

# **Einspieluntersuchungen von Verbundwerkstoffen mit periodischer Mikrostruktur**

Von der Fakultät für Maschinenwesen  
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen  
zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktors der Ingenieurwissenschaften  
genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Ingenieur  
Frank Schwabe

aus Hellersen jetzt Lüdenscheid

Berichter: Universitätsprofessor Dr.-Ing. D. Weichert  
Universitätsprofessor Dr.-Ing. J. Betten

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Oktober 2000

Diese Dissertation ist auf den Internetseiten der Hochschulbibliothek online verfügbar

# Vorwort

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Allgemeine Mechanik der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen.

Herrn PROF. DR.-ING. D. WEICHERT danke ich für die Stellung des Themas sowie die Betreuung und Förderung dieser Arbeit. Sein stets förderndes Interesse am Fortgang des Projekts und zahlreiche Diskussionen haben wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Mein Dank gilt weiterhin Herrn PROF. DR.-ING. J. BETTEN für die bereitwillige Übernahme des weiteren Berichts und sein Interesse an dieser Arbeit.

Besonders möchte ich Herrn DR.-ING. A. HACHEMI danken, der mir durch zahlreiche Diskussionen bei der Erarbeitung des theoretischen Hintergrundes geholfen hat. Herrn DIPL.-ING. M. STOFFEL danke ich weiterhin für die Anregungen beim Korrekturlesen dieser Arbeit.

Für die Unterstützung bei der Literaturbeschaffung und bei der Erstellung einer Abbildung möchte ich Frau M. SCHRAAD und Herrn H.W. RICK danken. Ferner bedanke ich mich bei allen Kollegen, die durch Diskussionen und Rat zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben.

Schließlich möchte ich meiner Familie für die Unterstützung und ihre Geduld danken.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>i</b>
<b>Nomenklatur</b>	<b>iv</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Allgemeines . . . . .	1
1.2 Historische Entwicklung der Einspieltheorie . . . . .	1
1.3 Zielsetzung und Gliederung dieser Arbeit . . . . .	8
<b>2 Einspielen von Strukturen</b>	<b>10</b>
2.1 Der Begriff des Einspielens . . . . .	10
2.2 Das statische Einspieltheorem . . . . .	15
2.3 Erweiterungen des statischen Einspieltheorems . . . . .	19
2.3.1 Einspielen für thermisch belastete Systeme . . . . .	20
2.3.2 Einspielen für unbegrenzt linear kinematisch verfestigendes Material	20
2.3.3 Einspielen für begrenzt linear kinematisch verfestigendes Material .	21
2.3.4 Einspielen für geschädigtes Material . . . . .	23
2.3.5 Allgemeines statisches Einspieltheorem . . . . .	23
2.4 Alternierende Plastizität . . . . .	24
2.5 Einspielanalyse . . . . .	25
2.6 Das kinematische Einspieltheorem . . . . .	25
<b>3 Einspielen von Verbundwerkstoffen mit periodischer Mikrostruktur</b>	<b>28</b>
3.1 Das repräsentative Volumenelement . . . . .	29
3.2 Berücksichtigung der Schädigung . . . . .	30
3.3 Das Materialmodell . . . . .	34
3.4 Ermittlung der makroskopischen Größen . . . . .	36

3.5	Thermodynamische Grundlagen . . . . .	37
3.6	Das Einspieltheorem für Verbundwerkstoffe . . . . .	39
3.7	Beweis des statischen Einspieltheorems . . . . .	43
3.8	Kontrolle des Materialschädigungsfaktors . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Finite-Elemente-Diskretisierung</b>	<b>49</b>
4.1	Definitionen . . . . .	50
4.2	Diskretisierung des elastischen Problems . . . . .	53
4.3	Diskretisierung der zeitunabhängigen Eigenspannungen . . . . .	55
4.4	Numerische Integration . . . . .	56
4.5	Das diskretisierte Einspielproblem . . . . .	56
4.6	Diskretisierung des Lastraumes . . . . .	57
4.6.1	Einspielanalyse . . . . .	60
4.7	Das Optimierungsverfahren . . . . .	61
4.8	Ablauf einer Einspieluntersuchung . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Validierung der vorgeschlagenen numerischen Methode</b>	<b>66</b>
5.1	Lochscheibe unter Zug-Druck-Belastung . . . . .	66
5.2	Scheibe unter Zug- und Temperaturlasten . . . . .	75
5.2.1	Behandlung als ebener Spannungszustand . . . . .	77
5.2.2	Behandlung als ebener Dehnungszustand . . . . .	79
5.2.3	Berücksichtigung der Verfestigung . . . . .	80
5.3	Ebene Scheibe mit Riß . . . . .	81
5.4	Tordierter Balken . . . . .	84
5.5	Diskussion . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Untersuchung von Verbundwerkstoffen mit periodischer Mikrostruktur</b>	<b>87</b>
6.1	Randbedingungen der Mikro- und der Makroebene . . . . .	87
6.2	Traglastanalyse für eindimensionale Zugbelastung . . . . .	90
6.3	Schubspannungsfreie Zug- bzw. Druckbelastung . . . . .	95
6.4	Zug- bzw. Druckbelastung mit Schub . . . . .	112

---

<b>7 Die Einspielanalyse als Optimierungskriterium</b>	<b>118</b>
7.1 Das Optimierungsproblem . . . . .	119
7.2 Der Optimierungsalgorithmus . . . . .	120
7.3 Gestaltoptimierung einer Lochscheibe . . . . .	123
7.4 Gestaltoptimierung eines Verbundwerkstoffes . . . . .	127
7.5 Variation der Materialparameter . . . . .	133
7.6 Faseranordnung in Verbundwerkstoffen . . . . .	136
<b>8 Zusammenfassung</b>	<b>140</b>
<b>A Anhang</b>	<b>142</b>
A.1 GAUSS'scher Integralsatz . . . . .	142
A.2 Zuwachs der Formänderungsarbeit . . . . .	142
A.3 Materialstabilität . . . . .	143
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>145</b>

## Nomenklatur

$\mathbf{a}$	Lösungsvektor der Design-Parameter	
$B$	Koeffizient für Schädigungsmodell	
$\mathcal{B}$	Körper	
$\tilde{\mathcal{B}}$	rein elastischer Vergleichskörper	
$[\mathbf{B}]$	Matrix mit Ableitungen der Formfunktionen	[1/m]
$b$	Breite	[m]
$C_\varepsilon$	spezifische Wärme bei konstanter Dehnung	[N/m <sup>2</sup> K <sup>2</sup> ]
$\mathcal{C}$	konvexer elastischer Bereich	
$\mathcal{C}^i$	striktes Innere von $\mathcal{C}$	
$[\mathbf{C}]$	Matrix für Nebenbedingungen (mit Randbedingungen)	[m <sup>2</sup> ]
$[\mathbf{C}^*]$	Matrix für Nebenbedingungen	[m <sup>2</sup> ]
$D$	Durchmesser	[m]
$D$	Materialschädigungsfaktor	
$D_c$	kritischer Wert der Materialschädigung	
$\dot{D}$	zeitliche Ableitung des Materialschädigungsfaktors	[1/s]
$\mathcal{D}$	konvexer elastischer Bereich	
$\mathcal{D}^m$	konvexer makroskopischer Bereich	
$\mathcal{D}^s$	konvexer elastischer Bereich der sicheren Spannungen $\mathbf{s}$	
$\mathcal{D}^{s,m}$	konvexer makroskopischer Bereich der sicheren Spannungen $\mathbf{S}^s$	
$E$	Elastizitätsmodul	[N/m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{E}$	makroskopische generalisierte Dehnung	
$\mathbf{e}$	generalisierte Dehnung	
$\mathbf{e}^e$	generalisierte elastische Dehnung	
$\mathbf{e}_i$	Einheitsvektor	
$\mathbf{e}^p$	generalisierte plastische Dehnung	
$\dot{\mathbf{e}}^p$	zeitliche Ableitung der generalisierten plastischen Dehnung	[1/s]
$\mathbf{e}^\vartheta$	generalisierte Temperaturdehnung	
$\tilde{\mathbf{e}}$	generalisierte Dehnung des elastischen Vergleichskörpers	
$\tilde{\mathbf{e}}^e$	generalisierte el. Dehnung des elastischen Vergleichskörpers	
$\tilde{\mathbf{e}}^p$	generalisierte pl. Dehnung des elastischen Vergleichskörpers	
$\tilde{\mathbf{e}}^\vartheta$	generalisierte th. Dehnung des elastischen Vergleichskörpers	
$F$	Kraft	[N]
$\mathcal{F}$	MELAN'sche Bedingung	[N/m <sup>2</sup> ]
$\dot{\mathcal{F}}$	zeitliche Ableitung von $\mathcal{F}$	[N/m <sup>2</sup> s]

$\{\mathbf{F}_K\}$	Vektor der Knotenkräfte	[N]
$\{\mathbf{F}^\theta\}$	Vektor der äquivalenten thermischen Knotenlasten	[N]
$\mathbf{f}^*, f_i^*$	Volumenlasten	[N/m <sup>3</sup> ]
$f$	Volumenverhältnis	
$f(\mathbf{a})$	Zielfunktion der Optimierung	
$G$	thermodynamische Kraft	[N/m <sup>2</sup> ]
$\Delta G$	Differenz zweier thermodynamischer Kräfte	[N/m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{g}, g_i$	Gradient der Temperaturdifferenz	[1/m]
$h$	Höhe	[m]
$[J_j]$	JACOBI'sche Matrix für das $j$ -te Element	[m]
$[\mathbf{K}]$	Steifigkeitsmatrix mit kinematischen Randbedingungen	[N/m]
$[\mathbf{K}^*]$	Steifigkeitsmatrix	[N/m]
$k$	skalärer Parameter für $\mathcal{F}$	[N/m <sup>2</sup> ]
$L$	Länge	[m]
$\mathbf{L}, L_{ijkl}$	Elastizitätstensor	[N/m <sup>2</sup> ]
$\mathcal{L}$	Lastraum	
$\mathcal{L}$	generalisierter Elastizitätstensor	[N/m <sup>2</sup> ]
$[\mathbf{L}]$	Elastizitätsmatrix	[N/m <sup>2</sup> ]
$\ell$	Länge	[m]
$N_i$	Formfunktionen	
$NE$	Anzahl aller Finiten Elemente	
$NG$	Anzahl aller Integrationspunkte	
$NGE$	Anzahl der Integrationspunkte für ein Finites Element	
$NK$	Anzahl aller Knoten	
$NKE$	Anzahl der Knoten für ein Finites Element	
$NSK$	Dimension des Spannungsvektors	
$[\mathbf{N}]$	Matrix mit Formfunktionen	
$\mathbf{n}, n_i$	nach außen gerichteter Einheitsnormalenvektor	
$P$	Projektionsoperator	
$\mathbf{P}$	allgemeiner Lastzustand	
$\mathcal{P}_j$	Lastecken	
$\mathcal{P}_j^\theta$	Lastecken (nur thermischer Anteil)	
$p$	Flächenlast	[N/m <sup>2</sup> ]
$p$	Streckenlast	[N/m]
$p$	äquivalente plastische Dehnung	
$\mathbf{p}^*, p_i^*$	Oberflächenlasten	[N/m <sup>2</sup> ]
$\dot{p}$	zeitliche Ableitung der äquivalenten plastischen Dehnung	[1/s]
$\mathbf{q}, q_i$	Wärmefluß	[W/m <sup>2</sup> ]
$R_\sigma$	Triaxialitätsfunktion	

$r$	Dimension der internen Parameter	
$\bar{\mathbf{r}}$	zeitunabhängige generalisierte Spannung	[N/m <sup>2</sup> ]
$S$	Oberfläche	[m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{S}$	makroskopische generalisierte Spannung	[N/m <sup>2</sup> ]
$\mathcal{S}$	Menge aller Lösungsvektoren	
$S^{\text{eff}}$	effektiv tragende Fläche	[m <sup>2</sup> ]
$S_D$	geschädigte Fläche	[m <sup>2</sup> ]
$S_F$	Oberfläche mit Oberflächenkräften	[m <sup>2</sup> ]
$S_K$	Oberfläche mit kinematischen Randbedingungen	[m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{S}^s$	sichere makroskopische generalisierte Spannung	[N/m <sup>2</sup> ]
$s$	spezifische Entropie	[J/kg K]
$s_{ii}$	Skalierungsfaktor	
$\mathbf{s}$	generalisierte Spannung	[N/m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{s}^{\text{eff}}$	effektive generalisierte Spannung	[N/m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{s}^s$	sichere generalisierte Spannung	[N/m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{s}^{s,\text{eff}}$	sichere effektive generalisierte Spannung	[N/m <sup>2</sup> ]
$\tilde{\mathbf{s}}$	generalisierte Spannung des elastischen Vergleichskörpers	[N/m <sup>2</sup> ]
$T, t$	Zeit	[s]
$t$	dimensionslose Zeit	
$T^c$	Zeit für einen kompletten Zyklus	[s]
$T$	Tangentenmodul	[N/m <sup>2</sup> ]
$\delta U_\varepsilon$	innere virtuelle Formänderungsarbeit	[J]
$\mathbf{u}, u_i$	Verschiebungsvektor	[m]
$\mathbf{u}^*, u_i^*$	kinematische Randbedingungen	[m]
$\dot{\mathbf{u}}, \dot{u}_i$	zeitliche Ableitung des Verschiebungsvektors $\mathbf{u}$	[m/s]
$\dot{\mathbf{u}}^c, \dot{u}_i^c$	Verschiebungsgeschwindigkeitsvektor in einem Zyklus	[m/s]
$\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{u}_i$	Verschiebungsvektor des elastischen Vergleichskörpers	[m]
$\dot{\tilde{\mathbf{u}}}^e, \dot{\tilde{u}}_i^e$	zeitliche Ableitung des elastischen Verschiebungsvektors $\tilde{\mathbf{u}}^e$	[m/s]
$\Delta \mathbf{u}^c, \Delta u_i^c$	Verschiebungsvektor für einen Zyklus	[m/s]
$\delta \tilde{\mathbf{u}}^e, \delta \tilde{u}_i^e$	virtuelles Verschiebungsfeld	[m]
$\{\delta \tilde{\mathbf{u}}^e\}$	Vektor des virtuellen Verschiebungsfeldes	[m]
$\{\delta \tilde{\mathbf{u}}_K^e\}$	Vektor der virtuellen Knotenverschiebungen	[m]
$\{\tilde{\mathbf{u}}_K^e\}$	Vektor der Knotenverschiebungen für el. Vergleichskörper	[m]
$V$	Volumen	[m <sup>3</sup> ]
$\mathbf{v}, v_i$	zeitliche Ableitung des Verschiebungsvektors $\mathbf{u}$	[m/s]
$\tilde{\mathbf{v}}^e, \tilde{v}_i^e$	zeitliche Ableitung des elastischen Verschiebungsvektors $\tilde{\mathbf{u}}^e$	[m/s]
$W$	positiv definiten Ausdruck	[J]
$\dot{W}$	zeitliche Ableitung von $W$	[W]
$W_p$	plastische Dissipationsarbeit	[J]

$\dot{W}_p$	plastische Dissipationsleistung	[W]
$\delta W^{(a)}$	virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte	[J]
$w_p$	spezifische plastische Dissipationsarbeit	[J/m <sup>3</sup> ]
$w_i$	Wichtungsfaktoren für die numerische Integration	
$x$	$x$ -Koordinate	[m]
$\mathbf{x}, x_i$	Ortsvektor in der aktuellen Konfiguration (makroskopisch)	[m]
$y$	$y$ -Koordinate	[m]
$\mathbf{y}, y_i$	Ortsvektor in der aktuellen Konfiguration (mikroskopisch)	[m]
$z$	$z$ -Koordinate	[m]
$\mathbf{Z}, Z_{mn}$	interner Elastizitätstensor	[N/m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{0}, 0_i$	Nullvektor	
$\mathbf{0}, 0_{ij}$	Nulltensor 2. Stufe	
$\{\mathbf{0}\}$	Nullvektor	

### Griechische Symbole

$\alpha$	Sicherheitsfaktor	
$\alpha_e$	Sicherheitsfaktor (Elastizität)	
$\alpha_{AP}$	Sicherheitsfaktor (alternierende Plastizität)	
$\alpha_{ES}$	Sicherheitsfaktor (elastisches Einspielen)	
$\alpha_{SD}$	Sicherheitsfaktor (Einspielen)	
$\alpha_\vartheta$	thermischer Ausdehnungskoeffizient	[1/K]
$\{\alpha_\vartheta \cdot \Delta\vartheta\}$	Vektor der thermischen Dehnungen	
$\boldsymbol{\beta}, \beta_i$	Vektor der Design-Parameter	
$\delta_{ij}$	KRONECKER-Symbol	
$\varepsilon$	Dehnung	
$\varepsilon_D$	Dehnung, bei der Schädigung erstmals auftritt	
$\varepsilon_R$	Bruchdehnung	
$\boldsymbol{\varepsilon}, \varepsilon_{ij}$	Dehnungstensor	
$\boldsymbol{\varepsilon}^e, \varepsilon_{ij}^e$	elastischer Dehnungstensor	
$\boldsymbol{\varepsilon}^p, \varepsilon_{ij}^p$	plastischer Dehnungstensor	
$\boldsymbol{\varepsilon}^r, \varepsilon_{ij}^r$	Dehnung aus dem Eigenspannungstensor $\boldsymbol{\rho}$	
$\boldsymbol{\varepsilon}^\vartheta, \varepsilon_{ij}^\vartheta$	thermischer Dehnungstensor	
$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e, \tilde{\varepsilon}_{ij}^e$	elastischer Dehnungstensor des elastischen Vergleichskörpers	
$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^\vartheta, \tilde{\varepsilon}_{ij}^\vartheta$	thermischer Dehnungstensor des elastischen Vergleichskörpers	
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\varepsilon}_{ij}$	tatsächliche Dehnrates	[1/s]
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c, \dot{\varepsilon}_{ij}^c$	Dehnrates für einen Zyklus	[1/s]
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e, \dot{\varepsilon}_{ij}^e$	elastische Dehnrates	[1/s]
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\varepsilon}_{ij}^p$	plastische Dehnrates	[1/s]

$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^r, \dot{\epsilon}_{ij}^r$	Dehnrates aus dem Eigenspannungstensor $\boldsymbol{\rho}$	[1/s]
$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e, \dot{\epsilon}_{ij}^e$	Dehnrates des elastischen Vergleichskörpers	[1/s]
$\Delta\boldsymbol{\epsilon}^p, \Delta\epsilon_{ij}^p$	Tensor der plastischen Dehnungszuwächse	
$\delta\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^e, \delta\tilde{\epsilon}_{ij}^e$	virtuelles elastisches Dehnungsfeld	
$\{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^e\}$	elastischer Dehnungsvektor für elastischen Vergleichskörper	
$\{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^\vartheta\}$	Vektor der thermischen Dehnungen	
$\{\delta\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^e\}$	Vektor des virtuellen elastischen Dehnungsfeldes	
$\epsilon_l, \epsilon_c$	Toleranzgrenzen	
$\zeta$	$\zeta$ -Koordinate im Referenzelement	
$\eta$	$\eta$ -Koordinate im Referenzelement	
$\eta$	Straf-Parameter	
$\Theta$	Kontraktionsfaktor	
$\Theta^*$	Temperaturalasten	[K]
$\vartheta$	Temperatur	[K]
$\Delta\vartheta$	Temperaturdifferenz	[K]
$\Delta\dot{\vartheta}$	zeitliche Ableitung von $\Delta\vartheta$	[K/s]
$\boldsymbol{\kappa}, \kappa_n$	interne Parameter zur Beschreibung der Verfestigung	
$\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \dot{\kappa}_n$	zeitliche Ableitung von $\boldsymbol{\kappa}$	[1/s]
$\lambda_i$	skalare Multiplikatoren	
$\lambda_i$	LAGRANGE'sche Multiplikatoren	
$\dot{\lambda}$	Parameter der Fließregel	[1/s]
$\mu_i, \mu_i^-, \mu_i^+$	skalare Multiplikatoren	
$\mu$	Streckfaktor	
$\nu$	Querkontraktionszahl	
$\nu_{ep}$	elastisch-plastische Querkontraktionszahl	
$\boldsymbol{\nu}, \nu_{ij}$	für Fließen verantwortlicher Anteil des Spannungstensors	[N/m <sup>2</sup> ]
$\boldsymbol{\Xi}, \Xi_{ij}$	makroskopischer Dehnungstensor	
$\xi$	$\xi$ -Koordinate im Referenzelement	
$\boldsymbol{\xi}, \xi_i$	Ortsvektor in einem Referenzelement	
$\boldsymbol{\Pi}, \Pi_n$	makroskopischer Verfestigungsspannungstensor	[N/m <sup>2</sup> ]
$\boldsymbol{\pi}, \pi_n$	Verfestigungsspannungstensor	[N/m <sup>2</sup> ]
$\boldsymbol{\pi}^{\text{eff}}, \pi_n^{\text{eff}}$	effektiver Verfestigungsspannungstensor	[N/m <sup>2</sup> ]
$\boldsymbol{\pi}^s, \pi_n^s$	sicherer Verfestigungsspannungstensor	[N/m <sup>2</sup> ]
$\boldsymbol{\pi}^{s,\text{eff}}, \pi_n^{s,\text{eff}}$	sicherer effektiver Verfestigungsspannungstensor	[N/m <sup>2</sup> ]
$\bar{\boldsymbol{\pi}}, \bar{\pi}_n$	zeitunabhängiger Verfestigungsspannungstensor	[N/m <sup>2</sup> ]
$\bar{\boldsymbol{\pi}}^{\text{eff}}, \bar{\pi}_n^{\text{eff}}$	effektiver zeitunabhängiger Verfestigungsspannungstensor	[N/m <sup>2</sup> ]
$\dot{\boldsymbol{\pi}}, \dot{\pi}_n$	zeitliche Ableitung von $\boldsymbol{\pi}$	[N/m <sup>2</sup> s]
$\dot{\boldsymbol{\pi}}^{\text{eff}}, \dot{\pi}_n^{\text{eff}}$	zeitliche Ableitung von $\boldsymbol{\pi}^{\text{eff}}$	[N/m <sup>2</sup> s]
$\dot{\bar{\boldsymbol{\pi}}}, \dot{\bar{\pi}}_n$	zeitliche Ableitung von $\bar{\boldsymbol{\pi}}$	[N/m <sup>2</sup> s]

$\dot{\bar{\pi}}^{\text{eff}}, \dot{\bar{\pi}}_n^{\text{eff}}$	zeitliche Ableitung von $\bar{\pi}^{\text{eff}}$	[N/m <sup>2</sup> s]
$\{\bar{\pi}\}$	Vektor der zeitunabhängigen Verfestigungsspannungen	[N/m <sup>2</sup> ]
$\rho$	Dichte	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho, \rho_{ij}$	tatsächlicher Eigenspannungstensor	[N/m <sup>2</sup> ]
$\rho^{\text{eff}}, \rho_{ij}^{\text{eff}}$	effektiver Eigenspannungstensor	[N/m <sup>2</sup> ]
$\bar{\rho}, \bar{\rho}_{ij}$	zeitunabhängiger Eigenspannungstensor	[N/m <sup>2</sup> ]
$\hat{\rho}, \hat{\rho}_{ij}$	zeitunabhängiger Eigenspannungstensor	[N/m <sup>2</sup> ]
$\bar{\rho}^{\text{eff}}, \bar{\rho}_{ij}^{\text{eff}}$	effektiver zeitunabhängiger Eigenspannungstensor	[N/m <sup>2</sup> ]
$\dot{\rho}, \dot{\rho}_{ij}$	zeitliche Ableitung des Eigenspannungstensors $\rho$	[N/m <sup>2</sup> s]
$\dot{\rho}^{\text{eff}}, \dot{\rho}_{ij}^{\text{eff}}$	zeitliche Ableitung von $\rho^{\text{eff}}$	[N/m <sup>2</sup> s]
$\dot{\bar{\rho}}, \dot{\bar{\rho}}_{ij}$	zeitliche Ableitung von $\bar{\rho}$	[N/m <sup>2</sup> s]
$\dot{\bar{\rho}}^{\text{eff}}, \dot{\bar{\rho}}_{ij}^{\text{eff}}$	zeitliche Ableitung von $\bar{\rho}^{\text{eff}}$	[N/m <sup>2</sup> s]
$\{\bar{\rho}\}$	zeitunabhängiger Eigenspannungsvektor	[N/m <sup>2</sup> ]
$\Sigma, \Sigma_{ij}$	makroskopischer Spannungstensor	[N/m <sup>2</sup> ]
$\sigma$	Spannung	[N/m <sup>2</sup> ]
$\sigma_V^{\text{eff}}$	effektive Vergleichsspannung	[N/m <sup>2</sup> ]
$\sigma_H$	hydrostatische Spannung	[N/m <sup>2</sup> ]
$\sigma_L$	Grenzwert der Fließspannung (Zugfestigkeit)	[N/m <sup>2</sup> ]
$\sigma_V$	Vergleichsspannung	[N/m <sup>2</sup> ]
$\sigma_Y$	Fließspannung	[N/m <sup>2</sup> ]
$\sigma, \sigma_{ij}$	Spannungstensor	[N/m <sup>2</sup> ]
$\sigma^D, \sigma_{ij}^D$	deviatorischer Anteil des Spannungstensors $\sigma$	[N/m <sup>2</sup> ]
$\sigma^{D,\text{eff}}, \sigma_{ij}^{D,\text{eff}}$	Deviator des effektiven Spannungstensors	[N/m <sup>2</sup> ]
$\sigma^{\text{eff}}, \sigma_{ij}^{\text{eff}}$	effektiver Spannungstensor	[N/m <sup>2</sup> ]
$\sigma^s, \sigma_{ij}^s$	Spannungstensor eines sicheren Spannungszustandes	[N/m <sup>2</sup> ]
$\sigma^{s,\text{eff}}, \sigma_{ij}^{s,\text{eff}}$	sicherer effektiver Spannungstensor	[N/m <sup>2</sup> ]
$\tilde{\sigma}^e, \tilde{\sigma}_{ij}^e$	Spannungstensor des elastischen Vergleichskörpers	[N/m <sup>2</sup> ]
$\tilde{\sigma}^{\text{eff}}, \tilde{\sigma}_{ij}^{\text{eff}}$	effektiver Spannungstensor des elastischen Vergleichskörpers	[N/m <sup>2</sup> ]
$\dot{\sigma}, \dot{\sigma}_{ij}$	zeitliche Ableitung des Spannungstensors $\sigma$	[N/m <sup>2</sup> s]
$\dot{\tilde{\sigma}}^e, \dot{\tilde{\sigma}}_{ij}^e$	zeitliche Ableitung des Spannungstensors $\tilde{\sigma}^e$	[N/m <sup>2</sup> s]
$\{\Sigma^s\}$	makroskopischer Spannungsvektor	[N/m <sup>2</sup> ]
$\{\tilde{\sigma}^e\}$	Spannungsvektor des elastischen Vergleichskörpers	[N/m <sup>2</sup> ]
$\{\tilde{\sigma}^e\}$	elastischer Spannungsvektor für elastischen Vergleichskörper	[N/m <sup>2</sup> ]
$\{\tilde{\sigma}^\vartheta\}$	Vektor der thermischen Spannungen	[N/m <sup>2</sup> ]
$\tau$	Schubspannung	[N/m <sup>2</sup> ]
$\tau$	Streckenlast	[N/m]
$\Upsilon$	Dissipationspotential	[W]
$\Phi$	LAGRANGE'sche Funktion	
$\varphi$	charakteristischer Winkel	

$\Psi$	thermodynamisches Potential	[J/kg]
$\Psi_0$	thermodynamisches Potential eines ungeschädigten Materials	[J/kg]
$\Psi^e$	elastisches thermodynamisches Potential	[J/kg]
$\Psi^p$	plastisches thermodynamisches Potential	[J/kg]
$\Psi_0^e$	ungeschädigtes elastisches thermodynamisches Potential	[J/kg]
$\Psi_0^p$	ungeschädigtes plastisches thermodynamisches Potential	[J/kg]
$\dot{\Psi}$	zeitliche Ableitung von $\Psi$	[W/kg]
$\omega, \omega_n$	interne elastische Parameter	
$\dot{\omega}, \dot{\omega}_n$	zeitliche Ableitung von $\omega$	[1/s]

### hochgestellte Indizes

$(\cdot)^D$	deviatorischer Anteil
$(\cdot)^c$	Größen gelten für einen Zyklus
$(\cdot)^e$	elastisch
$(\cdot)^{\text{eff}}$	effektiv
$(\cdot)^m$	makroskopisch
$(\cdot)^p$	plastisch
$(\cdot)^r$	aus den Eigenspannungen kommend
$(\cdot)^s$	sicher
$(\cdot)^t$	transponiert
$(\cdot)^*$	vorgegebener Maximalwert
$(\cdot)^\vartheta$	temperaturbezogen
$(\cdot)^+$	oberer Grenzwert
$(\cdot)^-$	unterer Grenzwert
$(\tilde{\cdot})$	bezogen auf den elastischen Vergleichskörper
$(\bar{\cdot}), (\hat{\cdot})$	zeitunabhängig
$(\dot{\cdot}), (\ddot{\cdot})$	zeitliche Ableitung, zweite zeitliche Ableitung
$(\cdot)^{(-1)}$	Inverse einer Matrix bzw. Tensors

### tiefgestellte Indizes

$(\cdot)_{\text{AP}}$	alternierende Plastizität
$(\cdot)_D$	geschädigt
$(\cdot)_{\text{ES}}$	elastisches Einspielen
$(\cdot)_K$	bezieht sich auf die Knoten der Finiten Elemente
$(\cdot)_L$	maximaler Wert („limit“)
$(\cdot)_R$	Größe beim Bruch
$(\cdot)_{\text{SD}}$	Einspielen („shakedown“)

$(\cdot)_Y$	fließend
$(\cdot)_0$	ungeschädigt
$(\cdot)_c$	kritisch
$(\cdot)_{i,j,k,l,m,n}$	Zählvariablen der Indexnotation
$(\cdot)_{\max}$	Maximalwert
$(\cdot)_{\text{opt}}$	optimaler Wert
$(\cdot)_\vartheta$	temperaturbezogen

## Verwendete Schreibweisen

In der vorliegenden Arbeit werden neben der Indexschreibweise auch symbolische Schreibweisen benutzt.

Bei der symbolischen Schreibweise werden Vektoren, Matrizen und Tensoren durch Buchstaben in Fettdruck dargestellt. Skalare werden nicht besonders gekennzeichnet. Das HOOKE'sche Gesetz sieht dann beispielsweise so aus:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L} : \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Bei der Finite-Elemente-Diskretisierung werden Vektoren durch geschweifte Klammern und Matrizen durch rechteckige Klammern gekennzeichnet. Ein lineares Gleichungssystem hat dann folgende Gestalt:

$$[\mathbf{A}] \{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{b}\}.$$

Ein hochgestelltes  $^t$  steht für transponierte Vektoren bzw. Matrizen (z.B.  $\{\mathbf{u}\}^t$ ,  $[\mathbf{B}]^t$ ).

Inverse Matrizen werden durch eine hochgestellte  $(^{-1})$  gekennzeichnet (z.B.  $[\mathbf{L}]^{(-1)}$ ).

Für die Indexschreibweise gilt die EINSTEIN'sche Summationsvereinbarung, bei der über doppelt vorkommenden Indizes summiert wird:

$$\sigma_{ji} n_j = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} n_j = \sigma_{1i} n_1 + \sigma_{2i} n_2 + \sigma_{3i} n_3.$$

Partielle Differentiationen werden durch ein Komma mit nachgestelltem Differentiationsindex symbolisiert:

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Ein übergestellter Punkt kennzeichnet die zeitliche Ableitung einer Größe:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{d}{dt} \boldsymbol{\sigma}, & \dot{\sigma}_{ij} &= \frac{d}{dt} \sigma_{ij}, \\ \ddot{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{d^2}{dt^2} \boldsymbol{\sigma}, & \ddot{\sigma}_{ij} &= \frac{d^2}{dt^2} \sigma_{ij}. \end{aligned}$$

# 1 Einleitung

## 1.1 Allgemeines

Oftmals ist eine Information über das Versagen bzw. Nicht-Versagen von Bauteilen und Strukturen unter veränderlichen Lasten wichtiger als die genaue Kenntnis der sich einstellenden Spannungen und Verschiebungen. Im folgenden steht die Frage im Mittelpunkt, ob ein Bauteil aufgrund akkumulierter inelastischer Verformungen versagt oder seinen funktionalen Anforderungen noch genügt. Eine spezielle Art des Versagens ist die unbegrenzte Akkumulation plastischer Dehnungen im Inneren eines Körpers. Hierbei wird zwischen zwei möglichen Formen unterschieden. Die eine zeichnet sich durch das Auftreten alternierender plastischer Dehnungen aus, die zu einem lokalen plastischen Ermüden des Materials und schließlich zum Bruch führt. Die andere Form ist durch das inkrementelle unbegrenzte Anwachsen plastischer Verformungen während der Belastungszyklen gekennzeichnet, was schließlich zur Gebrauchsunfähigkeit der Struktur führt. Beide Versagensarten können auch gleichzeitig auftreten. Die erste Form wird auch Versagen aufgrund „Alternierender Plastizität“ genannt, während die zweite als „Inkrementelles Versagen“ bezeichnet wird. Beide Formen haben gemeinsam, daß kein Zeitpunkt gefunden werden kann, jenseits dessen keine weiteren plastischen Verformungen auftreten. Der entgegengesetzte Fall, bei dem kein Versagen auftritt, wird als „Einspielen“ (englisch „shakedown“) bezeichnet. Charakteristisch für diesen Zustand ist, daß in den ersten Zyklen des Belastungsprozesses im Körperinneren plastische Dehnungen entstehen, die eine Eigenspannungsverteilung hervorrufen. Ab einem gewissen Zeitpunkt des Belastungsprozesses verhindert die nun ausgebildete Eigenspannungsverteilung, daß zusätzliche plastische Dehnungen auftreten können. Der Körper verhält sich ab diesem Zeitpunkt nur noch rein elastisch. Man spricht jetzt vom „Einspielen“ des Körpers.

## 1.2 Historische Entwicklung der Einspieltheorie

### Die klassischen Einspieltheoreme

Bereits 1926 hat GRÜNING [49] auf die Besonderheit eines statisch unbestimmten Systems unter veränderlichen Lasten hingewiesen. BLEICH [14] (1932) griff dieses Ergebnis auf und formulierte erstmalig ein statisches Einspieltheorem für ein einfach statisch unbestimmtes

System. Die Erweiterung auf beliebig vielfach statisch unbestimmte Systeme ist dann in der Folge von MELAN [108] (1936) durchgeführt worden, der auch das klassische statische Einspieltheorem für Kontinua aus elastisch – ideal plastischem Material und für Kontinua aus linear, unbegrenzt-verfestigendem Material formulierte [109, 110] (1938). Die Demonstration und Handhabung dieses Einspieltheorems sind später von SYMONDS [156] (1951) und KOITER [89] (1952) gezeigt worden. Diese Arbeiten bilden die Grundlage aller folgenden, auf dem statischen Einspieltheorem beruhenden Arbeiten. Das statische Einspieltheorem stellt ein hinreichendes Kriterium für Einspielen dar und wird ausschließlich in Spannungsgrößen formuliert.

Die Formulierung eines Einspieltheorems in kinematische Größen wurde 1956 erstmals von KOITER [90, 91] für ein elastisches, ideal-plastisches Material angegeben. Dieses Theorem wird als kinematisches Einspieltheorem bezeichnet und stellt ein hinreichendes Kriterium für das Nicht-Einspielen von Körpern in quasistatischen Prozessen dar. Es ist Grundlage aller darauf beruhenden Arbeiten.

### **Gültigkeit der Einspieltheoreme**

Voraussetzung für die Gültigkeit beider Theoreme sind die Existenz einer konvexen Fließfläche (BETTEN [7] (1979)) und die Gültigkeit der Normalitätsregel (BETTEN [10] (1985)) für die plastischen Dehnungsgeschwindigkeiten. Ebenso werden Temperaturänderungen, viskose Effekte, Materialverfestigung und -schädigung vernachlässigt, und es wird sich auf die geometrisch linearen Probleme beschränkt. Für den Sonderfall einer proportionalen Belastung führen die Theoreme auf die bekannte Grenzlasttheorie für ideal plastische Körper (DRUCKER ET AL. [34] (1951)). DÉBORDES & NAYROLES [28] (1976) haben gezeigt, daß das statische und das kinematische Einspieltheorem im Sinne der konvexen Analyse zueinander dual sind.

### **Inkrementelle Bestimmung der Einspielgrenzen**

Grundsätzlich können Einspielprobleme aber auch durch eine inkrementelle Vorgehensweise behandelt werden. All diesen Verfahren ist dabei gemeinsam, daß mit Hilfe eines inkrementellen Verfahrens eine elasto-plastische Analyse der zu betrachtenden Struktur durchgeführt wird (z.B. KÖNIG & KLEIBER [86] (1978), BORKOWSKI & KLEIBER [16] (1980), KLEIBER & KÖNIG [76] (1984) und HYDE ET AL. [68] (1985)). Im Laufe der inkrementellen Analyse muß überprüft werden, ob sich die im Inneren der Struktur entstehenden plastischen Dehnungen stabilisieren, daß heißt gegen ein konstantes Feld konvergieren. Die Kenntnis der Lastgeschichte ist bei dieser Vorgehensweise unbedingt erforderlich. Ein weiterer wesentlicher Nachteil der inkrementellen Vorgehensweise besteht darin, daß unter Umständen sehr viele Lastzyklen berechnet werden müssen, bevor sich ein konstantes plastisches Dehnungsfeld einstellt. Neben der Gefahr der Fehlerakkumulation erhält man außerdem keine Angabe über die Größe der Sicherheit gegen Versagen.

### Literaturübersicht

Seit der erstmaligen Formulierung der Einspieltheoreme sind zahlreiche Veröffentlichungen erschienen, die die Einspieltheorie immer mehr erweitert haben. Dabei sind komplexere Materialgesetze, die Berücksichtigung von thermischen und dynamischen Lasten, Verfestigung, der Einfluß geometrischer Nichtlinearitäten und die Effekte der Materialschädigung zu nennen. Einen allgemeinen Überblick über die existierenden Arbeiten und historische Entwicklung der Einspieltheorie geben die Übersichtsartikel von MAIER, KÖNIG und MUNRO [87, 83, 106, 105] (1981, 1982, 1982, 1986), das Literaturverzeichnis von KÖNIG [85] (1987) sowie die Sammelbände von KLEIBER & KÖNIG [77] (1990) und MRÓZ ET AL. [115] (1995). Nachfolgend werden die wichtigsten Arbeiten auf dem Gebiet des Einspielens aufgeführt.

### Berücksichtigung von Temperatureinflüssen

Die Berücksichtigung von Temperaturlasten in den Spannungen geht auf PRAGER [130] (1956) und ROZENBLUM [137] (1957) zurück. Thermische Einflüsse auf den Elastizitätsmodul und auf die Fließspannung sind von KÖNIG [79, 80] (1969 und 1979) mitberücksichtigt worden. ROZENBLUM [138] (1965), DE DONATO [29] (1970) und KARADENIZ & PONTER [75] (1984) verwendeten für thermische Lasten das kinematische Einspieltheorem, während GOKHFELD & CHERNIAVSKY [48] (1980) und GROSS-WEEGE & WEICHERT [53] (1992) das statische Einspieltheorem benutzten.

### Weiterentwicklungen

Dynamische Probleme sind zuerst von KALISKI & WŁODARCZYK [74] (1967) untersucht worden. Eine Generalisierung des statischen Theorems ist von CERADINI [21] (1969), MRÓZ [114] (1971), MAIER [104] (1972), HWA-SHAN-HO [67] (1972) und CORRADI & MAIER [26] (1973) durchgeführt worden. Die Verbindung zwischen kinematischem und statischem Einspieltheorem im Sinne der Dualität in der linearen Programmierung ist von MAIER [102] (1969) unter Berücksichtigung nicht-assoziierter Gesetze gezeigt worden. GOKHFELD [47] (1966) und SAWCZUK [141] (1969) benutzten das kinematische Theorem, um ein Kriterium für inkrementelles Versagen aufzustellen und zeigten, daß im Fall einer linearen Fließbedingung die Energieungleichung über der Zeit integriert werden kann. Verschiedene weitere Lösungsmöglichkeiten wurden zwischenzeitlich unter Verwendung des kinematischen Theorems entwickelt. Ein Kriterium für Versagen aufgrund alternierender Plastizität wurde von KÖNIG [81] (1979) entwickelt, das ausschließlich in den Größen der rein elastischen Spannungszustände formuliert ist.

### Berücksichtigung des Verfestigungsverhaltens

Bereits 1938 hat MELAN [110] sein Einspieltheorem auf Kontinua bestehend aus linear unbegrenzt kinematisch verfestigendem Material erweitert. Auf dieser Basis haben NEAL [117] (1950), PONTER [126] (1975) und ZARKA & CASIER [180] (1981) weitere Ergebnisse gewonnen. NEAL formulierte ein statisches Einspieltheorem für nichtlineares endlich kinematisch verfestigendes Materialverhalten für den ein-dimensionalen Spannungszustand und führte numerische Untersuchungen durch. MAIER [103] (1972) stellte ein Modell für diskrete Strukturen vor, das für linearisierte geometrische Effekte („zweiter Ordnung“) gültig ist. Er benutzt eine linearisierte Fließfläche, die es erlaubt, die Translation einer individuellen aktiven Fließfläche zu berücksichtigen. KÖNIG [85] (1987) und KÖNIG & SIEMASZKO [88] (1988) haben die Effekte der Verfestigung bei Einspielproblemen mitberücksichtigt. PONTER [126] (1975) und MANDEL [107] (1976) verwendeten erstmalig das „Generalized Standard Material Model“ von HALPHEN & NGUYEN [59] zur Beschreibung von verfestigendem Materialverhalten. Alle Autoren, mit Ausnahme von NEAL, haben das kinematisch unbegrenzte Verfestigungsverhalten untersucht. Die Aufstellung eines statischen Einspieltheorems für kinematisch begrenzt verfestigendes Materialverhalten ist erstmalig theoretisch und numerisch WEICHERT & GROSS-WEEGE [50, 53] (1988, 1992) und später STEIN ET AL. [151, 149, 148, 150] (1990, 1992, 1993, 1993) gelungen. Unter Hinzufügung von Evolutionsgrenzen bei den internen Parametern des „Generalized Standard Material Model“ erweiterten WEICHERT & GROSS-WEEGE das statische Einspieltheorem um eine Zwei-Flächen-Fließbedingung, bei der die kinematische Bewegung der Fließfläche durch eine zweite Fläche eingeschränkt ist. Mit einer allgemeinen Erweiterung des von NEAL [117] (1950) verwandten mikromechanischen Modells, dem sogenannten „Overlay-Modell“, kommen STEIN ET AL. zu ähnlichen Ergebnissen. In jüngster Zeit hat HEITZER [61] (1999) gezeigt, wie beide Modelle ineinander überführt werden können. POLIZZOTTO ET AL. [124] (1991) und PYCKO & MAIER [133] (1995) untersuchten auf dieser Basis ebenfalls den Einfluß einer Materialverfestigung.

### Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte

Die Erweiterung der Einspieltheoreme auf geometrisch nichtlineare Problemstellungen ist in der Vergangenheit ebenfalls entscheidend vorangetrieben worden. Bereits 1972 hat sich MAIER [103] mit diesem Problem beschäftigt. Er erweiterte das statische und das kinematische Einspieltheorem um die sogenannten „geometrischen Effekte zweiter Ordnung“ indem er stückweise lineare Fließbedingungen benutzte und die zu betrachtende Struktur durch eine einfache Matrizenformulierung diskretisierte. KÖNIG und SIEMASZKO [82, 84, 88] (1980, 1984, 1988) untersuchten mit der gleichen Methode den Einfluß der geometrischen Effekte auf die Stabilität des Verformungsprozesses. WEICHERT [166, 167, 169, 170] (1984, 1986, 1989, 1990) untersuchte das Problem der geometrischen Effekte in verschiedenen Arbeiten im Rahmen der Kontinuumsmechanik und

gab eine Erweiterung des statischen Einspieltheorems an, das bei Kenntnis der zu erwartenden Verschiebungen anwendbar ist. Er nahm an, daß sich die Dehnungen dabei in additive Anteile zerlegen lassen und wandte dies auf schalenartige Strukturen mit moderaten Rotationen und kleinen Dehnungen an. GROSS-WEEGE [50] (1988) zeigte hierzu gehörige numerische Untersuchungen an Kreiszyinderschalen, die auf den Arbeiten von MORELLE & NGUYEN DANG HUNG [112] (1983) und MORELLE [111] (1984) beruhen, indem er die Einspielfaktoren mit Hilfe eines Algorithmus bestimmte, der auf einem „augmentierten Lagrange’schen Verfahren“ basiert (PIERRE & LOWE [122] (1975)). Später stellte GROSS-WEEGE [51] (1990) eine einheitliche Formulierung des statischen Einspieltheorems für Strukturen unter konstanten Lasten, die große Verschiebungen verursachen, und unter kleinen additiven variablen Lasten, die kleine additive Verschiebungen verursachen, auf. PYCKO & KÖNIG [132] (1991) arbeiteten mit demselben Konzept. POLIZZOTTO & BORINO [123] (1996) haben eine Erweiterung der Einspieltheoreme von MELAN und KOITER für große Verschiebungen vorgeschlagen. Sie untersuchten die asymptotische Antwort einer Struktur auf periodische variable Lasten, um die Bedingungen zu zeigen, unter denen ein stabiles Langzeitverhalten existiert. Die Anwendbarkeit der Einspieltheoreme ist durch die Zerlegung der Gesamtdehnung in additive Anteile eingeschränkt. Deshalb benutzten SACZUK & STUMPF [140] (1990), TRITSCH & WEICHERT [164, 165] (1993, 1993) und STUMPF [153] (1993) eine multiplikative Dehnungszerlegungsregel. Das von SACZUK & STUMPF hergeleitete statische Einspieltheorem stellt eine Verallgemeinerung des Theorems von GROSS-WEEGE dar. TRITSCH und WEICHERT gaben eine hinreichende Bedingung für Einspielen an und führten vergleichende Studien mit früheren Arbeiten durch. STUMPF versuchte das Einspieltheorem mit einer neu entwickelten multiplikativen Zerlegung der Gesamtdehnungen zu formulieren und stellte dabei heraus, daß Einspielen dann auftritt, falls ein Eigenspannungsfeld existiert, das abhängig vom Belastungs- und Entlastungsverlauf ist. SACZUK [139] (1997) hat in der Folge ein Kriterium für adaptive Prozesse vorgeschlagen, bei dem die vorgegebenen Verschiebungen die Materialeigenschaften beeinflussen. WEICHERT & HACHEMI [172, 173] (1997, 1998) führten eine Verallgemeinerung des statischen Einspieltheorems unter Berücksichtigung geometrischer Effekte und einer duktilen plastischen Materialschädigung durch. Die früheren Arbeiten von TRITSCH & WEICHERT [165] (1993) (geometrische Effekte) und von HACHEMI & WEICHERT [56] (1992) (Materialschädigung) wurden in dieser Arbeit zur Synthese gebracht. In jüngster Zeit haben sich STUMPF und SCHIECK [143, 144, 154] (2000) mit dem Problem großer Dehnungen und großer Rotationen beschäftigt. Während in einer früheren Arbeit von STUMPF [153] (1993) das Einspielen von Strukturen, die großen Dehnungen und Rotationen unterworfen sind, mit einer inkrementellen Methode analysiert wurde, wird in der neueren Arbeit das Einspielverhalten durch die Bestimmung eines dem zulässigen Lastraum zugeordneten plastischen Dehnungsfeldes ermittelt.

### **Berücksichtigung der Materialschädigung**

Mit der Erweiterung der Einspieltheoreme um die Einflüsse der Materialschädigung ist erst in den letzten Jahren begonnen worden. HACHEMI und WEICHERT [56, 54, 57, 172, 58, 173] (1992-1998) haben das statische Einspieltheorem um den Einfluß einer duktilen isotropen Materialschädigung erweitert, wobei sie ein energie-basiertes elasto-plastisches Schädigungsmodell von JU [72] (1989) benutzten. Die Materialschädigung wird durch einen internen skalarwertigen Parameter berücksichtigt, der auf dem Konzept der effektiven Spannungen nach LEMAITRE & CHABOCHE [99] (1985) beruht. Im allgemeinen sind Schädigungen aufgrund ihres strukturellen Charakters richtungsabhängig und können somit bei mehraxialer Beanspruchung nach BETTEN [9] (1981/83) nur tensoriell erfaßt werden. Zur Beschreibung des Spannungszustandes in einem schadhafte Kontinuum konstruiert BETTEN [8] (1981/82) einen „net-stress“ Tensor, der additiv in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil zerlegt werden kann, wobei der antisymmetrische Teil nur bei isotroper Schädigung verschwindet. Während in den ersten Arbeiten von HACHEMI und WEICHERT die Materialschädigung ausschließlich auf theoretischem Weg eingeführt wird, zeigen sie in den neueren Arbeiten auch praktisch, wie die Handhabung sowie die Erweiterung um die Einflüsse der Verfestigung durchgeführt werden können. FENG & YU [41, 42] (1994, 1995) übernahmen dieses Konzept und wandten es auf dickwandige Schalen an, indem sie eine obere Grenze des duktilen Materialschädigungsfaktors bestimmten. In ähnlicher Weise schlugen POLIZZOTTO ET AL. [125] (1996) eine Erweiterung des statischen Einspieltheorems für elastisch-plastisch geschädigtes Material mit einem universellen freien Energiepotential vor. Am Beispiel eines Fachwerks wurde diese Methode unter Nutzung des Schädigungsmodells von JU [72] (1989) demonstriert. SIEMASZKO [147] (1993) stellte ein Verfahren für elastisch-plastische Strukturen mit nichtlinearen geometrischen Effekten, nichtlinearer Verfestigung und duktiler Schädigung vor, bei dem in einer schrittweisen Analyse das Nicht-Einspielen unter Nutzung der Entfestigungsfunktion nach PERZYNA [121] (1984) gezeigt wurde. Erst kürzlich haben DRUYANOV & ROMAN [37] (2000) die Betrachtungen auf die spröde Materialschädigung ausgedehnt.

### **Untersuchung von Rißproblemen**

In jüngster Zeit sind Versuche unternommen worden, die Rißausbreitung in Strukturen mit Hilfe der Einspieltheorie genauer zu untersuchen. So zeigten HUANG & STEIN [64, 66] (1995, 1996), BELOUCHRANI & WEICHERT [4] (1999) und FENG & GROSS [40] (1999) verschiedene Möglichkeiten auf, mit denen dieses Problem behandelt werden kann. Die Gruppen benutzten dabei das statische Einspieltheorem.

### Die Einspielanalyse als Optimierungskriterium

Die Einspielanalyse kann auch als ein Hilfsmittel zur Gestaltung von Strukturen eingesetzt werden. WIECHMANN ET AL. [178] (2000) zeigten in ihrer Arbeit, wie die äußere Gestalt einer vorgegebenen Form (Lochscheibe) unter veränderlichen Lasten optimiert werden kann.

### Einspielen regelmäßig strukturierter Verbundwerkstoffe

Bereits vor mehr als 25 Jahren haben TARN ET AL. [161] (1975) die Möglichkeit erkannt, daß Versagen von Verbundwerkstoffen mit Hilfe der Einspieltheorie zu untersuchen. Untersucht wurden dabei Verbundwerkstoffe, bei denen zylinderförmige Fasern in eine elastisch-plastische Matrix eingebettet sind und einer achsensymmetrischen Belastung unterliegen. DVORAK ET AL. [39] (1994) untersuchten geschichtete Verbundwerkstoffe auf ihr Einspielverhalten. PONTER ET AL. [127] (1998), PONTER & LECKIE [128, 129] (1998) und CARVELLI ET AL. [20] (1999) benutzten das kinematische Einspieltheorem um einen Verbundwerkstoff unter veränderlichen Lasten zu untersuchen. Dabei wurde ein Verbundwerkstoff untersucht, bei dem elastische zylinderförmige Fasern nach einem regelmäßigen Muster in eine elastisch-plastische Matrix eingebettet sind. Die Belastungen erfolgten senkrecht zur Faserrichtung. WEICHERT ET AL. [55, 145, 174, 175, 176, 177] (1999) untersuchten die gleiche Art von Verbundwerkstoff mit Hilfe des statischen Einspieltheorems. Die Untersuchungen wurden an einem repräsentativen Volumenelement durchgeführt, und mittels einer Homogenisierungstechnik wurden die Ergebnisse von der mikroskopischen auf die makroskopische Ebene übertragen.

### Experimentelle Einspieluntersuchungen

An experimentellen Untersuchungen zum Einspielen von Strukturen mangelt es allgemein. Die wenigen bekannten Arbeiten (ALI ET AL. [1] (1984), LEERS ET AL. [95] (1985), MAHREHOLTZ ET AL. [101] (1985), LEERS [94] (1985), SCHEER ET AL. [142] (1990), HUANG & STEIN [65] (1995), TALEB ET AL. [158, 157] (1998) und RAKOTOVELO ET AL. [135] (1999)) sind zudem auf einen engen Anwendungsbereich bezogen (Untersuchungen an Fachwerken, Stahlträgern, Zugproben und thermisch belasteten Rohren). Sie haben dennoch die Ergebnisse numerischer Berechnungen qualitativ bestätigt und somit die grundsätzliche Bedeutung der Einspieltheorie untermauert.

### Numerische Umsetzung der Einspielanalyse

Die numerischen Algorithmen zur Auswertung der Einspieltheoreme sind erst in den letzten vergangenen Jahren mehr und mehr entwickelt worden. Die anfänglichen Diskretisierungen durch ein-dimensionale Finite Elemente und die Verwendung von linearen Optimierungsalgorithmen sind im Laufe der Zeit durch zwei- bzw. dreidimensionale

Finite-Elemente-Diskretisierungen und die Verwendung von nichtlinearen Optimierungsalgorithmen ersetzt worden (z.B. BELYTSCHKO [5] (1972), NGUYEN DANG HUNG & KÖNIG [118, 119] (1976, 1979), COHN & MAIER [22] (1979), KÖNIG & MAIER [87] (1981), MORELLE ET AL. [112] (1983), MAIER & LLOYD SMITH [105] (1986), KÖNIG [85] (1987), GENNA [46] (1988), WEICHERT & GROSS-WEEGE [171] (1988), GROSS-WEEGE [51] (1990) und GROSS-WEEGE [52] (1997)). Neben der eigentlichen Formulierung des Einspielproblems spielt aber auch dessen Lösung eine entscheidende Rolle. In einigen Arbeiten wird das Optimierungsproblem reduziert, indem versucht wird, die Lösung in einem Eigenspannungsteilraum zu suchen. Diese Räume werden ermittelt, indem die zu untersuchenden Strukturen einer thermischen Belastung (z.B. BUCKTHORPE & WHITE [17, 18] (1993)) oder der tatsächlich vorliegenden mechanischen Belastung unterworfen werden (z.B. ZHANG [181] (1991) und HEITZER [61] (1999)). Bei der letzten Möglichkeit wird eine inkrementelle elasto-plastische Berechnung durchgeführt. In anderen Arbeiten ist durch den Einsatz leistungsfähiger Optimierungsalgorithmen auch die Behandlung größer dimensionierter Problemstellungen möglich (SCHWABE ET AL. [145] (2000)).

### 1.3 Zielsetzung und Gliederung dieser Arbeit

Bedingt durch die ständig steigende Verfügbarkeit von Rechen- und Speicherkapazitäten können nunmehr auch kompliziertere Strukturen mit einer großen Anzahl an Freiheitsgraden auf ihr Einspielverhalten hin untersucht werden. Hierfür ist es allerdings erforderlich, ein allgemein numerisch übertragbares Verfahren für zwei- bzw. drei-dimensionale Finite-Elemente-Berechnungen zu formulieren, das in Kombination mit einem geeigneten Optimierungsverfahren diese Aufgabe bewältigen kann. In dieser Arbeit wird im Anschluß an die Einleitung (Kapitel 1) und der Vorstellung der allgemeinen Einspieltheoreme (Kapitel 2) dieses Verfahren für den allgemeinen drei-dimensionalen Fall so formuliert, daß auch heterogene Strukturen mit begrenzt linear kinematisch verfestigendem und mit einem duktil schädigbaren Material betrachtet werden können (Kapitel 3). Mit Hilfe von bekannten Ergebnissen aus der Literatur wird die numerische Umsetzung dieses Verfahrens (Kapitel 4) dann an Hand einiger Beispiele validiert (Kapitel 5). Zur Anwendung kommt dieses Verfahren bei Verbundwerkstoffen, bei denen elasto-plastische Fasern nach einem regelmäßigen Muster in eine elasto-plastische Matrix eingebettet sind (Kapitel 6). Mit Hilfe der Einspielanalyse werden an repräsentativen Einheitszellen die mikroskopischen maximal tragbaren Lasten ermittelt und mit Hilfe einer Homogenisierungstechnik auf die makroskopischen Größen geschlossen, die für den gesamten Werkstoff Gültigkeit haben. Ferner wird gezeigt, wie die Einspielanalyse genutzt werden kann, um im Entwicklungsprozeß von Verbundwerkstoffen bereits eine Vorhersage über die optimal zu erzielenden Eigenschaften zu gewinnen. Neben der optimalen Wahl der Materialeigen-

---

schaften von Faser und Matrix spielt hierbei auch noch die Gestalt der Mikrostruktur, das heißt die Anordnung der Fasern innerhalb der Matrix und die Querschnittsform der Fasern, eine entscheidende Rolle. Die Einspielanalyse wird hierbei in ein weiteres Optimierungsverfahren integriert, das diese als Bewertungskriterium zur optimalen Gestaltung verwendet (Kapitel 7). Abschließend werden die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefaßt und diskutiert (Kapitel 8).

## 2 Einspielen von Strukturen

### 2.1 Der Begriff des Einspielens

Unterliegt ein Bauteil oder eine Struktur zeitlich veränderlichen Lasten, so reicht die Berechnung der Maximalwerte von Spannungen und Dehnungen nicht aus, um eine eindeutige Aussage über die Sicherheit gegenüber Versagen treffen zu können. Obwohl die Belastungsgeschichte keinen Einfluß auf die Größe der Traglastgrenze hat, besteht doch die Möglichkeit, daß das Bauteil bzw. die Struktur bereits vor Erreichen dieser Grenze versagt bzw. den funktionalen Anforderungen nicht mehr genügt.

Im folgenden wird ein Körper  $\mathcal{B}$  betrachtet, der der Wirkung örtlich und zeitlich veränderlicher Lasten  $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$  aus einem Lastraum  $\mathcal{L}$  ausgesetzt ist. Die zeitabhängigen Lasten können dabei Volumen-, Oberflächen-, Temperaturlasten oder vorgegebene Verschiebungen sein ( $\mathbf{f}^*(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t)$ ,  $\Theta^*(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$ ) (Abbildung 2.1). Hierbei ist  $V$  das Volumen des Körpers,  $S_K$  die Oberfläche mit kinematischen Randbedingungen,  $S_F$  die Oberfläche mit den Oberflächenlasten und  $\mathbf{n}$  der auf der Oberfläche des Körpers nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor.

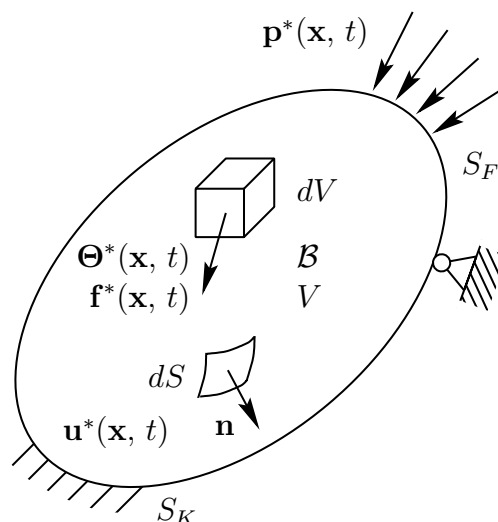


Abbildung 2.1: Körper unter variablen Lasten

Im Rahmen der geometrisch linearisierten Theorie kann man für den Körper  $\mathcal{B}$  unter den Lasten  $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$  des Lastraumes  $\mathcal{L}$  verschiedene Verhaltensarten beobachten.

- Elastizität

Der Fall, bei dem sich der gesamte Körper von Beginn des Belastungsprozesses an rein elastisch verhält, ist unkritisch. Es treten zu keinem Zeitpunkt plastische Verformungen auf, und Spannungen und Dehnungen verschwinden vollständig beim Entlasten (siehe Abbildung 2.2). Der Körper bleibt für alle Belastungen rein elastisch.

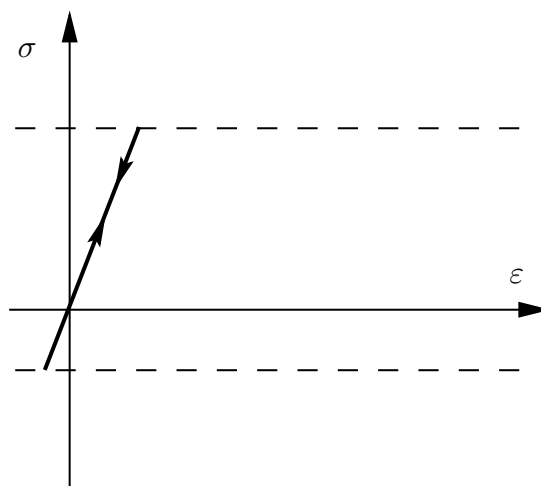


Abbildung 2.2: Elastizität

- Kollaps

Wird die elastische Grenzlast überschritten und die Belastung monoton bis zum Versagen des Bauteils erhöht, dann ist die sogenannte Traglastgrenze erreicht. Zur einfachen Bestimmung der Tragfähigkeit eines Tragwerkes ( $\hat{=}$  Körpersystem, das allgemein aus Stäben, Balken, Platten, Schalen usw. aufgebaut sein kann) setzt man beim Traglastverfahren zunächst idealplastischen Werkstoff voraus. Weiterhin nimmt man an, daß die äußeren Kräfte proportional zueinander anwachsen, so daß die Angabe irgendeiner beliebigen Kraft  $F$  bzw. eines Momentes  $M$  genügt, um den Belastungszustand eindeutig zu beschreiben. Ihren größten Wert, der beim Zusammenbruch des gesamten Tragwerkes oder einiger Teile erreicht wird, nennt man Traglast  $F_L$ . Die Gesamtheit aller Kräfte wird Traglastgruppe genannt. Bei Biegebeanspruchungen spricht man vom Tragemoment  $M_L$ . In Abbildung 2.3 wird ein Last-Verschiebungs-Diagramm für einen beidseitig eingespannten Balken mit einer Einzelkraft in der Mitte gezeigt. Während des nicht-linearen Übergangs von der Fließgrenze zur Versagensgrenze bilden sich hierbei genügend viele Fließgelenke, Fließgelenklinien und Fließbereiche aus, so daß schließlich bei Erreichen der Traglast das System zu einem Mechanismus wird und ein uneingeschränktes Fließen stattfindet (Kollaps).

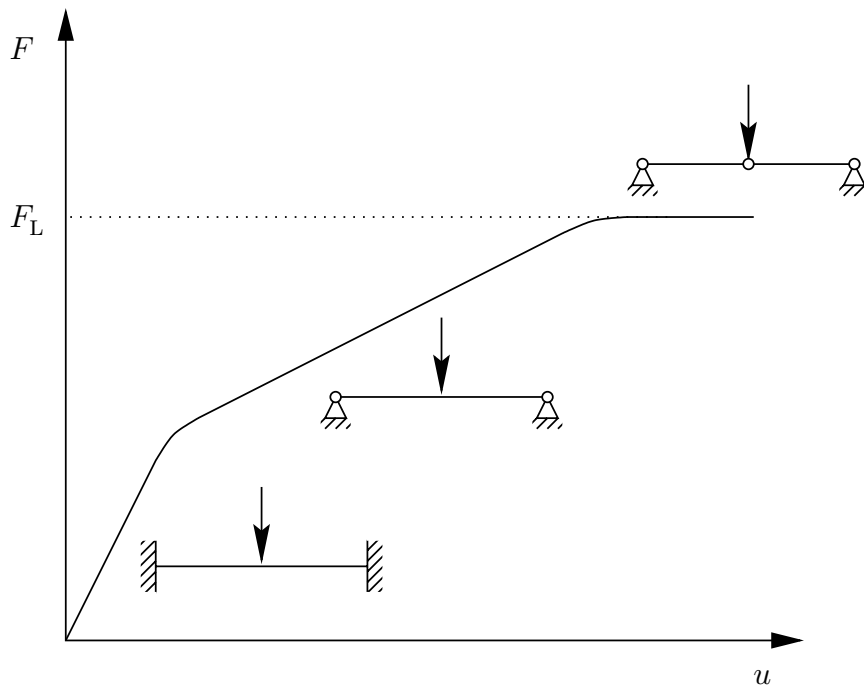


Abbildung 2.3: Kollaps

Durch die Annahme eines elastisch - ideal plastischen Werkstoffes liegt man bei der Traglastberechnung auf der sicheren Seite. Für Tragwerke aus verfestigendem Werkstoff läßt sich keine Traglast gemäß obiger Definition angeben, unter der uningeschränktes plastisches Fließen einsetzt. Zweckmäßigerweise wird man dann als Kriterium für die Tragfähigkeit eine Grenzverformung festlegen, die nicht überschritten werden darf (funktionelles Versagen im Gegensatz zum strukturellen Versagen).

- Alternierende Plastizität

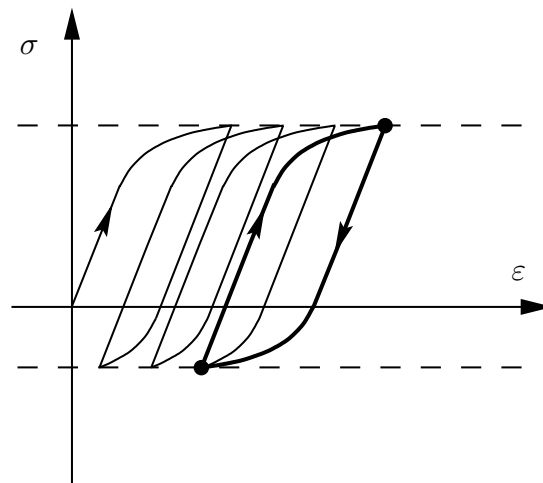


Abbildung 2.4: Alternierende Plastizität

Der monoton anwachsenden Belastung stehen zeitlich veränderliche Belastungsprozesse gegenüber, die bereits vor Erreichen der Traglastgrenze zum Versagen führen können. Wechseln während eines Belastungsprozesses die Inkremente der plastischen Dehnungen in einigen Punkten des Körpers ständig ihr Vorzeichen, dann spricht man von alternierender Plastizität (siehe Abbildung 2.4). Der Körper fließt unaufhörlich, was schließlich zu einem lokalen plastischen Ermüden (Low Cycle Fatigue) führt.

- Unbegrenzt Anwachsen plastischer Dehnungen

Eine weitere mögliche Form des Versagens ist durch das unbegrenzte Anwachsen plastischer Dehnungen gekennzeichnet (Ratchetting). Es gibt mindestens einen Punkt innerhalb des Körpers, bei dem die plastischen Dehnungsinkremente nicht verschwinden. Im Laufe des zyklischen Belastungsprozesses akkumulieren diese derart, daß der Körper entweder durch große Verformungen oder durch Bruch versagen wird (siehe Abbildung 2.5).

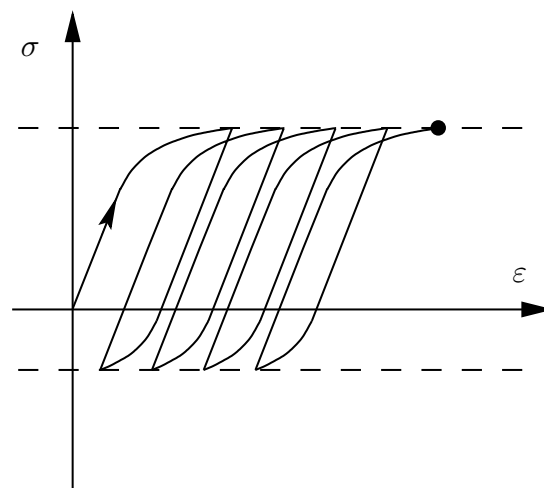


Abbildung 2.5: Versagen durch unbegrenzt Anwachsen plastischer Dehnungen

- Einspielen

Den Fall des Nicht-Versagens, bei dem trotz anfänglicher plastischer Verformungen die plastischen Dehnungszuwächse abklingen, bis schließlich keine weitere Plastizierung mehr beobachtbar ist, bezeichnet man als Einspielen (Shakedown). Der Körper verhält sich dann rein elastisch (siehe Abbildung 2.6).

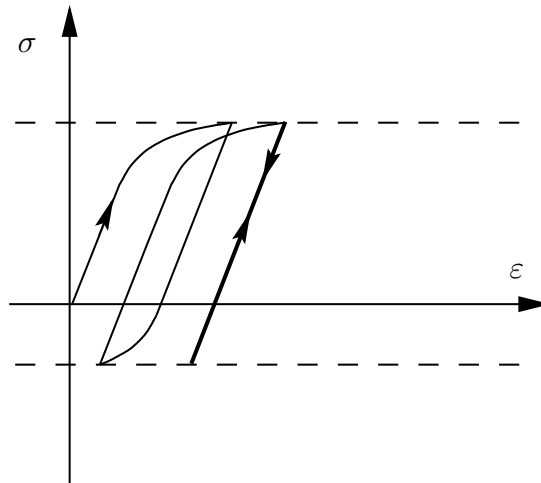


Abbildung 2.6: Einspielen

Damit eine Struktur für jede beliebige Lastgeschichte einspielen kann, muß die spezifische plastische Dissipationsarbeit  $w_p$  beschränkt sein [78].

$$w_p = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{t=0}^{t=T} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p dt < \infty. \quad (2.1)$$

Da diese lokale Definition bei der mathematischen Formulierung Schwierigkeiten bereitet, wird eine weniger scharfe Bedingung für Einspielen eingeführt [85]. Die gesamte plastische Dissipationsarbeit  $W_p$  für die betrachtete Struktur muß beschränkt sein.

$$W_p = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{t=0}^{t=T} \int_{(V)} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p dV dt < \infty. \quad (2.2)$$

Damit die Ungleichung (2.2) erfüllt wird, müssen im Laufe der Zeit die plastischen Dehnungszuwächse  $\Delta \epsilon^p(\mathbf{x}, t)$  verschwinden. Das heißt, daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\epsilon}_{ij}^p = 0_{ij} \quad \text{in } V. \quad (2.3)$$

Bei einer Einspieluntersuchung geht man der Frage nach, wie weit ein vorgegebener Lastraum  $\mathcal{L}$  vergrößert werden darf, damit das betrachtete System unter diesem Lastraum gerade noch einspielt. Die mögliche Vergrößerung wird mit einem Faktor  $\alpha$  angegeben. Die auftretenden Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  während der Belastungen  $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$  dürfen in keinem Punkt  $\mathbf{x}$  und zu keiner Zeit  $t$  die MELAN'sche Bedingung (2.4) verletzen und müssen

gleichzeitig die statischen Gleichgewichts- und Randbedingungen erfüllen:

$$\mathcal{F}(\sigma_{ij}, \sigma_Y) < 0 \quad \text{in } V, \quad (2.4)$$

$$\sigma_{ij,j} + \alpha f_i^* = 0_i \quad \text{in } V, \quad (2.5)$$

$$n_j \sigma_{ij} - \alpha p_i^* = 0_i \quad \text{auf } S_F, \quad (2.6)$$

$$u_i - \alpha u_i^* = 0_i \quad \text{auf } S_K. \quad (2.7)$$

In der vorliegenden Arbeit wird stets die VON MISES Fließbedingung verwendet [168].

$$\mathcal{F}(\sigma_{ij}, \sigma_Y) = \sigma_V(\sigma_{ij}) - \sigma_Y = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D} - \sigma_Y. \quad (2.8)$$

Hierin sind  $\sigma^D$  der Spannungsdeviator (siehe Gleichung (2.9)),  $\sigma_V$  die Vergleichsspannung nach VON MISES und  $\sigma_Y$  die Fließspannung des betrachteten Materials.

$$\sigma_{ij}^D = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}. \quad (2.9)$$

## 2.2 Das statische Einspieltheorem

Das statische Einspieltheorem ist erstmals von MELAN [109] für ein Kontinuum unter Voraussetzung eines elastisch – ideal plastischen Materialverhaltens, der Existenz eines konvexen elastischen Bereichs  $\mathcal{C}$  mit striktem Inneren  $\mathcal{C}^i$  und der Gültigkeit der Normalitätsregel (A.21) formuliert worden.

Ein Körper  $\mathcal{B}$ , der unter zeitabhängigen veränderlichen Oberflächenlasten  $\mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t)$  und Volumenlasten  $\mathbf{f}^*(\mathbf{x}, t)$  steht, wird genau dann nicht aufgrund akkumulierter plastischer Dehnungen versagen, wenn ein zeitlich konstanter Eigenspannungszustand  $\bar{\rho}(\mathbf{x})$  gefunden werden kann, der die folgenden zwei Bedingungen erfüllt: Zum einen muß sich jeder statisch zulässige Spannungszustand  $\sigma^s(\mathbf{x}, t)$  im strikten Inneren  $\mathcal{C}^i$  von  $\mathcal{C}$  durch den rein elastischen Spannungszustand  $\tilde{\sigma}^e(\mathbf{x}, t)$  eines Vergleichskörpers  $\tilde{\mathcal{B}}$  und dem zeitunabhängigen Eigenspannungszustand  $\bar{\rho}(\mathbf{x})$  darstellen lassen. Der Vergleichskörper  $\tilde{\mathcal{B}}$  unterscheidet sich von dem Körper  $\mathcal{B}$  nur dadurch, daß er rein elastisch auf die äußeren Oberflächenlasten  $\mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t)$  und Volumenlasten  $\mathbf{f}^*(\mathbf{x}, t)$  reagiert. Zum anderen muß der zeitunabhängige Eigenspannungszustand  $\bar{\rho}(\mathbf{x})$  die statischen Gleichgewichts- und Randbedingungen erfüllen.

$$\sigma_{ij}^s = \tilde{\sigma}_{ij}^e + \bar{\rho}_{ij} \quad \wedge \quad \sigma_{ij}^s \in \mathcal{C}^i, \quad (2.10)$$

$$\bar{\rho}_{ij,j} = 0_i \text{ in } V \quad \wedge \quad n_j \bar{\rho}_{ij} = 0_i \text{ auf } S_F. \quad (2.11)$$

Mit diesen beiden Gleichungen läßt sich das statische Einspieltheorem auch folgendermaßen ausdrücken:

**Statisches Einspieltheorem für elastisch – ideal plastisches Material**

Falls ein Faktor  $\alpha > 1$  und ein zeitunabhängiges Eigenspannungsfeld  $\bar{\rho}(\mathbf{x})$  existieren, so daß für alle Lasten  $\mathbf{P}(t)$  eines Lastraumes  $\mathcal{L}$  und für alle Punkte  $\mathbf{x}$  innerhalb eines Volumens  $V$  die MELAN'sche Bedingung

$$\mathcal{F}(\alpha \tilde{\sigma}^e(\mathbf{x}, t) + \bar{\rho}(\mathbf{x}), \sigma_Y(\mathbf{x})) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \wedge \quad \forall \mathbf{P}(t) \in \mathcal{L} \quad (2.12)$$

nicht verletzt wird, dann wird die Struktur unter den gegebenen Lasten einspielen.

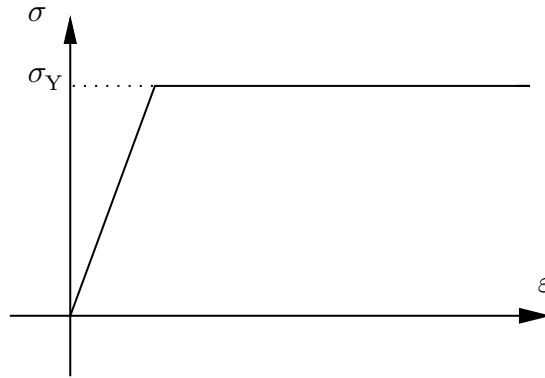


Abbildung 2.7: Spannungs-Dehnungskurve für elastisch – ideal plastisches Material

**Beweis:**

Zum Beweis dieses Einspielsatzes wird der positiv definit quadratische Ausdruck  $W(t)$  betrachtet.

$$W(t) = \frac{1}{2} \int_{(V)} (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) L_{ijkl}^{(-1)} (\rho_{kl} - \bar{\rho}_{kl}) dV \geq 0. \quad (2.13)$$

In dieser Gleichung stellt  $\rho(\mathbf{x}, t)$  das tatsächliche zeitabhängige Eigenspannungsfeld und  $\bar{\rho}(\mathbf{x})$  das zeitunabhängige Eigenspannungsfeld dar.  $L_{ijkl}^{(-1)}$  sind die Komponenten des inversen Elastizitätstensors  $\mathbf{L}$ . Der Ausdruck für  $W(t)$  wird nun nach der Zeit abgeleitet.

$$\dot{W}(t) = \int_{(V)} (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) L_{ijkl}^{(-1)} \dot{\rho}_{kl} dV = \int_{(V)} (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^r dV. \quad (2.14)$$

Die Dehnrates  $\dot{\epsilon}^r(\mathbf{x}, t)$  aus den Eigenspannungen  $\rho(\mathbf{x}, t)$  läßt sich mit Hilfe der Dehnrates des elastischen Vergleichskörpers  $\dot{\epsilon}^e(\mathbf{x}, t)$ , der plastischen Dehnrates  $\dot{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t)$  und der

Dehnrate  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t)$  darstellen:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{ij} &= \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \\ &= L_{ijkl}^{(-1)} \dot{\sigma}_{kl} + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \\ &= L_{ijkl}^{(-1)} (\dot{\sigma}_{kl}^e + \dot{\rho}_{kl}) + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \\ &= \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^r + \dot{\varepsilon}_{ij}^p.\end{aligned}\quad (2.15)$$

$$\implies \dot{\varepsilon}_{ij}^r = L_{ijkl}^{(-1)} \dot{\rho}_{kl} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}^e - \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (2.16)$$

Die Eigenspannungen  $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, t)$  und die zeitunabhängigen Eigenspannungen  $\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x})$  lassen sich durch die Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ , die Spannungen des elastischen Vergleichskörpers  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}, t)$  und durch den sicheren Spannungszustand  $\boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{x}, t)$  ausdrücken:

$$\rho_{ij} = \sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}^e, \quad (2.17)$$

$$\bar{\rho}_{ij} = \sigma_{ij}^s - \tilde{\sigma}_{ij}^e. \quad (2.18)$$

Setzt man die Gleichungen (2.16), (2.17) und (2.18) in Gleichung (2.14) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}\dot{W}(t) &= \int_{(V)} (\sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}^e - \sigma_{ij}^s + \tilde{\sigma}_{ij}^e) (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}^e - \dot{\varepsilon}_{ij}^p) dV \\ &= \int_{(V)} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}^e) dV - \int_{(V)} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV.\end{aligned}\quad (2.19)$$

Unter Verwendung der Definition der Dehnungstensoren bzw. der Dehnraten läßt sich im ersten Term von (2.19) das Produkt aus Spannungen und Dehnraten ersetzen (A.8):

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}^e) = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) (\dot{u}_{i,j} - \dot{\tilde{u}}_{i,j}^e) = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) (v_{i,j} - \tilde{v}_{i,j}^e). \quad (2.20)$$

Wendet man nun Gleichung (2.20) und den GAUSS'schen Integralsatz (A.1) auf den ersten Term von (2.19) an, dann sieht man, daß dieser gleich Null wird, da  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  als tatsächlicher und  $\boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{x}, t)$  als statisch zulässiger Spannungszustand nach den Gleichungen (2.10) und (2.11) die Gleichgewichtsbedingungen (2.4) bis (2.7) zu jedem Zeitpunkt überall erfüllen. Außerdem ist  $v_i - \tilde{v}_i^e$  auf  $S_K$  identisch null, so daß die Aussage auch für kinematische Randbedingungen gilt.

$$\begin{aligned}\int_{(V)} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) (v_{i,j} - \tilde{v}_{i,j}^e) dV &= \int_{(S_F \cup S_K)} n_j (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) (v_i - \tilde{v}_i^e) dS \\ &\quad - \int_{(V)} (\sigma_{ij,j} - \sigma_{ij,j}^s) (v_i - \tilde{v}_i^e) dV = 0.\end{aligned}\quad (2.21)$$

Von Gleichung (2.19) bleibt nur noch der zweite Term übrig.

$$\dot{W}(t) = - \int_{(V)} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV \leq 0. \quad (2.22)$$

Da  $\sigma^s(\mathbf{x}, t)$  einen sicheren Spannungszustand darstellt, folgt aus der Konvexität der Fließfläche und der Gültigkeit der Normalitätsregel, daß die zeitliche Ableitung von  $W(t)$  stets negativ oder gleich Null sein muß (siehe Anhang A.3). Da aber  $W(t)$  immer größer oder gleich Null ist, muß für  $t \rightarrow \infty$  der Wert von  $W(t)$  gegen eine Konstante (siehe Abbildung 2.8) und die zeitliche Ableitung  $\dot{W}(t)$  gegen Null konvergieren.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = \text{konst.} \geq 0, \quad (2.23)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{W}(t) = 0. \quad (2.24)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (2.22) bis (2.24) läßt sich nun folgern, daß ab einem gewissen Zeitpunkt keine weiteren plastischen Dehnungen mehr auftreten können.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0_{ij}. \quad (2.25)$$

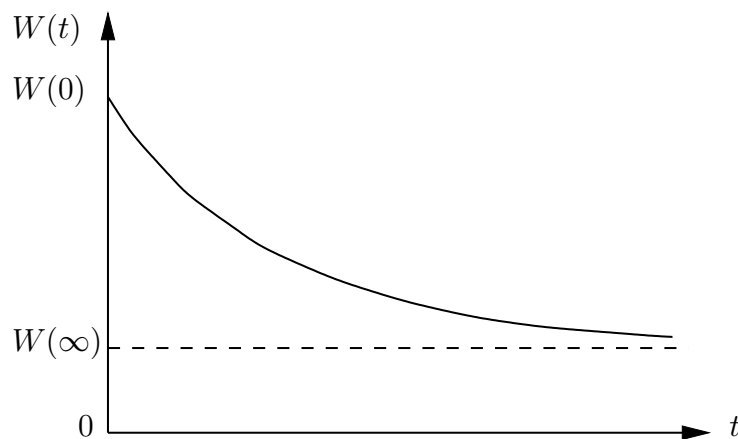


Abbildung 2.8: Zeitlicher Verlauf von  $W(t)$

Die Struktur verhält sich ab diesem Zeitpunkt rein elastisch.

Mit der Ungleichung (2.12) und der Materialstabilität im Sinne des DRUCKER'schen Po-

stulantes (A.19) folgt [85]:

$$\begin{aligned}
& (\sigma_{ij} - \alpha \sigma_{ij}^s) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0 \\
\iff & (\sigma_{ij} - \alpha \sigma_{ij}^s) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq \alpha \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \alpha \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \\
\iff & \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \dot{\varepsilon}_{ij}^p. \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Die Integration dieser Ungleichung über das Volumen  $V$  liefert die plastische Dissipationsleistung  $\dot{W}_p(t)$ . Berücksichtigt man dabei noch die Gleichung (2.22), so erhält man

$$\dot{W}_p(t) = \int_{(V)} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{(V)} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV = -\frac{\alpha}{\alpha - 1} \dot{W}(t). \tag{2.27}$$

Wird jetzt über der Zeit  $t$  integriert, dann läßt sich mit Gleichung (2.13) zeigen, daß die plastische Dissipationsarbeit  $W_p$  für  $T \rightarrow \infty$  beschränkt bleibt.

$$\begin{aligned}
W_p(t) &= \int_{t=0}^{t=T} \int_{(V)} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV dt \leq -\frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{t=0}^{t=T} \dot{W}(t) dt \\
&\leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} [W(0) - W(T)] \\
&\leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{(V)} \frac{1}{2} \bar{\rho}_{ij} L_{ijkl}^{(-1)} \bar{\rho}_{kl} dV \tag{2.28}
\end{aligned}$$

$$\implies \lim_{T \rightarrow \infty} W_p(t = T) < \infty. \tag{2.29}$$

Da die plastischen Dissipationsarbeit  $W_p$  beschränkt ist und die plastischen Dehnungszuwächse verschwinden, ist gezeigt worden, daß der Körper  $\mathcal{B}$  unter den getroffenen Voraussetzungen und dem vorgegebenen Lastraum  $\mathcal{L}$  einspielt. Der Körper verhält sich ab diesem Zeitpunkt rein elastisch. Da keine weiteren Eigenspannungen mehr entstehen können, folgt daraus, daß die Eigenspannungen  $\rho(\mathbf{x}, t)$  gegen ein konstantes Eigenspannungsfeld  $\bar{\rho}$  konvergieren müssen.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{ij} = \bar{\rho}_{ij}. \tag{2.30}$$

## 2.3 Erweiterungen des statischen Einspieltheorems

Das statische Einspieltheorem ist seit der erstmaligen Formulierung von MELAN [109] ständig erweitert worden. Zu nennen sind hier die Behandlung von Temperatureinflüssen,

Materialverfestigung und -schädigung sowie die Ausdehnung des Theorems auf große Dehnungen und Verschiebungen. Letzteres wird in dieser Arbeit allerdings nicht behandelt. Im folgenden werden die Erweiterungen des statischen Einspieltheorems angegeben.

### 2.3.1 Einspielen für thermisch belastete Systeme

Materialien, die thermischen Belastungen ausgesetzt sind, zeigen ein verändertes Verhalten verglichen mit demselben Material bei Raumtemperatur. In dieser Arbeit werden ausschließlich der Einfluß der Temperatur auf die Fließspannung sowie die Temperaturspannungen berücksichtigt. Andere temperaturabhängige Effekte (z. B. Kriechen) werden nicht betrachtet. Ferner wird angenommen, daß die Temperatur keinen Einfluß auf die Form der Fließfläche hat und die Fließspannung  $\sigma_Y(\vartheta)$  eine monoton fallende Funktion der Temperatur  $\vartheta$  ist. Das statische Einspieltheorem läßt sich dann erweitern (siehe [48, 85]):

#### Statisches Einspieltheorem für thermisch belastete Systeme

Falls ein Faktor  $\alpha > 1$  und ein zeitunabhängiges Eigenspannungsfeld  $\bar{\rho}(\mathbf{x})$  existieren, so daß für alle Lasten  $\mathbf{P}(t)$  eines Lastraumes  $\mathcal{L}$  und für alle Punkte  $\mathbf{x}$  innerhalb eines Volumens  $V$  die MELAN'sche Bedingung

$$\mathcal{F}(\alpha \tilde{\sigma}^e(\mathbf{x}, \vartheta, t) + \bar{\rho}(\mathbf{x}), \sigma_Y(\mathbf{x}, \vartheta)) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \wedge \quad \forall \mathbf{P}(t) \in \mathcal{L} \quad (2.31)$$

nicht verletzt wird, dann wird die Struktur unter den gegebenen Lasten einspielen.

Der Beweis dieser Erweiterung (z. B. GOKHFELD & CHERNIAVSKY [48] oder KÖNIG [85]) ist im Beweis des Einspieltheorems des Kapitels 3.7 enthalten.

### 2.3.2 Einspielen für unbegrenzt linear kinematisch verfestigendes Material

Die Erfassung einer isotropen Verfestigung, die sich durch eine geometrisch ähnliche Vergrößerung der Fließfläche auszeichnet, ist problemlos möglich. Die Berücksichtigung einer kinematischen Verfestigung, bei der sich die Fließfläche während des Belastungsprozesses verschiebt, muß genauer untersucht werden. Bereits 1938 hat MELAN ein Einspieltheorem für unbegrenzt linear kinematisch verfestigendes Material angegeben [110]. Er geht davon aus, daß sich die Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  in zwei Anteile  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}, t)$  und  $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}, t)$  zerlegen lassen. Verantwortlich für das Fließen des Materials ist der Anteil  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}, t)$ . Ähnlich wie beim elastisch – ideal plastischen Material muß dieser die MELAN'sche Bedingung  $\mathcal{F}$  erfüllen.

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}, t), \sigma_Y(\mathbf{x})) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}, t), \sigma_Y(\mathbf{x})). \quad (2.32)$$

Die Spannungen  $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}, t)$  sind für die Verschiebung der Fließfläche im Spannungsraum verantwortlich. Sie werden mit „Verfestigungsspannungen“ bzw. in der englischen Sprache mit „backstresses“ bezeichnet. Mit diesem Modell wird eine unbegrenzte lineare kinematische Verfestigung beschrieben. Damit läßt sich der BAUSCHINGER-Effekt darstellen.

### Statisches Einspieltheorem für unbegrenzt linear kinematisch verfestigendes Material

Falls ein Faktor  $\alpha > 1$ , ein zeitunabhängiges Eigenspannungsfeld  $\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x})$  und ein zeitunabhängiges Verfestigungsspannungsfeld  $\bar{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{x})$  existieren, so daß für alle Lasten  $\mathbf{P}(t)$  eines Lastraumes  $\mathcal{L}$  und für alle Punkte  $\mathbf{x}$  innerhalb eines Volumens  $V$  die MELAN'sche Bedingung

$$\mathcal{F}(\alpha \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}, t) + \bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x}) - \bar{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{x}), \sigma_Y(\mathbf{x})) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \wedge \quad \forall \mathbf{P}(t) \in \mathcal{L} \quad (2.33)$$

nicht verletzt wird, dann wird die Struktur unter den gegebenen Lasten einspielen.

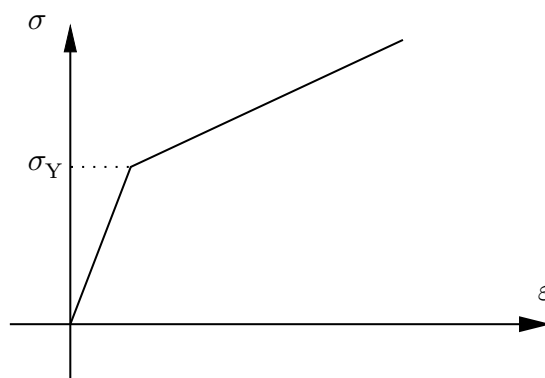


Abbildung 2.9: Spannungs-Dehnungskurve für unbegrenzt linear verfestigendes Material

Während das zeitunabhängige Eigenspannungsfeld  $\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x})$  die statischen Gleichgewichts- und Randbedingungen (2.11) erfüllen muß, sind die zeitunabhängigen Verfestigungsspannungen  $\bar{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{x})$  freie Größen.

Der Beweis dieser Erweiterung (z. B. MELAN [110]) ist im Beweis des Einspieltheorems des Kapitels 3.7 enthalten.

### 2.3.3 Einspielen für begrenzt linear kinematisch verfestigendes Material

Das Einspieltheorem für unbegrenzt linear kinematisch verfestigendes Material hat den Nachteil, daß der Verschiebung der Anfangsfließfläche keine Grenze gesetzt ist. WEICHERT

& GROSS-WEEGE [171] haben 1988 eine vereinfachte Zweiflächen-Fließbedingung angegeben, mit der die Verschiebung begrenzt wird. Später haben STEIN ET AL. [149, 151, 181] ebenfalls hierfür eine Einspielbedingung angegeben. Sie benutzen ein Overlay-Modell, um die Bewegung der Anfangsfließfläche einzuschränken. HEITZER [61] hat in seiner Arbeit gezeigt, wie die beiden verschiedenen Ansätze ineinander überführt werden können und somit zum selben Ergebnis kommen. Die Einspielbedingung nach WEICHERT & GROSS-WEEGE lautet:

**Statisches Einspieltheorem für begrenzt linear kinematisch verfestigendes Material**

Falls ein Faktor  $\alpha > 1$ , ein zeitunabhängiges Eigenspannungsfeld  $\bar{\rho}(\mathbf{x})$  und ein zeitunabhängiges Verfestigungsspannungsfeld  $\bar{\pi}(\mathbf{x})$  existieren, so daß für alle Lasten  $\mathbf{P}(t)$  eines Lastraumes  $\mathcal{L}$  und für alle Punkte  $\mathbf{x}$  innerhalb eines Volumens  $V$  die MELAN'schen Bedingungen

$$\mathcal{F}_I(\alpha \tilde{\sigma}^e(\mathbf{x}, t) + \bar{\rho}(\mathbf{x}) - \bar{\pi}(\mathbf{x}), \sigma_Y(\mathbf{x})) < 0, \quad (2.34)$$

$$\mathcal{F}_L(\alpha \tilde{\sigma}^e(\mathbf{x}, t) + \bar{\rho}(\mathbf{x}), \sigma_L(\mathbf{x})) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \wedge \quad \forall \mathbf{P}(t) \in \mathcal{L} \quad (2.35)$$

nicht verletzt werden, dann wird die Struktur unter den gegebenen Lasten einspielen.

Während  $\sigma_Y$  die Anfangsfließspannung bezeichnet, gibt  $\sigma_L$  den Grenzwert der Fließspannung bei einer begrenzten kinematischen Verfestigung an (siehe Abbildung 2.10).

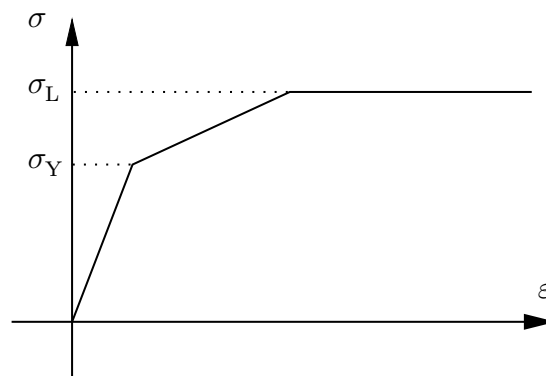


Abbildung 2.10: Spannungs-Dehnungskurve für begrenzt linear verfestigendes Material

Der Beweis dieser Erweiterung (WEICHERT & GROSS-WEEGE [171]) ist im Beweis des Einspieltheorems des Kapitels 3.7 enthalten.

### 2.3.4 Einspielen für geschädigtes Material

Den Einfluß duktiler plastischer Schädigung haben 1992 HACHEMI & WEICHERT [56] und später FENG & YU [41, 42] unter scharfen Voraussetzungen im Zusammenhang mit dem Einspieltheorem behandelt. Folgt man der Vorgehensweise von HACHEMI & WEICHERT dann läßt sich das Einspieltheorem wie folgt erweitern:

#### Statisches Einspieltheorem unter Berücksichtigung der Materialschädigung

Falls ein Faktor  $\alpha > 1$  und ein zeitunabhängiges Eigenspannungsfeld  $\bar{\rho}(\mathbf{x})$  existieren, so daß für alle Lasten  $\mathbf{P}(t)$  eines Lastraumes  $\mathcal{L}$  und für alle Punkte  $\mathbf{x}$  innerhalb eines Volumens  $V$  die MELAN'sche Bedingung

$$\mathcal{F} \left( \alpha \frac{\tilde{\sigma}^e(\mathbf{x}, t)}{1 - D(\mathbf{x}, t)} + \frac{\bar{\rho}(\mathbf{x})}{1 - D(\mathbf{x}, t)}, \sigma_Y(\mathbf{x}) \right) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \wedge \quad \forall \mathbf{P}(t) \in \mathcal{L} \quad (2.36)$$

sowie die Bedingung

$$D(\mathbf{x}, t) < D_c \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \wedge \quad \forall \mathbf{P}(t) \in \mathcal{L} \quad (2.37)$$

nicht verletzt werden, dann wird die Struktur unter den gegebenen Lasten einspielen.

In der Gleichung (2.36) bezeichnet  $D$  die Materialschädigung. Dieser Faktor wird nach oben mit dem kritischen Wert für die Materialschädigung  $D_c$  eingeschränkt (Kapitel 3.2 und 3.8). Der Beweis dieser Erweiterung (HACHEMI & WEICHERT [56]) ist im Beweis des Einspieltheorems des Kapitels 3.7 enthalten.

### 2.3.5 Allgemeines statisches Einspieltheorem

Die in den Kapiteln 2.2, 2.3.1, 2.3.3 und 2.3.4 angegebenen Einspieltheoreme lassen sich miteinander zu einem allgemeinen Einspieltheorem verbinden. Es ist gültig für mechanisch und thermisch belastete Strukturen mit elastisch – begrenzt linear kinematisch verfestigendem Materialverhalten unter Berücksichtigung duktiler plastischer Schädigung (HACHEMI [54]).

**Allgemeines statisches Einspieltheorem**

Falls ein Faktor  $\alpha > 1$ , ein zeitunabhängiges Eigenspannungsfeld  $\bar{\rho}(\mathbf{x})$  und ein zeitunabhängiges Verfestigungsspannungsfeld  $\bar{\pi}(\mathbf{x})$  existieren, so daß für alle Lasten  $\mathbf{P}(t)$  eines Lastraumes  $\mathcal{L}$  und für alle Punkte  $\mathbf{x}$  innerhalb eines Volumens  $V$  die MELAN'schen Bedingungen

$$\mathcal{F}_I \left( \alpha \frac{\tilde{\sigma}^e(\mathbf{x}, t)}{1 - D(\mathbf{x}, t)} + \frac{\bar{\rho}(\mathbf{x})}{1 - D(\mathbf{x}, t)} - \frac{\bar{\pi}(\mathbf{x})}{1 - D(\mathbf{x}, t)}, \sigma_Y(\mathbf{x}, \vartheta) \right) < 0, \quad (2.38)$$

$$\mathcal{F}_L \left( \alpha \frac{\tilde{\sigma}^e(\mathbf{x}, t)}{1 - D(\mathbf{x}, t)} + \frac{\bar{\rho}(\mathbf{x})}{1 - D(\mathbf{x}, t)}, \sigma_L(\mathbf{x}, \vartheta) \right) < 0 \quad (2.39)$$

$$\forall \mathbf{x} \in V \quad \wedge \quad \forall \mathbf{P}(t) \in \mathcal{L}$$

sowie die Bedingung

$$D(\mathbf{x}, t) < D_c \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \wedge \quad \forall \mathbf{P}(t) \in \mathcal{L} \quad (2.40)$$

nicht verletzt werden, dann wird die Struktur unter den gegebenen Lasten einspielen.

Der Materialschädigungsfaktor  $D$  wird nach oben mit seinem kritischen Wert  $D_c$  eingeschränkt (Kapitel 3.2 und 3.8). Der Beweis dieses allgemeinen Theorems ist im Beweis des Einspieltheorems des Kapitels 3.7 enthalten.

## 2.4 Alternierende Plastizität

Alternierende Plastizität ist dadurch gekennzeichnet, daß zwar die gesamten plastischen Dehnungen beschränkt bleiben, aber während der Lastzyklen die Dehnungsinkremente ihr Vorzeichen wechseln. Die Amplitude dieser ständig wechselnden plastischen Verformungen überschreitet dabei einen Grenzwert, der für das Versagen verantwortlich ist. In diesem Sinne ist eine Struktur gegenüber Versagen aufgrund alternierender Plastizität sicher, falls ein Faktor  $\alpha > 1$  und ein zeitunabhängiges Feld  $\hat{\rho}(\mathbf{x})$  gefunden werden kann, das mit den Spannungen  $\tilde{\sigma}^e(\mathbf{x}, t)$  des rein elastischen Vergleichskörpers  $\tilde{\mathcal{B}}$  superponiert die MELAN'sche Bedingung zu keinem Zeitpunkt verletzt (KÖNIG [80]):

$$\mathcal{F}(\alpha \tilde{\sigma}^e(\mathbf{x}, t) + \hat{\rho}(\mathbf{x}), \sigma_Y(\mathbf{x}, \vartheta)) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \wedge \quad \forall \mathbf{P}(t) \in \mathcal{L}. \quad (2.41)$$

KÖNIG [85] und PYCKO & MRÓZ [134] geben eine Bedingung für das Nicht-Versagen gegenüber alternierender Plastizität an, die ausschließlich in elastischen Größen formuliert ist:

**Alternierende Plastizität**

Falls ein Faktor  $\alpha_{AP} > 1$  existiert und für alle Lastkombination  $\mathbf{P}(t_1)$  und  $\mathbf{P}(t_2)$  aus einem gegebenen Lastraum  $\mathcal{L}$  die MELAN'sche Bedingung

$$\mathcal{F} \left( \pm \frac{1}{2} \alpha_{AP} [\tilde{\sigma}^e(\mathbf{P}(t_1)) - \tilde{\sigma}^e(\mathbf{P}(t_2))], \sigma_Y(\mathbf{x}, \vartheta) \right) < 0 \quad (2.42)$$

$$\forall \mathbf{x} \in V \quad \wedge \quad \forall \mathbf{P}(t_1), \mathbf{P}(t_2) \in \mathcal{L}$$

nicht verletzt wird, dann wird die Struktur unter den gegebenen Lasten aufgrund alternierender Plastizität nicht versagen.

## 2.5 Einspielanalyse

Unter einer Einspielanalyse versteht man die Ermittlung des größtmöglichen Faktors  $\alpha_{SD}$ , mit dem ein vorgegebener Lastraum  $\mathcal{L}$  vergrößert werden darf, so daß die Struktur für diesen vergrößerten Lastraum gerade noch einspielt. Dieser Faktor wird daher auch Einspielfaktor genannt. Die Einspielanalyse wird dann zu einem Optimierungsproblem zur Ermittlung dieses Faktors. Die Optimierung muß einerseits für eine der oben angegebenen Einspielbedingungen der Kapitel 2.2 bzw. 2.3 und andererseits mit der Bedingung für Nicht-Versagen aufgrund alternierender Plastizität des Kapitels 2.4 durchgeführt werden:

$$\max \alpha_{ES} \quad \text{mit einer der Einspielbedingungen der Kapitel 2.2 bzw. 2.3} \quad (2.43)$$

$$\max \alpha_{AP} \quad \text{mit der Bedingung des Kapitels 2.4.} \quad (2.44)$$

Der kleinere der beiden Faktoren bestimmt dann den Einspielfaktor  $\alpha_{SD}$  für die gesamte Struktur mit

$$\alpha_{SD} = \min(\alpha_{ES}, \alpha_{AP}). \quad (2.45)$$

## 2.6 Das kinematische Einspieltheorem

Bereits 1956 hat KOITER ein Einspieltheorem erstmals in kinematischen Größen formuliert [90]. Dieses Einspieltheorem wird in dieser Arbeit nicht näher behandelt, jedoch der Vollständigkeit halber angegeben.

### Kinematisches Einspieltheorem für elastisch – ideal plastisches Material

#### 1. Teil

Ein Körper  $\mathcal{B}$  steht unter der Wirkung veränderlicher externer Lasten  $\mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t)$  und  $\mathbf{f}^*(\mathbf{x}, t)$  eines Lastraumes  $\mathcal{L}$ . Wenn ein kinematisch zulässiger Zyklus plastischer Dehnungsgeschwindigkeiten  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x}, t)$  und beliebige Lasten aus dem Lastrraum  $\mathcal{L}$  gefunden werden können, so daß

$$\int_0^T \int_{(V)} f_i^* \dot{u}_i^c dV dt + \int_0^T \int_{(S_F)} p_i^* \dot{u}_i^c dS dt > \int_0^T \int_{(V)} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV dt \quad (2.46)$$

gilt, dann wird der Körper  $\mathcal{B}$  aufgrund akkumulierter plastischer Dehnungen versagen.

#### 2. Teil

Einspielen wird genau dann erfolgen, falls für alle zulässigen Zyklen plastischer Dehnungsgeschwindigkeiten  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x}, t)$  ein Faktor  $\alpha > 1$  gefunden werden kann, so daß gilt

$$\alpha \left( \int_0^T \int_{(V)} f_i^* \dot{u}_i^c dV dt + \int_0^T \int_{(S_F)} p_i^* \dot{u}_i^c dS dt \right) \leq \int_0^T \int_{(V)} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV dt. \quad (2.47)$$

Ein kinematisch zulässiger Zyklus plastischer Dehnungsgeschwindigkeiten  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x}, t)$  ist dabei durch folgende Bedingungen definiert

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \int_0^{T^c} \dot{\varepsilon}_{ij}^p dt, \quad (2.48)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}^c + \dot{u}_{j,i}^c), \quad (2.49)$$

$$\Delta u_i^c = \int_0^{T^c} \dot{u}_i^c dt, \quad (2.50)$$

$$0_{ij} = \int_0^{T^c} \dot{\varepsilon}_{ij}^e dt. \quad (2.51)$$

Dabei ist  $T^c$  die Zeit für einen kompletten Zyklus.  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c(\mathbf{x}, t)$ ,  $\dot{\mathbf{u}}^c(\mathbf{x}, t)$  sind die Dehnungs- und Verschiebungsgeschwindigkeit,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e(\mathbf{x}, t)$  ist die durch  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x}, t)$  induzierte elastische Dehnungsgeschwindigkeit.

Die Beweisführung läßt sich beispielsweise [91, 168] entnehmen.

Das statische Einspieltheorem stellt eine sichere, untere Schranke dar. Es besagt, daß eine die Gleichgewichtsbedingung erfüllende Spannungsverteilung, die nirgends die MELAN'sche Bedingung verletzt, nicht zum Versagen des betrachteten Körpers unter den

---

dazugehörenden Lasten führt. Demgegenüber stellt das kinematische Einspieltheorem eine obere Schranke dar. Falls es ein Muster verträglicher plastischer Deformationen gibt, für die die Leistung der äußeren Kräfte größer oder gleich der inneren Dissipationsleistung ist, so bricht der betrachtete Körper zusammen. Die tatsächliche Einspiellösung wird sich also zwischen der sicheren Lösung des statischen Einspieltheorems und der Lösung des kinematischen Einspieltheorems befinden.

### 3 Einspielen von Verbundwerkstoffen mit periodischer Mikrostruktur

Ein großes Problem bei der Entwicklung von Verbundwerkstoffen ist die Vorhersage des Langzeitverhaltens unter variablen Lasten. Infolge der Heterogenität des Materials ist das Versagen von verschiedenen Effekten geprägt, die von den mechanischen und geometrischen Eigenschaften der verschiedenen Komponenten des Verbundwerkstoffes und deren Interaktionen zueinander abhängig sind. In den folgenden Betrachtungen werden Effekte, wie chemische Reaktionen, Festkörper-Flüssigkeits-Interaktionen in porösen Materialien, Sprödbbruch der harten Faser und lokale Ablöseerscheinungen zwischen Fasern und Matrix außer Acht gelassen. Die Vorteile von Verbundwerkstoffen gegenüber herkömmlichen Materialien sind durch die Möglichkeit der Kombination der verschiedenen Eigenschaften von Matrix und Einschluf gegeben. Ein Beispiel hierfür sind „Metal-Matrix-Composites“ (MMC's), bei denen in eine duktile Metallmatrix harte spröde Keramikpartikel eingebettet sind. Man erhält durch diese Kombination gleichzeitig die Eigenschaften der hohen Härte und die der Bruchzähigkeit, so wie es beispielsweise bei Schmiedewerkzeugen gewünscht ist [6].

Ein Versagen auf der Mikroebene kann globales Versagen verursachen. Beispielsweise führt bei den oben erwähnten MMC's die Akkumulation plastischer Verformungen zu einer Materialschädigung der duktilen Matrix und daraus resultierend zu Mikrorissen. Diese Risse können in der Folge fortschreiten und zum globalen Versagen führen.

Unterliegen diese Materialien einer variablen Belastung, dann bieten die in Kapitel 2 vorgestellten Einspielsätze die Möglichkeit, eine Vorhersage über das Versagen bzw. Nicht-Versagen des Materials zu treffen. Liegt eine Periodizität der Mikrostruktur vor, dann läßt sich die Einspieluntersuchung auf der Mikroebene durchführen und ihre Ergebnisse mit Hilfe einer Homogenisierungstechnik [155] auf die Makroebene übertragen. So ist es möglich, die mechanischen Prozesse auf der Mikroebene zu verstehen und so Rückschlüsse auf das makroskopische Verhalten zu ziehen. Im folgenden wird die Methodik der Einspieluntersuchung mit der der Homogenisierungstechnik [19, 62, 155] verbunden. Die Einspieluntersuchung wird an einem repräsentativen Volumenelement (RVE) durchgeführt und die Ergebnisse mit Hilfe der Homogenisierungstechnik, die unter Annahme der Periodizität des betrachteten Verbundes durchgeführt wird, von der Mikro- auf die Makroebene übertragen. Die hier vorgestellte Methodik macht vom statischen Einspieltheorem Gebrauch und kann als Erweiterung der Vorgehensweise von SUQUET [155] und

TALIERCIO [159, 160] gesehen werden, die in ähnlicher Weise bei einer Grenzlastanalyse vorgehen.

Ähnliche Untersuchungen, allerdings unter Nutzung des kinematischen Einspieltheorems, sind von PONTER ET AL. [127], PONTER & LECKIE [128, 129] und CARVELLI ET AL. [20] durchgeführt worden.

### 3.1 Das repräsentative Volumenelement

Im folgenden wird ein Verbundwerkstoff betrachtet, bei dem in eine elastisch-plastische Matrix Einschlüsse nach einem regulären Muster eingebettet sind (siehe Abbildung 3.1). Zwischen der Matrix und den Einschlüssen wird perfektes Haften angenommen. Abhängig von der Geometrie und den Belastungsrichtungen läßt sich die Einspieluntersuchung, wie in der Homogenisierungstheorie üblich, an einem ebenen bzw. räumlichen repräsentativen Volumenelement (RVE) durchführen. Liegen die Belastungsrichtungen ausschließlich in der in Abbildung 3.1 gezeigten Schnittebene, dann liegt ein ebenes Problem vor, das im Fall eines ausgedehnten Verbundes mit eingeschlossenen Fasern als ebener Dehnungszustand und im Fall eines flachen Verbundes mit flachen eingeschlossenen Partikeln als ebener Spannungszustand behandelt werden kann.

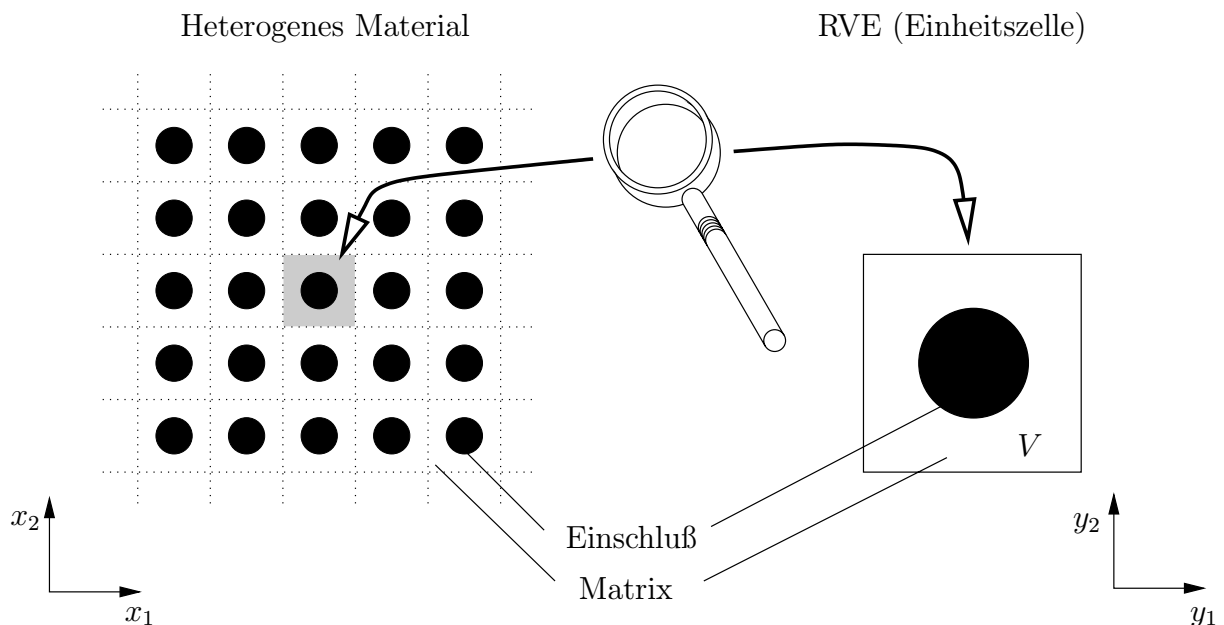


Abbildung 3.1: Verbundwerkstoff mit quadratischer Einheitszelle

Zur Beschreibung der Heterogenität werden auf makroskopischer Ebene die Koordinaten  $\mathbf{x}$  und auf mikroskopischer Ebene die Koordinaten  $\mathbf{y}$  verwendet. Die Dimension der Koordinaten  $\mathbf{x}$  sind im Vergleich zu den Koordinaten  $\mathbf{y}$  sehr klein, daß heißt eine hinreichende

Auflösung der Heterogenität kann nur mit den Koordinaten auf der mikroskopischen Ebene erreicht werden.

## 3.2 Berücksichtigung der Schädigung

Während einer elasto-plastischen Belastung können sich die Eigenschaften des verwendeten Materials infolge der Entstehung, des Wachstums und des Zusammenschmelzens von Mikrorissen und -lücken verschlechtern. Dieser Effekt der Materialschädigung läßt sich durch die Einführung von internen Variablen mitberücksichtigen. Er kann durch eine skalare Größe [98, 99, 100] bzw. einen Tensor zweiter [25] oder vierter Stufe [72, 93] beschrieben werden. BETTEN zeigt in [9], wie man Schädigungstensoren zweiter oder vierter Stufe bzw. Kontinuitätstensoren zur Berücksichtigung der anisotropen Materialschädigung konstruieren kann. Der Einfachheit halber wird hier nur der Einfluß einer isotropen Schädigung bei einer Einspielanalyse berücksichtigt. Dies ist erstmals von HACHEMI & WEICHERT [56] (1992) durchgeführt worden. Isotrope Schädigung bedeutet, daß die Risse und Kavitäten eine gleichmäßige Verteilung in alle Richtungen haben. Sie ist daher im Gegensatz zur anisotropen Schädigung nicht richtungsabhängig und kann durch eine skalare Größe beschrieben werden.

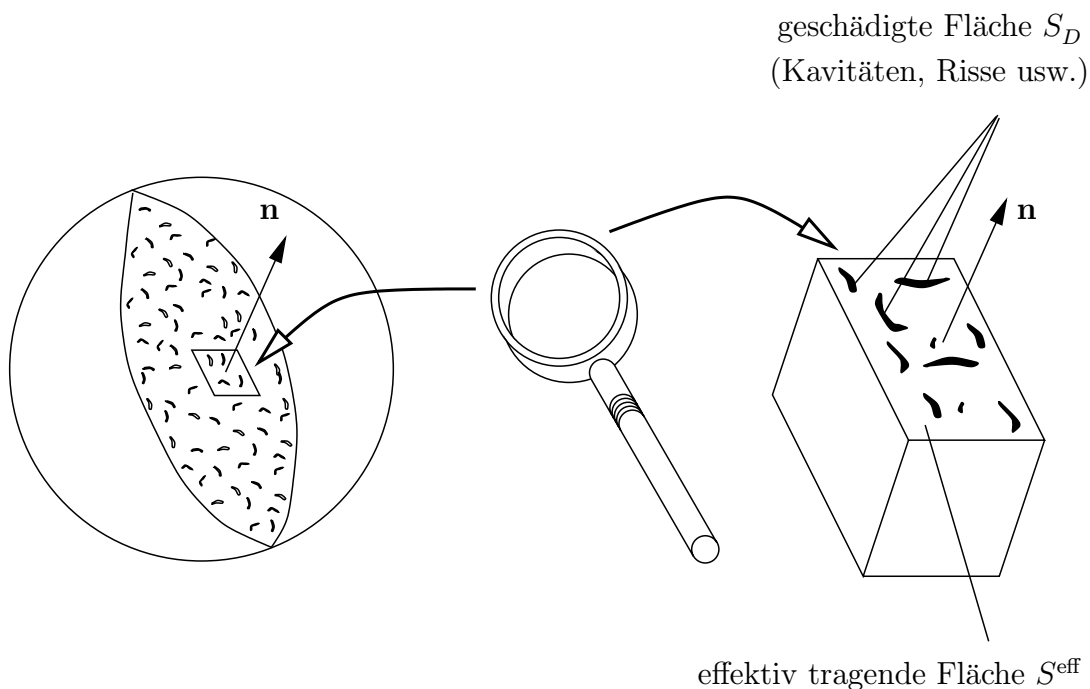


Abbildung 3.2: Geometrische Deutung der Schädigung

Ein Maß für die Materialschädigung ist der richtungsunabhängige Schädigungsfaktor  $D$ , der als Verhältnis der geschädigten Fläche  $S_D$  zur gesamten Fläche  $S$  eines Schnittele-

menten definiert ist [98, 99, 100] (Abbildung 3.2):

$$D = \frac{S_D}{S} = \frac{S - S^{\text{eff}}}{S} \quad \text{mit} \quad S = S_D + S^{\text{eff}} \quad (3.1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{S^{\text{eff}}}{S} = 1 - D. \quad (3.2)$$

Dabei ist  $\mathbf{n}$  der auf der Schnittfläche nach außen gerichtete Normalenvektor. Der Wert  $D = 0$  entspricht dem ungeschädigten Material,  $D \in [0, D_c]$  dem teilweise geschädigten und  $D = D_c$  dem lokal zerstörten Material ( $D_c \in [0, 1]$ ). Hierbei ist  $D_c$  der kritische Wert der Materialschädigung.

Das Schädigungsverhalten des Materials läßt sich mit dem Konzept der effektiven Spannungen berücksichtigen [73]. Dabei wird das Verhalten des geschädigten Materials durch das Verhalten des ungeschädigten Materials beschrieben, indem die Spannungen durch die effektiven Spannungen ersetzt werden.

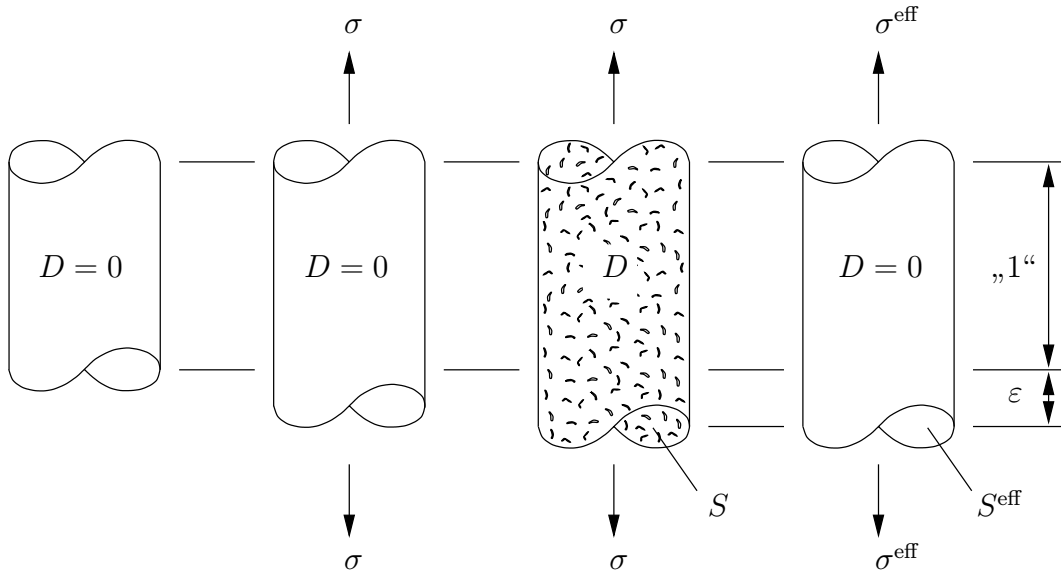


Abbildung 3.3: Effektive Spannung und Dehnungsäquivalenz

Unter Nutzung der Hypothese der Dehnungsäquivalenz [98, 99, 100] läßt sich eine effektive Spannung  $\sigma^{\text{eff}}$  definieren (siehe Abbildung 3.3):

$$\sigma S = \sigma^{\text{eff}} S^{\text{eff}}. \quad (3.3)$$

Hierin ist  $\sigma$  der CAUCHY'sche Spannungstensor, der auf der Fläche  $S$  wirkt. Mit den Gleichungen (3.2) und (3.3) erhält man den effektiven Spannungstensor  $\sigma^{\text{eff}}$ :

$$\sigma^{\text{eff}} = \frac{\sigma}{1 - D}. \quad (3.4)$$

In Gleichung (3.4) ist  $D$  ein skalarer Schädigungsparameter, der die Materialverschlechterung gemäß Gleichung (3.2) berücksichtigt und von KACHANOV [73] (1958) eingeführt wurde. Eine Erweiterung des Konzeptes der effektiven Spannungen auf anisotrope Schädigung wird von BETTEN [8] (1981/82) und von ZHENG & BETTEN [182] (1996) entwickelt. Die Bestimmung des skalaren Schädigungsfaktors in (3.4) ist von der Art der Schädigung abhängig. Zu den wichtigsten Schädigungsarten zählen [100]:

- Spröde Schädigung:  
Die Schädigung erfolgt durch Dekohäsion unter monotoner Belastung. Betroffen hiervon ist beispielsweise Beton, bei dem diese Art der Schädigung auftritt, obwohl keine irreversiblen makroskopischen Dehnungen vorhanden sind.
- Duktile plastische Schädigung:  
Diese Art der Schädigung ist mit dem Entstehen plastischer Dehnungen verbunden und macht sich durch Entstehung und Anwachsen von Kavitäten bemerkbar.
- Spröde viskoplastische Schädigung:  
Diese Schädigungsart tritt im Zusammenhang mit dem Effekt des Kriechens auf. Beobachtet werden kann sie beispielsweise bei Metallen, die moderaten und hohen Temperaturen ausgesetzt sind.
- Ermüdungsschädigung:  
Unter der Wirkung sich wiederholender Belastung tritt diese Art der Schädigung auf. Sie ist zeitabhängig, erfolgt bereits im Bereich kleiner Dehnungen und ist eine Funktion der Lastzyklen.

Im folgenden wird ausschließlich der Einfluß einer duktilen plastischen Schädigung berücksichtigt, so wie es HACHEMI & WEICHERT [54, 57, 58] eingeführt haben. Zur Beschreibung des Schädigungsfaktors werden zwei einfache Modelle verwendet, die auf LEMAITRE [96] und SHICHUN & HUA [146] zurückgehen. Die Modelle sind linear abhängig von der äquivalenten plastischen Dehnung  $p$  und vier Materialkonstanten (Dehnung, bei der Schädigung erstmals auftritt:  $\varepsilon_D$ ; Dehnung beim Bruch:  $\varepsilon_R$ ; kritischer Wert des Materialschädigung beim Bruch:  $D_c$ ; Querkontraktionszahl für das Modell nach LEMAITRE:  $\nu$ ; Koeffizient für das Modell nach SHICHUN & HUA:  $B$ ). Das erste Modell beinhaltet dabei die Annahme, daß die mechanischen Effekte für die Kavitäten und Mikrorisse dasselbe Verhalten für Zug wie für Druck zeigen, während das zweite die Art des hydrostatischen Spannungszustandes mitberücksichtigt. Der Materialschädigungsfaktor wird für beide Fälle mit folgender

Beziehung bestimmt:

$$D = \frac{D_c}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \langle R_\sigma p - \varepsilon_D \rangle \quad (3.5)$$

$$\text{mit dem MCAULEY-Operator} \quad \langle x \rangle = \frac{1}{2}(x + |x|) = \begin{cases} x & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases} . \quad (3.6)$$

Hierin ist  $R_\sigma$  die Triaxialitätsfunktion, die wie folgt gegeben ist:

- Modell von LEMAITRE

$$R_\sigma = \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_V} \right)^2 \quad (3.7)$$

- Modell von SHICHUN & HUA

$$R_\sigma = \exp \left[ B \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_V} - \frac{1}{3} \right) \right] \quad (3.8)$$

$\sigma_V$  ist die Vergleichsspannung und  $\sigma_H$  der hydrostatische Anteil des Spannungstensors.

Für die äquivalente plastische Dehnung  $p$  ergibt sich:

$$p = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p} . \quad (3.9)$$

Die drei Materialkonstanten  $\varepsilon_D$ ,  $\varepsilon_R$  und  $D_c$  werden üblicherweise experimentell in Abhängigkeit der Temperatur ermittelt. In [98, 99, 100] findet man beispielsweise folgende Materialwerte:

Material	$\vartheta$ [°C]	$\varepsilon_D$	$\varepsilon_R$	$D_c$
99.9% Kupfer	20	0.35	1.04	0.85
2024 Al-Legierung	20	0.03	0.25	0.23
Stahl E 24	20	0.50	0.88	0.17
Stahl XC 38	20	0.00	0.56	0.22
Stahl 30 CD 4	20	0.02	0.37	0.24
INCO 718 Legierung	20	0.02	0.29	0.24

Tabelle 3.1: Materialkonstanten

Für den Koeffizienten  $B$  empfehlen RICE & TRACEY [136] den Wert  $B = 1.5$ .

In den Gleichungen (3.7) bis (3.9) wird die Vergleichsspannung  $\sigma_V$  nach VON MISES vorausgesetzt (siehe Gleichung (2.8)). Der Quotient  $\frac{\sigma_H}{\sigma_V}$  läßt sich dann wie folgt ausdrücken:

$$\frac{\sigma_H}{\sigma_V} = \frac{\frac{1}{3} \sigma_{kk}}{\sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D}} . \quad (3.10)$$

Für den einachsigen Vergleichszustand

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

gilt

$$\frac{\sigma_H}{\sigma_V} = \frac{\frac{1}{3}\sigma_V}{\sigma_V} = \frac{1}{3} \quad (3.12)$$

und damit

$$R_\sigma = 1 \quad (3.13)$$

aus Gleichung (3.7) unabhängig von  $\nu$  und aus Gleichung (3.8) unabhängig von  $B$ . Dies ist eine Mindestforderung, die man an einen Ausdruck für  $R_\sigma$  stellen muß, denn für den einachsigen Vergleichszustand ist keine Triaxialität vorhanden. Unabhängig vom Verhältnis  $\frac{\sigma_H}{\sigma_V}$ , das heißt auch bei einer beliebigen Triaxialität, folgt für  $\nu = 0.5$  aus Gleichung (3.7) der Wert  $R_\sigma = 1$ , was zu einem Dilemma führt. Ebenso kritisch muß man die Gleichung (3.8) sehen. Auf den Parameter  $B$  soll hier allerdings nicht näher eingegangen werden.

### 3.3 Das Materialmodell

Damit im folgenden der Einfluß einer begrenzt linear kinematischen Verfestigung mitberücksichtigt werden kann, wird hier das Konzept des „Generalized Standard Material Model“ (GSMM) [59] verwendet. MANDEL [107] hat gezeigt, daß die Formulierung des statischen Einspieltheorems für begrenzt linear kinematisch verfestigendes Material die gleiche mathematische Form hat wie die für elastisches – ideal plastisches Material, falls der konventionelle Raum der Spannungen und Dehnungen um interne Parameter zur Beschreibung der Verfestigung erweitert wird. WEICHERT & GROSS-WEEGE [171] haben mit diesem Konzept ein statisches Einspieltheorem für begrenzt linear kinematisch verfestigendes Material aufgestellt und bewiesen. Man erhält die sogenannten generalisierten Spannungen und Dehnungen  $(\mathbf{e}, \mathbf{e}^e, \mathbf{e}^p, \mathbf{e}^\vartheta, \mathbf{s})$ , die hier auf der mikroskopischen Ebene wie folgt definiert sind:

$$\mathbf{e} = [\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{0}], \quad \mathbf{e}^e = [\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\omega}], \quad \mathbf{e}^p = [\boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\kappa}], \quad \mathbf{e}^\vartheta = [\boldsymbol{\varepsilon}^\vartheta, \mathbf{0}], \quad \mathbf{s} = [\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\pi}]. \quad (3.14)$$

Hierin sind  $\boldsymbol{\sigma}$  der Spannungstensor und  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  und  $\boldsymbol{\varepsilon}^\vartheta$  die elastischen, plastischen bzw. thermischen Anteile des Dehnungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Die Größen  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\kappa}$  und  $\boldsymbol{\pi}$  sind Vektoren mit

der Dimension  $r$ , die die internen elastischen und plastischen Parameter sowie die Verfestigungsspannungen beschreiben. Die Dimension von  $r$  hängt dabei von dem gewählten Verfestigungsmodell ab.

Im Rahmen der geometrisch linearisierten Theorie kann der gesamte generalisierte Dehnungstensor  $\mathbf{e}$  in einen elastischen, plastischen und thermischen Anteil aufgeteilt werden. Es gilt:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p + \mathbf{e}^\vartheta \quad (3.15)$$

$$\text{bzw.} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^\vartheta \quad (3.16)$$

$$\text{und} \quad \theta_n = \omega_n + \kappa_n + \theta_n \quad \text{mit} \quad n = 1 \dots r. \quad (3.17)$$

Auch hier läßt sich das Schädigungsverhalten des betrachteten Materials mitberücksichtigen. Anstelle der tatsächlichen Spannungstensoren werden die effektiven Spannungstensoren verwendet. Analog zu Kapitel 3.2 werden hier die generalisierten Spannungen auf der mikroskopischen Ebene durch die effektiven generalisierten Spannungen ersetzt.

$$\mathbf{s}^{\text{eff}} = [\boldsymbol{\sigma}^{\text{eff}}, \boldsymbol{\pi}^{\text{eff}}] = \frac{\mathbf{s}}{1 - D} \quad (3.18)$$

$$\text{bzw.} \quad \sigma_{ij}^{\text{eff}} = \frac{\sigma_{ij}}{1 - D}, \quad \pi_n^{\text{eff}} = \frac{\pi_n}{1 - D} \quad \text{mit} \quad n = 1 \dots r. \quad (3.19)$$

Die Verknüpfung der effektiven generalisierten elastischen Spannungen  $\mathbf{s}^{\text{eff}}$  mit den generalisierten elastischen Dehnungen  $\mathbf{e}^e$  erfolgt analog zum HOOKE'schen Gesetz:

$$\mathbf{s}^{\text{eff}} = \boldsymbol{\mathcal{L}} : \mathbf{e}^e \quad (3.20)$$

$$\text{bzw.} \quad \sigma_{ij}^{\text{eff}} = L_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e, \quad \pi_n^{\text{eff}} = Z_{nm} \omega_m \quad \text{mit} \quad n, m = 1 \dots r. \quad (3.21)$$

Hierbei sind  $\mathbf{L}$  der Elastizitätstensor und  $\mathbf{Z}$  der interne Elastizitätstensor. Der Tensor  $\mathbf{Z}$  besitzt ebenso wie der Tensor  $\mathbf{L}$  Symmetrieeigenschaften ( $L_{ijkl} = L_{klij} = L_{jikl} = L_{ijlk}$  und  $Z_{mn} = Z_{nm}$ ).

Für den plastischen Anteil des Materialverhaltens wird die Existenz einer konvexen Fließfläche im  $(6 + r)$ -dimensionalen Raum der effektiven generalisierten Spannungen angenommen. Dabei soll sich jeder zulässige Spannungszustand  $\boldsymbol{\sigma}^{\text{eff}}$  mit seinen zugehörigen internen Parametern  $\boldsymbol{\pi}^{\text{eff}}$  innerhalb dieser Fließfläche befinden.

$$\mathcal{F}(\mathbf{s}^{\text{eff}}, \mathbf{k}) \leq 0. \quad (3.22)$$

Hierin ist  $k$  ein zeitunabhängiger Skalar. Die Verschiebung der Fließfläche im Raum der Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}^{\text{eff}}$  wird dann ausschließlich in einer Änderung der internen Parameter  $\boldsymbol{\pi}^{\text{eff}}$  berücksichtigt. In [59] wurde gezeigt, daß die Konvexität der Fließfläche und die Gültigkeit der Normalitätsregel (A.21) im Raum der generalisierten Spannungen und Dehnungen erhalten bleibt. Beides wird in der folgenden Gleichung zum Ausdruck gebracht:

$$(\mathbf{s} - \mathbf{s}^s) : \dot{\mathbf{e}}^p \geq 0 \quad (3.23)$$

$$\text{bzw.} \quad (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \dot{\varepsilon}_{ij}^p + (\pi_n - \pi_n^s) \dot{\kappa}_n \geq 0 \quad \text{mit } n = 1 \dots r. \quad (3.24)$$

Das hochgestellte  $s$  weist auf einen sicheren Zustand hin, der die Gleichung (3.22) erfüllt. Im Falle einer kinematischen Verfestigung ist nach PRAGER [131] die Entwicklung der internen plastischen Parameter  $\boldsymbol{\kappa}$  mit der Entwicklung der plastischen Dehnung  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  gekoppelt.

$$\dot{\kappa}_m = -\dot{\varepsilon}_{ij}^p \begin{cases} \text{für } i = j, & m = \frac{1}{2}(i + j), \\ \text{für } i \neq j, & m = i + j + 1. \end{cases} \quad (3.25)$$

Die Entwicklung der internen elastischen Parameter  $\boldsymbol{\omega}$  ist nach Gleichung (3.17) mit den internen plastischen Parametern  $\boldsymbol{\kappa}$  gekoppelt.

$$\dot{\omega}_m = -\dot{\kappa}_m \quad \text{mit } m = 1 \dots r. \quad (3.26)$$

### 3.4 Ermittlung der makroskopischen Größen

Auf der makroskopischen Ebene werden die generalisierten Spannungen mit  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$  und die generalisierten Dehnungen mit  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  bezeichnet.

$$\mathbf{S} = [\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Pi}], \quad \mathbf{E} = [\boldsymbol{\Xi}, \mathbf{0}]. \quad (3.27)$$

Sie werden mit den generalisierten Spannungen  $\mathbf{s}(\mathbf{y})$  und generalisierten Dehnungen  $\mathbf{e}(\mathbf{y})$  auf der mikroskopischen Ebene durch eine Integration über das repräsentativen Volumenelement mit dem Volumen  $V$  verknüpft [62].

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int_{(V)} \mathbf{s}(\mathbf{y}) dV \quad (3.28)$$

$$\text{bzw. } \Sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_{(V)} \sigma_{ij} dV, \quad \Pi_m = \frac{1}{V} \int_{(V)} \pi_m dV \quad \text{mit } m = 1 \dots r. \quad (3.29)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int_{(V)} \mathbf{e}(\mathbf{y}) dV \quad (3.30)$$

$$\text{bzw. } \Xi_{ij} = \frac{1}{V} \int_{(V)} \varepsilon_{ij} dV. \quad (3.31)$$

### 3.5 Thermodynamische Grundlagen

Um die konstitutiven Gleichungen in die Formulierung des Einspieltheorems einzuführen, wird das thermodynamische Potential  $\Psi$  als konvexe Funktion aller Zustandsgrößen und des Schädigungsfaktors formuliert (z.B. [54, 56, 72, 100]). Unter der Annahme, daß die Verfestigung von den anderen auftretenden Effekten entkoppelt ist, läßt sich das Potential  $\Psi$  in zwei Anteile zerlegen. Dabei sind  $\Psi_0$  das gesamte Potential eines ungeschädigten Materials,  $\Psi^e$  das thermoelastische Potential eines geschädigten Materials und  $\Psi^p$  der zugehörige plastische Anteil.

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\kappa}, D, \Delta\vartheta) = (1 - D)\Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\kappa}, \Delta\vartheta) = \Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D, \Delta\vartheta) + \Psi^p(\boldsymbol{\kappa}, D). \quad (3.32)$$

Hierin ist  $\Delta\vartheta$  die Differenz zwischen absoluter und Referenztemperatur.

$\Psi^e$  und  $\Psi^p$  sind wie folgt definiert [97]:

$$\begin{aligned} \rho \Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D, \Delta\vartheta) &= \rho (1 - D) \Psi_0^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \Delta\vartheta) \\ &= \frac{1}{2}(1 - D)(\varepsilon_{ij}^e - \alpha_\vartheta \Delta\vartheta \delta_{ij}) L_{ijkl} (\varepsilon_{kl}^e - \alpha_\vartheta \Delta\vartheta \delta_{kl}) + C_\varepsilon \Delta\vartheta^2, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \rho \Psi^p(\boldsymbol{\kappa}, D) &= \rho (1 - D) \Psi_0^p(\boldsymbol{\kappa}) \\ &= \frac{1}{2}(1 - D) \kappa_m Z_{mn} \kappa_n \quad \text{mit } m, n = 1 \dots r. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Dabei sind  $\rho$  die Dichte,  $C_\varepsilon$  die spezifische Wärme bei konstanter Dehnung,  $\alpha_\vartheta$  der Wärmeausdehnungskoeffizient und  $\delta_{ij}$  das KRONECKER-Symbol sowie  $\Psi_0^e$  und  $\Psi_0^p$  das elastische und plastische Potential eines ungeschädigten Materials. Elastizitätstensor  $\mathbf{L}$  und interner

Elastizitätstensor  $\mathbf{Z}$  sind wie folgt definiert:

$$L_{ijkl} = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e \partial \varepsilon_{kl}^e}, \quad (3.35)$$

$$Z_{mn} = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \kappa_m \partial \kappa_n} \quad \text{mit } m, n = 1 \dots r. \quad (3.36)$$

Für die konstitutiven Gleichungen ergibt sich:

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = (1 - D) L_{ijkl} (\varepsilon_{kl}^e - \alpha_\vartheta \Delta \vartheta \delta_{kl}), \quad (3.37)$$

$$\pi_m = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa_m} = -(1 - D) Z_{mn} \kappa_n, \quad (3.38)$$

$$G = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial D} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ij}^e - \alpha_\vartheta \Delta \vartheta \delta_{ij}) L_{ijkl} (\varepsilon_{kl}^e - \alpha_\vartheta \Delta \vartheta \delta_{kl}) + \frac{1}{2} \kappa_m Z_{mn} \kappa_n \quad (3.39)$$

mit  $m, n = 1 \dots r$ .

Hierin ist  $G$  eine thermodynamische Kraft, die durch eine Energiefunktion des ungeschädigten Materials mit dem Schädigungsfaktor  $D$  verbunden ist. Als Folge des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik gilt das CLAUSIUS-DUHEM-Theorem in folgender Form [54]:

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho (\dot{\Psi} + s \Delta \dot{\vartheta}) + g_i q_i \geq 0. \quad (3.40)$$

Dabei sind  $s$  die spezifische Entropie,  $\mathbf{q}$  der Wärmefluß und  $\mathbf{g}$  der Gradient der Temperatur  $\Delta \vartheta$  mit

$$s = - \frac{\partial \Psi}{\partial \Delta \vartheta}, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{g} = - \frac{\text{grad } \Delta \vartheta}{\Delta \vartheta} \quad \text{bzw.} \quad g_i = - \left( \frac{\Delta \vartheta_{,j} \mathbf{e}_j}{\Delta \vartheta} \right)_i \quad (3.42)$$

wobei  $\mathbf{e}_j$  die Einheitsvektoren in Koordinatenachsenrichtung sind.

Bildet man nun die Zeitableitung von Gleichung (3.32), so erhält man mit den Gleichungen (3.37), (3.38), (3.39) und (3.41):

$$\begin{aligned} \rho \dot{\Psi} &= \rho \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{\partial \Psi}{\partial \Delta \vartheta} \Delta \dot{\vartheta} + \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa_m} \dot{\kappa}_m + \frac{\partial \Psi}{\partial D} \dot{D} \right) \\ &= \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^e - \rho s \Delta \dot{\vartheta} - \pi_m \dot{\kappa}_m - G \dot{D} \quad \text{mit } m = 1 \dots r. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Die Gleichungen (3.37) und (3.41) beschreiben den thermoelastischen Zustand des Materials. Dieser ist dissipationsfrei. Damit folgt aus der Ungleichung (3.40) unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.16) und (3.43):

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \pi_m \dot{\kappa}_m + G \dot{D} + g_i q_i \geq 0 \quad \text{mit } m = 1 \dots r. \quad (3.44)$$

Nimmt man an, daß die mechanische und die thermische Dissipation voneinander entkoppelt sind, dann lassen sich aus Gleichung (3.44) zwei zu erfüllende Beziehungen ableiten:

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p + \pi_m \dot{\kappa}_m + G \dot{D} \geq 0 \quad \text{mit } m = 1 \dots r, \quad (3.45)$$

$$g_i q_i \geq 0. \quad (3.46)$$

Sind weiterhin die Prozesse der Plastizität von denen der Schädigung getrennt, dann lassen sich aus Gleichung (3.45) weitere zwei Bedingungen ableiten [72, 100]:

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p + \pi_m \dot{\kappa}_m \geq 0 \quad \text{mit } m = 1 \dots r, \quad (3.47)$$

$$G \dot{D} \geq 0. \quad (3.48)$$

Eine weitere Konkretisierung ist bei der Annahme der Existenz eines skalaren Dissipationspotentials möglich (z.B. [2]). Man geht dabei davon aus, daß die thermische und die mechanische Dissipation voneinander entkoppelt sind. Dieses Potential muß konvex sein, und die Normalitätsregel (A.21) muß gelten. Für die mechanische Dissipation ergibt sich eine Funktion von der plastischen Dehnrate und den inneren Variablen als mechanisches Dissipationspotential zu

$$\Upsilon = \Upsilon(\dot{\epsilon}^p, \dot{\kappa}, \dot{D}, \mathbf{q}). \quad (3.49)$$

Bei Gültigkeit der Normalitätsregel ergibt sich

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Upsilon}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}^p}, \quad \pi_m = \frac{\partial \Upsilon}{\partial \dot{\kappa}_m}, \quad G = \frac{\partial \Upsilon}{\partial \dot{D}}, \quad g_i = \frac{\partial \Upsilon}{\partial q_i} \quad \text{mit } m = 1 \dots r. \quad (3.50)$$

Damit ist dieses Konzept eine Verallgemeinerung der aus der Plastizitätstheorie bekannten Fließflächen. Im allgemeinen Fall geht in das Dissipationspotential auch noch der Temperaturgradient ein.

## 3.6 Das statische Einspieltheorem für Verbundwerkstoffe mit periodischer Mikrostruktur

Im folgenden wird die Gültigkeit der Normalitätsregel (A.21) für plastisches Fließen angenommen.  $\mathcal{D}(\mathbf{s}, \mathbf{y})$  ist der konvexe elastische Bereich aller plastisch zulässigen generalisierten Spannungszustände.

$$\mathbf{s}(\mathbf{y}) \in \mathcal{D}(\mathbf{s}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in V. \quad (3.51)$$

Dieser Bereich  $\mathcal{D}(\mathbf{s}, \mathbf{y})$  wird durch eine Fließfunktion  $\mathcal{F}(\mathbf{s}^{\text{eff}}(\mathbf{y}), \sigma_Y(\mathbf{y}))$  definiert. Hierin ist  $\sigma_Y(\mathbf{y})$  die Fließspannung.

$$\mathcal{D}(\mathbf{s}, \mathbf{y}) = \{ \mathbf{s} \mid \mathcal{F}(\mathbf{s}^{\text{eff}}(\mathbf{y}), \sigma_Y(\mathbf{y})) \leq 0, \forall \mathbf{y} \in V \}. \quad (3.52)$$

In dieser Arbeit wird ausschließlich die Fließbedingung nach VON MISES verwendet. Die Fließfunktion  $\mathcal{F}(\mathbf{s}^{\text{eff}}(\mathbf{y}), \sigma_Y(\mathbf{y}))$  ist dann folgendermaßen definiert:

$$\mathcal{F}(\mathbf{s}^{\text{eff}}(\mathbf{y}), \sigma_Y(\mathbf{y})) = \sqrt{\frac{3}{2} \left( \frac{\boldsymbol{\sigma}^D}{1-D} - \frac{\boldsymbol{\pi}}{1-D} \right) : \left( \frac{\boldsymbol{\sigma}^D}{1-D} - \frac{\boldsymbol{\pi}}{1-D} \right)} - \sigma_Y(\mathbf{y}). \quad (3.53)$$

In die Fließfunktion gehen zum einen die Verfestigungsspannungstensoren  $\boldsymbol{\pi}$  und zum anderen die deviatorischen Anteile  $\boldsymbol{\sigma}^D$  der Spannungstensoren  $\boldsymbol{\sigma}$  des generalisierten Spannungstensors  $\mathbf{s}$  ein (Gleichung (2.9)).

Die Konvexität von  $\mathcal{F}(\mathbf{s}^{\text{eff}}(\mathbf{y}), \sigma_Y(\mathbf{y}))$  und die Gültigkeit der Normalitätsregel werden durch die folgende Ungleichung ausgedrückt:

$$\frac{1}{V} \int_{(V)} (\mathbf{s} - \mathbf{s}^s) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p dV \geq 0 \quad (3.54)$$

$$\text{bzw. } \frac{1}{V} \int_{(V)} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \dot{\epsilon}_{ij}^p + (\pi_m - \pi_m^s) \dot{\kappa}_m dV \geq 0 \quad \text{mit } m = 1 \dots r \quad (3.55)$$

$$\forall \mathbf{s}^s(\mathbf{y}) = [\boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{y}), \boldsymbol{\pi}^s(\mathbf{y})] \in \mathcal{D}^s(\mathbf{s}^s, \mathbf{y}).$$

Hierin bezeichnet die generalisierte Spannung  $\mathbf{s}^s(\mathbf{y}) = [\boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{y}), \boldsymbol{\pi}^s(\mathbf{y})]$  einen sicheren Spannungszustand, der folgendermaßen definiert ist:

$$\mathcal{D}^s(\mathbf{s}^s, \mathbf{y}) = \{ \mathbf{s}^s \mid \mathcal{F}(\mathbf{s}^s, \sigma_Y(\mathbf{y})) < 0, \forall \mathbf{y} \in V \}. \quad (3.56)$$

Nun kann ein makroskopischer Bereich  $\mathcal{D}^m(\mathbf{S}, \mathbf{x})$  für den Verbundwerkstoff definiert werden. Er besteht aus der Menge aller makroskopischen Zustände der generalisierten Spannungen  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ , die aus allen mikroskopischen Zuständen der plastisch zulässigen generalisierten Spannungen  $\mathbf{s}(\mathbf{y})$  folgen.

$$\mathcal{D}^m(\mathbf{S}, \mathbf{x}) = \left\{ \mathbf{S} \mid \mathbf{S} = \frac{1}{V} \int_{(V)} \mathbf{s} dV, \mathbf{s}(\mathbf{y}) \in \mathcal{D}(\mathbf{s}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{y} \in V \right\}. \quad (3.57)$$

Für die Bestimmung dieses Bereiches  $\mathcal{D}^m(\mathbf{S}, \mathbf{x})$  wird die Einspielanalyse auf der mikroskopischen Ebene durchgeführt. Die verschiedenen Größen werden aber nicht an dem im Kapitel 3.1 eingeführten repräsentativen Volumenelement (RVE) ermittelt, sondern an einem Vergleichselement, das sich von dem ursprünglichen Element nur durch sein rein elastisches Materialverhalten unterscheidet (Abbildung 3.4). Alle anderen Größen sowie die Randbedingungen sind für dieses Vergleichselement gleich. Folglich werden den generalisierten Spannungen und Dehnungen für dieses Vergleichselement auch keine internen Parameter, die eine Verfestigung beschreiben, zugeordnet. Alle Größen, die an diesem

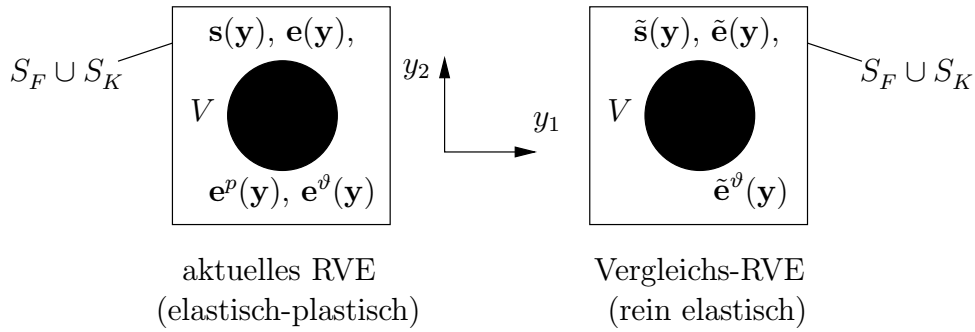


Abbildung 3.4: Repräsentative Volumenelemente

Vergleichselement ermittelt werden, sind durch eine übergestellte Tilde gekennzeichnet. Für die generalisierten Größen ergibt sich dann:

$$\tilde{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{e}}^e = [\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e, \mathbf{0}], \quad \tilde{\mathbf{e}}^p = [\mathbf{0}, \mathbf{0}], \quad \tilde{\mathbf{e}}^\theta = [\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^\theta, \mathbf{0}], \quad \tilde{\mathbf{s}} = [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e, \mathbf{0}]. \quad (3.58)$$

Nun läßt sich das statische Einspieltheorem mit diesen Größen formulieren. Falls ein Sicherheitsfaktor  $\alpha > 1$ , ein Feld generalisierter Spannungen  $\bar{\mathbf{r}} = [\bar{\boldsymbol{\rho}}, \bar{\boldsymbol{\pi}}]$  bestehend aus den zeitunabhängigen Eigenspannungen  $\bar{\boldsymbol{\rho}}$  und den zeitunabhängigen Verfestigungsspannungen  $\bar{\boldsymbol{\pi}}$  sowie ein sicherer elastischer Kernbereich („Sanctuary of Elasticity“ [116]) derart existieren, daß

$$\mathcal{D}^{s,m}(\mathbf{S}^s, \mathbf{x}) \subset \mathcal{D}^m(\mathbf{S}, \mathbf{x}) \quad (3.59)$$

$$\text{mit} \quad \mathcal{D}^{s,m}(\mathbf{S}^s, \mathbf{x}) = \left\{ \mathbf{S}^s \mid \mathbf{S}^s = \frac{1}{V} \int_{(V)} \mathbf{s}^s dV, \mathbf{s}^s(\mathbf{y}) \in \mathcal{D}^s(\mathbf{s}^s, \mathbf{y}), \forall \mathbf{y} \in V \right\} \quad (3.60)$$

gilt, dann wird der Verbundwerkstoff mit periodischer Mikrostruktur einspielen. Hierin ist der sichere Zustand der generalisierten Spannungen  $\mathbf{s}^s$  definiert als Summe der generalisierten zeitunabhängigen Spannungen  $\bar{\mathbf{r}}$  und dem Produkt aus Sicherheitsfaktor  $\alpha$  und den generalisierten Spannungen des elastischen Vergleichselementes  $\tilde{\mathbf{s}}$ :

$$\mathbf{s}^s(\mathbf{y}, t) = \alpha \tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{y}, t) + \bar{\mathbf{r}}(\mathbf{y}). \quad (3.61)$$

Für eine gegebene makroskopische Dehnung  $\mathbf{E}$  gelten dann die folgenden Beziehungen für das sich rein elastisch verhaltene repräsentative Volumenelement:

$$\tilde{u}_i = \Xi_{ij} y_j \quad \text{auf } S_K, \quad (3.62)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}) \quad \text{in } V, \quad (3.63)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij,j}^e = 0_i \quad \text{in } V, \quad (3.64)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij}^e = L_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl}^e \quad \text{in } V, \quad (3.65)$$

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_{(V)} \tilde{\sigma}_{ij}^e dV. \quad (3.66)$$

Die Eigenspannungen  $\bar{\boldsymbol{\rho}}$  müssen definitionsgemäß die homogenen Gleichgewichtsbedingungen erfüllen (Gleichung (2.11)).

$$\bar{\rho}_{ij,j} = 0_i \quad \text{in } V, \quad (3.67)$$

$$\bar{\rho}_{ij} n_j = 0_i \quad \text{auf } S_F, \quad (3.68)$$

$$0_{ij} = \frac{1}{V} \int_{(V)} \bar{\rho}_{ij} dV. \quad (3.69)$$

Hierin ist  $\mathbf{n}$  der nach außen gerichtete Normalenvektor auf  $S$ . Die Volumenkräfte werden außerdem in der Gleichung (3.64) vernachlässigt.

Nun läßt sich ein statisches Einspieltheorem für Verbundwerkstoffe mit periodischer Mikrostruktur formulieren. Es ist gültig für mechanische und thermische Lasten sowie für elastisch – begrenzt linear kinematisch verfestigendes Materialverhalten mit Berücksichtigung isotroper, duktiler plastischer Schädigung.

#### Statisches Einspieltheorem für Verbundwerkstoffe mit periodischer Mikrostruktur

Falls ein Faktor  $\alpha > 1$ , ein zeitunabhängiges Eigenspannungsfeld  $\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{y})$  und ein zeitunabhängiges Verfestigungsspannungsfeld  $\bar{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{y})$  so existieren, daß für alle Lasten  $\mathbf{P}(t)$  eines Lastraumes  $\mathcal{L}$  und für alle Punkte  $\mathbf{y}$  innerhalb eines repräsentativen Volumenelementes  $V$  die MELAN'schen Bedingungen

$$\mathcal{F}_I \left( \alpha \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{y}, t)}{1 - D(\mathbf{y}, t)} + \frac{\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{y})}{1 - D(\mathbf{y}, t)} - \frac{\bar{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{y})}{1 - D(\mathbf{y}, t)}, \sigma_Y(\mathbf{y}, \Delta\vartheta) \right) < 0, \quad (3.70)$$

$$\mathcal{F}_L \left( \alpha \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{y}, t)}{1 - D(\mathbf{y}, t)} + \frac{\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{y})}{1 - D(\mathbf{y}, t)}, \sigma_L(\mathbf{y}, \Delta\vartheta) \right) < 0 \quad (3.71)$$

$$\forall \mathbf{y} \in V \quad \wedge \quad \forall \mathbf{P}(t) \in \mathcal{L}$$

sowie die Bedingung

$$D(\mathbf{y}, t) < D_c \quad \forall \mathbf{y} \in V \quad \wedge \quad \forall \mathbf{P}(t) \in \mathcal{L} \quad (3.72)$$

nicht verletzt werden, so daß

$$\Sigma_{ij}^s(\mathbf{x}, t) = \alpha \frac{1}{V} \int_{(V)} \tilde{\sigma}_{ij}^e dV + \frac{1}{V} \int_{(V)} \bar{\rho}_{ij} dV \quad (3.73)$$

gilt, dann wird der Verbundwerkstoff unter den gegebenen Lasten einspielen.

### 3.7 Beweis des statischen Einspieltheorems

Für den Beweis des statischen Einspieltheorems für Verbundwerkstoffe mit periodischer Mikrostruktur wird im folgenden gezeigt, daß die plastischen Dehnungen für das gesamte repräsentative Volumenelement bei einer energetischen Betrachtung beschränkt bleiben [35, 54, 56, 171]. Die Vorgehensweise ist analog zu der Beweisführung des Kapitels 2.2. Hierfür wird der positiv definit quadratische Ausdruck  $W(t)$  eingeführt:

$$W(t) = \frac{1}{2} \int_{(V)} \left[ (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) \frac{L_{ijkl}^{(-1)}}{1-D} (\rho_{kl} - \bar{\rho}_{kl}) + (\pi_m - \bar{\pi}_m) \frac{Z_{mn}^{(-1)}}{1-D} (\pi_n - \bar{\pi}_n) \right] dV \geq 0. \quad (3.74)$$

Der Elastizitätstensor  $\mathbf{L}$  und der interne Elastizitätstensor  $\mathbf{Z}$  sind positiv definite Größen. Unter der Voraussetzung, daß der Schädigungsfaktors  $D < 1$  ist, ist der Wert von  $W(t)$  auch stets nicht negativ ist.  $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{y}, t)$  und  $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{y}, t)$  sind hierin die zeitabhängigen unbekanntenen Eigenspannungs- und Verfestigungsspannungszustände innerhalb des repräsentativen Volumenelementes. Die überstrichenen Größen  $\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{y})$  und  $\bar{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{y})$  sind die entsprechenden zeitunabhängigen Größen.

Zwischen den Eigenspannungs- bzw. Verfestigungsspannungstensoren und ihren effektiven Größen sowie für die Zeitableitungen gelten folgende Zusammenhänge:

$$\rho_{ij} = (1-D)\rho_{ij}^{\text{eff}} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\rho}_{ij} = (1-D)\dot{\rho}_{ij}^{\text{eff}} - \dot{D}\rho_{ij}^{\text{eff}}, \quad (3.75)$$

$$\bar{\rho}_{ij} = (1-D)\bar{\rho}_{ij}^{\text{eff}} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\bar{\rho}}_{ij} = (1-D)\dot{\bar{\rho}}_{ij}^{\text{eff}} - \dot{D}\bar{\rho}_{ij}^{\text{eff}} = -\dot{D}\bar{\rho}_{ij}^{\text{eff}}, \quad (3.76)$$

$$\pi_{ij} = (1-D)\pi_{ij}^{\text{eff}} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\pi}_{ij} = (1-D)\dot{\pi}_{ij}^{\text{eff}} - \dot{D}\pi_{ij}^{\text{eff}}, \quad (3.77)$$

$$\bar{\pi}_{ij} = (1-D)\bar{\pi}_{ij}^{\text{eff}} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\bar{\pi}}_{ij} = (1-D)\dot{\bar{\pi}}_{ij}^{\text{eff}} - \dot{D}\bar{\pi}_{ij}^{\text{eff}} = -\dot{D}\bar{\pi}_{ij}^{\text{eff}}. \quad (3.78)$$

Hiermit läßt sich die zeitliche Ableitung von  $W(t)$  bilden:

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= \int_{(V)} \left[ (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) \frac{L_{ijkl}^{(-1)}}{1-D} (\dot{\rho}_{kl} - \dot{\bar{\rho}}_{kl}) + \frac{1}{2} (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) L_{ijkl}^{(-1)} (\rho_{kl} - \bar{\rho}_{kl}) \frac{\dot{D}}{(1-D)^2} \right. \\ &\quad \left. + (\pi_m - \bar{\pi}_m) \frac{Z_{mn}^{(-1)}}{1-D} (\dot{\pi}_n - \dot{\bar{\pi}}_n) + \frac{1}{2} (\pi_m - \bar{\pi}_m) Z_{mn}^{(-1)} (\pi_n - \bar{\pi}_n) \frac{\dot{D}}{(1-D)^2} \right] dV \\ &= \int_{(V)} \left[ (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) L_{ijkl}^{(-1)} \dot{\rho}_{kl}^{\text{eff}} + (\pi_m - \bar{\pi}_m) Z_{mn}^{(-1)} \dot{\pi}_n^{\text{eff}} \right] dV \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{(V)} \left[ \frac{(\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij})}{(1-D)} L_{ijkl}^{(-1)} \frac{(\rho_{kl} - \bar{\rho}_{kl})}{(1-D)} + \frac{(\pi_m - \bar{\pi}_m)}{(1-D)} Z_{mn}^{(-1)} \frac{(\pi_n - \bar{\pi}_n)}{(1-D)} \right] \dot{D} dV. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Die Eigenspannungen  $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{y}, t)$  und  $\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{y})$  sowie die Verfestigungsspannungen  $\bar{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{y})$  können durch die Spannungsgrößen des aktuellen generalisierten Spannungstensors  $\mathbf{s} = [\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\pi}]$ , die

Spannungsgrößen eines sicheren generalisierten Spannungszustandes  $\mathbf{s}^s = [\boldsymbol{\sigma}^s, \boldsymbol{\pi}^s]$  und die Spannungsgrößen eines elastischen generalisierten Spannungszustandes  $\tilde{\mathbf{s}} = [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e, \mathbf{0}]$  ausgedrückt werden. Dabei müssen die Spannungen  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{s}^s$  zusammen die Gleichung (3.54) erfüllen. Der Spannungszustand  $\tilde{\mathbf{s}}$  wird an einem Vergleichselement ermittelt, das sich im Gegensatz zum ursprünglichen nur durch das rein elastische Materialverhalten unterscheidet.

$$\rho_{ij} = \sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}^e, \quad (3.80)$$

$$\bar{\rho}_{ij} = \sigma_{ij}^s - \tilde{\sigma}_{ij}^e, \quad (3.81)$$

$$\bar{\pi}_m = \pi_m^s. \quad (3.82)$$

Für Gleichung (3.79) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) = & \int_{(V)} \left[ (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) L_{ijkl}^{(-1)} \dot{\rho}_{kl}^{\text{eff}} + (\pi_m - \pi_m^s) Z_{mn}^{(-1)} \dot{\pi}_n^{\text{eff}} \right] dV \\ & - \frac{1}{2} \int_{(V)} \left[ (\sigma_{ij}^{\text{eff}} - \sigma_{ij}^{s,\text{eff}}) L_{ijkl}^{(-1)} (\sigma_{kl}^{\text{eff}} - \sigma_{kl}^{s,\text{eff}}) \right. \\ & \left. + (\pi_m^{\text{eff}} - \pi_m^{s,\text{eff}}) Z_{mn}^{(-1)} (\pi_n^{\text{eff}} - \pi_n^{s,\text{eff}}) \right] \dot{D} dV. \quad (3.83) \end{aligned}$$

Analog zu Gleichung (3.80) definiert sich die aus den Eigenspannungen  $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{y}, t)$  resultierende Dehnung:

$$\varepsilon_{ij}^r = \varepsilon_{ij}^e - \tilde{\varepsilon}_{ij}^e \quad (3.84)$$

wobei

$$\varepsilon_{ij}^e = L_{ijkl}^{(-1)} \sigma_{kl}^{\text{eff}} + \alpha_{\vartheta} \Delta\vartheta \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \tilde{\varepsilon}_{ij}^e = L_{ijkl}^{(-1)} \tilde{\sigma}_{kl}^{\text{eff}} + \alpha_{\vartheta} \Delta\vartheta \delta_{ij}. \quad (3.85)$$

Die folgende Gleichung stellt nun den Zusammenhang zwischen dieser Dehnung und den effektiven Spannungen bzw. Eigenspannungen her.

$$\varepsilon_{ij}^r = L_{ijkl}^{(-1)} (\sigma_{kl}^{\text{eff}} - \tilde{\sigma}_{kl}^{\text{eff}}) = L_{ijkl}^{(-1)} \rho_{kl}^{\text{eff}}. \quad (3.86)$$

Die Dehnrates, die aus den Eigenspannungen resultiert, und die Rate der internen plastischen Parameter ergeben sich definitionsgemäß zu:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^r = \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \dot{\varepsilon}_{ij}^e = L_{ijkl}^{(-1)} \dot{\rho}_{kl}^{\text{eff}}, \quad (3.87)$$

$$\dot{\kappa}_m = -\dot{\omega}_m = -Z_{mn}^{(-1)} \dot{\pi}_n^{\text{eff}}. \quad (3.88)$$

Mit den Gleichungen (3.87) und (3.88) und unter Nutzung der Abkürzung

$$\Delta G = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{ij}^{\text{eff}} - \sigma_{ij}^{s,\text{eff}}) L_{ijkl}^{(-1)} (\sigma_{kl}^{\text{eff}} - \sigma_{kl}^{s,\text{eff}}) + (\pi_m^{\text{eff}} - \pi_m^{s,\text{eff}}) Z_{mn}^{(-1)} (\pi_n^{\text{eff}} - \pi_n^{s,\text{eff}}) \right] \quad (3.89)$$

ergibt sich aus Gleichung (3.83)

$$\dot{W}(t) = \int_{(V)} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}^e) dV - \int_{(V)} (\pi_m - \pi_m^s) \dot{\kappa}_m dV - \int_{(V)} \Delta G \dot{D} dV. \quad (3.90)$$

Geht man nun genauso wie bei den Gleichungen (2.19) bis (2.22) vor, dann läßt sich das erste Integral in Gleichung (3.90) ersetzen durch

$$\int_{(V)} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}^e) dV = - \int_{(V)} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV. \quad (3.91)$$

Für die zeitliche Ableitung von  $W(t)$  ergibt sich schließlich:

$$\dot{W}(t) = - \int_{(V)} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \dot{\varepsilon}_{ij}^p + (\pi_m - \pi_m^s) \dot{\kappa}_m dV - \int_{(V)} \Delta G \dot{D} dV \quad (3.92)$$

$$= - \int_{(V)} (\mathbf{s} - \mathbf{s}^s) : \dot{\mathbf{e}}^p dV - \int_{(V)} \Delta G \dot{D} dV \leq 0. \quad (3.93)$$

Da es sich bei  $\Delta G$  um eine positiv definierte Größe handelt, kann nach den Gleichungen (3.23) bzw. (3.24) und (3.48) die zeitliche Ableitung von  $W(t)$  niemals positiv werden. Da  $W(t)$  definitionsgemäß immer größer als Null ist, muß  $W(t \rightarrow \infty)$  gegen einen konstanten Wert konvergieren (Abbildung 2.8). Das bedeutet, daß die plastischen Dehnungen  $\dot{\varepsilon}^p(\mathbf{y}, t)$  im Laufe der Zeit verschwinden müssen. Die Eigenspannungen  $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{y}, t)$  und Verfestigungsspannungen  $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{y}, t)$  konvergieren dann gegen zeitlich konstante Felder.

Jetzt muß noch überprüft werden, ob die makroskopische plastische Dissipationsarbeit  $W_p$  für  $t \rightarrow \infty$  beschränkt bleibt. Ausgangspunkt ist hier die Gleichung (3.24), in der die Konvexität der Fließfläche und die Gültigkeit der Normalitätsregel zum Ausdruck kommt.

$$\begin{aligned} (\sigma_{ij} - \alpha \sigma_{ij}^s) \dot{\varepsilon}_{ij}^p + (\pi_m - \alpha \pi_m^s) \dot{\kappa}_m &\geq 0 \\ \iff (\sigma_{ij} - \alpha \sigma_{ij}^s) \dot{\varepsilon}_{ij}^p + (\pi_m - \alpha \pi_m^s) \dot{\kappa}_m &\geq \alpha (\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \sigma_{ij}^s \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \pi_m \dot{\kappa}_m - \pi_m^s \dot{\kappa}_m) \\ \iff \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \pi_m \dot{\kappa}_m &\leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} [(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \dot{\varepsilon}_{ij}^p + (\pi_m - \pi_m^s) \dot{\kappa}_m] \end{aligned} \quad (3.94)$$

Die Integration dieser Ungleichung über das Volumen  $V$  liefert die makroskopische plastische Dissipationsleistung  $\dot{W}_p(t)$  für ein repräsentatives Volumenelement des Verbund-

werkstoffes. Berücksichtigt man dabei noch die Gleichung (3.92), so erhält man

$$\begin{aligned}
\dot{W}_p(t) &= \int_{(V)} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \pi_m \dot{\kappa}_m dV \\
&\leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{(V)} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \dot{\varepsilon}_{ij}^p + (\pi_m - \pi_m^s) \dot{\kappa}_m dV \\
&\leq -\frac{\alpha}{\alpha - 1} \left[ \dot{W}(t) + \int_{(V)} \Delta G \dot{D} dV \right].
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Nach der Integration über die Zeit  $t$  erhält man eine Abschätzung für die gewünschte makroskopische Dissipationsarbeit  $W_p(t)$ :

$$\begin{aligned}
W_p(t) = \int_{t=0}^{t=T} \int_{(V)} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \pi_m \dot{\kappa}_m dV dt &\leq -\frac{\alpha}{\alpha - 1} \left[ \int_{t=0}^{t=T} \dot{W}(t) dt + \int_{t=0}^{t=T} \int_{(V)} \Delta G \dot{D} dV \right] \\
&\leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \left[ W(t=0) - \int_{t=0}^{t=T} \int_{(V)} \Delta G \dot{D} dV \right]
\end{aligned} \tag{3.96}$$

$$\implies \lim_{T \rightarrow \infty} W_p(t=T) < \infty. \tag{3.97}$$

Unter der Voraussetzung, daß das Doppelintegral auf der rechten Seite dieser Ungleichung einen endlichen Wert annimmt, ist die Beschränktheit der makroskopischen Dissipationsarbeit  $W_p$  für  $t \rightarrow \infty$  gezeigt (HACHEMI [54] (1994), FENG & YU [42] (1995), POLIZZOTTO ET AL. [125] (1996), DRUYANOV & ROMAN [35, 36] (1998)). Der Verbundwerkstoff wird unter den getroffenen Voraussetzungen und für den vorgegebenen Lastraum einspielen.

### 3.8 Kontrolle des Materialschädigungsfaktors

Das Phänomen der Schädigung hängt bei dem in dieser Arbeit benutzten Modell von der plastischen Dehnung  $\varepsilon^p$  ab. Die Entwicklung des Schädigungsfaktors  $D$  mit der Zeit muß demnach auch durch eine Begrenzung mit der äquivalenten plastischen Dehnung  $p$  (Gleichung (3.9)) eingeschränkt werden (HACHEMI & WEICHERT [54, 57]).

Die MELAN'sche Bedingung wird mit der Schädigung gekoppelt und darf zu keinem Zeitpunkt verletzt werden.

$$\mathcal{F} = \sigma_V^{\text{eff}} - \sigma_L = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D}{(1-D)^2}} - \sigma_L \leq 0. \tag{3.98}$$

Hierin sind  $\sigma_L$  die Grenzfließspannung,  $\sigma_V^{\text{eff}}$  die effektive Vergleichsspannung und  $\sigma_{ij}^D$  die Komponenten des Spannungsdeviators.

Mit Hilfe der assoziierten Fließregel läßt sich die plastische Dehnrates  $\dot{\epsilon}^p$  bestimmen:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \frac{\sigma_{ij}^{D,\text{eff}}}{\sigma_V^{\text{eff}}} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \dot{\lambda} = 0 & \text{falls} & \mathcal{F} < 0 \\ \dot{\lambda} = 0 & \text{falls} & \mathcal{F} = 0 \wedge \dot{\mathcal{F}} < 0 \\ \dot{\lambda} \geq 0 & \text{falls} & \mathcal{F} = \dot{\mathcal{F}} = 0. \end{cases} \quad (3.99)$$

Dies wird in die Bestimmungsgleichung für die äquivalente plastische Dehnrates eingesetzt, die man aus Gleichung (3.9) erhält:

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D}. \quad (3.100)$$

Für das Produkt aus Spannung  $\sigma$  und plastischer Dehnrates  $\dot{\epsilon}^p$  ergibt sich mit der Definition des Spannungsdeviators (2.9):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p &= \left( \sigma_{ij}^D + \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \frac{3}{2} \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \frac{\sigma_{ij}^{D,\text{eff}}}{\sigma_V^{\text{eff}}} \\ &= \frac{3}{2} \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \frac{\sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D}{\sigma_V} \\ &= \sigma_V \dot{p} \end{aligned} \quad (3.101)$$

wobei

$$\sigma_V \dot{p} = \begin{cases} 0 & \text{falls} & \sigma_V < (1-D) \sigma_L \\ (1-D) \sigma_L \dot{p} & \text{falls} & \sigma_V = (1-D) \sigma_L. \end{cases} \quad (3.102)$$

Falls die Fließfläche den Ursprung des Koordinatensystems enthält und das Material zum Beginn des Belastungsprozesses ungeschädigt ist, läßt sich die Gleichung (3.101) eingrenzen.

$$(1-D_c) \sigma_L \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p} \leq \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \leq \sigma_L \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p}. \quad (3.103)$$

Für ursprünglich ungeschädigtes Material gilt nach DOROSZ [32] und KÖNIG [85]:

$$\sqrt{\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p} \leq \int_{t=0}^{t=T} \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} dt \quad (3.104)$$

$$p \leq \int_{t=0}^{t=T} \dot{p} dt. \quad (3.105)$$

Hiermit läßt sich nun die äquivalente plastische Dehnung  $p$  lokal begrenzen:

$$p \leq \frac{1}{(1 - D_c) \sigma_L} \int_{t=0}^{t=T} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p dt. \quad (3.106)$$

Im Falle des Einspielens mit einem Sicherheitsfaktor  $\alpha > 1$  läßt sich nach Gleichung (2.28) die gesamte dissipierte Energie begrenzen und man erhält folgende Ungleichung für die äquivalente plastische Dehnung  $p$ :

$$p \leq \frac{1}{V} \frac{1}{(1 - D_c) \sigma_L} \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{(V)} \frac{1}{2} \bar{\rho}_{ij} L_{ijkl}^{(-1)} \bar{\rho}_{kl} dV, \quad (3.107)$$

wobei  $V$  ein beliebig kleiner Anteil des Volumens der betrachteten Struktur sein kann.

Nun läßt sich mit Gleichung (3.5) eine obere Grenze für den duktilen Materialschädigungsfaktor, und zwar für jedes beliebig kleine Volumenteil der gesamten Struktur, angeben:

$$D_{\max} = \frac{D_c}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \left\langle \left[ \frac{R_\sigma}{V} \frac{1}{(1 - D_c) \sigma_L} \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{(V)} \frac{1}{2} \bar{\rho}_{ij} L_{ijkl}^{(-1)} \bar{\rho}_{kl} dV, \right] - \varepsilon_D \right\rangle. \quad (3.108)$$

Für die Triaxialitätsfunktion  $R_\sigma$  wird je nach verwendetem Schädigungsmodell die Gleichung (3.7) bzw. (3.8) eingesetzt.

## 4 Finite-Elemente-Diskretisierung

Um das im vorangegangenen Kapitel 3 vorgestellte statische Einspieltheorem auf Strukturen der Kontinuumsmechanik numerisch anwenden zu können, wird im folgenden eine Finite-Elemente-Diskretisierung durchgeführt.

Damit ein Sicherheitsfaktor  $\alpha$  bei einer Einspielanalyse bestimmt werden kann, müssen die nachfolgenden drei Bedingungen erfüllt sein.

1. Die elastischen Spannungen  $\tilde{\sigma}^e(\mathbf{y}, t)$  müssen exakt bestimmt werden.
2. Das zeitunabhängige Eigenspannungsfeld  $\bar{\rho}(\mathbf{y})$  muß die Gleichgewichts- und Randbedingungen in allen Punkten  $\mathbf{y} \in V$  und  $\mathbf{y} \in S_F$  erfüllen (Gleichung (2.11)).
3. Die Einspielbedingung darf in keinem Punkt  $\mathbf{y} \in V$  verletzt werden (z.B. Gleichung (2.12)).

Es ist schwierig, alle Bedingungen gleichzeitig zu erfüllen. Einige Autoren (BELYTSCHKO [5], GROSS-WEEGE & WEICHERT [171]) versuchten durch die Verwendung Finiter Elemente mit Spannungsansätzen (AIRY'sche Spannungsfunktionen (z.B. FRAEIJIS DE VEUBEKE & ZIENKIEWICZ [43])), die gesuchten Spannungen exakt zu bestimmen. Diese Methode wird hier nicht weiter verfolgt, da es schwierig ist, geeignete Finite Elemente zu definieren. Die meisten existierenden Finite-Elemente-Programme benutzen Algorithmen, die auf Verschiebungsansätzen beruhen. Im folgenden wird daher auch eine auf einem Verschiebungsansatz beruhende Finite-Elemente-Diskretisierung vorgenommen. Die elastischen Spannungen  $\tilde{\sigma}^e(\mathbf{y}, t)$  in den Integrationspunkten entsprechen daher auch nur näherungsweise den exakten Spannungen. Ebenso werden die Eigenspannungen  $\bar{\rho}(\mathbf{y})$  nur in den Integrationspunkten betrachtet, genauso wie die Einspielbedingungen nur in diesen Punkten überprüft werden. Die numerischen Sicherheitsfaktoren  $\alpha$  können daher auch nur einen Näherungswert des exakten Einspielfaktors liefern. Bei einer hinreichend feinen Vernetzung der zu betrachtenden Struktur kann allerdings davon ausgegangen werden, daß der berechnete Sicherheitsfaktor  $\alpha$  dem exakten recht nahe kommt.

Im folgenden wird die Diskretisierung der zu betrachtenden Strukturen stets mittels isoparametrischer Finiter Elemente durchgeführt. Die Gleichungen sind so angegeben, daß sie für den räumlichen Spannungszustand gültig sind. Eine Rückführung auf ebene Spannungs- bzw. Dehnungszustände ist dann leicht möglich.

## 4.1 Definitionen

In den nachfolgenden Gleichungen werden Laufbereichsgrenzen für Summationen bzw. für die Dimensionen von Vektoren und Matrizen angegeben, die von der gewählten Anzahl der Finiten Elemente und deren Knoten abhängig sind. Die einzelnen Größen sind in der Tabelle 4.1 zusammengefaßt.

Größe	Beschreibung
$NE$	Anzahl aller Finiten Elemente
$NG$	Anzahl aller Integrationspunkte
$NGE$	Anzahl der Integrationspunkte eines Finiten Elementes
$NK$	Anzahl aller Knoten
$NKE$	Anzahl der Knoten eines Finiten Elementes
$NSK$	Dimension des Spannungsvektors ( $NSK = 3$ (2-D), $NSK = 6$ (3-D))

Tabelle 4.1: Laufbereichsgrenzen

Die zweistufigen Spannungs- und Dehnungstensoren werden nachfolgend wie Vektoren behandelt. Zur Kennzeichnung von Vektoren werden geschweifte Klammern  $\{ \}$  verwendet. Die 6 voneinander verschiedenen Komponenten der Tensoren werden dann in einen Spaltenvektor geschrieben:

$$\{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e\} = \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_x^e \\ \tilde{\sigma}_y^e \\ \tilde{\sigma}_z^e \\ \tilde{\sigma}_{xy}^e \\ \tilde{\sigma}_{yz}^e \\ \tilde{\sigma}_{xz}^e \end{Bmatrix}, \quad \{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e\} = \begin{Bmatrix} \tilde{\varepsilon}_x^e \\ \tilde{\varepsilon}_y^e \\ \tilde{\varepsilon}_z^e \\ \tilde{\varepsilon}_{xy}^e \\ \tilde{\varepsilon}_{yz}^e \\ \tilde{\varepsilon}_{xz}^e \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{\boldsymbol{\rho}}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\rho}_x \\ \bar{\rho}_y \\ \bar{\rho}_z \\ \bar{\rho}_{xy} \\ \bar{\rho}_{yz} \\ \bar{\rho}_{xz} \end{Bmatrix}. \quad (4.1)$$

Alle äußeren Kräfte und Verschiebungen, die in den Knoten der Finiten Elemente wirken, werden ebenfalls in einem Spaltenvektor gesammelt.

$$\{\mathbf{F}_K\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \\ \vdots \\ F_{NKx} \\ F_{NKy} \\ F_{NKz} \end{Bmatrix}, \quad \{\tilde{\mathbf{u}}_K^e\} = \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{1x}^e \\ \tilde{u}_{1y}^e \\ \tilde{u}_{1z}^e \\ \vdots \\ \tilde{u}_{NKx}^e \\ \tilde{u}_{NKy}^e \\ \tilde{u}_{NKz}^e \end{Bmatrix}. \quad (4.2)$$

Die 81 Komponenten des vierstufigen Elastizitätstensors  $\mathbf{L}$  lassen sich durch Symmetriebetrachtungen auf 21 voneinander unabhängige Größen reduzieren. Im Falle des isotropen

Materialverhaltens verkleinert sich diese Zahl auf 2 unabhängige Größen (Querkontraktionszahl  $\nu$  und Elastizitätsmodul  $E$ ). Der Tensor läßt sich jetzt auch als eine  $6 \times 6$  – Matrix darstellen. Nachfolgend werden alle Matrizen durch eckige Klammern [ ] gekennzeichnet.

$$[\mathbf{L}] = \frac{E}{1 + \nu} \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} & \frac{\nu}{1 - 2\nu} & \frac{\nu}{1 - 2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1 - 2\nu} & \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} & \frac{\nu}{1 - 2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1 - 2\nu} & \frac{\nu}{1 - 2\nu} & \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

In den verschiedenen Fällen der Orthotropie oder Anisotropie ist diese Matrix mehr oder minder stark besetzt, wobei mehr als die beiden oben erwähnten unabhängigen Größen auftreten [15].

In dieser Arbeit werden ausschließlich krummlinige isoparametrische Dreiecks- und Tetraederelemente verwendet. Typisch für isoparametrische Elemente ist, daß für die Koordinatentransformation von den Einheitselementen zu den verzerrten Elementen und für die Bestimmung der Verschiebungen innerhalb eines Finiten Elementes die Anzahl der betrachteten Knotenpunkte übereinstimmt. Darüber hinaus sind die Funktionen für die Koordinatentransformation („mapping functions“) und die Formfunktionen zur Bestimmung der Verschiebungen („shape functions“) gleich. Für jedes Finite Element läßt sich ganz allgemein eine Matrix  $[\mathbf{N}(\mathbf{y})]$  mit den Formfunktionen  $N_i(\mathbf{y})$  aufstellen:

$$[\mathbf{N}(\mathbf{y})] = \begin{bmatrix} N_1(\mathbf{y}) & 0 & 0 & \dots & N_{NKE}(\mathbf{y}) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(\mathbf{y}) & 0 & \dots & 0 & N_{NKE}(\mathbf{y}) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(\mathbf{y}) & \dots & 0 & 0 & N_{NKE}(\mathbf{y}) \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Ebenso läßt sich eine Matrix  $[\mathbf{B}(\mathbf{y})]$  mit den partiellen Ableitungen der Formfunktio-

nen  $N_i(\mathbf{y})$  für jedes Finite Element formulieren:

$$[\mathbf{B}(\mathbf{y})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\mathbf{y})}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1(\mathbf{y})}{\partial y} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1(\mathbf{y})}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_{NKE}(\mathbf{y})}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1(\mathbf{y})}{\partial y} & \frac{\partial N_1(\mathbf{y})}{\partial x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1(\mathbf{y})}{\partial z} & \frac{\partial N_1(\mathbf{y})}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{NKE}(\mathbf{y})}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1(\mathbf{y})}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1(\mathbf{y})}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{NKE}(\mathbf{y})}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Die Ableitungen der Formfunktionen  $N_i(\mathbf{y})$  und einige andere Größen werden für ein Einheitselement ermittelt und mit Hilfe einer Transformationsmatrix auf das verzerrte Finite Element übertragen. Jeder geometrische Ort in diesem Einheitselement wird dabei mit einem Ortsvektor  $\boldsymbol{\xi}$  ( $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ) beschrieben. Um aus den am Einheitselement ermittelten Größen die Werte für das tatsächlichen Element mit dem Ortsvektor  $\mathbf{y}$  ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) zu erhalten, wird die JACOBI'sche Matrix zur Transformation benötigt. Die Größen  $x_i^j$ ,  $y_i^j$  und  $z_i^j$  sind dabei die Komponenten des Ortsvektors  $\mathbf{y}$  in der aktuellen Konfiguration für den  $i$ -ten Knoten des  $j$ -ten Finiten Elementes.

$$[J_j(\boldsymbol{\xi})] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{NKE} \frac{\partial N_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi} x_i^j & \sum_{i=1}^{NKE} \frac{\partial N_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi} y_i^j & \sum_{i=1}^{NKE} \frac{\partial N_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi} z_i^j \\ \sum_{i=1}^{NKE} \frac{\partial N_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial \eta} x_i^j & \sum_{i=1}^{NKE} \frac{\partial N_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial \eta} y_i^j & \sum_{i=1}^{NKE} \frac{\partial N_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial \eta} z_i^j \\ \sum_{i=1}^{NKE} \frac{\partial N_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial \zeta} x_i^j & \sum_{i=1}^{NKE} \frac{\partial N_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial \zeta} y_i^j & \sum_{i=1}^{NKE} \frac{\partial N_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial \zeta} z_i^j \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Für ein Volumenelement  $dV$  gilt weiterhin:

$$dV = dx \, dy \, dz = \det[J_j(\boldsymbol{\xi})] \, d\xi \, d\eta \, d\zeta. \quad (4.7)$$

Die Ableitungen der Formfunktionen  $N_i(\mathbf{y})$  können folgendermaßen bestimmt werden:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i(\mathbf{y})}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i(\mathbf{y})}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i(\mathbf{y})}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J_j(\boldsymbol{\xi})]^{(-1)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}. \quad (4.8)$$

$\delta\tilde{\mathbf{u}}^e$  möge ein virtuelles und kinematisch zulässiges Verschiebungsfeld sein. Es läßt sich nun diskretisieren:

$$\{\delta\tilde{\mathbf{u}}^e(\mathbf{y})\} = [\mathbf{N}(\mathbf{y})] \{\delta\tilde{\mathbf{u}}_K^e\}. \quad (4.9)$$

Das zugehörige virtuelle Dehnungsfeld läßt sich mit Hilfe des symmetrischen linearisierten Dehnungstensors und dem virtuellen Verschiebungsfeld  $\delta\tilde{\mathbf{u}}^e$  darstellen:

$$\delta\tilde{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2}(\delta\tilde{u}_{i,j}^e + \delta\tilde{u}_{j,i}^e), \quad (4.10)$$

$$\{\delta\tilde{\epsilon}^e(\mathbf{y})\} = [\mathbf{B}(\mathbf{y})] \{\delta\tilde{\mathbf{u}}_K^e\}. \quad (4.11)$$

Ähnlich lassen sich die Dehnungen  $\tilde{\epsilon}^e$  und die Spannungen  $\tilde{\sigma}^e$  ausdrücken:

$$\{\tilde{\epsilon}^e(\mathbf{y})\} = [\mathbf{B}(\mathbf{y})] \{\tilde{\mathbf{u}}_K^e\}, \quad (4.12)$$

$$\{\tilde{\sigma}^e(\mathbf{y})\} = [\mathbf{L}] \{\tilde{\epsilon}^e(\mathbf{y})\} = [\mathbf{L}][\mathbf{B}(\mathbf{y})] \{\tilde{\mathbf{u}}_K^e\}. \quad (4.13)$$

## 4.2 Diskretisierung des elastischen Problems

Nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit muß die virtuelle Formänderungsarbeit  $\delta U_\epsilon$  gleich der virtuellen Arbeit der äußeren Kräfte  $\delta W^{(a)}$  sein.

$$\delta U_\epsilon = \delta W^{(a)}, \quad (4.14)$$

$$\frac{1}{V} \int_{(V)} \tilde{\sigma}_{ij}^e \delta\tilde{\epsilon}_{ij}^e dV = \Sigma_{ij} \delta\Xi_{ij}. \quad (4.15)$$

Hierin ist  $\Sigma$  der makroskopische Spannungstensor und  $\delta\Xi$  der virtuelle makroskopische Dehnungstensor. Folgt man der allgemein bekannten Vorgehensweise zur Diskretisierung mittels Finiten Elemente (z.B. BATHE [3], BETTEN [12, 13], DHATT ET AL. [31], ZIENKIEWICZ [183]), dann läßt sich die linke Seite der Gleichung (4.15) unter Nutzung der Gleichungen (4.11) und (4.13) wie folgt gestalten:

$$\begin{aligned} \int_{(V)} \{\delta\tilde{\epsilon}^e(\mathbf{y})\}^t \{\tilde{\sigma}^e\} dV &= \{\delta\tilde{\mathbf{u}}_K^e\}^t \int_{(V)} [\mathbf{B}(\mathbf{y})]^t [\mathbf{L}] [\mathbf{B}(\mathbf{y})] dV \{\tilde{\mathbf{u}}_K^e\} \\ &= \{\delta\tilde{\mathbf{u}}_K^e\}^t \left[ \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NGE} w_i \det[J_j(\boldsymbol{\xi}_i)] [\mathbf{B}(\mathbf{y}_i^j)]^t [\mathbf{L}] [\mathbf{B}(\mathbf{y}_i^j)] \right] \{\tilde{\mathbf{u}}_K^e\} \\ &= \{\delta\tilde{\mathbf{u}}_K^e\}^t [\mathbf{K}^*] \{\tilde{\mathbf{u}}_K^e\}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Für die rechte Seite von Gleichung (4.15) ergibt sich:

$$\{\boldsymbol{\Sigma}\}^t \{\delta\boldsymbol{\Xi}\} = \frac{1}{V} \{\delta\tilde{\mathbf{u}}_K^e\}^t \{\mathbf{F}_K\}. \quad (4.17)$$

Setzt man nun die Gleichungen (4.16) und (4.17) in Gleichung (4.15) ein und führt die Variation der virtuellen Knotenverschiebungen  $\{\delta\tilde{\mathbf{u}}_K^e\}$  unter Beachtung der kinematischen Randbedingungen durch, dann erhält man ein lineares Gleichungssystem, mit dem die Verschiebungen der Knotenpunkte der Finiten Elemente ermittelt werden können:

$$[\mathbf{K}] \{\tilde{\mathbf{u}}_K^e\} = \{\mathbf{F}_K\}. \quad (4.18)$$

Die elastischen Spannungen lassen sich nun mit Hilfe der Gleichung (4.13) und der Elastizitätsmatrix  $[\mathbf{L}]$  in den Integrationspunkten  $\mathbf{y}_i^j$  bestimmen:

$$\{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{y}_i^j)\} = [\mathbf{L}] \{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e(\mathbf{y}_i^j)\} = [\mathbf{L}] [\mathbf{B}(\mathbf{y}_i^j)] \{\tilde{\mathbf{u}}_K^e\}. \quad (4.19)$$

Treten neben den mechanischen Lasten zusätzlich noch thermische Lasten auf, dann werden diese durch äquivalente thermische Knotenlasten  $\{\mathbf{F}^\vartheta\}$  berücksichtigt.

$$\{\mathbf{F}^\vartheta\} = \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NGE} w_i \det[J_j(\boldsymbol{\xi}_i)] [\mathbf{B}(\mathbf{y}_i^j)]^t \{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\vartheta(\mathbf{y}_i^j)\}. \quad (4.20)$$

Die aus den thermischen Lasten resultierenden thermischen Spannungen  $\{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\vartheta(\mathbf{y}_i^j)\}$  werden wie folgt bestimmt:

$$\{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\vartheta(\mathbf{y}_i^j)\} = [\mathbf{L}] \{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^\vartheta(\mathbf{y}_i^j)\} = [\mathbf{L}] \{\alpha_\vartheta \cdot \Delta\vartheta(\mathbf{y}_i^j)\}. \quad (4.21)$$

Nun lassen sich die Knotenverschiebungen aufgrund mechanischer und thermischer Lasten analog zu Gleichung (4.18) bestimmen:

$$[\mathbf{K}] \{\tilde{\mathbf{u}}_K^e\} = \{\mathbf{F}_K\} + \{\mathbf{F}^\vartheta\}. \quad (4.22)$$

Die elastischen Spannungen erhält man dann zu:

$$\{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{y}_i^j)\} = [\mathbf{L}] \{[\mathbf{B}(\mathbf{y}_i^j)] \{\tilde{\mathbf{u}}_K^e\} - \{\alpha_\vartheta \cdot \Delta\vartheta(\mathbf{y}_i^j)\}\}. \quad (4.23)$$

### 4.3 Diskretisierung der zeitunabhängigen Eigenspannungen

Das zeitunabhängige Eigenspannungsfeld  $\bar{\rho}$  muß ebenfalls dem Prinzip der virtuellen Arbeit genügen. Da bereits die äußeren Kräfte mit dem Spannungsfeld  $\tilde{\sigma}^e$  im Gleichgewicht stehen, ist die linke Seite der nachfolgenden Gleichung gleich Null (z.B. [52, 181]).

$$\int_{(V)} \bar{\rho}_{ij} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij}^e dV = 0. \quad (4.24)$$

Die Integration wird unter Verwendung von (4.11) und der bekannten GAUSS-LEGENDRE-Technik durchgeführt.

$$\begin{aligned} \int_{(V)} \{\delta \tilde{\varepsilon}^e(\mathbf{y})\}^t \{\bar{\rho}(\mathbf{y})\} dV &= \{\delta \tilde{\mathbf{u}}_K^e\}^t \int_{(V)} [\mathbf{B}(\mathbf{y})]^t \{\bar{\rho}(\mathbf{y})\} dV \\ &= \{\delta \tilde{\mathbf{u}}_K^e\}^t \left\{ \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NGE} w_i \det[J_j(\boldsymbol{\xi}_i)] [\mathbf{B}(\mathbf{y}_i^j)]^t \{\bar{\rho}(\mathbf{y}_i^j)\} \right\}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Sortiert man die rechte Seite dieser Gleichung (4.25) um, so läßt sich die Doppelsummation auch als ein Produkt aus einer Matrix  $[\mathbf{C}^*]$  und einem Vektor  $\{\bar{\rho}\}$  aus den Eigenspannungen in den Integrationspunkten auffassen:

$$\left\{ \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NGE} w_i \det[J_j(\boldsymbol{\xi}_i)] [\mathbf{B}(\mathbf{y}_i^j)]^t \{\bar{\rho}(\mathbf{y}_i^j)\} \right\} = [\mathbf{C}^*] \{\bar{\rho}\}. \quad (4.26)$$

Die Matrix  $[\mathbf{C}^*]$  ist hierbei konstant und nur von der gewählten Geometrie abhängig. Sie hat in der Regel im Gegensatz zur Steifigkeitsmatrix  $[\mathbf{K}]$  der Gleichung (4.18) zur Bestimmung der elastischen Lösung mehr Zeilen als Spalten.

Nach Gleichung (4.24) muß die virtuelle Arbeit der zeitunabhängigen Eigenspannungen  $\bar{\rho}$  gleich Null sein. Setzt man nun die Gleichungen (4.25) und (4.26) in Gleichung (4.24) ein und führt die Variation der virtuellen Knotenverschiebungen unter Beachtung der kinematischen Randbedingungen durch, so erhält man schließlich ein System linearer Gleichungen mit

$$[\mathbf{C}] \{\bar{\rho}\} = \{\mathbf{0}\}. \quad (4.27)$$

Die kinematischen Randbedingungen werden dadurch berücksichtigt, daß die Zeilen in der Matrix  $[\mathbf{C}^*]$  gestrichen werden, die nach Gleichung (4.25) mit einer virtuellen Verschiebung gleich Null multipliziert werden müßten.

Da die Matrix  $[\mathbf{C}]$  mehr Zeilen als Spalten besitzt, kann das Gleichungssystem (4.27) nicht dazu genutzt werden, die zeitunabhängigen Eigenspannungen  $\{\bar{\boldsymbol{\rho}}\}$  in den Integrationspunkten direkt zu ermitteln. Es handelt sich um ein unbestimmtes Gleichungssystem, das Nebenbedingungen darstellt, die bei der Bestimmung der Eigenspannungen stets erfüllt sein müssen.

## 4.4 Numerische Integration

Eine beliebige Feldfunktion  $\mathbf{f}(\mathbf{y})$  kann ebenfalls mit der GAUSS-LEGENDRE-Technik über einem Volumen  $V$  integriert werden. Die Funktion  $\mathbf{f}(\mathbf{y})$  kann Tensor, Vektor oder Skalar sein. Für den Fall des zweistufigen Tensors ergibt sich:

$$F_{kl} = \frac{1}{V} \int_{(V)} f_{kl}(\mathbf{y}) dV = \frac{\sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NGE} w_i \det[J_j(\boldsymbol{\xi}_i)] f_{kl}(\mathbf{y}_i^j)}{\sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NGE} w_i \det[J_j(\boldsymbol{\xi}_i)]}. \quad (4.28)$$

## 4.5 Das diskretisierte Einspielproblem

Das allgemeine Einspieltheorem des Kapitels 3 für Verbundwerkstoffe mit periodischer Mikrostruktur läßt sich jetzt mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente neu formulieren. Der kleinere der beiden Faktoren für Einspielen  $\alpha_{ES}$  bzw. für Nicht-Versagen aufgrund alternierender Plastizität  $\alpha_{AP}$  bestimmt dabei den Einspielfaktor  $\alpha_{SD}$ .

$$\alpha_{SD} = \min(\alpha_{ES}, \alpha_{AP}). \quad (4.29)$$

Die Bedingungen für Einspielen werden nur in den Integrationspunkten  $\mathbf{y}_i^j$  gemäß der Finiten-Elemente-Diskretisierung überprüft.

Für das Einspielen stellt sich das Ganze als nichtlineares Optimierungsproblem dar, in dem ein maximaler Sicherheitsfaktor  $\alpha$ , die Vektoren der zeitunabhängigen Eigenspannungen  $\{\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{y}_i^j)\}$  und Verfestigungsspannungen  $\{\bar{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{y}_i^j)\}$  sowie die Schädigungsfaktoren  $D(\mathbf{y}_i^j, t)$  gefunden werden müssen.

$$\alpha_{ES} = \max_{\{\bar{\boldsymbol{\rho}}\}, \{\bar{\boldsymbol{\pi}}\}, D} \alpha. \quad (4.30)$$

Dabei müssen folgende Bedingungen eingehalten werden:

$$[\mathbf{C}]\{\bar{\boldsymbol{\rho}}\} = \{\mathbf{0}\}, \quad (4.31)$$

$$\mathcal{F}_I \left( \alpha \frac{\{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{y}_i^j, \vartheta, t)\}}{1 - D(\mathbf{y}_i^j, t)} + \frac{\{\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{y}_i^j)\}}{1 - D(\mathbf{y}_i^j, t)} - \frac{\{\bar{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{y}_i^j)\}}{1 - D(\mathbf{y}_i^j, t)}, \sigma_Y(\mathbf{y}_i^j, \vartheta) \right) < 0, \quad (4.32)$$

$$\mathcal{F}_L \left( \alpha \frac{\{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{y}_i^j, \vartheta, t)\}}{1 - D(\mathbf{y}_i^j, t)} + \frac{\{\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{y}_i^j)\}}{1 - D(\mathbf{y}_i^j, t)}, \sigma_L(\mathbf{y}_i^j, \vartheta) \right) < 0, \quad (4.33)$$

$$D(\mathbf{y}_i^j, t) - D_c < 0, \quad (4.34)$$

$$\text{für } i = 1 \dots NGE, j = 1 \dots NE \quad \wedge \quad \forall \mathbf{P}(t) \in \mathcal{L}.$$

Für die alternierende Plastizität muß ebenfalls ein Sicherheitsfaktor  $\alpha_{AP}$  gefunden werden, der für alle möglichen Lastkombinationen von  $\mathbf{P}(t_1)$  und  $\mathbf{P}(t_2)$  aus einem vorgegebenen Lastrraum  $\mathcal{L}$  die folgende Bedingung erfüllt (vgl. Kapitel 2.4):

$$\alpha_{AP} = \max \alpha, \quad (4.35)$$

$$\mathcal{F} \left( \pm \frac{1}{2} \alpha (\{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{y}_i^j, \vartheta, t_1)\} - \{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{y}_i^j, \vartheta, t_2)\}), \sigma_Y(\mathbf{y}_i^j, \vartheta) \right) < 0, \quad (4.36)$$

$$\text{für } i = 1 \dots NGE, j = 1 \dots NE \quad \wedge \quad \forall \mathbf{P}(t_1), \mathbf{P}(t_2) \in \mathcal{L}.$$

Der makroskopische Spannungsvektor  $\{\boldsymbol{\Sigma}^s\}$  ergibt sich mit Gleichung (4.28) dabei zu:

$$\{\boldsymbol{\Sigma}^s\} = \frac{1}{V} \int_{(V)} \alpha \{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e\} + \{\bar{\boldsymbol{\rho}}\} dV = \frac{\sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NGE} w_i \det[J_j(\boldsymbol{\xi}_i)] \{\alpha \{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{y}_i^j)\} + \{\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{y}_i^j)\}\}}{\sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NGE} w_i \det[J_j(\boldsymbol{\xi}_i)]}. \quad (4.37)$$

## 4.6 Diskretisierung des Lastraumes

Über den Lastrraum  $\mathcal{L}$  sind bis jetzt noch wenig Aussagen gemacht worden. In ihm sind alle möglichen Lastkombinationen enthalten, die auf eine Struktur wirken können. Hierzu zählen Volumenkräfte, Oberflächenkräfte, vorgegebene Verschiebungen und Temperaturlasten sowie Kombinationen aus diesen Lasten. Die Anzahl dieser Lastkombinationen kann beliebig groß sein. Dennoch müssen sie alle die Einspielbedingungen erfüllen, damit die betrachtete Struktur nicht versagt. Oftmals ist es jedoch möglich, den gesamten Lastrraum

durch die Angabe von wenigen, diesen Lastraum begrenzenden Maximal- und Minimallasten zu beschreiben. Solange der Ort der Lastaufbringung unverändert bleibt, führt diese Beschreibung des Lastraumes auf eine wesentliche Vereinfachung des zu untersuchenden Problems. In dieser Arbeit wird sich daher auch nur auf diese Art von Lasträume beschränkt.

In der Abbildung 4.1 ist ein möglicher Lastraum  $\mathcal{L}$  für die beiden Lasten  $\mathbf{P}_1$  und  $\mathbf{P}_2$  dargestellt ( $n = 2$ ).

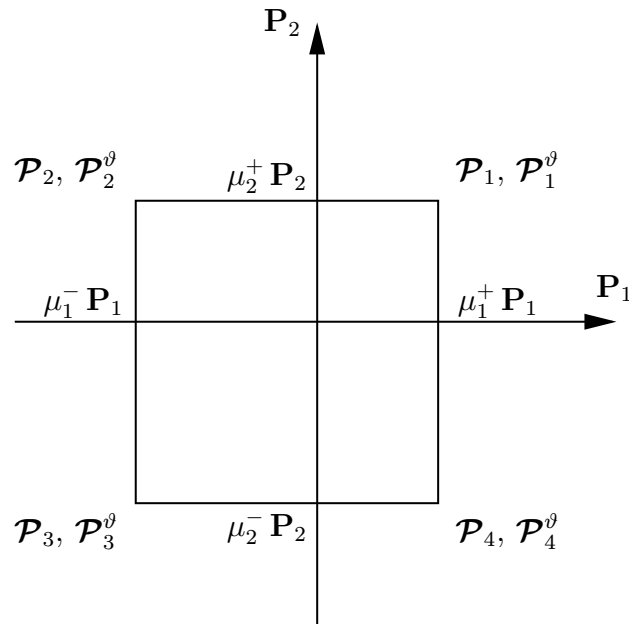


Abbildung 4.1: Lastraum  $\mathcal{L}$  für zwei Lasten und vier Lastecken

Der Lastraum  $\mathcal{L}$  läßt sich dann für  $n$  voneinander unabhängige Einheitslasten  $\mathbf{P}_j$  als ein  $n$ -dimensionales konvexes Polyeder darstellen

$$\mathcal{L} = \left\{ \mathbf{P}(t) \mid \mathbf{P}(t) = \sum_{j=1}^n \mu_j \mathbf{P}_j, \mu_j \in [\mu_j^-, \mu_j^+] \right\}. \quad (4.38)$$

$\mu_j$  sind hierbei skalare Multiplikatoren, die durch  $\mu_j^-$  nach unten und  $\mu_j^+$  nach oben begrenzt sind.

Der Lastraum besitzt allgemein  $m = 2^n$  Lastecken  $\mathbf{P}_j$  (einschließlich Temperaturlasten). Die zu diesen Ecken korrespondierenden reinen Temperaturlasten werden im folgenden mit  $\mathbf{P}_j^\theta$  bezeichnet. Diese Lastecken stellen die sogenannten Basislasten dar. Jeder Punkt  $\mathbf{P}(t)$  im Inneren des konvexen Polyeders läßt sich durch eine Konvex-Kombination der  $m$  Basislasten  $\mathbf{P}_j$  darstellen [23]. Es gilt also

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1 \dots m \quad (4.39)$$

mit

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1, \quad (4.40)$$

so daß

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \mathcal{P}_j. \quad (4.41)$$

Bei einem vorgegebenen  $\mathbf{P}(t) \in \mathcal{L}$  sind die Koeffizienten  $\lambda_j$  eindeutig bestimmt.

Im Rahmen der geometrisch linearisierten Theorie lassen sich sowohl die Lastecken  $\mathcal{P}_j$  zu einer Gesamtlast  $\mathbf{P}(t)$  superponieren, als auch die zu den Lastecken gehörenden elastischen Spannungen  $\tilde{\sigma}^e(\mathcal{P}_j)$ . Durch diese Superposition erhält man die elastischen Spannungen  $\tilde{\sigma}^e(\mathbf{P}(t))$  des Vergleichskörpers  $\tilde{\mathcal{B}}$  hervorgerufen durch die Last  $\mathbf{P}(t)$  aus dem Inneren des Lastraumes  $\mathcal{L}$ .

$$\tilde{\sigma}_{kl}^e(\mathbf{P}(t)) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \tilde{\sigma}_{kl}^e(\mathcal{P}_j). \quad (4.42)$$

Die Gleichung (4.32) müßte in allen Integrationspunkten und für alle Lasten  $\mathbf{P}(t)$  überprüft werden. Mit den Gleichungen (4.42) und (3.108) sowie wegen der Konvexität der Fließfunktion  $\mathcal{F}_I$  gilt allerdings:

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_I \left( \alpha \frac{\tilde{\sigma}^e(\mathbf{P}(t))}{1 - D(\mathbf{P}(t))} + \frac{\bar{\rho}}{1 - D(\mathbf{P}(t))} - \frac{\bar{\pi}}{1 - D(\mathbf{P}(t))}, \sigma_Y(\mathbf{P}^\vartheta(t)) \right) \\ & \leq \mathcal{F}_I \left( \alpha \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\tilde{\sigma}^e(\mathcal{P}_j)}{1 - D_{\max}(\mathcal{P}_j)} + \frac{\bar{\rho}}{1 - D_{\max}(\mathcal{P}_j)} - \frac{\bar{\pi}}{1 - D_{\max}(\mathcal{P}_j)}, \sigma_Y(\mathcal{P}_j^\vartheta) \right) \\ & \leq \mathcal{F}_I \left( \sum_{j=1}^m \lambda_j \left[ \alpha \frac{\tilde{\sigma}^e(\mathcal{P}_j)}{1 - D_{\max}(\mathcal{P}_j)} + \frac{\bar{\rho}^*}{1 - D_{\max}(\mathcal{P}_j)} - \frac{\bar{\pi}^*}{1 - D_{\max}(\mathcal{P}_j)} \right], \sigma_Y(\mathcal{P}_j^\vartheta) \right) \\ & \leq \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \mathcal{F}_I \left( \alpha \frac{\tilde{\sigma}^e(\mathcal{P}_j)}{1 - D_{\max}(\mathcal{P}_j)} + \frac{\bar{\rho}^*}{1 - D_{\max}(\mathcal{P}_j)} - \frac{\bar{\pi}^*}{1 - D_{\max}(\mathcal{P}_j)}, \sigma_Y(\mathcal{P}_j^\vartheta) \right) \\ & \leq \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot 0 = 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Analoges gilt für die zweite Einspielbedingung (4.33):

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_L \left( \alpha \frac{\tilde{\sigma}^e(\mathbf{P}(t))}{1 - D(\mathbf{P}(t))} + \frac{\bar{\rho}}{1 - D(\mathbf{P}(t))}, \sigma_L(\mathbf{P}^\vartheta(t)) \right) \\ & \leq \mathcal{F}_L \left( \sum_{j=1}^m \lambda_j \left[ \alpha \frac{\tilde{\sigma}^e(\mathcal{P}_j)}{1 - D_{\max}(\mathcal{P}_j)} + \frac{\bar{\rho}^*}{1 - D_{\max}(\mathcal{P}_j)} \right], \sigma_L(\mathcal{P}_j^\vartheta) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \mathcal{F}_L \left( \alpha \frac{\tilde{\sigma}^e(\mathcal{P}_j)}{1 - D_{\max}(\mathcal{P}_j)} + \frac{\bar{\rho}^*}{1 - D_{\max}(\mathcal{P}_j)}, \sigma_L(\mathcal{P}_j^\vartheta) \right) \\
&\leq \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot 0 = 0.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Weiterhin muß der Schädigungsfaktor  $D$  mit der Gleichung (4.34) auch nur in den Lastecken  $\mathcal{P}_j$  des Lastraumes überprüft werden, da es sich bei dem zu untersuchenden Lastraum um ein konvexes Polyeder handelt und der Schädigungsfaktor in einer der Lastecken maximal wird. Es reicht daher aus, die Gleichungen (4.32) bis (4.34) nur für die Ecklasten  $\mathcal{P}_j$  zu überprüfen. Alle anderen Lasten  $\mathbf{P}(t)$  innerhalb des Lastraumes  $\mathcal{L}$  müssen nach dem zuvor Gesagten bzw. nach den Gleichungen (4.43) und (4.44) die Einspielbedingung ebenfalls erfüllen [86, 181].

Gleiches gilt für das Einspielkriterium aufgrund alternierender Plastizität. Da die Differenzen der Spannungen in Gleichung (4.36) für paarweise verschiedene Lastecken  $\mathcal{P}_j$  am größten sind, müssen auch alle anderen Lastkombinationen innerhalb des Lastraumes  $\mathcal{L}$  die Einspielbedingung erfüllen. Es reicht daher aus, die Gleichung (4.36) nur für paarweise verschiedene Lastecken  $\mathcal{P}_j$  zu überprüfen.

### 4.6.1 Einspielanalyse

Die Analyse wird nach den vorangegangenen Ausführungen nur noch mit den Lastecken  $\mathcal{P}_j$  des Lastraumes  $\mathcal{L}$  durchgeführt. Man spricht von einer Einspielanalyse, falls ein Lastraum untersucht wird, der von mindestens zwei Lastecken aufgespannt wird. Die Einspielbedingungen werden für diese Lastecken überprüft. Liegt nur eine einzige Lastecke vor, dann spricht man von einer Traglastanalyse. Der zugehörige Spannungszustand stellt den maximal tragbaren Zustand dar. Die Gleichungen (4.30) bis (4.34) für Einspielen vereinfachen sich wie folgt:

$$\alpha_{\text{ES}} = \max_{\{\bar{\rho}\}, \{\bar{\pi}\}, D_{\max}} \alpha \tag{4.45}$$

mit

$$[\mathbf{C}]\{\bar{\rho}\} = \{\mathbf{0}\}, \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_I \left( \alpha \frac{\{\tilde{\sigma}^e\}(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_r)}{1 - D_{\max}(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_r)} + \frac{\{\bar{\rho}\}(\mathbf{y}_i^j)}{1 - D_{\max}(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_r)} \right. \\
\left. - \frac{\{\bar{\pi}\}(\mathbf{y}_i^j)}{1 - D_{\max}(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_r)}, \sigma_Y(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_r^\vartheta) \right) < 0,
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\mathcal{F}_L \left( \alpha \frac{\{\tilde{\sigma}^e\}(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_r)}{1 - D_{\max}(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_r)} + \frac{\{\bar{\rho}\}(\mathbf{y}_i^j)}{1 - D_{\max}(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_r)}, \sigma_L(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_r^\vartheta) \right) < 0, \quad (4.48)$$

$$D_{\max}(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_r) - D_c < 0, \quad (4.49)$$

für  $i = 1 \dots NGE$ ,  $j = 1 \dots NE$ ,  $r = 1 \dots 2^n = m$ .

Für den Fall des Nicht-Versagens aufgrund alternierender Plastizität muß ein Lastraum vorgegeben werden, der von mindestens zwei Lastecken begrenzt wird. Die Gleichungen (4.35) und (4.36) vereinfachen sich wie folgt:

$$\alpha_{AP} = \max \alpha, \quad (4.50)$$

$$\mathcal{F} \left( \pm \frac{1}{2} \alpha (\{\tilde{\sigma}^e(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_{r_1}^\vartheta)\} - \{\tilde{\sigma}^e(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_{r_2}^\vartheta)\}), \right. \\ \left. \min(\sigma_Y(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_{r_1}^\vartheta), \sigma_Y(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_{r_2}^\vartheta)) \right) < 0, \quad (4.51)$$

für  $i = 1 \dots NGE$ ,  $j = 1 \dots NE$ ,  $r_1, r_2 = 1 \dots 2^n = m$ ,  $r_1 \neq r_2$ .

Der Einspielfaktor  $\alpha_{SD}$  ergibt sich dann zu:

$$\alpha_{SD} = \min(\alpha_{ES}, \alpha_{AP}). \quad (4.52)$$

## 4.7 Das Optimierungsverfahren

Im Kapitel 4.6.1 wurde das Problem der Einspielanalyse als nichtlineares Optimierungsproblem formuliert. Die linearen und nichtlinearen Gleichungen (4.45) bis (4.49) müssen in ein Optimierungsverfahren eingebunden werden, das es erlaubt, auch größer dimensionierte Problemstellungen zu bearbeiten. Die Gleichungen müssen für jeden Integrationspunkt der zu untersuchenden Struktur und für jede Lastecke eines vorgegebenen Lastraumes  $\mathcal{L}$  so formuliert werden, daß das Optimierungsverfahren den größtmöglichen Sicherheitsfaktor  $\alpha_{ES}$  findet, wobei die Komponenten der Eigenspannungen  $\bar{\rho}$  und der Verfestigungsspannungen  $\bar{\pi}$  ebenfalls als unbekannte Größen in das Problem eingehen. Einen Überblick über die verschiedenen Algorithmen mit weiterführender Literatur findet man beispielsweise in [69]. Viele der existierenden nichtlinearen Optimierungsverfahren verwenden Algorithmen, die auf LAGRANGE'schen Multiplikatoren (z.B. [122]) bzw. sogenannten BFGS-Algorithmen (BROYDON FLETCHER GOLDFARB SHANNO, z.B. [113]) beruhen. Die meisten sind dabei allerdings für die Fülle an Optimierungsvariablen und Nebenbedingungen nur bedingt geeignet. Zum einen wird die Anwendbarkeit durch den

hohen Speicherbedarf und, teilweise dadurch bedingt, zum anderen durch die benötigte Rechenzeit stark eingeschränkt. Zudem sind diese Algorithmen auch nur auf enge Anwendungsbereiche beschränkt. Ein Lösungsalgorithmus, der für das vorliegende großdimensionierte Optimierungsproblem geeignet ist, findet sich in der mathematische Software LANCELOT [24] wieder, die auf einem augmentierten LAGRANGE'schen Verfahren beruht. In dem Algorithmus werden dabei automatisch die Ungleichungen (4.47) bis (4.49) in Gleichungen überführt. Das Maximierungsproblem (4.45) bis (4.49) wird dann dadurch gelöst, daß für eine sorgfältig konstruierte Sequenz von abschätzenden LAGRANGE'schen Multiplikatoren  $\lambda_i$ , Skalierungsfaktoren  $s_{ii}$  und einem „Penalty-Parameter“  $\eta$  angenäherte Maximierungsfaktoren für die „augmentierte LAGRANGE'sche Funktion“  $\Phi$  gefunden werden.

$$\Phi(x, \lambda, s, \eta) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i(x) + \frac{1}{2\eta} \sum_{i=1}^m s_{ii} b_i(x)^2, \quad (4.53)$$

mit

$$f(x) = \alpha, \quad (4.54)$$

$$b_p(x) = C_{pq} \bar{\rho}_q, \quad (4.55)$$

$$b_h(x) = D_{\max}(\mathbf{y}_j^k, \mathcal{P}_r) - D_c, \quad (4.56)$$

$$b_l(x) = \mathcal{F}_I \left( \alpha \frac{\{\tilde{\sigma}^e\}(\mathbf{y}_j^k, \mathcal{P}_r)}{1 - D_{\max}(\mathbf{y}_j^k, \mathcal{P}_r)} + \frac{\{\bar{\rho}\}(\mathbf{y}_j^k)}{1 - D_{\max}(\mathbf{y}_j^k, \mathcal{P}_r)} - \frac{\{\bar{\pi}\}(\mathbf{y}_j^k)}{1 - D_{\max}(\mathbf{y}_j^k, \mathcal{P}_r)}, \sigma_Y(\mathbf{y}_j^k, \mathcal{P}_r^\vartheta) \right), \quad (4.57)$$

$$b_o(x) = \mathcal{F}_L \left( \alpha \frac{\{\tilde{\sigma}^e\}(\mathbf{y}_j^k, \mathcal{P}_r)}{1 - D_{\max}(\mathbf{y}_j^k, \mathcal{P}_r)} + \frac{\{\bar{\rho}\}(\mathbf{y}_j^k)}{1 - D_{\max}(\mathbf{y}_j^k, \mathcal{P}_r)}, \sigma_L(\mathbf{y}_j^k, \mathcal{P}_r^\vartheta) \right), \quad (4.58)$$

$$\text{für } p = 1 \dots m_1, \quad q = 1 \dots NSK \cdot NG,$$

$$r = 1 \dots 2^n, \quad j = 1 \dots NGE, \quad k = 1 \dots NE,$$

$$h = m_1 + 1 \dots m_1 + 2^n \cdot NG,$$

$$l = m_1 + 2^n \cdot NG + 1 \dots m_1 + 2^{n+1} \cdot NG,$$

$$o = m_1 + 2^{n+1} \cdot NG + 1 \dots m_1 + 2^{n+2} \cdot NG.$$

Zum einen werden hier die Nebenbedingungen für  $\bar{\rho}$  (Gleichung (4.46)) mitberücksichtigt, zum anderen werden für jeden Integrationspunkt und für jede der  $n$  Lastecken  $\mathcal{P}_r$  zwei nichtlineare Nebenbedingungen aufgestellt. Insgesamt sind dies  $m = m_1 + 2^{n+1} \cdot NG$  lineare und nichtlineare Nebenbedingungen. Hierin stellt  $m_1$  die Anzahl der Freiheitsgrade

des Systems dar. Die Anzahl der Optimierungsvariablen  $x$ , das sind  $\alpha$  und die Komponenten von  $\{\bar{\rho}\}$ , ist hierbei  $1 + NSK \cdot NG$ . Die notwendige Bedingung erster Ordnung für einen geeigneten Punkt  $x^{(t)} = (\alpha^{(t)}, \{\bar{\rho}^{(t)}\})$  des Iterationsschrittes  $t$  zur Lösung des Problems (4.53) verlangt die Existenz LAGRANGE'scher Multiplikatoren  $\lambda^{(t)}$ , für die der projizierte Gradient der LAGRANGE'schen Funktion bei  $x^{(t)}$  und  $\lambda^{(t)}$  und für die die Nebenbedingungen (4.55) bis (4.58) für  $x^{(t)}$  verschwinden bzw. erfüllt sind. Startpunkt der Iteration ( $t = 0$ ) zur Lösung des Problems ist der elastische Grenzzustand. Für diesen Punkt entspricht der Sicherheitsfaktor  $\alpha$  dem elastischen Grenzfaktor. Die zeitunabhängigen Eigen- und Verfestigungsspannungen haben sich noch nicht ausgebildet, das heißt  $\{\bar{\rho}^{(t)}\} = \{\bar{\pi}^{(t)}\} = \{0\}$ . Die Konvergenz dieses Verfahrens wird mit der Norm des projizierten Gradienten und den Nebenbedingungen für  $x^{(t)}$  und  $\lambda^{(t)}$  überprüft. Die Optimierung wird beendet, falls

$$\|x^{(t)} - P [x^{(t)} - \nabla_x \Phi(x^{(t)}, \lambda^{(t)}, s^{(t)}, \eta^{(t)})]\| \leq \epsilon_l, \quad (4.59)$$

$$\|b(x^{(t)})\| \leq \epsilon_c. \quad (4.60)$$

Dabei sind  $\epsilon_l$  und  $\epsilon_c$  Toleranzgrenzen, während  $P$  den Projektionsoperator beschreibt. Eine detaillierte Beschreibung des Optimierungsverfahrens findet man in CONN ET AL. [24].

## 4.8 Ablauf einer Einspieluntersuchung

Entsprechend der vorliegenden Arbeit gliedert sich die Einspielanalyse in mehrere Abschnitte:

- Vorgabe von Geometrie und Lasten:

Die zu untersuchende Struktur und die Grenzen eines Lastraumes für die Einspieluntersuchung werden vorgegeben.

- Erstellen eines Finiten-Elemente-Modells:

Mit Hilfe eines geeigneten „Preprozessors“ (z.B. I-DEAS [152]) wird die zu untersuchende Struktur mit Finiten Elementen diskretisiert.

- Elastische Lösungen bestimmen:

Für jede Lastecke des vorgegebenen Lastraumes wird die elastische Lösung bestimmt. Diese Lösungen werden immer mit demselben Finite-Elemente-Modell in den Integrationspunkten bestimmt, wobei nur die Randbedingungen für jede Lastecke verändert werden.

- Einspielen:

Für die diskretisierte Struktur wird ein Gleichungssystem von Nebenbedingungen für die zeitunabhängigen Eigenspannungen aufgestellt (Gleichung (4.46)). Zusammen mit den MELAN'schen Bedingungen (4.47) und (4.48) in jedem Integrationspunkt und für jede Lastecke sowie der Begrenzung des Schädigungsfaktors (4.49) für jeden Integrationspunkt wird das Optimierungsproblem formuliert und mit einer geeigneten mathematischen Optimierungssoftware (z.B. LANCELOT [24]) gelöst. Als Ergebnis erhält man einen Sicherheitsfaktor  $\alpha_{ES}$  mit dem der vorgegebene Lastraum vergrößert werden kann, ohne daß der Bereich des Einspielens verlassen wird.

- Alternierende Plastizität:

Die elastischen Lösungen für jede Lastecke werden paarweise in die Gleichung (4.51) eingesetzt. Man erhält als Ergebnis eine Sicherheitsfaktor  $\alpha_{AP}$  gegenüber Versagen aufgrund alternierender Plastizität.

- Bestimmung des Einspielfaktors:

Der kleinere der beiden Sicherheitsfaktoren  $\alpha_{ES}$  und  $\alpha_{AP}$  bestimmt den globalen Einspielfaktor der Struktur unter dem vorgegebenen Lastraum.

In der Abbildung 4.2 ist der Ablauf der Einspieluntersuchung anhand eines Flußdiagramms dargestellt.

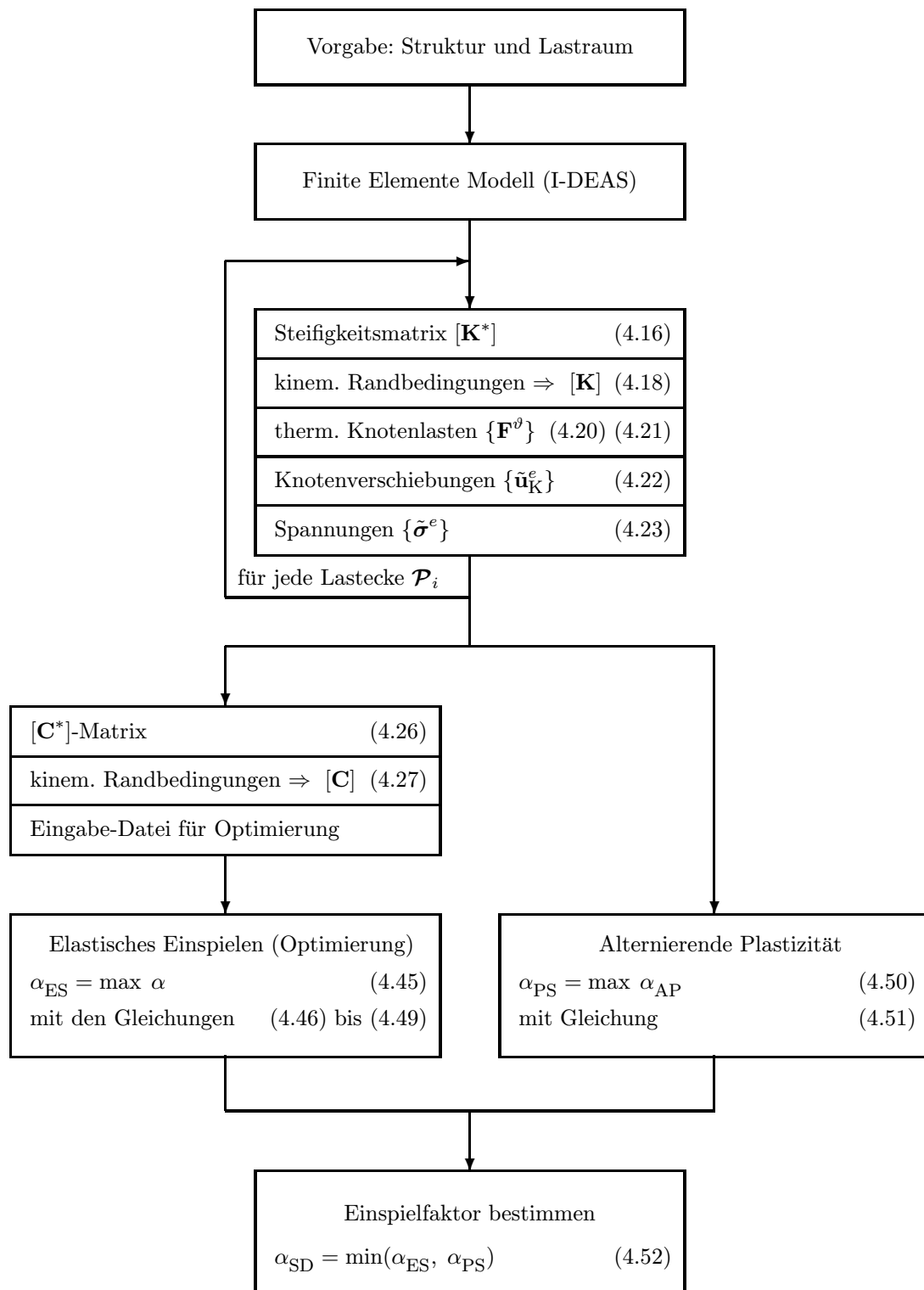


Abbildung 4.2: Ablauf einer Einspieluntersuchung

## 5 Validierung der vorgeschlagenen numerischen Methode

Im Kapitel 4 wurde ein numerisches Verfahren vorgestellt, mit dem eine Einspielanalyse durchgeführt werden kann. Im folgenden wird dieses Verfahren an einigen ausgewählten Beispielen angewandt und mit bekannten Lösungen verglichen.

### 5.1 Lochscheibe unter Zug-Druck-Belastung

Im folgenden wird eine quadratische Scheibe mit einem kreisrunden Loch unter zweiachsialer Zug-Druck-Belastung auf ihr Traglast- und Einspielverhalten hin numerisch untersucht. Die Effekte des Beulens werden bei der Druckbelastung ausgeschlossen.

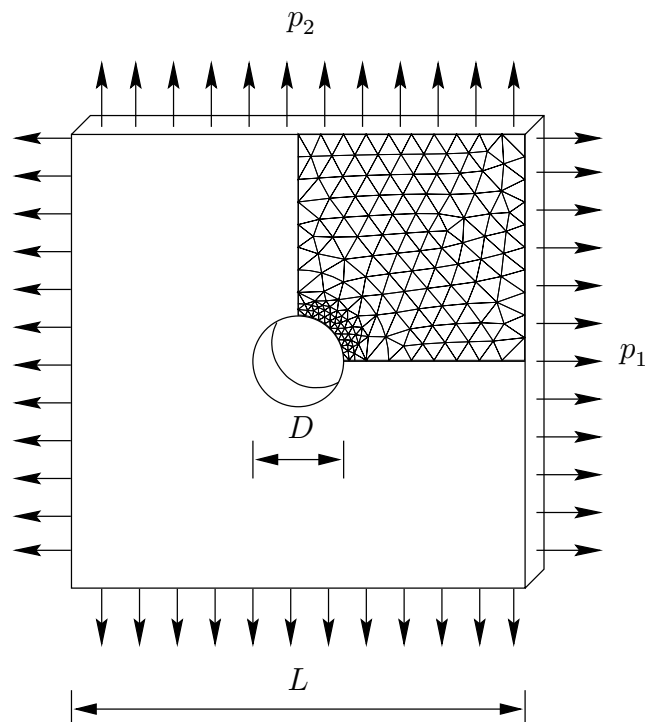


Abbildung 5.1: Lochscheibe (Geometrie, FE-Netz und Lasten)

Die Scheibe hat die Kantenlänge  $L$  und den Lochdurchmesser  $D$ . Das Verhältnis von Durchmesser des Lochs zur Kantenlänge beträgt  $D/L = 0.2$ . Die Dicke der Scheibe ist

konstant und wird als klein angenommen, so daß das Problem als ebener Spannungszustand behandelt werden kann. Geometrie, Finite-Elemente-Vernetzung und Lastverteilung sind in Abbildung 5.1 dargestellt. Aus Symmetriegründen wird dabei nur ein Viertel der Scheibe untersucht, das mit 296 isoparametrischen Dreieckselementen mit quadratischen Ansatzfunktionen und 643 Knoten diskretisiert wird.

Die Berechnungen werden für elastisch – ideal plastisches Materialverhalten mit folgenden Parametern für einen Stahl (St 50-2 [120]) durchgeführt:

Elastizitätsmodul $E$	Querkontraktion $\nu$	Fließspannung $\sigma_Y$
$210\,000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	0.3	$280 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Tabelle 5.1: Materialparameter der Lochscheibe

Hinsichtlich der Belastungen werden vier Fälle unterschieden:

1. Elastizitätsgrenze:

$p_1$  und  $p_2$  werden gleichmäßig vom unbelasteten Zustand erhöht, bis das Material der Lochscheibe an einer Stelle zu fließen beginnt:

$$p_1 = \alpha_e \mu p_1^*, \quad p_2 = \alpha_e \mu p_2^* \quad (5.1)$$

mit  $0 \leq \mu \leq 1$ .

Die Lasten  $p_1$  und  $p_2$  werden im selben Verhältnis zueinander, wie in Abbildung 5.2.a gezeigt, bis zum Erreichen der Elastizitätsgrenze (Lastecke  $\mathcal{P}_1$ ) erhöht. Mit Hilfe der Numerik wird ausschließlich die Lastecke  $\mathcal{P}_1$  überprüft.

2. Traglastgrenze:

$p_1$  und  $p_2$  steigen vom unbelasteten Zustand monoton und proportional zueinander bis zum Erreichen der Traglastgrenze an (Abbildung 5.2.a):

$$p_1 = \alpha_L \mu p_1^*, \quad p_2 = \alpha_L \mu p_2^* \quad (5.2)$$

mit  $0 \leq \mu \leq 1$ .

Bei der numerischen Analyse dieses Lastfalles wird ausschließlich die Lastecke  $\mathcal{P}_1$  mit Hilfe des statischen Einspieltheorems überprüft.

3. Einspielgrenze (1 Parameter):

$p_1$  und  $p_2$  können gleichzeitig mit demselben Proportionalitätsfaktor variieren. Die beiden Lasten dürfen dann, wie in Abbildung 5.2.b gezeigt, zwischen dem unbelasteten Zustand (Lastecke  $\mathcal{P}_1$ ) und einer Obergrenze (Lastecke  $\mathcal{P}_2$ ) variieren:

$$p_1 = \alpha_{SD_1} \mu p_1^*, \quad p_2 = \alpha_{SD_1} \mu p_2^* \quad (5.3)$$

mit  $0 \leq \mu \leq 1$ .

Bei dieser Belastung werden zwei MELAN'sche Bedingungen für die beiden Lastecken  $\mathcal{P}_1$  und  $\mathcal{P}_2$  mit Hilfe des statischen Einspieltheorems überprüft.

4. Einspielgrenze (2 Parameter):

$p_1$  und  $p_2$  variieren unabhängig voneinander. Sie dürfen den durch die Lastecken  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$  und  $\mathcal{P}_4$  aufgespannten Lastraum der Abbildung 5.2.c nicht verlassen:

$$p_1 = \alpha_{SD_2} \mu_1 p_1^*, \quad p_2 = \alpha_{SD_2} \mu_2 p_2^* \quad (5.4)$$

mit  $0 \leq \mu_1 \leq 1$  und  $0 \leq \mu_2 \leq 1$ .

In diesem allgemeinen Fall werden alle vier Lastecken  $\mathcal{P}_1$  bis  $\mathcal{P}_4$  mit Hilfe des statischen Einspieltheorems überprüft.

Die Streckenlasten  $p_1^*$  und  $p_2^*$  werden dabei willkürlich gewählt. Vorgegeben wird lediglich das Verhältnis der beiden Streckenlasten zueinander. In der Elastizitäts-, Traglast- und Einspiel-Analyse werden die maximal möglichen Sicherheitsfaktoren  $\alpha_e, \alpha_L, \alpha_{SD_1}$  und  $\alpha_{SD_2}$  ermittelt.

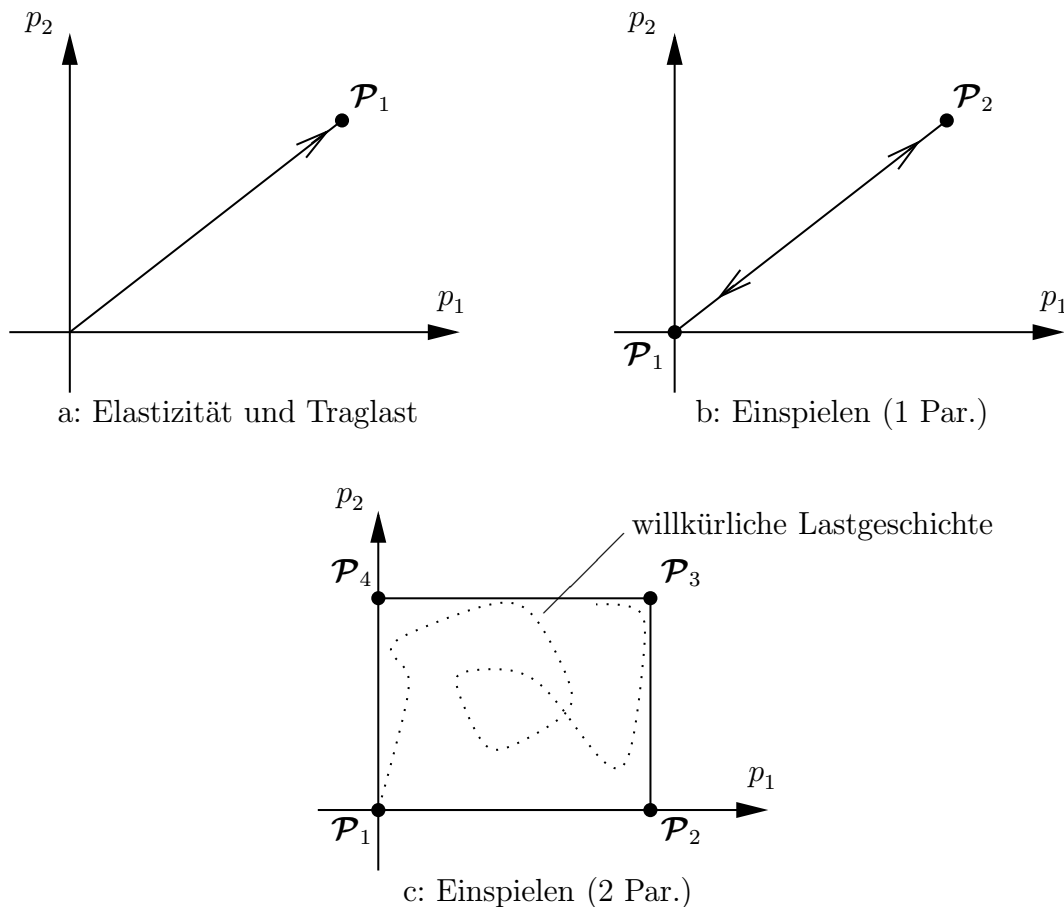


Abbildung 5.2: Lastraum

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in der Abbildung 5.3 dargestellt. Dabei sind die maximal möglichen Lasten  $p_1$  und  $p_2$  normiert mit der Fließspannung  $\sigma_Y$  abgetragen.

Es ist interessant, daß die Grenze des Versagens aufgrund alternierender Plastizität im Fall 4 (Einspielen (2 Par.)) mit der Grenze des Einspielens übereinstimmt. In der Abbildung 5.3 ist nur die zweite angegeben. Weiterhin fällt auf, daß es zwei kleine Bereiche gibt, in denen die Einspiellösung einen kleineren Wert annimmt als die elastische Lösung. Der elastischen Lösung und der Einspiellösung liegen zwei unterschiedliche Belastungsarten zugrunde. Während bei der elastischen Lösung die Lasten  $p_1$  und  $p_2$  gleichmäßig vom unbelasteten Zustand erhöht werden, bis die Elastizitätsgrenze erreicht ist, variieren bei der Einspiellösung die beiden Lasten  $p_1$  und  $p_2$  unabhängig voneinander in dem durch die Ergebniskurve vorgegebenen Eckpunkt eines aufgespannten Lastraumes.

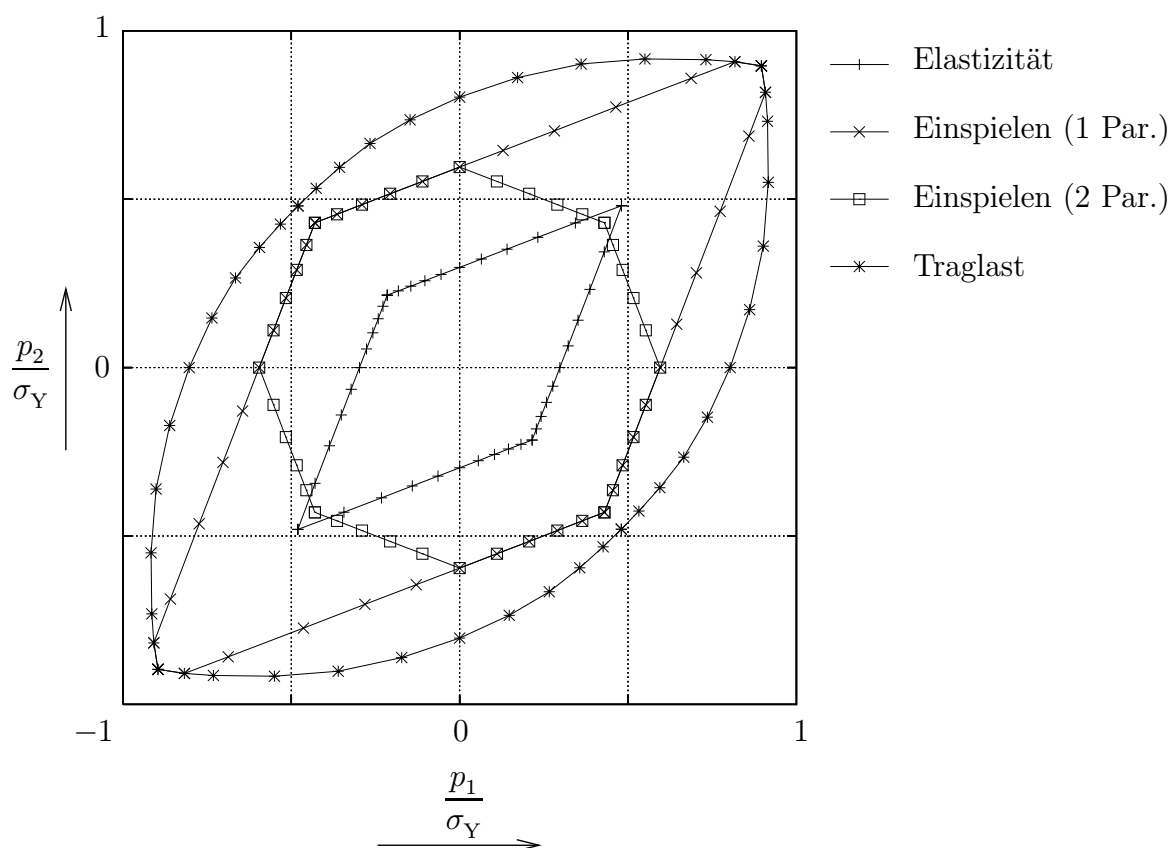


Abbildung 5.3: Elastizitäts-, Traglast- und Einspiel-Analyse der Lochscheibe

Vergleicht man die Ergebnisse mit den numerischen und analytischen Angaben aus der Literatur, so erkennt man eine gute Übereinstimmung. In der nachfolgenden Tabelle 5.2 ist dieser Vergleich für den Fall 2 (Traglast-Analyse) für einige Verhältnisse von  $p_1$  zu  $p_2$  dokumentiert. In der Tabelle 5.3 findet man den entsprechenden Vergleich für den Fall 4 (Einspielen (2 Par.)).

Die Traglast- und die Einspiellösung sind zusätzlich noch mit der auf einem inkrementellen Verfahren beruhenden Software I-DEAS [152] validiert worden. Für die Traglastbestimmung werden dabei die an der Lochscheibe angreifenden Lasten in inkrementellen

Quelle	$p_2 = p_1$	$p_2 = \frac{1}{2}p_1$	$p_2 = 0$	$p_2 = -\frac{1}{2}p_1$	$p_2 = -p_1$
BELYTSCHKO [5]			0.780		
CORRADI ET AL. [27]	0.767		0.691		
GAYDON ET AL. [45] (analytische Lösung)			0.800		
GROSS-WEEGE [52]	0.882	0.891	0.782		
I-DEAS [152]	0.888	0.900	0.768	0.629	0.479
HEITZER [61]			0.788		
NGUYEN ET AL. [119]	0.704		0.564		
ZHANG [181]			0.802		
eigene Lösung	0.896	0.913	0.803	0.630	0.480

Tabelle 5.2: Ergebnisvergleich der Traglast-Analyse bei einer Lochscheibe

Quelle	$p_2 = p_1$	$p_2 = \frac{1}{2}p_1$	$p_2 = 0$	$p_2 = -\frac{1}{2}p_1$	$p_2 = -p_1$
BELYTSCHKO [5]	0.431	0.501	0.571		
CORRADI ET AL. [27]	0.504	0.579	0.654		
GENNA [46]	0.478	0.566	0.653		
GROSS-WEEGE [52]	0.446	0.524	0.614	0.524	0.446
HEITZER [61]			0.616		
I-DEAS [152]	0.413	0.513	0.613	0.513	0.425
NGUYEN ET AL. [119]	0.431	0.514	0.557		
ZHANG [181]	0.453	0.539	0.624		
ZHANG [181] (analytische Lösung)	0.431	0.500	0.596	0.500	0.431
eigene Lösung	0.430	0.505	0.595	0.505	0.430

Tabelle 5.3: Ergebnisvergleich der Einspiel-Analyse bei einer Lochscheibe

Schritten aufgebracht, solange bis sie nicht mehr in der Lage ist, eine weiter erhöhte Belastung zu tragen. In diesem Fall steht die Arbeit der äußeren Kräfte nicht mehr im Gleichgewicht mit der inneren Arbeit. Dies macht sich im Konvergenzverhalten des Finite-Elemente-Programms bemerkbar, das dann als Abbruchkriterium für die Bestimmung der Traglastgrenze benutzt werden kann. In den Abbildungen 5.5, 5.7 und 5.9 ist der Spannungszustand, charakterisiert durch die Vergleichsspannung nach VON MISES, kurz vor dem Erreichen der Traglastgrenze für  $p_2 = p_1$ ,  $p_2 = 0$  und  $p_2 = -p_1$  dargestellt. Di-

rekt daneben findet man in den Abbildungen 5.6, 5.8 und 5.10 die Ergebnisse, die mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Optimierungsverfahren ermittelt werden. Dargestellt sind die Vergleichsspannungen nach VON MISES für die zusammengesetzten Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \alpha_L \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{x}, t) + \bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x})$  zum Zeitpunkt des Erreichens der Traglastgrenze. Man erkennt eine qualitativ und quantitativ gute Übereinstimmung. Die Abweichungen lassen sich einerseits durch die Verwendung eines feineren Finite-Elemente-Netzes bei der inkrementellen Lösung gegenüber dem bei der Optimierung verwandten Netz (siehe Abbildung 5.1) erklären und andererseits durch die Tatsache, daß die zeitunabhängigen Eigenspannungen  $\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x})$  nicht mit den tatsächlichen Eigenspannungen  $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})$  übereinstimmen müssen. Außerdem müssen noch Abweichungen berücksichtigt werden, die sich bei der Extrapolation der Spannungswerte von den Integrationspunkte zu den Knotenpunkten der Finiten Elemente ergeben. Die kommerzielle Software I-DEAS ermittelt die Spannungswerte  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  in den Knotenpunkten der Finiten Elemente, während bei dem Optimierungsverfahren die zeitunabhängigen Eigenspannungen  $\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x})$  in den Integrationspunkten der Finiten Elemente ermittelt werden.

Bei der inkrementellen Bestimmung der Einspielgrenzen geht man anders vor. Die Sicherheit eines vorgegebenen Lastraumes gegenüber Versagen wird mit der von BORKOWSKI & KLEIBER [16] vorgeschlagenen Vorgehensweise überprüft, indem der Rand des Lastraumes mehrmals hintereinander abgefahren wird. Nach einigen Zyklen darf sich dabei das Feld der plastischen Dehnungen nicht weiter ausbreiten. Hat man einen sicheren Lastrraum gefunden, dann können die Lasten proportional erhöht und dieser neue Lastrraum überprüft werden. Man fährt solange fort, bis der maximal mögliche Lastrraum hinreichend eingegrenzt ist. Bei der vorliegenden Lochscheibe ist diese Analyse durchgeführt worden. Der zu überprüfende Lastrraum wird dabei beginnend im Eckpunkt  $t = 0$  mehrmals umfahren (Abbildung 5.4).

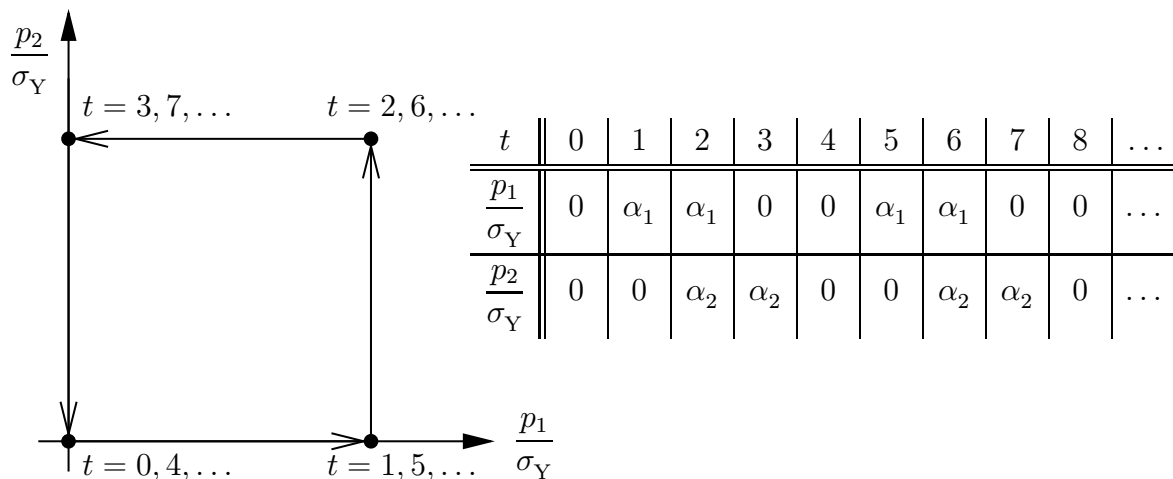
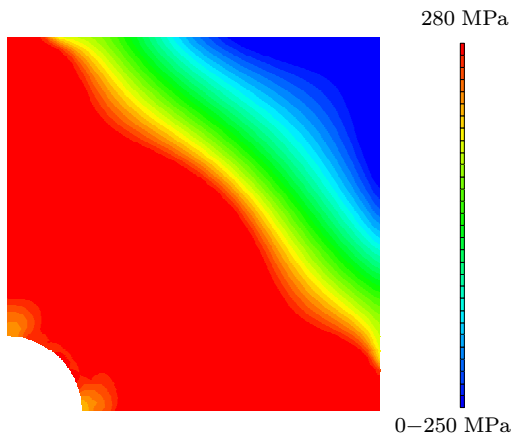
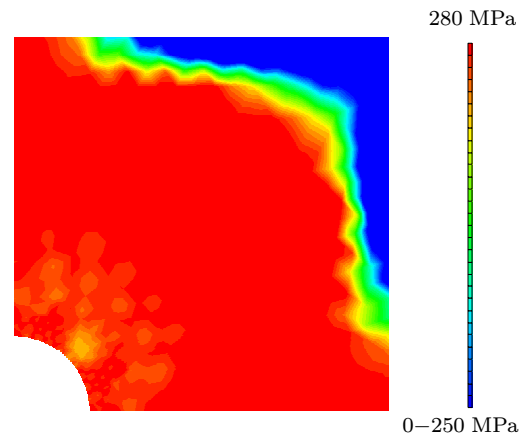
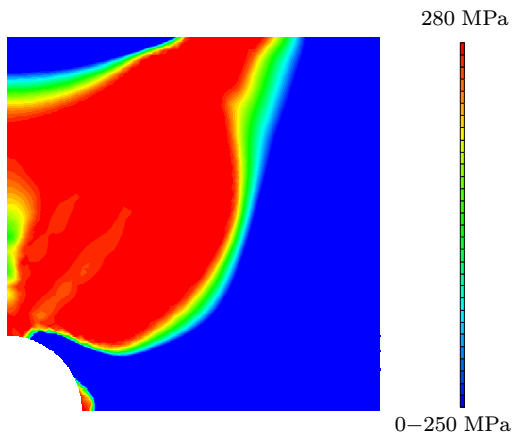
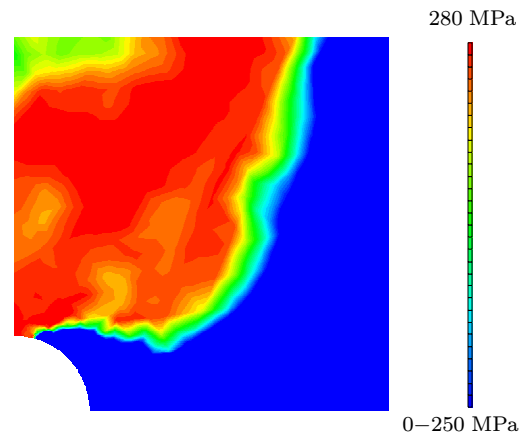
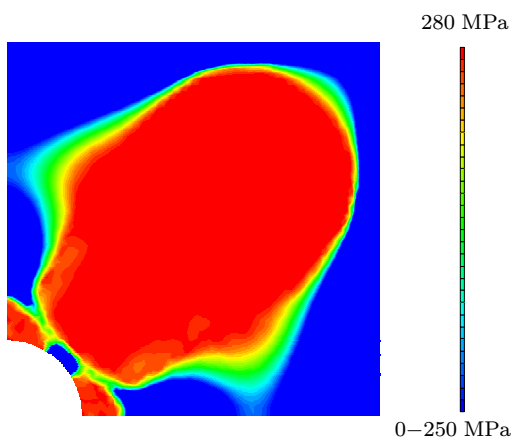
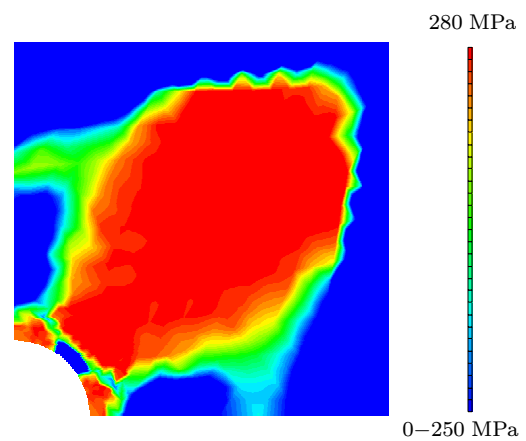
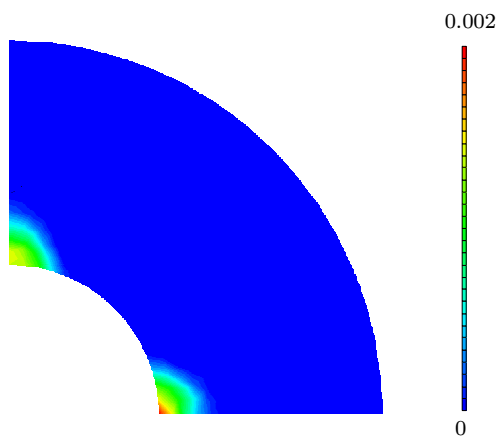
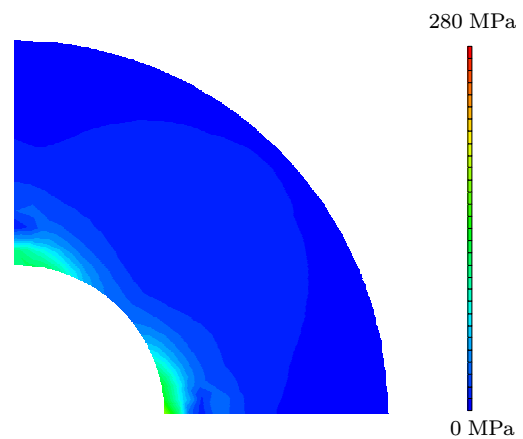
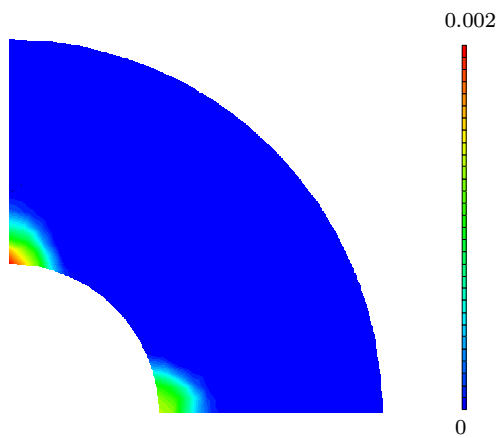
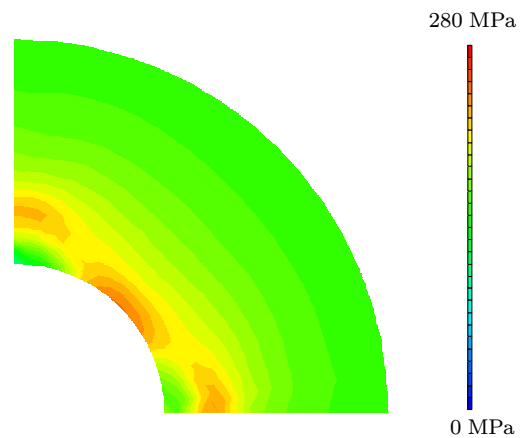
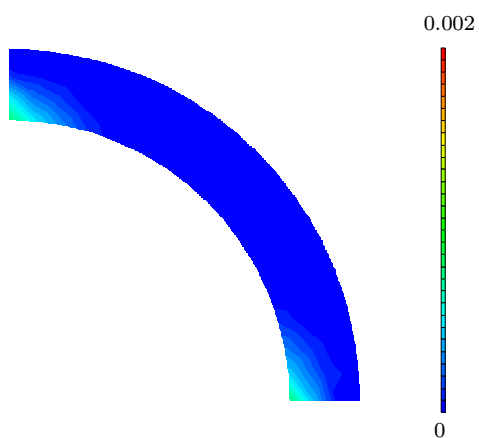
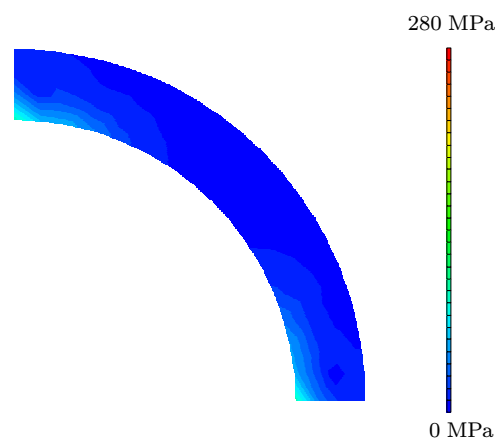


Abbildung 5.4: Lastgeschichte

Als Ergebnis der Finite-Elemente-Berechnung erhält man das Feld der plastischen Dehnungen für jede dieser Lastecken. In den Abbildungen 5.11 und 5.13 sind diese Felder für einen unsicheren Lastraum im Bereich des Lochs vergrößert dargestellt ( $p_1 = p_2, \alpha = 0.5$ ). In diesen Abbildungen wird die plastische Vergleichsdehnung nach VON MISES gezeigt. Bereits nach dem ersten Belastungszyklus stellt sich in jeder Lastecke immer wieder dasselbe Spannungs- und plastische Dehnungsfeld ein. Allerdings verändert sich das plastische Dehnungsfeld jeweils beim Übergang von der Lastecke  $t = 4, 8, \dots$  zu der Lastecke  $t = 6, 10, \dots$ . Hier liegt der Fall der alternierenden Plastizität vor, der zum Versagen der Struktur führt. Die Bestimmung der Einspielgrenzen erfolgt durch die Beobachtung dieses Effektes. Tritt dieser Wechsel nicht auf, dann handelt es sich um einen sicheren Lastraum. In den Abbildungen 5.12 und 5.14 sind die zugehörigen Spannungsfelder durch die Vergleichsspannung nach VON MISES dargestellt. Es fällt auf, daß die Vergleichsspannungen viel kleinere Werte annehmen als die Vergleichsspannungen im Bereich der Traglastgrenze. Deutlich ist im unbelasteten Zustand (Abbildung 5.12) auch eine Spannungsverteilung ohne gleichzeitig vorhandene Last zu erkennen. Diese Spannungen haben sich während des vorangegangenen Belastungsprozesses ausgebildet. Sie stellen die Eigenspannungen in der Lochscheibe dar. Einen sicheren Zustand ( $p_1 = p_2, \alpha = 0.4$ ) geben die Spannungs- und plastischen Dehnungsfelder der Abbildungen 5.15 und 5.16 im Bereich des Lochs stark vergrößert wieder. Das dargestellte Feld der plastischen Dehnung verändert sich nach dem ersten Belastungszyklus ( $t > 4$ ) nicht mehr. Es liegt also ein sicherer Zustand vor. Die plastischen Dehnungen sowie die Eigenspannungen im unbelasteten Zustand sind dabei sehr gering.

Abbildung 5.5: I-DEAS  $p_2 = p_1$ Abbildung 5.6: Optimierung  $p_2 = p_1$ Abbildung 5.7: I-DEAS  $p_2 = 0$ Abbildung 5.8: Optimierung  $p_2 = 0$ Abbildung 5.9: I-DEAS  $p_2 = -p_1$ Abbildung 5.10: Optimierung  $p_2 = -p_1$

Abbildung 5.11: plast. Dehn.  $t = 4, \dots$ Abbildung 5.12: Spannung  $t = 4, \dots$ Abbildung 5.13: plast. Dehn.  $t = 6, \dots$ Abbildung 5.14: Spannung  $t = 6, \dots$ Abbildung 5.15: plast. Dehn.  $t > 4$ Abbildung 5.16: Spannung  $t = 4, \dots$

## 5.2 Scheibe unter Zug- und Temperaturlasten

Nachfolgend wird eine Scheibe unter einer Zug- und einer Temperaturlast untersucht. Die Geometrie, die Randbedingungen und die Finite-Elemente-Diskretisierung (8 isoparametrische Dreieckselemente mit quadratischen Formfunktionen und 25 Knoten) sind in der Abbildung 5.17 dargestellt.

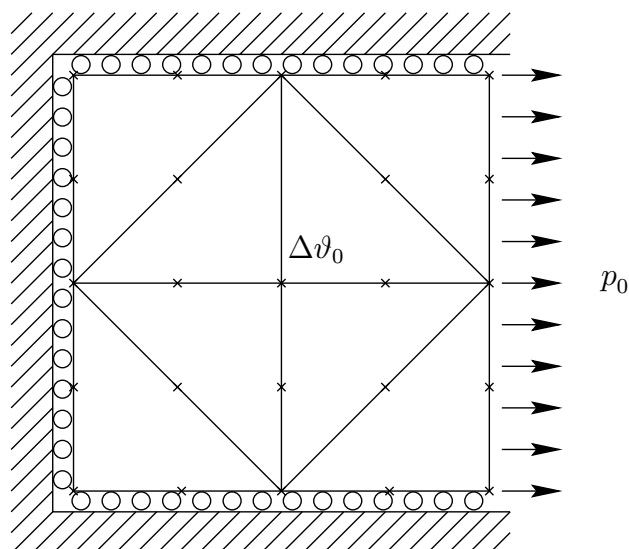


Abbildung 5.17: Scheibe (Geometrie, FE-Netz und Lasten)

Für Kontrollzwecke werden die nachfolgenden Berechnungen zusätzlich mit einer Diskretisierung durch drei-dimensionalen Finite Elemente durchgeführt. In Abbildung 5.18 ist dies schematisch dargestellt. Es werden 24 isoparametrische Tetraederelemente mit quadratischen Ansatzfunktionen und 75 Knoten verwendet. Es zeigt sich, daß die Dicke der Scheibe keinen Einfluß auf die Ergebnisse hat.

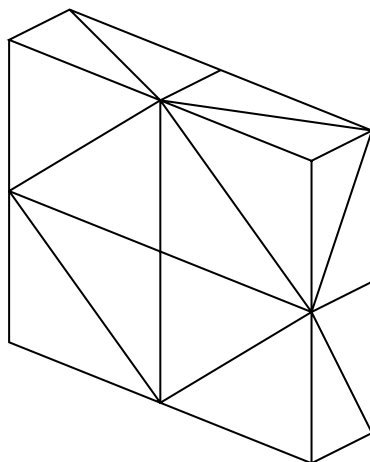


Abbildung 5.18: Scheibe 3-D (FE-Netz)

Untersucht werden insgesamt vier verschiedene Belastungsfälle:

1. Elastizität:

Die Zuglast  $p_0$  und die Temperaturdifferenz der Scheibe zur Umgebung  $\Delta\vartheta_0$  werden gleichmäßig vom unbelasteten Zustand erhöht, bis das Material der Scheibe zu fließen beginnt:

$$p_0 = \alpha_e \mu p_0^*, \quad \Delta\vartheta_0 = \alpha_e \mu \Delta\vartheta_0^* \quad (5.5)$$

mit  $0 \leq \mu \leq 1$ .

Die Lasten  $p_0$  und  $\Delta\vartheta_0$  werden im selben Verhältnis zueinander, wie in Abbildung 5.19.a gezeigt, bis zum Erreichen der Elastizitätsgrenze (Lastecke  $\mathcal{P}_1$ ) erhöht.

2. Traglastgrenze:

$p_0$  und  $\Delta\vartheta_0$  steigen vom unbelasteten Zustand monoton und proportional zueinander bis zum Erreichen der Traglastgrenze an (Abbildung 5.19.a):

$$p_0 = \alpha_L \mu p_0^*, \quad \Delta\vartheta_0 = \alpha_L \mu \Delta\vartheta_0^* \quad (5.6)$$

mit  $0 \leq \mu \leq 1$ .

3. Einspielgrenze:

Die konstante Zuglast  $p_0$  wird auf die Scheibe aufgebracht. Die Temperaturdifferenz  $\Delta\vartheta_0$  der Scheibe zur Umgebung darf nun zwischen zwei Werten variieren (Abbildung 5.19.b). Es wird nun festgestellt, in welchem Maße die konstante Zuglast  $p_0$  und die Ober- bzw. Untergrenze der Temperaturdifferenz vergrößert werden können.

$$p_0 = \alpha_{SD} p_0^*, \quad \Delta\vartheta_0 = \alpha_{SD} \mu \Delta\vartheta_0^* \quad (5.7)$$

mit  $-1 \leq \mu \leq 1$ .

4. Einspielgrenze:

$p_0$  und  $\Delta\vartheta_0$  können unabhängig voneinander variieren. Sie dürfen den durch die Lastecken  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$ ,  $\mathcal{P}_3$  und  $\mathcal{P}_4$  aufgespannten Lastraum (Abbildung 5.19.c) nicht verlassen:

$$p_0 = \alpha_{SD} \mu_1 p_0^*, \quad \Delta\vartheta_0 = \alpha_{SD} \mu_2 \Delta\vartheta_0^* \quad (5.8)$$

mit  $0 \leq \mu_1 \leq 1$  und  $0 \leq \mu_2 \leq 1$ .

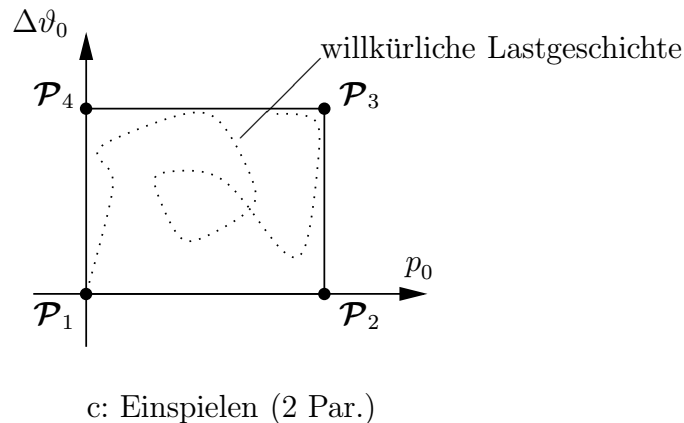
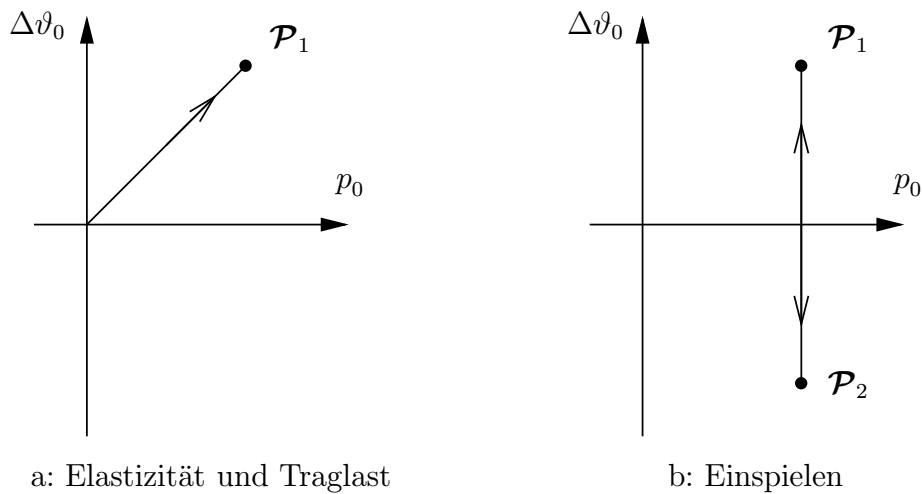


Abbildung 5.19: Lastraum

### 5.2.1 Behandlung als ebener Spannungszustand

In einem ersten Schritt wird angenommen, daß die Dicke der Scheibe so gering ist, daß das Problem als ebener Spannungszustand behandelt werden kann. Es wird elastisch – ideal plastisches Materialverhalten angenommen. Für die ersten drei Belastungsarten (Elastizität, Traglast und Einspielen bei konstanter Streckenlast) werden die Ergebnisse in Abbildung 5.20 wiedergegeben. Aufgetragen werden die maximal möglichen Werte der dimensionslosen Temperaturdifferenz über der dimensionslosen Zuglast ( $\alpha_{\vartheta}$ : Wärmeausdehnungskoeffizient,  $E$ : Elastizitätsmodul,  $\sigma_Y$ : Fließspannung,  $\nu$ : Querkontraktionszahl ( $\nu = 0.3$ )). Sowohl mit der zwei-dimensionalen als auch mit der drei-dimensionalen Finite-Elemente-Diskretisierung kommt man zu denselben Ergebnissen. FUSCHI & POLIZZOTTO [44] geben hierfür eine analytische Lösung an, die mit den hier ermittelten Ergebnissen

übereinstimmt.

$$\text{Elastizität und Einspielen: } \frac{\alpha_{\vartheta} \Delta \vartheta_0 E}{\sigma_Y} = \sqrt{1 - \frac{3}{4} \left( \frac{p_0}{\sigma_Y} \right)^2} - \frac{(1 - 2\nu_{\text{ep}}) p_0}{2 \sigma_Y}, \quad (5.9)$$

$$\text{Traglast: } 0 = \sqrt{1 - \frac{3}{4} \left( \frac{p_0}{\sigma_Y} \right)^2}. \quad (5.10)$$

Die elastisch-plastische Querkontraktionszahl  $\nu_{\text{ep}}$  ist dabei wie folgt definiert [11]:

$$\nu_{\text{ep}} = \frac{1}{2} \left[ 1 - (1 - 2\nu) \frac{T}{E} \right]. \quad (5.11)$$

Darin sind  $\nu$  die elastische Querkontraktionszahl,  $T$  der Tangentenmodul und  $E$  der Elastizitätsmodul. Es lassen sich folgende Grenzfälle unterscheiden:

$$T \longrightarrow E \quad : \quad \text{Elastizität}, \quad (5.12)$$

$$T \longrightarrow 0 \quad : \quad \text{Einspielen (idealplastisch)}, \quad (5.13)$$

$$T \neq E \text{ und } E \longrightarrow \infty \quad : \quad \text{Einspielen (starrplastisch)}. \quad (5.14)$$

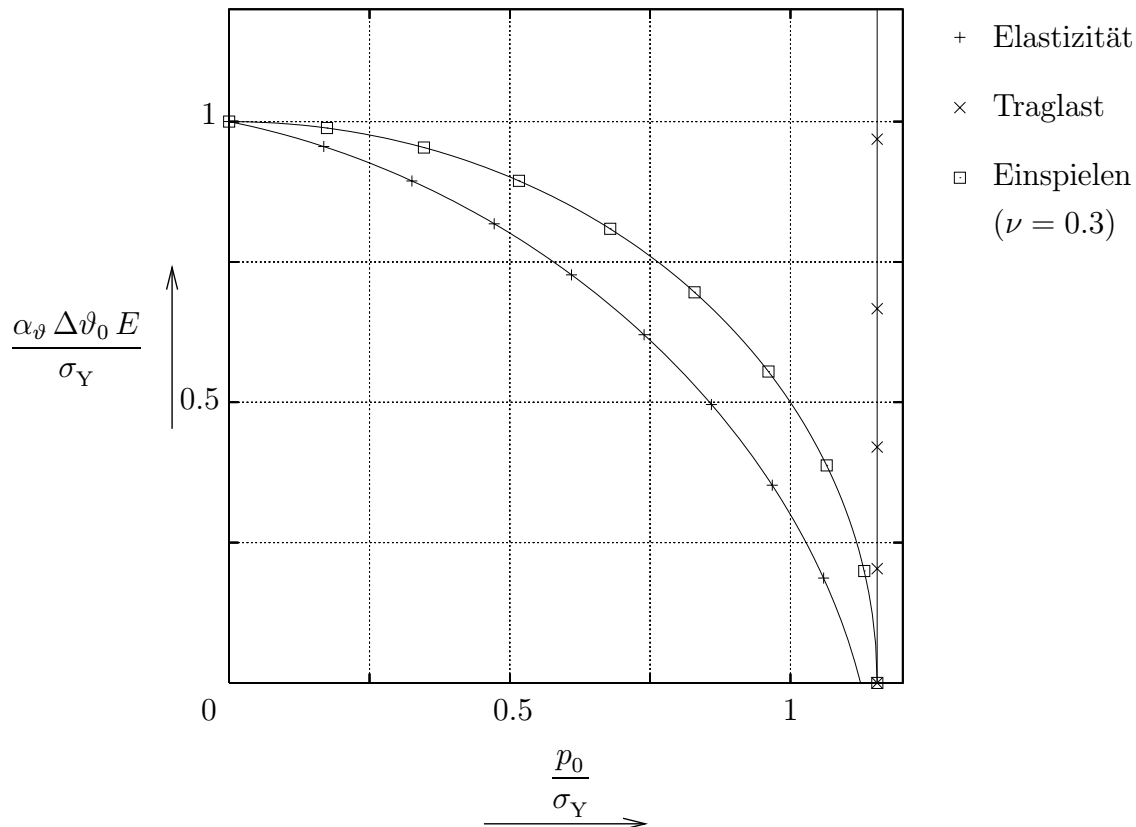


Abbildung 5.20: Einspieluntersuchung einer Scheibe (ebener Spannungszustand)

### 5.2.2 Behandlung als ebener Dehnungszustand

Die gleichen Berechnungen werden auch für den Fall einer unendlich dicken Scheibe durchgeführt. Diese Annahme führt auf den ebenen Dehnungszustand. Auch hier wird elastisch – ideal plastisches Materialverhalten vorausgesetzt. In der Abbildung 5.21 sind die Ergebnisse der Elastizitäts- und der Einspielanalyse (Belastungsfall 3) wiedergegeben. Der Wert der Querkontraktionszahl beträgt  $\nu = 0.3$ . Diese Ergebnisse werden mit einer Rechnung von HEITZER [60] verglichen. HEITZER benutzt ebenfalls das statische Einspieltheorem, jedoch mit einem Lösungsalgorithmus, der auf „reduzierten Basen“ beruht. Desweiteren simulierte er den ebenen Dehnungszustand durch die Verwendung drei-dimensionaler Finiter Elemente, indem er die Ausdehnung der Scheibe in Dickenrichtung durch kinematische Randbedingungen verhinderte. Die erhaltenen Ergebnisse stimmen mit denen dieser Arbeit überein.

$$\text{Elastizität und Einspielen: } \frac{\alpha_{\vartheta} \Delta \vartheta_0 E}{\sigma_Y} = 1 - \nu - (1 - 2 \nu_{\text{ep}}) \frac{p_0}{\sigma_Y}. \quad (5.15)$$

Die elastisch-plastische Querkontraktionszahl  $\nu_{\text{ep}}$  wird hierin nach den Gleichungen (5.11) bis (5.14) bestimmt.

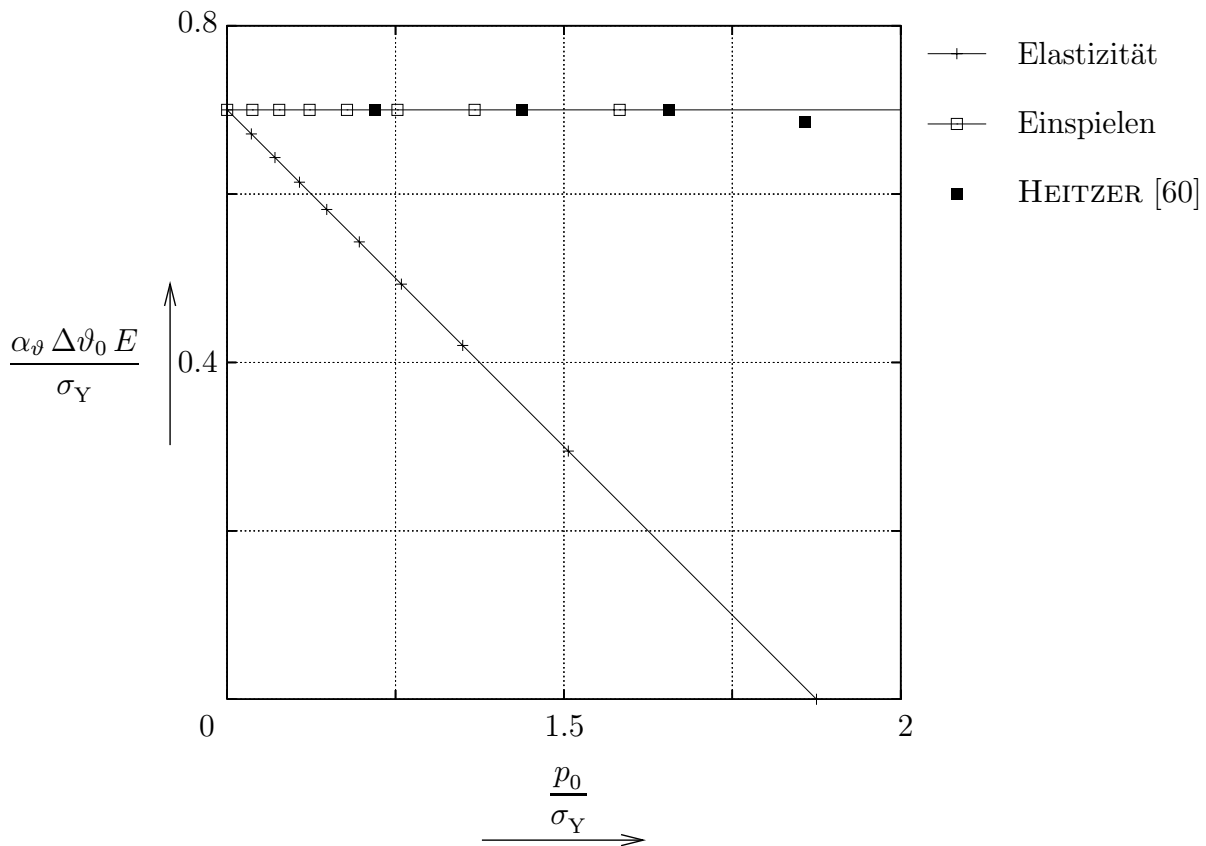


Abbildung 5.21: Einspieluntersuchung einer Scheibe (ebener Dehnungszustand)



Im einzelnen werden folgende Ergebnisse dargestellt:

1. Elastizitätsgrenze für den Lastfall 1.
2. Einspielgrenze für den Lastfall 4 unter der Annahme eines elastisch – ideal plastischen Materialverhaltens (Abbildung 2.7).
3. Einspielgrenze für den Lastfall 4 unter der Annahme eines elastisch – unbegrenzt linear kinematisch verfestigenden Materialverhaltens (Abbildung 2.9).
4. Einspielgrenze für den Lastfall 4 unter der Annahme eines elastisch – ideal plastischen Materialverhaltens. Die Fließspannung wird hierbei um 50% höher gewählt als für den zweiten Fall.
5. Einspielgrenze für den Lastfall 4 unter der Annahme eines elastisch – begrenzt linear kinematisch verfestigenden Materialverhaltens (Abbildung 2.10). Das Maximum der Fließspannung wird mit  $\sigma_L = \frac{3}{2}\sigma_Y$  angenommen.
6. Die Ergebnisse von ZHANG [181] wurden ebenfalls unter Nutzung des statischen Einspieltheorem bestimmt. Zur Lösung des Optimierungsproblems nutzte er aber ein Verfahren, bei dem mit einer elasto-plastischen Analyse einige wenige Basisvektoren erzeugt wurden. Analog zu der in dieser Arbeit verwandten Nebenbedingung (4.27) wurden dann mit diesen Basisvektoren lineare Gleichungen als Nebenbedingungen aufgestellt. Den Einfluß der Verfestigung berücksichtigte er durch die Verwendung des sogenannten „Overlay-Modells“. HEITZER [61] hat mathematisch gezeigt, wie dieses Modell auf das in dieser Arbeit verwandte Zwei-Fließflächen-Modell zurückgeführt werden kann.

Die hier ermittelten Ergebnisse stimmen mit den Werten von ZHANG sehr gut überein.

### 5.3 Ebene Scheibe mit Riß

Im folgenden wird eine Scheibe mit Riß unter einer Zuglast  $p_0$  untersucht. Es handelt sich um eine quadratische Scheibe mit der Kantenlänge  $L$ , bei der ein schmaler Riß mit der Länge  $D$  in der Mitte angenommen wird. In einem ersten Schritt wird eine homogene Materialverteilung mit elastisch – ideal plastischem Materialverhalten für die ebene Scheibe angenommen ( $h = 0$ ). Später wird das Material in der Mitte der Scheibe durch ein anderes ersetzt ( $h \neq 0$ ). Dies entspricht einer idealisierten Schweißnaht. Aus Symmetriegründen wird nur ein Viertel der Scheibe für die Untersuchungen benötigt. Geometrie,

Finite-Elemente-Diskretisierung und Randbedingungen sind in der Abbildung 5.23 wiedergegeben. Die Scheibe wird mit 561 isoparametrischen Dreieckselementen mit quadratischen Ansatzfunktionen und 1180 Knoten diskretisiert. Die Variation der Rißlänge wird durch entsprechende kinematische Randbedingungen in  $y$ -Richtung realisiert.

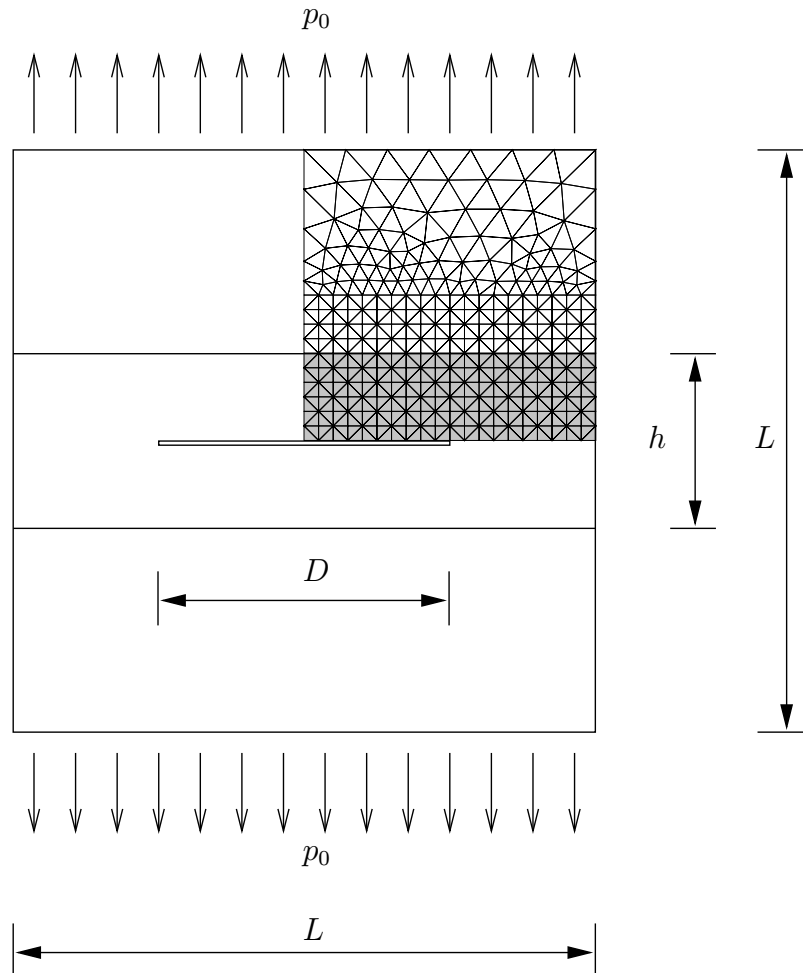


Abbildung 5.23: Scheibe mit Riß (Geometrie, FE-Netz, Randbedingungen)

Bei einer elastischen Analyse tritt im Rißgrund eine Spannungssingularität auf. Je feiner um die Rißspitze diskretisiert wird, desto größer werden die Spannungswerte der Finiten Elemente im Rißgrund. Deshalb ist es hier nur sinnvoll, eine Traglastuntersuchung durchzuführen, da in der Einspieluntersuchung keine Lösung existiert (siehe ZHANG [181] und HEITZER [61]). Die ermittelte zeitunabhängige Eigenspannungsverteilung kompensiert diese Singularität. Da die Scheibe im gesamten Ligament versagt und nicht nur im Bereich der Rißspitze, ist es daher nicht nötig, für die Traglastberechnung die diskretisierte Struktur lokal zu verfeinern. Man kommt daher mit der hier gewählten groben Diskretisierung im Bereich der Rißspitze doch zu gut übereinstimmenden Ergebnissen.

Für die Scheibe mit homogener Materialverteilung sind unter der Annahme eines ebenen Spannungszustandes die Ergebnisse für die Traglastuntersuchung unter Zug in der Abbil-

dung 5.24 wiedergegeben. Abgetragen wird die mit der Fließspannung  $\sigma_Y$  des Materials dimensionslos gemachte Traglast  $p_0$  über der mit der Länge  $L$  der Scheibe dimensionslos gemachten Rißlänge  $D$ . Die berechneten Werte werden zum einen mit einer analytischen Lösung von HODGE [63] und zum anderen mit einer numerischen Lösung von HEITZER [61] verglichen. Die Lösung von HEITZER basiert ebenfalls auf dem statischen Einspieltheorem. Die analytische Lösung nach HODGE für diese Scheibe lautet:

$$\frac{p_{0,\text{grenz}}}{\sigma_Y} = \frac{L - D}{L}. \quad (5.16)$$

Für den Fall des ebenen Dehnungszustandes verändert sich diese Beziehung durch den Faktor  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ , da dort die  $z$ -Komponente des Spannungstensors nicht verschwindet:

$$\frac{p_{0,\text{grenz}}}{\sigma_Y} = \frac{2(L - D)}{\sqrt{3} L}. \quad (5.17)$$

Der Vergleich mit der analytischen Lösung (5.16) zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit den numerisch gewonnen Ergebnissen.

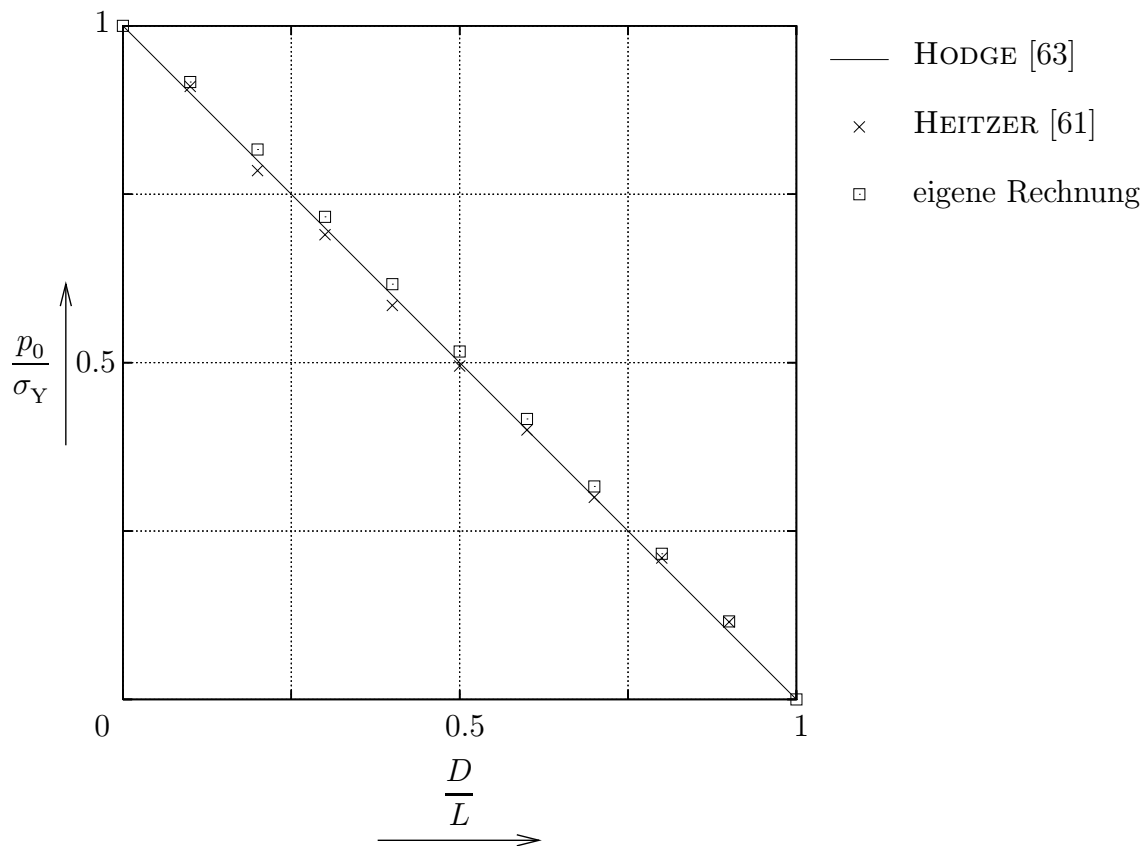


Abbildung 5.24: Traglastanalyse einer gerissenen homogenen Scheibe

In einer weiteren Untersuchung wird das Material um den Riß ( $h/L = 0.3$ ) durch ein Material mit anderen Eigenschaften ersetzt. Beide Materialien sollen elastisch – ideal

plastisches Materialverhalten zeigen. Sie unterscheiden sich nur durch die abweichenden Werte der Fließspannungen. JOCH ET AL. [71] haben für das Verhältnis  $D/L = 0.5$  und für verschiedene Verhältnisse der Fließspannung zueinander Traglastanalysen für diese Art von gerissenen Scheiben mit Hilfe der  $J$ -Integralmethode numerisch durchgeführt. Sie interpretierten die Verwendung des zweiten Materials als Hinzufügung einer idealisierten Schweißnaht. Für verschiedene Verhältnisse der Fließspannung des Basismaterials  $\sigma_Y^B$  zur Fließspannung der Schweißnaht  $\sigma_Y^S$  sind in der nachfolgenden Tabelle 5.4 die Ergebnisse der Traglastanalyse für den ebenen Dehnungszustand (EDZ) wiedergegeben. Zusätzlich wird noch mit der Lösung von HEITZER [61] verglichen, der auch noch die Lösungen für den ebenen Spannungszustand (ESZ) numerisch bestimmte.

$\frac{\sigma_Y^S}{\sigma_Y^B}$	$\frac{p_{0,\text{grenz}}}{\sigma_Y^B}$ (EDZ)			$\frac{p_{0,\text{grenz}}}{\sigma_Y^B}$ (ESZ)	
	JOCH ET AL. [71]	HEITZER [61]	eigene Lösung	HEITZER [61]	eigene Lösung
0.50	0.355	0.386	0.346	0.248	0.262
0.75	0.490	0.518	0.495	0.371	0.393
1.00	0.577	0.600	0.597	0.493	0.517
1.25	0.658	0.667	0.682	0.594	0.605
1.50	0.716	0.729	0.758	0.662	0.676

Tabelle 5.4: Traglastanalyse für eine gerissene Scheibe mit Schweißnaht

Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der anderen Autoren.

## 5.4 Tordierter Balken

Abschließend wird noch ein tordierter Balken mit Hilfe der Einspielanalyse untersucht.

Der Balken wird an seinem Ende durch zwei Streckenlasten belastet. Die Geometrie, die Randbedingungen und die Finite-Elemente-Diskretisierung sind der Abbildung 5.25 zu entnehmen. Es werden 114 isoparametrische Tetraederelemente mit quadratischen Ansatzfunktionen und 269 Knoten verwandt.

Das Materialverhalten wird als elastisch – ideal plastisch angenommen. Die Materialparameter (St 50-2 [120]) und die genauen Geometriedaten können den nachfolgenden Tabellen 5.5 und 5.6 entnommen werden.

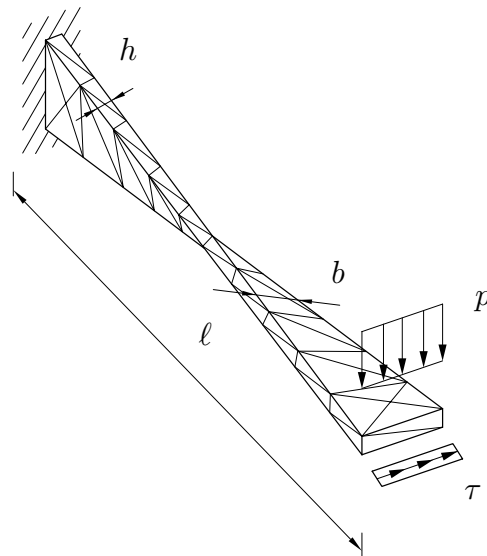


Abbildung 5.25: Tordierter Balken

Elastizitätsmodul $E$	Querkontraktion $\nu$	Fließspannung $\sigma_Y$
$210\,000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	0.3	$280 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Tabelle 5.5: Materialparameter

Länge $\ell$	Breite $b$	Höhe $h$
0.12 m	0.011 m	0.0032 m

Tabelle 5.6: Geometrie des tordierten Balkens

Es werden zwei verschiedene Belastungsfälle untersucht:

1. Elastizität:

Die Streckenlasten  $p$  und  $\tau$  werden gleichmäßig vom unbelasteten Zustand erhöht, bis das Material des Balkens zu fließen beginnt:

$$p = \alpha_e \mu p^*, \quad \tau = \alpha_e \mu \tau^* \quad (5.18)$$

mit  $0 \leq \mu \leq 1$ .

2. Einspielgrenze:

$p$  und  $\tau$  können unabhängig voneinander variieren.

$$p = \alpha_{\text{SD}} \mu_1 p^*, \quad \tau = \alpha_{\text{SD}} \mu_2 \tau^* \quad (5.19)$$

mit  $0 \leq \mu_1 \leq 1$  und  $0 \leq \mu_2 \leq 1$ .

In Abbildung 5.26 ist das Ergebnis der Einspielanalyse wiedergegeben. Abgetragen sind die maximal erlaubten Streckenlasten, die mit der Fließspannung  $\sigma_Y$  des Materials und der Höhe  $h$  des Balkens dimensionslos gemacht werden.

Für den tordierten Balken gibt es keine Vergleichsergebnisse aus der Literatur. An Hand dieses Beispiels ist lediglich überprüft worden, ob das umgesetzte Finite-Elemente-Verfahren auch auf räumliche Strukturen anwendbar ist.

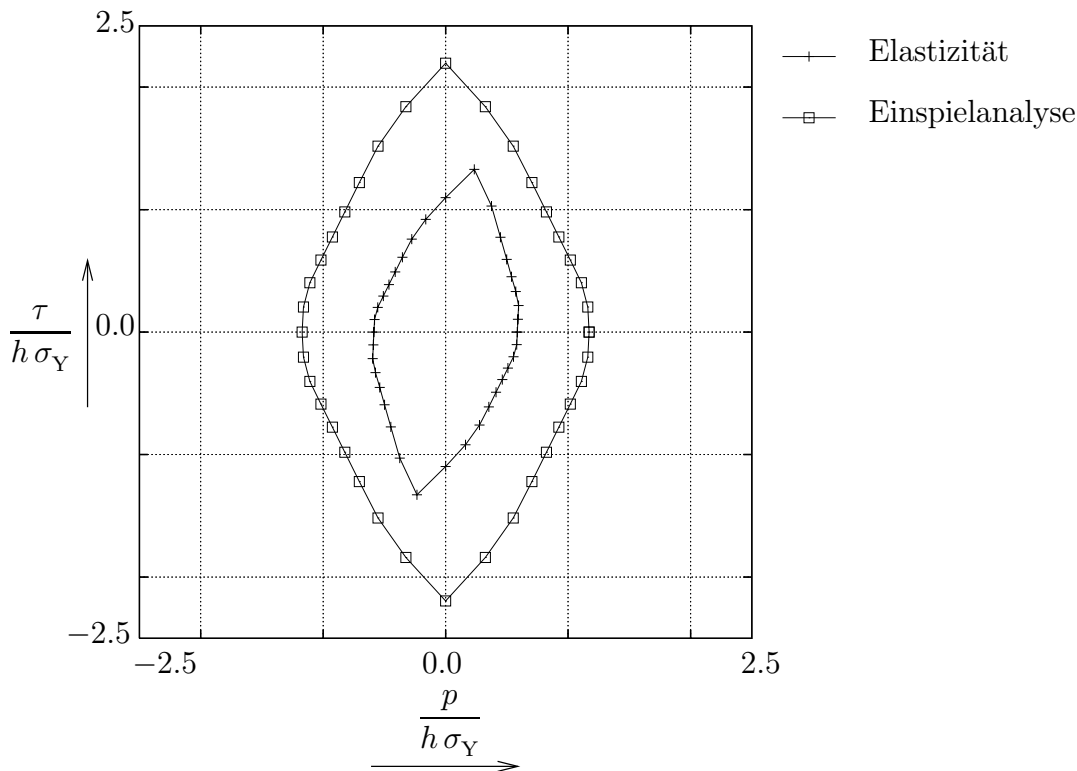


Abbildung 5.26: Elastizitäts- und Einspielanalyse

## 5.5 Diskussion

In diesem Kapitel 5 sind einige ausgewählte Beispiele mit Hilfe der Einspielanalyse untersucht und mit bekannten Lösungen verglichen worden (mit Ausnahme des tordierten Balkens). Alle Beispiele zeigen durchweg eine gute Übereinstimmung mit den angegebenen Ergebnissen, so daß das hier vorgestellte Verfahren als funktionsfähig angesehen werden kann.

## 6 Untersuchung von Verbundwerkstoffen mit periodischer Mikrostruktur

In diesem Kapitel wird das Traglast- und Einspielverhalten von Verbundwerkstoffen näher untersucht, bei denen Einschlüsse bzw. Fasern nach einem periodischen Muster in eine Matrix eingebettet sind. Bei metallischen Werkstoffen mit harten Einschlüssen spricht man auch von „MMC's“ (Metal-Matrix-Composites), im Fall harter Fasern auch von „faserverstärkten Verbundwerkstoffen“. Hier werden ausschließlich die Problemstellungen betrachtet, bei denen diese Werkstoffe in der Ebene des Einschluß- bzw. Faserquerschnitts belastet werden. Es wird dabei der Fragestellung nachgegangen, welchen makroskopischen Spannungszustand das heterogene Material im Fall der Traglast bzw. des Einspielens noch tragen kann.

### 6.1 Zusammenhang zwischen den Randbedingungen der Mikro- und der Makroebene

Um den maximal wirkenden makroskopischen Spannungszustand von regelmäßig strukturierten Verbundwerkstoffen bestimmen zu können, müssen Untersuchungen an der Mikrostruktur dieses Materials durchgeführt werden. Die regelmäßige Struktur des Verbundwerkstoffes erlaubt es, nur einen Teil stellvertretend für den gesamten Werkstoff zu untersuchen. Die Untersuchungen werden an einem repräsentativen Volumenelement durchgeführt. Es stellt sich dabei die Frage, welche Randbedingungen auf diesem repräsentativen Volumenelement aufgebracht werden müssen, damit es als eigene Struktur für sich das gleiche Verhalten zeigt wie innerhalb des Verbundes.

In der Abbildung 6.1 wird ein solcher Verbundwerkstoff gezeigt, der unter der Wirkung zweier Normalspannungen steht. Er läßt sich in ein periodisches Muster einzelner Zellen einteilen. Die jeweiligen rechten und linken Ränder dieser Zellen sind dabei parallel zu den rechten und linken Rändern aller anderen Zellen. Gleiches gilt für die oberen und unteren Ränder. Wird diese Struktur nun einer Normalspannungsbelastung ausgesetzt, so müssen die Ränder in der verformten Konfiguration ebenfalls parallel zu den jeweiligen Rändern der anderen Zellen sein. Jeder Rand ist dabei zugleich auch Symmetrieachse. Bei der in dieser Arbeit vorgestellten Methode zur Bestimmung von Traglast- bzw. Einspielgrenzen macht man sich diese Eigenschaft zunutze, indem man auf den Rändern des zu unter-

suchenden repräsentativen Volumenelemente konstante Verschiebungen vorgibt. Für die jeweils gegenüberliegenden Kanten wird eine willkürlich angenommene Verschiebung eingesetzt.

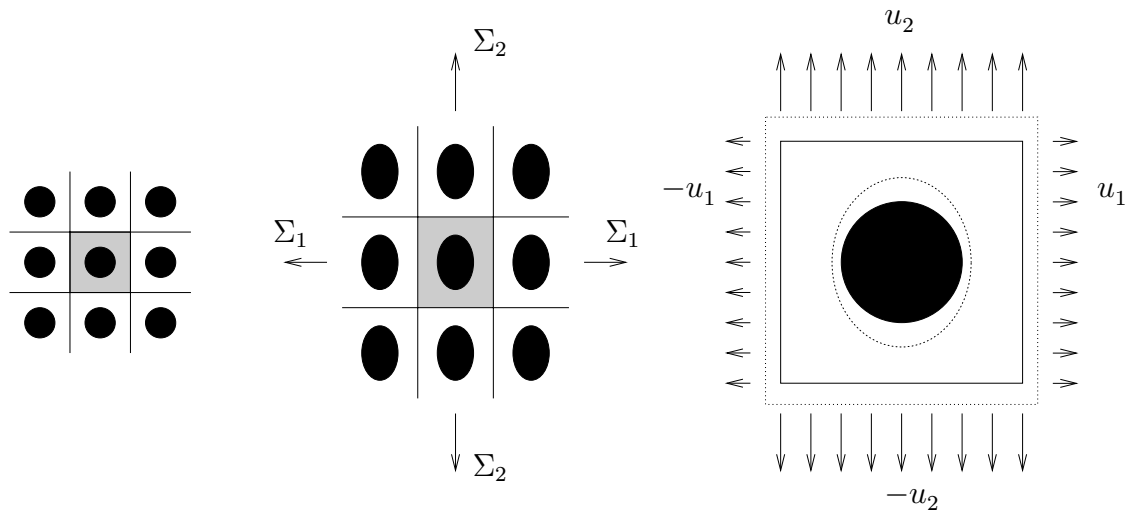


Abbildung 6.1: Verbundwerkstoff unter makroskopischer Normalspannungsbelastung

Mit Hilfe der Traglast- bzw. Einspielanalyse wird dann ein Sicherheitsfaktor bestimmt, mit dem diese angenommenen Verschiebungen multipliziert werden müssen, damit das repräsentative Volumenelement nicht versagt. Unter dieser maximal möglichen Verschiebung stellt sich dann über dem Volumenelement ein Spannungsfeld inklusive eines zeitunabhängigen Eigenspannungsfeldes ein, das mit Hilfe der Gleichung (3.73) über dem Volumenelement integriert werden kann. Dieser Spannungszustand entspricht dabei dem makroskopischen Spannungszustand, der den Belastungszustand des gesamten Verbundes charakterisiert. Er ist infolge der Eigenschaft der Symmetrieachse jeder Zellgrenze zugleich Schubspannungsfrei. Der makroskopische Spannungstensor hat dann unter der Annahme der Lastfreiheit in  $z$ -Richtung folgende Gestalt:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Die Spannungskomponente  $\Sigma_3$  tritt dabei nur für den ebenen Dehnungszustand auf.

Eine makroskopische Schubspannung wird eine Verzerrung des gesamten Verbundwerkstoffes hervorrufen, wobei jedoch die Zellränder aus Symmetriegründen parallel zueinander bleiben müssen. In Abbildung 6.2 ist dies schematisch dargestellt. An dem repräsentativen Volumenelement wird dieser Effekt in ähnlicher Weise wie im Fall der Normalspannungen nachgebildet, indem auf den Rändern des Volumenelementes linear mit dem Ort veränderliche Verschiebungen aufgebracht werden. Unter der Annahme kleiner Scherwinkel haben diesen Verschiebungsverläufe denselben Gradienten. Die absolute Größe der

Verschiebungsverläufe für senkrecht zueinander stehende Ränder kann allerdings verschieden sein (Abbildung 6.2). Für die Randbedingungen der Finite-Elemente-Diskretisierung werden die folgenden linearen Verschiebungsverläufe gewählt:

$$u(y_1) = m y_1 + b_1, \quad (6.2)$$

$$u(y_1^*) = m y_1^* + b_1, \quad (6.3)$$

$$u(y_2) = m y_2 + b_2, \quad (6.4)$$

$$u(y_2^*) = m y_2^* + b_2. \quad (6.5)$$

Hierin finden sich drei frei zu wählende Parameter ( $b_1$ ,  $b_2$ ,  $m$ ), die schließlich in drei unabhängigen Spannungskomponenten ( $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  und  $\Sigma_{12}$ ) resultieren.

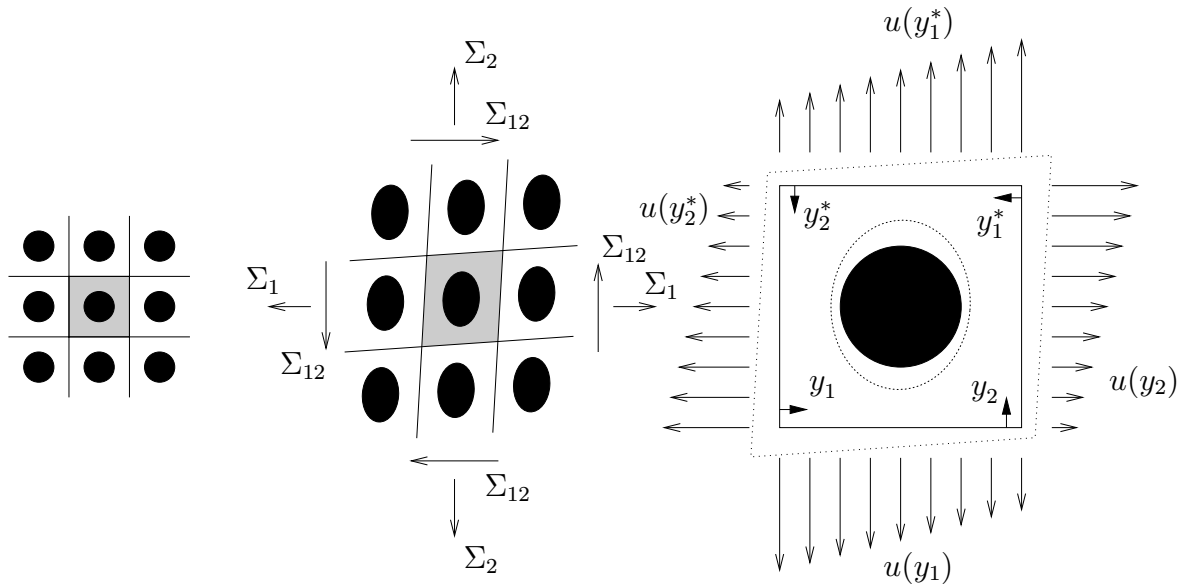


Abbildung 6.2: Verbundwerkstoff unter einer allgemeinen makroskopischen Spannungsbelastung

Nach Vorgabe der frei wählbaren Parameter wird die Traglast- bzw. Einspielanalyse durchgeführt und der maximal tragbare Spannungszustand des Volumenelementes mit Gleichung (3.73) ermittelt. Der makroskopische Spannungstensor hat jetzt unter der Annahme der Lastfreiheit in  $z$ -Richtung folgende Gestalt:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_{12} & 0 \\ \Sigma_{12} & \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Auch hier tritt die Spannungskomponente  $\Sigma_3$  nur für den ebenen Dehnungszustand auf. Es ist nicht möglich, durch die Wahl bestimmter Verhältnisse der Verschiebungen auf den Kanten des repräsentativen Volumenelementes im vornherein eine Aussage über die Größe der sich einstellenden makroskopischen Spannungen bzw. das Verhältnis der Spannungskomponenten zueinander zu treffen. In dieser Arbeit wird später gezeigt, daß dieses

Verhältnis von der Geometrie des repräsentativen Volumenelementes und seinen Materialeigenschaften abhängig ist. Möchte man den Zustand der reinen Schubbelastung, des eindimensionalen Zuges oder jeden anderen beliebigen makroskopischen Spannungszustand erreichen, so muß bei deren Bestimmung iterativ vorgegangen werden.

## 6.2 Traglastanalyse für eindimensionale Zugbelastung

Im folgenden wird ein Verbundwerkstoff bestehend aus einer elasto-plastischen Matrix und darin eingebetteten elasto-plastischen Fasern unter eindimensionaler Zugbelastung untersucht. Die Fasern sind nach einem regelmäßigen Muster innerhalb der Matrix angeordnet. Untersucht werden die quadratische Anordnung, die um  $45^\circ$  gedrehte quadratische Anordnung und die hexagonale Anordnung (Abbildung 6.3).

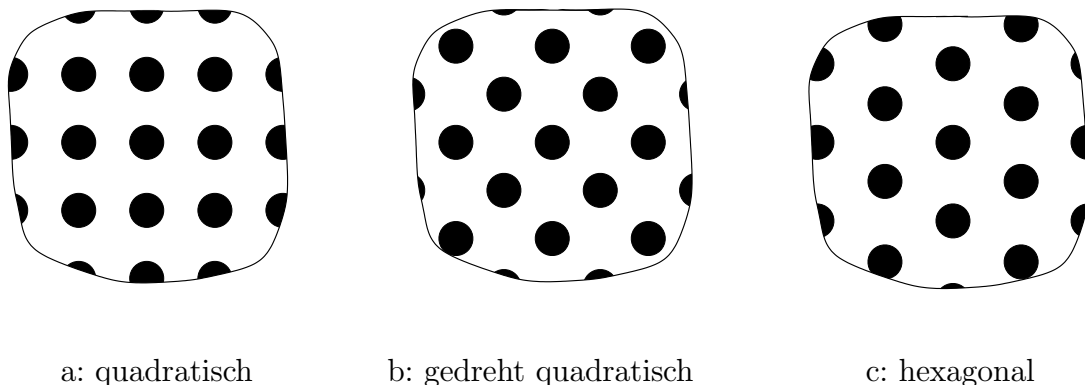


Abbildung 6.3: Mikrostruktur des Verbundwerkstoffes

Mit der im Kapitel 3 und 4 vorgestellten Theorie bzw. Numerik sollen die maximal möglichen tragbaren eindimensionalen makroskopischen Zugspannungen  $\Sigma$ , die auf diesen Verbundwerkstoffen wirken dürfen, ermittelt werden. Es gelten die dort gemachten Annahmen. Die Untersuchungen werden an repräsentativen Volumenelementen unter der Annahme des ebenen Dehnungszustandes und für verschiedene Volumenverhältnisse von harten Fasern zur duktilen Matrix durchgeführt. Der Matrixwerkstoff ist Aluminium, der Faserwerkstoff Aluminiumoxid ( $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ ). Es werden die Materialwerte der Tabelle 6.1 verwendet. Es wird zusätzlich angenommen, daß sich beide Werkstoffe elastisch – ideal plastisch verhalten.

In den Abbildungen 6.4, 6.5 und 6.6 sind die verwandten repräsentativen Volumenelemente mit ihren zugehörigen Finite-Elemente-Diskretisierungen dargestellt. Aus Symmetriegründen werden jeweils nur die Viertel der repräsentativen Volumenelemente diskretisiert.

	Matrix	Faser
Werkstoff	Al	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>
Elastizitätsmodul $E$	70 000 MPa	370 000 MPa
Fließspannung $\sigma_Y$	80 MPa	2000 MPa
Querkontraktionszahl $\nu$	0.3	0.3

Tabelle 6.1: Materialkonstanten: Verbundwerkstoff

Die Diskretisierungen werden mit isoparametrischen Dreieckselementen mit quadratischen Ansatzfunktionen durchgeführt. In der Tabelle 6.2 ist die Anzahl der verwandten Knoten und Elemente für die drei Fälle wiedergegeben.

	Knoten	Elemente
quadratische Anordnung	509	236
gedrehte quadratische Anordnung	650	301
hexagonale Anordnung	838	389

Tabelle 6.2: FE-Diskretisierung

Zur Ermittlung der maximal tragbaren makroskopischen Spannungen  $\Sigma$  wird eine Traglastanalyse, wie im Kapitel 4.8 beschrieben, durchgeführt.

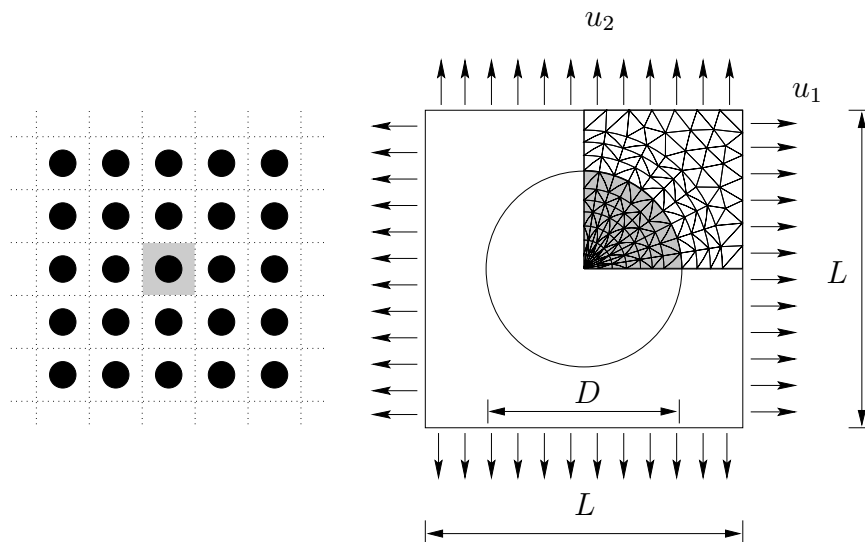


Abbildung 6.4: FE-Diskretisierung: Verbundwerkstoff (quadratische Anordnung)

Vorgegeben werden zwei beliebige Verschiebungen  $u_1$  und  $u_2$ , die auf den Seiten der rechteckförmigen repräsentativen Volumenelemente wirken. Man bestimmt nun für jedes repräsentative Volumenelement den maximal möglichen Sicherheitsfaktor für eine Trag-

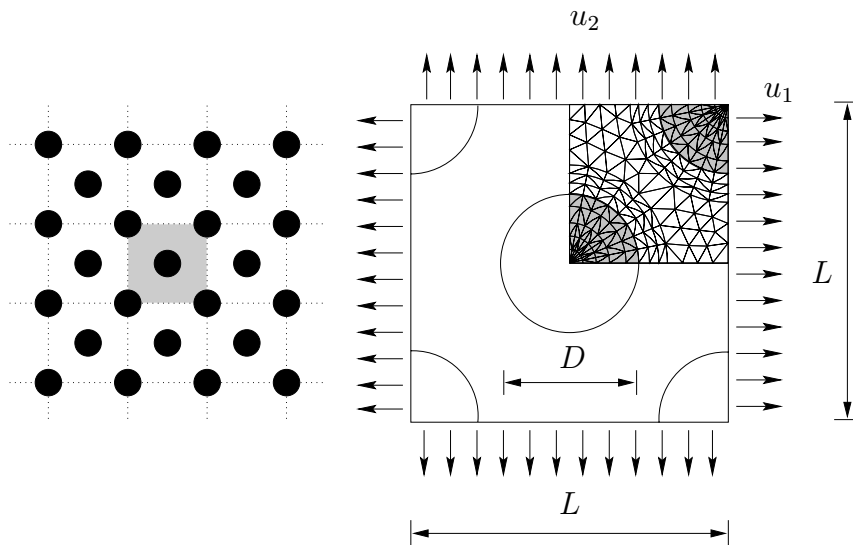


Abbildung 6.5: FE-Diskretisierung: Verbundwerkstoff (gedrehte quadratische Anordnung)

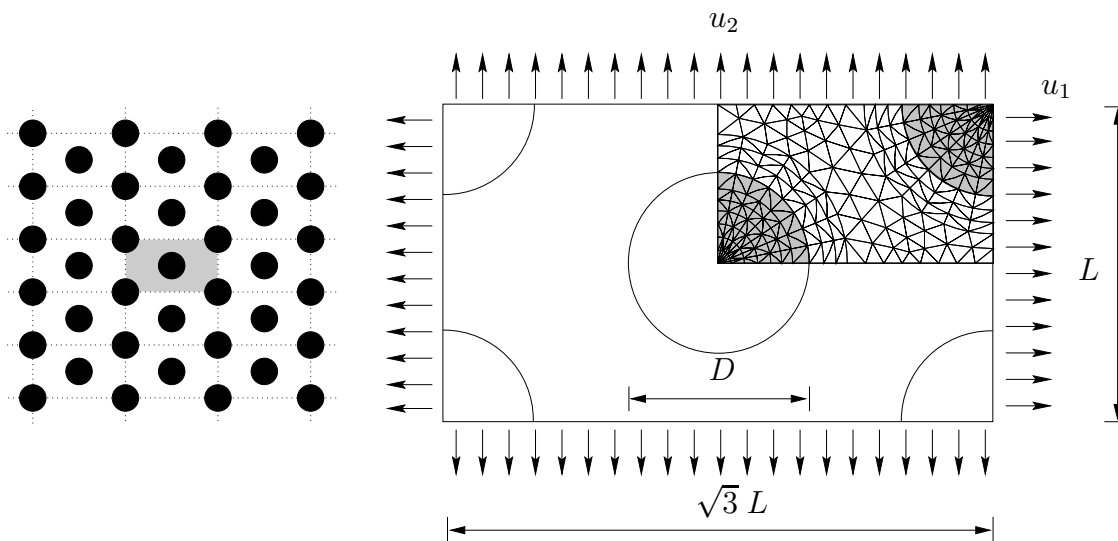


Abbildung 6.6: FE-Diskretisierung: Verbundwerkstoff (hexagonale Anordnung)

lastanalyse, mit der diese beiden Verschiebungen multipliziert werden müssen, damit die Struktur nicht versagt. Mit diesem Sicherheitsfaktor und der Gleichung (3.73) lassen sich die Komponenten der makroskopisch wirkenden Spannung  $\Sigma$  ermitteln. Die Schubspannungskomponente muß hierbei für das gesamte repräsentative Volumenelement verschwinden. Für das in der Numerik verwandte Viertel bleibt eine makroskopische Schubspannung erhalten, die dann aber aus Symmetriegründen für das gesamte Volumenelement kompensiert wird. Übrig bleiben zwei Normalspannungskomponenten. Durch die Variation des Verhältnisses von den anfänglich vorgegebenen Verschiebungen  $u_1$  und  $u_2$  läßt

sich jedoch ein makroskopischer Spannungszustand finden, bei dem bis auf die gewünschte Normalspannungskomponente der andere Normal- und der Schubspannungsanteil des makroskopischen Spannungstensors verschwinden. In Faserrichtung bleibt wegen der Annahme des ebenen Dehnungszustandes eine Normalspannungskomponente erhalten. Zur Bestimmung dieses makroskopischen Spannungszustandes müssen zwei Verschiebungen  $u_1$  und  $u_2$  auf den Rändern des repräsentativen Volumenelementes aufgebracht werden. Das Verhältnis dieser Verschiebungen zueinander, um diesen gewünschten Spannungszustand zu erreichen, ist im vornherein unbekannt. Daher werden zwei Zustände berechnet, die nahe dem gewünschten Spannungszustand sind, und es wird durch lineare Inter- bzw. Extrapolation auf den gewünschten makroskopischen Spannungszustand geschlossen.

In den Abbildungen 6.7 (quadratische Anordnung), 6.8 (gedrehte quadratische Anordnung) und 6.9 (hexagonale Anordnung) werden die Ergebnisse dieser Berechnungen wiedergegeben und mit den Werten von ZAHL ET AL. [179] bzw. DU ET AL. [38] und PONTNER ET AL. [127] verglichen. Abgetragen wird die mit der Fließspannung der Matrix dimensionslos gemachte eindimensionale makroskopische Zugspannung beim Erreichen der Traglastgrenze über dem Volumenverhältnis von Faser zu Matrix. Die Arbeitsgruppe um ZAHL bzw. DU verwendet zur Bestimmung der Traglastgrenze ein inkrementelles Verfahren. Weiterhin werden dort die Fasern als ideal starr angenommen.

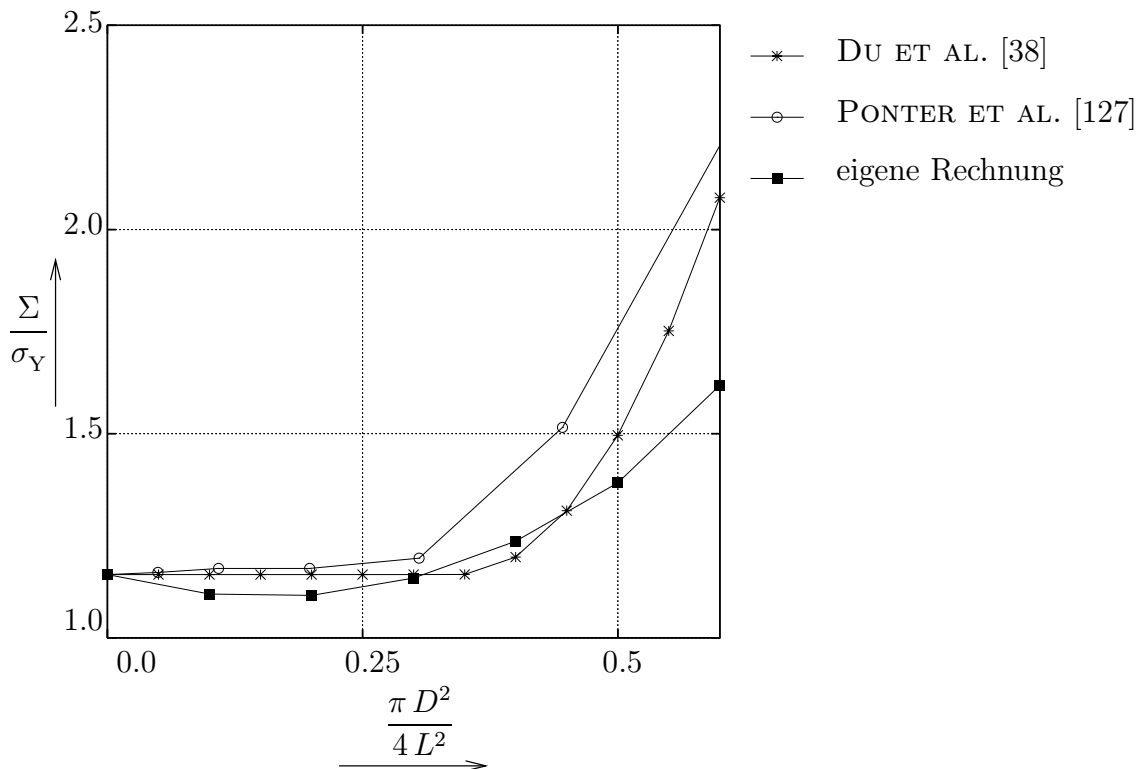


Abbildung 6.7: Makroskopische Traglastspannung (quadratische Anordnung)

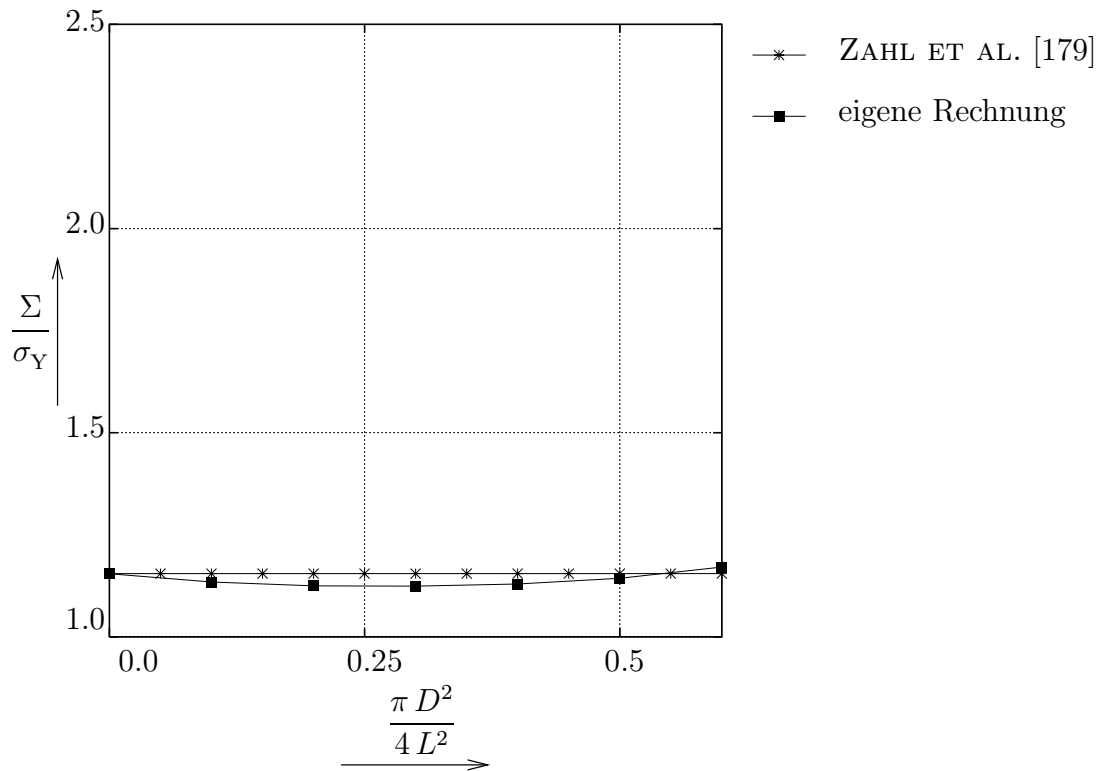


Abbildung 6.8: Makroskopische Traglastspannung (gedrehte quadratische Anordnung)

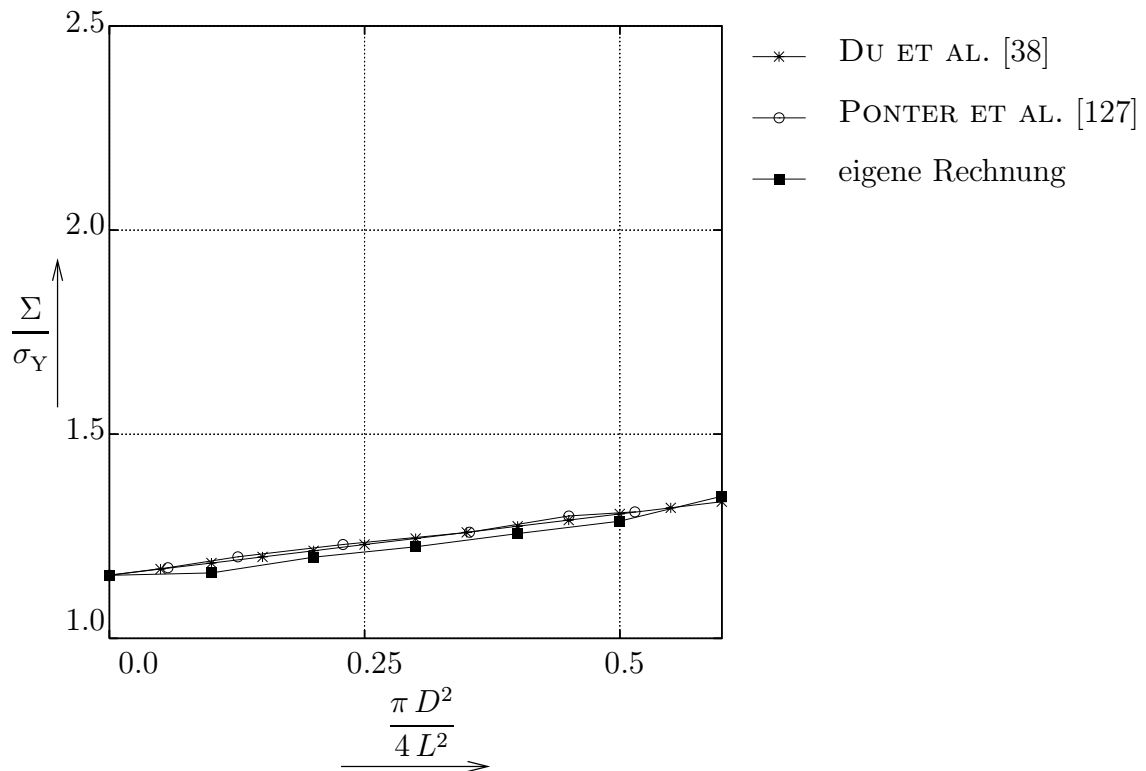


Abbildung 6.9: Makroskopische Traglastspannung (hexagonale Anordnung)

PONTER ET AL. dagegen nutzen das kinematische Einspieltheorem zu Ermittlung der gewünschten Spannungsgrößen. Sie verwenden das gleiche Materialmodell und die gleichen Materialwerte wie in dieser Arbeit. Die Werte von PONTER ET AL. weichen allerdings bei der quadratischen Anordnung nach oben ab. Da aber das von dieser Arbeitsgruppe verwandte Theorem eine obere Schranke bei der Traglastbestimmung liefert, sind die niedrigeren Werte, die mit in dieser Arbeit mit Hilfe des statischen Einspieltheorems bestimmten Ergebnisse, erklärlich. Ansonsten zeigt sich eine gute Übereinstimmung mit den zum Vergleich herangezogenen Ergebnissen der anderen Arbeitsgruppen.

### 6.3 Schubspannungsfreie Zug- bzw. Druckbelastung

Die im vorangegangenen Kapitel 6.2 bestimmte Traglastgrenze für die einaxiale Zugbelastung ist nur ein Sonderfall einer zwei axialen schubspannungsfreien Zug- bzw. Druckbelastung. Hier wird der gesamte zulässige Verschiebungsraum und die zugehörigen makroskopische Spannungen für einen Verbundwerkstoff mit quadratischer Faseranordnung bestimmt. Betrachtet wird das in der Abbildung 6.10 dargestellte repräsentative Volumenelement des Verbundwerkstoffes, das einer zwei axialen Belastung ausgesetzt wird. Aus Symmetriegründen wird auch hier nur ein Viertel mit 206 isoparametrischen Dreieckselementen mit quadratischen Ansatzfunktionen und 457 Knoten diskretisiert.

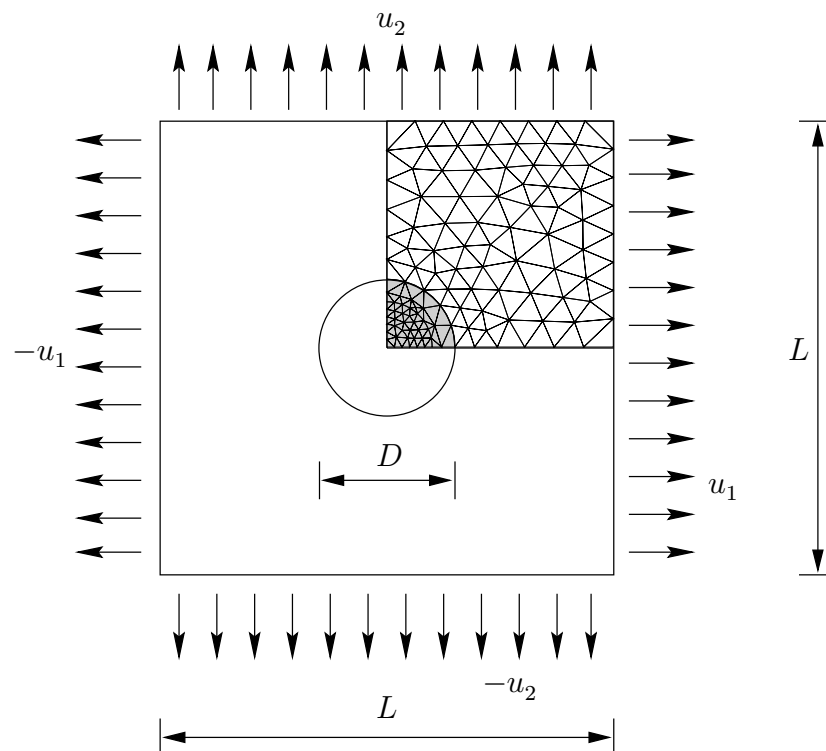


Abbildung 6.10: Geometrie, FE-Netz und Lasten

Neben der Traglastanalyse wird auch eine Einspielanalyse dieser Struktur durchgeführt. Zur Ermittlung der makroskopischen Spannungsgrößen wird hier die Symmetrieeigenschaft der Einheitszellengrenze unter Belastung ausgenutzt. Auf den Kanten werden, wie im Kapitel 6.1 beschrieben, kinematische Randbedingungen vorgegeben. Im Anschluß an die nachfolgende Traglast- bzw. Einspielanalyse werden dann mit der Gleichung (3.73) die maximal erlaubten makroskopischen Spannungsgrößen ermittelt. Im Einzelnen werden folgende Belastungsfälle unterschieden:

1. Elastizität:

Die Verschiebungen  $u_1$  und  $u_2$  werden gleichmäßig vom unbelasteten Zustand erhöht, bis das Material des Volumenelementes zu fließen anfängt:

$$u_1 = \alpha_e \mu u_1^*, \quad u_2 = \alpha_e \mu u_2^* \quad (6.7)$$

mit  $0 \leq \mu \leq 1$ .

Die Verschiebungen  $u_1$  und  $u_2$  werden im selben Verhältnis zueinander, wie in Abbildung 6.11.a gezeigt, bis zum Erreichen der Elastizitätsgrenze (Lastecke  $\mathcal{P}_3$ ) erhöht.

2. Traglastgrenze:

$u_1$  und  $u_2$  steigen vom unbelasteten Zustand monoton und proportional zueinander bis zum Erreichen der Traglastgrenze an (Abbildung 6.11.a):

$$u_1 = \alpha_L \mu u_1^*, \quad u_2 = \alpha_L \mu u_2^* \quad (6.8)$$

mit  $0 \leq \mu \leq 1$ .

3. Einspielgrenze:

Die Verschiebungen  $u_1$  und  $u_2$  können unabhängig voneinander variieren. Es wird nun festgestellt, in welchem Maße der von  $u_1$  und  $u_2$  aufgespannte Lastraum, der durch die Lastecken  $\mathcal{P}_1$  bis  $\mathcal{P}_4$  begrenzt wird, vergrößert werden kann, damit das Volumenelement unter den gegebenen Lasten einspielt (Abbildung 6.11.b).

$$u_1 = \alpha_{SD} \mu_1 u_1^*, \quad u_2 = \alpha_{SD} \mu_2 u_2^* \quad (6.9)$$

mit  $0 \leq \mu_1 \leq 1$  und  $0 \leq \mu_2 \leq 1$ .

4. Alternierende Plastizität (nur für den ebenen Dehnungszustand):

Die Verschiebungen  $u_1$  und  $u_2$  können unabhängig voneinander variieren. Es wird nun festgestellt, in welchem Maße der von  $u_1$  und  $u_2$  aufgespannte Lastraum, der durch die Lastecken  $\mathcal{P}_1$  bis  $\mathcal{P}_4$  begrenzt wird, vergrößert werden kann, damit das Volumenelement unter den gegebenen Lasten aufgrund alternierender Plastizität nicht versagt (Abbildung 6.11.b).

$$u_1 = \alpha_{AP} \mu_1 u_1^*, \quad u_2 = \alpha_{AP} \mu_2 u_2^* \quad (6.10)$$

mit  $0 \leq \mu_1 \leq 1$  und  $0 \leq \mu_2 \leq 1$ .

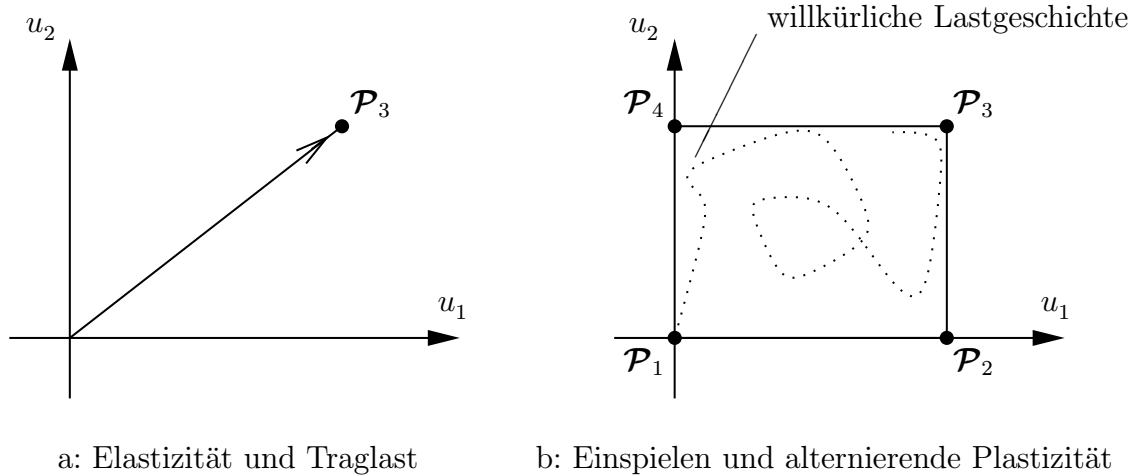


Abbildung 6.11: Lasträume

Die Untersuchungen werden unter der Annahme eines ebenen Spannungszustandes und anschließend für einen ebenen Dehnungszustand durchgeführt. Untersucht werden weiche Fasern bzw. Einschlüsse, die in eine härtere Matrix eingebettet sind. Beide Werkstoffe sollen elastisch – ideal plastisch sein. Der Einfluß des Volumenverhältnisses von Fasern bzw. Einschlüssen zur Matrix wird ebenfalls untersucht. In der Tabelle 6.3 sind die für die verschiedenen Volumenverhältnisse verwandten Materialwerte für die Fasern bzw. Einschlüsse wiedergeben. Für die Materialwerte der Matrix werden unabhängig hiervon stets die Werte der Tabelle 6.4 verwandt. Es wird elastisch – ideal plastisches Materialverhalten angenommen.

In einem ersten Schritt werden die maximalen Belastungsgrenzen für den homogenen Werkstoff ermittelt, das heißt, daß die Materialeigenschaften von Matrix und Fasern bzw. Einschlüssen gleich sind. Für den ebenen Spannungszustand sind die Ergebnisse in Abbildung 6.12 und für den ebenen Dehnungszustand in Abbildung 6.13 wiedergegeben.

Im rechten Bereich dieser Abbildungen ist jeweils der maximal zulässige Verschiebungsraum für die verschiedenen Belastungsfälle dargestellt. Abgetragen werden die maximal möglichen Verschiebungen  $u_2$  über  $u_1$ , die jeweils mit einer willkürlichen Verschiebung (hier  $u_0 = 0.0001 \text{ m}$ ,  $L = 0.1 \text{ m}$ ) dimensionslos gemacht worden sind. Jeder Punkt auf den dargestellten Kurven beschreibt dabei einen eigenen möglichen Lastraum. Auf den linken Seiten der beiden Abbildungen sind die zu den auf der rechten Seite dargestellten Lasträumen gehörigen maximalen makroskopischen Spannungen dargestellt. Sie werden mit der Fließspannung  $\sigma_Y$  des Materials der Matrix dimensionslos gemacht.

Angemerkt sei noch, daß diese maximalen makroskopischen Spannungswerte im linken Diagramm unter einem anderen Winkel zur Abszisse gefunden werden, als im rechten Diagramm die zugehörigen Punkte der zulässigen Verschiebungsräume. Ausgenommen hiervon sind die Werte, bei denen die Werte der Ordinate und Abszisse gleich sind.

Abbildung	Elastizitätsmodul $E$ [MPa]	Querkontraktions- zahl $\nu$	Fließspannung [MPa]	$\frac{d}{\bar{L}}$
6.12, 6.13	210 000	0.30	280.0	0.0
6.15.a, 6.16.a, 6.17.a, 6.18.a	140 700	0.26	233.3	0.1
6.15.b, 6.16.b 6.17.b, 6.18.b	71 400	0.23	186.6	0.1
6.15.c, 6.16.c 6.17.c, 6.18.c	2 100	0.20	140.0	0.1
6.15.d, 6.16.d 6.17.d, 6.18.d	140 700	0.26	233.3	0.2
6.15.e, 6.16.e 6.17.e, 6.18.e	71 400	0.23	186.6	0.2
6.15.f, 6.16.f 6.17.f, 6.18.f	2 100	0.20	140.0	0.2
6.15.g, 6.16.g 6.17.g, 6.18.g	140 700	0.26	233.3	0.3
6.15.h, 6.16.h 6.17.h, 6.18.h	71 400	0.23	186.6	0.3
6.15.i, 6.16.i 6.17.i, 6.18.i	2 100	0.20	140.0	0.3

Tabelle 6.3: Materialparameter der Fasern bzw. Einschlüsse

Elastizitätsmodul $E$ [MPa]	Querkontraktions- zahl $\nu$	Fließspannung [MPa]
210 000	0.30	280.0

Tabelle 6.4: Materialparameter der Matrix

Für die Elastizitäts- und Traglastanalyse geben die Ergebniskurven der linken Abbildungen die maximal möglichen makroskopischen Spannungswerte wieder. Für die Einspielanalyse allerdings sind die gezeigten Ergebniskurven nur die Maximalwerte, die den maximal möglichen Verschiebungslasträumen zuzuordnen sind.

Während die Lasträume der Verschiebungen eine rechteckförmige Gestalt haben (Abbildung 6.11.b), besitzen die dazugehörigen Lasträume der makroskopischen Spannungen eine verzerrte Gestalt (Abbildung 6.14.b). Es ist zwar immer noch möglich, diese Lasträume durch die genaue Angabe der vier Lastecken zu beschreiben, jedoch sind für die Angabe der

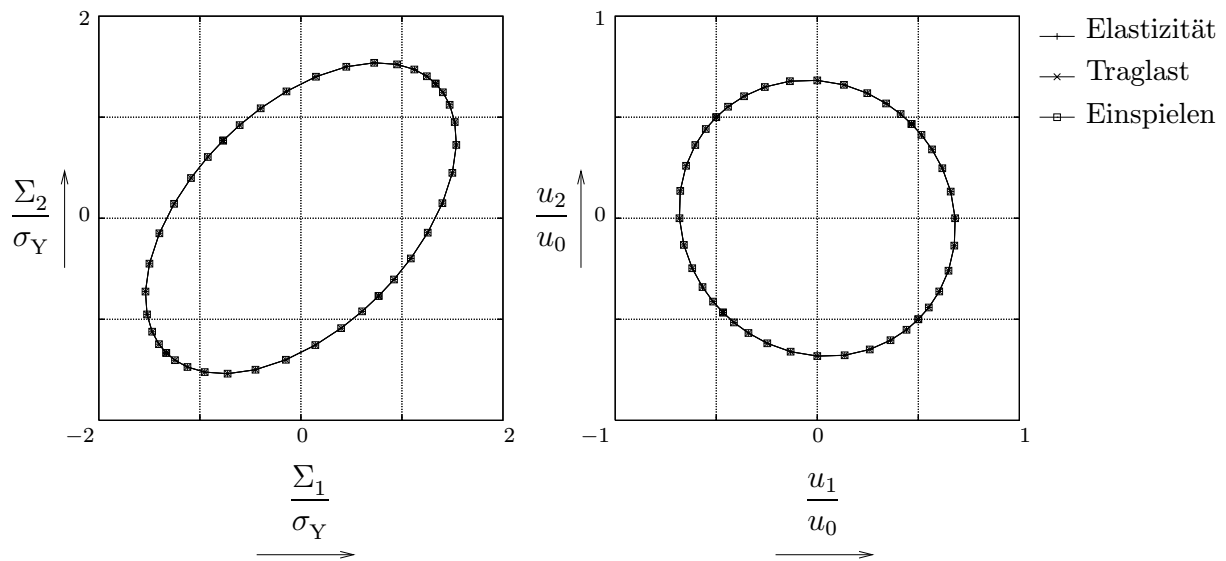


Abbildung 6.12: Zulässige Verschiebungsräume (rechtes Bild) und zugehörige maximale makroskopische Spannungen (linkes Bild) für homogenes Material (ebener Spannungszustand)

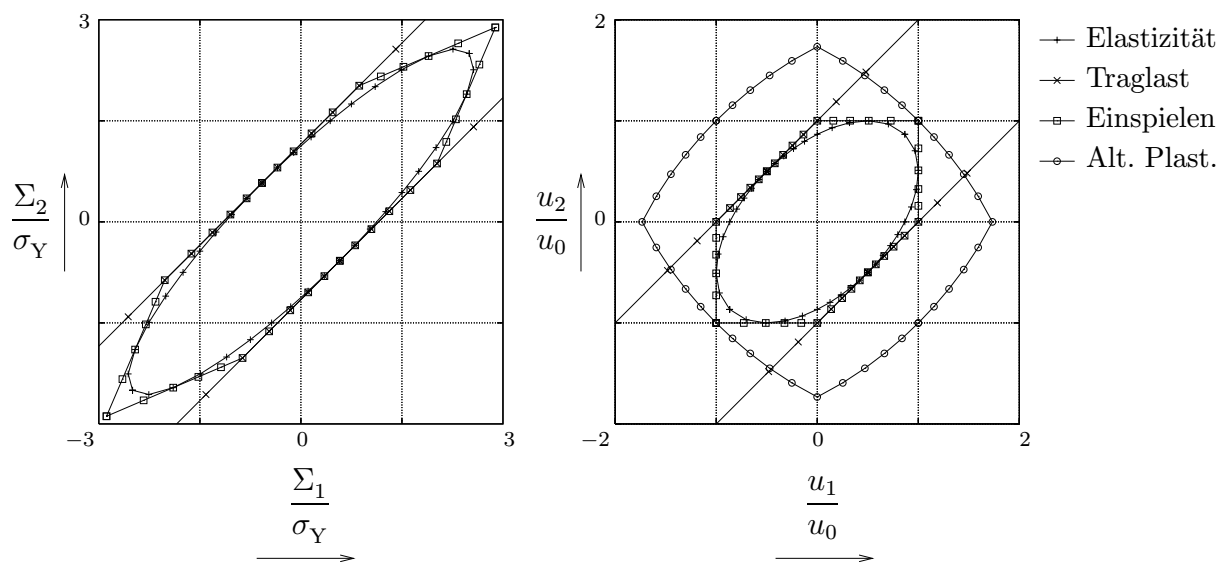


Abbildung 6.13: Zulässige Verschiebungsräume (rechtes Bild) und zugehörige maximale makroskopische Spannungen (linkes Bild) für homogenes Material (ebener Dehnungszustand)

maximal möglichen Belastbarkeit des Verbundwerkstoffes rechteckförmige Lasträume, die durch makroskopische Spannungen aufgespannt werden, wünschenswert. Am Ende dieses

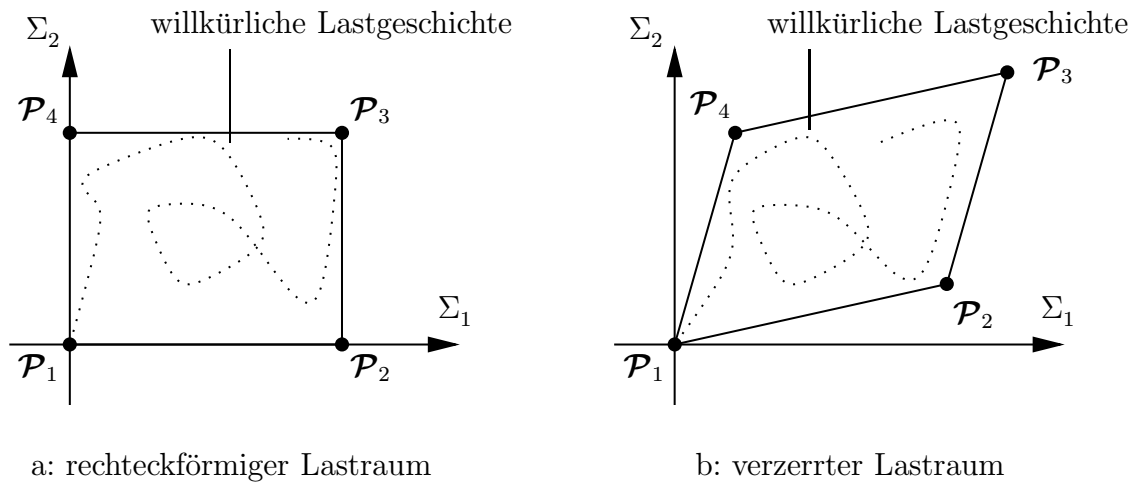


Abbildung 6.14: Lasträume

Kapitels wird gezeigt, wie solche rechteckförmigen makroskopischen Spannungsräume für eine Einspielanalyse ermittelt werden können (Abbildung 6.14.a).

In den nachfolgenden Abbildungen 6.15 bis 6.18 sind dann die Ergebnisse für das heterogene Material wiedergegeben. Die zulässigen Verschiebungsräume für den ebenen Spannungszustand finden sich in Abbildung 6.15. Von links nach rechts wird das Materialverhalten der Einschlüsse weicher, von oben nach unten nimmt das Volumenverhältnis von Einschlüssen zu Matrix zu. In den Tabellen 6.3 und 6.4 finden sich die verwandten Materialwerte und Volumenverhältnisse wieder. Die zugehörigen maximalen makroskopischen Spannungen sind in der Abbildung 6.16 zu finden. Deutlich ist zu erkennen, daß das Volumenverhältnis nur einen geringen Einfluß auf die Form der Kurven hat. Die Materialeigenschaften der Einschlüsse hingegen beeinflussen die Form in stärkerem Maße. Die Abnahme der Materialwerte von links nach rechts führt auch zu einer Verkleinerung der Elastizitäts- und Einspiellösung. Die Traglastlösung ist hiervon in geringerem Maße betroffen.

Ähnliche Ergebnisse lassen sich auch für den ebenen Dehnungszustand finden. In Abbildung 6.17 sind die maximal zulässigen Verschiebungsräume dargestellt. Die zugehörigen maximalen makroskopischen Spannungen findet man in Abbildung 6.18. Der Aufbau der Abbildungen ist analog zu denen des ebenen Spannungszustandes. Die dort festgestellten Beobachtungen treffen in gleicher Weise zu.

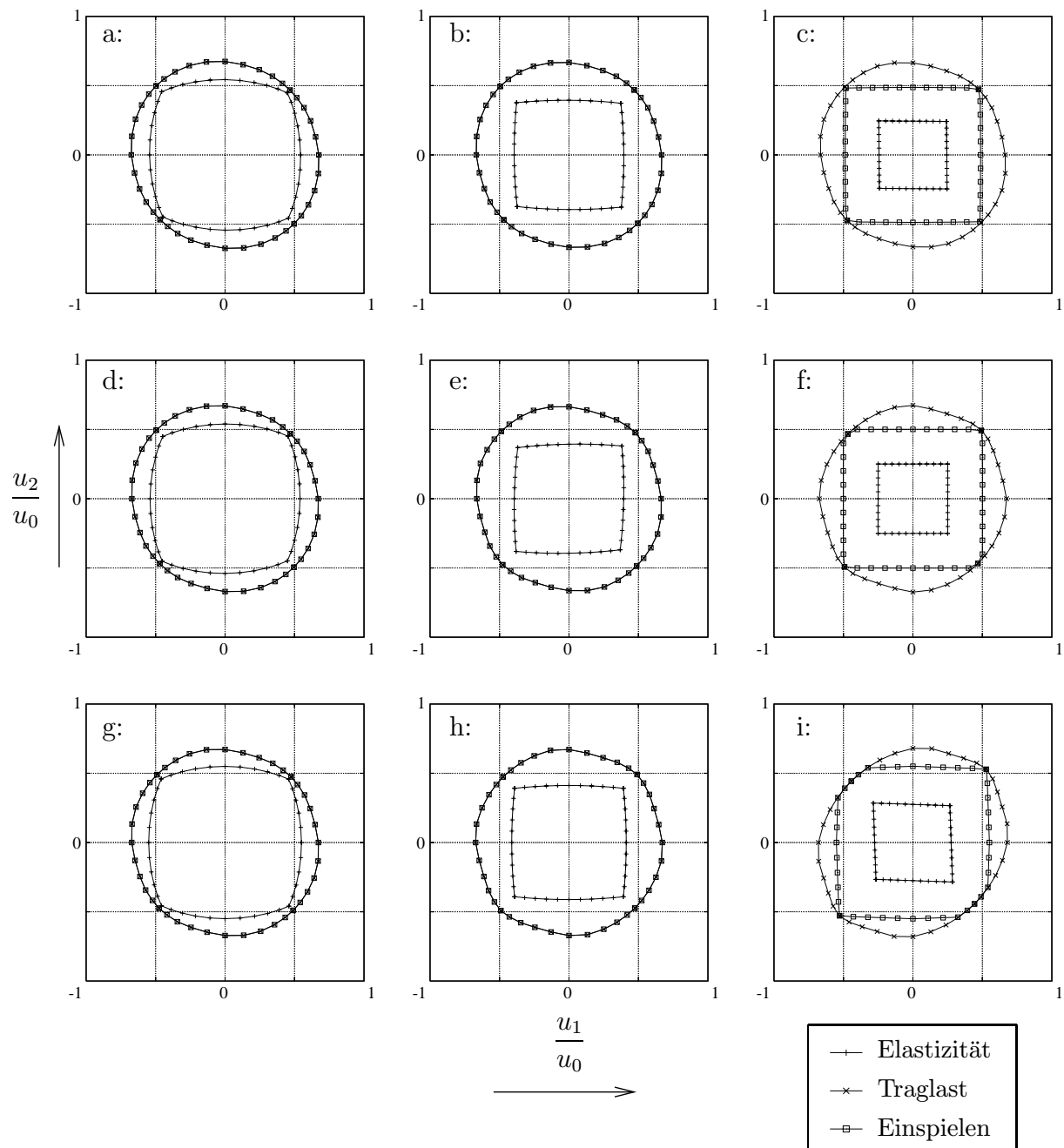


Abbildung 6.15: Zulässige Verschiebungsräume (ebener Spannungszustand)

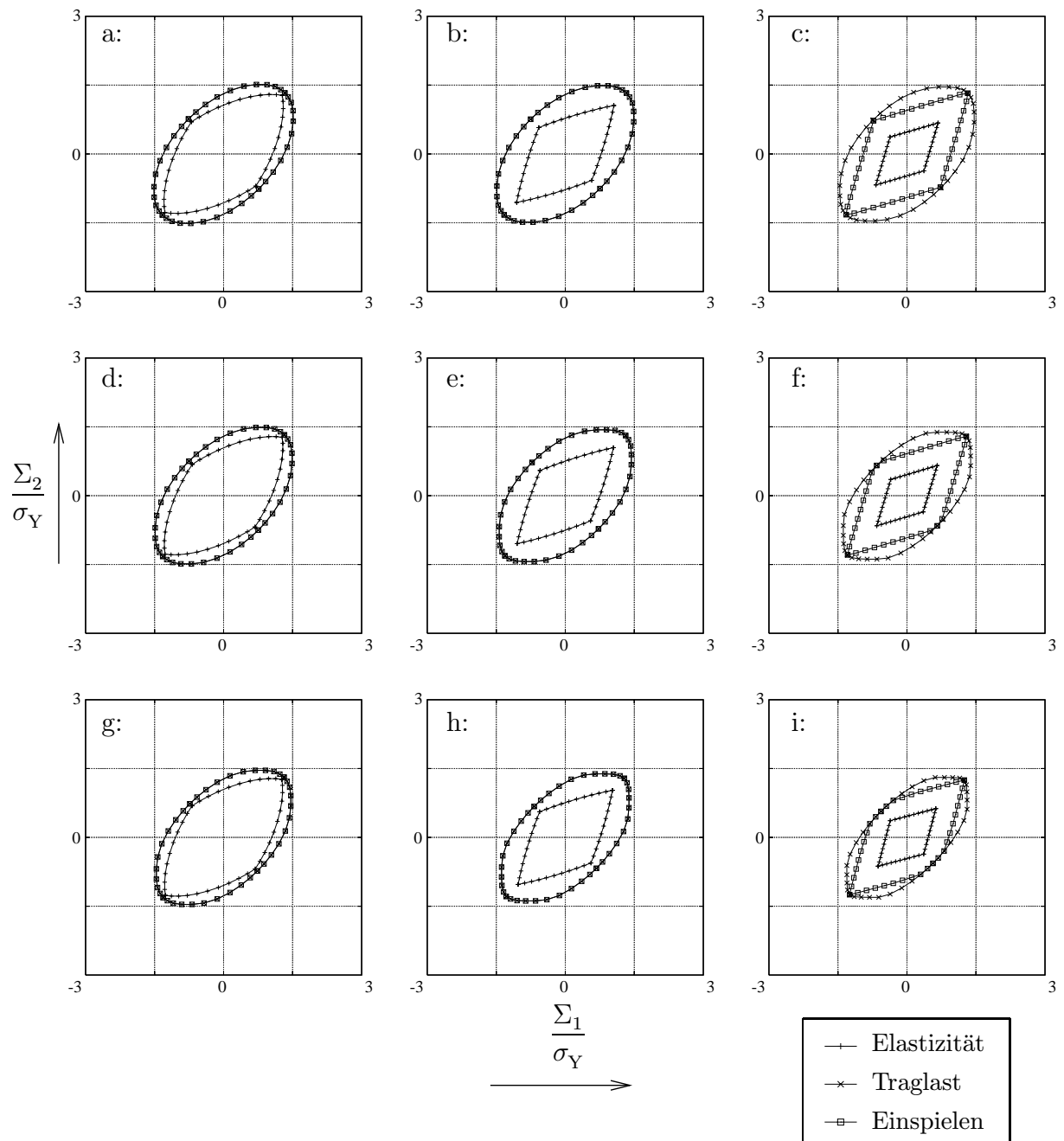


Abbildung 6.16: Maximale makroskopische Spannungen (ebener Spannungszustand)

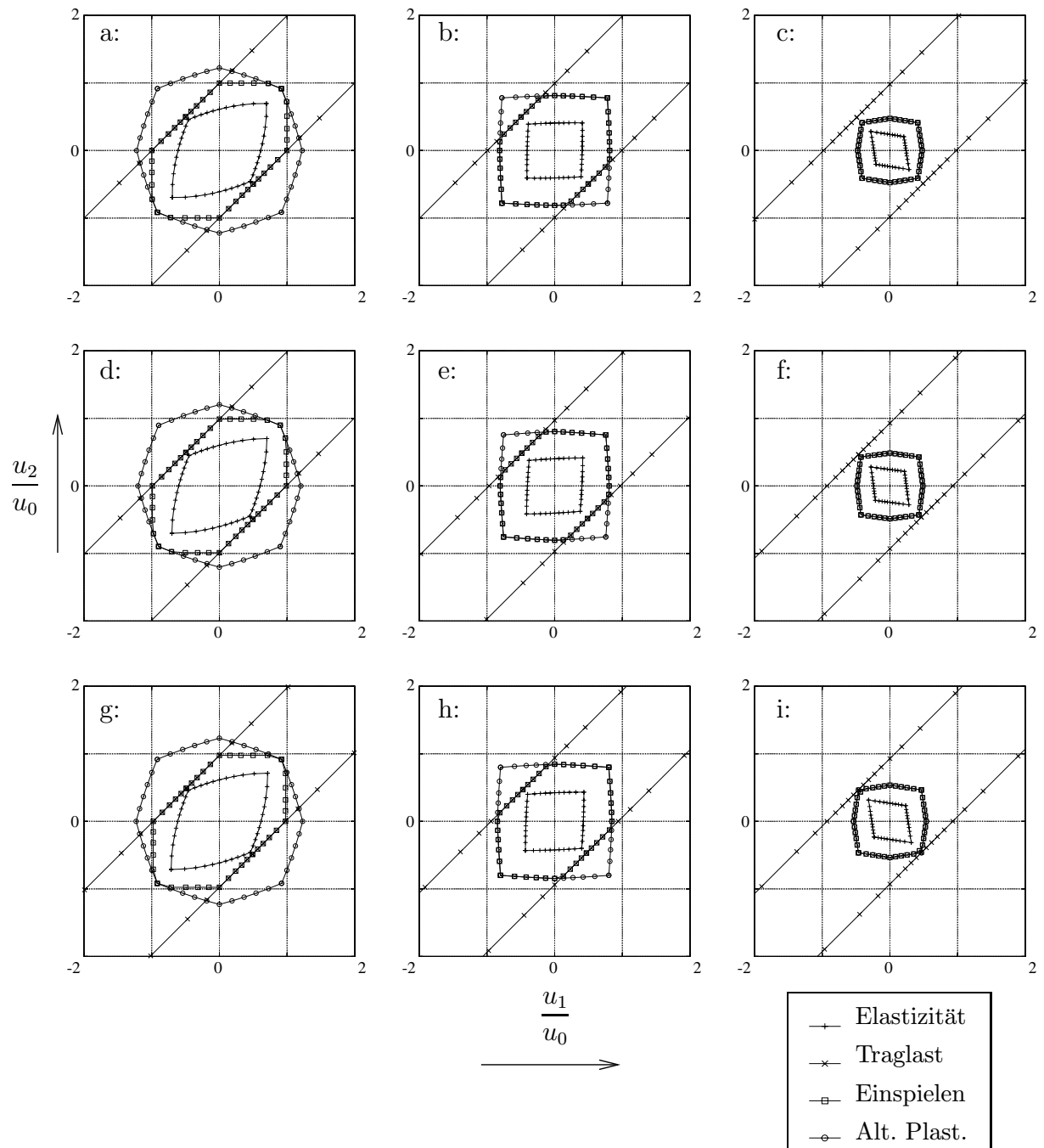


Abbildung 6.17: Zulässige Verschiebungsräume (ebener Dehnungszustand)

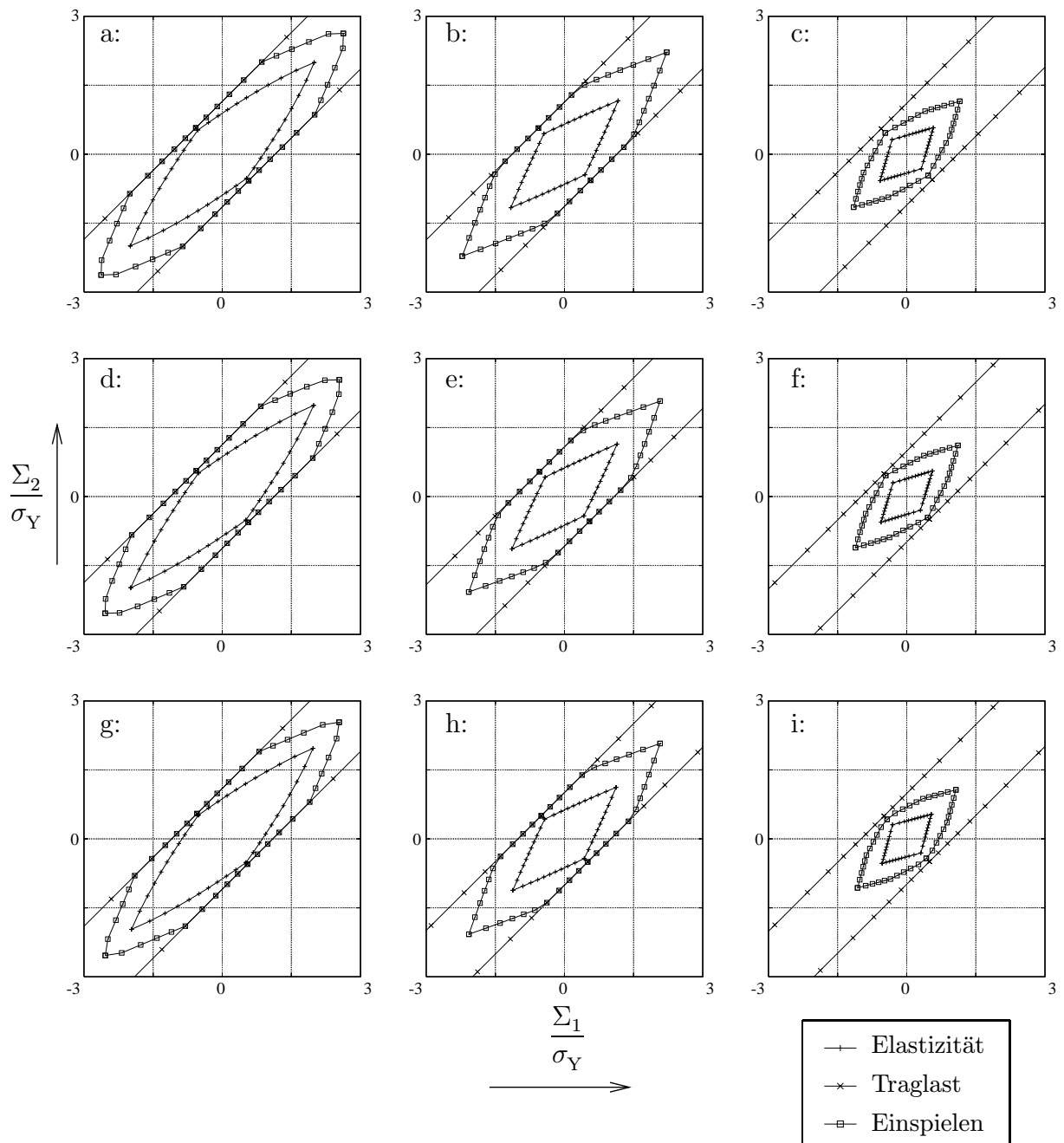


Abbildung 6.18: Maximale makroskopische Spannungen (ebener Dehnungszustand)



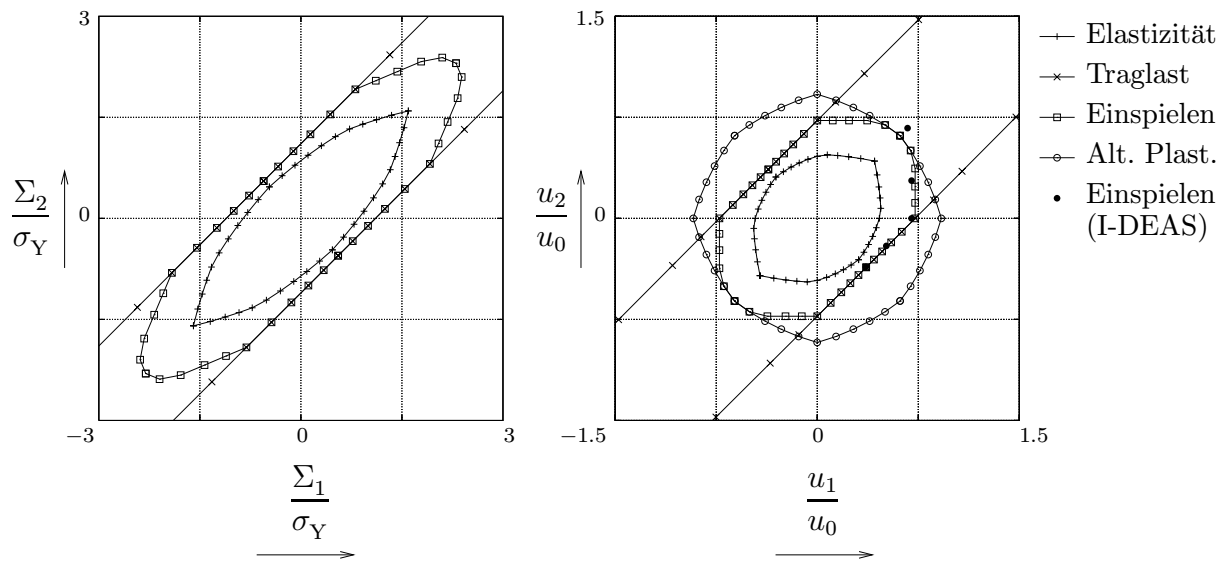


Abbildung 6.20: Zulässiger makroskopischer Spannungs- und Verschiebungsraum für heterogenes Material (10 %) (ebener Dehnungszustand)

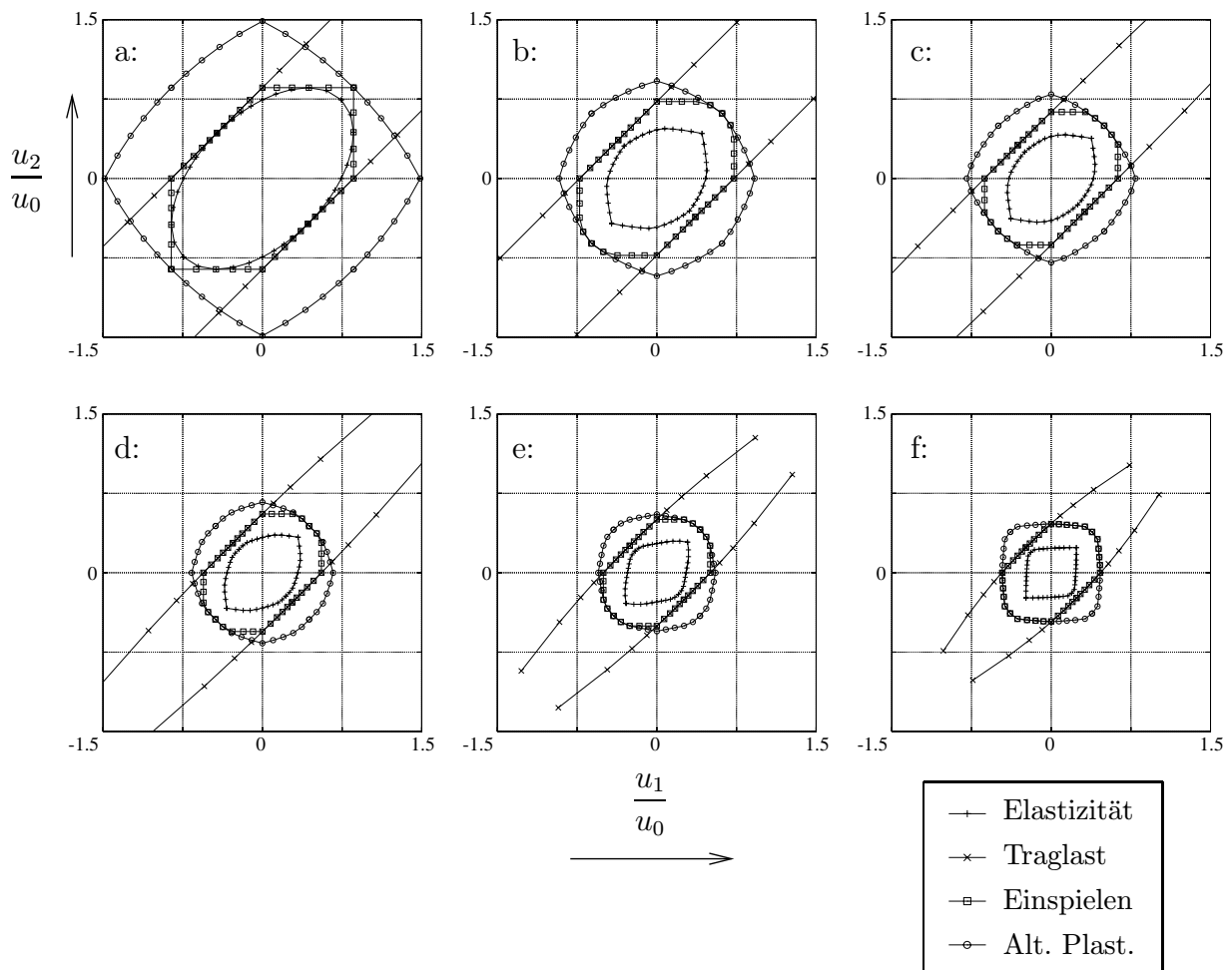


Abbildung 6.21: Zulässige Verschiebungsräume (ebener Dehnungszustand)

In der Abbildung 6.21 werden die Ergebnisse der maximal zulässigen Verschiebungsräume für verschiedene Volumenverhältnisse gezeigt. Beginnend mit der Abbildung 6.21.a, in der homogenes Materialverhalten verwandt wird (0% Volumenanteil) wird der Volumenanteil der Faser um jeweils 10% bis zur Abbildung 6.21.f (50% Volumenanteil) gesteigert. Für die zweiaxiale Zug-Druckbelastung mit gleich großen vorgegebenen Verschiebungen ist es nicht möglich eine Traglastlösung zu finden. Darauf sind die nicht geschlossenen Ergebniskurven in den Abbildungen zurückzuführen. In der Abbildung 6.22 sind die zugehörigen maximalen makroskopischen Spannungen wiedergegeben. Während in Abbildung 6.21 der optische Eindruck erweckt wird, daß die Belastbarkeit des Materials mit steigendem Volumenanteil abnimmt, erkennt man an Hand der Abbildung 6.22 die Zunahme der maximal möglichen makroskopischen Spannungen. Insbesondere bei einer einaxialen Belastung ist eine Zunahme in Abszissen- bzw. Ordinatenrichtung innerhalb der Diagramme erkennbar. Bei einer zweiaxialen Belastung ist dieser Effekt geringer ausgeprägt. Dies ist noch eindeutiger in der Abbildung 6.7 des Kapitels 6.2 zu erkennen. Die dort abgetragenen Werte für einaxialen Zug bzw. Druck können in den hier gezeigten Abbildungen wiedergefunden werden.

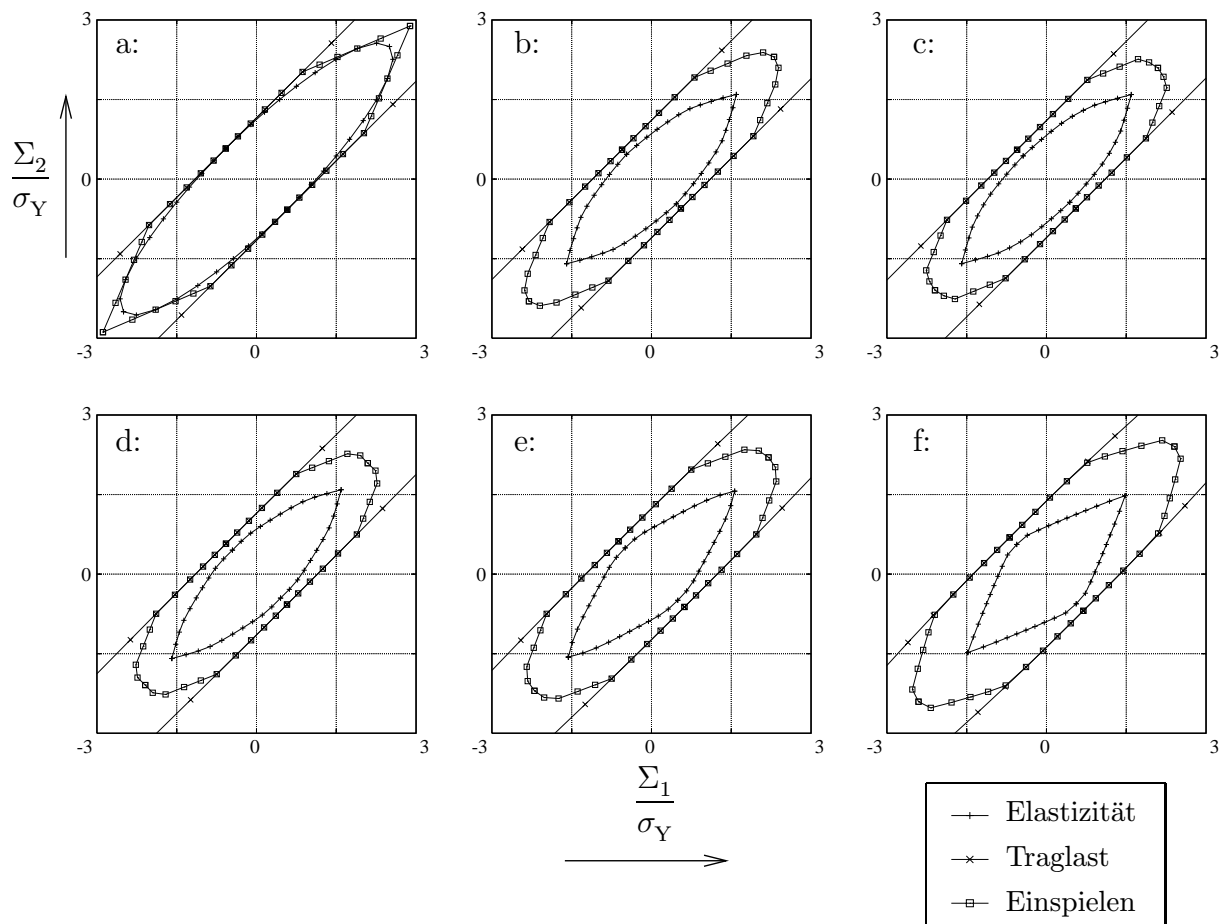


Abbildung 6.22: Maximale makroskopische Spannungen (ebener Dehnungszustand)

Bisher sind mit Hilfe der Einspielanalyse die maximal erlaubten Verschiebungslasträume ermittelt worden. Die zugehörigen Spannungsräume, die durch die makroskopischen Spannungen aufgespannt werden, haben eine verzerrte Gestalt (Abbildung 6.14.b). Für die Elastizitätslösung und die Traglastlösung ist dies unproblematisch, da die Belastungsgeschichte ein Ansteigen der Last bis zum erlaubten Wert vorsieht. Die Grenzen hierfür werden einerseits durch eine maximal zulässige Verschiebung und andererseits durch die zugehörige maximal zulässige makroskopische Spannung ausgedrückt. Für die Einspielanalyse ist es dagegen wünschenswert, einen rechteckförmigen Lastraum, der durch die makroskopischen Spannungen aufgespannt wird, angeben zu können (Abbildung 6.14.a). Dies ist möglich, indem die Lastecken des gewünschten rechteckförmigen makroskopischen Spannungsraumes mit ihren zugehörigen mikroskopischen Spannungsfeldern und den erzeugenden Verschiebungen  $u_1$  und  $u_2$  indirekt bestimmt werden. Dazu wird in einem ersten Schritt der elastisch maximal mögliche einaxiale makroskopische Spannungszustand ermittelt. Er kann beispielsweise aus den Abbildungen 6.22 abgelesen werden. Aus Symmetriegründen finden sich mehrere Punkte, die die Bedingung des einaxialen Spannungszustandes erfüllen. Diesen Spannungszuständen sind erzeugende Verschiebungen  $u_1^e$  und  $u_2^e$  zugeordnet (Abbildung 6.23).

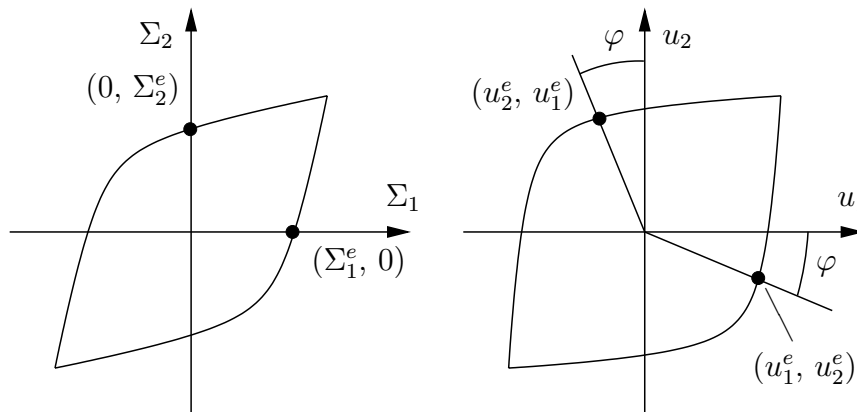


Abbildung 6.23: Basisverschiebungen und charakteristische Winkel

Diese Verschiebungen  $u_1^e$  und  $u_2^e$  bilden die Basisverschiebungen, mit denen der gewünschte Lastraum beschrieben werden kann. Charakteristisch für die Verzerrung des Verschiebungsraumes ist der Winkel  $\varphi$  der aus den Basisverschiebungen ermittelt werden kann. In der nachfolgenden Tabelle 6.5 finden sich diese Werte für die verschiedenen Volumenverhältnisse  $f$  von Faservolumen zum Gesamtvolumen wieder.

Mit diesen Basisverschiebungen bzw. dem charakteristischen Winkel  $\varphi$  lassen sich nun die Lastecken eines rechteckförmigen Lastraumes, der durch makroskopische Spannungen

$f$	$\frac{\Sigma_1^e}{\sigma_Y}$	$\frac{\Sigma_2^e}{\sigma_Y}$	$\frac{u_1^e}{u_0}$	$\frac{u_2^e}{u_0}$	$\varphi = \arctan \frac{u_2^e}{u_1^e}$
0%	1.1237	0.0000	0.5843	-0.2504	-23.20°
10%	0.8558	0.0000	0.3950	-0.1668	-22.89°
20%	0.8244	0.0000	0.3331	-0.1369	-22.34°
30%	0.8472	0.0000	0.2958	-0.1172	-21.61°
40%	0.8617	0.0000	0.2570	-0.0976	-20.80°
50%	0.8949	0.0000	0.2258	-0.0824	-20.05°

Tabelle 6.5: Charakteristische Größen für die einaxiale makroskopische Zugbelastung

aufgespannt wird, beschreiben. Die vier Lastecken setzen sich wie folgt zusammen:

$$\mathcal{P}_1\{\Sigma_1 = 0, \Sigma_2 = 0\} \hat{=} \mathcal{P}_1\{u_1 = 0, u_2 = 0\}, \quad (6.11)$$

$$\mathcal{P}_2\{\Sigma_1 \neq 0, \Sigma_2 = 0\} \hat{=} \mathcal{P}_2\{u_1 = \alpha u^* \cos \varphi, u_2 = \alpha u^* \sin \varphi\}, \quad (6.12)$$

$$\mathcal{P}_3\{\Sigma_1 \neq 0, \Sigma_2 \neq 0\} \hat{=} \mathcal{P}_3\{u_1 = \alpha(u^* \cos \varphi + u^{**} \sin \varphi), \\ u_2 = \alpha(u^* \sin \varphi + u^{**} \cos \varphi)\}, \quad (6.13)$$

$$\mathcal{P}_4\{\Sigma_1 = 0, \Sigma_2 \neq 0\} \hat{=} \mathcal{P}_4\{u_1 = \alpha u^{**} \sin \varphi, u_2 = \alpha u^{**} \cos \varphi\}. \quad (6.14)$$

Sie begrenzen den rechteckförmigen Lastraum, der durch makroskopische Spannungen aufgespannt wird (Abbildung 6.24.a), bzw. den verzerrten Lastraum, der durch Verschiebungen aufgespannt wird (Abbildung 6.24.b). Dieser Lastraum der Verschiebungen hat dabei die Form einer Raute. Hierin sind  $u^*$  und  $u^{**}$  zwei frei zu wählende Verschiebungen. Ihr Verhältnis zueinander bestimmt auch das Verhältnis von  $\Sigma_1$  zu  $\Sigma_2$ . In der Einspielanalyse werden dann mit Hilfe der Verschiebungen mikroskopische Spannungsfelder ermittelt. Hiermit läßt sich der Sicherheitsfaktor  $\alpha$  ermitteln, der die absolute Größe des von  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  aufgespannten makroskopischen Spannungsraumes bestimmt.

Diese Vorgehensweise, insbesondere die Linearkombination von Basisverschiebungen, mikroskopischen Spannungsfeldern und makroskopischen Spannungen ist zulässig, da ausschließlich mit Größen elastischer Spannungszustände gearbeitet (die zeitunabhängigen Eigenspannungen haben nach Gleichung (3.69) und (3.73) keinen Einfluß auf die Berechnung des makroskopischen Spannungszustandes) und die Gültigkeit der geometrisch linearisierten Theorie vorausgesetzt wird.

Mit dieser Technik wird nun der Verbundwerkstoff unter der Wirkung veränderlicher makroskopischer Spannungen untersucht. Es werden folgende Belastungsfälle unterschieden:

#### 1. Elastizität:

Die makroskopischen Spannungen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  können unabhängig voneinander variieren. Es wird nun festgestellt, inwieweit der von  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  aufgespannte Lastraum,

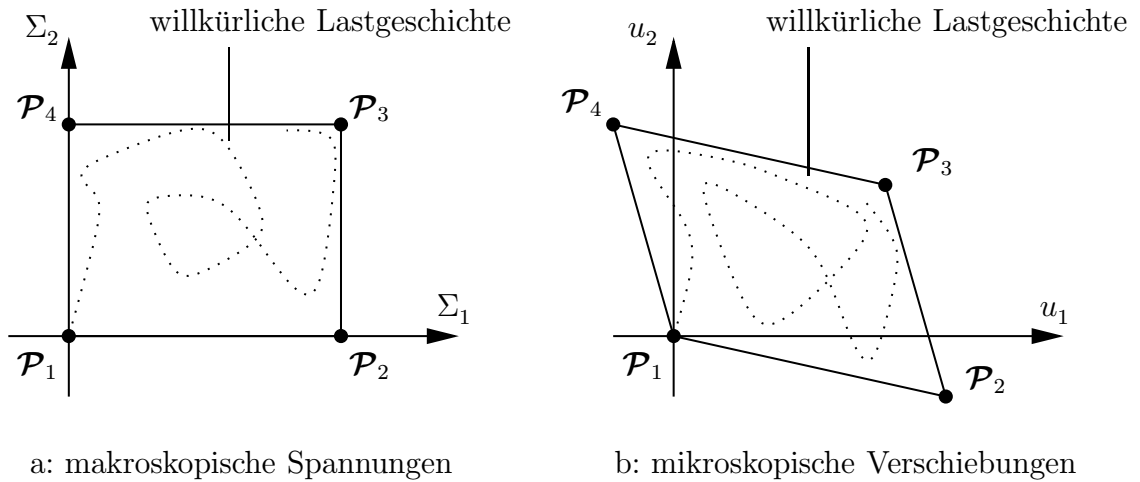


Abbildung 6.24: Zusammenhang zwischen den durch makroskopischen Spannungen bzw. mikroskopischen Verschiebungen aufgespannten Lasträumen

der durch die Lastecken  $\mathcal{P}_1$  bis  $\mathcal{P}_4$  begrenzt wird (Abbildung 6.24), vergrößert werden kann, damit sich das Material jederzeit rein elastisch verhält:

$$\Sigma_1 = \alpha_e \mu_1 \Sigma_1^*, \quad \Sigma_2 = \alpha_e \mu_2 \Sigma_2^* \quad (6.15)$$

mit  $0 \leq \mu_1 \leq 1$  und  $0 \leq \mu_2 \leq 1$ .

## 2. Traglastgrenze:

Die makroskopischen Spannungen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  steigen vom unbelasteten Zustand monoton und proportional zueinander bis zum Erreichen der Traglastgrenze an:

$$\Sigma_1 = \alpha_L \mu \Sigma_1^*, \quad \Sigma_2 = \alpha_L \mu \Sigma_2^* \quad (6.16)$$

mit  $0 \leq \mu \leq 1$ .

Die Ergebnisse sind aus den Abbildungen 6.22 übernommen worden.

## 3. Einspielgrenze:

Die makroskopischen Spannungen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  können unabhängig voneinander variieren. Es wird nun festgestellt, inwieweit der von  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  aufgespannte Lastraum, der durch die Lastecken  $\mathcal{P}_1$  bis  $\mathcal{P}_4$  begrenzt wird (Abbildung 6.24), vergrößert werden kann, damit der Verbundwerkstoff unter den gegebenen Lasten einspielt:

$$\Sigma_1 = \alpha_{SD} \mu_1 \Sigma_1^*, \quad \Sigma_2 = \alpha_{SD} \mu_2 \Sigma_2^* \quad (6.17)$$

mit  $0 \leq \mu_1 \leq 1$  und  $0 \leq \mu_2 \leq 1$ .

In der nachfolgenden Abbildung 6.25 sind die Ergebnisse dieser Untersuchungen analog zu den Abbildungen 6.22 dargestellt. Abgetragen wird die maximal zulässige makroskopische

Spannung für die Lastecke  $\mathcal{P}_3$  normiert mit der Fließspannung  $\sigma_Y$  des Matrixmaterials. Für die Elastizitäts- und Einspielanalyse geben die Ergebniskurven jeweils die äußere Ecke des zulässigen Lastraumes wieder.

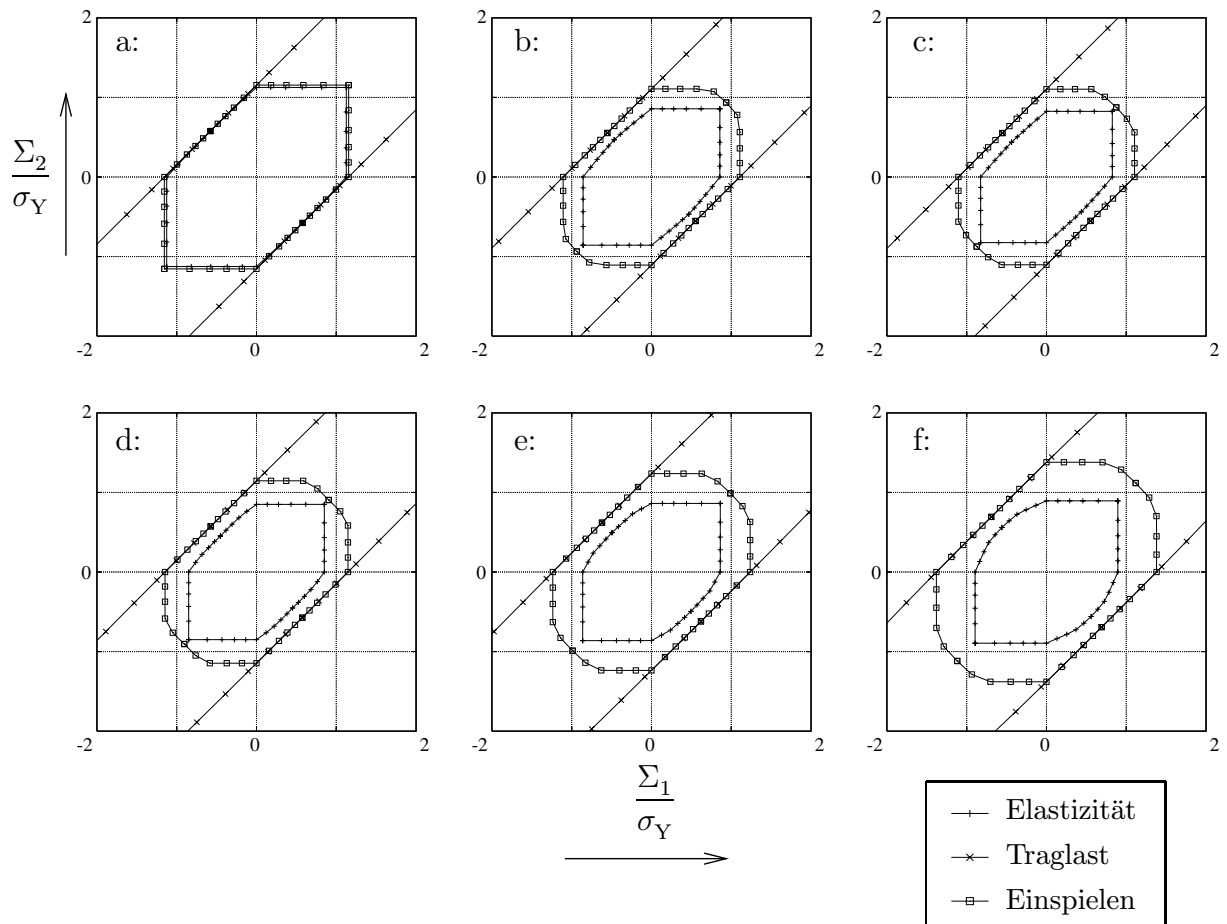


Abbildung 6.25: Zulässige makroskopische Spannungsräume (ebener Dehnungszustand)

Man erkennt deutlich, daß die elastische Lösung für das homogene Material optimale Werte im Vergleich zu den Lösungen mit Fasereinschluß annimmt. Mit steigendem Volumenanteil verändert sich der Verlauf nur geringfügig. Dagegen zeigen Traglast- und Einspiellösung bei höheren Volumenverhältnissen eine deutliche Vergrößerung ihrer Werte.

## 6.4 Zug- bzw. Druckbelastung mit Schub

Im folgenden wird der zuletzt betrachtete Verbundwerkstoff auch unter der Wirkung von Schubspannungen untersucht. Die Vorgehensweise zur Bestimmung der maximal zulässigen Verschiebungsräume ist bereits im Kapitel 6.1 erläutert worden. Der Verbundwerkstoff wird sich unter der Wirkung von Schub- und Normalspannungen zu einer Raute verformen. Diese Form weist keine Symmetrieachsen auf, die bei der Finiten-Elemente-Diskretisierung ausgenutzt werden könnten. Lediglich der Mittelpunkt der quadratischen Einheitszelle verändert seine Lage unter einer symmetrischen Belastung nicht. Dies wird bei der Finite-Elemente-Diskretisierung in den Randbedingungen berücksichtigt. Weiterhin ist es erforderlich, das gesamte repräsentative Volumenelement zu diskretisieren. In der Abbildung 6.26 ist dies dargestellt ( $D/L = 0.2$ ). Zur Verwendung kommen 308 isoparametrische Dreieckselemente mit quadratischen Ansatzfunktionen und insgesamt 649 Knoten.

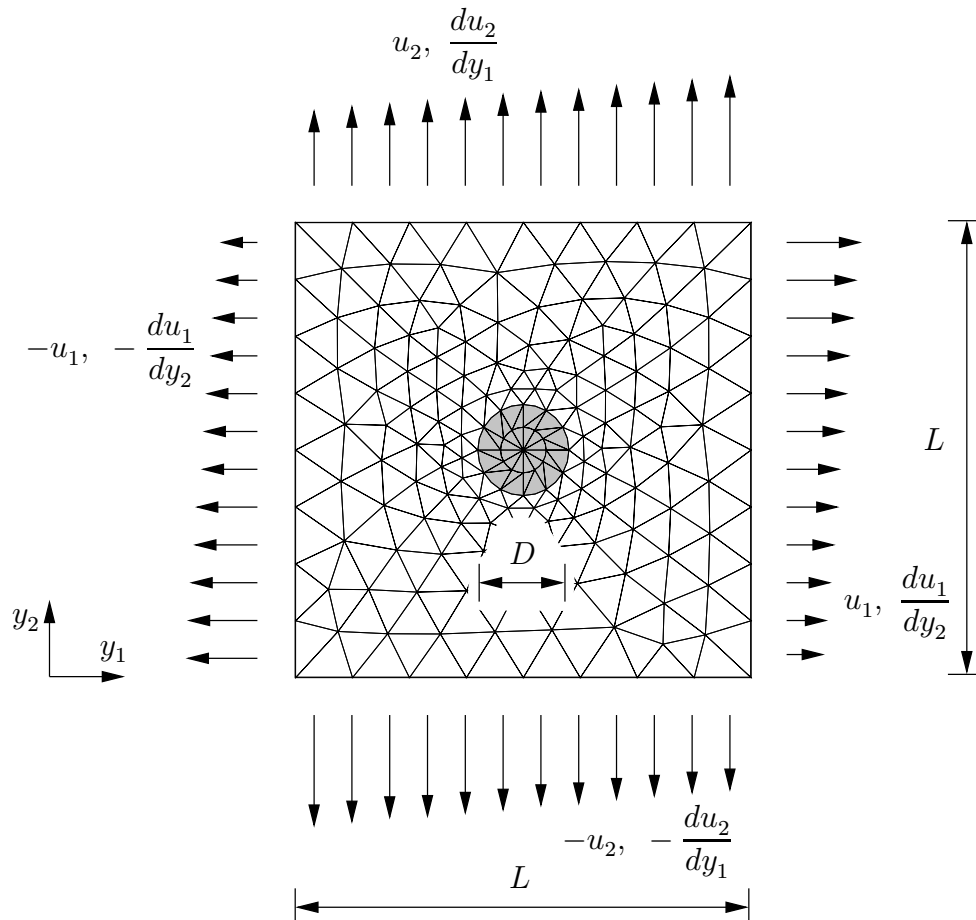


Abbildung 6.26: Geometrie, FE-Netz und Lasten ( $u_0 = 0.0001$  m,  $L = 0.1$  m)

Auf den Kanten dieses Volumenelementes werden linear über der Kante anwachsende Verschiebungen aufgebracht. Die jeweils auf gegenüberliegenden Kanten vorgegebenen Verschiebungen sind dabei punktsymmetrisch zum Mittelpunkt des Volumenelementes. Allen

vier Verschiebungsverläufen ist der Gradient der Verschiebung gemeinsam  $\left(\frac{du_1}{dy_2} = \frac{du_2}{dy_1}\right)$ . Die Traglast- und Einspielanalyse wird nun für verschiedene Verhältnisse der Verschiebungen und des Gradienten zueinander durchgeführt. Dabei werden folgende Lastfälle untersucht:

1. Elastizität:

Die Verschiebungen  $u_1 = u_2$  und der Gradient  $\frac{du_1}{dy_2} = \frac{du_2}{dy_1}$  werden gleichmäßig vom unbelasteten Zustand erhöht, bis das Material des Volumenelementes anfängt zu fließen:

$$u_1 = u_2 = \alpha_e \mu u^*, \quad \frac{du_1}{dy_2} = \frac{du_2}{dy_1} = \alpha_e \mu \frac{du^*}{dy} \quad (6.18)$$

mit  $0 \leq \mu \leq 1$ .

Die Verschiebungen  $u_1 = u_2$  und  $\frac{du_1}{dy_2} = \frac{du_2}{dy_1}$  werden im selben Verhältnis zueinander, wie in Abbildung 6.27.a gezeigt, bis zum Erreichen der Elastizitätsgrenze (Lastecke  $\mathcal{P}_3$ ) erhöht.

2. Traglastgrenze:

$u_1 = u_2$  und  $\frac{du_1}{dy_2} = \frac{du_2}{dy_1}$  steigen vom unbelasteten Zustand monoton und proportional zueinander bis zum Erreichen der Traglastgrenze an (Abbildung 6.27.a):

$$u_1 = u_2 = \alpha_L \mu u_1^*, \quad \frac{du_1}{dy_2} = \frac{du_2}{dy_1} = \alpha_L \mu \frac{du^*}{dy} \quad (6.19)$$

mit  $0 \leq \mu \leq 1$ .

3. Einspielgrenze:

Die Verschiebungen  $u_1 = u_2$  und  $\frac{du_1}{dy_2} = \frac{du_2}{dy_1}$  können unabhängig voneinander variieren. Es wird festgestellt, in welchem Maße der von  $u_1 = u_2$  und  $\frac{du_1}{dy_2} = \frac{du_2}{dy_1}$  aufgespannte Lastraum, der durch die Lastecken  $\mathcal{P}_1$  bis  $\mathcal{P}_4$  begrenzt wird, vergrößert werden kann, damit das Volumenelement unter den gegebenen Lasten einspielt (Abbildung 6.27.b).

$$u_1 = u_2 = \alpha_{SD} \mu_1 u_1^*, \quad \frac{du_1}{dy_2} = \frac{du_2}{dy_1} = \alpha_{SD} \mu_2 \frac{du^*}{dy} \quad (6.20)$$

mit  $0 \leq \mu_1 \leq 1$  und  $0 \leq \mu_2 \leq 1$ .

In der Abbildung 6.28 werden die Ergebnisse der Traglast- und Einspieluntersuchung für den ebenen Dehnungszustand wiedergegeben. Abgetragen werden die Lasträume, die durch einen maximalen Verschiebungsgradienten und eine maximale Verschiebung gekennzeichnet sind. In der Abbildung 6.29 sind die zugehörigen maximalen makroskopischen Spannungen normiert mit der Fließspannung des Matrixmaterials dargestellt.

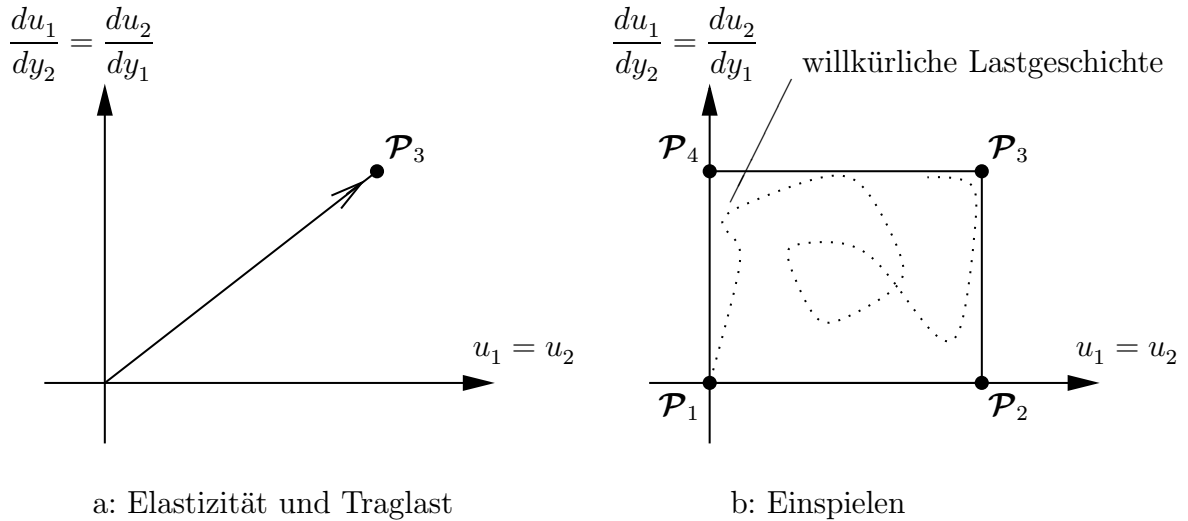


Abbildung 6.27: Lasträume

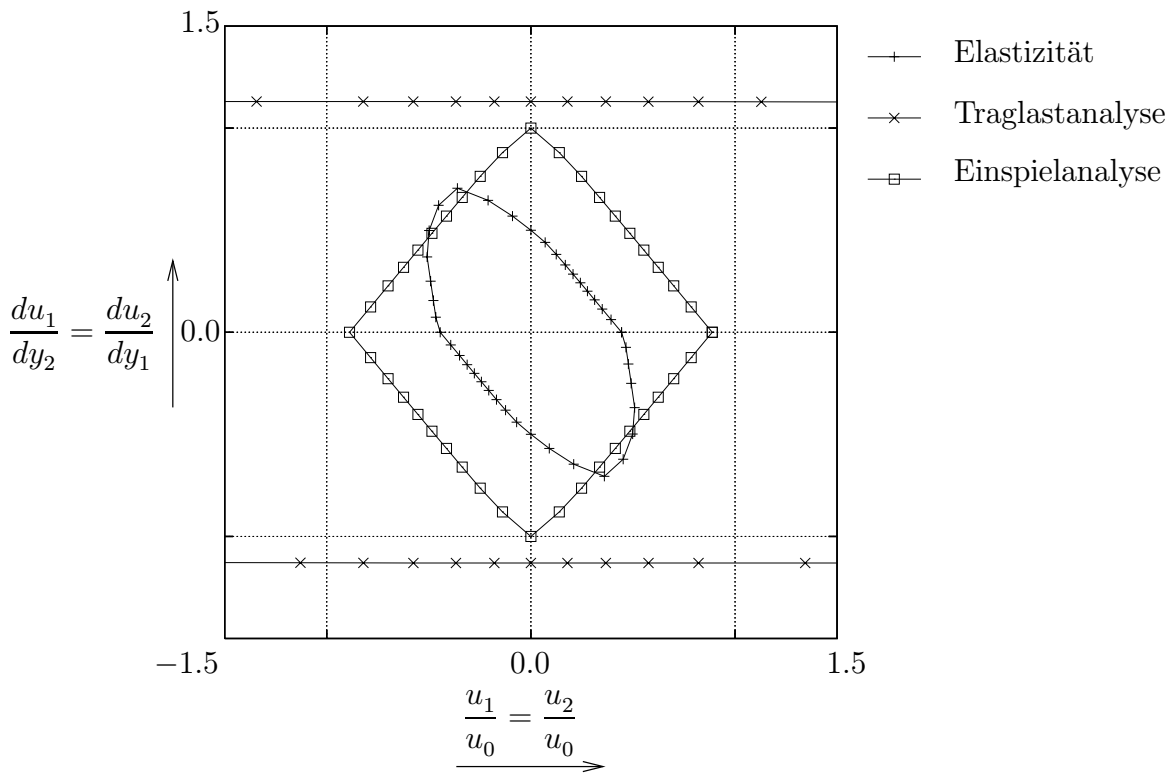


Abbildung 6.28: Zulässige Verschiebungsräume

Die in Abbildung 6.29 dargestellten maximalen makroskopischen Spannungen charakterisieren verzerrte Lasträume. Auch hier ist es wünschenswert, rechteckförmige Lasträume (Abbildung 6.30.b), die durch makroskopische Spannungen aufgespannt werden, angeben zu können. Die Vorgehensweise zur Ermittlung solcher Lasträume ist analog zur Vorgehensweise des vorangegangenen Kapitels. Aus der Abbildung 6.29 lassen sich zum

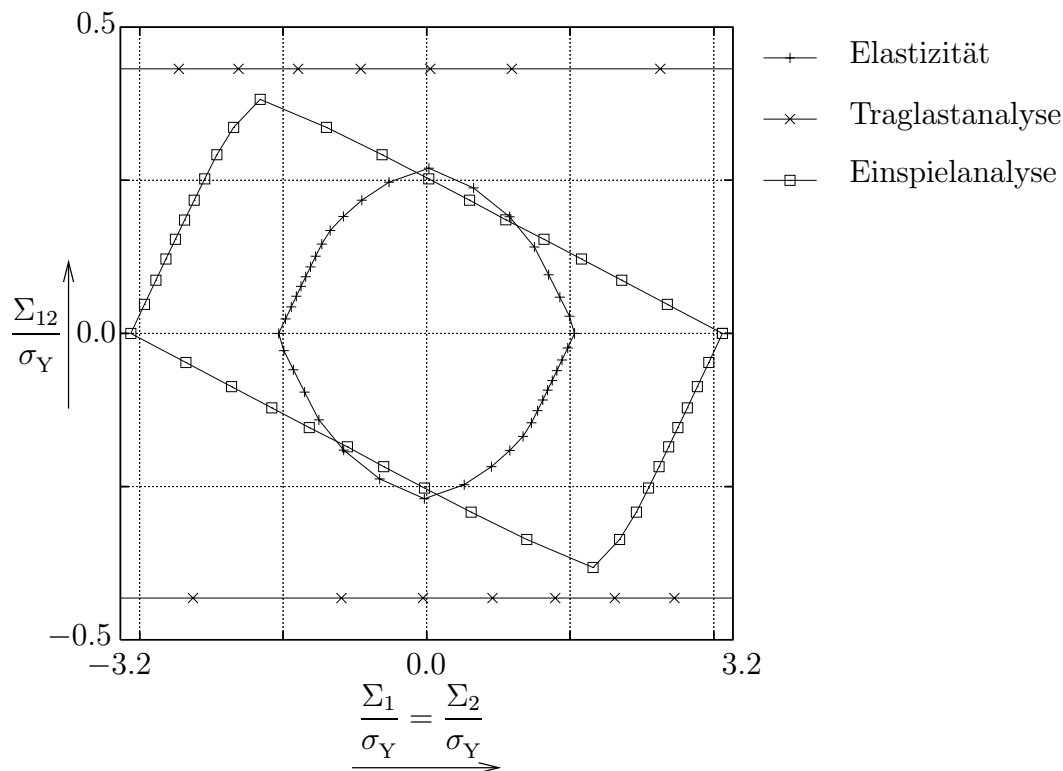


Abbildung 6.29: Makroskopische Spannungen

einen ein elastischer schubspannungsfreier makroskopischer Spannungszustand und zum anderen der elastische rein schubspannungsbehaftete makroskopische Spannungszustand finden. Beiden können mit Hilfe der Abbildung 6.28 die erzeugenden Verschiebungen bzw. Verschiebungsgradienten zugeordnet werden.

$\frac{\Sigma_1^e}{\sigma_Y} = \frac{\Sigma_2^e}{\sigma_Y}$	$\frac{\Sigma_{12}^e}{\sigma_Y}$	$\frac{u_1^e}{u_0} = \frac{u_2^e}{u_0}$	$\frac{du_2^e}{dy_1} = \frac{du_1^e}{dy_2}$	$\arctan \frac{u_0}{u_1^e} \frac{du_1^e}{dy_2}$
1.5458	0.0	0.4442	0.0	$\varphi_1 = 0^\circ$
0.0	0.2707	0.3542	-0.7085	$\varphi_2 = -63,44^\circ$

Tabelle 6.6: Charakteristische Größen für schubspannungsbehaftete Belastung

Die Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  sind charakteristische Größen, die diese beiden Belastungszustände eindeutig kennzeichnen.

Hiermit läßt sich der in Abbildung 6.30.b gezeigte rechteckförmige makroskopischer Span-

nungsraum aufspannen.

$$\mathcal{P}_1\{\Sigma_1 = \Sigma_2 = 0, \Sigma_{12} = 0\} \hat{=} \mathcal{P}_1\{u_1 = u_2 = 0, \frac{du_1}{dy_2} = \frac{du_2}{dy_1} = 0\}, \quad (6.21)$$

$$\mathcal{P}_2\{\Sigma_1 = \Sigma_2 \neq 0, \Sigma_{12} = 0\} \hat{=} \mathcal{P}_2\{u_1 = u_2 = \alpha u^* \cos \varphi_1, \frac{du_1}{dy_2} = \frac{du_2}{dy_1} = \alpha m^* \sin \varphi_1\}, \quad (6.22)$$

$$\mathcal{P}_3\{\Sigma_1 = \Sigma_2 \neq 0, \Sigma_{12} \neq 0\} \hat{=} \mathcal{P}_3\{u_1 = u_2 = \alpha u^* (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2), \frac{du_1}{dy_2} = \frac{du_2}{dy_1} = \alpha m^* (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)\}, \quad (6.23)$$

$$\mathcal{P}_4\{\Sigma_1 = \Sigma_2 = 0, \Sigma_{12} \neq 0\} \hat{=} \mathcal{P}_4\{u_1 = u_2 = \alpha u^* \cos \varphi_2, \frac{du_1}{dy_2} = \frac{du_2}{dy_1} = \alpha m^* \sin \varphi_2\}. \quad (6.24)$$

Hierin sind  $u^*$  und  $m^*$  frei zu wählende Größen. Ihr Verhältnis zueinander bestimmt das Verhältnis der makroskopischen Normalspannungen  $\Sigma_1 = \Sigma_2$  zur makroskopischen Schubspannung  $\Sigma_{12}$ . Der Sicherheitsfaktor  $\alpha$  wird in der Einspielanalyse ermittelt.

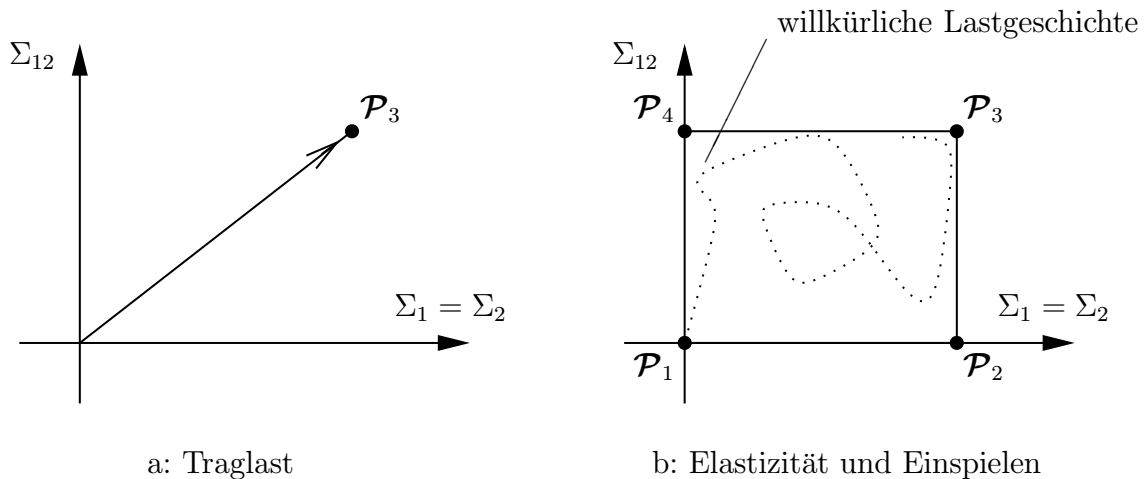


Abbildung 6.30: Lasträume

Untersucht werden im folgenden drei mögliche Belastungsfälle:

1. Elastizität:

Die makroskopischen Spannungen  $\Sigma_1 = \Sigma_2$  und  $\Sigma_{12}$  können unabhängig voneinander im Bereich der Elastizität variieren (Abbildung 6.30.b).

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \alpha_e \mu \Sigma_1^*, \quad \Sigma_{12} = \alpha_e \mu \Sigma_{12}^* \quad (6.25)$$

mit  $0 \leq \mu \leq 1$ .

2. Traglastgrenze:

$\Sigma_1 = \Sigma_2$  und  $\Sigma_{12}$  steigen vom unbelasteten Zustand monoton und proportional

zueinander bis zum Erreichen der Traglastgrenze an (Abbildung 6.30.a):

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \alpha_L \mu \Sigma_1^*, \quad \Sigma_{12} = \alpha_L \mu \Sigma_{12}^* \quad (6.26)$$

mit  $0 \leq \mu \leq 1$ .

### 3. Einspielgrenze:

Die makroskopischen Spannungen  $\Sigma_1 = \Sigma_2$  und  $\Sigma_{12}$  können unabhängig voneinander variieren. Es wird nun festgestellt, in welchem Maße der von  $\Sigma_1 = \Sigma_2$  und  $\Sigma_{12}$  aufgespannte Lastraum, der durch die Lastecken  $\mathcal{P}_1$  bis  $\mathcal{P}_4$  begrenzt wird, vergrößert werden kann, damit das Volumenelement unter den gegebenen Lasten einspielt (Abbildung 6.30.b).

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \alpha_{SD} \mu_1 \Sigma_1^*, \quad \Sigma_{12} = \alpha_{SD} \mu_2 \Sigma_{12}^* \quad (6.27)$$

mit  $0 \leq \mu_1 \leq 1$  und  $0 \leq \mu_2 \leq 1$ .

Die nachfolgende Abbildung 6.31 zeigt das Ergebnis dieser Untersuchungen. Dargestellt sind die rechteckförmigen Lasträume, die durch die makroskopischen Normal- und Schubspannungen aufgespannt werden. Angegeben wird jeweils der zur Lastecke  $\mathcal{P}_3$  gehörende maximale makroskopische Spannungszustand.

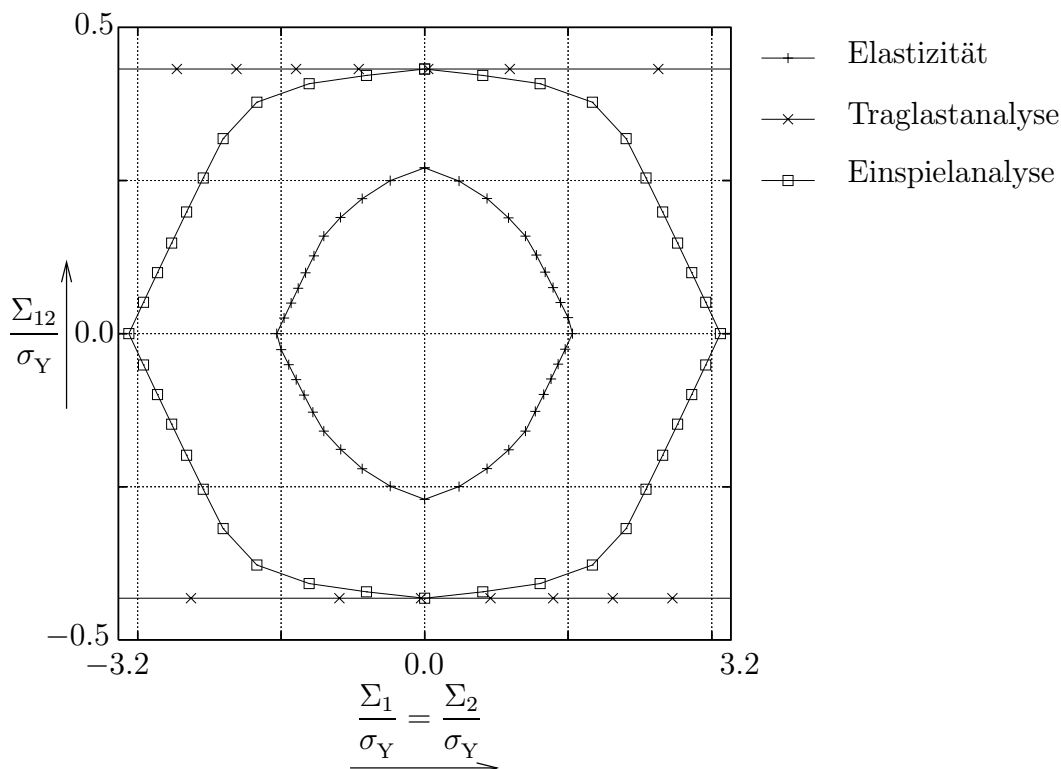


Abbildung 6.31: Makroskopisch zulässige Spannungsräume

## 7 Die Einspielanalyse als Optimierungskriterium

Das in den Kapiteln 2 und 3 vorgestellte Verfahren zur Bestimmung von Einspielfaktoren kann auch als Kriterium zur Entwicklung und Gestaltung von Strukturen eingesetzt werden. Vorgegeben wird dabei eine zu verändernde Größe der Struktur. Diese muß sich mit Design-Parametern beschreiben lassen. Diese Design-Parameter werden in einem überlagerten Optimierungsverfahren verändert, so daß sich für die Einspielanalyse ein optimaler Wert ergibt. Die Grundidee dieses Verfahrens wird im nachfolgenden Flußdiagramm veranschaulicht.

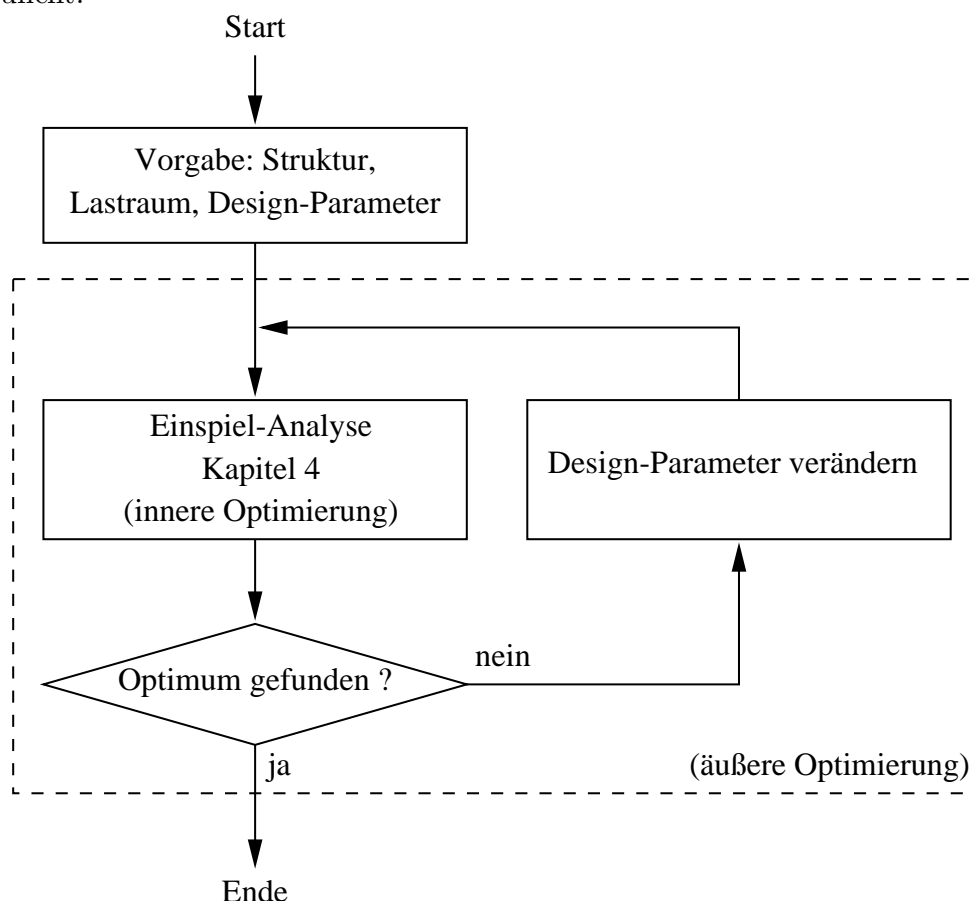


Abbildung 7.1: Flußdiagramm: Einspielanalyse als Optimierungskriterium

Mit dem überlagerten Optimierungsverfahren kann ein absolutes Maximum des Optimierungsproblems nur dann gefunden werden, wenn es sich um ein konvexes Problem handelt. Anderenfalls werden nur lokale Maxima ermittelt.

## 7.1 Das Optimierungsproblem für Verbundwerkstoffe mit periodischer Mikrostruktur

Für Verbundwerkstoffe mit periodischer Mikrostruktur läßt sich das Optimierungsproblem analog zu den Ausführungen der Kapitel 3.6 und 4.6.1 formulieren. Das statische Einspieltheorem wird hier in einen weiteren Optimierungsalgorithmus eingebettet. Der Sicherheitsfaktor  $\alpha_{\text{opt}}$  gibt dabei den optimalen Wert aller Sicherheitsfaktoren für Einspielen wieder. Vorausgesetzt wird dabei die Existenz eines zeitunabhängigen Eigenspannungsfeldes  $\bar{\boldsymbol{\rho}}$  und eines zeitunabhängigen Verfestigungsspannungsfeldes  $\bar{\boldsymbol{\pi}}$ .

$$\alpha_{\text{opt}} = \sup_{\beta} \alpha_{\text{ES}} = \sup_{\beta} \max_{\bar{\boldsymbol{\rho}}, \bar{\boldsymbol{\pi}}, D} \alpha \quad (7.1)$$

$$\text{mit } \mathcal{F}_I \left( \alpha \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{y}, t)}{1 - D(\mathbf{y}, t)} + \frac{\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{y})}{1 - D(\mathbf{y}, t)} - \frac{\bar{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{y})}{1 - D(\mathbf{y}, t)}, \sigma_Y(\mathbf{y}, \Delta\vartheta) \right) < 0, \quad (7.2)$$

$$\mathcal{F}_L \left( \alpha \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e(\mathbf{y}, t)}{1 - D(\mathbf{y}, t)} + \frac{\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{y})}{1 - D(\mathbf{y}, t)}, \sigma_L(\mathbf{y}, \Delta\vartheta) \right) < 0, \quad (7.3)$$

$$D(\mathbf{y}, t) - D_c < 0 \quad (7.4)$$

$$\forall \mathbf{y} \in V \quad \wedge \quad \forall \mathbf{P}(t) \in \mathcal{L}$$

$$\text{mit } \Sigma_{ij}^s(\mathbf{x}, t) = \alpha \frac{1}{V} \int_{(V)} \tilde{\sigma}_{ij}^e dV + \frac{1}{V} \int_{(V)} \bar{\rho}_{ij} dV. \quad (7.5)$$

In diskretisierter Form sieht das Problem wie folgt aus (vgl. Kapitel 4.6.1):

$$\alpha_{\text{opt}} = \sup_{\beta} \alpha_{\text{ES}} = \sup_{\beta} \max_{\{\bar{\boldsymbol{\rho}}\}, \{\bar{\boldsymbol{\pi}}\}, D_{\text{max}}} \alpha \quad (7.6)$$

$$\text{mit } [\mathbf{C}]\{\bar{\boldsymbol{\rho}}\} = \{\mathbf{0}\}, \quad (7.7)$$

$$\mathcal{F}_I \left( \alpha \frac{\{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e\}(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_r)}{1 - D_{\text{max}}(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_r)} + \frac{\{\bar{\boldsymbol{\rho}}\}(\mathbf{y}_i^j)}{1 - D_{\text{max}}(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_r)} - \frac{\{\bar{\boldsymbol{\pi}}\}(\mathbf{y}_i^j)}{1 - D_{\text{max}}(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_r)}, \sigma_Y(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_r^\vartheta) \right) < 0, \quad (7.8)$$

$$\mathcal{F}_L \left( \alpha \frac{\{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e\}(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_r)}{1 - D_{\text{max}}(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_r)} + \frac{\{\bar{\boldsymbol{\rho}}\}(\mathbf{y}_i^j)}{1 - D_{\text{max}}(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_r)}, \sigma_L(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_r^\vartheta) \right) < 0, \quad (7.9)$$

$$D_{\text{max}}(\mathbf{y}_i^j, \mathcal{P}_r) - D_c < 0 \quad (7.10)$$

für  $i = 1 \dots NGE$ ,  $j = 1 \dots NE$ ,  $r = 1 \dots 2^n = m$

$$\text{und } \{\boldsymbol{\Sigma}^s\} = \frac{1}{V} \int_{(V)} \alpha \{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e\} + \{\bar{\boldsymbol{\rho}}\} dV. \quad (7.11)$$

Die Größe  $\beta$  bezeichnet hierin den Vektor der Design-Parameter. Diese Parameter können die Eigenschaften bzw. die Gestalt des Verbundes beschreiben. Zu nennen sind hier die Materialparameter und geometrischen Größen. Die Größen können einzeln oder in Kombination miteinander so verändert werden, daß sich ein optimaler Einspielfaktor einstellt.

## 7.2 Der Optimierungsalgorithmus

Der überlagerte Optimierungsalgorithmus muß spezielle Eigenschaften haben. Infolge der komplizierten Struktur des inneren Optimierungsproblems (Nichtlinearität) ist es erforderlich, daß der äußere Optimierungsalgorithmus auch ohne die Kenntnis von Ableitungen auskommen muß. Ein geeigneter Algorithmus findet sich im „Multidirectional-Search Algorithm“ wieder (TORCZON [163]), der leicht die Integration des Optimierungsproblems der Einspielanalyse zuläßt. Eine ausführliche Diskussion und den zugehörigen Konvergenzbeweis findet man in [30, 162]. An dieser Stelle wird daher auch nur kurz auf die Funktionsweise des nachfolgend wiedergegebenen Algorithmus eingegangen.

„Multidirectional Search Algorithm“ [163]:

```

k=0
% Initialisierung
for i=0,n
    berechne f(a(i,k))
end
while (Abbruchbedingung ist nicht erfüllt) do
    % neuen besten Lösungsvektor ermitteln
    j = arg min ( f(a(i,k)) : i=0,n )
    vertausche a(j,k) und a(0,k)
    repeat
        Abbruchkriterium überprüfen
        % Rotationsschritt bestimmen
        for i=1,n
            r(i,k) = a(0,k) - ( a(i,k) - a(0,k) )
            berechne f(r(i,k))
        end
        ersetzt = ( min ( f(r(i,k)) : i=0,n ) < f(a(0,k)) )
        if ersetzt then
            % Expansionsschritt bestimmen
            for i=1,n
                e(i,k) = a(0,k) - mu * ( a(i,k) - a(0,k) )
                berechne f(e(i,k))
            end
            if ( min ( f(e(i,k)) : i=0,n ) < min ( f(r(i,k)) : i=0,n ) ) then
                % Expansion wird akzeptiert

```

```

    for i=1,n
        a(i,k) = e(i,k)
    end
else
    % Rotation wird akzeptiert
    for i=1,n
        a(i,k) = r(i,k)
    end
end if
else
    % Kontraktionsschritt bestimmen
    for i=1,n
        c(i,k) = a(0,k) + theta * ( a(i,k) - a(0,k) )
        berechne f(c(i,k))
    end
    ersetzt = ( min ( f(c(i,k)) : i=0,n ) < f(a(0,k)) )
    % Kontraktion wird akzeptiert
    for i=1,n
        a(i,k) = c(i,k)
    end
end if
until replaced
k = k + 1
end

```

Für den Start des Algorithmus müssen Lösungsvektoren vorgeben werden, deren Anzahl um eins höher ist als die Anzahl der Design-Parameter  $\beta$ . Bei  $n$  Design-Parametern ergeben sich  $n + 1$  Lösungsvektoren. Der hochgestellte Index bezeichnet den aktuellen Iterationsschritt.

$$\text{Menge der Lösungsvektoren beim Start: } \mathcal{S}^0 = \{\mathbf{a}_0^0, \mathbf{a}_1^0, \dots, \mathbf{a}_n^0\}. \quad (7.12)$$

Jeder Lösungsvektor  $\mathbf{a}_i^k$  besteht aus einem Satz von Design-Parametern  $\beta_i^m$ :

$$\mathbf{a}_i^k = \{\beta_1^i, \beta_2^i, \dots, \beta_n^i\}. \quad (7.13)$$

In Abbildung 7.2.a ist eine solche Menge von Lösungsvektoren  $\mathcal{S}^0$  zu Beginn einer Optimierung für  $n = 2$  Design-Parameter dargestellt. In der Abbildung sind außerdem die Isolinien für die zu optimierende Zielfunktion  $f(\mathbf{a})$  zu sehen. Der optimale Wert findet sich im Zentrum der dargestellten Ellipsen wieder. Während der Optimierung werden nun neue Mengen von Lösungsvektoren  $\mathcal{S}^j$  bestimmt.

$$\text{Lösungsvektoren für den } j\text{-ten Iterationsschritt: } \mathcal{S}^j = \{\mathbf{a}_0^j, \mathbf{a}_1^j, \dots, \mathbf{a}_n^j\}. \quad (7.14)$$

In dem dargestellten Beispiel (Abbildung 7.2) wird als erstes ein „Rotationsschritt“ durchgeführt, bei dem die aktuellen Lösungsvektoren an dem Lösungsvektor mit der besten

Zielfunktion gespiegelt werden (Abbildung 7.2.b). Anschließend wird der sogenannte „Expansionsschritt“ mit dem Streckfaktor  $\mu = 2$  durchgeführt (Abbildung 7.2.c). In der Abbildung 7.2.d wird abschließend noch der „Kontraktionsschritt“ mit dem Kontraktionsfaktor  $\Theta = 0.5$  gezeigt.

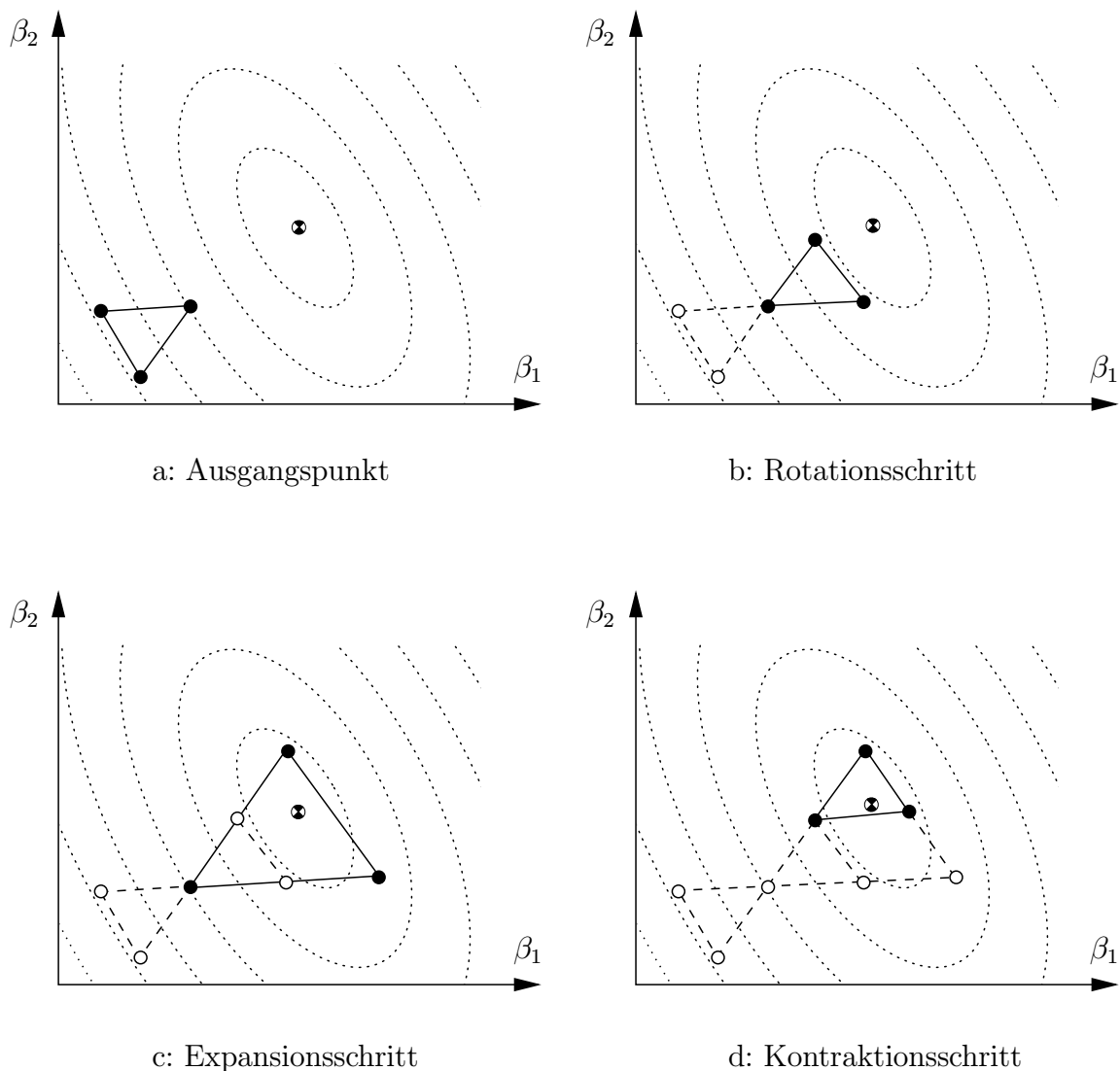


Abbildung 7.2: Ablauf des „Multi-Directional Search Algorithm“

Durch die Kombination der drei Schritte („Rotation“, „Expansion“ und „Kontraktion“) nähern sich die Lösungsvektoren  $\mathbf{a}_i^k$  im Laufe der Iterationen immer mehr dem Optimum der Zielfunktion an, bis schließlich einer der Lösungsvektoren vorgegebene Konvergenz-

bedingungen erfüllt. Der Satz der zugeordneten Design-Parameter stellt die Lösung des Optimierungsproblems dar.

Für den Sonderfall, daß nur ein einziger Design-Parameter  $\beta$  existiert, führt der vorgestellte Algorithmus auf das bekannte Bisketionsverfahren [70].

### 7.3 Gestaltoptimierung einer Lochscheibe

Für die Lochscheibe des Kapitels 5.1 wird im folgenden die Form des zentralen Lochs verändert, so daß ein vorgegebener Lastraum, der durch die an den Rändern der Lochscheibe angreifenden Flächenlasten aufgespannt wird, mit einem maximalen Sicherheitsfaktor vergrößert werden kann, damit die Struktur einspielt. In der Abbildung 7.3 wird die Geometrie, die Randbedingungen und die Finite-Elemente-Diskretisierung für diese Lochscheibe dargestellt (296 isoparametrische Dreieckselemente mit quadratischen Ansatzfunktionen und 643 Knoten). Das Materialverhalten ist elastisch – ideal plastisch und wird durch die Werte der Tabelle 7.1 beschreiben. Die Dicke der Scheibe ist so klein, daß das Problem als ebener Spannungszustand behandelt werden kann.

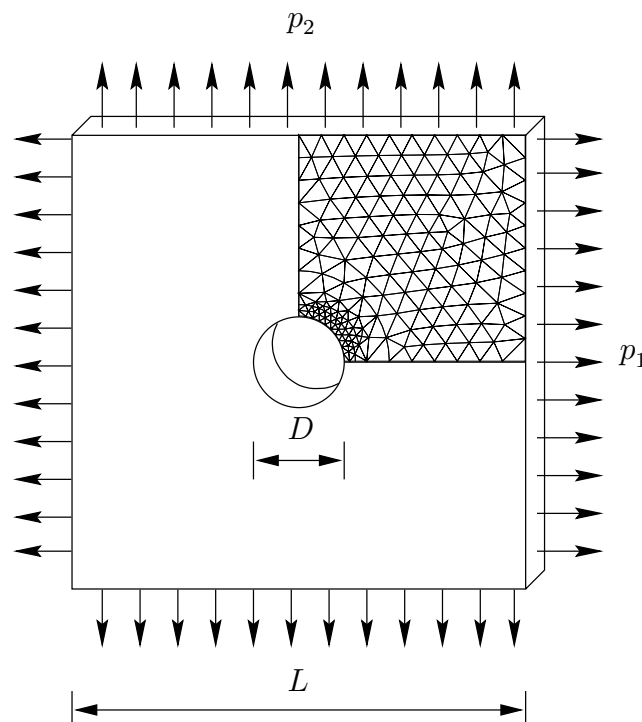


Abbildung 7.3: Lochscheibe mit kreisförmigem Loch

Für das Verhältnis von Lochdurchmesser  $D$  zur Kantenlänge  $L$  der Scheibe wird  $\frac{D}{L} = 0.2$  gewählt. In der nun durchzuführenden Formoptimierung des Lochs wird dieses durch eine

Elastizitätsmodul $E$	Querkontraktion $\nu$	Fließspannung $\sigma_Y$
$210\,000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	0.3	$280 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Tabelle 7.1: Materialparameter der Lochscheibe

Ellipsengleichung mit den Ellipsendurchmessern  $D_1$  und  $D_2$  beschrieben:

$$\left(\frac{2y_1}{D_1}\right)^2 + \left(\frac{2y_2}{D_2}\right)^2 = 1. \quad (7.15)$$

Das  $y_1$ - $y_2$ -Koordinatensystem liegt dabei im Zentrum der Ellipse.

Die ausgesparte Fläche soll stets konstant sein, das heißt, daß folgende Nebenbedingung eingehalten werden muß:

$$A = \pi \frac{D_1 D_2}{4} = \pi \frac{D^2}{4} = \text{konst.} \quad (7.16)$$

Die jeweilige Wahl der beiden Durchmesser  $D_1$  und  $D_2$  beeinflusst das Ergebnis der Einspielanalyse. Mit der angegebenen Nebenbedingung erhält man hier einen einzigen veränderbaren Design-Parameter (z.B.  $D_1$ ). Der zweite Durchmesser ergibt sich sofort aus der Nebenbedingung.

Die Formoptimierung wird nun für ein vorgegebenes Verhältnis von  $\varphi = \arctan \frac{p_2}{p_1} = 22.5^\circ$  durchgeführt. Als Optimierungskriterien werden die Elastizitäts-, die Traglast- und die Einspielanalyse eingesetzt. Im einzelnen werden dabei untersucht:

1. Elastizität:

$p_1$  und  $p_2$  werden gleichmäßig vom unbelasteten Zustand erhöht, bis das Material der Lochscheibe an einer Stelle anfängt zu fließen:

$$p_1 = \alpha_e \mu p_1^*, \quad p_2 = \alpha_e \mu p_2^* \quad (7.17)$$

mit  $0 \leq \mu \leq 1$ .

2. Traglast:

$p_1$  und  $p_2$  steigen vom unbelasteten Zustand monoton und proportional zueinander bis zum Erreichen der Traglastgrenze an:

$$p_1 = \alpha_L \mu p_1^*, \quad p_2 = \alpha_L \mu p_2^* \quad (7.18)$$

mit  $0 \leq \mu \leq 1$ .

3. Einspielen:

$p_1$  und  $p_2$  variieren unabhängig voneinander:

$$p_1 = \alpha_{SD} \mu_1 p_1^*, \quad p_2 = \alpha_{SD} \mu_2 p_2^* \quad (7.19)$$

mit  $0 \leq \mu_1 \leq 1$  und  $0 \leq \mu_2 \leq 1$ .

Während der Optimierung müssen durch die Veränderung der Ellipsendurchmesser immer wieder neue Finite-Elemente-Vernetzungen bestimmt werden. Diese werden durch eine Streckung bzw. Stauchung entsprechend der Form der gewählten Ellipse bestimmt. Für die drei Fälle ergeben sich dann mit dem Optimierungsalgorithmus des Kapitels 7.2 die nachfolgenden Ellipsendurchmesser, die den jeweiligen Sicherheitsfaktor  $\alpha$  der Zielfunktion (Elastizitäts-, Traglast- bzw. Einspielanalyse) maximal werden lassen (Tabelle 7.2).

	Elastizität	Traglast	Einspielen
$\frac{D_1}{L}$	0.252	0.408	0.252
$\frac{D_2}{L}$	0.159	0.098	0.159

Tabelle 7.2: Ergebnisse der Formoptimierung für die Lochscheibe

Auffällig ist, daß für die Elastizitäts- und die Einspielanalyse die gleichen Ellipsen ermittelt werden. Die Sicherheitsfaktoren gegenüber Versagen sind aber verschieden.

Für den Fall, bei dem die Einspielanalyse als Optimierungskriterium eingesetzt wird, ist das Ergebnis der Formoptimierung in der Abbildung 7.4 dargestellt. Die Ausbildung der Ellipse erfolgt in Richtung der größeren der beiden Lasten  $p_1$  und  $p_2$ . Dies ist auch durch die Wahl von  $p_1 > p_2$  zu erwarten gewesen.

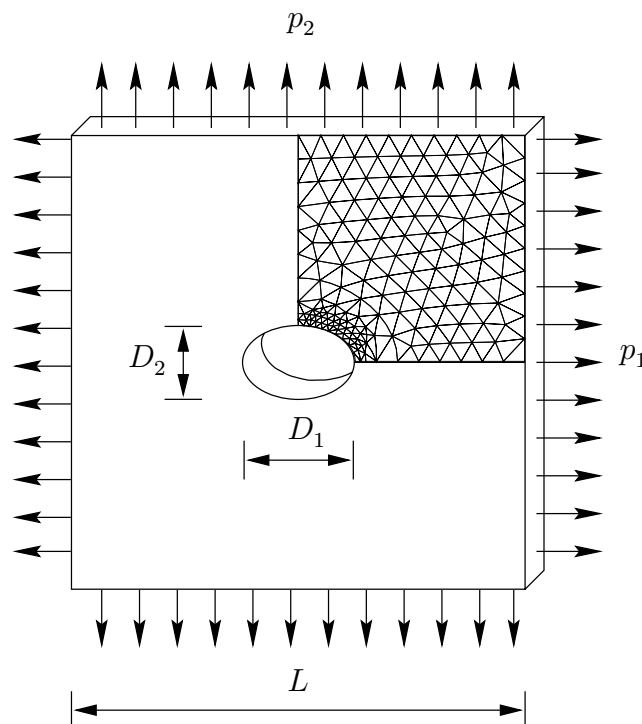


Abbildung 7.4: Lochscheibe mit elliptischem Loch

Angemerkt sei, daß diese Form des elliptischen Lochs nur für das hier gewählte Verhältnis der beiden Lasten  $p_1/p_2$  zu einem optimalen Wert in der Zielfunktion führt. Andere Verhältnisse der beiden Lasten zueinander können bei dieser Ellipsenform sogar zu verminderten Sicherheitsfaktoren führen. Dies ist deutlich an Hand der Abbildungen 7.5 und 7.6 zu sehen. In Abbildung 7.5 sind die maximal zulässigen Lasträume für die Scheibe mit kreisförmigem Loch dargestellt. Die Abbildung 7.6 zeigt die maximal zulässigen Lasträume für die Scheibe der Abbildung 7.4 mit ellipsenförmigem Loch. Dargestellt sind die maximal zulässigen Lasten  $p_2$  über  $p_1$  normiert mit der Fließspannung  $\sigma_Y$  des Materials für eine Elastizitäts-, Traglast- und Einspielanalyse. Die Form der Grenzkurven zeigen in der zweiten Abbildung eine verzerrte Gestalt. In Richtung des anfänglich gewählten Verhältnisses von  $\varphi = \arctan \frac{p_2}{p_1} = 22.5^\circ$  ist eine Vergrößerung der maximal zulässigen Lasten erkennbar. Die Traglastlösung ist in geringerem Maße von der Form des Lochs abhängig. Mit der oben bestimmten Ellipsenform für eine optimale Traglastlösung wäre die Lösung in Richtung des gewählten Verhältnisses noch geringfügig vergrößerbar. Umgekehrt ist in dem Bereich um  $\varphi \approx 22.5^\circ \pm 90^\circ$  eine deutliche Verminderung des Elastizitäts- und Einspielbereichs beobachtbar. Die Traglastlösung ist kaum davon betroffen.

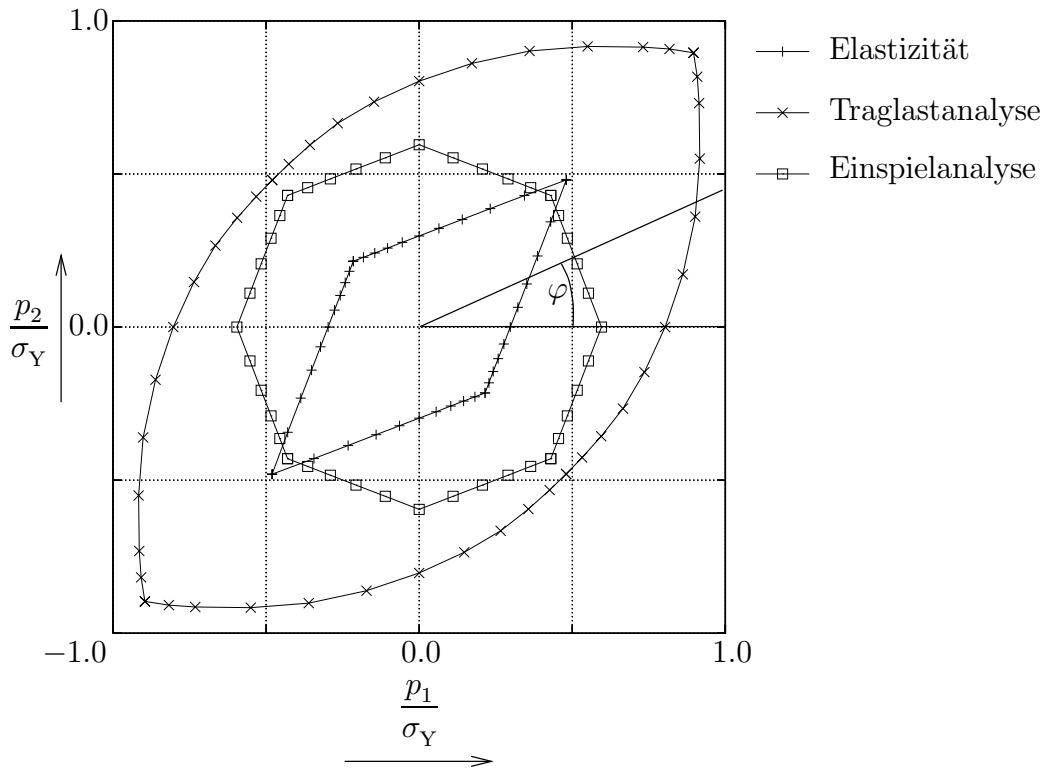


Abbildung 7.5: Elastizitäts-, Traglast- und Einspielanalyse für die Lochscheibe

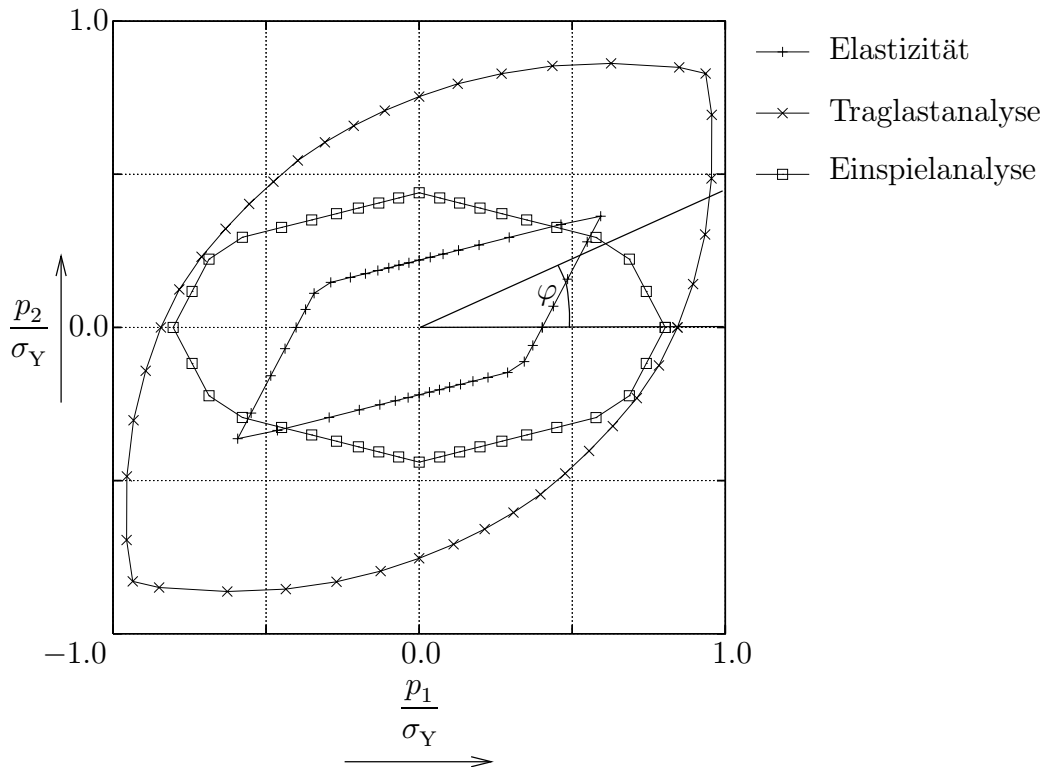


Abbildung 7.6: Elastizitäts-, Traglast- und Einspielanalyse für die Scheibe mit elliptischem Loch

## 7.4 Gestaltoptimierung eines Verbundwerkstoffes mit periodischer Mikrostruktur

Analog zur Vorgehensweise des vorangegangenen Kapitels 7.3 wird nachfolgend die Form der Fasern eines Verbundwerkstoffes mit periodischer Mikrostruktur bestimmt. Die Form wird ebenfalls durch eine Ellipsengleichung modelliert und soll so bestimmt werden, daß der Sicherheitsfaktor einer Einspielanalyse für einen vorgegebenen Lastraum maximal wird. Das Problem wird als ebener Dehnungszustand mit den Materialwerten der Tabelle 7.3 behandelt. Es wird elastisch – ideal plastisches Materialverhalten angenommen.

	Matrix	Faser
Werkstoff	Al	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>
Elastizitätsmodul $E$	70 000 MPa	370 000 MPa
Fließspannung $\sigma_Y$	80 MPa	2000 MPa
Querkontraktionszahl $\nu$	0.3	0.3

Tabelle 7.3: Materialkonstanten: Verbundwerkstoff

In der Abbildung 7.7 ist der periodische Verbundwerkstoff mit quadratischer Anordnung dargestellt ( $D/L = 0.2$ ). Das gezeigte repräsentative Volumenelement mit seiner Finiten-Elemente-Diskretisierung bildet den Ausgangspunkt der Optimierung. Es werden 318 isoparametrische Dreieckselemente mit insgesamt 671 Knoten verwendet. Die Randbedingungen werden gemäß den Ausführungen des Kapitels 6.1 als konstante Verschiebungen auf den Rändern des repräsentativen Volumenelementes gesetzt.

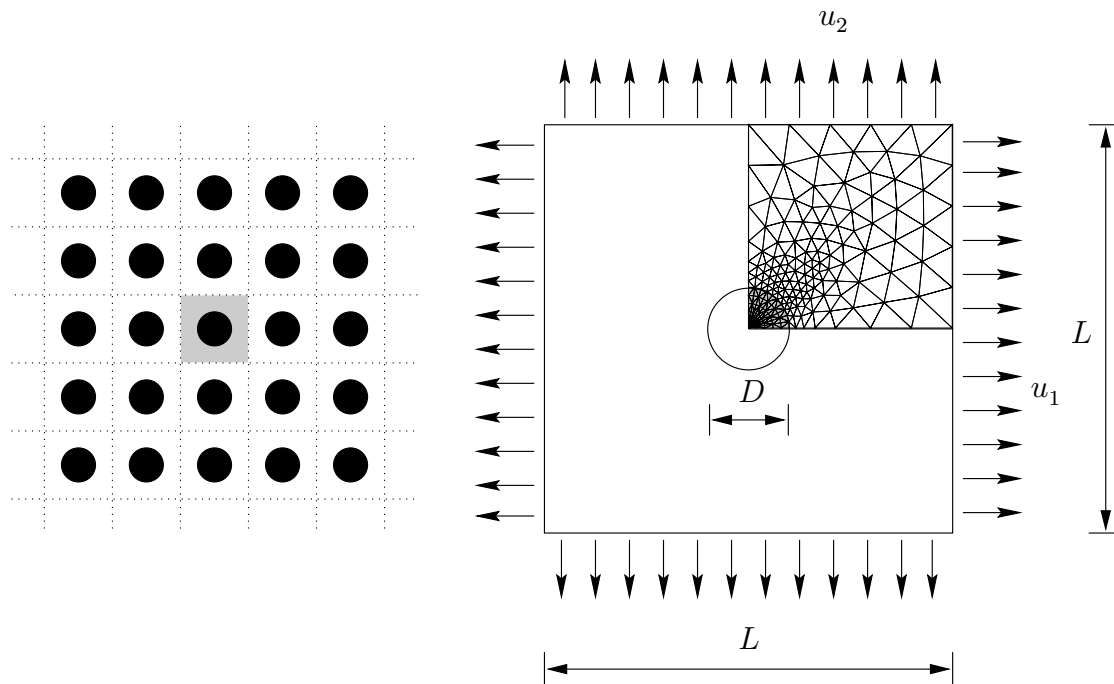


Abbildung 7.7: Verbundwerkstoff mit kreisförmigen Fasern ( $u_0 = 0.0001$  m,  $L = 0.1$  m)

Neben der Ellipsengleichung zur Beschreibung der äußeren Form der Fasern

$$\left(\frac{2y_1}{D_1}\right)^2 + \left(\frac{2y_2}{D_2}\right)^2 = 1 \quad (7.20)$$

mit den Durchmessern  $D_1$  und  $D_2$ , soll auch hier als Nebenbedingung das konstante Verhältnis von Faservolumen zu Gesamtvolumen des Verbundes eingehalten werden ( $h$  ist die räumliche Ausdehnung des Verbundwerkstoffes)

$$V = h \pi \frac{D_1 D_2}{4} = h \pi \frac{D^2}{4} = \text{konst.} \quad (7.21)$$

Für das vorgegebene Verhältnis von  $\varphi = \arctan \frac{u_2}{u_1} = 22.5^\circ$  wird nun die Optimierung jeweils für die drei Optimierungskriterien (Elastizitäts-, Traglast- und Einspielanalyse) durchgeführt. Folgende Fälle werden unterschieden:

## 1. Elastizität:

$u_1$  und  $u_2$  werden gleichmäßig vom unbelasteten Zustand erhöht, bis an einer Stelle des repräsentativen Volumenelementes das Material anfängt zu fließen:

$$u_1 = \alpha_e \mu u_1^*, \quad u_2 = \alpha_e \mu u_2^* \quad (7.22)$$

mit  $0 \leq \mu \leq 1$ .

## 2. Traglast:

$u_1$  und  $u_2$  steigen vom unbelasteten Zustand monoton und proportional zueinander bis zum Erreichen der Traglastgrenze an:

$$u_1 = \alpha_L \mu u_1^*, \quad u_2 = \alpha_L \mu u_2^* \quad (7.23)$$

mit  $0 \leq \mu \leq 1$ .

## 3. Einspielen:

$u_1$  und  $u_2$  variieren unabhängig voneinander:

$$u_1 = \alpha_{SD} \mu_1 u_1^*, \quad u_2 = \alpha_{SD} \mu_2 u_2^* \quad (7.24)$$

mit  $0 \leq \mu_1 \leq 1$  und  $0 \leq \mu_2 \leq 1$ .

In der Tabelle 7.4 sind die Ergebnisse der Optimierung wiedergegeben. Die angegebenen Durchmesser lassen den Sicherheitsfaktor  $\alpha$  des entsprechenden Optimierungskriteriums optimal werden.

	Elastizität	Traglast	Einspielen
$\frac{D_1}{L}$	0.082	0.118	0.096
$\frac{D_2}{L}$	0.488	0.339	0.417

Tabelle 7.4: Ergebnisse der Formoptimierung für die Lochscheibe

Für den Fall des Einspielens ist in der Abbildung 7.8 das Ergebnis der Optimierung dargestellt. Im Gegensatz zur Lochscheibe des vorangegangenen Kapitels 7.3, in dem das Loch als weicher Einschluß interpretiert werden kann, richtet sich die optimale elliptische Faser bei dem hier vorliegenden Verbundwerkstoff mit harten Fasern in Richtung der kleineren Belastung aus. Dies war durch die Wahl von  $u_1 > u_2$  auch zu erwarten. In der Abbildung 7.9 sind die maximal möglichen Lasträume für sämtliche Verhältnisse von  $u_1$  zu  $u_2$  für den Verbundwerkstoff mit kreisförmigen Fasern dargestellt. Die Abbildung 7.10 zeigt hingegen die maximalen Lasträume für den Verbundwerkstoff mit elliptischen Fasern.

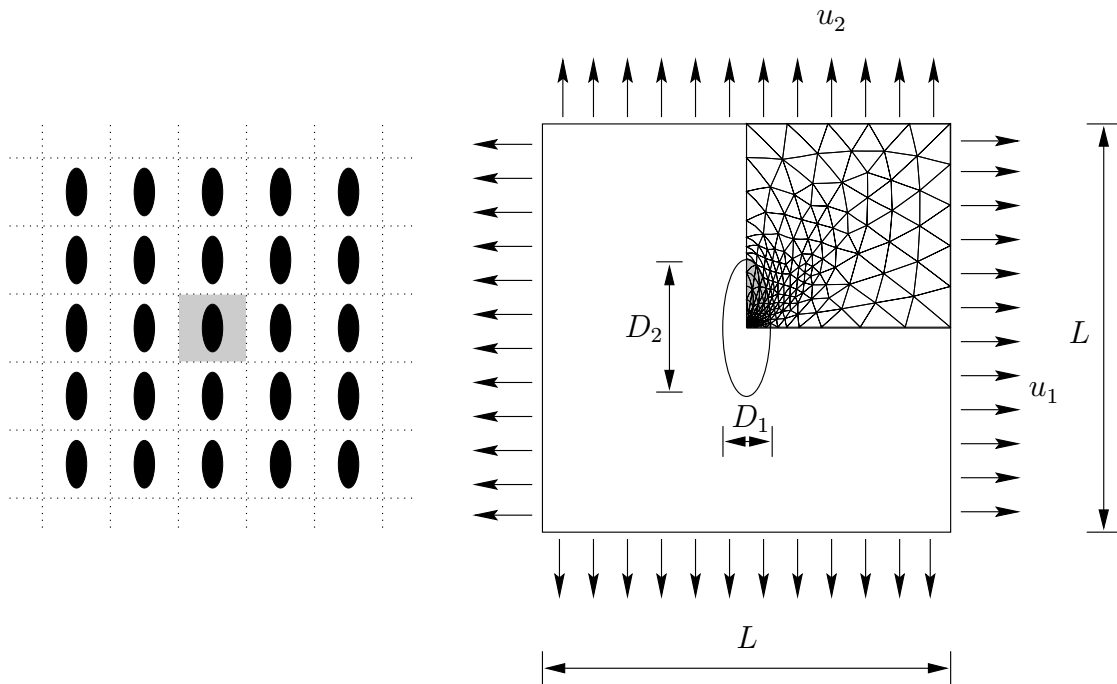


Abbildung 7.8: Verbundwerkstoff mit elliptischen Fasern

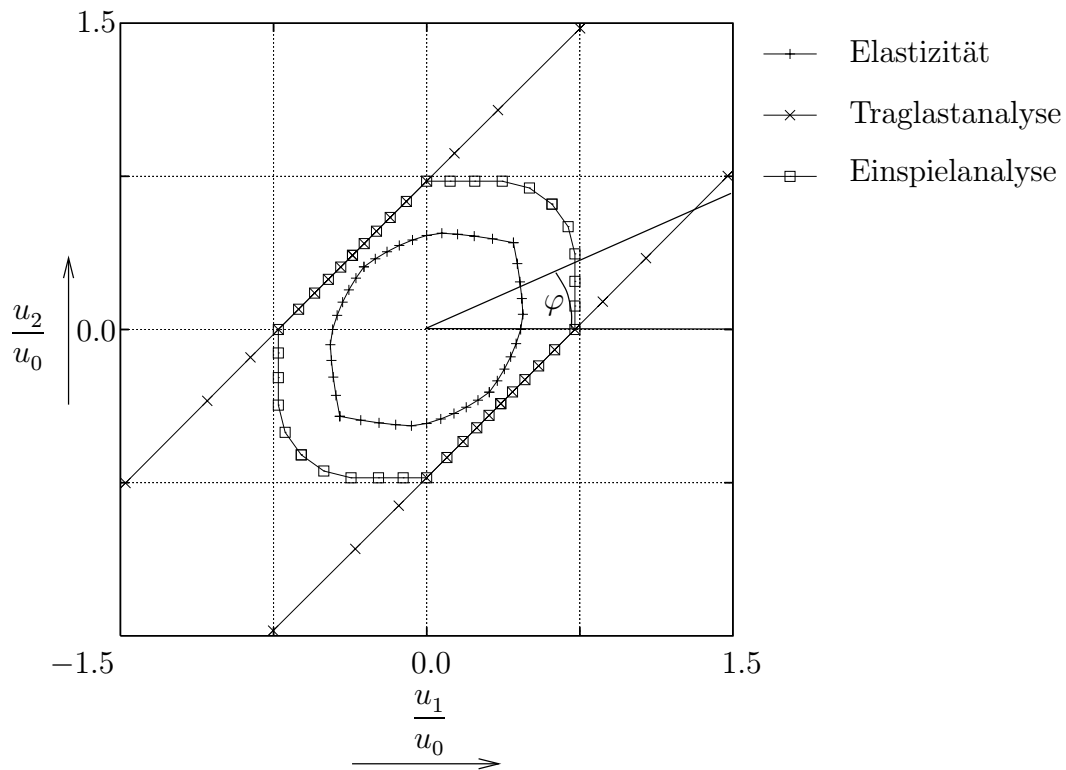


Abbildung 7.9: Lasträume (kreisförmige Fasern)

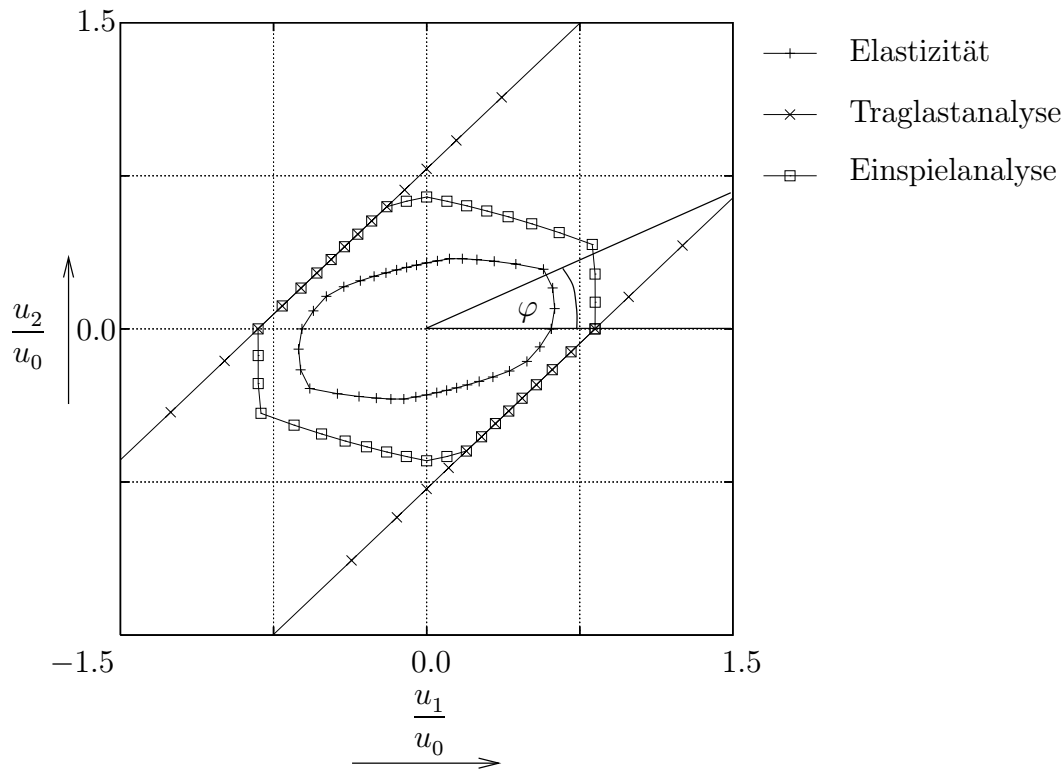


Abbildung 7.10: Lasträume (elliptische Fasern)

Die Diskussion der Diagramme erfolgt analog zu der der Lochscheibe des vorangegangenen Kapitels. In Richtung des gewählten Verhältnisses  $\varphi = \arctan \frac{u_2}{u_1} = 22.5^\circ$  ist eine deutliche Vergrößerung des Lastraumes für die Elastizitäts- und die Einspielanalyse erkennbar, während in Bereichen senkrecht hierzu eine Verminderung bemerkbar ist. Auch hier ist die Traglastlösung in weitaus geringerem Maße von der Form der Faser abhängig.

In den nachfolgenden beiden Abbildungen 7.11 und 7.12 sind die zugeordneten maximalen makroskopischen Spannungen angegeben. Entsprechend der Diskussion des Kapitels 6.3 finden sich diese Spannungen unter einem anderen Winkel wieder als in den Abbildungen 7.9 und 7.10 mit den Verschiebungslasträumen. Für die Elastizitäts- und Traglastanalyse stellen sie die maximal zulässigen makroskopischen Spannungen dar. Für die Einspielanalyse hingegen sind diese Werte lediglich die maximalen zulässigen Spannungswerte, die einem verzerrten makroskopischen Spannungsraum zuzuordnen sind. Die Formoptimierung könnte auch für rechteckförmige maximal zulässige makroskopische Spannungsräume durchgeführt werden. Die Vorgehensweise ist dann analog zu der im Kapitel 6.3 vorgeschlagenen Verfahrensweise.

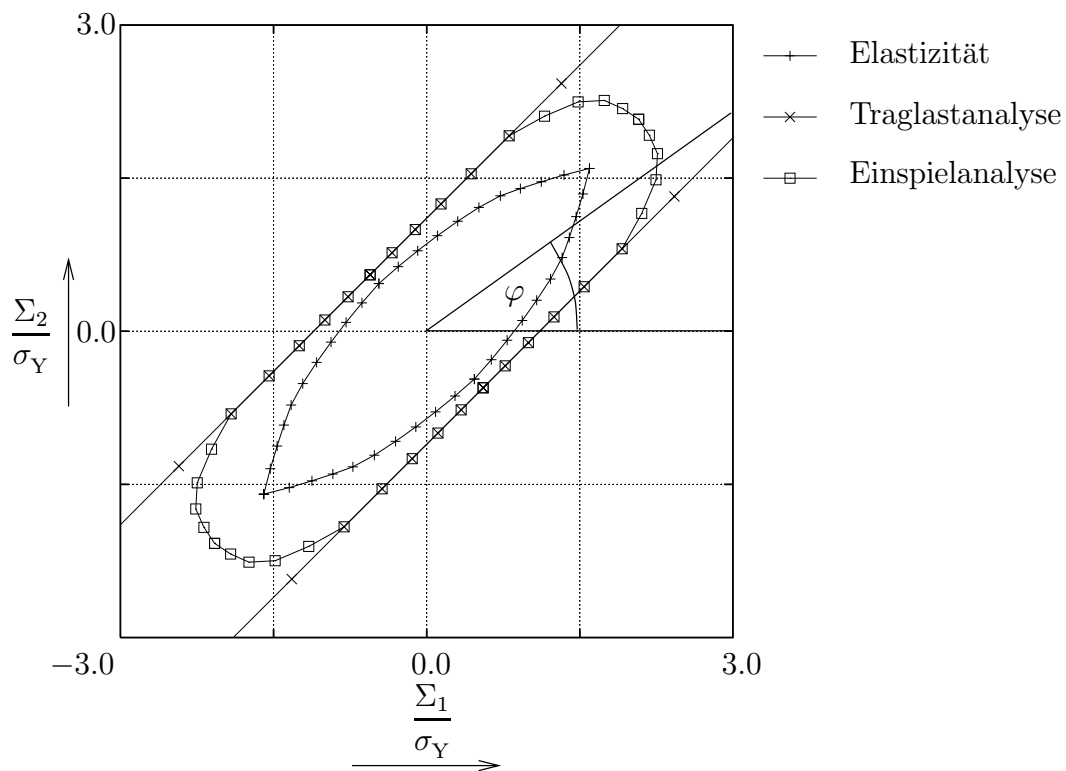


Abbildung 7.11: maximale makroskopische Spannungen (kreisförmige Fasern)

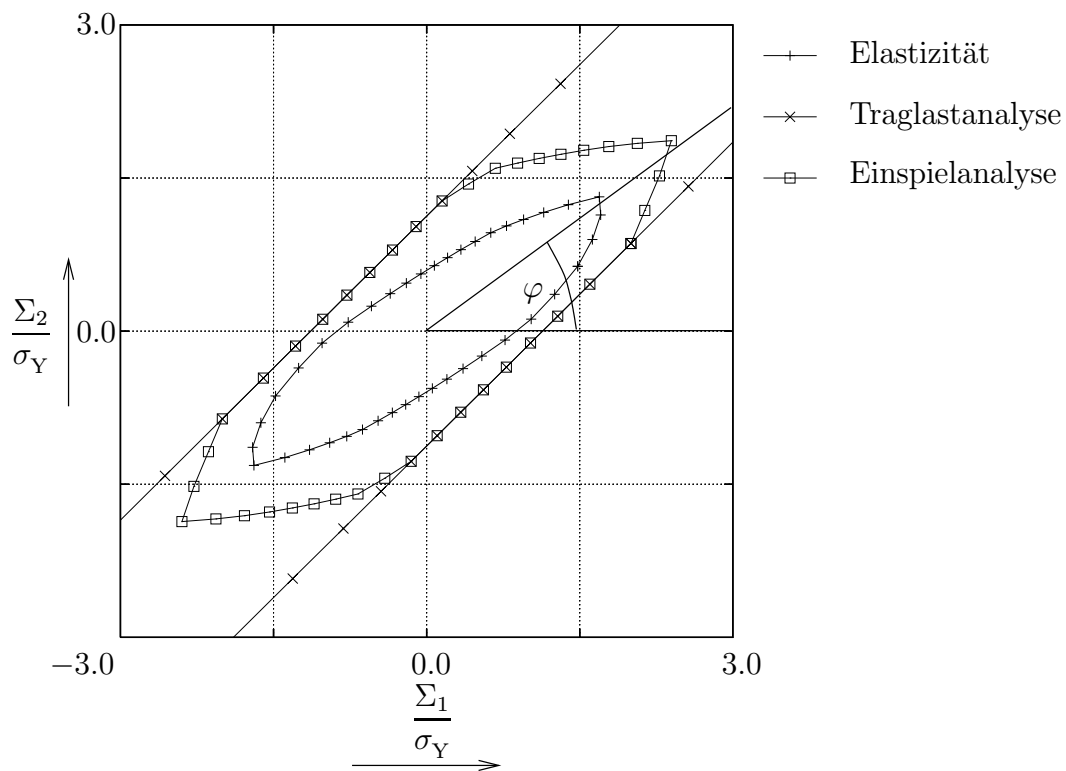


Abbildung 7.12: maximale makroskopische Spannungen (elliptische Fasern)



Elastizitätsmodul $E_M$	Querkontraktion $\nu_M$	Fließspannung $\sigma_{YM}$
$70\,000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	0.3	$80 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Tabelle 7.5: Materialparameter der Matrix (Al)

Zwei verschiedene Belastungsfälle, die durch jeweils einen quadratischen Lastraum gekennzeichnet sind, werden untersucht und gegenübergestellt.

1. Elastizität:

Es wird untersucht, inwieweit ein durch  $\Sigma^*$  aufgespannter quadratischer Lastraum vergrößert werden darf, damit jede beliebige Lastgeschichte innerhalb dieses Lastraumes stets rein elastisches Materialverhalten verursacht.

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \alpha_e \mu_1 \Sigma^*, & \Sigma_2 &= \alpha_e \mu_2 \Sigma^* \\ \text{mit } 0 &\leq \mu_1 \leq 1 & \text{und } 0 &\leq \mu_2 \leq 1. \end{aligned} \quad (7.25)$$

2. Einspielen:

Die makroskopischen Spannungen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  können unabhängig voneinander variieren. Es wird untersucht, inwieweit der durch  $\Sigma^*$  aufgespannte quadratische Lastraum vergrößert werden darf, damit der Verbundwerkstoff einspielt.

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \alpha_{SD} \mu_1 \Sigma^*, & \Sigma_2 &= \alpha_{SD} \mu_2 \Sigma^* \\ \text{mit } 0 &\leq \mu_1 \leq 1 & \text{und } 0 &\leq \mu_2 \leq 1. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Die Vorgehensweise zur Ermittlung der gesuchten Lasträume, die durch makroskopische Spannungen aufgespannt werden, wird im Kapitel 6.3 dargestellt. In der Abbildung 7.14 ist das Ergebnis der Untersuchungen dargestellt. Hierin wird jeweils die maximal mögliche makroskopische Spannung für die sich ergebenden quadratischen Lasträume dargestellt. Diese Spannung kennzeichnet den Belastungszustand in der äußeren Ecke des bestimmten Lastraumes. Abgetragen wird sie über den mit den Materialwerten der Matrix dimensionslos gemachten Parametern der Faser. Insgesamt sind drei Parametervariationen mit den Materialeigenschaften der Faser (Elastizitätsmodul  $E_F$ , Querkontraktionszahl  $\nu_F$  und Fließspannung  $\sigma_{YF}$ ) zu sehen. Es wird dabei nur ein Materialparameter verändert, während die beiden anderen konstant bleiben. Für jede Variation sind die Lasträume für eine Elastizitäts- und eine Einspielanalyse dargestellt. An Hand dieser Kurven können einige Beobachtungen gemacht werden:

- Wenn die Fließspannung der Fasern  $\sigma_{YF}$  größer als die Fließspannung der Matrix  $\sigma_{YM}$  ist, dann ergeben sich mit Hilfe der Einspielanalyse auch höhere Sicherheitsfaktoren als mit der Elastizitätsanalyse.

- Eine unbegrenzte Steigerung der Fließspannung der Fasern  $\sigma_{Y_F}$  führt nicht zu einer Steigerung des Elastizitäts- oder Einspielfaktors.
- Bei der Elastizitätsanalyse ist eine niedrige Querkontraktionszahl  $\nu_F$  für die Faser günstig, während bei der Einspielanalyse der gegensätzliche Fall zu einer Steigerung des Sicherheitsfaktors führt. Die Sicherheitsfaktoren sind aber nur in geringem Maße von der Größe des Querkontraktionszahlenverhältnisses abhängig.
- Bei der Variation des Verhältnisses der Elastizitätsmodule liegen die Ergebnisse der Einspielanalyse stets um ca. 5% über den Ergebnissen der Elastizitätsanalyse. Im Bereich gleich großer Elastizitätsmodule erhält man die besten Lösungen.
- Eine unbegrenzte Steigerung des Elastizitätsmoduls der Fasern  $E_F$  führt nicht zu einer Steigerung des Elastizitäts- oder Einspielfaktors.

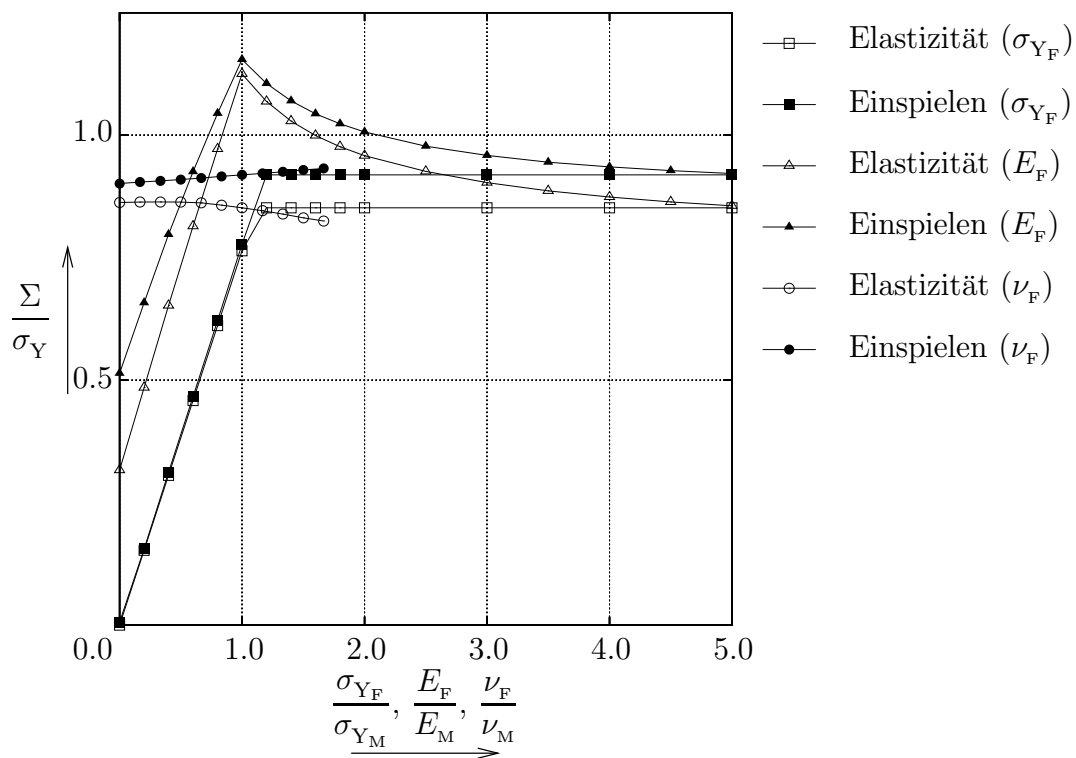


Abbildung 7.14: Variation der Materialparameter für die Faser

## 7.6 Faseranordnung in Verbundwerkstoffen mit periodischer Mikrostruktur

Eine weitere Möglichkeit der Optimierung ist durch die Anordnung der Fasern innerhalb des Verbundes gegeben. Im folgenden wird der Einfluß der Faserabstände zueinander bei Verbundwerkstoffen mit periodischer Mikrostruktur untersucht („Cluster-Bildung“). Hierzu wird der bereits im Kapitel 6 verwandte elastisch – ideal plastische Werkstoff Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (siehe Tabelle 6.1) mit 30% Faseranteil als ebener Dehnungszustand untersucht. In Abbildung 7.15 wird der Verbund mit dem zugehörigen repräsentativen Volumenelement gezeigt. Hier muß das gesamte repräsentative Volumenelement diskretisiert werden, da keine Symmetrien ausgenutzt werden können. Außerdem muß für jeden gewählten Faserabstand  $a$  eine neue Diskretisierung durchgeführt werden. Im Durchschnitt werden dabei 400 isoparametrische Dreieckselemente mit quadratischen Ansatzfunktionen und insgesamt 850 Knoten benutzt.

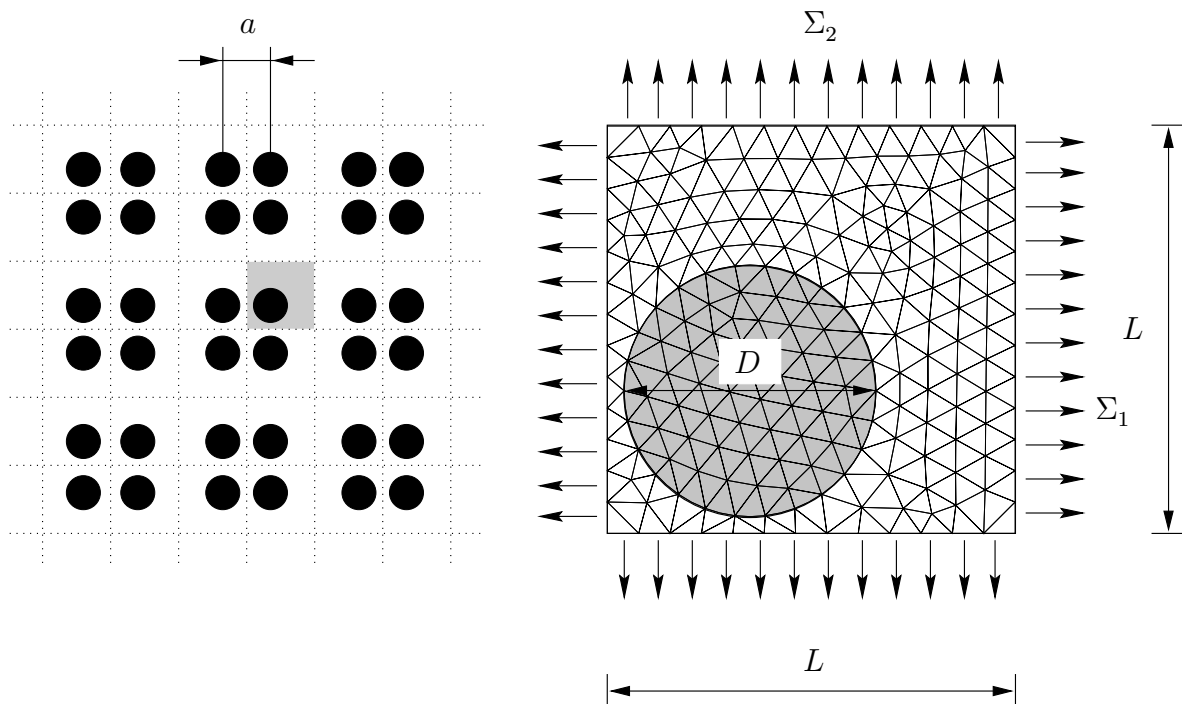


Abbildung 7.15: Repräsentatives Volumenelement bei „Cluster-Bildung“

Hier wird untersucht, wie sich die maximal zulässigen makroskopischen Spannungsräume bei einer Variation der Faserabstände  $a$  verändern. Insgesamt werden fünf verschiedene Belastungsfälle betrachtet:

1. Einaxial elastische Belastung:

Die makroskopische Spannung  $\Sigma_1$  wird bis zum Erreichen der Fließgrenze erhöht, so

daß sich das gesamte Material unter der einaxialen makroskopischen Zugspannung rein elastisch verhält.

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \alpha_e \mu \Sigma^*, \quad \Sigma_2 = 0 \\ \text{mit } 0 &\leq \mu \leq 1.\end{aligned}\tag{7.27}$$

2. Einaxiale Belastung bis zur Traglastgrenze:

Die makroskopische Spannung  $\Sigma_1$  wird bis zum Erreichen der Traglastgrenze monoton erhöht.

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \alpha_L \mu \Sigma^*, \quad \Sigma_2 = 0 \\ \text{mit } 0 &\leq \mu \leq 1.\end{aligned}\tag{7.28}$$

3. Einaxiale Belastung (Einspielen):

Die makroskopische Spannung  $\Sigma_1$  kann beliebig zwischen dem unbelasteten Zustand und einer Maximallast verändert werden, damit der Verbundwerkstoff einspielt.

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \alpha_{SD} \mu \Sigma^*, \quad \Sigma_2 = 0 \\ \text{mit } 0 &\leq \mu \leq 1.\end{aligned}\tag{7.29}$$

4. Zweiaxiale elastische Belastung:

Es wird untersucht, inwieweit ein durch  $\Sigma^*$  aufgespannter quadratischer Lastraum vergrößert werden darf, damit jede beliebige Lastgeschichte innerhalb dieses Last-raumes stets rein elastisches Materialverhalten verursacht.

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \alpha_e \mu_1 \Sigma^*, \quad \Sigma_2 = \alpha_e \mu_2 \Sigma^* \\ \text{mit } 0 &\leq \mu_1 \leq 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq \mu_2 \leq 1.\end{aligned}\tag{7.30}$$

5. Zweiaxiale Belastung (Einspielen):

Die makroskopischen Spannungen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  können unabhängig voneinander variieren. Es wird untersucht, inwieweit der durch  $\Sigma^*$  aufgespannte quadratische Last-raum vergrößert werden darf, damit der Verbundwerkstoff einspielt.

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \alpha_{SD} \mu_1 \Sigma^*, \quad \Sigma_2 = \alpha_{SD} \mu_2 \Sigma^* \\ \text{mit } 0 &\leq \mu_1 \leq 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq \mu_2 \leq 1.\end{aligned}\tag{7.31}$$

Die Vorgehensweise zur Ermittlung dieser Lasträume ist im Kapitel 6.3 dargestellt. In einem ersten Schritt werden die charakteristischen Winkel  $\varphi$  ermittelt, die die gewünschten einaxialen makroskopischen Belastungsfälle erzeugen. Für jeden Abstand  $a$  der Fasern zueinander ergibt sich dabei ein leicht variierender Wert ( $\varphi \approx -21^\circ$ ). Mit diesen charakteristischen Winkeln bzw. den Basisverschiebungen  $u_1^e$  und  $u_2^e$  werden dann die Untersuchungen für die Variation des Faserabstandes durchgeführt. Diese werden für diskrete

Punkte bestimmt, damit die Evolution der zulässigen makroskopischen Spannungswerte erkennbar ist. Es ergeben sich die in Abbildung 7.16 gezeigten Ergebnisse. Abgetragen werden die maximal zulässigen makroskopischen Spannungswerte  $\Sigma_1$  normiert mit der Fließspannung  $\sigma_Y$  der Matrix über dem mit dem Faserdurchmesser dimensionslos gemachten Faserabstand  $a$ . Für die einaxialen Belastungsfälle geben die Kurven den maximal zulässigen makroskopischen Spannungswert wieder. Für die zweiaxialen Belastungsfällen beschreiben diese Werte die äußere Ecke des aufgespannten rechteckförmigen Lastraumes. Da für jeden untersuchten Faserabstand eine neue Finite-Elemente-Diskretisierung durchgeführt werden muß und diese Diskretisierungen recht grob ausfallen, erkennt man teilweise sprunghafte Veränderungen in den Ergebniskurven. Um den qualitativen Verlauf besser erkennen zu können, sind Ausgleichskurven durch die Ergebnispunkte gelegt worden.

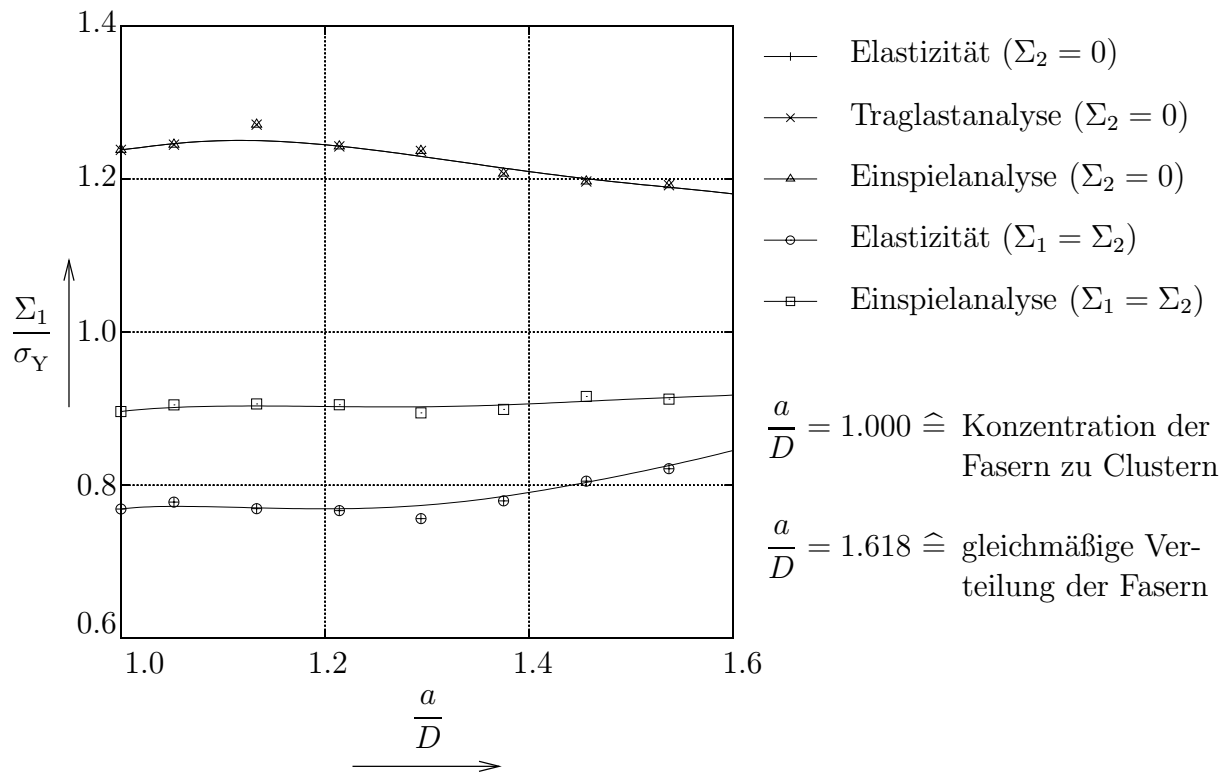


Abbildung 7.16: Variation des Faserabstandes

Aus den Ergebniskurven erkennt man, daß für die elastischen Lösungen eine gleichmäßige Verteilung der Fasern zu den besten Ergebnissen führt. Für die Traglastanalyse bei einaxialer Belastung ist hingegen eine Konzentration der Fasern zu „Clustern“ vorteilhaft. Für die zweiaxiale Einspielanalyse hat der Faserabstand kaum Einfluß auf die Lösung. Dies gilt allerdings nur für die hier betrachtete Belastung. Bei einer einaxialen Belastung fallen die Ergebnisse der Traglastanalyse mit denen der Einspielanalyse zusammen, so daß auch für die einaxiale Einspielanalyse eine Konzentration der Fasern in „Clustern“ zu

optimalen Ergebnissen führt.

An Hand dieser Beispiele erkennt man, daß abhängig von der Belastungsart zum einen die gleichmäßige Verteilung der Fasern und zum anderen die Konzentration der Fasern in „Clustern“ vorteilhaft ist.

## 8 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde das Einspielverhalten von Verbundwerkstoffen mit periodischer Mikrostruktur untersucht. Hierfür wurde ein allgemeines statisches Einspieltheorem für Verbundwerkstoffe aufgestellt und bewiesen. Das Theorem beinhaltet die Effekte der begrenzt linear kinematischen Verfestigung und der duktilen plastischen Schädigung. Darauf aufbauend wurde ein allgemein übertragbares Verfahren zur Bestimmung von Einspielfaktoren angegeben. Die numerische Behandlung erfolgte mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode, die mit einem leistungsfähigen Optimierungsalgorithmus für groß dimensionierte Problemstellungen kombiniert angewandt wurde. Anhand einiger ausgewählter Beispiele (Lochscheibe, Scheibe unter Zug- und Temperaturlast, gerissene Scheibe) wurde dieses Verfahren mit Ergebnissen aus der Literatur validiert. Die Ergebnisse, die für die Lochscheibe mit Hilfe des statischen Einspieltheorems ermittelt worden waren, wurden zusätzlich für die Traglast- und die Einspielanalyse mit einem inkrementelles Verfahren überprüft. Für den Fall einer Traglastanalyse zeigte sich, daß dieselben Spannungsfelder ausgebildet werden, obwohl beim statischen Einspieltheorem und bei der inkrementellen Vorgehensweise unterschiedliche Theorien bzw. Berechnungsverfahren zum Einsatz kommen. Bei der inkrementellen Einspielanalyse konnte der Effekt der alternierenden Plastizität beobachtet werden, der dann als Kriterium für Einspielen bzw. Nicht-Einspielen verwendet wurde.

Für einen Verbundwerkstoff mit periodischer Mikrostruktur, elasto-plastischem Materialverhalten und einer Belastung senkrecht zur Faserrichtung wurden dann verschiedene numerische Untersuchungen an repräsentativen Volumenelementen durchgeführt. Entsprechend den Symmetriebedingungen für den gesamten Verbundwerkstoff wurden kinematische Randbedingungen auf den Rändern dieser repräsentativen Volumenelemente vorgegeben. Mit Hilfe der Einspielanalyse wurden an diesen Volumenelementen maximal zulässige Lasten und die zugehörigen Spannungsfelder ermittelt. Durch den Einsatz einer Homogenisierungstechnik konnten die Ergebnisse von der Mikroebene auf die Makroebene übertragen werden. Aus der Spannungsanalyse auf der Mikroebene konnten so die makroskopischen Spannungsgrößen ermittelt werden, die für den gesamten Verbund Gültigkeit haben. Mit diesem Verfahren war es möglich, rechteckförmige Lasträume zu ermitteln, die durch Verschiebungen aufgespannt werden. Die zugehörigen makroskopischen Spannungsräume wiesen demgegenüber eine verzerrte Gestalt auf. Daher wurde das Verfahren so erweitert, daß es möglich ist, zulässige makroskopische Spannungsräume zu ermitteln, die eine rechteckförmige Gestalt aufweisen. Hierzu werden Basisverschiebungen ermittelt,

die einen einaxialen makroskopischen Spannungszustand zur Folge haben. Damit läßt sich ein verzerrter Verschiebungslastraum aufspannen, dem allerdings ein rechteckförmiger makroskopischer Spannungsraum zuzuordnen ist. Mit diesem Verfahren wurden Untersuchungen für den schubspannungsfreien Belastungsfall mit verschiedenen Materialparametern und Werkstoffgeometrien durchgeführt. Für den Sonderfall einer einaxialen makroskopischen Zugbelastung wurden die Ergebnisse der Traglastanalyse mit Ergebnissen aus der Literatur verglichen, die mit anderen Theorien bzw. Verfahren ermittelt worden waren. Es zeigte sich eine gute Übereinstimmung. Das Untersuchungsverfahren wurde weiterhin auf eine Zug-Druck-Belastung mit Schub ausgedehnt. Zulässige rechteckförmige Verschiebungslasträume und rechteckförmige Spannungslasträume wurden ermittelt.

Die Einspielanalyse wurde weiterhin als Optimierungskriterium für ein überlagertes Optimierungsverfahren verwendet. In diesem Optimierungsverfahren werden Design-Parameter verändert, bis der sich aus der Einspielanalyse ergebende Sicherheitsfaktor einen maximalen Wert annimmt. Für diese Optimierung wurde ein einfacher Algorithmus ausgewählt, der eine Erweiterung des bekannten Bisektionsverfahrens darstellt. Am Beispiel einer Lochscheibe und eines Verbundwerkstoffes mit kreisförmigen Fasern wurde die Form des Lochs bzw. der Fasern für einen vorgegebenen Lastfall so zu einer Ellipse verändert, daß der Einspielfaktor maximiert wurde. Als Design-Parameter wurden hier die Durchmesser der Ellipse verwendet. Da für die Wahl der Design-Parameter im Prinzip jede veränderbare Größe in Frage kommt, wurde für einen Verbundwerkstoff mit periodischer Mikrostruktur auch eine Materialparametervariation und eine Variation in der Größe der Faserabstände durchgeführt.

In der vorliegenden Arbeit wurden eine Vielzahl von verschiedenen Untersuchungsmöglichkeiten mit Hilfe der Einspielanalyse aufgezeigt, mit denen bereits im Entwicklungsstadium von Verbundwerkstoffen Aussagen über ihr später zu erwartendes Verhalten getroffen werden können. Eine Optimierung der Eigenschaften ist somit bereits vor der eigentlichen Herstellung und experimentellen Überprüfung des Verbundes möglich. Allerdings muß beachtet werden, daß in dieser Arbeit eine Reihe von vereinfachenden Annahmen getroffen wurden. Ziel der zukünftigen Arbeit muß es daher sein, die getroffenen Einschränkungen abzubauen.

## A Anhang

### A.1 GAUSS'scher Integralsatz

Der GAUSS'sche Integralsatz (oder Divergenztheorem) dient in der Kontinuumsmechanik zur Umwandlung eines Volumenintegrals in ein Oberflächenintegral. Er wird bei der Beweisführung zum statischen Einspieltheorem benötigt. Dabei ist  $\mathbf{T}$  eine stetig differenzierbare Feldfunktion und  $\mathbf{n}$  der auf der geschlossenen Oberfläche  $A$  des Volumens  $V$  nach außen gerichtete Normalenvektor.

$$\int_{(V)} \nabla \cdot \mathbf{T} \, dV = \int_{(A)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \, dA \quad \text{bzw.} \quad \int_{(V)} T_{ij,i} \, dV = \int_{(A)} n_i T_{ij} \, dA. \quad (\text{A.1})$$

### A.2 Zuwachs der Formänderungsarbeit

Der Zuwachs der Formänderungsarbeit  $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  kann auch als Produkt aus dem Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  und den Verschiebungsgeschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}$  ausgedrückt werden. Hierzu macht man sich die Eigenschaft der Symmetrie des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  und des Dehnungstensors  $\boldsymbol{\varepsilon}$  bzw. des Dehnratentensors  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  zunutze.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (\text{A.2})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (\text{A.3})$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}). \quad (\text{A.4})$$

Hiermit kann das Produkt  $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  umgeformt werden:

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} + \sigma_{ij} \dot{u}_{j,i}) \quad (\text{A.5})$$

$$\iff \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} + \sigma_{ji} \dot{u}_{i,j}) \quad (\text{A.6})$$

$$\iff \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} + \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j}) \quad (\text{A.7})$$

$$\iff \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} = \sigma_{ij} v_{i,j}. \quad (\text{A.8})$$

## A.3 Materialstabilität

Die Werkstoffstabilität hat in der Plastizitätstheorie eine grundlegende Bedeutung bei der Analyse des Einspielvorganges. Stabile Werkstoffe besitzen eine Spannungs-Dehnungs-kurve, die durch eine monoton wachsende Funktion  $\sigma(\varepsilon)$  mit  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \geq 0$  beschrieben wird. Ihr Anstieg ist bei realen, elastisch-plastischen Werkstoffen monoton fallend und nach unten beschränkt [92].

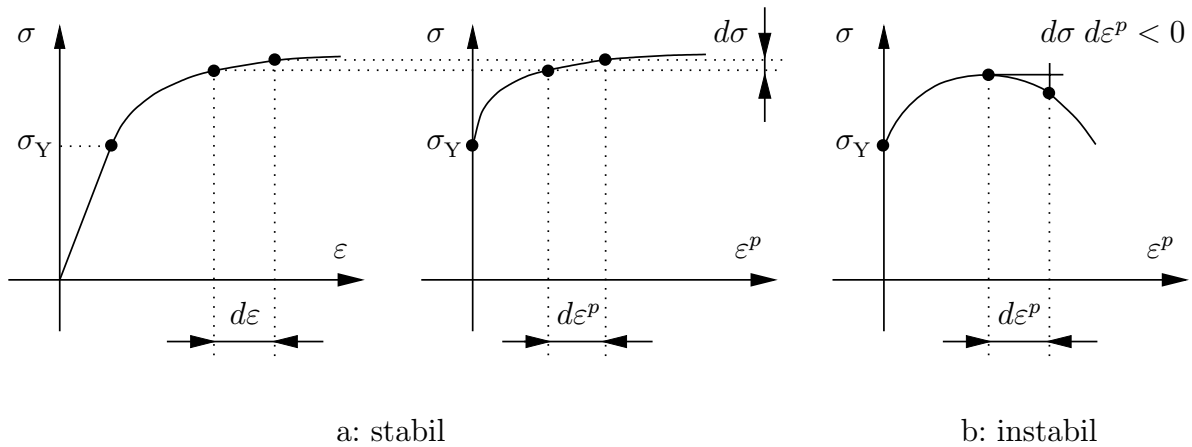


Abbildung A.1: Stabiles und instabiles Materialverhalten

Hierin ist  $d\sigma$  das Spannungs-,  $d\varepsilon$  das Dehnungs- und  $d\varepsilon^p$  das plastische Dehnungszinkrement. Das Verfestigungskriterium  $d\sigma \cdot d\varepsilon > 0$ , das in der Abbildung A.1 durch einen monotonen Anstieg der Werkstoffcharakteristik zum Ausdruck kommt, kann folgendermaßen verallgemeinert werden [11]:

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} > 0 \text{ bei Belastung (Arbeit positiv),} \quad (\text{A.9})$$

$$d\sigma_{ij}(d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^e) \geq 0 \text{ bei Belastungszyklus (Arbeit nicht negativ).} \quad (\text{A.10})$$

Da sich das Dehnungszinkrement  $d\varepsilon$  in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegen läßt ( $d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$ ) kann man auch

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (\text{A.11})$$

schreiben.

Betrachtet wird im folgenden ein Belastungszyklus, bei dem ein Material elasto-plastisch verformt wird. Die dabei geleistete Arbeit ist ein Kennzeichen für die Materialstabilität:

$$W = 0 \quad : \text{elastisch,} \quad (\text{A.12})$$

$$W > 0 \quad : \text{Arbeit wird bei der plastischen Umformung dissipiert,} \quad (\text{A.13})$$

$$W < 0 \quad : \text{Material verhält sich instabil.} \quad (\text{A.14})$$

Die Arbeit für den Belastungszyklus wird nun unter der Annahme kleiner Dehnungsgeschwindigkeiten formuliert.

$$W = \oint (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^A) d\varepsilon_{ij} \quad (\text{A.15})$$

$$\Leftrightarrow W = \underbrace{\oint (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^A) d\varepsilon_{ij}^e}_{=0} + \oint (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^A) d\varepsilon_{ij}^p \quad (\text{A.16})$$

$$\Rightarrow W^p = \oint (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^A) d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (\text{A.17})$$

Wird die plastische Arbeit in der Nachbarschaft eines Punktes  $B$  in eine TAYLOR-Reihe

$$dW^p = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^A)|_B \dot{\varepsilon}_{ij}^p dt + \frac{1}{2} [\dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^A)|_B \ddot{\varepsilon}_{ij}^p] dt^2 + \dots \geq 0 \quad (\text{A.18})$$

entwickelt, dann führen die ersten Terme auf

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^A) d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (\text{A.19})$$

und

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0. \quad (\text{A.20})$$

Hierin ist  $\boldsymbol{\sigma}$  der tatsächliche Spannungstensor,  $\boldsymbol{\sigma}^A$  ein beliebiger Spannungstensor innerhalb oder auf dem Fließkörper und  $d\varepsilon^p$  das plastische Dehnungsinkrement. Beide Ausdrücke stellen ein hinreichendes Kriterium für stabiles Materialverhalten dar (Stabilitätskriterium von DRUCKER [33]). Der erste Ausdruck (A.19) besagt dabei, daß der Zuwachs der plastischen Dissipationsarbeit nicht negativ sein kann. Zusammen mit der zweiten Gleichung (A.20) kann man auf die Konvexität der Fließfläche schließen, da in der Fließregel

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial \mathcal{F}(\sigma_{kl})}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \quad (\text{A.21})$$

mit  $d\lambda$  als LAGRANGE'schen Multiplikator der Ausdruck  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$  und damit auch  $d\varepsilon^p$  als 6-dimensionaler Gradientenvektor aufgefaßt werden kann, der senkrecht auf der Niveaufäche steht. Das Stabilitätskriterium (A.19) enthält das skalare Produkt der Hypervektoren  $(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^A)$  und  $d\varepsilon^p$  bzw.  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  und  $\dot{\varepsilon}^p$ , so daß die Schlußfolgerung aus den Gleichungen (A.19) und (A.20) gezogen werden kann [11]. Die Gleichung (A.21) wird auch Normalitätsregel genannt.

## Literaturverzeichnis

- [1] ALI, M., KÖNIG, J.A. und MAHRENHOLTZ, O.: *Experimental investigations on shakedown of portal frames*. Eng. Trans., 32: 349–359, 1984.
- [2] ALTENBACH, J. und ALTENBACH, H.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner Studienbücher, 1994.
- [3] BATHE, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York · Tokyo, 1986.
- [4] BELOUHRANI, M.A. und WEICHERT, D.: *An extension of the static shakedown theorem to inelastic cracked structures*. Int. J. Mech. Sci., 41: 163–177, 1999.
- [5] BELYTSCHKO, T.: *Plane stress shakedown analysis by finite elements*. Int. J. Mech. Sci., 14: 619–625, 1972.
- [6] BERNS, H., MELANDER, A., WEICHERT, D., ASNAFI, N., BROECKMANN, C. und GROSS-WEEGE, A.: *A new material for cold forging tools*. Comput. Mat. Sci., 11: 166–180, 1988.
- [7] BETTEN, J.: *Über die Konvexität von Fließkörpern isotroper und anisotroper Stoffe*. Acta Mechanica, 32: 233–247, 1979.
- [8] BETTEN, J.: *Net-stress analysis in creep mechanics*. Ingenieurarchiv, 52: 405–419, 1982. Vorgetragen auf dem „Second Symposium on Inelastic Solids and Structures“ in Bad Honnef am 24.09.1981.
- [9] BETTEN, J.: *Damage tensors in continuum mechanics*. J. Méc. Théo. Appl., 2: 13–32, 1983. Vorgetragen auf dem EUROMECH Colloquium 147 in Cachan/Paris am 22.09.1981.
- [10] BETTEN, J.: *The classical plastic potential theory in comparison with the tensor function theory*. Eng. Frac. Mech., 21: 641–652, 1985.
- [11] BETTEN, J.: *Kontinuumsmechanik (Elasto-, Plasto- und Kriechmechanik)*. Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York, 1993.
- [12] BETTEN, J.: *Finite Elemente für Ingenieure 1*. Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York, 1997.

- [13] BETTEN, J.: *Finite Elemente für Ingenieure 2*. Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York, 1998.
- [14] BLEICH, H.: *Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahlwerke unter der Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes*. Bauingenieur, 13: 261–267, 1932.
- [15] BOGDANOVICH, A.E. und PASTORE, C.M.: *Mechanics of textile and laminated composites*. Chapman & Hall, 1996.
- [16] BORKOWSKI, A. und KLEIBER, M.: *On a numerical approach to shakedown analysis of structures*. Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 22: 101–119, 1980.
- [17] BUCKTHORPE, D.E. und WHITE, P.S.: *Incorporation of alternating plasticity in the shakedown method*. Transactions of SMiRT, 12: E 119–124, 1993.
- [18] BUCKTHORPE, D.E. und WHITE, P.S.: *Shakedown: a design tool for high temperature*. The GEC journal of Research: Incorporation of the Marconi Review and the Plessey Research Review, 11: 24–38, 1993.
- [19] BUHAN, P. DE und TALIERCIO, A.: *A homogenization approach to the yield strength of composite materials*. Eur. J. Mech., A/Solids, 10:129–154, 1991.
- [20] CARVELLI, V., MAIER, G. und TALIERCIO, A.: *Shakedown analysis of periodic heterogeneous materials by a kinematic approach*. Strojnícky Časopis, 50(č. 4): 229–240, 1999.
- [21] CERADINI, G.: *Sull' adattamento dei corpi elasto-plastici soggetti ad azioni dinamiche*. Giorn. Genio Civile, 106: 239–250, 1969. (In italienischer Sprache).
- [22] COHN, M.Z. und MAIER, G.: *Engineering plasticity by mathematical programming*. Pergamon Press, New York, 1979.
- [23] COLLATZ, L. und WETTERLING, W.: *Optimierungsaufgaben*. Springer Verlag, Berlin · Heidelberg · New York, 2 Auflage, 1971.
- [24] CONN, A.R., GOULD, N.I.M. und TOINT, PH.L.: *LANCELOT: A fortran package for large-scale nonlinear optimization (Release A)*. Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg, 1992.
- [25] CORDEBOIS, J.P. und SIDOROFF, F.: *Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité*. J. Méc. Théo. Appl., (No. Spécial): 45–60, 1982.
- [26] CORRADI, L. und MAIER, G.: *Inadaptation theorems in the dynamics of elastic-workhardening structures*. Ingenieurarchiv, 43: 44–57, 1973.

- [27] CORRADI, L. und ZAVELANI, A.: *A linear programming approach to shakedown analysis of structures*. Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 3: 37–53, 1974.
- [28] DÉBORDES, O. und NAYROLES, B.: *Sur la théorie et le calcul à l'adaptation des structures élastoplastiques*. J. Méc., 15: 1–53, 1976.
- [29] DE DONATO, O.: *Second shakedown theorem allowing for cycles of both loads and temperature*. First Lombardo Scienza Lettere (A), 104: 265–277, 1970.
- [30] DENNIS JR., J.E. und V. TORCZON: *Direct search methods on parallel machines*. SIAM J. Optimization, 1: 448–474, 1991.
- [31] DHATT, G., TOUZOT, G. und CANTIN, G.: *The finite element method displayed*. John Wiley & Sons, Chichester, 1984.
- [32] DOROSZ, S.: *An upper bound to maximum residual deflections of elastic-plastic structures at shakedown*. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Tech., 24: 167–174, 1976.
- [33] DRUCKER, D.C.: *A definition of stable inelastic material*. J. Appl. Mech., 26: 101–106, 1959.
- [34] DRUCKER, D.C., PRAGER, W. und GREENBERG, H.J.: *Extended limit design theorems for continuous media*. Quart. Appl. Math., 9: 381–387, 1951.
- [35] DRUYANOV, B. und ROMAN, I.: *Conditions for adaptation of damaged elastic-plastic bodies to cyclic loading*. Fatigue & Fracture of Eng. Mat. & Struct., 21: 631–640, 1998.
- [36] DRUYANOV, B. und ROMAN, I.: *On adaptation (shakedown) of a class of damaged elastic plastic bodies to cyclic loading*. Eur. J. Mech., A/Solids, 17: 71–78, 1998.
- [37] DRUYANOV, B. und ROMAN, I.: *On shakedown of elastic plastic bodies with brittle damage*. In: MAIER, G. und WEICHERT, D. (Herausgeber): *Inelastic analysis of structures under variable loads: theory & engineering applications*. Kluwer Academic Publishers, in Vorbereitung, 2000.
- [38] DU, Z.-Z., McMEEKING, R.M. und SCHMAUDER, S.: *Transverse yielding and matrix flow past the fibers in metal matrix composites*. Mechanics of Materials, 21: 159–167, 1995.
- [39] DVORAK, G.J., LAGOUDAS, D.C. und HUANG, C.-M.: *Fatigue damage and shakedown in metal matrix composite laminates*. Mech. Comp. Mat. Struc., 1: 171, 1994.
- [40] FENG, X.-Q. und GROSS, D.: *A global/local shakedown analysis method of elasto-plastic cracked structures*. Eng. Frac. Mech., 63: 179–192, 1999.

- [41] FENG, X.-Q. und YU, S.-W.: *An upper bound on damage of elastic-plastic structures at shakedown*. Int. J. Dam. Mech., 3: 277–289, 1995.
- [42] FENG, X.-Q. und YU, S.-W.: *Damage and shakedown analysis of structures with strain-hardening*. Int. J. Plast., 11: 237–249, 1995.
- [43] FRAEIJIS DE VEUBEKE, B. und ZIENKIEWICZ, O.C.: *Strain-energy bounds in finite element analysis by slab-analogy*. J. Strain Anal., 2: 265–271, 1967.
- [44] FUSCHI, P. und POLIZZOTTO, C.: *The shakedown load boundary of an elastic-perfectly plastic structure*. Meccanica, 30: 155–174, 1995.
- [45] GAYDON, F.A. und MCCRUM, A.W.: *A theoretical investigation of the yield point loading of a square plate with a central circular hole*. J. Mech. Phys. Solids, 2: 156–169, 1954.
- [46] GENNA, F.: *A nonlinear inequality, finite element approach to the direct computation of shakedown load safety factors*. Int. J. Mech. Sci., 30: 769–789, 1988.
- [47] GOKHFELD, D.A.: *Some problems of shakedown of plates and shells*. In: *Trudy VI Vsesoyuznoj Konf. Plastin i Obolochek, Baku 1966*, Seiten 284–291. Izd. Nauka, Moskwa, 1966. (In russischer Sprache).
- [48] GOKHFELD, D.A. und CHERNIAVSKY, O.F.: *Limit analysis of structures at thermal cycling*. Sijthoff and Noordhoff, 1980.
- [49] GRÜNING, M.: *Die Tragfähigkeit statisch unbestimmter Tragwerke aus Stahl bei beliebig häufig wiederholter Belastung*. Springer Verlag, Berlin, 1926.
- [50] GROSS-WEEGE, J.: *Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1988.
- [51] GROSS-WEEGE, J.: *A unified formulation of statical shakedown criteria for geometrically nonlinear problems*. Int. J. Plast., 6: 433–447, 1990.
- [52] GROSS-WEEGE, J.: *On the numerical assessment of the safety factor of elastic-plastic structures under variable loading*. Int. J. Mech. Sci., 39: 417–433, 1997.
- [53] GROSS-WEEGE, J. und WEICHERT, D.: *Elastic-plastic shells under variable mechanical and thermal loads*. Int. J. Mech. Sci., 34: 863–880, 1992.
- [54] HACHEMI, A.: *Contribution à l'analyse de l'adaptation des structures inélastiques avec prise en compte de l'endommagement*. Dissertation, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1994.

- [55] HACHEMI, A., SCHWABE, F. und WEICHERT, D.: *Analyse de l'adaptation des matériaux composites à fibres*. 14<sup>e</sup> Congrès Français de Mécanique, Toulouse, du 30 Août au 03 Septembre 1999.
- [56] HACHEMI, A. und WEICHERT, D.: *An extension of the static shakedown theorem to a certain class of inelastic materials with damage*. Arch. Mech., 44: 491–498, 1992.
- [57] HACHEMI, A. und WEICHERT, D.: *Application of shakedown theory to damaging inelastic material under mechanical and thermal loads*. Int. J. Mech. Sci., 39: 1067–1076, 1997.
- [58] HACHEMI, A. und WEICHERT, D.: *Numerical shakedown analysis of damaged structures*. Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 160: 57–70, 1998.
- [59] HALPHEN, B. und NGUYEN, Q.S.: *Sur les matériaux standards généralisés*. J. Méc., 14: 39–63, 1975.
- [60] HEITZER, M.: *Berechnung des Einspielfaktors für eine Scheibe (ebener Dehnungszustand)*. Private Mitteilung, 1999.
- [61] HEITZER, M.: *Traglast- und Einspielanalyse zur Bewertung der Sicherheit passiver Komponenten*. Dissertation, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Berichte des Forschungszentrums Jülich, 3704, 1999.
- [62] HILL, R.: *Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles*. J. Mech. Phys. Solids, 11: 357–372, 1963.
- [63] HODGE, P.G.: *Plastic analysis of structures*. McGraw-Hill, 1959.
- [64] HUANG, Y.J. und STEIN, E.: *Prediction of the fatigue threshold for a cracked body using shakedown theory*. Fatigue & Fracture of Eng. Mat. & Struct., 18: 363–370, 1995.
- [65] HUANG, Y.J. und STEIN, E.: *Shakedown of a CT specimen with St52 steel – Experimental, analytical and numerical investigations*. J. Strain Anal., 30: 283–289, 1995.
- [66] HUANG, Y.J. und STEIN, E.: *Shakedown of a cracked body consisting of kinematic hardening material*. Eng. Frac. Mech., 54: 107–112, 1996.
- [67] HWA-SHAN-HO: *Shakedown in elastic-plastic systems under dynamic loading*. Trans. ASME, Ser. E., J. Appl. Mech., 39: 416–421, 1972.

- [68] HYDE, T.H., SAHARI, B.B. und WEBSTER, J.J.: *The effect of axial loading and axial restraint on the thermal ratchetting of thin tubes*. Int. J. Mech. Sci., 27: 679–692, 1985.
- [69] JEHLE, U.: *Ein Beitrag zur Formoptimierung von Tragwerken*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1993.
- [70] JELTSCH, R.: *Vorlesung Numerische Mathematik I für Ingenieure, Teil A*. Institut für Geometrie und Praktische Mathematik, RWTH Aachen, 3. Auflage, 1985.
- [71] JOCH, J., AINSWORTH, R.A. und HYDE, T.H.: *Limit load and J-estimates for idealised problems of deeply cracked welded joints in plane-strain bending and tension*. Fatigue & Fracture of Eng. Mat. & Struct., 16: 1061–1079, 1993.
- [72] JU, J.W.: *On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modelling and computational aspects*. Int. J. Solids Struct., 25: 803–833, 1989.
- [73] KACHANOV, L.M.: *Time of the rupture process under creep conditions*. Izv. Akad. Nauk SSR, Otd. Tech. Nauk, 8: 26–31, 1958. (In russischer Sprache).
- [74] KALISKI, S. und WŁODARCZYK, E.: *The problem of resonance for longitudinal elastic-plastic waves in a finite bar*. Proc. Vibr. Probl., 8: 47–59, 1967.
- [75] KARADENIZ, S. und PONTER, A.R.S.: *A linear programming upper bound approach to the shakedown limit of thin shells subjected to variable thermal loading*. J. Strain Anal., 19: 221–229, 1984.
- [76] KLEIBER, M. und KÖNIG, J.A.: *Incremental shakedown analysis in the case of thermal effects*. Int. J. Num. Meth. Engng., 20: 1567–1573, 1984.
- [77] KLEIBER, M. und KÖNIG, J.A. (Herausgeber): *Inelastic solids and structures, Antoni Sawczuk memorial volume*. Pineridge Press, Swansea, 1990.
- [78] KÖNIG, J.A.: *Theory of shakedown of elastic-plastic structures*. Arch. Mech. Stos., 18: 227–238, 1966.
- [79] KÖNIG, J.A.: *A shakedown theorem for temperature dependent elastic moduli*. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Tech., 17: 161–165, 1969.
- [80] KÖNIG, J.A.: *On the incremental collapse criterion accounting for temperature dependence of the yield-point stress*. Arch. Mech. Stos., 31: 317–325, 1979.
- [81] KÖNIG, J.A.: *On upper bounds to shakedown loads*. Z. Angew. Math. Mech., 59: 349–354, 1979.

- [82] KÖNIG, J.A.: *On stability of the incremental collapse process*. Arch. Inz. Lad., 26: 219–229, 1980.
- [83] KÖNIG, J.A.: *On some recent developments in the shakedown theory*. Adv. Mech., 5: 237–258, 1982.
- [84] KÖNIG, J.A.: *Stability of the incremental collapse*. In: POLIZZOTTO, C. und SAWCZUK, A. (Herausgeber): *Inelastic structures under variable loads*, Seiten 329–344. Palermo, 1984.
- [85] KÖNIG, J.A.: *Shakedown of elastic-plastic structures*. Elsevier, Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo, 1987.
- [86] KÖNIG, J.A. und KLEIBER, M.: *On a new method of shakedown analysis*. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Tech., 26: 165–171, 1978.
- [87] KÖNIG, J.A. und MAIER, G.: *Shakedown analysis of elastoplastic structures, a review of recent developments*. Nucl. Eng. Design, 66: 81–95, 1981.
- [88] KÖNIG, J.A. und SIEMASZKO, A.: *Strainhardening effects in shakedown process*. Ingenieurarchiv, 58: 58–66, 1988.
- [89] KOITER, W.T.: *Some remarks on plastic shakedown theorems*. Proc. Eighth. Int. Congr. Appl. Mech., Istanbul, Seiten 220–230, 1952.
- [90] KOITER, W.T.: *A new general theorem on shake-down of elastic-plastic structures*. Proc. Koninkl. Akad. Wet., B 59: 24–34, 1956.
- [91] KOITER, W.T.: *General theorems for elastic-plastic solids*. In: SNEDDON, I.N. und HILL, R. (Herausgeber): *Progress in solid mechanics*, Seiten 165–221. Amsterdam: North-Holland, 1960.
- [92] KREISSIG, R.: *Einführung in die Plastizitätstheorie: Mit technischen Anwendungen*. Fachbuchverlag Leipzig - Köln, 1992.
- [93] LEE, H., PENG, K. und WANG, J.: *An anisotropic damage criterion for deformation instability and its application to forming limit analysis of metal plates*. Eng. Frac. Mech., 21: 1031–1054, 1985.
- [94] LEERS, K.: *Experimentelle und theoretische Shakedownuntersuchung an Rohren*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 18: Bruchvorgänge und Schadensanalyse Nr. 23. VDI Verlag, 1985.
- [95] LEERS, K., KLIE, W., KÖNIG, J.A. und MAHREHOLTZ, O.: *Experimental investigations on shakedown of tubes*. In: SAWCZUK, A. und BIANCHI, B. (Herausgeber): *Plasticity today*. Elsevier, London, 1985.

- [96] LEMAITRE, J.: *A continuous damage mechanics model for ductile fracture*. J. Engng. Mater. Technol., 107: 83–89, 1985.
- [97] LEMAITRE, J.: *Formulation unifiée des lois d'évolution d'endommagement*. C. R. Acad. Sci., t. 305, Série II: 1125–1130, 1987.
- [98] LEMAITRE, J.: *A course on damage mechanics*. Springer Verlag, Berlin · Heidelberg, Second revised and enlarged edition, 1996.
- [99] LEMAITRE, J. und CHABOCHE, J.-L.: *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1985.
- [100] LEMAITRE, J. und CHABOCHE, J.-L.: *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, 1990.
- [101] MAHREHOLTZ, O., LEERS, K. und KÖNIG, J.A.: *Shakedown of tubes: A theoretical analysis and experimental investigations*. In: REID, S.R. (Herausgeber): *Metal forming and impact mechanics*, Seiten 155–172. Pergamon Press, Oxford, 1985.
- [102] MAIER, G.: *Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and non-associated flow-laws*. Meccanica, 6: 250–260, 1969.
- [103] MAIER, G.: *A shakedown matrix theory allowing for workhardening and second-order geometric effects*. In: SAWCZUK, A. (Herausgeber): *Proc. Symp. Foundations of plasticity*, Seiten 417–433. Noordhoff, Leyden, 1972.
- [104] MAIER, G.: *On quasi-static and dynamic shakedown of workhardening plastic structures with unstable parts*. J. Engng. Mech. Div., 98: 1322–1327, 1972.
- [105] MAIER, G. und LLOYD SMITH, D.: *Update to "mathematical programming applications to engineering plastic analysis"*. In: STEELE, C.R. und SPRINGER, G.S. (Herausgeber): *Applied Mechanics Update*, Seiten 377–383. ASME, New York, 1986.
- [106] MAIER, G. und MUNRO, J.: *Mathematical programming applications to engineering plastic analysis*. Appl. Mech. Rev., 35: 1631–1643, 1982.
- [107] MANDEL, J.: *Adaptation d'une structure plastique écrouissable et approximations*. Mech. Res. Commun., 3: 483–488, 1976.
- [108] MELAN, E.: *Theorie statisch unbestimmter Systeme aus ideal-plastischem Baustoff*. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, Abteilung IIa, 145: 195–218, 1936.
- [109] MELAN, E.: *Der Spannungszustand eines „Mises-Hencky'schen“ Kontinuums bei veränderlicher Belastung*. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, Abteilung IIa, 147: 73–87, 1938.

- [110] MELAN, E.: *Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums*. Ingenieurarchiv, 9: 116–126, 1938.
- [111] MORELLE, P.: *Structural shakedown analysis by dual finite-element formulations*. Eng. Struct., 6, 1984.
- [112] MORELLE, P. und NGUYEN DANG HUNG: *Etude numérique de l'adaptation plastique des plaques et coques de révolution par les éléments finis d'équilibre*. J. Méc. Théo. Appl., 2: 567–599, 1983.
- [113] MORRIS, A.J. (Herausgeber): *Foundations of Structural Optimization: A unified approach*. John Wiley, Chichester, 1982.
- [114] MRÓZ, Z.: *On the theory of steady plastic cycles in structures*. First SMiRT Conf., Berlin, Paper L5/6, 1971.
- [115] MRÓZ, Z., WEICHERT, D. und DOROSZ, S. (Herausgeber): *Inelastic behaviour of structures under variable loads*. Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [116] NAYROLES, B. und WEICHERT, D.: *La notion de sanctuaire d'élasticité et d'adaptation des structures*. C. R. Acad. Sci., 316: 1493–1498, 1993.
- [117] NEAL, B.G.: *Plastic collapse and shake-down theorems for structures of strain-hardening material*. J. Aero. Sci., 17: 297–306, 1950.
- [118] NGUYEN DANG HUNG und KÖNIG, J.A.: *A finite element formulation for shake-down problems using a yield criterion of the mean*. Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 8: 179–192, 1976.
- [119] NGUYEN DANG HUNG und PALGEN, L.: *Shakedown analysis by displacement method and equilibrium finite elements*. Proc. 5th SMiRT Conf., Paper L 3/3, 1979.
- [120] NORMENAUSSCHUSS EISEN UND STAHL (FES) IM DIN DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E.V., Beuth Verlag GmbH, Berlin · Köln: *DIN 17100, Allgemeine Baustähle (Gütenorm)*, 1980.
- [121] PERZYNA, P.: *Constitutive modelling of dissipative solids for postcritical behaviour and fracture*. J. Engng. Mater. Technol., 106: 410–419, 1984.
- [122] PIERRE, D.A. und LOWE, M.J.: *Mathematical programming via augmented lagrangians: An introduction with computer programs*. Addison-Wesley Publishing Company, 1975.
- [123] POLIZZOTTO, C. und BORINO, G.: *Shakedown and steady-rate responses of elastic-plastic solids in large displacements*. Int. J. Solids Struct., 33: 3415–3437, 1996.

- [124] POLIZZOTTO, C., BORINO, G., CADDEMI, S. und FUSCHI, P.: *Shakedown problems for material models with internal variables*. Eur. J. Mech., A/Solids, 10: 621–639, 1991.
- [125] POLIZZOTTO, C., BORINO, G. und FUSCHI, P.: *An extended shakedown theory for elastic-plastic-damage material models*. Eur. J. Mech., A/Solids, 15: 825–858, 1996.
- [126] PONTER, A.R.S.: *A general shakedown theorem for elastic-plastic bodies with workhardening*. Proc. 3rd SMiRT Conf., Paper L 5/2, 1975.
- [127] PONTER, A.R.S., CARTER, K.F. und DUGGAN, J.M.: *Shakedown limits for a metal matrix composite*. Unveröffentlicht, 1998.
- [128] PONTER, A.R.S. und LECKIE, F.A.: *Bounding properties of metal-matrix composites subjected to cyclic thermal loading*. J. Mech. Phys. Solids, 46: 697–717, 1998.
- [129] PONTER, A.R.S. und LECKIE, F.A.: *On the behaviour of metal matrix composites subjected to cyclic thermal loading*. J. Mech. Phys. Solids, 46: 2183–2199, 1998.
- [130] PRAGER, W.: *Shakedown in elastic-plastic media subjected to cycles of load and temperature*. In: *Proc. Symp. Plasticita nella Scienza della Construzioni*, Seiten 239–244, Bologna, 1956.
- [131] PRAGER, W.: *An introduction to plasticity*. Addison-Wesley, London, 1959.
- [132] PYCKO, S. und KÖNIG, J.A.: *Steady plastic cycles on reference configuration in the presence of second-order geometric effects*. Eur. J. Mech. Solids, 10: 563–574, 1991.
- [133] PYCKO, S. und MAIER, G.: *Shakedown theorems for some classes of nonassociative hardening elastic-plastic material models*. Int. J. Plast., 11: 367–395, 1995.
- [134] PYCKO, S. und MRÓZ, Z.: *Alternative approach to shakedown as a solution of a min-max problem*. Acta Mechanica, 93: 205–222, 1992.
- [135] RAKOTOVELO, M., TALEB, L. und COUSIN, M.: *On the validation of the methods related to cyclic behavior of metallic structures*. Int. J. Plast., 15: 457–478, 1999.
- [136] RICE, J. und TRACEY, D.: *On ductile enlargement of voids in triaxial stress fields*. J. Mech. Phys. Solids, 17: 201–217, 1969.
- [137] ROZENBLUM, V.I.: *On shakedown of uneven heated elastic-plastic bodies*. Izv. Akad. Nauk. SSSR OTN, Mekh. Mash., 7: 136–138, 1957. (In russischer Sprache).

- [138] ROZENBLUM, V.I.: *On shakedown analysis of uneven heated elastic-plastic bodies*. Prikl. Mat. Tkh. Fiz., 7: 98–101, 1965. (In russischer Sprache).
- [139] SACZUK, J.: *The influence of deformation path on adaptation process of a solid*. Arch. Mech., 49: 525–545, 1997.
- [140] SACZUK, J. und STUMPF, H.: *On statical shakedown theorems for non-linear problems*. Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, 74, 1990.
- [141] SAWCZUK, A.: *Evaluation of upper bounds to shakedown loads for shells*. J. Mech. Phys. Solids, 17: 291–301, 1969.
- [142] SCHEER, J., SCHEIBE, H.J. und KUCH, D.: *Untersuchung von Trägerschwächungen unter wiederholter Belastung bis in den plastischen Bereich*. Report No. 6099, Institut für Stahlbau, TU Braunschweig, 1990.
- [143] SCHIECK, B.: *Shakedown analysis at finite elastoplastic strains and deformations*. In: *GAMM 99, Annual Meeting, Short Communications in Mathematics and Mechanics, Sections 1-7*, Band 80, Supplement 2, Seiten S445–S446. Z. Angew. Math. Mech., 2000.
- [144] SCHIECK, B.: *The proof of an extension of Melan's theorem at large strains*. In: *GAMM 99, Annual Meeting, Short Communications in Mathematics and Mechanics, Sections 1-7*, Band 80, Supplement 2, Seiten S447–S448. Z. Angew. Math. Mech., 2000.
- [145] SCHWABE, F., HACHEMI, A. und WEICHERT, D.: *Einspielanalyse von Verbundwerkstoffen*. In: *GAMM 99, Annual Meeting, Short Communications in Mathematics and Mechanics, Sections 1-7*, Band 80, Supplement 2, Seiten S549–S550. Z. Angew. Math. Mech., 2000.
- [146] SHICHUN, W. und HUA, L.: *A kinetic equation for ductile damage at large plastic strain*. J. Mat. Proc. Tech., 21: 295–302, 1990.
- [147] SIEMASZKO, A.: *Inadaptation analysis with hardening and damage*. Eur. J. Mech. Solids, 12: 237–248, 1993.
- [148] STEIN, E., ZHANG, G. und HUANG, Y.: *Modeling and computation of shakedown problems for nonlinear hardening materials*. Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 103: 247–272, 1993.
- [149] STEIN, E., ZHANG, G. und KÖNIG, J.A.: *Shakedown with nonlinear hardening including structural computation using finite element method*. Int. J. Plast., 8: 1–31, 1992.

- [150] STEIN, E., ZHANG, G. und MAHNKEN, R.: *Shake-down analysis for perfectly plastic and kinematic hardening materials*. In: STEIN, E. (Herausgeber): *Progress in computational analysis of inelastic structures*, CISM Courses and Lectures No. 321, International Centre for Mechanical Sciences. Springer-Verlag, Wien · New York, 1990.
- [151] STEIN, E., ZHANG, G., MAHNKEN, R. und KÖNIG, J.A.: *Micromechanical modelling and computation of shakedown with nonlinear kinematic hardening including examples for 2-D problems*. In: AXELARD, D.R. und MUSCHIK, W. (Herausgeber): *Recent developments of micromechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [152] STRUCTURAL DYNAMICS RESEARCH CORPORATION: *I-DEAS Master Series 7*. CAE-Software, 1999.
- [153] STUMPF, H.: *Theoretical and computational aspects in the shakedown analysis of finite elastoplasticity*. Int. J. Plast., 9: 583–602, 1993.
- [154] STUMPF, H. und SCHIECK, B.: *Shakedown at finite elasto-plastic strains*. In: MAIER, G. und WEICHERT, D. (Herausgeber): *Inelastic analysis of structures under variable loads: theory & engineering applications*. Kluwer Academic Publishers, in Vorbereitung, 2000.
- [155] SUQUET, P.: *Analyse limite et homogénéisation*. C. R. Acad. Sci., 296: 1355–1358, 1983.
- [156] SYMONDS, P.S.: *Shakedown in continuous media*. Trans. ASME, Ser. E., J., Appl. Mech., 18: 85–89, 1951.
- [157] TALEB, L.: *Metallic structures subjected to cyclic loadings – II. A new approach to assess the steady state*. Int. J. Pressure Vessels and Piping, 75: 181–190, 1998.
- [158] TALEB, L., COUSIN, M. und JULLIEN, J.F.: *Metallic structures subjected to cyclic loadings – I. Inadequacy of the elastic analysis for the steady state assessment*. Int. J. Pressure Vessels and Piping, 75: 173–180, 1998.
- [159] TALIERCIO, A.: *Lower and upper bounds to the macroscopic strength domain of a fiber-reinforced composite material*. Int. J. Plast., 8: 741, 1992.
- [160] TALIERCIO, A.: *Application of homogenization theory and limit analysis to the evaluation of the macroscopic strength of fiber reinforced composite materials*. In: SACCHI LANDRIANI, G. und SALENCON, J. (Herausgeber): *Evaluation of global bearing capacities of structures*, CISM Courses and Lectures No. 332, Seiten 91–121. Springer Verlag, Wien · New York, 1993.

- [161] TARN, J.Q., DVORAK, G.J. und RAO, M.S.M.: *Shakedown of unidirectional composites*. Int. J. Solids Struct., 11: 751–764, 1975.
- [162] TORCZON, V.: *On the convergence of the multidirectional search algorithm*. SIAM J. Optimization, 1: 123–145, 1991.
- [163] TORCZON, V.J.: *Multi-Directional Search: A direct search algorithm for parallel machines*. Dissertation, Rice University, Houston, Texas, 1989.
- [164] TRITSCH, J.B.: *Analyse d'adaptation des structures élasto-plastiques avec prise-en-compte des effets géométriques*. Dissertation, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1993.
- [165] TRITSCH, J.B. und WEICHERT, D.: *Shakedown of elastic-plastic structures at finite deformations – A comparative study of static shakedown theorems*. Z. Angew. Math. Mech., 73: T309–T312, 1993.
- [166] WEICHERT, D.: *Shakedown at finite displacements; A note on Melan's theorem*. Mech. Res. Commun., 11: 121–127, 1984.
- [167] WEICHERT, D.: *On the influence of geometrical nonlinearities on the shakedown of elastic-plastic structures*. Int. J. Plast., 2: 135–148, 1986.
- [168] WEICHERT, D.: *Versagenstheorien in der Mechanik*. Skript zur Vorlesung an der Ruhr-Universität Bochum, 1988.
- [169] WEICHERT, D.: *Shakedown of shell-like structures allowing for certain geometrical nonlinearities*. Arch. Mech., 41: 62–71, 1989.
- [170] WEICHERT, D.: *Advances in the geometrically nonlinear shakedown theory*. In: KLEIBER, M. und KÖNIG, J.A. (Herausgeber): *Inelastic solids and structures*. Pineridge Press, Swansea, U.K., 1990.
- [171] WEICHERT, D. und GROSS-WEEGE, J.: *The numerical assessment of elastic-plastic sheets under variable mechanical and thermal loads using a simplified two-surface yield condition*. Int. J. Mech. Sci., 30: 757–767, 1988.
- [172] WEICHERT, D. und HACHEMI, A.: *Shakedown analysis of structures accounting for damage and geometrical effects*. In: KHAN, A.S. (Herausgeber): *Physics and Mechanics of Finite Plastic and Viscoplastic Deformation*, Proceedings of Plasticity '97, Seiten 445–446. The Sixth International Symposium on Plasticity and its Current Applications, Neat Press, Fulton, Maryland, 1997.
- [173] WEICHERT, D. und HACHEMI, A.: *Influence of geometrical nonlinearities on the shakedown of damaged structures*. Int. J. Plast., 14: 891–907, 1998.

- [174] WEICHERT, D., HACHEMI, A. und SCHWABE, F.: *Application of shakedown analysis to the plastic design of composites*. Archive of Applied Mechanics, 69: 623–633, 1999.
- [175] WEICHERT, D., HACHEMI, A. und SCHWABE, F.: *Application of shakedown theory for the assessment and design of composites*. In: *12. Workshop Composite Forschung in der Mechanik*, Seite 9, Paderborn, 30. November - 1. Dezember 1999.
- [176] WEICHERT, D., HACHEMI, A. und SCHWABE, F.: *Investigation of damage and deterioration of composites by shakedown analysis*. In: KHAN, A.S. (Herausgeber): *Constitutive and Damage Modelling of Inelastic Deformation and Phase Transformation*, Proceedings of Plasticity '99, Seiten 765–768. The Seventh International Symposium on Plasticity and its Current Applications, Neat Press, Fulton, Maryland, 1999.
- [177] WEICHERT, D., HACHEMI, A. und SCHWABE, F.: *Shakedown analysis of composites*. Mech. Res. Commun., 26: 309–318, 1999.
- [178] WIECHMANN, K., BARTHOLD, F.-J. und STEIN, E.: *Shape optimization of shakedown analysis problems*. In: MAIER, G. und WEICHERT, D. (Herausgeber): *Inelastic analysis of structures under variable loads: theory & engineering applications*. Kluwer Academic Publishers, in Vorbereitung, 2000.
- [179] ZAHL, D.B., SCHMAUDER, S. und McMEEKING, R.M.: *Transverse strength of metal matrix composites reinforced with strongly bonded continuous fibers in regular arrangements*. Acta Metall. Mater., 42: 2983–2997, 1994.
- [180] ZARKA, I. und CASIER, J.: *Elastic-plastic response of structures to cyclic loading: Practical rules*. In: NEMAT-NASSER, S. (Herausgeber): *Mech. Today, 6*. Pergamon, Oxford, 1981.
- [181] ZHANG, G.: *Einspielen und dessen numerische Behandlung von Flächentragwerken aus ideal plastischem bzw. kinematisch verfestigendem Material*. Dissertation, Universität Hannover, 1991.
- [182] ZHENG, Q.-S. und BETTEN, J.: *On damage effective stress and equivalence hypothesis*. Int. J. Dam. Mech., 5: 219–240, 1996.
- [183] ZIENKIEWICZ, O.C.: *Methode der finiten Elemente*. Carl Hanser Verlag München, 1984.

# Lebenslauf

## Persönliche Daten:

Name: Frank Schwabe  
Geburtsdatum: 15. Februar 1967  
Geburtsort: Hellersen jetzt Lüdenscheid  
Staatsangehörigkeit: deutsch  
Familienstand: verheiratet, zwei Kinder

## Schulbildung:

Aug. 1973 – Juli 1977 Grundschole in Lüdenscheid  
Aug. 1977 – Juni 1987 Zeppelin-Gymnasium in Lüdenscheid  
Abschluß: Allgemeine Hochschulreife

## Wehrdienst:

Juli 1987 – Sep. 1988 Panzerbataillon 203 in Hemer

## Hochschulausbildung:

Okt. 1988 – März 1991 Grundstudium Maschinenbau an der RWTH Aachen  
April 1991 – April 1994 Hauptstudium Maschinenbau an der RWTH Aachen  
Vertiefungsrichtung: Wärmetechnik  
Abschluß: Diplom-Ingenieur

## Berufstätigkeit:

Dez. 1991 – März 1993 studentische Hilfskraft am  
Institut für Allgemeine Mechanik der RWTH Aachen  
April 1994 – Juli 1995 wissenschaftliche Hilfskraft bzw. Angestellter am  
Institut für Allgemeine Mechanik der RWTH Aachen  
Mitarbeit im SFB 224 „Motorische Verbrennung“  
wissenschaftlicher Angestellter am  
Institut für Allgemeine Mechanik der RWTH Aachen  
Arbeitsgebiet: Strukturversagen infolge inelastischer  
Effekte