfläche überdeckt oder berührt werden, werden eliminiert.
- Mathematical approximation: Eine Anzahl von Punkten wird durch Splines approximiert. Beispiele sind kubische Splines, B-Splines und Bezier-Splines. B-Splines halten die Endpunkte der Linie fest, während die intermediären n Punkte durch ein Polynom $(n-1)$ -ten Grades entwickelt werden. B-Splines bilden Polynome eines festgelegten Grades, maximal $n-1$, für eine festgelegte Anzahl n aufeinander folgender Polygonpunkte. Ab jedem Polygonpunkt wird ein neues Polygon gebildet. Die für die einzelnen Polygonpunkte in den verschiedenen Polynomen ermittelten Koordinaten werden zu den neuen Koordinaten der einzelnen Polygonpunkte gemittelt.

Unter Berücksichtigung des Rechenaufwandes wurde eine „Basic averaging“-Methode zur Glättung der Richtungswinkel (5.60) gewählt. Für die Richtungswinkel von je $2n$ aufeinander folgenden Punkten wird das Mittel der Richtungswinkel

$$r_M(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{2n} \sum_{j=-n}^{n-1} r_{i+j}^{i+1+j} \quad (5.68)$$

gebildet. Das entspricht dem linearen, verschiebungsinvarianten Tiefpassfilter zur Rauschbeseitigung

$$h_M = \frac{1}{2n} (\cdots \quad 0 \quad \underbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1}_{2n} \quad 0 \quad \cdots). \quad (5.69)$$

Quasiabstandsgewichtet geht der Filter über in

$$h_M(n) = \frac{1}{n^2} (\cdots 0 \underbrace{1 \ 2 \ \cdots \ n-1 \ n \ n-1 \ \cdots \ 2 \ 1}_{2n-1} 0 \ \cdots), \quad (5.70)$$

z.B. für $n = 3$

$$h_M(n=3) = \frac{1}{9} (\cdots 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ \cdots). \quad (5.71)$$

Der Grad der Glättung wird durch die Breite n des Tiefpassfilters beeinflusst. Eine größere Breite n führt zu einer stärkeren Glättung und, wie zu Beginn des Abschnittes mit (5.67) gezeigt, zu einem besseren fehlertheoretischen Ergebnis der Differenzbildung. Glättung ist nur so breit sinnvoll, wie nicht wesentliche Objektstrukturen durch die Glättung verschwinden. Die vorzugebende Breite des Glättungsfilters ist daher in Abhängigkeit von Objektstruktur und Punktdichte sachkundig zu wählen.

5.7.5.4 Zusammenfassung

Durch Verkettung mit dem Gradientenfilter (5.64) folgt der Gesamtfiler

$$h_{MD} = \frac{1}{n^2} (\cdots 0 \underbrace{1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1}_{2n} 0 \ \cdots), \quad (5.72)$$

was zu einem Gradienten

$$\Delta r_M(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} (r_{i+j}^{i+1+j} - r_{i-1-j}^{i-j}) \quad (5.73)$$

führt. Es entsteht eine diskrete Funktion der mittleren Richtungsänderungen des Randpolygons

$$\Delta r_M = f(\mathbf{x}) \quad (5.74)$$

in Abhängigkeit von den Randpolygonpunkten $\mathbf{x}_i$.

Nach [ATTNEAVE 1954] werden Objekte durch Verbindungsgeraden zwischen Punkten, an denen sich die Richtung der Kontur maximal ändert, sehr ökonomisch und mit großer Genauigkeit repräsentiert. Die Extrema der Funktion (5.74) zeigen signifikante Stellen des Randpolygons an. Die Signifikanz wird durch Überschreiten der Grenzen eines Schwellwertintervalls

$$I_{\Delta r_S} = [-\Delta r_S, +\Delta r_S] \quad (5.75)$$

für die Richtungsänderung festgestellt. Zwischen den signifikanten Punkten wird ein gerader Verlauf des Polygons, also $\Delta r_M(\mathbf{x}_i) = 0$, angenommen. An nicht glatten Stellen ist bei angrenzenden Geraden der Erwartungswert für die Stelle i

$$E(\Delta r_i) = r_{i+j}^{i+1+j} - r_{i-1-j}^{i-j} \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.76)$$

und für das Mittel (5.73) demzufolge

$$E(\Delta r_{M,i}) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} E(\Delta r_i) = \frac{1}{n^2} n E(\Delta r_i) = \frac{1}{n} E(\Delta r_i). \quad (5.77)$$

Das zu erwartende Maß des Gradienten nimmt mit breiter werdendem Tiefpassfilter wegen der Glättung ab. Damit geht das Schwellwertintervall über zu

$$I_{\Delta r,MS} = \left[-\frac{1}{n} \Delta r_S, +\frac{1}{n} \Delta r_S \right]. \quad (5.78)$$

Bei Kurven höheren Grades wie Kreis- und Ellipsenbögen muss das Verhalten der Richtungsgradienten (5.74) im Verlauf des Polygons betrachtet werden. Schnitte von Ebenen mit Zylinderflächen werden in Ellipsenbögen abgebildet. Bei entsprechend großer Schwellwertwahl werden Punktfolgen von diesen Ellipsenbögen ebenfalls als zusammenhängend gefunden.

5.7.5.5 Ausgleichung und Schnitt

Um die Information aller Polygonpunkte zu nutzen, werden die signifikanten Punkte gemeinsam mit den intermediären Punkten einer Geraden- bzw. Ellipsenausgleichung unterzogen. Die benachbarten, ausgeglichenen Geraden bzw. Ellipsenbögen werden zu neuen Polygonpunkten geschnitten, wenn die Distanz des Schnittpunktes zu den Endpunkten der Geraden- bzw. Ellipsenstücke nicht größer als ein Schwellwert ist. Sonst werden die Endpunkte gemittelt.

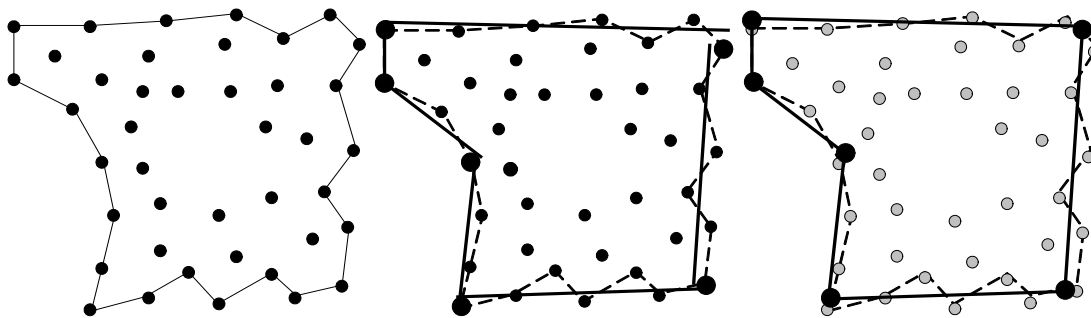


Abbildung 5.23: Randermittlung bei Geraden

- a) Punktwolke mit Randpolygon b) Signifikante Punkte und ausgeglichene Geraden c) Randpolygon aus den Schnittpunkten der ausgeglichenen Geraden

Nach Umkehrung der nach Abschnitt 5.7.3 durchgeführten Transformationen erhält man die Ränder der extrahierten Ebenen als Folgen von Geradenstücken, die Ränder der Zylinderflächen als Folgen von Ellipsenbogenstücken auf der jeweiligen Fläche im Raum. Beispiele zeigt Abbildung 5.24.

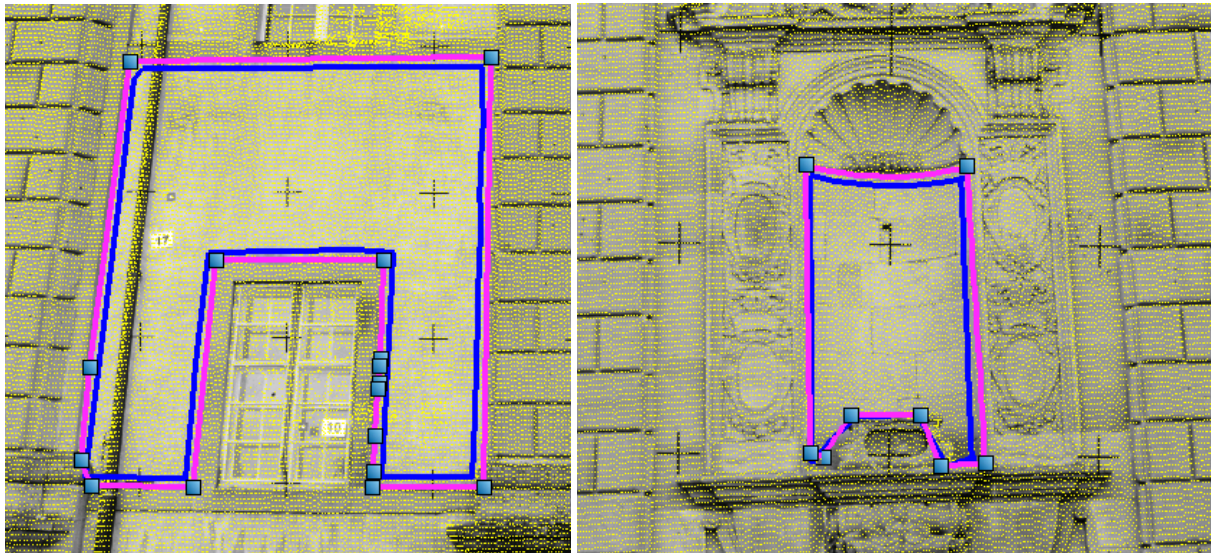


Abbildung 5.24: Formalisierung mit und ohne zusätzlicher randnaher Punkte

a) Ebene Fläche

b) Zylinderfläche

b) Zylinderfläche

6 Extraktion von Kanten, Ecken und Profilen

Oberflächen von baulichen Anlagen (Abbildung 6.1) enthalten vielfach ebene Flächen, welche sich in den Kanten und Ecken des Objekts schneiden (Abbildung 6.2). Die Modellierung z.B. der Ecken aus realen Scannerpunkten kann fehlschlagen, weil diese in der Realität wegen Rundungen nicht existent sind (Abbildung 6.3, Punkt 1). Erst durch Schnitt der angrenzenden Kanten erhält man die gesuchten konstruktiven Ecken (Abbildung 6.3, Punkt 2), bzw. die Kanten aus dem Schnitt von Flächen. Das Bilden von Profilen ist wichtiger Bestandteil der Modellierung. Profile können Ausgangspunkt weiterer Modellierung durch z.B. Extrusion oder selbst Ziel einer Scannerdatenauswertung sein.



Abbildung 6.1: Bild

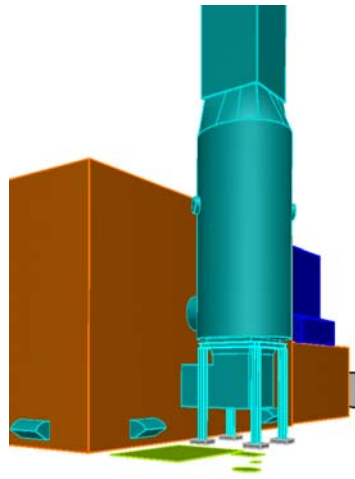


Abbildung 6.2: Modell

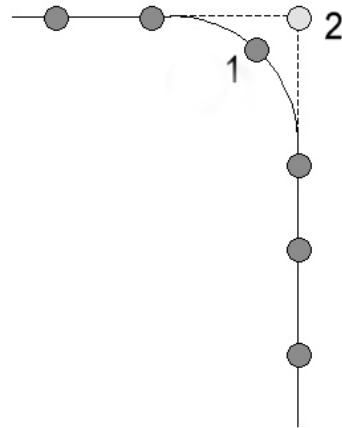


Abbildung 6.3: Abrundung einer Kante

6.1 Kanten und Ecken

Zur Bestimmung von Kanten und Ecken sind Verfahren unterschiedlichen Aufwands und unterschiedlicher Genauigkeit möglich.

6.1.1 Manuelle Auswertung

Im einfachsten Fall können in der Scannerpunktwolke auf der Grundlage des visuellen Eindrucks der ggf. eingefärbten oder intensitätsvariierenden Scannerpunktwolke einzelne Scannerpunkte durch den Auswerter identifiziert und als Ecken oder Kantenenden klassifiziert werden. Dieses Verfahren ist wenig rechenintensiv. Es verlangt eine hohe Konzentration und einen hohen Aufwand des Auswerters bei der visuellen Selektion der zutreffenden Scannerpunkte. Die Qualität des Ergebnisses leidet durch die eingangs des Kapitels beschriebene Nicht-Existenz der zu modellierenden Ecken bzw. Kanten. Als Beispiel möge die Modellierung eines Steines einer historischen baulichen Anlage dienen. Abbildung 6.4 zeigt den entsprechenden Ausschnitt der Punktwolke aus unterschiedlichen Perspektiven. Eine Kante, deren Enden durch zwei Scannerpunkte festgelegt wurde, spiegelt nicht die Modellränder der Steinoberflächen wieder (Abbildung 6.6). Stellt man die Scannerpunkte in verschiedenen Höhen dar (Abbildung 6.5), erkennt man noch deutlicher als in der Abbildung der gesamten Punktwolke des Steines die real nicht existente Kante.

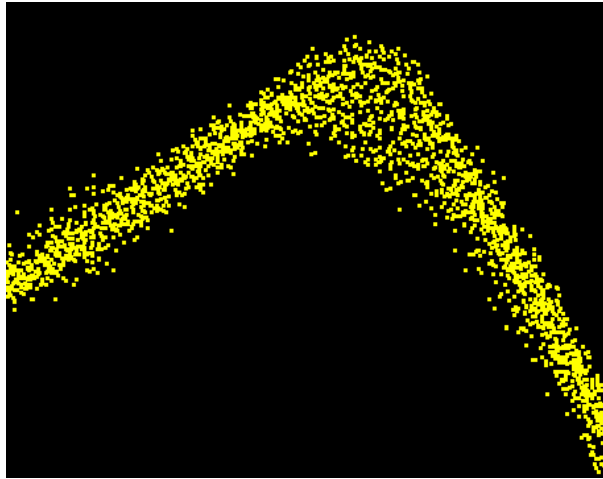


Abbildung 6.4: Punktwolke im Bereich einer Kante

a) von vorn

b) Ausschnitt im Bereich der Kante von oben

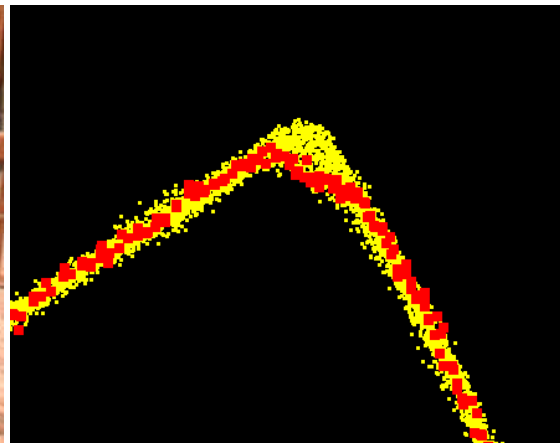


Abbildung 6.5: Punktwolke an einer Kante in einer ausgewählten Höhe

a) von vorn

b) Ausschnitt im Bereich der Kante von oben

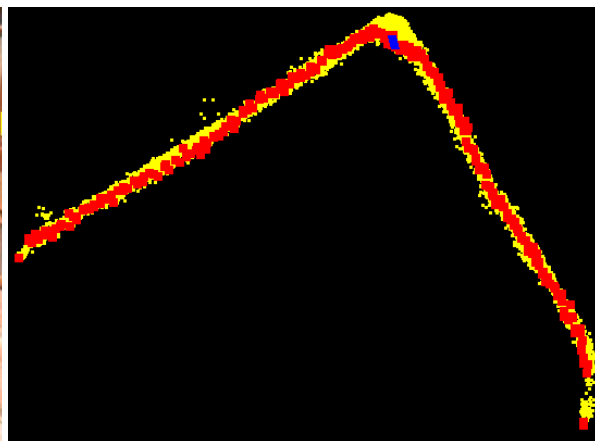
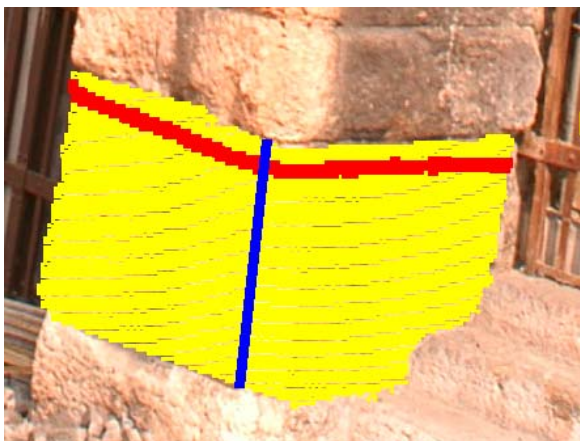


Abbildung 6.6: Kante, definiert durch zwei Scannerpunkte

a) von vorn

b) von oben (Kante als Punkt) erkennbar

6.1.2 Einzelpunktmessung

Der Laserscanner misst Objektpunkte in einem durch den Scanner vorgegebenen Winkelraster. Die Auflösung einer photogrammetrischen Aufnahme ist in der Regel höher als die der Punktwolke. Die Identifikation eines Modellpunktes ist durch die photogrammetriestützten Grauwert- bzw. Farbwertinformation einfacher als auf der Basis einer gescannten Punktwolke. Die Lage eines photogrammetrisch identifizierten Punktes in Relation zu den Scannerpunkten lässt sich durch Schnitt der photogrammetrischen Abbildungsrichtung mit der aus den benachbarten Scannerpunkten berechneten Ebene bestimmen. Der Abstand der Punkte zum Schnittpunkt kann durch entsprechende Gewichtungsansätze berücksichtigt werden. Dieses Verfahren wurde von [SCHWERMANN & EFFKEMANN 2002] als Monoplotting vorgestellt.

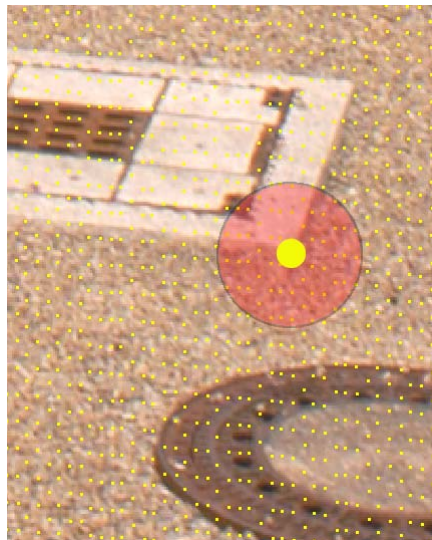


Abbildung 6.7: Einzelpunktbestimmung mit gescannter Punktumgebung

Es eignet sich für Modellpunkte, die nicht unmittelbar auf Kanten oder Ecken liegen. Bei der Auswahl der Scannerpunkte muss mit Hilfe von Auswahlfunktionen sichergestellt sein, dass die Punkte im Rahmen einer vorgegebenen Genauigkeit in derselben Fläche liegen. Für Ecken und Kanten ist das Verfahren wenig geeignet, da die Bestimmung der Fläche dann auf Scannerpunkten beruht, die sich auf verschiedenen, an die Ecke bzw. Kante angrenzenden Flächen befinden.

6.1.3 Schnitt angrenzender Flächen

Die Extraktion von Kanten erfolgt als Schnitt angrenzender Flächen. Potenzielle Schnittflächen werden in einem vorzugebenden Raumsegment als Ergebnisse der in Kapitel 5 vorgestellten Flächenextraktion formalisiert aus der Scannerpunktwolke ermittelt. Das Raumsegment hat in parallelperspektivischen Ansichten die Form eines Quaders. In kamerazentrischen, zentralperspektivischen Ansichten hat es die Form einer vierseitigen Pyramide (Abbildung 6.8). Geeignete Ebenen werden rechnerisch zur Kante verschnitten (Abbildung 6.9). Die Ebenen in Abbildung 6.9b (von oben betrachtet Linien) sind als Mittel der Punktwolke zu erkennen, derweil die extrahierte Kante - von oben betrachtet - als quadratischer Punkt erscheint. Die Länge der Kante richtet sich nach der Ausdehnung der extrahierten Ebenen.



Abbildung 6.8: Kamerazentrische, zentralperspektivische Punktauswahl

a) von vorn

b) von oben

Die horizontale Distanz zwischen der durch direkte Punktmessung und der durch Ebenenschnitt extrahierten Kante beträgt im gezeigten Beispiel bei einer Standardabweichung der Ebenenbestimmung von 1,2 cm etwa 7 cm. Die durch Einzelpunktmessung bestimmte Kante liegt also signifikant und systematisch falsch.

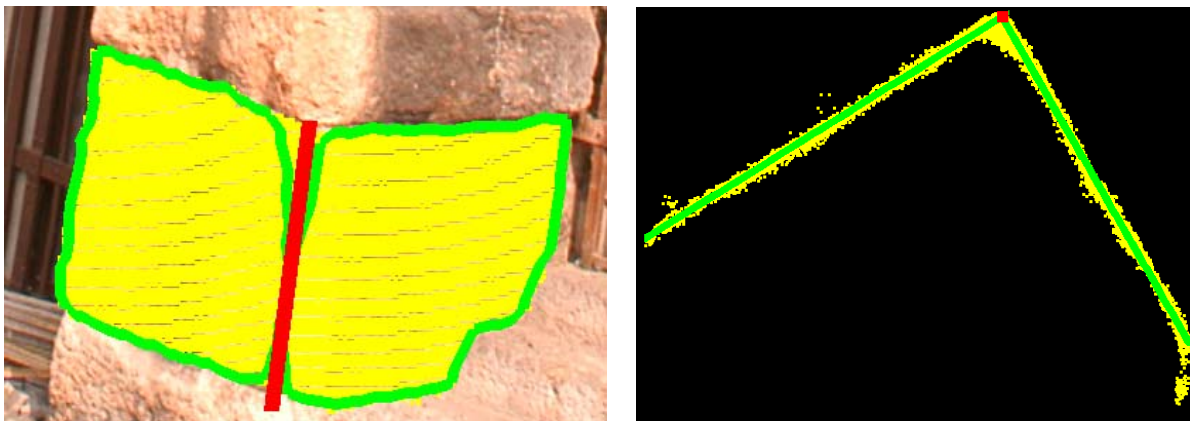


Abbildung 6.9: Kante eines Steins, definiert durch Schnitt angrenzender Ebenen

a) von vorn

b) von oben, Kante erscheint als Punkt

Abbildung 6.10 zeigt das Beispiel einer Kantenextraktion mit ausgedehnten Wandflächen. Die Standardabweichung der Scannerpunktabstände liegt in der Größenordnung von 2 cm, in der eine Oberflächenstruktur (vgl. Abbildung 5.19) von 4 cm Tiefe enthalten ist. Nimmt man die Struktur heraus, verbleibt eine Standardabweichung von unter 1 cm.

Die Extraktion von Ecken erfolgt analog der Kantenextraktion durch den Schnitt von drei Ebenen zu einem Punkt.

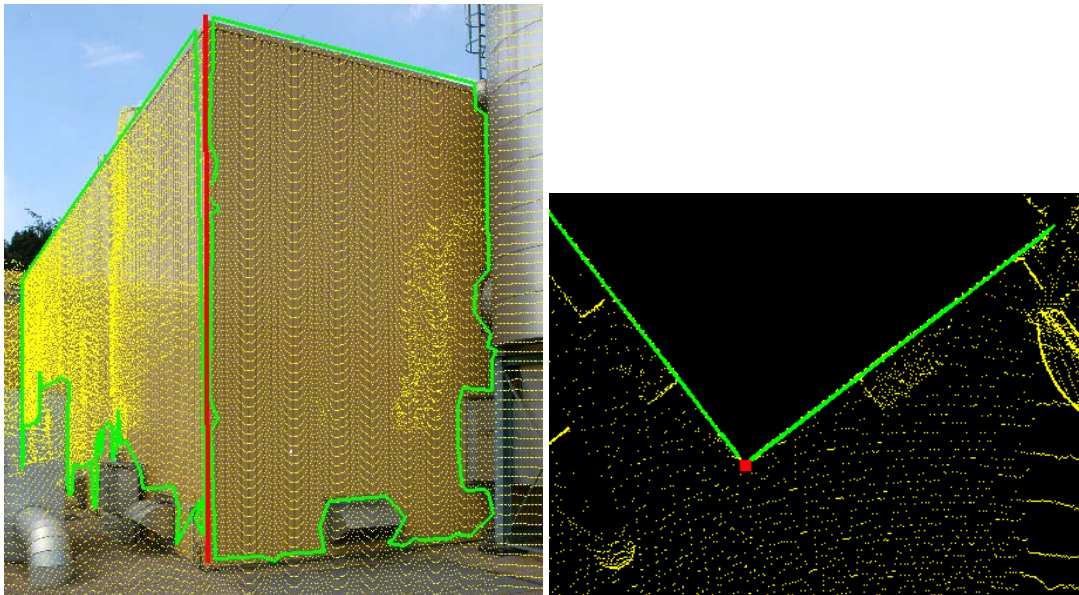


Abbildung 6.10: Kante einer Wand, definiert durch Schnitt angrenzender Ebenen

a) von vorn

b) von oben, Kante erscheint als Punkt

6.2 Profile

Ein Gesamtprofil setzt sich aus einzelnen Profilstücken (Raumlinien) zusammen. Sie sind Schnitte der Objektoberfläche mit einer vordefinierten Profilebene.

6.2.1 Manuell-visuelle Profilextraktion

Ein Profil kann durch Einzelselektion von Punkten, die aneinander gereiht das gesuchte Profil bilden, entstehen. Die Wahl der Punktdichte ist dem Auswerter überlassen. Er kann sich auf die Selektion signifikanter Punkte beschränken. Die ausgewählten Punkte liegen nicht zwangsläufig in der vorzuziehenden Profilebene, so dass sie noch in diese entlang der Profilnormalen zu projizieren sind. Bei diesem Verfahren wird allein die Information der einzelnen, selektierten Punkte genutzt. Die Information aller anderen Punkte der homogenen Oberflächen wird verschonkt. Die signifikanten, ein Profil bildenden Punkte befinden sich an den Kanten des Objekts, so dass gerade die für die Oberfläche wenig repräsentativen kantennahen Scannerpunkte für die Profilextraktion benutzt werden. Hinzu kommen bei diesem stark manuellen Verfahren die Schwierigkeiten der rein visuellen Identifikation von geeigneten Scannerpunkten in der Scannerpunktwolke. Hilfestellung können Selektions- und Rotationsfunktionen für die Punktwolke liefern. Die Punktselektion vereinfacht sich unter Verwendung einer photogrammetrischen Aufnahme im Monoplotting-Verfahren (vgl. Abschnitt 6.1.2).

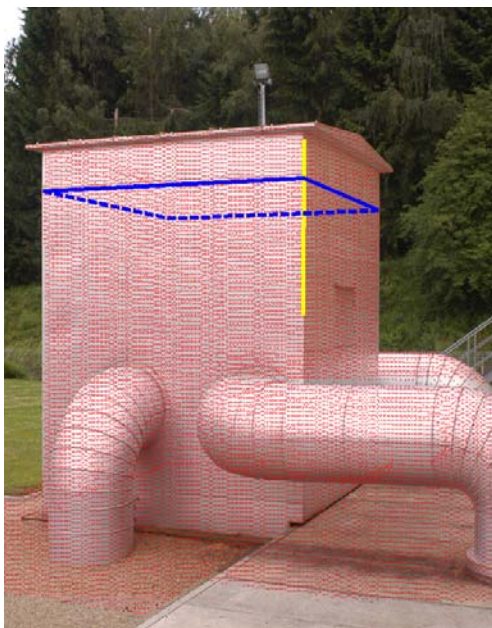
Rotiert man die Scannerpunktwolke derart, dass die Profilnormale senkrecht zur Ansichtsebene zu liegen kommt, kann man Linienstücke frei von der Selektion einzelner Scannerpunkte modellieren. Die für ein Profilstück repräsentativen Punkte werden dabei per Augenschein gemittelt. Die Problematik der kantennahen Punkte entfällt. Es bleibt jedoch ein hoher manueller Aufwand des Auswerter und eine rein visuelle Mittelbildung.

6.2.2 Profil als Schnitt mit einer Triangulation

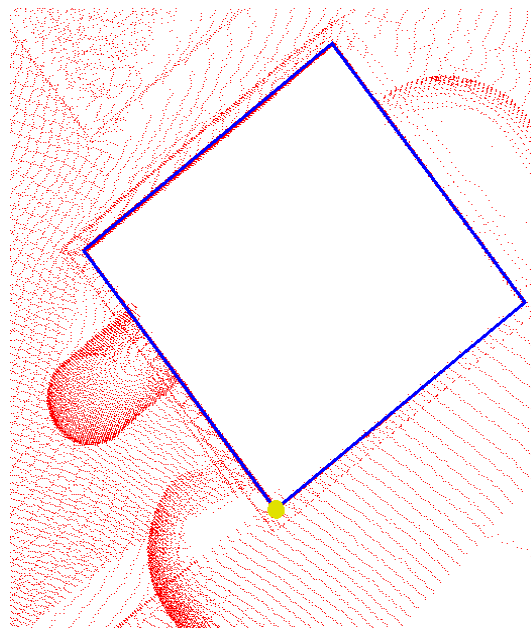
Basis einer automatisierten Profilbestimmung kann eine Triangulation der Scannerpunkte an der Objektoberfläche sein. In Abschnitt 5.3.1 wurden geeignete flächenhafte Triangulationen vorgestellt. Das Profil setzt sich aus vielen kurzen Geradenstücken zusammen, die durch Schnitt der Profilebene mit den einzelnen Dreiecken der Triangulation ermittelt werden. Das Profil knickt an jeder Dreiecksseite. Um ein Gesamtprofil zu erhalten, das lediglich an den signifikanten Kanten des Objekts knickt, muss eine Generalisierung angeschlossen werden. Die Profilbildung auf der Grundlage von Triangulationen hat den Nachteil, dass die Profilermittlung lediglich auf der Basis eines durch die Ausdehnung der einzelnen Dreiecksmasche sehr begrenzten Teiles der Objektoberfläche erfolgt. Sinnvoll ist es, homogene Oberflächenteile des Objekts als Ganzes mit der Profilebene zu verschneiden.

6.2.3 Profilbestimmung aus extrahierten Oberflächen

Das in Kapitel 5 vorgestellte Verfahren ermöglicht die Extraktion von formalisierten, die Objektoberfläche repräsentierenden Flächen in einem vorgegebenen Suchraum. Der Suchraum und ebenso die Ausrichtung des Profils werden durch eine bereits extrahierte Gerade, die Profilausdehnung wird zweckmäßig durch Festlegung von zwei Punkten in der Ansicht interaktiv vorgegeben. Die Interaktionen können durch eine photogrammetrische Aufnahme visuell unterstützt werden. Die Scannerpunktauswahl für die Flächenextraktion erfolgt auf dieser Basis automatisch. Die extrahierten Objektflächen liegen anschließend formalisiert vor. Sie werden unter Berücksichtigung von Löchern mit der Profilebene zu Geraden- bzw. Ellipsenbogenstücken verschnitten. Die gefundenen Profilstücke werden auf der Grundlage von Distanzmessungen zwischen den einzelnen Stücken auf Nachbarschaften hin untersucht. Benachbarte Profilstücke werden, je nach ermittelter Distanz und Vorgabe des Auswerter, durch Schnittbildung oder gerade Verbindung verkettet. Das Beispiel Abbildung 6.11 zeigt ein vollständig automatisch extrahiertes Profil.



a) von vorn



b) von oben

Abbildung 6.11: Extrahiertes Profil

7 Implementation und Anwendungsbeispiele

Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Funktionalitäten dienen der Auswertung dreidimensionaler Laserscannerdaten. Photogrammetrische Aufnahmen können – falls verfügbar – visuelle Unterstützung bei der Interaktion des Auswerters leisten. Dazu ist eine Umgebung, die die superimpositive Darstellung beider Datentypen ermöglicht, sinnvoll. Wenn photogrammetrische Daten vorliegen, sollten sie auch mit photogrammetrischen Mitteln auswertbar sein. Damit bietet sich eine kombinierte Auswertung beider Datentypen an. Die entwickelten Funktionalitäten sind ein Baustein unter anderen bei der Modellierung komplexer Objekte. Sie sollten deshalb in ein System einfließen, das die gemeinsame Nutzung zusammen mit anderen Modellierungsfunktionalitäten ermöglicht.

7.1 Implementation im Auswertesystem PHIDIAS

Das digitale Auswertesystem PHIDIAS wurde in den letzten Jahren bereits von einem rein photogrammetrischen Auswertesystem [BENNING & SCHWERMANN 1997] durch Ergänzung um superimpositive Visualisierungsmethoden (Abbildung 7.1), Datenmanagementmethoden für Scannerdaten und manuelle, Scanner- und Photogrammetriedaten kombinierende Modellierungsmethoden wie das Monoplotting (vgl. Abschnitt 6.1.2) erweitert [SCHWERMANN & EFFKEMANN 2002].



Abbildung 7.1: Visualisierung von Laserscanner- und photogrammetrischen Daten in Superimposition

PHIDIAS, als ursprünglich aus der Photogrammetrie stammendes System, bietet Möglichkeiten zur Bildorientierung sowie zur Einzel- und Mehrbildauswertung von photogrammetrischen Aufnahmen bis hin zur Entzerrung zu Orthophotos. Die Bildtriangulation wird als Bündelblockausgleichung durchgeführt. Die Einbettung in die leistungsfähige CAD-Umgebung des Systems MicroStation ermöglicht es, in einem gemeinsamen System CAD-Funktionalitäten zu nutzen und Photogrammetrie- sowie Scannerdatenauswertung in derselben Auswerte-/ Bearbeitungssession zu betreiben. Ein andernfalls notwendiger Datentransfer über Schnittstellen entfällt. Die Superimposition sowohl der Rohdaten in Form von Bild- und Scannerdaten als auch der Ergebnisse in Form von CAD-Elementen unterstützt die interaktive Modellierung. Gleichzeitig konnten bei der Programmentwicklung im Rahmen dieser Arbeit bestehende Funktionalitäten aus PHIDIAS als auch der Entwicklungsumgebung des CAD-Systems insbesondere zur Visualisierung und Datenbereitstellung genutzt werden. Diese Synergieeff-

fekte führten zu einer Integration der entwickelten Methoden in das System PHIDIAS unter MicroStation in Form einer MDL-Applikation mit einem MicroStation Resource File und einer Programmbibliothek unter Nutzung der Programmiersprachen C und C++.

7.2 Kombinierte Auswertemöglichkeiten

Mit der Integration der entwickelten Funktionalitäten in das System PHIDIAS eröffnen sich Auswertemöglichkeiten, bei denen die photogrammetrische Monobildauswertung direkt auf Ergebnissen der Scannerdatenauswertung basiert. Für diverse Auswertungen sind lokal definierte kartesische Koordinatensysteme von großem Nutzen. Die lokale x_3 -Achse bzw. Z-Achse wird durch die Richtung der Ebenennormalen bzw. die Richtung der Zylinderachse einer extrahierten Fläche gebildet (Abbildung 7.2). Die lokale x_1x_2 -Ebene wird in die extrahierte Ebene bzw. die Grundfläche des extrahierten Zylinders gelegt.

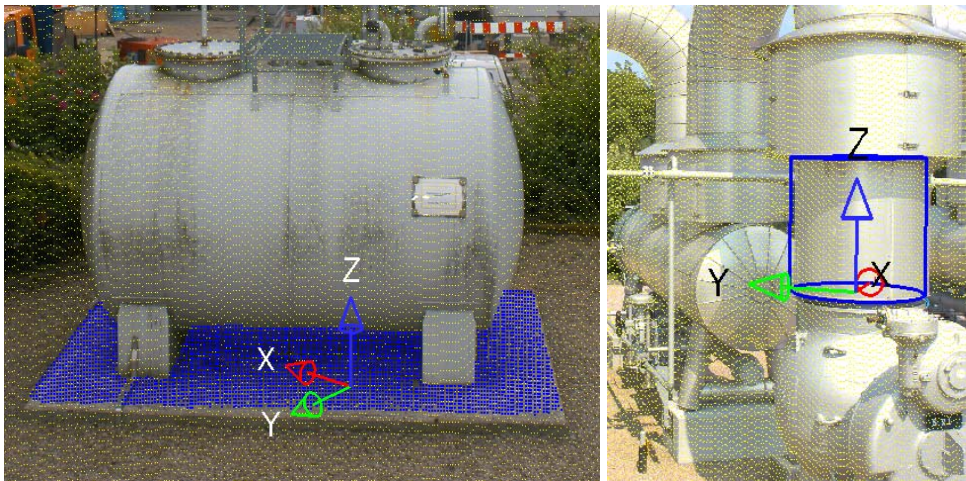


Abbildung 7.2: Lokale Koordinatensysteme

a) ebenenbasiert

b) zylinderbasiert

In umgekehrter Weise unterstützen die Bilder bei der visuellen Interaktion während der Scannerdatenauswertung, konkret z.B. bei der Identifikation von Suchbereichen und bei der visuellen Kontrolle der Extraktionsergebnisse. Bei der Extraktion von Kanten und Ecken werden vorgegebene Bildstrahlen für die automatische Auswahl der ecken- bzw. kantenbildenden Ebenen genutzt.

Wegen der unterschiedlichen Genauigkeit der Aufnahmesysteme in Abhängigkeit zur Messrichtung (vgl. Abschnitt 3.1.5) sollte die Entfernung bzw. die Lage einer Fläche aus der Punktwolke, der Rand bzw. die Kante eines Objekts, wenn nicht durch Flächenschnitt bestimmbar, aus einem Bild bestimmt werden. Nach Festlegung eines ebenenbasierten, lokalen Koordinatensystems aus der Punktwolke kann z.B. zur exakten Modellierung der Ränder ebener Flächen die photogrammetrische Aufnahme mit ihrer hohen Auflösung benutzt werden. Die Randpunkte entstehen durch Schnitt von vorgegebenen photogrammetrischen Abbildungsrichtungen mit der x_1x_2 -Ebene des lokalen Koordinatensystems.

Automatisch extrahierte Profile können auf Basis von höher aufgelösten, photogrammetrischen Aufnahmen um fehlende Details ergänzt werden. Durch Extrusion entlang der Profilnormalen können anhand der photogrammetrischen Aufnahme z.B. Gebäudefassaden modelliert werden. Automatisch

extrahierte zylindrische Rohrleitungsabschnitte werden anhand des Bildes bis zum Ende oder bis zu einem Knick verlängert (Abbildung 7.3). Auf extrahierten Zylindern basierende lokale Koordinatensysteme sind z.B. bei der Modellierung von Röhrensystemen von Nutzen.

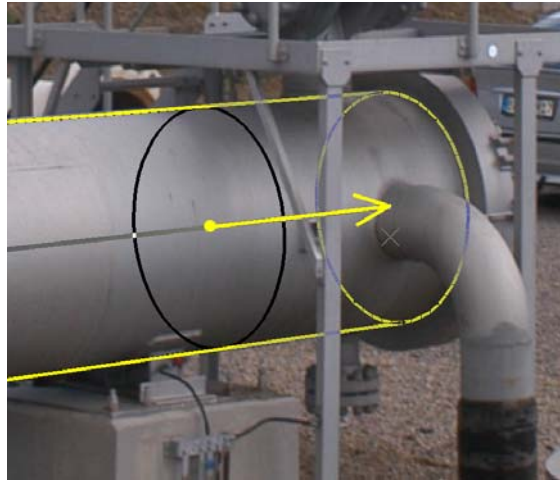


Abbildung 7.3: Axiale Verlängerung eines automatisch extrahierten Zylinders durch Monobildmessung

[ZHAO & SHIBASAKI 2000] stellen ein Verfahren vor, das am Beispiel einer urbanen Umgebung für ebene, modellierte Flächen und Dreiecksflächen einer Triangulation die passenden CCD-Panoramabilddaten automatisch ermittelt, um ein texturiertes 3D-Modell zu erstellen. Die Panoramabilder wurden an den jeweiligen Scannerstandpunkten aufgenommen und diesen zugeordnet. Für jede Fläche wird der Scanner ermittelt, von dem das Maximum der Scannerpunkte stammt. Die Bilddaten für die Texturierung werden den Bilddaten dieses Standpunkts entnommen. Große Flächen werden in regelmäßige Teilflächen aufgeteilt. Mit den in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren ermittelte Flächen können als Grundlage ebenfalls für eine derartige Texturierung dienen. PHIDIAS bietet entsprechende Lösungen für das Mapping von Flächen an. Die extrahierten Flächen, insbesondere Ebenen, werden mit den entzerrten Bildern texturiert.

7.3 Anwendungsbeispiel

Die beschriebenen Auswertemethoden wurden bei der Bestandserfassung einer Gas-Verdichterstation intensiv angewendet und mit tachymetrischen und rein photogrammetrischen Verfahren verglichen. Die Bestandspläne der Station lagen bisher in Form zweidimensionaler digitaler Pläne vor. Mit der Neuerfassung sollte der Übergang zur dreidimensionalen Dokumentation in einem Geoinformationssystem vollzogen werden. Durch die hohe Erfassungsgeschwindigkeit sowohl des Laserscanners als auch einer aufgesetzten, hochauflösenden photogrammetrischen Kamera konnte der Aufenthalt in explosionsgefährdeten Bereichen, durch den zusätzliche Sicherungsmaßnahmen und Personal erforderlich gewesen wären, auf ein Minimum reduziert werden. Auswahl und Modellierung der repräsentativen Anlagenteile wurde in den kostengünstigeren Innendienst verlagert. Die Erfassung des ca. 18000 m² umfassenden Geländes erfolgte von 40 gleichmäßig verteilten Scannerstandpunkten aus. Die Auflösung und Reichweite des Scanners spielte nur eine geringe Rolle. Entscheidend war die Bebauungsdichte. Je dichter eine Anlage bebaut ist, desto mehr Scannerstandpunkte werden benötigt, um

Scanschatten zu minimieren.

Zum Einsatz kam der Laserscanner RIEGL LMS Z420i mit aufgesetzter kalibrierter Digitalkamera Nikon D100 (Abbildung 3.4, Tabellen 3.1 und 3.2). Die Kopplung der Kamera mit dem Scanner hat den Vorteil, dass sich die Orientierungsdaten der photogrammetrischen Aufnahmen automatisch mit der Orientierung der Punktwolken ergeben [STUDNICKA, RIEGL & ULLRICH 2004]. Die bei freihändigen Aufnahmen notwendigen Bildpunktmessungen und Orientierungsberechnungen können entfallen. Bei einer Gesamtanzahl von mehr als 400 Bildern entsprach dies einer Zeitersparnis von ca. 40 Stunden. Die maximale Auflösung des Scanners wurde nicht ausgeschöpft, um die Scannzeiten zu verringern und die Datenmengen überschaubar zu halten. Eine extrem hohe Auflösung der Punktwolke ist auch nicht nötig, weil Details im hochauflösenden Digitalbild in der Regel besser erkennbar sind (Abbildung 7.4).

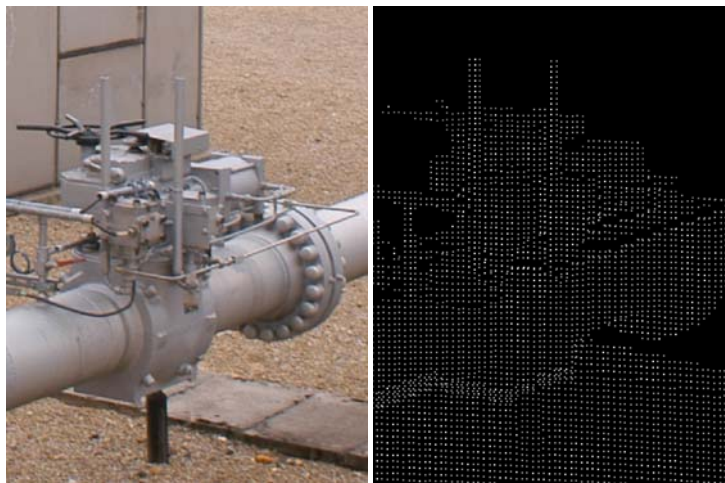


Abbildung 7.4: Vergleich der Detailauflösung von Foto und Punktwolke in 10 m Entfernung

Der Aufwand für die örtlichen Arbeiten betrug zwei volle Tage mit zwei Personen. Die Passpunkte wurden während des Scannens mit dem reflektorlos messenden Tachymeter Zeiss RL bestimmt. Die so genannte Registrierung der Scannerstandpunkte, das heißt, die Berechnung der Transformationsparameter zwischen Scannerkoordinatensystem und Projektkoordinatensystem wurde unmittelbar nach jedem Scan durchgeführt, um eine sofortige Kontrolle der Registriergenauigkeit zu haben. Die Transformation der Punktwolken in das gemeinsame Projektkoordinatensystem wurde zudem zur Erkennung abgeschatteter Bereiche benutzt. Die Verweildauer pro Standpunkt betrug ca. 20 Minuten. Die Kalibrierung der Kamera - die Bestimmung der inneren Orientierung einschließlich Verzeichnungsparametern sowie der äußeren Orientierung, also der Position und Aufnahmerichtung bezogen auf das Koordinatensystem des Scanners - läuft weitgehend automatisch ab und wurde während der zwei Tage einmal durchgeführt.

Die Modellierung der Anlage erfolgte zum großen Teil mit den beschriebenen Methoden. Ebene Flächen, zylindrische Rohrleitungsabschnitte und Gebäudekanten wurden automatisch aus der Punktwolke extrahiert. Vervollständigt wurden die Objekte anschließend durch Monobildmessung. Sehr dünne Rohrleitungen und andere Details, die aufgrund des Rauschens der Laserscannerdaten nicht automatisch extrahiert werden konnten, wurden entweder in Einzelbildern gemessen oder mit Hilfe der klassischen Mehrbildmessung bestimmt. Eine Einbildmessung war immer dann möglich, wenn die Ebene bzw. die Achse des Elementes bekannt war. Für die Anpassung und Konstruktion der Zeichnungsle-

mente können alle Funktionen des CAD-Systems MicroStation direkt im Bild angewendet werden (Abbildung 7.5). Abbildung 7.6 zeigt das Ergebnis der Modellierung vor einer eingefärbten Punktwolke.



Abbildung 7.5: Überlagerung von Bild und Zeichnungselementen



Abbildung 7.6: Darstellung einer auf der Grundlage der Farbdaten aus der photogrammetrischen Aufnahme eingefärbten 3D-Punktwolke mit Überlagerung von CAD-Zeichnungselementen.

Aus: [BECKER, BENNING & EFFKEMANN 2004].

8 Zusammenfassung und Ausblick

Mit dem Laserscanner erobert eine neue Datenerfassungsmethodik im Vermessungswesen den Markt. Bisher lagen die Anwendungen weitgehend im flugzeuggestützten Einsatz mit am Boden relativ großen Punktabständen. Inzwischen sind auch leistungsfähige Laserscanner zur terrestrischen Datenerfassung auf dem Markt und im Einsatz. Die erfassbaren Datenraten, Punktdichten und Messgenauigkeiten reichen für eine große Anzahl unterschiedlicher Aufgaben aus. Die Funktionsweise der Laserscanner wurde in anderen Arbeiten bereits ausführlich erläutert, so dass in dieser Arbeit das Messprinzip nur kurz behandelt wurde.

Der hohen Erfassungsrate von Rohdaten in Form von dreidimensionalen Punkten steht ein immenser Aufwand bei der Auswertung der Daten zur Überführung des Realweltobjekts in ein Modell gegenüber. Große Teile werden in manueller Arbeit des Auswerter allein auf der Grundlage der visuellen Interpretation der Punktwolke erledigt. Schwierigkeiten bereitet im Vergleich zu flugzeuggestützten Daten die Auswertung fusionierter Daten mehrerer Aufnahmestandpunkte, da die reinen 3D-Punkte in der Ansicht eines Planungs- bzw. Dokumentationssystems visuell nur schwer unterscheidbar sind. Die superimpositive Darstellung gemeinsam mit photogrammetrischen Aufnahmen löst dieses Problem. 2,5D-Lösungen, wie sie für Höhen- oder Situationsmodelle und Ein-Standpunkt-Auswertungen oft benutzt werden, sind bei reich strukturierten baulichen Anlagen vielfach nicht anwendbar. Deshalb wurde statt einer in den vorgenannten Fällen genutzten ebenen Delaunay-Triangulation für die Herstellung von Punktnachbarschaften eine räumliche Delaunay-Triangulation verwendet. Dreiecksvermaschungen können Oberflächen im Raum approximieren. Sie reichen allerdings für Objekte wie bauliche Anlagen, die im Modell vielfach aus geometrischen – je nach Modelltyp – Volumen-, Flächen- bzw. Linienprimitiven wie formalisierten Ebenen und Zylinderflächen bzw. Kanten zusammengesetzt sind, nicht aus. Für eine sinnvolle Nutzung ist die Extraktion der geometrischen Primitive aus der Punktwolke notwendig.

Die Eigenschaften von Flächen lassen sich lokal mit Hilfe der Differentialgeometrie beschreiben. Die Differentialgeometrie zeigt, dass die Hauptkrümmungen ganz wesentliche Eigenschaften der Flächen bezüglich der Form sind. Die Partitionierung der Punktwolke basiert deshalb neben topologischen und differentialgeometrischen Abstandseigenschaften ganz wesentlich auf den Hauptkrümmungswerten. Sie berücksichtigen im Gegensatz zu Flächennormalenvektoren die Richtungsänderung der Fläche in Abhängigkeit zur Distanz zwischen den betrachteten Stellen auf der Fläche. Durch die Nutzung beider Hauptkrümmungswerte wird zwischen verschiedenen Flächentypen der Flächen 2. Ordnung unterschieden. Im bisher realisierten Teil können Ebenen und Zylinderflächen extrahiert werden. Die Ausdehnung auf weitere Flächentypen 2. Ordnung, z.B. Kugelflächen, steht an. Die Partitionierung erfolgt in Form einer sequentiellen Aggregation. Die Parametrisierung der Flächen erfolgt im Gauß-Markoff-Modell nach der Methode der kleinsten Quadrate. Auf robuste Schätzverfahren, wie sie von anderen Autoren auch zur Partitionierung verwendet werden, kann verzichtet werden, da nach der Partitionierung mit der vorgestellten Methodik keine große Anzahl von Ausreißern mehr zu erwarten ist.

Die Formalisierung der Flächen basiert auf einem Alpha-Shape, gebildet auf der parametergeschätzten Fläche. Zur weiteren Verwendung ist das aus dem Alpha-Shape entwickelte Randpolygon zu dicht. Es bedarf einer Generalisierung. Speziell bei baulichen Anlagen sind geometrische Primitive wie Geraden, Kreis- und Ellipsenbögen zu erwarten. Zur Extraktion von Geraden wurde ein spezieller Algo-

rithmus auf der Grundlage differentialgeometrischer Methoden entwickelt. Durch Abwicklung der extrahierten Zylinderfläche in Ebenen sind sie auch bei Zylinderflächen verwendbar. Dennoch können die so ermittelten Formalisierungen nur Näherungen sein, da das Mittel der Scannerpunkte am Rand einer Fläche immer innerhalb der Fläche liegt. Die Formalisierung dient der Visualisierung und der Weiterverarbeitung in der Ecken-, Kanten- und Profilextraktion.

Ecken und Kanten entsprechen im Modell dem Schnitt der benachbarten Flächen. Sie werden aufgrund ihrer fehlenden realen Existenz als Schnitt dieser Flächen, realisiert für Ebenen und angedacht für weitere Flächentypen, extrahiert. Damit geht die hohe Lagegenauigkeit der Flächenextraktion auf die Ecken und Kanten über. Profile sind Schnitte einer Profilebene mit den Oberflächen des Objekts. Um auch hier die hohe Genauigkeit der Flächenextraktion zu nutzen, werden die einzelnen Profilstücke dem Modell entsprechend durch den Schnitt der extrahierten Objektoberflächen mit der Profilebene gebildet. Die Festlegung der Profilknickpunkte als Schnitt der Profilstücke entspricht damit der vorgestellten Kantenmodellierung.

Mit den Primitiven „Ebene“ und „Zylinder“ wird bereits ein Großteil der tatsächlich vorhandenen Objektoberflächen abgedeckt. Dennoch wird an weiteren Primitivtypen gearbeitet. Dies gilt genauso für die Kantenextraktion, die ausgehend vom realisierten Primitiv „Gerade“ auf weitere Linienformen wie Kreis- und Ellipsenbögen ausgedehnt werden soll.

Der Vergleich mit anderen Datenerfassungsmethoden, z.B. der Photogrammetrie, zeigt, dass jede Methode ihre spezifischen Vorteile hat. Die Kombination von Photogrammetrie und Laserscanning in der Datenerfassung und Datenauswertung liefert die Basis für eine simultane Objektmodellierung aus beiden Datentypen. Die vorgestellten Extraktionsmethoden sind in das digitale photogrammetrische Auswertesystem PHIDIAS integriert. PHIDIAS ermöglicht nunmehr die kombinierte Auswertung z.B. mit Methoden zur automatischen Festlegung von lokalen Koordinatensystemen, durch die Möglichkeit zur Weiterbearbeitung extrahierter ebener Flächenstücke und Zylinder sowie Ecken, Kanten und Profile mit photogrammetrischen und CAD-Methoden. Die vorgestellten Methoden zur automatischen Primitivextraktion aus Scannerpunktwolken werden visuell gestützt durch photogrammetrische Aufnahmen. Die Grauwert- bzw. Farbinformation der photogrammetrischen Aufnahmen mit ihrer hohen Auflösung könnte künftig in eine verbesserte automatische Flächenformalisierung einfließen.

Das Anwendungsbeispiel des Abschnitts 7.3 verdeutlicht die Praxistauglichkeit der entwickelten Extraktionsmethoden und die Vorteile der kombinierten Datenauswertung für den Nutzer. Die Verwendung von möglichst vielen, auf den Flächen gemessenen Scannerpunkten erhöht die Genauigkeit der Flächenbestimmung und Auswertung des Datenbestandes. Die automatische Punktsuche und Punktauswahl sowie die Kombination von Auswertemethoden für photogrammetrische und für Scannerdaten reduzieren nicht nur den für die Auswertung benötigten Zeitaufwand, sondern erhöhen – auch durch statistische Genauigkeitsangaben der Flächenparametrisierung – die Zuverlässigkeit und Richtigkeit der topologischen Auswertung der gescannten Punktwolken.

Literaturverzeichnis

[AGENT CONSORTIUM 1999] ©AGENT Consortium (1999): Selection of Basic Algorithms <http://agent.ign.fr/deliverable/DD2.html>, Universität Zürich.

[BAARDA 1968] Baarda, W. (1968): A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks. Netherlands Geodetic Commission, 2(5).

[BECKER, BENNING & EFFKEMANN 2004] Becker, R., Benning, W., Effkemann, C. (2004): 3D-Monoplotting - Kombinierte Auswertung von Laserscannerdaten und photogrammetrischen Aufnahmen. In: Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement (zfv), Bd. 129, Heft 5 S. 347-355, Wißner-Verlag, Augsburg.

[BENNING 1995] Benning, W. (1995): Vergleich dreier L_p -Schätzer zur Fehlersuche in hybriden Lagennetzen. In: Zeitschrift für Vermessungswesen (zfv), Bd. 120, Heft 12 S. 606-617, Verlag Konrad Wittwer GmbH, Stuttgart..

[BENNING 2002] Benning, W. (2002): Statistik in Geodäsie, Geoinformation und Bauwesen, Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg

[BENNING & SCHWERMANN 1997] Benning, W., Schwermann, R. (1997): PHIDIAS-MS – Eine digitale Photogrammetrieapplikation unter MicroStation für Nahbereichsanwendungen. In: Allgemeine Vermessungsnachrichten, Bd. 104, Heft 1, S. 16-25.

[BESL & JAIN 1986] Besl, P.J., Jain, R.C. (1986): Invariant Surface Characteristics for 3D Object Recognition in Range Images. In: CVGIP, vol. 33, pp. 33-80.

[BILL & FRITSCH 1999] Bill, R., Fritsch, D. (1999): Grundlagen der Geo-Informationssysteme. Band 1: Hardware, Software und Daten, 4. Aufl., Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg.

[BILL 1999] Bill, R. (1999): Grundlagen der Geo-Informationssysteme. Band 2: Analysen, Anwendungen und neue Entwicklungen, 2. Aufl., Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg.

[BOYER, MIRZA & GANGULY 1994] Boyer, K.L., Mirza, M.J., Ganguly, G. (1994): The Robust Sequential Estimator: A General Approach and its Application to Surface Organization in Range Data. In: IEEE T-PAMI (Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence), vol. 16, pp. 987-1001.

[BOZDOGAN 1987] Bozdogan, H. (1987): Model Selection and Akaike's information criterion (AIC): The general theory and its analytical extensions. In: Psychometrika, vol. 52, no.3, pp. 345-370.

[BRÖKER, NÜBEL, BERNREUTHER & FIRMENICH 2002] Bröker, H., Nübel, V., Bernreuther, M., Firmenich, B. (2002): Erfahrungsbericht zur Entwicklung und Anwendung der Methode der Volumenmodellierung, Technische Universität München, Universität Stuttgart, Bauhaus-Universität Weimar.

[BRONSTEIN, SEMENDJAJEW, MUSIOL & MÜHLIG 1995] Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A., Musiol, G., Mühlig, H. (1995): Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt a.M.

[CYRA 2003] Cyra Technologies, Inc. (2003): Cyclone v4.0. San Ramon, CA, USA.

[DOUGLAS & PEUCKER 1973] Douglas, D.H. und T.K. Peucker (1973): Algorithms for the reduction of the number of points required to represent a digitized line or its caricature. In: The Canadian Cartographer, vol. 10(2), pp. 112-122.

[FLYNN & JAIN 1991] Flynn, P.J., Jain, A.K. (1991): BONSAI: 3-D Object Recognition Using Constrained Search. In: IEEE T-PAMI, vol. 13, pp. 1066-1075.

[FOLEY & VAN DAM 1996] Foley, J.D. ; van Dam, A. (1996): Computer Graphics. 2.Aufl., Addison-Wesley, Boston, San Francisco, New York.

[GEIBEL & STILLE 2000] Geibel, R., Stille, U. (2000): Segmentation of laser altimetry data for building reconstruction: different procedures and comparison. In: International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing (IAPRS), vol. 33, part B3, pp. 326-334.

[GORTE 2002] Gorte, B. (2002): Segmentation of TIN-Structured Surface Models. In: Proceedings Joint International Symposium on Geospatial Theory, Processing and Applications, on CD-ROM, Ottawa, Canada, 5 p.

[GÜHRING 2002] Gühring, J. (2002): 3D-Erfassung und Objektrekonstruktion mittels Streifenproduktion. Reihe C 560, Deutsche Geodätische Kommission.

[HAKE & GRÜNREICH 1994] Hake, G., Grünreich, D. (1994): Kartographie, Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin.

[HETTWER 2003] Hettwer, J (2003): Numerische Methoden zur Homogenisierung großer Geodatenbestände. In: Veröffentlichungen des Geodätischen Instituts der RWTH Aachen, Bd. 60.

[HOFFMAN & JAIN 1987] Hoffman, R.L., Jain, A.K. (1987): Segmentation and Classification of Range Images. In: IEEE T-PAMI, vol. 9, pp. 608-620.

[HOUGH 1962] Hough, P.V.C. (1962) Method and means for recognizing complex patterns. U.S. Patent 3,069,654

[JAHN, KERSTEN & KINZEL 2004] Jahn, I., Kersten, Th., Kinzel, R. (2004): Erfahrungen mit einem 3D-Laserscanning-System bei der Erfassung einer Industrieanlage und des Lübecker Holstentores. In: Th. Luhmann: Photogrammetrie Laserscanning Optische 3D-Messtechnik S. 222-229, Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg.

[JAIN & DUBES 1988] Jain, A.K., Dubes, R.C. (1988): Algorithms for Clustering Data. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.

- [KAMPMANN & RENNER 1998] Kampmann, G., Renner, B. (1998): Über die Bestimmung von Flächen höherer Ordnung. In: Der Vermessungsingenieur, Bd. 49 Heft 5/1998, S. 249 – 253.
- [KAMPMANN & RENNER 2004] Kampmann, G., Renner, B. (2004): Vergleich verschiedener Methoden zur Bestimmung ausgleichender Ebenen und Geraden. In: Allgemeine Vermessungsnachrichten, Bd. 111 , Heft 2/2004, S. 56 - 67.
- [KERN 2003] Kern, F. (2003): Automatisierte Modellierung von Bauwerksgeometrien aus 3D-Laserscanner-Daten; Dissertation; Geodätische Schriftenreihe der Technischen Universität Braunschweig; Heft 19, 2003
- [KIMME, BALLARD & SKLANSKY 1975] Kimme, C., Ballard, D.H., Sklansky, J. (1975): Finding Circles by an Array of Accumulators. In: Communications of the ACM, vol. 18(2), pp. 120-122.
- [KRAUS 2000] Kraus, K. (2000): Photogrammetrie, Band 3, Topographische Informationssysteme, Dümmler, Köln.
- [KRESS-LORENZ, ECKERT & SCHAEFFER 2004] Kress-Lorenz, H., Eckert, G., Schaeffer, M. (2004): 3D-Stadtmodellierung und Verkehrsraumerfassung. In: Th. Luhmann: Photogrammetrie Laserscanning Optische 3D-Messtechnik S. 230-237, Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg.
- [KREYSZIG 1957] Kreyszig, E. (1957): Differentialgeometrie. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig.
- [LEICA 2004] Leica Geosystems HDS, Inc. (2004): Cyclone 5.1, Model, Survey. San Ramon, CA, USA.
- [LENK 2003] Lenk, U. (2003): Triangulationen und Adaptive Triangulationen – ein Verfahren zur Ausdünnung unregelmäßig verteilter Massenpunkte in der Geländemodellierung. In: Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement (zfv), Bd. 128, Heft 1, S. 47-56, Wißner-Verlag, Augsburg.
- [LORENSEN & CLINE 1987] Lorensen, W.E., Cline, H.E. (1987): Marching Cubes: a high resolution 3D surface reconstruction algorithm. In: Computer Graphics Proceedings SIGGRAPH, pp. 163-169.
- [MCMASTER 1987] McMaster, R.B. (1987): Automated line generalization. In: Cartographica, vol. 24(2), pp. 74-111.
- [MCMASTER 1989] McMaster, R.B. (1989): The integration of simplification and smoothing algorithms in line generalization. In: Cartographica, vol. 26(1), Monograph 40, pp. 101-121.
- [PFEIFER & WINTERHALDER 2004] Pfeifer, N., Winterhalder, D. (2004): Modelling of Tree Cross Sections from Terrestrial Laser-Scanning Data with Free-Form Curves. In: Proceedings of the ISPRS working group VIII/2 „Laser-Scanners for Forest and Landscape Assessment“, Freiburg, Germany, pp 76-81.

[POPE 1976] Pope, A.J. (1976) : The Statistics of Residuals and the Detection of Outliers. NOAA, Technical Report NOS65 NGS 1, United States Department of Commerce, National Geodetic Survey.

[RISSANEN 1987] Rissanen, I. (1987): Minimum description length principle. In: Encyclopedia of Statistical Sciences, vol. 5, pp. 523–527.

[ROUSSEEUW & LEROY 1987] Rousseeuw, P.J., Leroy, A.M. (1987). Robust Regression and Outlier Detection. John Wiley & Sons. New York. 1987.

[SCHUSTER 2004] Schuster, H.F. (2004): Segmentation of Lidar Data Using The Tensor Voting Framework. In: International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing (IAPRS), vol. XXXV, part B3, pp 1073.

[SCHUSTER & FÖRSTNER 2003] Schuster, H.-F., Förstner, W. (2003): Segmentierung, Rekonstruktion und Datenfusion bei der Objekterfassung mit Entfernungsdaten – ein Überblick. In: Photogrammetrie Laserscanning Optische 3D-Messtechnik, Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg, S. 3-10

[SCHWERMANN & EFFKEMANN 2002] Schwermann, R., Effkemann, C. (2002): Kombiniertes Monoplotting in Laserscanner – und Bilddaten mit PHIDIAS. In: Th. Luhmann: Photogrammetrie und Laserscanning – Anwendung für As-Built-Dokumentation und Facility Management S. 57-70, Herbert Wichmann Verlag , Heidelberg.

[STUDNICKA, RIEGL & ULLRICH 2004] Studnicka, N., Riegl, J., Ullrich, A. (2004): Zusammenführung und Bearbeitung von Laserscandaten und hochauflösenden digitalen Bildern eines hybriden 3D-Laser-Sensorsystems. In: Th. Luhmann: Photogrammetrie Laserscanning Optische 3D-Messtechnik S. 183-190, Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg,.

[VOSELMANN, GORTE, SITHOLE & RABBANI 2004] Vosselmann, G., Gorte, B.G.H., Sithole, G., Rabbani, T. (2004): Recognising Structure in Laser-Scanner Point Clouds. In: Proceedings of the ISPRS working group VIII/2 „Laser-Scanners for Forest and Landscape Assessment“, Freiburg, Germany, pp 33-38.

[WAGNER & HASSE 2004] Wagner, A., Hasse, St. (2004): 3D-Erfassung und Modellierung des Thermo-Windkanals der Audi AG. In: Th. Luhmann: Photogrammetrie Laserscanning Optische 3D-Messtechnik S. 238-245, Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg.

[WEISSTEIN 1999] Weisstein, E. W. (1999): Algebraic Surface. From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/AlgebraicSurface.html>.

[WITTE & SCHMIDT 2004] Witte, B., Schmidt, H. (2004): Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen, 5. Aufl., Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart.

[WOLF 1968] Wolf, H. (1968): Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn.

[ZHAO & SHIBASAKI 2000] Zhao, H., Shibasaki, R. (2000): Reconstruction of Textured Urban 3D Model by Ground Based Laser Range and CCD Images. In: IEICE Trans. Inf. & Syst., E83-D (7), S. 1429-1440.

Lebenslauf

Persönliche Angaben:

Name: Ralf Becker
Geburtsdatum: 29.11.1969
Geburtsort: Köln
Staatsangehörigkeit: deutsch
Familienstand: verheiratet

Werdegang:

29.11.1969 geboren
Frühjahr 1989 Abitur am Gymnasium Kantstraße Köln-Kalk
Oktober 1989 - Januar 1995 Studium der Geodäsie an der Universität Bonn
Herbst 1991 Vordiplom an der Universität Bonn
04.05.1992 - 28.02.1994 Studentische Hilfskraft am Geodätischen Institut der Universität Bonn
05.04.1994 - 31.01.1995 Studentische Hilfskraft am Institut für Photogrammetrie der Universität Bonn
23.09.1994 Eheschließung mit Marita Rücker
09.01.1995 Abschluss des Studiums an der Universität Bonn mit dem Diplom für den Studiengang Vermessungswesen
01.02.1995 - 27.03.1997 Vorbereitungsdienst zum höheren vermessungstechnischen Verwaltungsdienst beim Land Nordrhein-Westfalen mit Abschluss als Vermessungsassessor
01.05.1997 - 28.02.1998 Ableistung des Grundwehrdienstes mit Verwendung beim Amt für Militärisches Geowesen in Euskirchen
01.05.1998 - 31.12.1999 Vermessungsassessor beim Öffentlich bestellten Vermessungsingenieur M. Höffer in Windeck-Schladern
03.01.2000 - 30.11.2000 Öffentlich bestellter Vermessungsingenieur in Windeck-Schladern
01.12.2000 - 30.11.2002 Fachbereichsleiter Liegenschaften, Vermessung, Reproduktion beim Erftverband in Bergheim
06.01.2003 – 31.12.2004 Wissenschaftlicher Angestellter am Geodätischen Institut der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
seit dem 03.01.2005 Öffentlich bestellter Vermessungsingenieur in Erkelenz

Danksagung

Für die Betreuung dieser Arbeit möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Wilhelm Benning herzlich bedanken. Dank gebührt ebenfalls Herrn Prof. Dr.-Ing. Michael Scherer für die Übernahme des Korreferates. Darüber hinaus danke ich den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Geodätischen Instituts der RWTH Aachen für die Anregungen und Hilfestellungen bei der Verfassung dieser Arbeit. Besonders nennen möchte ich Herrn Dipl.-Ing. Christoph Effkemann, der mich in das Auswertesystem PHI-DIAS einführte, sowie bei Herrn Dr.-Ing. Raimund Schwermann für das Korrekturlesen des Textes.

Zum Abschluss möchte ich meinen Eltern danken, die mir die notwendige Ausbildung in Schule und Studium ermöglicht haben, und besonders herzlich meiner Frau Marita, die mir durch ihr Verständnis und ihre Unterstützung den nötigen Rückhalt und die nötige Freude gegeben hat – ihr widme ich diese Arbeit.

Erkelenz, im April 2005

Ralf Becker