Sz
9681a

DAS PROBLEM DER RELAXATIONSZEIT EINER KLASSE EXAKTER DYNAMISCHER SYSTEME

Wolfgang Koch

Das Problem der Relaxationszeit einer Klasse exakter dynamischer Systeme

Von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
genehmigte Dissertation

vorgelegt von
Diplom-Physiker

Wolfgang Koch

aus Nürnberg

Referent: Universitätsprofessor Dr. rer.nat. Gert Roepstorff
Korreferent: Professor Dr. rer.nat. Dieter Mayer
Tag der mündlichen Prüfung: 17. April 1990

Meiner lieben Ehefrau Dorothea
sehr herzlich zugeeignet

Inhalt

1 Einordnung der Thematik 1
- 1.1 Methodische Ansätze . . . 1
- 1.2 Das Phänomen der Relaxation . . . 2
- 1.3 Die spezielle Fragestellung . . . 4

2 Eine Klasse exakter dynamischer Systeme 9
- 2.1 Begriffe, Definitionen . . . 9
  - 2.1.1 Zerlegungen . . . 10
  - 2.1.2 Graphen . . . 11
  - 2.1.3 Ein einfaches Beispiel . . . 14
- 2.2 Symbolische dynamische Systeme . . . 16
  - 2.2.1 $(X, \mathcal{A}, T)$ und das korrespondierende symbolische System . 17
  - 2.2.2 Eine spezielle Partition . . . 18
- 2.3 Der Perron-Frobenius-Operator . . . 21
  - 2.3.1 Die Klasse der Modelle . . . 21
  - 2.3.2 Räume lokal stetiger Observablen . . . 22
- 2.4 Spektraleigenschaften . . . 27
  - 2.4.1 Räume lokal analytischer Observablen . . . 27
  - 2.4.2 Die Spur der Potenzen des PF-Operators . . . 28
- 2.5 Exaktheit und exponentielles Mischen . . . 30

3 Einfach relaxierende Systeme einer Dimension 35
- 3.1 Intervall-Abbildungen konstanter Ableitung . . . 35
  - 3.1.1 Der PF-Operator: Die Struktur des Spektrums . . . 36
  - 3.1.2 Verfeinerungen minimaler charakterisierender Zerlegungen . 41
  - 3.1.3 Graphentheoretische Eigenschaften . . . 46
- 3.2 Affine Kreis-Transformationen . . . 47
  - 3.2.1 Erzeugende Zerlegungen . . . 48
  - 3.2.2 Das Spektrum des Perron-Frobenius-Operators . . . 50
- 3.3 Modelle zirkulanter Struktur . . . 53
  - 3.3.1 Die Klasse der Modelle . . . 53
  - 3.3.2 Das Spektum zirkulanter Adjazenzmatrizen . . . 56
  - 3.3.3 Einige Beispiele . . . 60

4 Mehrfach relaxierende Systeme, Phasenübergänge 65
4.1 Eine einparametrige Familie dynamischer Systeme 66
4.1.1 Das Modell und seine Eigenschaften 66
4.1.2 Relaxationszeiten und Wahl der Observablen 68
4.2 Phasenübergänge in einer zweiparametrigen Familie 69
4.2.1 Das Modell und sein Phasendiagramm 71
4.2.2 Kolmogorov-Sinai-Entropie und Ljapunov-Exponent 75

5 Expansive Transformationen des d-Torus 79
5.1 Das Problem charakterisierender Zerlegungen 79
5.2 Direkte Produkte eindimensionaler Transformationen 81
5.3 Eine spezielle Klasse affiner Torus-Transformationen 85
5.3.1 Eigenschaften, charakterisierende Zerlegungen 85
5.3.2 Beispiele in zwei Dimensionen 89
5.3.3 Die Relaxationszeit 92
5.4 Mehrdimensionale affine β-Transformationen 97

6 Chebysheff-Systeme in zwei Dimensionen 103
6.1 Invariante Maße und Relaxationseigenschaften 104
6.2 Beispiele, Verallgemeinerungen 109
6.3 Chebysheff-Systeme und harmonischer Oszillator 113

7 Ansätze künftiger Entwicklung 115

Literatur 117

Abbildungsverzeichnis 123

Kapitel 1

Einordnung der Thematik

Die vorliegende Untersuchung ist im Umkreis eines Grundlagenproblems der theoretischen Physik angesiedelt, das darin besteht, eine Brücke zu schlagen zwischen deterministischen Naturgesetzen und statistischer Naturbeschreibung.

Ein zentrales Anliegen der theoretischen Physik ist es, Fakten, die auf definierte Weise den Naturerscheinungen entnommen sind, in rationaler Terminologie zu formulieren, abstrahierend essentielle Züge zu isolieren und das anschauliche Phänomen zeitlicher Aufeinanderfolge mit mathematischen Strukturen in Verbindung zu bringen. Begriffliche Analyse einerseits und zeitliche Vorhersage anderseits kennzeichnen ihre fundamentale Fragestellung.

1.1 Methodische Ansätze

Lösungen dieser Aufgabe hat man mit Hilfe verschiedener gedanklicher Ansätze auf unterschiedlichem Niveau gesucht.

Die Theorie der deterministischen dynamischen Systeme stellt einen mathematischen Rahmen dar, um Erscheinungen vielfältigster Natur, mechanische und ökologische Systeme, turbulente Strömungen, sogar chemische Reaktionen, begrifflich zugänglich zu machen. Man spricht abstrakt von Zuständen x, repräsentiert durch die Elemente eines Phasenraumes, die als eindeutige Charakterisierung eines Systems zu einer bestimmten Zeit angesehen werden. Ihre zeitliche Evolution, die Trajektorien $x(t)$, sind bei zeitlich kontinuierlichen Systemen durch Differentialgleichungen $\dot{x}(t) = \Phi(x(t))$, bei zeitlich diskreten Systemen durch Differenzengleichungen $x_{n+1} = T(x_n)$ festgelegt. Durch die Konstruktion der Poincaré-Schnitte können zeitlich diskrete aus zeitlich kontinuierlichen Systemen hervorgehen.

'Deterministisch' heißen derartige Systeme, weil ihre zukünftige zeitliche Entwicklung eindeutig von der Gegenwart, dem Zustand x_0 zur Zeit t_0, bestimmt ist. Auch dynamische Systeme mit 'Gedächtnis' können prinzipiell in den beschriebenen gedanklichen Rahmen eingefügt werden: Die zeitliche Veränderung der Zustände

ist unter diesem Aspekt etwa durch Integrodifferentialgleichungen festgelegt; die zukünftige Entwicklung dieser Systeme hängt daher nicht nur von der Gegenwart, sondern auch von der Vergangenheit der einzelnen Zustände ab.

Die Anwendung wahrscheinlichkeitstheoretischer Konzepte führt auf eine andere begriffliche Ebene der physikalischen Naturbeschreibung, die gekennzeichnet ist durch die Theorie der stochastischen Prozesse oder die statistische Mechanik sehr vieler ($\sim 10^{23}$) Freiheitsgrade. Vorhersage bedeutet hier, Aussagen über Wahrscheinlichkeiten künftiger Versuchsergebnisse zu treffen.

Überraschende, erst in den letzten Jahrzehnten gewonnene Erkenntnisse zeigten die Notwendigkeit auf, beide Betrachtungsweisen zu verbinden und als nicht mehr voneinander unabhängig anzusehen. Sie erscheinen vielmehr mannigfaltig verknüpft: stochastische Prozesse können durch deterministische Grundgleichungen generiert werden [1], umgekehrt erzwingt das Studium deterministischer Systeme schon sehr weniger Freiheitsgrade die Einführung von Begriffsbildungen der Wahrscheinlichkeitslehre.

Den Ausgangspunkt dieser modernen Entwicklungen bildet das Phänomen des *deterministischen Chaos* [2,3]. Charakteristisch für die zeitliche Entwicklung eines chaotischen dynamischen Systems mit einem kompakten Phasenraum ist seine sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Die Trajektorien dicht beieinanderliegender Anfangszustände separieren sich voneinander exponentiell schnell im Verlauf ihrer zeitlichen Entwicklung. Jede Ungenauigkeit, sei sie auch noch so klein, verhindert aus diesem Grunde Langzeitvorhersagen. Da jeder experimentell zu realisierende Zustand grundsätzlich nur mit endlicher Präzision bekannt sein kann, wird das Studium von Trajektorien allein dieser besonderen physikalischen Situation nicht gerecht.

Es erscheint daher der geschilderten Problematik angemessener, das bisherige methodische Konzept zu modifizieren und die Wirkung der Dynamik eines deterministischen Systems auf Verteilungen von Anfangszuständen zu untersuchen. Meßungenauigkeiten sind auf diese Weise prinzipiell mitberücksichtigt. Das Interesse verlagert sich damit im Sinne der Referenz [4] auf die statistischen Eigenschaften eines Systems unter dem Aspekt großer Zeiten. Innerhalb dieses erweiterten begrifflichen Rahmens induziert das zeitliche Veränderungsgesetz der einzelnen Zustände einen linearen Operator, der die zeitliche Entwicklung von Verteilungsfunktionen der Anfangszustände beschreibt. In der Literatur über dynamische Systeme trägt dieser Operator den Namen *Perron-Frobenius-Operator* [5,6], in der statistischen Mechanik ist er als *Liouville-Operator* bekannt.

1.2 Das Phänomen der Relaxation

Unter bestimmten Voraussetzungen, die durch die Untersuchungen des russischen Physikers *N.S.Krylov* [7] deutlich geworden sind, konvergieren im Zuge der zeit-

lichen Evolution alle hinreichend glatten Anfangsverteilungen gegen eine unter der Wirkung der Dynamik invariante Verteilungsfunktion ϱ. Sie geht als wesentliche Komponente in eine Beschreibungsweise dynamischer Systeme ein, die alle Eigenschaften eines Gleichgewichtszustandes der klassischen statistischen Physik aufweist. So gibt etwa das Integral $\int_{\mathcal{G}} dx\, \varrho(x)$ die Wahrscheinlichkeit dafür an, ein System nach hinreichend langer Zeit im Teilgebiet $\mathcal{G}$ des zugrundeliegenden Phasenraumes aufzufinden.

Dieser Vorgang der Relaxation in stationäre Gleichgewichtszustände im Sinne der statistischen Physik und das Problem der Relaxationszeit als eines Maßes der Relaxationsgeschwindigkeit stehen im Mittelpunkt der Überlegungen, die in der vorliegenden Arbeit durchgeführt werden.

Die skizzierte Fragestellung berührt das zentrale Problem der statistischen Physik der Nichtgleichgewichtszustände. Ausgehend von einem beliebigen Makrozustand kann ein statistisches System nur dann einen asymptotischen Gleichgewichtszustand erreichen, wenn es die Eigenschaft des *Mischens* besitzt. Diese entspricht der Forderung, daß Korrelationen zweier Observablen mit fortschreitender Zeit verschwinden müssen. Korrelationsfunktionen spielen eine bedeutende Rolle in der statistischen Physik des Nichtgleichgewichtes: Die Natur ihres asymptotischen Verhaltens für wachsende Zeiten gibt ein Maß für die Mischungseigenschaft; durch die Green-Kubo-Formeln [8] sind sie mit den Transportkoeffizienten des betreffenden Systems verknüpft.

Klingen Korrelationen geeignet ausgewählter Klassen von Observablen sogar *exponentiell* schnell ab, so ist ihnen eine wohlbestimmte Zeit τ, die Relaxationszeit, zugeordnet. Grob gesprochen bestimmt sie, wieviel Zeit verstreicht, bis eine beliebige Anfangsverteilung den Gleichgewichtszustand erreicht. Prominente Standardlehrbücher der theoretischen Physik, wie etwa das Werk von Landau und Lifschitz [9], weisen auf die Bedeutung der Rolle der Relaxationszeit hin, bieten aber nicht einmal eine Näherungsmethode zu ihrer Berechnung an. Bis in die jüngste Zeit hinein bilden Relaxationsvorgänge ein vieldiskutiertes Thema in den verschiedenen Zweigen der theoretischen Physik: Die Referenz [10] unterrichtet über den Stand der Forschung bei Hamiltonschen Systemen; exponentielle Konvergenz in Gleichgewichtszustände wird für eine Klasse von 'ramdom-walk'-Modellen in dem Aufsatz [11] untersucht; ein informationstheoretischer Ansatz zum Verständnis der Relaxation findet sich in dem Artikel [12].

Innerhalb des methodischen Rahmens dieser Untersuchung wenden wir uns ausschließlich zeitlich diskreten dynamischen Systemen zu, die keine 'Gedächtnisphänomene' aufweisen. Die modernen begrifflichen Hilfsmittel der Ergodentheorie dynamischer Systeme erlauben unter diesen Umständen, den angesprochenen Problemkomplex mathematisch präzise und auf besonders durchsichtige Weise zu formulieren. Exponentielles Mischen kann für spezielle Klassen von Systemen nachgewiesen werden [13]; Beispiele erlauben, Relaxationszeiten explizit oder unter Verwendung numerischer Methoden zu berechnen [14].

Wie man erkennt, sind die Relaxationseigenschaften eines dynamischen Systems eng mit der Natur des Spektrums des zugehörigen Perron-Frobenius-Operators verknüpft [6]. Formuliert bezüglich geeignet ausgewählter Funktionenräume, ist er Ausdruck der Dynamik des Systems auf dem begrifflichen Niveau der Verteilungsfunktionen. Ein endlicher Abstand zwischen seinem Spektralradius und dem Absolutbetrag ξ seiner zweithöchsten Eigenwerte impliziert exponentielles Mischen, die Größe ξ selbst ist mit der Relaxationszeit τ verknüpft über die Beziehung $1/\tau = -\log \xi$.

1.3 Die spezielle Fragestellung

Die Diskussion vergleichsweise einfach gearteter Modellsysteme, die analytischen Berechnungen zugänglich sind, wirft eine Reihe grundsätzlicher Fragen auf, welche die methodische Leitlinie dieser Arbeit kennzeichnen; ihre eingehende Behandlung stellt den besonderen Gegenstand der Überlegungen dar.

- Welchen prinzipiellen Schwierigkeiten begegnet die Methode des Perron-Frobenius-Operators bei ihrer Anwendung auf konkrete Systeme?
- Welcher Funktionenraum von Observablen ist 'natürlich' für die Definition des Perron-Frobenius-Operators?
- Ist das Spektrum des Operators im allgemeinen komplex? Unter welchen Voraussetzungen ist es diskret?
- Gibt es verschiedene grundsätzlich gleichberechtigte Räume natürlicher Observablen?
- Führen verschiedene Räume von Observablen im allgemeinen zu unterschiedlichen Relaxationszeiten desselben Systems?
- Kann man eine Bedingung formulieren, unter der ein System nur eine einzige Relaxationszeit für alle natürlichen Observablen besitzt?
- Angenommen ein System hänge stetig von externen Parametern ab, welche typischen qualitativen Abhängigkeiten von den Parametern weisen die Relaxationszeiten auf?
- Stehen Relaxationszeiten im allgemeinen in einem erkennbaren Zusammenhang mit weiteren, ein System wesentlich charakterisierenden Größen?

  Es ist hier an den größten *Ljapunov-Exponenten* λ^L, als ein Maß für die Sensitivität der Anfangsbedingungen, und die *Kolmogorov-Sinai-Entropie* h_{KS}, die maximale Informationsrate, gedacht, die durch fortdauernde Durchführung eines Experimentes erzielt werden kann.

- Liegt in speziellen Situationen ein einfacher zahlenmäßiger Zusammenhang zwischen τ, h_{KS} und λ^L vor?
- Eröffnen sich neue Perspektiven durch die Betrachtung mehrdimensionaler dynamischer Systeme?
- Welche physikalische Relevanz besitzen die einer expliziten Diskussion zugänglichen Modelle?

Die Wahl der hier vorgestellten Modellsysteme ergibt sich daraus, daß gängige Methoden der Funktionalanalysis zur Anwendung gelangen sollen. Hamiltonsche Systeme werden jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt. Die eingeführten Beispiele können im Sinne der Referenz [15] als Ausgangspunkt störungstheoretischer Berechnungen der Relaxationszeiten komplizierter gearteter Systeme dienen oder als für analytische Untersuchungen besonders geeignete Repräsentanten größerer Konjugationsklassen dynamischer Systeme aufgefaßt werden.

Auf zwei Problemkreise, die in der Literatur bereits vereinzelt Beachtung gefunden haben, wird besonders hingewiesen:

Erstens: Das Relaxationsverhalten hängt empfindlich von der Wahl der jeweils betrachteten Klasse von Observablen ab. Nur besondere Klassen dynamischer Systeme und sehr spezielle Teilräume quadratintegrabler Funktionen führen überhaupt zu exponentiellen Mischungseigenschaften [16,17].

Ferner ist die verbreitete Vermutung zu korrigieren, im allgemeinen sei die Zerfallsrate exponentiell abklingender Korrelationen aus der Dynamik eines Systems auf eine Weise zu berechnen, die insensitiv von den konkret untersuchten Observablen abhängt (vergleiche auch Referenz [18]). Damit tritt ein Grundlagenproblem in Erscheinung, das für viele Zweige der theoretischen Physik Aktualität besitzt:

> Welche Funktionenräume von Observablen sind aufgrund physikalischer Gesichtspunkte ausgezeichnet?

Den Erwägungen der Referenz [19] folgend, wird in einer These der vorliegenden Arbeit vorgeschlagen, lokal analytische Funktionen als physikalisch relevante Observablen anzusehen.

Zweitens wird hervorgehoben, daß daß Studium der spektralen Eigenschaften des Perron-Frobenius-Operators typischerweise sehr schwer lösbare mathematische Probleme aufwirft. Einen Einblick in den technischen Aufwand, den selbst einfache, eindimensionale Systeme erforderlich machen, bietet die Referenz [14]. Diese Problematik spiegelt sich auch in einem äquivalenten Zugang zu der Fragestellung wider, der die Lokalisierung von Polen der Fourier-Transformierten der Korrelationsfunktionen erörtert [20,21,22].

In Anbetracht dieser Komplikationen weisen die im folgenden untersuchten Modellsysteme ein Strukturmerkmal auf, nämlich lokale Konstanz ihrer

Jakobi-Matrix, das Fragestellungen der Funktionalanalysis mit algebraischen Methoden zu behandeln erlaubt und aus diesem Grunde explizite Berechnungen ermöglicht.

Im einzelnen ist der Gedankengang der vorliegenden Untersuchung wie folgt aufgegliedert:

Das **Kapitel 2** stellt in enger Anlehnung an Referenz [23] das begriffliche Instrumentarium bereit und definiert eine Klasse exakter dynamischer Systeme. Nach der Einführung geeigneter Räume lokal analytischer Funktionen wird deutlich, daß ein und dasselbe dynamische System viele verschiedene, grundsätzlich gleichberechtigte Räume natürlicher Observablen besitzen kann, die zu exponentiellen Mischungseigenschaften führen. Bekannte Methoden der Funktionalanalysis gestatten, Formeln herzuleiten, die Spuren der Potenzen des Perron-Frobenius-Operators mit geeigneten Summationen über periodische Bahnen des zugrundeliegenden Systems in Verbindung bringen (vergleiche Referenz [19]). *Einfach relaxierende* Systeme, die durch eine einzige Relaxationszeit gekennzeichnet sind, werden begrifflich von Systemen mehrfachen Relaxationsverhaltens unterschieden.

Die nachfolgenden Kapitel wenden sich dem Studium von Beispielen zu, die der aufgestellten Klasse angehören.

Eine speziell beschaffene Unterklasse eindimensionaler, einfach relaxierender Systeme wird im **3.Kapitel** eingeführt. Die wesentlichen Informationen über die spektralen Eigenschaften aller einem derartigen System zugeordneten Perron-Frobenius-Operatoren erscheinen kodiert in einem für das System charakteristischen Graphen. Die Relaxationszeit kann mit strukturellen Eigenschaften dieses Graphen in Verbindung gebracht werden. Modelle einer besonderen Bauart lassen die explizite Berechnung der Relaxationszeit zu.

Familien dynamischer Systeme, die von externen Parametern abhängig sind, stehen im Mittelpunkt des **Kapitels 4**. Anhand eines Beispiels wird der Charakter mehrfach relaxierender Systeme verdeutlicht. Wie sich ferner zeigt, weisen die Relaxationszeiten als Funktionen der Systemparameter Singularitäten auf, Unstetigkeiten der ersten Ableitung, die in Analogie zur klassischen Thermodynamik als Phasenübergänge interpretiert werden. Für das diskutierte Modell ist die explizite Berechnung des Ljapunov-Exponenten sowie der Kolmogorov-Sinai-Entropie möglich. Man wird zu verhältnismäßig komplizierten, aber geschlossenen Formeln geführt; sie erweisen die im allgemeinen vorliegende Unabhängigkeit dieser Größen von der Relaxationszeit.

Auf die besondere Problematik mehrdimensionaler Systeme geht das **5.Kapitel** ein. Die Existenz sogenannter erzeugender Zerlegungen bildet eine wichtige Voraussetzung für eine vergleichsweise unkomplizierte mathematische Behandlung der Perron-Frobenius-Operatoren. Bereits länger ist jedoch bekannt, daß diese Zerlegungen fraktale Ränder besitzen können [24], wodurch ein explizites Studium des Spektrums der Perron-Frobenius-Operatoren sehr erschwert wird. Schon im Falle dynamischer Systeme, die durch verhältnismäßig einfach gebaute Torus-Ab-

bildungen definiert sind, kennzeichnet dieses Phänomen die typischerweise vorliegende Situation [25,26] (zitiert in [27]).

Nach einer eingehenden Erörterung dieser Komplikation wird eine Klasse expansiver Torus-Transformationen spezieller Natur eingeführt, welche die genannten Schwierigkeiten umgeht. Die dadurch generierten Systeme erweisen sich als einfach relaxierend. Ferner liegt für die in Betracht gezogenen Systeme eine einfachen Relation vor zwischen der Relaxationszeit τ, der Kolmogorov-Sinai-Entropie h_{KS} und der Dimension d der Modelle:

$$\tau h_{KS} = d.$$

Das Kapitel beschließend werden mehrdimensionale Verallgemeinerungen der sogenannten β-Transformation [28,29] eingeführt und näher untersucht. Die behandelten Beispiele legen Evidenz für die Hypothese nahe, ein bestimmtes Strukturmerkmal eines dynamischen Systems, nämlich die Konstanz seiner Jakobi-Matrix, impliziere einfaches Relaxationsverhalten.

Eine Diskussion verallgemeinerter Chebysheff-Systeme in zwei Dimensionen beendet im **6.Kapitel** die vorliegende Arbeit. Unter besonderen Voraussetzungen sind sie explizit der Methode des Perron-Frobenius-Operators zugänglich. Gewisse Aussagen über invariante Maße und das Relaxationsverhalten, teils hypothetischer Natur, können formuliert werden. Wie sich weiterhin zeigt, besteht ein unerwarteter Zusammenhang zwischen Chebysheff-Systemen und harmonischen Oszillatoren in zwei Dimensionen.

Kapitel 2

Eine Klasse exakter dynamischer Systeme

Das Kapitel stellt eine Klasse dynamischer Systeme vor, deren Relaxationsverhalten einem eingehenden Studium zugänglich ist. Darüber hinaus sind in einer Reihe von Beispielen derartiger Systeme alle die Relaxation betreffenden Größen explizit zu berechnen.

Gewisse Analytizitätseigenschaften, die den betrachteten Modellen innewohnen, erlauben die Anwendung gängiger Methoden der Funktionalanalysis. Die Überlegungen fußen hierbei weitgehend auf Ideen von G.Roepstorff und D.Mayer [23,13], gehen aber von vereinheitlichenden Annahmen aus, um die wesentlichen Züge herauszustellen.

Insbesondere finden die Eigenwerte λ_k, $k = 0, 1, \ldots$, der Perron-Frobenius-Operatoren Beachtung. Für Summen ihrer Potenten, $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n$, $n \in \mathbb{N}$, werden Formeln hergeleitet sowie zwei wichtige Eigenschaften der untersuchten Klasse, *Exaktheit* und *exponentielles Mischen*, mit der Existenz einer Spektrallücke, $1 = \lambda_0 > |\lambda_k|$, $k \geq 1$, in Verbindung gebracht.

2.1 Begriffe, Definitionen

Zur präzisen Kennzeichnung der zu untersuchenden Klasse dynamischer Systeme wird eine der Problematik besonders angepaßte Terminologie entwickelt. Im weiteren Fortgang der Überlegungen erlaubt sie, die in der Referenz [23] getroffenen Begriffsbildungen auf eine für die beabsichtigten Zwecke geeignete Weise zu verallgemeinern. Sie wird auch bei der Formulierung der zugeordneten Perron-Frobenius-Operatoren und der Einführung einer symbolischen Dynamik Bedeu-

tung gewinnen.

Ein diskretes dynamisches System ist definiert durch die Angabe eines Phasenraumes X, einer zugehörigen σ-Algebra $\mathcal{A}$ und einer Transformation $T : X \to X$ mit der Eigenschaft: $T^{-1}\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$. Derartige Tripel $(X, \mathcal{A}, T)$ heißen *meßbare* oder *maßtheoretische* dynamische Systeme.

2.1.1 Zerlegungen

Eine zentrale Rolle spielen Zerlegungen $\mathcal{Z}$ des Phasenraumes eines dynamischen Systems. Darunter verstehen wir eine Menge paarweise disjunkter Elemente $\mathcal{Z}_i \in \mathcal{A}$ der σ-Algebra $\mathcal{A}$, indiziert durch die Symbole eines Alphabetes $I_{\mathcal{Z}}$, deren Vereinigung den Phasenraum X ergibt:

$$\bigcup_{i \in \mathcal{Z}} \overline{\mathcal{Z}_i} = X. \tag{2.1}$$

Alternativ sprechen wir von einer Zerlegung des zugrundeliegenden dynamischen Systems. Im folgenden werden jedoch nur derartige Zerlegungen in Betracht gezogen, die aus einer endlichen Anzahl, $|\mathcal{Z}| < \infty$, offener Gebiete des Phasenraumes mit stückweise glatten Rändern bestehen; insbesondere dürfen also die Berandungen $\partial\mathcal{Z}_i$, $i \in I_{\mathcal{Z}}$, nicht 'fraktal' sein.

Eine endliche Zerlegung $\mathcal{Z}'$ heißt *Verfeinerung* der Zerlegung $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}' \preceq \mathcal{Z}$, falls jedes Element aus $\mathcal{Z}$ durch eine Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{Z}'$ dargestellt werden kann.

Auf natürliche Weise ordnen wir dynamischen Systemen zwei im allgemeinen voneinander verschiedene Typen von Zerlegungen zu. Sie erweisen sich im Fortgang als wichtige Größen.

Definition 2.1 *Es seien $\mathcal{N}' = \{\mathcal{N}'_i\}_{i \in I_{\mathcal{N}'}}$ Zerlegungen eines dynamischen Systems derart, daß alle Restriktionen $T|_{\mathcal{N}_i}$, $i \in I_{\mathcal{N}'}$, der Transformation T invertierbar sind. Die gröbste aller dieser Zerlegungen heißt die* natürliche Zerlegung *$\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_i\}_{i \in I_{\mathcal{N}}}$ des Systems $(X, \mathcal{A}, T)$.*

Eine Zerlegung $\mathcal{Z}'$ nennen wir unter der Wirkung von T mit der Zerlegung $\mathcal{Z}$ *verträglich*, wenn für jedes $\mathcal{Z}'_i \in \mathcal{Z}'$, $i \in I_{\mathcal{Z}'}$, das Bild $T\mathcal{Z}'_i$ als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{Z}$ aufgefaßt werden kann. Dieser Sprachgebrauch gestattet, eine weitere Definition einzuführen:

Definition 2.2 *Zerlegungen $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I_{\mathcal{C}}}$, die mit sich selbst unter der Wirkung von T verträglich sind und mit denen auch die natürliche Zerlegung $\mathcal{N}$ des zugrundeliegenden dynamischen Systems verträglich ist, werden* charakterisierende Zerlegungen *von $(X, \mathcal{A}, T)$ genannt.*

Wir weisen auf zwei Problemkreise hin.

1. Nicht jedes dynamische System muß notwendig eine endliche charakterisierende Zerlegung mit stückweise glatten Rändern besitzen. Bereits unter einfachen eindimensionalen Systemen finden sich Gegenbeispiele [29]; in höheren Dimensionen scheint die Existenz glatter charakterisierender Zerlegungen sogar einen Ausnahmefall darzustellen. Der Abschnitt 5.1 dieser Arbeit geht auf diese Problematik ausführlicher ein und berichtet über Resultate der Referenz [27], die sich auf diese Fragen beziehen.

   Da alle weiteren Überlegungen auf der Annahme der Existenz derartiger Zerlegungen beruhen, schränkt die Forderung nach charakterisierenden Zerlegungen die Menge der im Rahmen dieser Arbeit zu behandelnden dynamischen Systeme ein und stellt ein gewisses Problem für die Interpretation dar, wenn man die im folgenden gewonnenen Resultate als generisch für größere Klassen von dynamischen Systemen auffassen möchte.

2. Besitzt ein dynamisches System eine charakterisierende Zerlegung, so existieren, im Unterschied zu der natürlichen Zerlegung, im allgemeinen unendlich viele weitere, voneinander verschiedene charakterisierende Zerlegungen. Diese sind prinzipiell gleichberechtigt; eine gewisse Auszeichnung erfährt jedoch die *minimale charakterisierende Zerlegung* $\mathcal{C}^{min}$ des Systems, für die gilt:

$$\mathcal{C} \preceq \mathcal{C}^{min}. \tag{2.2}$$

Zerlegungen können verknüpft werden. So ist $\mathcal{E} := \mathcal{N} \vee \mathcal{C}$ die gröbste gemeinsame Verfeinerung der Zerlegungen $\mathcal{N}$ und $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \mathcal{N} \vee \mathcal{C} &:= \{\mathcal{N}_i \cap \mathcal{C}_j : i \in I_{\mathcal{N}},\, j \in I_{\mathcal{C}}\} \\ &= \{\mathcal{E}_i\}_{i \in I_{\mathcal{E}}}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Auf kanonische Weise ordnen wir einer Zerlegung $\mathcal{E}$ zwei surjektive Indikatorfunktionen $' : I_{\mathcal{E}} \to I_{\mathcal{N}}$ und $'' : I_{\mathcal{E}} \to I_{\mathcal{C}}$ zu derart, daß gilt: $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{N}_{i'}$ bzw. $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{C}_{i''}$.

Ist $\mathcal{C}^*$ eine Verfeinerung von $\mathcal{C}$, so überträgt sich diese Eigenschaft auf die Zerlegungen $\mathcal{E}^* := \mathcal{N} \vee \mathcal{C}^*$ und $\mathcal{E}$: $\mathcal{C}^* \preceq \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{E}^* \preceq \mathcal{E}$.

2.1.2 Graphen

Die Methodik der Graphentheorie hat bereits vereinzelt Anwendung auf Probleme der Theorie dynamischer Systeme gefunden. Ansätze, die in diese Richtung zielen, werden in den Referenzen [30,31,32] vorgeschlagen. Auch wir wollen uns der Möglichkeiten dieses begrifflichen Hilfsmittels bedienen und setzen die Sprache der

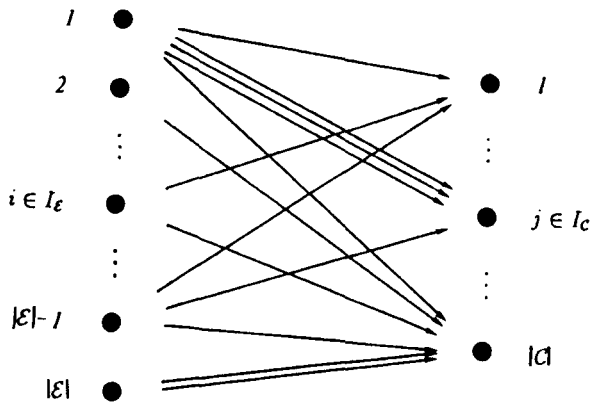


Bild 2.1: Der Graph $G_T(\mathcal{E},\mathcal{C})$

Graphentheorie ein, um die Wirkung von Tranformationen T eines Phasenraumes auf Zerlegungen zu beschreiben.

Da laut Konstruktion die Zerlegung $\mathcal{E}$ mit $\mathcal{C}$ verträglich ist, induziert die Transformation T eine Abbildung von $\mathcal{E}$ auf $\mathcal{C}$, die durch einen verallgemeinerten Graphen $G_T(\mathcal{E},\mathcal{C})$ veranschaulicht wird. Je zwei Vertizes $i \in I_\mathcal{E}$ und $j \in I_\mathcal{C}$ aus den im allgemeinen verschiedenen Vertexmengen $I_\mathcal{E}$ und $I_\mathcal{C}$ sind genau dann durch L_{ji} von i nach j gerichtete Pfeile verbunden, wenn das Bild $T\mathcal{E}_i$ das Gebiet $\mathcal{C}_j$ L_{ji}-mal überdeckt. Die auf diese Weise festgelegte $|\mathcal{E}| \times |\mathcal{C}|$-Matrix mit nichtnegativen, ganzzahligen Elementen heißt *Adjazenzmatrix* des Graphen $G_T(\mathcal{E},\mathcal{C})$.

Analog hierzu werden die Graphen $G_T(\mathcal{C})$ und $G_T(\mathcal{E})$ als die durch T induzierten Wirkungen von $\mathcal{C}$ bzw. $\mathcal{E}$ auf sich selbst aufgefaßt. Sie stellen gerichtete Graphen im üblichen Sinne der Graphentheorie dar (vergleiche etwa Referenz [33]) und werden durch quadratische Adjazenzmatrizen $M^\mathcal{C}$ und $M^\mathcal{E}$ beschrieben. In der Literatur über dynamische Systeme tragen derartige Matrizen auch den Namen *Übergangsmatrizen*.

Die Graphen $G_T(\mathcal{E},\mathcal{C})$ und $G_T(\mathcal{C})$ stehen in einem Zusammenhang, der sich bezüglich ihrer Adjazenzmatrizen in der Beziehung äußert:

$$\sum_{i \in I_\mathcal{E}} L_{ji} = \sum_{i \in I_\mathcal{C}} M^\mathcal{C}_{ji} \quad \text{für alle } j \in I_\mathcal{C}. \tag{2.4}$$

Es folgen einige Tatsachen über gerichtete Graphen im üblichen Sinne [33]. Ein

Zyklus $\mathbf{C}_n$ der Länge n ist ein gerichteter Graph im gebräuchlichen Sinn mit der Vertexmenge $(i_1,\ldots,i_n)$ und Pfeilen (i_j,i_{j+1}), $j=1,\ldots,n-1$, und (i_n,i_1). *Linear gerichtet* heißt ein Graph, bei dem in jedem Vertex genau ein Pfeil endet und von dem ein anderer ausgeht; er besteht also aus Zyklen. Jede Sequenz aufeinanderfolgender Pfeile in einem Graphen heißt *Pfad*. Die Länge eines Pfades bezeichnet die Anzahl der darin enthaltenen Pfeile. Ein Pfad kann denselben Pfeil mehr als einmal passieren.

Gerichtete Graphen heißen *strikt zusammenhängend*, wenn je zwei Vertizes durch einen Pfeil, *zusammenhängend*, wenn sie durch einen Pfad verbunden sind. Für derartige Graphen existiert eine natürliche Zahl n, so daß die Elemente der n-ten Potenz der zugehörigen quadratischen Adjazenzmatrix M strikt positiv sind:

$$M_{ij}^n = \sum_{k_1,\ldots,k_{n-1}} M_{ik_1} M_{k_1k_2} \ldots M_{k_{n-1}j} > 0. \tag{2.5}$$

Insbesondere besitzen so beschaffene Graphen irreduzible Adjazenzmatrizen. Wie man nachprüft, gibt das Matrixelement M_{ij}^n die Anzahl der Pfade der Länge n an, die von dem Vertex i ausgehen und in dem Vertex j enden.

Im folgenden erläutern wir das Verhältnis des Graphen $\mathbf{G}_T(\mathcal{E}^{min},\mathcal{C}^{min})$, definiert durch die minimale charakterisierende Zerlegung $\mathcal{C}^{min}$ zu dem Graphen $\mathbf{G}_T(\mathcal{E},\mathcal{C})$, gegeben durch eine weitere charakterisierende Zerlegung $\mathcal{C}$ des zugrundeliegenden Systems. Offenbar existieren Teilalphabete $I_{\mathcal{E}}^i \subseteq I_{\mathcal{E}}$ und $I_{\mathcal{C}}^i \subseteq I_{\mathcal{C}}$ mit der Eigenschaft:

$$\mathcal{E}_i^{min} = \bigcup_{j\in I_{\mathcal{E}}^i} \mathcal{E}_j \quad \text{und} \quad \mathcal{C}_i^{min} = \bigcup_{j\in I_{\mathcal{C}}^i} \mathcal{C}_j. \tag{2.6}$$

Die Anzahl der Pfeile von allen Vertizes $I_{\mathcal{E}}^i$ zu einem beliebigen Vertex $k \in I_{\mathcal{C}}$ ergibt sich als die Summe $\sum_{l\in I_{\mathcal{E}}^i} L_{kl}$. Die Verträglichkeit von $\mathcal{E}^{min}$ mit $\mathcal{C}^{min}$ unter der Wirkung von T in Verbindung mit der Eigenschaft $\mathcal{C} \preceq \mathcal{C}^{min}$ bedingt die Gültigkeit der Relation:

$$\sum_{l\in I_{\mathcal{E}}^i} L_{kl} = \sum_{l\in I_{\mathcal{E}}^i} L_{ml} \quad \text{für alle } k,m \in I_{\mathcal{C}}^j. \tag{2.7}$$

Demnach ist aufgrund der Definition einer Adjazenzmatrix das nachfolgende Lemma bewiesen.

Lemma 2.3 *Die Adjazenzmatrix L^{min} des Graphen $\mathbf{G}_T(\mathcal{E}^{min},\mathcal{C}^{min})$ läßt sich vermittels:*

$$L_{ji}^{min} = \sum_{k\in I_{\mathcal{E}}^i} L_{lk} \quad \textit{mit } l \in I_{\mathcal{C}}^j \textit{ beliebig} \tag{2.8}$$

durch die entsprechende Matrix eines weiteren Graphen $\mathbf{G}_T(\mathcal{E},\mathcal{C})$, $\mathcal{C} \preceq \mathcal{C}^{min}$, darstellen.

Ein vergleichbares Verfahren für quadratische, stochastische Matrizen wird in der Referenz [34] beschrieben. Dieses Resultat überträgt sich analog auf die entsprechenden Matrizen der Graphen $\mathbf{G}_T(\mathcal{C})$ und $\mathbf{G}_T(\mathcal{C}^{min})$.

Da die Eigenwerte der Matrizen $M^{C^{min}}$ und M^C noch Bedeutung erlangen werden, formulieren wir eine Aussage über das Verhältnis ihrer Spektren.

Lemma 2.4 *Für die Adjazenzmatrizen M^C und $M^{C^{min}}$ der Graphen $G_T(C)$ und $G_T(C^{min})$ gilt:*

$$spec\, M^{C^{min}} \subset spec\, M^C \tag{2.9}$$

für jede charakterisierende Zerlegung $C \neq C^{min}$ des zugrundeliegenden Systems.

Beweis Es sei V ein Vektorraum der Dimension $|C|$ mit der Basis $\{v_1, \ldots, v_{|C|}\}$. Wir fassen die Matrix M^C als eine lineare Abbildung von V auf:

$$M^C v_i = \sum_{j \in I_C} M^C_{ji} v_j \quad \text{mit } i \in I_C. \tag{2.10}$$

Ferner seien Vektoren w_i eingeführt durch:

$$w_i := \sum_{k \in I^i_C} v_k \quad \text{mit } i \in I_{C^{min}}. \tag{2.11}$$

Die Mengen I^i_C sind dabei wie in Gleichung (2.6) definiert. Offenbar sind die Vektoren w_i linear unabhängig. Es gilt ferner:

$$\begin{aligned} M^C w_i &= \sum_{k \in I^i_C} M^C v_k = \sum_{j \in I_C} \sum_{k \in I^i_C} M^C_{jk} v_j \\ &= \sum_{l \in I_{C^{min}}} \sum_{j \in I^l_C} \sum_{k \in I^i_C} M^C_{jk} v_j = \sum_{l \in I_{C^{min}}} \sum_{j \in I^l_C} M^{C^{min}}_{li} v_j \\ &= \sum_{l \in I_{C^{min}}} M^{C^{min}}_{li} w_l. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Der von den Vektoren $\{w_1, \ldots, w_{|C^{min}|}\}$ aufgespannte Unterraum von V ist also invariant unter der Wirkung von M^C. Ergänzt man $\{w_1, \ldots, w_{|C^{min}|}\}$ zu einer Basis von V, so erhält die Matrix M^C die Gestalt:

$$M^C = \begin{pmatrix} M^{C^{min}} & \otimes \\ 0 & \otimes \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

wodurch die Behauptung bewiesen ist. ◇

2.1.3 Ein einfaches Beispiel

Obwohl die Kapitel 3–6 dieser Arbeit ganz dem Studium von Beispielen gewidmet sind, ist es für das Verständnis hilfreich, schon an dieser Stelle anhand eines sehr einfachen Modellsystems die eingeführten Begriffsbildungen zu illustrieren.

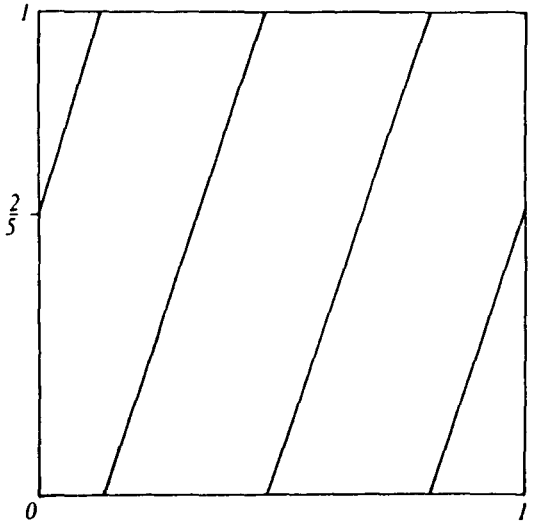


Bild 2.2: Die Transformation $T(x) = 3x + 2/3 \pmod 1$

Wir betrachten das dynamische System $([0,1), \mathcal{B}, T)$, das definiert ist durch folgende Transformation:

$$T : [0,1) \to [0,1),\ x \mapsto 3x + 2/3 \pmod 1. \tag{2.14}$$

T ist ein Spezialfall *affiner Kreisabbildungen*. Der Abschnitt 3.2 dieser Arbeit wird sich dem Studium der hierdurch definierten Klasse dynamischer Systeme ausführlich zuwenden. Die natürliche Zerlegung dieses Systems ist offenbar gegeben durch die Menge:

$$\mathcal{N} = \{ (0, \tfrac{1}{5}); (\tfrac{1}{5}, \tfrac{8}{15}); (\tfrac{8}{15}, \tfrac{13}{15}); (\tfrac{13}{15}, 1) \}. \tag{2.15}$$

Die Restriktionen $T|_{\mathcal{N}_i}$ der Transformation T auf die Elemente der natürlichen Zerlegung können invertiert werden. Man erhält für die linearen Funktionen $S_i(x) := T|^{-1}_{\mathcal{N}_i}$, $i \in I_{\mathcal{N}}$, die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} S_1(x) &= 1/3(x - 2/5), \quad S_2(x) = 1/3(x + 3/5), \\ S_3(x) &= 1/3(x + 8/5), \quad S_4(x) = 1/3(x + 13/5). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Wie man nachprüft und wie im Kapitel 3 näher dargelegt wird, ist die minimale charakterisierende Zerlegung $\mathcal{C}^{min}$ des Systems verknüpft mit der Bahn $B_T(0) = \{T^i(0)\}_{i=0}^{\infty}$ des Punktes $x = 0$ unter der Wirkung der iterierten Transformation T. $\mathcal{C}^{min}$ besteht aus disjunkten, offenen Intervallen, deren Randpunkte durch die Elemente der Bahn $B_T(0)$ und den Punkt $x = 1$ gegeben sind:

$$\mathcal{C}^{min} = \{ (0, \tfrac{1}{5}); (\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}); (\tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}); (\tfrac{3}{5}, 1) \}. \tag{2.17}$$

Offenbar stellen auch:

$$C^1 = \{ (0,\tfrac{1}{5}); (\tfrac{1}{5},\tfrac{3}{10}); (\tfrac{3}{10},\tfrac{2}{5}); (\tfrac{2}{5},\tfrac{3}{5}); (\tfrac{3}{5},1) \} \tag{2.18}$$

und:

$$\begin{aligned} C^2 = \{ &(0,\tfrac{1}{10}); (\tfrac{1}{10},\tfrac{1}{5}); (\tfrac{1}{5},\tfrac{2}{5}); (\tfrac{2}{5},\tfrac{1}{2}); (\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{5}); (\tfrac{3}{5},\tfrac{7}{10}) \\ &(\tfrac{7}{10},\tfrac{4}{5}); (\tfrac{4}{5},\tfrac{9}{10}); (\tfrac{9}{10},1) \} \end{aligned} \tag{2.19}$$

ebenfalls charakterisierende Zerlegungen des betrachteten Modells dar. Sie sind Verfeinerungen der minimalen charakterisierenden Zerlegung C^{min}. Als minimale erzeugende Zerlegung $\mathcal{E}^{min} = \mathcal{N} \vee C^{min}$ des Systems erhält man:

$$\mathcal{E}^{min} = \{ (0,\tfrac{1}{5}); (\tfrac{1}{5},\tfrac{2}{5}); (\tfrac{2}{5},\tfrac{8}{15}); (\tfrac{8}{15},\tfrac{3}{5}); (\tfrac{3}{5},\tfrac{13}{15}); (\tfrac{13}{15},1) \}. \tag{2.20}$$

Den Zerlegungen C^{min} und $\mathcal{E}^{min}$ sind die Graphen $G_T(\mathcal{E}^{min}, C^{min})$ und $G_T(C^{min})$ zugeordnet, deren Adjazenzmatrizen L^{min} und $M^{C^{min}}$ aus dem Schaubild der Tranformation T (Abbildung 2.2) unmittelbar abgelesen werden können. Man erhält auf diese Weise:

$$L^{min} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^{C^{min}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Als Spektren der Matrizen $M^{C^{min}}$ und M^{C^1}, die in der gleichen Weise aus der Abbildung (2.2) zu bestimmen ist, findet man die Mengen:

$$\begin{aligned} \operatorname{spec} M^{C^{min}} &= \{ 3, -1, i, -i \} \quad \text{und} \\ \operatorname{spec} M^{C^1} &= \{ 3, 1, -1, i, -i \}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Offenbar gilt: $\operatorname{spec} M^{C^{min}} \subset M^{C^1}$.

2.2 Symbolische dynamische Systeme

Die zeitliche Entwicklung des Anfangszustandes $x \in X$ eines dynamischen Systems $(X, \mathcal{A}, T)$ unter der Wirkung von T kann abstrakt durch eine Sequenz von Symbolen eines Alphabetes beschrieben werden. Die Symbolfolge enthält die gesamte Information über das in Frage stehende System. In dieser Vorgehensweise werden durch die Symbole nur gewisse charakteristische Züge einer Trajektorie bezeichnet, etwa in welchem Teil des Phasenraumes sich die Bahn des Startpunktes gerade befindet. Im Raum derartiger Symbolsequenzen lassen sich gewisse Fragen durchsichtiger behandeln; die der Transformation T entsprechende Wirkung auf Folgen ist von sehr einfacher Struktur.

Die methodischen Grundgedanken der symbolischen Dynamik sind in einem umfassenden Übersichtsartikel von Alekseev und Yakobson dargelegt [35]. Die imm folgenden eingeführten begrifflichen Hilfsmittel modifizieren die Terminologie der Referenz [23] und erlauben, den Anwendungsbereich der dort dargestellten Theorie zu erweitern.

2.2.1 $(X, \mathcal{A}, T)$ und das korrespondierende symbolische System

Allgemein ist ein *Morphismus* $f : (X, \mathcal{A}, T) \to (X', \mathcal{A}', T')$ zwischen dynamischen Systemen eine meßbare Abbildung, die der Relation $f \circ T = T' \circ f$ genügt. Eine *Retraktion* für f ist ein Morphismus $g : (X', \mathcal{A}', T') \to (X, \mathcal{A}, T)$ derart, daß gilt $g \circ f = 1_X$. Insbesondere folgen hieraus die Aussagen:

1. $f^{-1}\mathcal{A}' = \mathcal{A}$.
2. f ist injektiv.
3. $g(X') = X$.

$\xi : (X, \mathcal{A}) \to I$ sei eine meßbare und surjektive Abbildung eines Phasenraumes $(X, \mathcal{A})$ auf ein endliches Alphabet I. Diese sogenannte *Partition* ξ induziert einen eindeutigen Morphismus:

$$\begin{aligned} \xi_T : (X, \mathcal{A}, T) &\to (\Sigma_I^\dagger, \sigma), \\ x &\mapsto (\xi(x), \xi(Tx), \xi(T^2x), \dots) \end{aligned} \tag{2.23}$$

zwischen dem zugrundeliegenden und einem symbolischen dynamischen System. Den Phasenraum $\Sigma_I^\dagger$ dieses Systems bilden die einseitig unendlichen Sequenzen $(i_0, i_1, i_2, \dots)$, $i_n \in I$. Er ist ausgestattet mit der üblichen σ-Algebra der Zylindermengen. Der 'shift'-Operator:

$$\sigma : (i_0, i_1, i_2, \dots) \mapsto (i_1, i_2, i_3, \dots) \tag{2.24}$$

beschreibt die zeitliche Evolution des symbolischen Systems $(\Sigma_I^\dagger, \sigma)$.

Eine Partition ξ heißt *erzeugend*, wenn der Morphismus ξ_T eine Retraktion π besitzt. Laut Definition gilt: $\pi \circ \xi_T = 1_X$. Die Größe $\theta = \xi_T \circ \pi$ ist ein idempotenter Operator auf $\Sigma_I^\dagger$ und wird als Projektor auf den Raum der *zulässigen Sequenzen* interpretiert.

Wir wenden das Interesse auf den Torus Tor^m, den Kubus $[0,1]^m$ und die Projektion $q : [0,1]^m \to Tor^m$, $x \mapsto x \pmod 1$. Diese Räume tragen die gebräuchliche Borel-Algebra-Struktur. Die direkte Produkttopologie in $\Sigma_I^\dagger$ ist erzeugt durch die

Metrik $d(\omega,\omega') = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}(1-\delta_{i_n,i'_n})$ mit $\omega = (i_0,i_1,i_2,\ldots)$, $\omega' = (i'_0,i'_1,i'_2,\ldots)$. In dieser Arbeit werden nur solche Systeme in Betracht gezogen, bei denen die Retraktion $\pi : \Sigma_I^+ \to Tor^m$ in dieser Topologie stetig ist. Hier postulieren wir jedoch zusätzlich die Existenz einer stetigen Fortsetzung $\bar{\pi} : \Sigma_I^+ \to [0,1]^m$, die der Relation $\pi = q \circ \bar{\pi}$ genügt.

2.2.2 Eine spezielle Partition

Den Überlegungen liegt von nun an zugrunde, daß das dynamische System $(Tor^m, \mathcal{B}, T)$ eine Zerlegung $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_i\}_{i\in I_\mathcal{E}} = \mathcal{N} \vee \mathcal{C}$ besitzt. Die Größe $\mathcal{E}' = \mathcal{N}' \vee \mathcal{C}'$ mit $q\mathcal{N}' = \mathcal{N}$ und $q\mathcal{C}' = \mathcal{C}$ stellt die korrespondierende Zerlegung des Kubus $[0,1]^m$ dar. Die Partition:

$$\xi_\mathcal{E} : (Tor^m, \mathcal{B}, T) \to I_\mathcal{E},\ x \mapsto \sum_{i\in I_\mathcal{E}} i\chi_{\mathcal{E}_i}(x), \tag{2.25}$$

bei der durch $\chi_{\mathcal{E}_i}$ die charakteristischen Funktionen der Gebiete $\mathcal{E}_i \in \mathcal{E}$ dargestellt sind, ist nicht überall auf dem Phasenraum Tor^m definiert. Eine derartige Schwierigkeit tritt bereits bei der Dualzahldarstellung von Zahlen $x \in [0,1)$ auf. Wir umgehen diese Komplikation indem wir das Lebesguesche Maß l als ein 'natürliches' Maß auf dem Torus ansehen und die Partition $\xi_\mathcal{E}$ nach 'Elimination von Mengen vom Maße 0' verwenden. Für alle hier zu betrachtenden Zerlegungen $\mathcal{E}$ gilt nämlich: $l(\partial\mathcal{E}) = 0$. Dies entspricht völlig der Vorgehensweise der Referenz [36, S.58].

Offenbar beschreiben im allgemeinen nicht alle Sequenzen des durch $\xi_\mathcal{E}$ induzierten symbolischen Systems $(\Sigma_{I_\mathcal{E}}^+, \sigma)$ mögliche Trajektorien von $x \in Tor^m$. Als Raum der *zulässigen Sequenzen* bezeichnen wir die Menge:

$$\Sigma_{I_\mathcal{E}}^* := \{\omega = (i_0,i_1,i_2,\ldots) :\ M^\mathcal{E}_{i_{n-1}i_n} \neq 0,\ i_n \in I_\mathcal{E},\ n \in \mathbb{N}\}, \tag{2.26}$$
$$\Sigma_{I_\mathcal{E}}^* \subseteq \Sigma_{I_\mathcal{E}}^+.$$

Hier tritt die Adjazenzmatrix $M^\mathcal{E}$ des Graphen $G_T(\mathcal{E})$ in Erscheinung, der die Wirkung der Transformation T auf die zugrundeliegende Zerlegung $\mathcal{E}$ beschreibt. Die Größe $M^\mathcal{E}$ heißt auch *Übergangsmatrix*. Ist der Graph $G_T(\mathcal{E})$ strikt zusammenhängend, so sind alle Sequenzen $\omega \in \Sigma_{I_\mathcal{E}}^+$ zulässig.

Definitionsgemäß sind die Restriktionen von T auf Gebiete $\mathcal{N}_i$, $i \in I_\mathcal{N}$, der natürlichen Zerlegung des dynamischen Systems invertierbar. Demnach existieren Abbildungen $S_i : [0,1]^m \to [0,1]^m$, die folgendes Diagramm kommutieren lassen:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}'_{j'} & \xrightarrow{q} & Tor^m \\ \downarrow S_{i'} & & \uparrow T \\ \mathcal{N}'_{i'} & \xrightarrow{q} & Tor^m \end{array} \tag{2.27}$$

mit $i', j' \in I_{\mathcal{N}}$, die so gewählt sind, daß gilt: $M^{\mathcal{E}}_{ij} > 0$ für $i, j \in I_{\mathcal{E}}$ unter Verwendung der surjektiven Abbildung $I_{\mathcal{E}} \to I_{\mathcal{N}} : i \mapsto i'$, die im letzten Abschnitt eingeführt wurde. Mit diesen Funktionen S_i, $i \in I_{\mathcal{N}}$, sind wir imstande, eine stetige Fortsetzung $\bar{\pi}$ einer Retraktion π für den Morphismus ξ_T explizit anzugeben ('bis auf Mengen vom Maße 0'):

$$\bar{\pi}(i_0, i_1, i_2, \ldots) = S_{i'_0} \circ S_{i'_1} \circ S_{i'_2} \circ \ldots \in [0,1]^m \quad \text{mit } \omega = (i_0, i_1, i_2, \ldots) \in \Sigma^*_{I_{\mathcal{E}}}. \tag{2.28}$$

Eine Zerlegung $\mathcal{E} = \mathcal{N} \vee \mathcal{C}$ eines dynamischen Systems generiert offenbar stets eine erzeugende Partition $\xi_{\mathcal{E}}$.

Der Raum aller zulässigen Sequenzen mit festgehaltenem Anfangssymbol $j \in I_{\mathcal{E}}$ wird bezeichnet durch:

$$\Sigma^j_{I_{\mathcal{E}}} := \{\omega = (i_0, i_1, i_2, \ldots) : i_0 = j,\ \omega \in \Sigma^*_{I_{\mathcal{E}}}\}, \quad \Sigma^j_{I_{\mathcal{E}}} \subseteq \Sigma^*_{I_{\mathcal{E}}}. \tag{2.29}$$

Um ein Symbol $i(j) \in I_{\mathcal{E}}$ mit $M^{\mathcal{E}}_{i(j)j} > 0$ an den Anfang einer derartig vorgegebenen Folge $\omega \in \Sigma^j_{I_{\mathcal{E}}}$ zu setzen, wenden wir den Operator $\rho_{i(j)}$ an:

$$\rho_{i(j)} : \Sigma^j_{I_{\mathcal{E}}} \to \Sigma^i_{I_{\mathcal{E}}}, \quad (j, i_1, i_2, \ldots) \mapsto (i, j, i_1, i_2, \ldots). \tag{2.30}$$

Dieser Operator erfüllt die Relation $\sigma \circ \rho_{i(j)} = \mathbf{1}_{\Sigma}$. Die mathematische Literatur nennt rechtsinverse Operatoren *Schnitte*. Folglich sprechen wir von den Schnitten ρ_i, $i \in I_{\mathcal{E}}$, des 'shift'-Operators σ. Entsprechend sehen wir die zuvor eingeführten Funktionen S_i, $i \in I_{\mathcal{N}}$, als Schnitte der Transformation T an.

Aus den vorangegangenen Überlegungen wird ersichtlich, daß für jedes Paar von Symbolen $i, j \in I_{\mathcal{E}}$ mit $M^{\mathcal{E}}_{ij} > 0$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma^j_{I_{\mathcal{E}}} & \xrightarrow{\pi} & [0,1]^m & \xrightarrow{q} & Tor^m & \xrightarrow{\xi_T} & \Sigma^j_{I_{\mathcal{E}}} \\ \downarrow \rho_{i(j)} & & \downarrow S_{i'}(j) & & \uparrow T & & \uparrow \sigma \\ \Sigma^i_{I_{\mathcal{E}}} & \xrightarrow{\pi} & [0,1]^m & \xrightarrow{q} & Tor^m & \xrightarrow{\xi_T} & \Sigma^i_{I_{\mathcal{E}}}. \end{array} \tag{2.31}$$

Die Forderung nach Zusammenhang für den Graphen $G_T(\mathcal{E})$ bedingt, daß ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $j \in I_{\mathcal{E}}$ die Menge:

$$I^{nj}_{\mathcal{E}} := \{(j, i_1, i_2, \ldots, i_n) \in I^{n+1}_{\mathcal{E}} : M^{\mathcal{E}}_{ji_1} M^{\mathcal{E}}_{i_1 i_2} \ldots M^{\mathcal{E}}_{i_n j} \neq 0\} \tag{2.32}$$

nicht leer ist: $I^{nj}_{\mathcal{E}} \neq \emptyset$. Mit $\iota(j) \in I^{nj}_{\mathcal{E}}$ und $\iota'(j) \in I^{nj'}_{\mathcal{N}}$, analog zu $I^{nj}_{\mathcal{E}}$ definiert, kürzen wir ab:

$$\rho_{\iota(j)} := \rho_j \circ \rho_{i_1} \circ \ldots \rho_{i_n} \tag{2.33}$$

$$S_{\iota'(i)} := S_{j'} \circ S_{i'_1} \circ \ldots \circ S_{i'_n} \tag{2.34}$$

und erhalten durch wiederholte Anwendung des obigen Diagramms:

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma^j_{I_\varepsilon} & \xrightarrow{\pi} & [0,1]^m & \xrightarrow{q} & Tor^m & \xrightarrow{\xi_T} & \Sigma^j_{I_\varepsilon} \\ \downarrow \rho_{\iota(j)} & & \downarrow S_{\iota'(j)} & & \uparrow T^n & & \uparrow \sigma^n \\ \Sigma^j_{I_\varepsilon} & \xrightarrow{\pi} & [0,1]^m & \xrightarrow{q} & Tor^m & \xrightarrow{\xi_T} & \Sigma^j_{I_\varepsilon}. \end{array} \tag{2.35}$$

Offenbar sind die Operatoren $\rho_{\iota(j)}$, $i \in I_\mathcal{E}^{nj}$, Schnitte von σ^n und $S_{\iota'(j)}$, $i \in I_\mathcal{N}^{nj'}$, Schnitte der Transformation T^n.

Spezielle Bedeutung besitzen die Mengen:

$$R_{\iota_j} := \rho_{\iota_j}\Sigma^j_{I_\varepsilon} \subseteq \Sigma^s_{I_\varepsilon} \text{ mit:} \tag{2.36}$$

$$\iota_j \in I_\mathcal{E}^{n;j} := \{(i_0, i_1, \ldots, i_n) \in I_\mathcal{E}^{n+1} : M^\mathcal{E}_{i_0 i_1} \ldots M^\mathcal{E}_{i_n j} \neq 0\}, \tag{2.37}$$

die wir *Zylinder der Länge* $n+1$ nennen, und ihre Bilder unter der Wirkung der stetigen Fortsetzung $\bar{\pi}$ der Retraktion π:

$$A_{\iota_j} := \bar{\pi}R_{\iota_j} = S'_{\iota_j}A_j \subseteq [0,1]^m \tag{2.38}$$

$$A_j := \bar{\pi}\Sigma^j_{I_\varepsilon} \tag{2.39}$$

$$A := \bigcup_{j \in I_\varepsilon} A_j. \tag{2.40}$$

Es gilt offenbar:

$$\bigcup_{j \in I_\varepsilon} \bigcup_{\iota_j \in I_\mathcal{E}^{n;j}} A_{\iota_j} = A,\ qA = Tor^m, \tag{2.41}$$

so daß $\operatorname{clos} A = [0,1]^m$.

Fixpunkte werden eine ausgezeichnete Rolle spielen. Die einfachste Weise, ein $x_{\iota(j)} \in A_{\iota(j)}$, $\iota(j) \in I_\mathcal{E}^{nj}$, zu erhalten mit $S_{\iota'(j)}x_{\iota(j)} = x_{\iota(j)}$ ist es, zu setzen:

$$x_{\iota(j)} = \bar{\pi}(\omega_{\iota(j)}),\ \omega_{\iota(j)} = (\iota(j), \iota(j), \ldots) \in R_{\iota(j)}. \tag{2.42}$$

Damit ist auch $q(x_{\iota(j)}) = \pi(\omega_{\iota(j)}) \in Tor^m$ ein Fixpunkt von T^n wegen der Identität $T \circ \pi = \pi \circ \sigma$. Ist umgekehrt $x \in \operatorname{Fix} T^n$, so gilt für $\omega = \xi_T(x)$: $\omega \in \operatorname{Fix}\sigma^n$ und damit $\omega = \omega_{\iota(j)}$ für ein gewisses $\iota(j) \in I_\mathcal{E}^{nj}$, woraus folgt: $x = \pi(\xi_T(x)) = \pi(\omega_{\iota(j)}) = q(x_{\iota(j)})$.

Wir charakterisieren eine Situation, in der die Menge:

$$\{x_{\iota(j)} : \iota(j) \in I_\mathcal{E}^{nj},\ j \in I_\varepsilon,\ n \in \mathbb{N} \text{ hinreichend groß}\} \tag{2.43}$$

dicht liegt in dem Kubus $[0,1]^m$:

Lemma 2.5 *Es besitze $T : Tor^m \to Tor^m$ eine erzeugende Partition $\xi_\mathcal{E} : Tor^m \to I_\mathcal{E}$ mit zusammenhängendem Graphen $\mathrm{G}_T(\mathcal{E})$. Ferner sei der Retraktion π für ξ_T eine stetige Fortsetzung $\bar{\pi} : \Sigma^s_{I_\varepsilon} \to [0,1]^m$ zugeordnet. Dann gibt es ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$, so daß für jedes Symbol $j \in I_\varepsilon$ des Alphabetes I_ε und jede offene, nicht-leere Menge $V_j \subset \mathcal{E}'_j \subset [0,1]^m$ ein Tupel $\iota(j) \in I_\mathcal{E}^{nj}$ existiert derart, daß gilt: $A_{\iota(j)} \subset V_j$. Insbesondere ist $x_{\iota(j)} \in A_{\iota(j)}$.*

Beweis Wähle für jedes $j \in I_\mathcal{E}$ ein offenes Gebiet $U_j \subset Tor^m$ so, daß $q^{-1}U_j \subset V_j$. Dann ist $W_j := \pi^{-1}U_j$ eine offene Teilmenge in $\Sigma^j_{I_\mathcal{E}}$ aufgrund der Stetigkeit von π und nicht leer wegen der Surjektivität von π. W_j enthält deshalb eine offene Kugel $K_j := \{\omega \in \Sigma^j_{I_\mathcal{E}} : d(\omega,\omega^0) < \varepsilon\}$ mit dem Zentrum $\omega^0 = (j, i^0_0, i^0_1, i^0_2, \ldots)$. Für ein hinreichend großes n enthält K_j einen Zylinder der Länge n, $R_{\iota(j)} = \{\omega = (j, i_0, i_1, \ldots) : i_k = i^0_k;\ k = 0, 1, \ldots, n-1\}$, wobei $\iota(j) = (j, i^0_0, i^0_1, \ldots, i^0_{n-1})$. Dies impliziert: $A_{\iota(j)} = \bar{\pi} R_{\iota(j)} \subset \pi K_j \subset \bar{\pi} W_j \subset \bar{\pi}(\bar{\pi}^{-1} V_j) \subset V_j \subset \mathcal{E}'_j$. ◇

2.3 Der Perron-Frobenius-Operator

Die Relaxationseigenschaften eines dynamischen Systems sind durch die Natur seiner zugehörigen Perron-Frobenius-Operatoren bestimmt. Diese Operatoren werden durch die Transformation T des dynamischen Systems $(X, \mathcal{A}, T)$ induziert und beschreiben die zeitliche Veränderung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Obwohl sie auf einfache Weise implizit darzustellen sind, erlaubt nicht jedes dynamische System eine explizite und zugleich den gebräuchlichen Methoden der Funktionalanalysis zugängliche Formulierung dieser Operatoren.

Die in diesem Kapitel eingeführte Klasse dynamischer Systeme heißt in der Terminologie der Referenz [13] *lokal expandierend*; sie läßt ein eingehendes Studium der Perron-Frobenius-Operatoren zu und ermöglicht, an Beispielen die Methode des Perron-Frobenius-Operators erfolgreich anzuwenden.

2.3.1 Die Klasse der Modelle

Mit Hilfe des eingeführten begrifflichen Instrumentariums kann die Bauart der hier in Betracht gezogenen dynamischen Systeme präzise charakterisiert werden. Dazu fassen wir den Kubus $[0,1]^m$ als in den Raum $\mathbf{C}^m$ eingebettet auf und stellen unter diesem neuen Aspekt für die Transformation T drei Postulate auf:

(P1) *Zerlegungen:* Die meßbare Transformation $T : Tor^m \to Tor^m$ besitzt eine natürliche Zerlegung $\mathcal{N}$ und wenigstens eine charakterisierende Zerlegung $\mathcal{C}$ derart, daß ihrer beider Verknüpfung $\mathcal{E} = \mathcal{N} \vee \mathcal{C}$ einen zusammenhängenden Graphen $\mathbf{G}_T(\mathcal{E})$ induziert.

(P2) *Holomorphie der Schnitte:* Es können gewählt werden:
– Eine offene und beschränkte Teilmenge D von $\mathbf{C}^m$, die den Kubus $[0,1]^m$ enthält,

– eine Umgebung $V \supset \mathrm{clos}(D)$
– und holomorphe Abbildungen $\bar{S}_i : V \to D$ derart, daß $\bar{S}_i|_{[0,1]^m} = S_i$, $i \in I_N$, Schnitte von T sind; d.h. sie lassen das Diagramm (2.27) kommutieren.

(P3) *von Null verschiedene Jakobi-Determinante:* Es gilt für die Schnitte S_i der Transformation T:

$$b := \min_{i \in I_N} \min_{x \in [0,1]^m} |\det D_x S_i| > 0,\ i \in I_N.$$

Einige Charakteristika der eingeführten Modellsysteme seien hervorgehoben:

- Besonders schwerwiegend schränkt die erste Forderung die Klasse der in dieser Arbeit behandelten Modelle ein, wie bereits im ersten Abschnitt des vorliegenden Kapitels angedeutet wurde. Das Postulat garantiert, daß die Perron-Frobenius-Operatoren verhältnismäßig unkompliziert zu handhabende invariante Funktionenräume besitzen.

  Nachdrücklich wird jedoch darauf hingewiesen, daß schon sehr einfach geartete eindimensionale dynamische Systeme [29] die Bedingung (P1) verletzen.

- Der Inhalt des Postulates (P2) erlaubt, im folgenden Abschnitt spezielle Aussagen über die spektralen Eigenschaften der Perron-Frobenius-Operatoren zu formulieren.

- Es existiert eine größere Anzahl von Beispielen, die unter die genannten Bedingungen fallen. Darunter befinden sich 'klassische', in der Literatur ausgiebig untersuchte Modelle wie die *Gauß-Abbildung* [14,37], die *dyadische Abbildung* und die Rényische *β-Transformation* [28].

2.3.2 Räume lokal stetiger Observablen

Abkürzend steht X anstelle des Kubus $[0,1]^m$; Funktionen auf dem Torus werden mit periodischen Funktionen auf $\mathbf{R}^m$ identifiziert; eine Transformation $T : X \to X$ ist vorgegeben. $C(X)$ sei der Raum stetiger, komplexwertiger Funktionen auf X, normiert durch $\|f\|_1 := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. Durch $C_{\mathcal{C}}(X)$ bezeichnen wir den Raum lokal (stückweise) stetiger Funktionen auf X bezüglich einer charakterisierenden Zerlegung $\mathcal{C}$ von X:

$$C_{\mathcal{C}}(X) := \{ f : f(x) = \sum_{i \in I_{\mathcal{C}}} f_i(x) \chi_{C_i}(x),\ f_i \in C(X) \}, \tag{2.44}$$

wobei χ_{C_i} die charakteristischen Funktionen der offenen Gebiete C_i, $i \in I_{\mathcal{C}}$, darstellen und der Raum $C_{\mathcal{C}}(X)$ durch $\|f\|_2 := \max_{i \in I_{\mathcal{C}}} \sup_{x \in X} |f_i(x)|$ normiert ist.

Aus mathematischen Gründen ist es zweckmäßig, einen weiteren Funktionenraum einzuführen, der zu $C_{\mathcal{C}}(X)$ in enger Beziehung steht. Zu seiner Konstruktion beziehen wir uns auf den Raum $C(I_{\mathcal{C}})$ der stetigen Funktionen auf dem Alphabet $I_{\mathcal{C}}$. Er sei durch $\|f\|_3 := \max\{|f(i)| : i \in I_{\mathcal{C}}\}$ normiert. Durch die Konstruktion des topologischen Tensorproduktes [38] werden die Räume $C(I_{\mathcal{C}})$ und $C(X)$ miteinander verknüpft:

$$C(I_{\mathcal{C}}, X) := C(I_{\mathcal{C}}) \hat{\otimes}_\pi C(X). \tag{2.45}$$

Der Produktraum $C(I_{\mathcal{C}}, X)$ ist ausgestattet mit der sogenannten π-Norm [39] (vergleiche auch Referenzen [19,40]). Die enge Beziehung dieses Raumes zu $C_{\mathcal{C}}(X)$ findet Ausdruck in der kanonischen Abbildung:

$$\begin{aligned} * &: C(I_{\mathcal{C}}, X) \to C_{\mathcal{C}}(X), \\ f(i,x),\, i \in I_{\mathcal{C}} &\mapsto f^*(x) = \sum_{i \in I_{\mathcal{C}}} f(i,x)\chi_{\mathcal{C}_i}(x). \end{aligned} \tag{2.46}$$

Der Perron-Frobenius-Operator, wirkend auf den Raum $C(I_{\mathcal{C}}, X)$, kann nun eingeführt werden:

Definition 2.6 *Der lineare Operator:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T &: C(I_{\mathcal{C}}, X) \to C(I_{\mathcal{C}}, X), \\ (\mathcal{L}_T f)(j,x) &= \sum_{i \in I_{\mathcal{E}}} L_{ji}\, f(i'', S_{i'}) \,|\det D_x S_{i'}| \end{aligned} \tag{2.47}$$

heißt Perron-Frobenius-Operator *der Transformation T bezüglich der charakterisierenden Zerlegung $\mathcal{C}$. Darin sind $i' \in I_{\mathcal{N}}$ und $i'' \in I_{\mathcal{C}}$ so zu wählen, daß gilt: $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{N}_{i'}$ und $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{C}_{i''}$.*

Alle drei bislang eingeführten Zerlegungen des Phasenraumes X gehen als wesentliche Bestimmungsstücke in die Bauform von $\mathcal{L}_T$ ein:

- Die charakterisierende Zerlegung $\mathcal{C}$ kennzeichnet den Funktionenraum, der dem Operator natürlicherweise zugrundeliegt.

  An dieser Stelle ist zu betonen, daß aufgrund der verwendeten Konstruktion im allgemeinen eine Vielzahl grundsätzlich gleichberechtigter Funktionenräume auftreten kann, korrespondierend zu jeder möglichen charakterisierenden Zerlegung eines Systems. Nur die minimale charakterisierende Zerlegung $\mathcal{C}^{\min}$ zeichnet in noch näher zu kennzeichnender Weise einen Funktionenraum aus.

- Über die natürliche Zerlegung $\mathcal{N}$ sind die der Transformation T zugehörigen Schnitte S_i, $i \in I_{\mathcal{N}}$, eingeführt.

- Die erzeugende Zerlegung $\mathcal{E} = \mathcal{N} \vee \mathcal{C}$ wirkt vermittels der Adjazenzmatrix L des Graphen $G_T(\mathcal{E},\mathcal{C})$ auf die Gestalt des Perron-Frobenius-Operators ein.

Es ergibt sich unmittelbar die Invarianz des Raumes $C_{\mathcal{C}}(X)$ lokal stetiger Funktionen bezüglich der Zerlegung $\mathcal{C}$ unter der Wirkung des induzierten Operators:

$$\mathcal{L}^* : C_{\mathcal{C}}(X) \to C_{\mathcal{C}}(X),\ f^* \mapsto \mathcal{L}_T^* f^* = (\mathcal{L}_T f)^*. \tag{2.48}$$

Insbesondere gilt die Ungleichung:

$$\int_X dx\, |(\mathcal{L}_T f)^*(x)| \leq \int_X dx\, (\mathcal{L}_T |f|)^*(x) = \int_X dx\, |f^*(x)|. \tag{2.49}$$

Hieraus wird eine Gleichung, falls $f(x) > 0$. Als unmittelbare Konsequenz ist der Spektralradius $\varrho(\mathcal{L}_T)$ von $\mathcal{L}_T$ gleich 1.

Die zentrale Eigenschaft des eingeführten Operators, die ihn mit der durch die Transformation T induzierten Dynamik des Systems in Verbindung bringt, formuliert das folgende Lemma.

Lemma 2.7 *Für Funktionen $g \in C(X)$ und $f \in C(I_{\mathcal{C}}, X)$ gilt:*

$$\int_X dx\, (\mathcal{L}_T f)^*(x)\, g(x) = \int_X dx\, f^*(x)\, g(Tx). \tag{2.50}$$

Beweis Es ist $f^*(x) = \sum_{i \in I_{\mathcal{C}}} f(i,x) \chi_{C_i}(x)$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} \int_X dx\, f^*(x)\, g(Tx) &= \sum_{i \in I_{\mathcal{E}}} \int_{\mathcal{E}_i} dx\, f(i'', x)\, g(Tx) && (2.51) \\ &= \sum_{i \in I_{\mathcal{E}}} \int_{T\mathcal{E}_i} dx\, f(i'', S_{i'})\, |\det D_x S_{i'}|\, g(x) && (2.52) \\ &= \sum_{i \in I_{\mathcal{E}}} \sum_{j \in I_{\mathcal{C}}} \int_{C_i} dx\, L_{ji}\, f(i'', S_{i'})\, |\det D_x S_{i'}|\, g(x) \end{aligned}$$

aufgrund der definierenden Eigenschaften der Adjazenzmatrix L des Graphen $\mathbf{G}_T(\mathcal{E}, \mathcal{C})$. Folglich ist:

$$\int_X dx\, f^*(x)\, g(Tx) = \int_X dx\, (\mathcal{L}_T f)^*(x)\, g(x), \tag{2.53}$$

was zu beweisen war. ◇

Spektrum und Eigenfunktionen des mit Hilfe der minimalen charakterisierenden Zerlegung konstruierten Operators $\mathcal{L}_T^{\min}$ stehen in einem engen Zusammenhang mit den entsprechenden Größen aller weiteren Perron-Frobenius-Operatoren des in Frage stehenden Systems. Das folgende Lemma drückt diese Beziehung aus und betont damit zugleich eine gewisse natürliche Auszeichnung des Perron-Frobenius-Operators $\mathcal{L}_T^{\min}$.

Lemma 2.8 *Ist $f \in C(I_{\mathcal{C}^{min}}, X)$ eine Eigenfunktion des Operators $\mathcal{L}_T^{min}$ zum Eigenwert λ, so stellt die Funktion:*

$$g \in C(I_{\mathcal{C}}, X) \quad mit \quad g(i,x) = f(j,x) \text{ für } i \in I_{\mathcal{C}}^j \quad wobei\ C_j^{min} = \bigcup_{i \in I_{\mathcal{C}}^j} C_i \tag{2.54}$$

eine Eigenfunktion von $\mathcal{L}_T : C(I_{\mathcal{C}}, X) \to C(I_{\mathcal{C}}, X)$ zu demselben Eigenwert λ dar. Insbesondere gilt also:

$$spec\, \mathcal{L}_T^{min} \subseteq spec\, \mathcal{L}_T. \tag{2.55}$$

Beweis Das Element $\mathcal{E}_i^{min}$, $i \in I_{\mathcal{E}^{min}}$, der minimalen erzeugenden Zerlegung $\mathcal{E}^{min} = \mathcal{N} \vee \mathcal{C}^{min}$ ist durch eine weitere erzeugende Zerlegung $\mathcal{E} \preceq \mathcal{E}^{min}$ darzustellen vermittels:

$$\mathcal{E}_i^{min} = \bigcup_{j \in I_{\mathcal{E}^i}} \mathcal{E}_j. \tag{2.56}$$

Für den Operator $\mathcal{L}_T$ erhält man dadurch:

$$(\mathcal{L}_T g)(j,x) = \sum_{i \in I_{\mathcal{E}^{min}}} \sum_{k \in I_{\mathcal{E}}^i} L_{jk}\, g(k'', S_{k'}x)\, |\det D_x S_{k'}|. \tag{2.57}$$

Offenbar gilt: $S_{k'} = S_{i'}$, falls $k \in I_{\mathcal{E}}^i$; laut Voraussetzung ist $g(k'',x) = f(i'',x)$, falls ebenso gilt: $k \in I_{\mathcal{E}}^i$. Man erhält auf diese Weise:

$$(\mathcal{L}_T g)(j,x) = \sum_{i \in I_{\mathcal{E}^{min}}} \sum_{k \in I_{\mathcal{E}}^i} L_{jk}\, f(i'', S_{i'}x)\, |\det D_x S_{i'}|. \tag{2.58}$$

Mit Hilfe des Lemmas 2.3 folgt nun:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_T g)(j,x) &= \sum_{i \in I_{\mathcal{E}^{min}}} L_{ji}^{min}\, f(i'', S_{i'}x)\, |\det D_x S_{i'}| \\ &= \lambda f(j,x), \end{aligned} \tag{2.59}$$

was mit der Behauptung übereinstimmt. ◇

Der Perron-Frobenius-Operator einer iterierten Transformation T^n ist aufgrund des Lemmas 2.7 als n-te Potenz von $\mathcal{L}_T$ darzustellen. Dies bedeutet explizit:

$$(\mathcal{L}_T^n f)(j,x) = \sum_{\iota \in I_{\mathcal{E}}^n} L_{j\iota}\, f(\iota^\dagger, S_{\iota'}(x))\, |\det D_x S_{\iota'}|, \tag{2.60}$$

unter Verwendung der Abkürzungen $\iota = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, $i_k \in I_{\mathcal{E}}$, $\iota' = (i_1', i_2', \ldots, i_n')$, $i_k' \in I_{\mathcal{N}}$, $\iota^\dagger = i_1'' \in I_{\mathcal{C}}$ und $S_{\iota'} = S_{i_1'} \circ S_{i_2'} \circ \ldots \circ S_{i_n'}$ sowie $L_{\iota j} = L_{i_1 i_2} L_{i_2 i_3} \ldots L_{i_n j}$. Durch eine vollständige Induktion kann diese Darstellung unmittelbar bewiesen werden.

Lemma 2.9 *Für $f \in C(I_C, X)$ mit $\min_{i \in I_C} \inf_{x \in X} f(i,x) \geq 0$ und $f \not\equiv 0$ existieren Konstanten $\alpha > 0$, $\beta > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $x \in X$ gilt:*

1. $0 \leq (\mathcal{L}_T f)^*(x) \leq \beta$.
2. $\alpha \leq (\mathcal{L}_T f)^{*n}(x)$.

Beweis Behauptung 1 ist eine unmittelbare Konsequenz der Definition 2.6. Wegen der Stetigkeit von f können für jedes $j \in I_C$ ein $a_j > 0$ und eine offene Menge $V_j \subset \mathcal{E}'_j \subset X$ gewählt werden derart, daß $f^*(x) > a_j$ für alle $x \in V_j$. Aufgrund von Lemma 2.5 existiert ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ und ein Tupel $\iota(j) \in I_{\mathcal{E}}^{nj}$ so beschaffen, daß $A_{\iota(j)} \subset V_j$. Offensichtlich ist $S_{\iota(j)}(x) \in A_{\iota(j)}$ für $x \in A_j := \bar{\pi}\Sigma^j_{I_C}$. Aus der Gültigkeit der Darstellung (2.57) folgt:

$$(\mathcal{L}f)^{*n}(x) \;>\; a_j |\det D_x S_{\iota(j)}| \geq ab^n \quad \text{für } x \in A_j \qquad (2.61)$$
$$\text{mit } a := \min\{a_j : j \in I_C\}$$
$$\text{und } b := \min_{i \in I_N} \inf_{x \in X} |\det D_x S_i|.$$

Weil A dicht liegt in X, erhalten wir durch Rückgriff auf die Eigenschaft der Stetigkeit die Abschätzung $(\mathcal{L}_T f)^{*n}(x) \geq ab^n$ für alle $x \in X$, wodurch die Behauptung 2 bewiesen ist. ◇

Formuliert in der Terminologie der Referenz [41] lautet der Inhalt von Lemma 2.9: Der Operator $\mathcal{L}_T$ ist *strikt positiv* und u_0-*beschränkt* mit $u_0 = 1$.

Gestützt auf die bisher gewonnenen Resultate halten wir fest:

Korollar 2.10 *Gilt $\mathcal{L}_T e_0 = e_0$ für ein $e_0 \in C(I_C, X)$ mit $e_0(i,x) \geq 0$, $i \in I_C$, so folgen die Aussagen:*

1. *e_0 ist strikt größer als Null: $e_0(i,x) > 0$ für alle $i \in I_C$, $x \in X$.*
2. *Der Eigenwert $\lambda = 1$ ist einfach.*
3. *Jeder weitere Eigenwert $\lambda \neq 1$ genügt der Ungleichung $|\lambda| < 1$.*

Die Behauptung 1 ist eine unmittelbare Konsequenz des Lemmas 2.9; die Aussagen 2 und 3 folgen aus der allgemeinen Theorie positiver Operatoren [41].

Der weitere Gedankengang hängt ab von dem Nachweis der Existenz der Funktion e_0. Gelingt er, so ist nach Normierung, $\int_X dx\, e_0^* = 1$, $dm(x) = e_0^* dx$ ein T-invariantes, absolut stetiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf X. Nach Lemma 2.8 ist $dm(x)$ eindeutig bestimmt, wenn e_0 Eigenfunktion zum Eigenwert 1 eines beliebigen, einem System in natürlicher Weise zugeordneten Perron-Frobenius-Operators ist.

Zur Beantwortung der Frage nach dem invarianten Maß eines dynamischen Systems ist demnach eine möglicherweise vorliegende Vielzahl grundsätzlich gleichberechtigter Funktionenräume ohne Belang. Dies wird sich ändern, sobald die Art und Weise der Annäherung an das stationäre Wahrscheinlichkeitsmaß $dm(x)$ Zielpunkt der Untersuchung wird.

2.4 Spektraleigenschaften

Die mathematischen Konsequenzen des Postulates (P2), welche die Holomorphie der Schnitte von T betreffen, garantieren die Existenz einer Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda = 1$ des Perron-Frobenius-Operators und erlauben, Aussagen über die Natur seines Spektrums zu formulieren.

Durch eine geeignete Einschränkung des zugrundeliegenden Funktionenraumes kann erreicht werden, daß der Perron-Frobenius-Operator $\mathcal{L}_T$ *kompakt* und *nuklear* wird. Damit können die Begriffe 'Spur' und 'Determinante' der endlichdimensionalen linearen Algebra auf ihn übertragen werden. Wir schlagen vor, Räume lokal analytischer Funktionen als den geeigneten mathematischen Rahmen für physikalische Observable anzusehen (vergleiche hierzu D.Mayer [13]).

2.4.1 Räume lokal analytischer Observablen

Ein spezieller Unterraum von $C(X)$ ist dem Postulat (P2) des vorangegangenen Abschnittes besonders angepaßt: Der Raum $B(D)$ analytischer Funktionen $f : D \to \mathbf{C}$, die eine stetige Fortsetzung auf clos(D) besitzen und durch die Supremumsnorm $\| f \|_D = \sup\{|f(z)| : z \in D\}$ normiert sind. Wirkend auf den Produktraum:

$$B(I_\mathcal{C}, D) = C(I_\mathcal{C}) \hat{\otimes}_\pi B(D) \tag{2.62}$$

ist der Perron-Frobenius-Operator L_T gegeben durch:

$$\begin{aligned} &\mathsf{L}_T : B(I_\mathcal{C}, D) \to B(I_\mathcal{C}, D), \\ (\mathsf{L}_T f)(j,z) &= \sum_{i \in I_\mathcal{E}} L_{ji}\, s_{i'} \det D_z \bar{S}_{i'}\, f(i'', \bar{S}_{i'}(z)), \end{aligned} \tag{2.63}$$

wobei $s_i := \operatorname{sgn} \det D_z \bar{S}_i$. Aufgrund des Postulates (P3) und der Stetigkeit der Ableitung $D_z S_i$ kann s_i nicht von $x \in X$ abhängig sein. Jede Funktion $f \in B(I_\mathcal{C}, D)$ kann zerlegt werden in eine Summe $f = f_1 + i f_2$ mit reell analytischen Funktionen $f_1, f_2 \in C(I_\mathcal{C}, X)$. Ebenso gilt:

$$(\mathsf{L}_T f)(j,x) = (\mathcal{L} f_1)(j,x) + i(\mathcal{L} f_2)(j,x), \; j \in I_\mathcal{C}, \; x \in X. \tag{2.64}$$

Damit kann L_T als Restriktion von $\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}$ auf einen dichten Unterraum reell analytischer Funktionen des Raumes $C(I_\mathcal{C}, X) \oplus C(I_\mathcal{C}, X)$ angesehen werden. Die Resultate des vorigen Abschnittes übertragen sich auf den Operator L_T.

Gilt $\mathsf{L}_T \mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}_0$ für ein Element $\mathfrak{e}_0 \in K$ des Kegels:

$$K := \{f \in B(I_\mathcal{C}, D) : f(\imath, x) \geq 0,\ x \in X\}, \tag{2.65}$$

so lösen sowohl $\Re\mathfrak{e}_0$ als auch $\Im\mathfrak{e}_0$ die Gleichung $\mathsf{L}_T e_0 = e_0$. Weiterhin ist der Eigenwert 1 von L_T einfach, woraus folgt $\mathfrak{e}_0(x) = a e_0(x)$ für $a \in \mathbb{C}$ und alle $x \in X$.

Die hier eingeführten Räume lokal analytischer Funktionen bezüglich aller charakterisierenden Zerlegungen, die ein vorgegebenes dynamisches System besitzt, liegen allen weiteren Überlegungen dieser Arbeit zugrunde. Wir formulieren die These, diese Räume als physikalisch besonders ausgezeichnet anzusehen [13]:

> Alle physikalisch relevanten Observablen der im Rahmen dieser Arbeit untersuchten dynamischen Systeme besitzen die Eigenschaft lokaler Analytizität bezüglich der entsprechenden charakterisierenden Zerlegungen.

2.4.2 Die Spur der Potenzen des PF-Operators

Wie man nachprüft, sind die Potenzen von $\mathsf{L}_T : B(I_\mathcal{C}, D) \to B(I_\mathcal{C}, D)$ dargestellt durch $\mathsf{L}_T^n = \sum_{\imath \in I_\mathcal{E}^n} s_\imath \mathcal{L}_\imath$, wobei:

$$(\mathcal{L}_\imath f)(j, z) = L_{j\imath} \det D_x \bar{S}_{\imath'} f(\imath^\dagger, \bar{S}_{\imath'}(z)) \tag{2.66}$$

mit $s_\imath = s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_n}$ und $\bar{S}_{\imath'} = \bar{S}_{i'_1} \circ \bar{S}_{i'_2} \circ \ldots \circ \bar{S}_{i'_n}$, $i_k \in I_\mathcal{E}$, $i'_k \in I_\mathcal{N}$.

Auf Operatoren dieser Bauart finden bekannte Ergebnisse der mathematischen Literatur Anwendung. Zunächst kann $\mathcal{L}_\imath$ alternativ zu der Darstellung (2.65) in einer zu der Methodik der Referenz [40] analogen Weise als Tensorprodukt zweier Operatoren aufgefaßt werden:

$$\mathcal{L}_\imath = \Lambda_\imath \otimes \mathcal{T}_\imath, \tag{2.67}$$

wobei $\Lambda_\imath : C(I_\mathcal{C}) \to C(I_\mathcal{C})$ und $\mathcal{T}_\imath : B(D) \to B(D)$ die Operatoren bezeichnen:

$$(\Lambda_\imath f)(j) := L_{j\imath} f(\imath^\dagger), \quad f \in C(I_\mathcal{C}) \tag{2.68}$$

$$(\mathcal{T}_\imath g)(z) := \det D_x \bar{S}_{\imath'} g(\bar{S}_{\imath'}(z)), \quad g \in B(D). \tag{2.69}$$

Der Operator $\Lambda_\imath$ ist ein Operator endlichen Ranges, insbesondere also nuklear der Ordnung 0 [40].

Eine Aussage über Operatoren der Struktur von $\mathcal{T}_\imath$ beinhaltet Theorem von Ruelle (zitiert in [19]).

Satz 2.11 (Ruelle) *Es sei D eine offene, beschränkte Menge in $\mathbb{C}^m$ und ψ eine holomorphe Funktion für die gilt: $clos\,\psi(D) \subset D$. Der Raum $B(D)$ sei wie oben definiert. Ferner sei eine Funktion $\varphi \in B(D)$ und folgender Operator gegeben:*

$$\mathcal{T} : B(D) \to B(D),\ (\mathcal{T}f)(z) := \varphi(z)(f \circ \psi)(z). \tag{2.70}$$

Dann gilt:

1. *Die Abbildung ψ besitzt genau einen Fixpunkt z^* in D.*
2. *Der Operator $\mathcal{T}$ ist nuklear der Ordnung 0.*
3. *Die Spur von $\mathcal{T}$ kann nach folgender Formel berechnet werden:*

$$spur\,\mathcal{T} = \varphi(z^*)\det(1 - D_{z^*}\psi)^{-1}. \tag{2.71}$$

Aufgrund der Resultate in Referenz [19] ist auch das Tensorprodukt $\Lambda_\iota \otimes \mathcal{T}_\iota$ nuklear der Ordung 0 in dem Raum $B(I_C, D)$. Damit ist die Spur des Operators $\mathsf{L}_\mathcal{T}$ wohldefiniert und läßt sich mit Hilfe der Beziehung:

$$\operatorname{spur}\mathcal{L}_\iota = \operatorname{spur}\Lambda_\iota \operatorname{spur}\mathcal{T}_\iota \tag{2.72}$$

unmittelbar berechnen:

$$\operatorname{spur}\mathcal{L}_\iota = L_{\iota\iota_\iota} \det D_{x_\iota}\bar{S}_{\iota'} \det(1 - D_{x_\iota}\bar{S}_{\iota'})^{-1}, \tag{2.73}$$

wobei $x_\iota \in A_\iota = S_\iota(x)$ den eindeutigen Fixpunkt der Kontraktion $S_{\iota'} : V \to D$ bezeichnet. Diesen Überlegungen zufolge ist auch $\mathsf{L}_\mathcal{T}^n$ nuklear und es gilt folgender Satz:

Satz 2.12 *Die Spuren der Potenzen des Perron-Frobenius-Operators $\mathsf{L}_\mathcal{T}$, definiert im Raum analytischer Funktionen $B(I_C, D)$, sind gegeben durch:*

$$spur\,\mathsf{L}_\mathcal{T}^n = \Theta(T^m) \tag{2.74}$$

$$mit\ \Theta(T^m) = \sum_{\iota \in I_\mathcal{E}} L_{\iota\iota_\iota} \det D_{x_\iota}\bar{S}_{\iota'} \det(1 - D_{x_\iota}\bar{S}_{\iota'})^{-1}. \tag{2.75}$$

Sind durch $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots)$ die Eigenwerte von $\mathsf{L}_\mathcal{T}$ bezeichnet, entsprechend ihrer Multiplizität wiederholt und nach ihrem Absolutbetrag geordnet, so erhält man folgende Summenformel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n = \Theta(T^m). \tag{2.76}$$

Die Diskretheit des Spektrums erlaubt uns, einige Aussagen zu formulieren:

1. $\mathsf{L}_\mathcal{T}$ besitzt genau eine Eigenfunktion e_0 mit $\int_X dx\, e_0^*(x) = 1$ innerhalb des Kegels K, d.h. $\mathsf{L}_\mathcal{T} e_0 = \lambda_0 e_0$ mit $\lambda_0 = 1$, dem Spektralradius $\varrho(\mathsf{L}_\mathcal{T})$, $e_0(x) > 0$ für $x \in X$.

2. Der Eigenwert $\lambda_0 = 1$ ist dem Betrage nach strikt größer als jeder weitere Eigenwert: $1 > |\lambda_k|$ für $k \geq 1$.

3. Für $n \to \infty$ konvergiert $\mathsf{L}_T^{*n} f^* \to \mathsf{e}_0^+(f^*)\mathsf{e}_0$ bezüglich der Supremumsnorm für Funktionen $f^* \in B_C(D)$. Insbesondere konvergiert $\sum_{i\in I_C} \sum_{i\in I_F^n} L_{ii} \,|\det D_x S_{i'}| \to \mathsf{e}_0^+(1)\mathsf{e}_0$ uniform in X.

Obwohl wir nur wenig über e_0 wissen, können wir dennoch für den dualen Vektor e_0^+ einen Ausdruck finden und ihn zu einem Funktional auf $C_C(X)$ fortsetzen:

Lemma 2.13 *Für Funktionen $f^* \in C_C(X)$ gilt: $\mathsf{e}_0^+(f^*) = \int_X dx\, f^*(x)$.*

Beweis Aus dem Lemma 2.7 folgt: $\int dx\, f^*(x) = \int dx\, (\mathsf{L}_T^n f)^*(x)$. Für $n \to \infty$ erhält man $\int dx\, f^*(x) = \mathsf{e}^+(f^*) \int dx\, \mathsf{e}_0 = e^+(f^*)$. ◇

2.5 Exaktheit und exponentielles Mischen

Dieser Abschnitt beweist die Eigenschaften der Exaktheit (vergleiche auch Referenz [42]) und des exponentiellen Mischens für die vorgestellte Klasse dynamischer Systeme. Dabei folgen wir mit wenigen Modifikationen den Überlegungen der Referenz [23]. Ferner treffen wir eine begriffliche Unterscheidung zwischen Systemen einfachen und solchen mehrfachen Relaxationsverhaltens.

Durch die Konstruktion der Eigenfunktion $\mathsf{e}_0 \in B_C(D)$, $\mathsf{L}_T^* \mathsf{e}_0 = \mathsf{e}_0$, ist mit $dm(x) = \mathsf{e}_0(x)dx$ ein T-invariantes, absolut stetiges Wahrscheinlichkeitsmaß in X gegeben. Für Observablen $f \in L^1(m)$ ist durch $E(f) = \int dm\, f$ ihr Erwartungswert und durch $E(f|T^{-n}\mathcal{A})$ der bedingte Erwartungswert in Bezug auf die Sub-σ-Algebra $T^{-n}\mathcal{A}$ der Borel-Algebra $\mathcal{A}$ bezeichnet. Für quadratintegrable Funktionen $f \in L^2(m)$ ist $U_T f = f \circ T$ die induzierte lineare Isometrie (Koopman-Operator) und U_T^* der hierzu adjungierte Operator. Funktionen aus dem Unterraum:

$$B_C^0 = \{\mathsf{e}_0^{-1} f(x) : f \in B_C(D)\} \subset L^2(m) \tag{2.77}$$

spielen eine besonders ausgezeichnete Rolle.

Lemma 2.14 *Für Funktionen $f \in L^2(m)$ gilt: $E(f|T^{-n}\mathcal{A}) = U_T^n U_T^{*n} f$ fast überall bezüglich des Maßes m.*

Beweis Erstens: Die Funktion $f_n = U_T^n U_T^{*n} f = (U_T^{*n} f) \circ T^n$ ist offenbar $T^{-n}\mathcal{A}$-meßbar. Zweitens: Es sei $A_n \in T^{-n}\mathcal{A}$ beliebig ausgewählt und $f_n = U_T^n U_T^{*n} f$.

Dann gibt es ein Element $A \in \mathcal{A}$ derart, daß $A_n = T^{-n}A$. Die korrespondierenden charakteristischen Funktionen sind eingeführt durch $\chi_{A_n} = U_T^n \chi_A$. Damit gilt die Relation:

$$\int_{A_n} dm\, f_n = (U_T^n U_T^{*n} f,\, U_T^n \chi_A) = (f,\, U_T^n \chi_A) = \int_{A_n} dm\, f, \tag{2.78}$$

wodurch bewiesen ist, daß f_n den Erwartungswert $E(f|T^{-n}\mathcal{A})$ darstellt. ◇

Das nachfogende Lemma bringt den Koopman-Operator U_T mit dem Perron-Frobenius-Operator L_T in Zusammenhang.

Lemma 2.15 *Für Funktionen $f \in B_C^0$ besteht der Sachverhalt:*

$$(U_T^* f)(x) \;=\; \mathrm{e}_0(x)^{-1}(\mathsf{L}_T g)^*(x), \tag{2.79}$$

wobei $g \in B(I_C, D)$ mit $g^*(x) = \mathrm{e}_0(x) f(x)$, $x \in X$ unter Verwendung der kanonischen Abbildung $* : B(I_C, D) \to B_C(D)$.

Beweis Mit einer Funktion $h \in L^2(m)$ gelten die Umformungen:

$$(U_T^* f, h) = (f, U_T h) =$$

$$\int dx\, g^*(x)\overline{h(Tx)} = \int dx\, (\mathsf{L}_T g)^*(x) h(x) \tag{2.80}$$

aufgrund der Definition des Perron-Frobenius-Operators. ◇

Die folgenden Aussagen sind mit der Tatsache verknüpft, daß der Perron-Frobenius-Operator L_T eine Spektrallücke besitzt.

Satz 2.16 *Das dynamische System (X, T, m) ist exakt.*

Beweis Exaktheit bedeutet, daß jede Menge $A \in \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathcal{A}$ entweder das Maß 0 oder 1 besitzt [36]. Demnach gilt:

$$\lim_{n\to\infty} E(f|T^{-n}\mathcal{A}) = E(f) \tag{2.81}$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 für alle Funktionen $f \in C_C(X)$. Eine unmittelbare Berechnung unter Verwendung des Lemmas 2.14 liefert die Formel:

$$E\{(E(f|T^{-n}\mathcal{A}) - E(f))^2\} = \|V^n f\|, \tag{2.82}$$

wobei $V = U_T^* - E$ mit der Projektion $(Ef)(x) = E(f)$. Würde gelten $V^n \to 0$ in $L^2(m)$ im Sinne einer starken Konvergenz, so wäre Exaktheit die Konsequenz.

Da der Raum $B_{\mathcal{C}}^0 \subset L^2(m)$ dicht liegt und $\|V\| \leq 1$ ist, genügt es nachzuweisen, daß $\|V^n f\| \to 0$ für Funktionen $f \in B_{\mathcal{C}}^0$. Wir erhalten die Abschätzungen:

$$\|V^n f\| = \|e_0^{-1} e_0 V^n\| \leq \|e_0^{-1}\| \|e_0 V^n f\| \tag{2.83}$$

$$\|e_0 V^n f\| \leq \|e_0 V^n f\|_X \leq \|e_0 V^n f\|_D, \tag{2.84}$$

wobei $\|\cdot\|_X$ die Supremumsnorm in $C_{\mathcal{C}}(X)$ bezeichnet. Es sei der Operator Q auf $B_{\mathcal{C}}(D)$ gegeben durch: $Qg^* = \mathsf{L}_T^* g^* - e_0^+(g^*)e_0$. Ist $g^* = e_0 f$, so folgt $e_0 V^n f = Q^n g^*$ und $\|e_0 V^n f\|_D \leq \|Q^n\| \|g^*\|_D$. Da der Operator Q den Spektralradius $|\lambda_1|$ besitzt, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|Q^n\|^{1/n} = |\lambda_1| < 1 \tag{2.85}$$

und $\|V^n f\|$ konvergiert gegen Null. ◇

Satz 2.17 *Exponentieller Zerfall der Korrelationen: Für Funktionen $g \in L^1(m)$ und $f \in B_{\mathcal{C}}^0$ gilt:*

$$\limsup_{n\to\infty} |E(fg \circ T^n) - E(f)E(g)|^{1/n} \leq |\lambda_1| < 1. \tag{2.86}$$

Das Theorem behauptet, daß Korrelationsfunktionen exponentiell zerfallen, vorausgesetzt, daß $e_0 f$ eine lokal analytische Funktion ist.

Beweis Analog zum Beweis des Satzes 2.17, hier jedoch unter Verwendung der L^1-Norm $\|g\|$, erhalten wir die Ungleichung:

$$|E(fg \circ T^n) - E(f)E(g)| \leq \|g\| \|V^n f\|_X \leq c \|Q^n\|, \tag{2.87}$$

in der die Konstante c unabhängig von $n \in \mathbb{N}$ ist. Da $|\lambda_1| = \lim_{n\to\infty} \|Q^n\|^{1/n}$, folgt die Ungleichung 2.86. ◇

Als *Relaxationszeiten $\tau^{\mathcal{C}}$ eines dynamischen Systems* sehen wir die exponentiellen Zerfallskonstanten:

$$1/\tau^{\mathcal{C}} = -\log|\lambda_1| = -\log \xi(\mathsf{L}_T) \tag{2.88}$$

der Korrelationsfunktionen an, wobei $\xi(\mathsf{L}_T)$ den sogenannten *subdominanten Spektralradius* des Operators L_T bezeichnet.

Wie bereits mehrfach betont wurde, sind dynamischen Systemen im allgemeinen viele voneinander verschiedene, jedoch grundsätzlich gleichberechtigte charakterisierende Zerlegungen $\mathcal{C}$ zugeordnet. Daher besteht eine gewisse Willkür bei der Wahl der Funktionenräume, die dem Perron-Frobenius-Operator L_T in natürlicher Weise zugrundeliegen. Diese Wahlfreiheit spiegelt sich auch in den Relaxationszeiten $\tau^{\mathcal{C}}$ wider, die im allgemeinen von der konkret betrachteten charakterisierenden Zerlegung abhängig sind. Aus diesen Gründen treffen wir eine begriffliche Unterscheidung:

Definition 2.18 *Dynamische Systeme (X,T,m), bei denen die Relaxationszeiten τ^c für alle einem System in natürlicher Weise zugrundegelegten Räume $B_c(X)$ untereinander gleich sind, heißen* einfach relaxierend.

Im Gegensatz hierzu sprechen wir von mehrfachem Relaxationsverhalten, *wenn der Zerfall der Korrelationen von der Wahl der betrachteten Observablen abhängig ist.*

In den nachfolgenden Kapiteln werden Beispiele dynamischer Systeme mit einfachem wie mit mehrfachem Relaxationsverhalten aufgezeigt und und die Spektren ihrer Perron-Frobenius-Operatoren detailiert untersucht.

Kapitel 3

Einfach relaxierende Systeme einer Dimension

Das vorliegende und alle nachfolgenden Kapitel dieser Arbeit wenden die Aufmerksamkeit auf weitergehend eingeschränkte Klassen dynamischer Systeme, die den aufgestellten Postulaten genügen und ein ausführlicheres Studium der Perron-Frobenius-Operatoren und ihrer spektralen Eigenschaften ermöglichen. Anhand dieser Beispiele suchen wir Einblick in die typischen Züge zu gewinnen, die das Relaxationsverhalten der im vorangegangenen Kapitel eingeführten Klasse dynamischer Systeme kennzeichnen.

Im Mittelpunkt der Überlegungen dieses Kapitels stehen speziell gewählte, eindimensionale Modelle. Ihre besondere Bauart erlaubt einerseits, alle auftretenden charakterisierenden Zerlegungen mit periodischen Bahnen des Systems in Verbindung zu bringen; anderseits sind bei derartigen Systemen weitreichende Aussagen über die Natur des Spektrums der zugehörigen Perron-Frobenius-Operatoren möglich.

Als eine zentrale Eigenschaft der betrachteten Klasse von Modellsystemen erweist sich ihr einfaches Relaxationsverhalten, das unabhängig ist von der speziell getroffenen Wahl der jeweils konkret zugrundeliegenden Räume lokal analytischer Observablen.

3.1 Intervall-Abbildungen konstanter Ableitung

Die den hier betrachteten Modellen innewohnende Eigenschaft der stückweisen Linearität gestattet eine bedeutende Vereinfachung: Innerhalb des mathematischen Rahmens der Funktionalanalysis können bei der Behandlung des Spektralproblems

der Perron-Frobenius-Operatoren algebraische Techniken angewendet werden. Daher können mit Hilfe gebräuchlicher Methoden der Matrix-Theorie detailierte Aussagen bewiesen werden:

- Die wesentliche Information über die Spektren aller einem System in natürlicher Weise zugeordneten Perron-Frobenius-Operatoren ist kodiert im Graphen $G_T(\mathcal{C}^{min})$ der minimalen charakterisierenden Zerlegung.
- Die Eigenwerte der Perron-Frobenius-Operatoren sind komplexer Werte fähig, ihre Entartung ist möglich, der Eigenwert Null kann auftreten. Diese Aussage steht in einem gewissen Gegensatz zu einer von Roepstorff und Mayer [14,43] geäußerten Vermutung.
- Bezieht man beliebige Verfeinerungen der minimalen charakterisierenden Zerlegung eines der hier untersuchten Systeme in die Betrachtung ein, so hat dies nur auf die Phasenfaktoren der Eigenwerte der korrespondierenden Perron-Frobenius-Operatoren Auswirkungen; ihre Absolutbeträge bleiben davon unbeeinflußt.

3.1.1 Der PF-Operator: Die Struktur des Spektrums

Wir führen eine Klasse stückweise linearer Transformationen $T : [0,1] \to [0,1]$ des Einheitsintervalles ein.

Durch Angabe endlich vieler, offener, disjunkter Intervalle $\mathcal{N}_i \subset [0,1]$, $i \in I_{\mathcal{N}}$, mit $\bigcup_{i \in I_{\mathcal{N}}} \overline{\mathcal{N}_i} = [0,1]$ sei die natürliche Zerlegung eines dynamischen Systems $([0,1], \mathcal{B}, T)$ gegeben. Die Restriktionen der Abbildung T bezüglich der Elemente von $\mathcal{N}$ seien gegeben durch:

$$T|_{\mathcal{N}_i} x = ax + b_i, \qquad (3.1)$$
$$a, b_i \in \mathbf{R},\ |a| > 1,\ i \in I_{\mathcal{N}}.$$

Die Zahl b_i werde eingeschränkt durch die Forderung: $T\mathcal{N}_i \subseteq [0,1]$. Insbesondere sollen also die Steigungen der linearen Funktionen $T|_{\mathcal{N}_i}$ für alle $i \in I_{\mathcal{N}}$ gleich sein.

Definition 3.1 *Eine in der beschriebenen Weise festgelegte Transformation* $T : [0,1] \to [0,1]$ *heißt* Intervall-Abbildung konstanter Ableitung.

Offenbar fallen die dyadische Transformation, eines der Standardbeispiele der Ergodentheorie dynamischer Systeme, ebenso wie die Rényische β-Transformation in die Klasse der hier vorgestellten Modelle.

Zerlegungen des Phasenraumes eindimensionaler Systeme bestehen aus Intervallen und sind eindeutig festgelegt durch die Angabe ihrer Randpunkte. Wie man

unmittelbar erkennt, entspricht der Forderung nach der Existenz endlicher charakterisierender Zerlegungen die Bedingung, daß alle Randpunkte der Intervalle $\mathcal{N}_i$ unter der iterierten Wirkung von T auf eine periodische Bahn des Systems gelangen müssen.

Explizit bedeutet dies, daß für jedes $x \in \partial\mathcal{N}$ Zahlen $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $p \in \mathbb{N}$ existieren mit der Eigenschaft $T^{m+p}x = T^m x$. Die Zahl m bezeichnet dabei die Länge des *transienten Anteils* der Bahn:

$$\mathrm{B}_T(x) = \{T^i x\}_{i=1}^{m+p-1} \tag{3.2}$$

eines Punktes $x \in \partial\mathcal{N}$ unter der Wirkung der Transformation T. Die Elemente aller Bahnen $\mathrm{B}_T(x)$, $x \in \partial\mathcal{N}$, bilden demnach die Menge der Randpunke einer charakterisierenden Zerlegung des jeweils betrachteten Systems. Sie ist sogar die kleinste aller derartigen Zerlegungen:

$$\bigcup_{x\in\partial\mathcal{N}} \mathrm{B}_T(x) = \partial\mathcal{C}^{min}. \tag{3.3}$$

Ein weiterer Punkt $x \in [0,1]$ des Phasenraumes kann nur dann Randpunkt einer endlichen Verfeinerung $\mathcal{C}$ von $\mathcal{C}^{min}$ sein, wenn er ebenfalls durch Iteration von T eine periodische Bahn erreicht. Umgekehrt kann jede vorgelegte charakterisierende Zerlegung durch die Angabe entsprechender periodischer Bahnen der Abbildung T mit eventuell vorhandenen transienten Anteilen klassifiziert werden.

Ist die Matrix $M^{\mathcal{C}}$ des Graphen $\mathrm{G}_T(\mathcal{C})$ irreduzibel, was im Einzelfall nachzuweisen bleibt, so ist, wie im Abschnitt 2.1.2 betont wurde, der Graph $\mathrm{G}_T(\mathcal{C})$ zusammenhängend. Damit genügt das korrespondierende dynamische System den Postulaten des Kapitels 2.

Nach Lemma 2.5 liegen periodische Bahnen dicht im Phasenraum. Somit besitzt jedes konkrete System unendlich viele, voneinander verschiedene charakterisierende Zerlegungen und damit ebenso viele grundsätzlich gleichberechtigte Räume natürlicher Observablen.

Einer charakterisierenden Zerlegung $\mathcal{C}$ und der ihr korrespondierenden erzeugenden Zerlegung $\mathcal{E} = \mathcal{N} \vee \mathcal{C}$ werden in der beschriebenen Weise die Graphen $\mathrm{G}_T(\mathcal{E},\mathcal{C})$ und $\mathrm{G}_T(\mathcal{C})$ sowie die entsprechenden Adjazenzmatrizen L und $M^{\mathcal{C}}$ zugeordnet. Damit erscheint der Perron-Frobenius-Operator $\mathcal{L}_T : B(I_{\mathcal{C}}, D) \to B(I_{\mathcal{C}}, D)$ in der Gestalt:

$$(\mathcal{L}_T f)(j,x) = |a|^{-1} \sum_{i\in I_{\mathcal{E}}} L_{ji}\, f(i'', a^{-1}(x - b_i)), \tag{3.4}$$
$$i'', j \in I_{\mathcal{C}},\ i' \in I_{\mathcal{N}}.$$

Bezeichnet $P_n(X)$ den Vektorraum der Polynome vom Grade n in $x \in X$ mit komplexen Koeffizienten, so bildet das Tensorprodukt $P_n(I_{\mathcal{C}}, X) = C(I_{\mathcal{C}}) \otimes P_n(X)$ mit Funktionen:

$$p \in P_n(I_{\mathcal{C}}, X),\ \ p(j,x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(j)\, x^k, \tag{3.5}$$
$$j \in I_{\mathcal{C}},\ p_j \in \mathbb{C},$$

einen Raum polynomialer Funktionen endlicher Dimension, der invariant bleibt unter der Wirkung von $\mathcal{L}_T$. Die allgemeine Bauform des Perron-Frobenius-Operators macht ersichtlich, daß diese Eigenschaft sogar für den allgemeineren Fall beliebiger stückweise linearer Transformationen auch höherer Dimension gilt, sofern nur endliche charakterisierende Zerlegungen existieren.

Damit kann das Eigenwertproblem des Perron-Frobenius-Operators auf das korrespondierende Problem endlich-dimensionaler Matrizen reduziert werden. Die Überlegungen dieses, aber auch aller folgenden Kapitel fußen auf dieser Vereinfachung; sie bezeichnet ebenfalls den Ausgangspunkt einer Reihe von Autoren [44,45,46,47,48,49], die sich mit dem Studium des Perron-Frobenius-Operators befaßt haben.

Die spezielle Natur der in diesem Kapitel in Betracht gezogenen Systeme ermöglicht detailierte Aussagen über die spektralen Eigenschaften des Operators $\mathcal{L}_T$. Um einen Zusammenhang zwischen $\mathcal{L}_T$ und endlichen Matrizen herzustellen, wenden wir $\mathcal{L}_T$ auf die monomialen Funktionen:

$$q \in Q_k(I_C, X), \quad q(j,x) = q(j)\,x^k, \qquad j \in I_C,\ q(j) \in \mathbf{C}, \tag{3.6}$$

an und erhalten nach einigen Umformungen für den Operator $\mathcal{L}_T$ die Darstellung:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_T q)(j,x) &= \operatorname{sgn} a\, a^{-(k+1)} \sum_{i \in I_\varepsilon} L_{ji}\, q(i'')(x - b_{i'})^k \\
&= \operatorname{sgn} a\, a^{-(k+1)} \sum_{i \in I_\varepsilon} L_{ji}\, q(i'')x^k + \sum_{i \in I_\varepsilon} \sum_{l=0}^{k-1} L_{ij} q_{i''} \binom{k}{l} x^l (-b_{i'})^{k-l} \\
&= \operatorname{sgn} a\, a^{-(k+1)} \sum_{i \in I_C} M^C_{ji}\, q(i) x^k + \\
&\qquad \sum_{i \in I_\varepsilon} \sum_{l=0}^{k-1} L_{ij} q(i'') \binom{k}{l} x^l (-b_{i'})^{k-l},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

wobei unter Verwendung der Formel 2.4 die quadratische Adjazenzmatrix M^C der zugrundegelegten charakterisierenden Zerlegung C erscheint. Offenbar gilt insbesondere:

$$\mathcal{L}_T\, Q_k(I_C, X) \subseteq \bigoplus_{l=0}^{k} Q_l(I_C, X). \tag{3.8}$$

Damit hat der Perron-Frobenius-Operator, wirkend auf polynomiale Funktionen:

$$p \in P_n(I_C, X) = \bigoplus_{k=0}^{n} Q_k(I_C, X) \tag{3.9}$$

die Struktur einer semidirekten Summe von Operatoren und kann durch eine blocktrianguläre Matrix beschrieben werden. Wie aus Gleichung 3.7 abzulesen, lauten die Blöcke auf der Diagonalen dieser Matrix:

$$M^C_k = \operatorname{sgn} a\, a^{-(k+1)} M^C,\ k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.10}$$

Die Gestalt der übrigen Matrixelemente kann ebenfalls der Beziehung 3.7 entnommen werden. Sie sind im allgemeinen durch verhältnismäßig komplizierte Terme beschrieben, bleiben jedoch ohne Einfluß auf das Spektrum des Operators $\mathcal{L}_T$. Wir halten das bisher gewonnene Resultat fest:

Satz 3.2 *Das Spektrum des Perron-Frobenius-Operators einer Intervall-Abbildung konstanter Ableitung im Raum $B(I_C, X)$ lokal analytischer Funktionen hat die Struktur:*

$$spec\,\mathcal{L}_T = \{\lambda \in \mathbf{C} : \lambda = sgn\,a\, a^{-n}\mu,\ \mu \in spec\,M^C,\ n \in \mathbf{N}\}. \tag{3.11}$$

Hierbei bezeichnet M^C die Adjazenzmatrix des Graphen $G_T(C)$ der zugrundeliegenden charakterisierenden Zerlegung C.

Die Angabe einer einzigen Matrix ist also hinreichend, um das Spektrum des Perron-Frobenius-Operators bezüglich eines speziellen Raumes von Observablen vollständig zu beschreiben. Der Abschnitt 3.1.2. beweist die weiterreichende Aussage, daß die Absolutbeträge der Eigenwerte bezüglich *aller* natürlichen Observablen durch eine einzige Matrix bestimmt sind.

Die korrespondierenden Eigenfunktionen

Im folgenden wird skizziert, auf welche Weise im Prinzip die Eigenpolynome der Perron-Frobenius-Operatoren berechnet werden können.

Das Spektralproblem der Adjazenzmatrix M^C sei gelöst. Das Spektrum der Matrix laute: $spec\,M^C = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{|C|}\}$; $f_0 = (f_0(1), \ldots, f_0(|C|))^{T_r}$ sei ein Eigenvektor zum Eigenwert λ der Matrix M^C. Wie aus der speziellen Gestalt des Perron-Frobenius-Operators im Falle der Intervallabbildungen konstanter Ableitung hervorgeht, gilt in Matrix-Schreibweise die Beziehung:

$$\frac{d^n}{dx^n}(\mathcal{L}_T f)(x) = a^{-n}(\mathcal{L}_T \frac{d^n}{dx^n} f)(x) \tag{3.12}$$

mit $f(x) = (f(1,x), \ldots, f(|C|,x))^{T_r}$. Aus Gleichung 3.12 können rekursiv alle Eigenpolynome $p \in P_n(I_C, X)$, $n \in \mathbf{N}$ des Perron-Frobenius-Operators ausgehend von den Eigenvektoren der Matrix M^C berechnet werden. Offenbar gilt:

$$(\mathcal{L}_T f_0)(i) = \frac{\lambda}{a} f_0(i),\ \ i \in I_C. \tag{3.13}$$

Nun sei $(\mathcal{L}_T f_n)(i,x) = a^{-n}\lambda\, f_n(i,x)$, $i \in I_C$. Aus $f_n(x)$ kann eine weitere Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda_{n+1} = a^{-(n+1)}\lambda$ gemäß der Relation (3.10) erzeugt werden:

$$f_{n+1}(i,x) = (n+1)\int_0^x dy\, f_n(i,y) + f_{n+1}(i),\ \ i \in I_C. \tag{3.14}$$

Dabei ist der konstante Vektor $f_{n+1} = (f_{n+1}(1), \ldots, f_{n+1}(|\mathcal{C}|))^{Tr}$ selbst rekursiv definiert durch die Bedingung:

$$(\mathcal{L}_T f_{n+1})(0) = a^{-(n+1)} \lambda f_{n+1}. \tag{3.15}$$

Die Gleichung 3.15 kann aufgefaßt werden als:

$$(\mathcal{L}_T f_{n+1})(0) = M^{\mathcal{C}} f_{n+1} + (\mathcal{L}_T F)_n(0) = a^{-(n+1)} \lambda f_{n+1} \tag{3.16}$$
$$\text{mit } F_n := (n+1) \int_0^x dy\, f_n(y).$$

Wir fassen zusammen:

Satz 3.3 *Aus den Eigenvektoren der Adjazenzmatrix $M^{\mathcal{C}}$ des Graphen $\mathbf{G}_T(\mathcal{C})$ können die Eigenpolynome des entsprechenden Perron-Frobenius-Operators $\mathcal{L}_T$ rekursiv berechnet werden unter Verwendung der Relationen:*

$$f_{n+1}(x) = F_n(x) + f_{n+1} \tag{3.17}$$
$$F_n = (n+1) \int_0^x dy\, f_n(y) \tag{3.18}$$
$$f_{n+1} = (a^{-(n+1)} \lambda - M^{\mathcal{C}})^{-1} (\mathcal{L}_T F_n)(0) \tag{3.19}$$
$$\text{mit } \mathcal{L}_T f_0 = \frac{\lambda}{a} f_0,\ \lambda \in \text{spec}\, M^{\mathcal{C}}.$$

Auf jeder Ebene der Berechnung ist also das Problem einer Matrix-Inversion zu lösen. Im Falle spezieller Intervall-Transformationen konstanter Steigung, gegeben durch:

$$T : [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto Nx \pmod 1, \tag{3.20}$$
$$N \in \mathbb{N},\ |N| > 1,$$

reproduziert die Rekursionsvorschrift des Satzes 3.3 bezüglich der minimalen charakteristischen Zerlegung $\mathcal{C}^{min} = (0,1)$ eine Definition der Bernoulli-Polynome (vergleiche Referenz [50]).

Die Kolmogorov-Sinai-Entropie

Eine wichtige Rolle zur Kennzeichnung eines dynamischen Systems spielt die Kolmogorov-Sinai-Entropie h_{KS}. Sie ist ein Maß für die Informationsrate, die durch fortgesetzte Durchführung eines Experimentes maximal erzielt werden kann. Im vorliegenden Fall ist diese Größe besonders einfach zu berechnen. Im Sinne des thermodynamischen Formalismus [51] führen wir in den Perron-Frobenius-Operator eine inverse 'Temperatur' β ein:

$$(\mathcal{L}_\beta f)(j,x) = |a|^{-\beta} \sum_{i \in I_\varepsilon} L_{ji} f(i'', a^{-1}(x - b_{i'})). \tag{3.21}$$

Analog zu den vorangegangenen Überlegungen finden wir:

$$\operatorname{spec}\mathcal{L}_\beta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \operatorname{spec}(\,|a|^{-\beta}a^{-n}M^{\mathcal{C}}\,). \tag{3.22}$$

Da für den Spektralradius $\varrho(M^{\mathcal{C}})$ der Matrix $M^{\mathcal{C}}$ gelten muß: $\varrho(M^{\mathcal{C}}) = |a|$, ist der höchste Eigenwert des Operators $\mathcal{L}_\beta$ aus Stetigkeitsgründen in einer hinreichend kleinen Umgebung von $\beta = 1$ gegeben durch:

$$\lambda(\beta) = |a|^{1-\beta}. \tag{3.23}$$

Damit lautet der *topologische Druck* in einer genügend kleinen Umgebung von dem Punkt $\beta = 1$:

$$P(\beta) = \log|a|^{1-\beta}, \tag{3.24}$$

woraus sich die Kolmogorov-Sinai-Entropie mit Hilfe der Relation:

$$h_{KS} = -\frac{d}{d\beta}P(\beta)|_{\beta=1} \tag{3.25}$$

zu dem einfachen Ausdruck:

$$h_{KS} = \log|a| \tag{3.26}$$

berechnen läßt.

3.1.2 Verfeinerungen minimaler charakterisierender Zerlegungen

Vorgegeben sei die minimale charakterisierende Zerlegung $\mathcal{C}^{min}$ eines dynamischen Systems $([0,1],\mathcal{B},T)$. Sie werde im zuvor beschriebenen Sinn verfeinert durch die Bahn $\mathrm{B}_T(y) = \{T^i y\}_{i=0}^{m+p-1}$ eines Punktes $y \in [0,1]$:

$$\partial\mathcal{C} = \mathrm{B}_T(y) \cup \partial\mathcal{C}^{min}. \tag{3.27}$$

In der hieraus resultierenden Zerlegung existieren stets Elemente der Art:

$$C_0 = (x, y_0) \quad \text{mit } x \in \partial\mathcal{C}^{min} \text{ und } y_0 \in \mathrm{B}_T(y). \tag{3.28}$$

Ausgehend von einem derartigen, fest gewählten C_0 führen wir ein den folgenden Überlegungen besonders angepaßtes Alphabet $I_{\mathcal{C}}$ zur Indizierung der Elemente von $\mathcal{C}$ ein.
Je zwei Punkte $z_1, z_2 \in \partial\mathcal{C}$ werden miteinander verglichen mit Hilfe der Ordnungsrelation:

$$z_1 \prec z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z_1 < z_2 & \text{falls } z_1, z_2 \in [0,x] \text{ oder } z_1, z_2 \in [x,1] \\ z_1 > z_2 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.29}$$

In dem $(m+p+q)$-Tupel ($q = |\mathcal{C}^{min}|$):

$$(y_0, y_1, \ldots, y_{m+p-1}, x, x_1, \ldots, x_{q-1}) = (z_0, z_1, \ldots, z_{m+p+q}) \tag{3.30}$$

seien die Elemente $y_i \in \mathrm{B}_T(y)$ und $x_i \in \partial\mathcal{C}^{min}$ jeweils untereinander unter Verwendung der eingeführte Relation angeordnet. Als Elemente der charakterisierenden Zerlegung C erscheinen damit die Intervalle:

$$\begin{aligned} C_i = (z(z_i),\, z_i) \qquad & \text{mit } i \in I_C = \{0, 1, \ldots, m+p+q-1\} \\ & \text{wobei } z(z_i) := \min\{z \in \partial\mathcal{C} : z \prec z_i\}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Zwischen der Anordnung der Punkte $y_i \in \mathrm{B}_T(y)$ in dem obigen Zahlentupel und der Reihenfolge ihres Auftretens als Bahnelemente von y unter der iterierten Wirkung von T besteht ein Zusammenhang, den wir durch eine Permutation $\sigma : \{0, 1, \ldots, m+p-1\} \to \{0, 1, \ldots, m+p-1\}$ darstellen:

$$y_i = T^{\sigma(i)} y. \tag{3.32}$$

Es folgen Notationen für einige Matrizen spezieller Bauart:

- P^σ bezeichnet die einer Permutation σ zugeordnete Permutationsmatrix. Darunter versteht man eine nicht-singuläre $(m+p)$-dimensionale Matrix mit Elementen $P^\sigma_{i\sigma(i)} = 1$ und $P^\sigma_{ij} = 0$ sonst. Die inverse Permutation σ^{-1} ist durch die Transposition $(P^\sigma)^T$ repräsentiert.

- π_p stellt die p-dimensionale Permutationsmatrix der zyklischen Permutation $(1, 2, \ldots, p) \mapsto (2, \ldots, p, 1)$ dar. Ihr Spektrum besteht aus den p-ten Einheitswurzeln:
$$\operatorname{spec} \pi_p = \{\lambda \in \mathbf{C} : \lambda^p = 1\}. \tag{3.33}$$

- Das Symbol D benennt eine $(m+p)$-dimensionale obere Dreiecksmatrix für deren Elemente gilt:
$$\begin{aligned} D_{ij} \;=\; & \begin{cases} 0 & \text{falls } i > j \text{ oder } y_i \prec x(y_j) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \\ & \text{wobei } x(y_j) := \min\{x \in \partial\mathcal{C}^{min} : x \prec y_j\}. \end{aligned} \tag{3.34}$$
Die Matrix D kann als Blockdiagonalmatrix aufgefaßt werden, in der als Diagonalblöcke obere Dreiecksmatrizen erscheinen, deren von Null verschiedene Elemente gleich 1 sind. Es gilt: $\det D = 1$.

- B ist eine $(p+m) \times q$-Rechteckmatrix mit der Eigenschaft:
$$\begin{aligned} B_{ij} \;=\; & \begin{cases} 0 & \text{falls } x(x_j) \prec y_i \prec x_j \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \\ & \text{wobei } x(x_j) := \min\{x \in \partial\mathcal{C}^{min} : x \prec x_j\}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

- Durch I_n ist die n-dimensionale Einheitsmatrix, durch J_n eine $(n \times n)$-Matrix mit $J_{ij} = 1$ falls $i = j + 1$ und $J_{ij} = 0$ sonst beschrieben.
- Schließlich bezeichnet der Buchstabe A die nicht singuläre Blockmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} P^\sigma D & B \\ 0 & I_q \end{pmatrix}. \tag{3.36}$$

Der Beweis des nachfolgenden Lemmas formuliert ein Verfahren, das die Adjazenzmatrix $M^{\mathcal{C}}$ des Graphen $G_T(\mathcal{C})$ der Zerlegung $\mathcal{C}$ in eine Normalform bringt, aus der ihre spektralen Eigenschaften unmittelbar abgelesen werden können. Insbesondere wird die Beziehung zur entsprechenden Matrix $M^{\mathcal{C}^{min}}$ der minimalen charakterisierenden Zerlegung sichtbar.

Lemma 3.4 *Durch eine Ähnlichkeitstransformation, vermittelt durch die Matrix A, wird $M^{\mathcal{C}}$ blocktrianguliert. Dabei erscheinen als Diagonalblöcke die Matrizen: J_m, π_p und $M^{\mathcal{C}^{min}}$.*

Beweis Der Beweisgedanke beruht auf der Einführung eines Systems von Teilmengen des Intervalles $[0,1]$, deren Transformationsverhalten unter der Wirkung von T leicht einzusehen ist.
Es sei an die Definition der Adjazenzmatrix $M^{\mathcal{C}}$ erinnert: Der Einheitsvektor $e_i = (0, \overset{i\text{-teStelle}}{\ldots}, 1, \ldots, 0)$ repräsentiert das Element $C_i = (z(z_i), z_i) \in \mathcal{C}$ der Zerlegung $\mathcal{C}$; sein Bild $M^{\mathcal{C}} e_i$ gibt an, auf welche Elemente der Zerlegung $\mathcal{C}$ und mit welcher Häufigkeit das Intervall C_i durch die expandierende Transformation T abgebildet wird.
Man betrachte nun die Wirkung der Transformation T auf Teilmengen von $[0,1]$, die einer zu $\{e_i\}_{i \in I_{\mathcal{C}}}$ äquivalenten Basis entsprechen. Sie gehe aus $\{e_i\}_{i \in I_{\mathcal{C}}}$ hervor vermöge der linearen Abbildung: $e_i' = Ae_i$. Wir treffen eine Fallunterscheidung:

1. $0 \le i \le m + p$:
   Den Vektoren De_i entsprechen, wie aus der Definition der Matrix D hervorgeht, die Mengen:

$$De_i \longleftrightarrow (x(y_i), y_i) = \{x : x(y_i) \prec x \prec y_i\}. \tag{3.37}$$

   Die Anwendung der Permutationsmatrix P^σ bewirkt aufgrund der Eigenschaft 3.32:

$$e_i' = Ae_i = P^\sigma De_i \longleftrightarrow (x(T^i y), T^i y). \tag{3.38}$$

2. $m + p < i \le m + p + q$:
   Analog gilt unter Verwendung der Eigenschaften von B:

$$e_i' = Ae_i \longleftrightarrow (x(x_j), x_j) = C_j^{min} \quad \text{mit } j = i - m - p,\ x_j \in \partial\mathcal{C}^{min}. \tag{3.39}$$

Die Wirkung der Transformation T auf die Mengen $\langle x(T^iy), T^iy\rangle$ wird beschrieben durch:

$$T\,\langle x(T^iy), T^iy\rangle = \langle x(T^{i+1}y), T^{i+1}y\rangle \cup \bigcup_{j\in I^i_{C^{min}}} C_j^{min} \tag{3.40}$$

mit einem geeignet ausgewählten Teilalphabet $I^i_{C^{min}} \subseteq I_{C^{min}}$.
Damit erweist sich die der Basis $\{e_i\}_{i\in I_C}$ korrespondierende Adjazenzmatrix M^C als eine blocktrianguläre Matrix der Bauform:

$$\begin{array}{l} m\left\{\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ p\left\{\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ \end{array}
\left(\begin{array}{ccc}
\boxed{\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array}} & & \\
\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array} & \boxed{\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array}} & \\
\otimes & \otimes & M^{C^{min}}
\end{array}\right), \tag{3.41}$$

wodurch die Behauptung bewiesen ist. ◇

Eine beliebige charakterisierende Zerlegung des Systems kann durch Angabe endlich vieler Bahnen:

$$\mathrm{B}_T(y_k) = \{T^iy_k\}_{i=0}^{m_i+p_i-1} \tag{3.42}$$

mit transienten und periodischen Anteilen der Längen m_i bzw. p_i und der minimalen charakterisierenden Zerlegung C^{min} klassifiziert werden. Mit der Bezeichnung $\omega_{p_i} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^{p_i} = 1\}$ für die Menge der p_i-ten Einheitswurzeln formuliert das folgende Korollar die Aussage:

Korollar 3.5 *Das Spektrum der Adjazenzmatrix M^C jeder endlichen charakterisierenden Zerlegung C eines dynamischen Systems $([0,1], \mathcal{B}, T)$ ist von der Gestalt:*

$$spec\, M^C = spec\, M^{C^{min}} \cup \bigcup_i \omega_{p_i} \cup \{0\}|_{\sum_i m_i}. \tag{3.43}$$

Hierbei ist der Eigenwert $\lambda = 0$ $\sum_i m_i$-fach entartet. Insbesondere sind demnach die Absolutbeträge der Eigenwerte allein durch die minimale charakterisierende Zerlegung bestimmt.

Beweis Die Behauptung ergibt sich durch wiederholte Anwendung des zuvor bewiesenen Lemmas. Die Rolle, die dort von C^{min} eingenommen wurde, werde

hier zunächst von der Zerlegung $\mathcal{C}^1$ übernommen, die gekennzeichnet ist durch:

$$\partial\mathcal{C}^1 = \partial\mathcal{C}^{min} \cup \{B_T(y_2), B_T(y_3), \ldots\}. \tag{3.44}$$

Der Aussage des Lemmas zufolge existiert für das Spektrum der Matrix $M^{\mathcal{C}}$ die Darstellung:

$$\text{spec}\, M^{\mathcal{C}} = \text{spec}\, M^{\mathcal{C}^1} \cup \omega_{p_i} \cup \{0\}|_{m_i}. \tag{3.45}$$

Der Eigenwert Null ist hierbei m_i-fach entartet. Eine vollständige Induktion führt unmittelbar zum Beweis des Korollars. ◇

Gestützt auf die Aussage des Satzes 3.2 sind wir nun in der Lage, die bisher gefundenen Resultate in einem Satz über das Relaxationsverhalten der betrachteten Klasse dynamischer Systeme zusammenzufassen.

Satz 3.6 *Intervall-Abbildungen konstanter Ableitung führen auf* einfach relaxierende *dynamische Systeme, deren Relaxationszeit τ für alle natürlichen Observablen gegeben ist durch:*

$$1/\tau = \max\{\log|a|, -\log\xi(M^{\mathcal{C}^{min}})/|a|\}. \tag{3.46}$$

$\xi(M^{\mathcal{C}^{min}})$ bezeichnet in dieser Aussage den Absolutbetrag der zweithöchsten Eigenwerte der Adjazenzmatrix $M^{\mathcal{C}^{min}}$ des Graphen $G_T(\mathcal{C}^{min})$ der minimalen charakterisierenden Zerlegung $\mathcal{C}^{min}$ des Systems.

Die Relaxationszeit eines derartigen Systems ist demnach eng verknüpft mit dem subdominanten Spektralradius $\xi(M)$ einer nichtnegativen Matrix M. In der mathematischen Literatur sind dieser Größe ausgiebige Untersuchungen gewidmet. Insbesondere bilden obere Schranken für den Absolutbetrag subdominanter Eigenwerte nichtnegativer Matrizen einen Gegenstand verbreiteten Interesses. Die Bemühungen der Mathematiker zu diesem Thema bis zum Jahre 1985 sind in einem ausführlichen Übersichtsartikel von Rothblum u.a. [52] zusammengefaßt.

Die verschiedenen Methoden, obere Schranken für ξ einzuführen, gehen typischerweise aus von der Kenntnis des Spektralradius $\varrho(M)$ und des zugehörigen nichtnegativen Eigenvektors der zugrundeliegenden Matrix. Damit ist zugleich der Ausgangspunkt beschrieben, um die Größe ξ auf numerische Weise zu berechnen.

Nur in wenigen Fällen besteht die Möglichkeit, $\xi(M)$ durch Angabe einer einfachen Formel mit Eigenschaften der Matrix M in Verbindung zu bringen; meistens muß man sich mit einem numerischen Algorithmus begnügen.

3.1.3 Graphentheoretische Eigenschaften

Der subdominante Spektralradius $\xi(M^{C^{min}})$ der Matrix M^{min} ist mit graphentheoretischen Merkmalen des zugrundeliegenden Graphen $G_T(C^{min})$ verknüpft.

Zum Aufweis dieser Beziehung zitieren wir ein Verfahren [53], das mit Hilfe der Koeffizienten der charakteristischen Polynome der Potenzen einer Matrix die Absolutbeträge ihrer Eigenwerte im Prinzip zu berechnen erlaubt. In einer unseren Zwecken angepaßten Formulierung lautet dieser Zusammenhang:

Lemma 3.7 (Wimmer,1985) *Es sei* $char_{A^k}(\lambda) = \lambda^n + a_1^{(k)}\lambda^{n-1} + a_2^{(k)}\lambda^{n-2} + \ldots + a_n^{(k)}$ *das charakteristische Polynom der Potenz* A^k *einer Matrix* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Durch die Koeffizienten* $a_2^{(k)}$ *läßt sich unter Verwendung des Spektralradius* $\varrho(A)$ *der subdominante Spektralradius* $\xi(A)$ *darstellen als:*

$$\xi(A) = \frac{1}{\varrho(A)} \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_2^{(k)}|}. \tag{3.47}$$

Das Studium der Potenz M^k der Adjazenzmatrix M eines gerichteten Graphen G berührt das Problem der Berechnung der Anzahl von Pfaden einer gegebenen Länge k in G.

Wie in dem Abschnitt 2.1 dargelegt wurde, gibt das Matrixelement M_{ij}^k die Anzahl derjenigen Pfade der Länge k an, die von dem Vertex i ausgehen und in dem Vertex j enden. Das Produkt G_1G_2 zweier Graphen $G_1 = (I, U)$ und $G_2 = (I, V)$ gleicher zugrundeliegender Vertexmenge I und Pfeilen aus den Mengen U bzw. V ist ein gerichteter Graph, in dem soviele Pfeile vom Vertex i zum Vertex j führen, wie Paare von Pfeilen ($u \in U$, $v \in V$) existieren mit der Eigenschaft, daß u von i ausgeht und v in j endet. Man verifiziert sofort, daß der Graph G^k die Adjazenzmatrix M^k besitzt.

Ein bekanntes Theorem gestattet, zwischen den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der Adjazensmatrix M^k eines Graphen G^k und strukturellen Eigenschaften des Graphen eine Beziehung herzuleiten (zitiert in [33]). Es lautet in einer der gegenwärtigen Problematik angepaßten Fassung:

Satz 3.8 (Sachs,1964) *Der Koefizient* $a_2^{(k)}$ *des charakteristischen Polynoms der Adjazenzmatrix* M^k *eines Graphen* G^k, *bezeichnet durch* $char_{M^k}(\lambda) = \lambda^n + a_1^{(k)}\lambda^{n-1} + a_2^{(k)}\lambda^{n-2} + \ldots + a_n^{(k)}$, *kann dargestellt werden als:*

$$a_2^{(k)} = \sum_{L\in\mathcal{L}_2^k} (-1)^{p(L)}, \tag{3.48}$$

wobei $\mathcal{L}_2^k$ *die Menge aller linearen gerichteten Untergraphen L von* G^k *mit genau zwei Vertizes darstellt;* $p(L)$ *bezeichnet die Zahl der Zyklen, in die L zerfällt.*

Wir halten fest: Die Relaxationszeit τ einer Intervallabbildung konstanter Ableitung kann im Prinzip durch sukzessive Approximation der Größe $\xi(M^{C^{min}})$ unter Verwendung ausschließlich struktureller Eigenschaften des Graphen $G_T(C^{min})$ bestimmt werden. Nachdrücklich wird jedoch bestritten, daß dieses Verfahren zu einer effektiven numerischen Berechnung von $\xi(M^{C^{min}})$ geeignet ist.

Die im zweiten Kapitel hergeleiteten Spurformeln für die Potenzen $\mathcal{L}_T^n$ des Perron-Frobenius-Operators vereinfachen sich erheblich im Falle der vorliegenden Klasse dynamischer Systeme:

$$\text{spur}\,\mathcal{L}_T^n = \frac{\text{sgn}\,a^n}{a^n - 1}\,\text{spur}\,M^{C_n} \tag{3.49}$$

bei einer zugrundeliegenden charakterisierenden Zerlegung C. Hierbei wurde die Formel 2.4 aus Abschnitt 2.1.2 verwendet, welche die Adjazenzmatrizen L und M^C der Graphen $G_T(\mathcal{E},C)$ bzw. $G_T(C)$ miteinander verknüpft.

Die Spurformel 3.49 erlaubt eine Interpretation im Sinne der Graphentheorie. Da das Matrixelement $M_{ij}^{C^n}$ die Zahl der Pfade der Länge n, ausgehend von dem Vertex i und endend in dem Vertex j, des Graphen $G_T(C)$ darstellt, bezeichnet die Größe $\text{spur}M^{nC}$ die Anzahl aller geschlossenen Pfade der Länge n im Graphen $G_T(C)$.

3.2 Affine Kreis-Transformationen

Speziell geartete affine Abbildungen des Einheitskreises, gegeben durch:

$$T : Tor^1 \to Tor^1,\ x \mapsto Nx + q \pmod 1 \qquad \text{mit } N \in \mathbb{N},\ N > 1,\ \text{und } q \in \mathbb{Q}, \tag{3.50}$$

stellen eine naheliegende Verallgemeinerung der sogenannten *N-adischen Transformation* $Tx = Nx \pmod 1$ dar.

Als besonders einfach geartetes und leicht zu behandelndes Beispiel ist das durch die N-adische Transformation definierte dynamische System von einer Reihe von Autoren, beginnend mit *Hermann Weyl* [54], ausführlich untersucht worden. Die minimale charakterisierende Zerlegung des Systems ist in diesem Falle trivial und mit dem Intervall $I = (0,1)$ identisch; bezüglich I erweisen sich die Bernoulli-Polynome $B_n(x)$ als analytische Eigenfunktionen des Perron-Frobenius-Operators zu den reellen Eigenwerten $\lambda_n = N^{-n}$, $n = 1,2,\ldots$ [23]. Für rationale Zahlen $q \neq 0$ modifiziert sich dieses Bild in charakteristischer Weise:

- Der Raum stetiger Funktionen auf dem Intervall I verliert seine Invarianz unter der Wirkung des Perron-Frobenius-Operators.

  Damit liegen in den affinen Kreis-Transformationen die einfachsten Beispiele dynamischer Systeme vor, die zur Untersuchung des Relaxationsverhaltens die Einführung von Räumen lokal stetiger Observablen erzwingen.

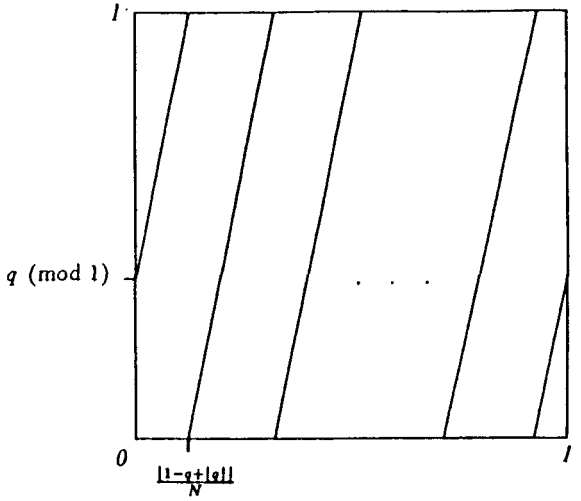


Bild 3.1: Die Transformation $T(x) = Nx + q \pmod 1$

- Das Potenzgesetz $\lambda_n = N^{-n}$ hat nur Geltung für die Absolutbeträge der von Null verschiedenen und im allgemeinen komplexen Eigenwerte des Perron-Frobenius-Operators. Als Phasenfaktoren treten jedoch ausschließlich Einheitswurzeln auf. Auch die Zahl Null ist möglicher Eigenwert.

Bei affinen Kreisabbildungen besteht ein einfacher Zusammenhang zwischen der Relaxationszeit τ und der Kolmogorov-Sinai-Entropie h_{KS}: $\tau h_{KS} = 1$.

3.2.1 Erzeugende Zerlegungen

Die natürliche Zerlegung $\mathcal{N}$ einer vorgegebenen Kreisabbildung $T : Tor^1 \to Tor^1$, $x \mapsto Nx + q \pmod 1$ ist gekennzeichnet durch die Angabe ihrer Randpunkte:

$$\partial\mathcal{N} = \{0, \frac{\lfloor 1 - q + \lfloor q \rfloor \rfloor}{|N|}, \frac{\lfloor 2 - q + \lfloor q \rfloor \rfloor}{|N|}, \ldots, \frac{\lfloor N - q + \lfloor q \rfloor \rfloor}{|N|}, 1\}. \tag{3.51}$$

Hierbei bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ den ganzzahligen Anteil einer Zahl $x \in \mathbf{R}$. Als Schnitte der Transformation T treten die linearen Funktionen:

$$S_i : x \mapsto S_i(x) = \tfrac{1}{N}(x + i - q + \lfloor q \rfloor) \tag{3.52}$$

auf mit $i \in I_N = \{0,1,\ldots,\lfloor N - q + \lfloor q \rfloor \rfloor\}$. Die Existenz einer endlichen charakterisierenden Zerlegung des Intervalles $I = (0,1)$ ist garantiert, wenn der Punkt $x = 1$ unter der Wirkung von T auf eine periodische Bahn gelangt, wenn also gültig ist:

$$\mathrm{B}_T(1) = \{T^i(1)\}_{i=0}^{m+p-1} \text{ mit } T^{m+p}(1) = T^m(1). \tag{3.53}$$

Die durch $\partial\mathcal{C}^{min} = \mathrm{B}_T(1) \cup \{0\}$ definierte Zerlegung $\mathcal{C}^{min}$ ist nach den Überlegungen des vorigen Abschnittes sogar die kleinste derartiger Zerlegungen. Jede weitere Bahn:

$$\mathrm{B}_T(x_k) = \{T^i x_k\}_{i=0}^{m_k+p_k-1} \text{ mit } T^{m_k+p_k}x_k = T^{m_k}x_k \tag{3.54}$$

eines Punktes $x_k \in (0,1)$ generiert eine charakterisierende Zerlegung, die $\mathcal{C}^{min}$ verfeinert.

Das nachfolgende Lemma kennzeichnet diejenigen Punkte des Einheitsintervalles, deren Bahnen endliche charakterisierende Zerlegungen erzeugen können.

Lemma 3.9 *Jede rationale Zahl $x = x_1/x_2 \in [0,1]$ mit natürlichen, teilerfremden Zahlen $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, $ggT(x_1,x_2) = 1$, gelangt nach endlich vielen Iterationen der Abbildung $T : [0,1] \to [0,1]$, $x \mapsto T(x) = Nx + q_1/q_2 \pmod 1$, $q_1/q_2 \in \mathbb{Q}$, $ggT(q_1,q_2) = 1$, auf eine periodische Bahn. Darüber hinaus gilt: Die Periode p dieser Bahn ist beschränkt durch das kleinste gemeinsame Vielfache der natürlichen Zahlen x_2 und q_2:*

$$0 < p \leq kgV(x_2,q_2). \tag{3.55}$$

Beweis Offenbar gelten mit passend gewählten natürlichen Zahlen $a \geq q_2$ und $b \geq x_2$ die Umformungen:

$$T(x) = \frac{Nx_1}{x_2} + \frac{q_1}{q_2} \pmod 1 = \frac{Nx_1a + q_1b}{\mathrm{kgV}(x_2,q_2)} \pmod 1 \tag{3.56}$$

$$= \frac{Nx_1a + q_1b \pmod{\mathrm{kgV}(x_2,q_2)}}{\mathrm{kgV}(x_2,q_2)} = \frac{y_1}{\mathrm{kgV}(x_2,q_2)} \tag{3.57}$$

mit einer geeigneten ganzen Zahl $0 \leq y_1 < \mathrm{kgV}(x_2,q_2)$. Eine vollständige Induktion macht unmittelbar deutlich, daß jede iterierte Anwendung der Abbildung T auf $x \in [0,1]$ darzustellen ist durch:

$$T^n(x) = \frac{y_n}{\mathrm{kgV}(x_2,q_2)} \tag{3.58}$$

mit $0 \leq y_n < \mathrm{kgV}(x_2,q_2)$, $y_n \in \mathbb{Z}$. Somit müssen Zahlen $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $p \in \mathbb{N}$ existieren mit $T^{m+p}x = T^m x$, wobei p nicht die Zahl $\mathrm{kgV}(x_2,q_2)$ überschreiten kann. ◇

Einer charakterisierenden Zerlegung $\mathcal{C}$ und der korrespondierenden erzeugenden Zerlegung $\mathcal{E} = \mathcal{N} \vee \mathcal{C}$ werden die Graphen $\mathrm{G}_T(\mathcal{E},\mathcal{C})$ und $\mathrm{G}_T(\mathcal{C})$ sowie die ent-

sprechenden Adjazenzmatrizen L und $M^{\mathcal{C}}$ zugeordnet, mit deren Hilfe der Perron-Frobenius-Operator $\mathcal{L}_T$ und sein Spektrum ausgedrückt werden können:

$$(\mathcal{L}_T f)(j,x) = N^{-1} \sum_{i \in I_\ell} L_{ji}\, f(i'', N^{-1}(x + i - q + \lfloor q \rfloor)), \tag{3.59}$$

$$\text{spec}\, \mathcal{L}_T = \{\lambda \in \mathbf{C} : \lambda = N^{-n}\mu,\ n \in \mathbf{N},\ \mu \in \text{spec}\, M^{\mathcal{C}}\}. \tag{3.60}$$

Die Adjazenzmatrix $M^{\mathcal{C}}$ jeder charakterisierenden Zerlegung $\mathcal{C}$ einer affinen Kreis-Abbildung ist durch eine besondere Eigenschaft gekennzeichnet:

Lemma 3.10 *Die Matrix $A = \frac{1}{N} M^{\mathcal{C}}$ ist* stochastisch, *d.h. für die Zeilensummen ihrer Einträge gilt: $\sum_{i \in I_{\mathcal{C}}} A_{ij} = 1$, $i \in I_{\mathcal{C}}$.*

Beweis Wir wählen eine spezielle Zerlegung $\mathcal{C}^*$, die das Intervall $(0,1)$ äquidistant in Nq_2 gleichgroße Stücke teilt: $\partial\mathcal{C}^* = \{0, \frac{1}{Nq_2}, \frac{2}{Nq_2}, \ldots, 1\}$. Offenbar gilt nach Lemma 3.9 : $\mathrm{B}_T(1) \subseteq \partial\mathcal{C}^*$. Demnach ist $\mathcal{C}^*$ charakterisierend. Ferner ist $\mathcal{C}^* \preceq \mathcal{N}$ und folglich gilt $\mathcal{E}^* = \mathcal{N} \vee \mathcal{C}^* = \mathcal{C}^*$. Aus dem Schaubild der Transformation T (Abbildung 3.1) geht hervor, daß jedes Element C_i^* der Zerlegung genau N Urbilder besitzt. In jedem Vertex $i \in I_{\mathcal{C}^*}$ des Graphen $\mathrm{G}_T(\mathcal{C}^*)$ enden folglich genau N Pfeile. Die Zeilensummen der Adjazenzmatrix $M^{\mathcal{C}^*}$ sind somit $\sum_{j \in I_{\mathcal{C}^*}} M^{\mathcal{C}^*}_{ij} = N$ für alle $i \in I_{\mathcal{C}^*}$.
Demnach ist der Vektor $\mathrm{e}^* = (1, \ldots, 1)$, $|\mathcal{C}^*|$ Komponenten, Eigenvektor zum Eigenwert 1 der Matrix $A^* : A^*\mathrm{e}^* = \mathrm{e}^*$. Die Zahl 1 ist zugleich auch der Spektralradius $\varrho(A^*)$ der stochastischen Matrix A^*.
Aus dem Lemma 2.8 des vorangegangenen Kapitels folgt somit, daß für jede charakterisierende Zerlegung $\mathcal{C}$ der Vektor $\mathrm{e} = (1, \ldots, 1)$, $|\mathcal{C}|$-Komponenten, die Eigenschaft $\frac{1}{N} M^{\mathcal{C}} \mathrm{e} = \mathrm{e}$ besitzt. Hieraus ergibt sich die Behauptung. ◇

Als unmittelbare Konsequenz halten wir fest:

Korollar 3.11 *Das absolut stetige invariante Maß affiner Kreistransformationen ist durch das Lebesgue-Maß gegeben:*

$$dm_T(x) = dx. \tag{3.61}$$

3.2.2 Das Spektrum des Perron-Frobenius-Operators

Die besondere Bauart affiner Kreistransformationen erlaubt, das Spektrum der Adjazenzmatrix $M^{\mathcal{C}^{\min}}$ der minimalen charakterisierenden Zerlegung $\mathcal{C}^{\min}$ explizit zu berechnen. Das Korollar 3.5 in Verbindung mit Satz 3.2 des letzten Abschnittes impliziert, daß damit zugleich das Spektralproblem des Perron-Frobenius-Operators $\mathcal{L}_T$ gelöst ist.

Es erweist sich als vorteilhaft, die Zerlegung $\mathcal{C}^{min}$ in einem ersten Schritt zunächst zu erweitern, indem einer der Fixpunkte $Tx = x$, $x \in (0,1)$, der Abbildung T als weiterer Begrenzungspunkt zu der minimalen charakterisierenden Zerlegung hinzugefügt wird:

$$\partial\mathcal{C} = \partial\mathcal{C}^{min} \cup \{x\}. \tag{3.62}$$

Die Existenz wenigstens eines derartigen Fixpunktes ist für alle Transformationen T garantiert.

Unter Verwendung der oben eingeführten Ordnungsrelation für $x_1, x_2 \in \partial\mathcal{C}$:

$$x_1 \prec x_2 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x_1 < x_2 & \text{falls } x_1, x_2 \in [0,x] \text{ oder } x_1, x_2 \in [x,1] \\ x_1 > x_2 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.63}$$

ist durch:

$$C_i = (x(x_i), x_i) \text{ mit } x(x_i) := \min\{x \in \partial\mathcal{C} : x \prec x_i\},\ i \in I_{\mathcal{C}}, \tag{3.64}$$
$$\text{wobei } x_0 \prec x_1 \prec \ldots x_{|\mathcal{C}^{min}|} \prec x_{|\mathcal{C}^{min}|+1}$$

ein unseren Zwecken besonders angepaßtes Alphabet $I_{\mathcal{C}}$ definiert. Analog zur Methodik des vorangegangenen Abschnittes greifen wir auf eine Permutation σ : $I_{\mathcal{C}} \to I_{\mathcal{C}}$ zurück, die durch die Eigenschaft:

$$x_i = T^{\sigma(i)}(1) \tag{3.65}$$

gekennzeichnet ist. Die zugehörige Permutationsmatrix sei P^σ. Mit diesen Hilfsmitteln stellt das nachfolgende Lemma die Adjazenzmatrix $M^{\mathcal{C}}$ in einer einfach strukturierten Standardform dar.

Lemma 3.12 *Ist B eine $|\mathcal{C}|$-dimensionale obere Dreiecksmatrix mit $B_{ij} = 1$ falls $i \le j$ und $A = \begin{pmatrix} P^\sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B$, so gilt:*

$$A^{-1}M^{\mathcal{C}}A = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \multicolumn{4}{c|}{\multirow{4}{*}{$\begin{matrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{matrix}$}} & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m+p} \end{array}\right) N \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} m \\ \\ \\ \\ p \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \tag{3.66}$$

wobei $a_i = \lfloor t^i(1) \rfloor$ mit $t(x) = Nx + q$, $i = 1, \ldots, m+p$.

Beweis Analog zu der Schlußweise des Lemmas 3.4 entsprechen den Vektoren Ae_i, $e_i = (0, \ldots, \overset{i-te Stelle}{1}, \ldots, 0)$, $i = 1, \ldots, |C^{min}|$, die Teilmengen:

$$(x, T^i(1)) := \{y : x \prec y \prec T^i(x)\} \tag{3.67}$$

des Intervalles $(0,1)$. Der Vektor $Ae_{|C|}$, $e_{|C|} = (0, \ldots, 1)$ korrespondiert hingegen mit dem Intervall $(0,1)$ selbst. Die Wirkung der Transformation T auf die eingeführten Mengen ist unmittelbar einsichtig:

$$T(x, T^i(x)) = (x, T^i(x)) \quad (\cup(0,1)), \tag{3.68}$$

wobei $(0,1)$ von $T(x, T^i(x))$ genau N-fach überdeckt wird. Aus diesen Beziehungen sind die Einträge der korrespondierenden Adjazenzmatrix M^C unmittelbar abzulesen. ◇

Der Aussage des Lemmas 3.4 entnehmen wir, daß eine Verfeinerung der minimalen charakterisierenden Zerlegung, die durch einen Fixpunkt der Abbildung T erzeugt wird, einen zusätzlichen Eigenwert $\lambda = 1$ zur Folge hat. Daher können wir fogenden Sachverhalt formulieren:

Korollar 3.13 *Die Adjazenzmatrix $M^{C^{min}}$ des Graphen $G_T(C^{min})$, der von der minimalen charakterisierenden Zerlegung einer affinen Kreis-Transformation T vermöge der Bahn $B_T(1) = \{T^i(1)\}_{i=0}^{m+p-1}$ induziert wird, besitzt folgendes Spektrum:*

$$spec\, M^{C^{min}} = \{N, e^{\frac{2\pi i}{p}}, e^{\frac{2\pi i 2}{p}}, \ldots, e^{\frac{2\pi i (p-1)}{p}}, 0|_m\}, \tag{3.69}$$

wobei der Eigenwert $\lambda = 0$ m-fach entartet ist. Insbesondere ist also die Zahl 1 kein Eigenwert.

Damit rundet sich das nunmehr gewonnene Bild der spektralen Eigenschaften des Perron-Frobenius-Operators $\mathcal{L}_T$:

- Sein größter Eigenwert ist nicht entartet und durch die Zahl $\lambda = 1$ gegeben. Alle übrigen Eigenwerte in den eingeführten Räumen lokal analytischer Funktionen können dagegen entartet sein.
- Sie liegen in der komplexen Zahlenebene auf konzentrischen Kreisen um den Ursprung; ihre Radien sind durch die inversen Potenzen von N gegeben: $r_n = N^{-n}$; die Zahl Null ist möglicher Eigenwert.
- Die Phasenfaktoren der von 1 verschiedenen Eigenwerte sind von der speziellen Wahl der zugrundegelegten charakterisierenden Zerlegung abhängig und durch Einheitswurzeln darzustellen.
- Alle Resultate übertragen sich sinngemäß, wenn für N auch negative ganze Zahlen mit $|N| > 1$ zugelassen werden; insbesondere gilt:

$$\text{spec}\, \mathcal{L}_T = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \text{sgn}N\, N^{-n}\mu,\ n \in \mathbb{N},\ \mu \in \text{spec}\, M^C\}. \tag{3.70}$$

Mit diesen Ergebnissen erhält man für die Relaxationszeit affiner Abbildungen des Einheitskreises:

$$1/\tau = \log|N|. \tag{3.71}$$

Aufgrund von Gleichung 3.26 gilt im Falle affiner Kreis-Abbildungen die Beziehung:

$$\tau h_{KS} = 1 \tag{3.72}$$

zwischen Relaxationszeit τ und Kolmogorov-Sinai-Entropie h_{KS}. Als Hypothese für allgemeinere Klassen dynamischer Systeme genommen, versagt jedoch diese Relation, wie im weiten Fortgang noch dargelegt wird. Eine Verallgemeinerung des Zusammenhanges 3.72 bei einer mehrdimensinalen Verallgemeinerung affiner Kreis-Abbildungen wird im Kapitel 5 vorgestellt.

3.3 Modelle zirkulanter Struktur

Ein besonderes Strukturmerkmal zeichnet die im folgenden untersuchten Modelle gegenüber der allgemeinen Situation stückweise linearer Systeme konstanter Ableitung aus: Die Adjazenzmatrizen der minimalen charakterisierenden Zerlegungen, deren Spektren, wie zuvor dargelegt, die wesentlichen Züge der spektralen Eigenschaften des Perron-Frobenius-Operators festlegen, haben hier die Bauform verallemeinerter *zirkulanter Matrizen*. Techniken zur Diagonalisierung derartiger Matrizen stehen in der mathematischen Literatur zur Verfügung [55,56].

Damit liegt in den Intervallabbildungen zirkulanter Struktur eine weitere Klasse von Modellsystemen vor, in der die Spektren der Perron-Frobenius-Operatoren explizit berechnet werden können. Insbesondere stellt sich heraus, daß die Relaxationszeit auf verhältnismäßig komplizierte und nicht unmittelbar abzulesende Weise mit den Bestimmungsstücken eines Systems verknüpft ist. Dies steht im Gegensatz zum Fall der einfacher gebauten affinen Kreisabbildungen. Ein erkennbarer Zusammenhang zwischen Relaxationszeit, Ljapunov-Exponent und Kolmogorov-Sinai-Entropie besteht im allgemeinen nicht.

3.3.1 Die Klasse der Modelle

Permutationen eines bestimmten Typs beschreiben das wesentliche Charakteristikum der vorgestellten Klasse von Modellsystemen.

Definition 3.14 *Eine Permutation* $\sigma_g : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ *der ersten* n *natürlichen Zahlen heißt* g-Permutation, *wenn ihre Wirkung beschrieben ist durch:*

$$\sigma_g(i) := gi \pmod n,\ g \in \mathbf{N}. \tag{3.73}$$

Ist eine Permutation $\sigma_{k,g} : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ darzustellen als Komposition einer g-Permutation und einer Potenz π^k der zyklischen Permutation $\pi : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$:

$$\sigma_{k,g} := \pi^k \circ \sigma_g, \tag{3.74}$$

so nennen wir sie eine *zulässige Permutation.*

Lemma 3.15 *Für die eingeführten Permutationen gelten folgende Aussagen:*

1. $ggT(n,g) = 1$.
2. $\pi^g \circ \sigma_g = \sigma_g \circ \pi$.
3. $\sigma_{k,g} \circ \sigma_{l,n} = \sigma_{gl+k,gh}, \quad k,l,g,h \in \mathbb{N}$.

Beweis Zu 1: Permutationen sind bijektiv. Daher muß $\sigma_g(i)$ durch eine vorgegebene Zahl $i \in \{1,\ldots,n\}$ eindeutig bestimmt sein aufgrund von $\sigma_g(i) = gi \pmod n$. Diese Kongruenz ist jedoch aufgrund eines bekannten Satzes der elementaren Zahlentheorie genau dann eindeutig auflösbar, wenn n und g teilerfremd sind.

Zu 2: Offenbar gilt: $\pi^g(i) = i + g \pmod n$. Somit ist: $(\sigma_g \circ \pi)(i) = g(i+1) \pmod n = gi + g \pmod n$. Anderseits: $(\pi^g \circ \sigma_g)(i) = gi + g \pmod n$.

Zu 3: Aufgrund bekannter Identitäten zwischen Kongruenzen gilt: $(\pi^k \circ \sigma_g \circ \pi^l \circ \sigma_h)(i) = (\pi^k \circ \sigma g)(hi + l) \pmod n) = ghi + gl + k \pmod n = (\pi^{gl+k} \circ \sigma_{gh})(i) = \sigma_{gl+k,gh}(i)$. ◇

Durch seine Einschränkungen auf die Elemente der äquidistanten Zerlegung $(0,1) = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ des Einheitsintervalles:

$$I_i := \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right), \; i = 1,\ldots,n, \tag{3.75}$$

ist eine Transformation T definiert:

Definition 3.16 *Durch die stückweise lineare Intervall-Transformation:*

$$\begin{aligned} T &: [0,1] \to [0,1], \\ x \mapsto T|_{I_i}(x) &= Nx + \frac{1}{n}(\sigma_{k,g}(i) - Ni) \pmod 1, \\ N &\in \mathbb{Z}, \; |N| > 1, \end{aligned} \tag{3.76}$$

wird ein dynamisches System $([0,1], \mathcal{B}, T)$ induziert, das aus aus Gründen, die noch deutlich werden, ein Modell zirkulanter Struktur *heißt.*

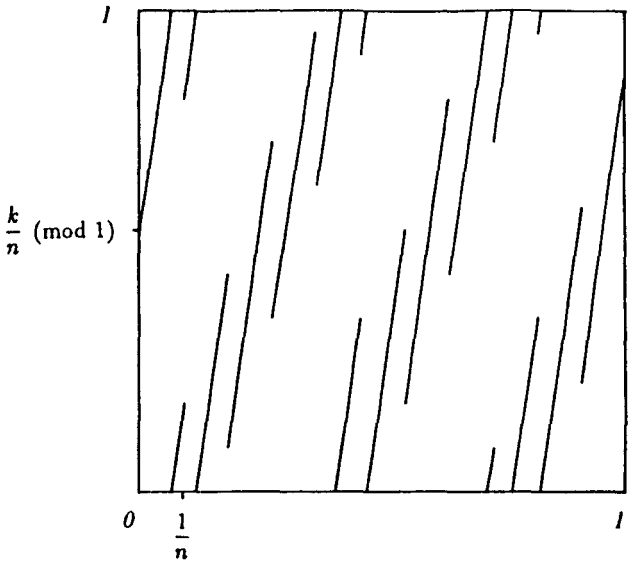


Bild 3.2: Eine spezielle zirkulante Transformation

Die hier untersuchten Beispielsysteme sind also durch vier natürlichen Zahlen n, k, g und N charakterisiert. Ein Beispiel soll die eingeführten Begriffe beleuchten. Es sei $n = 11$, $g = 3$, $k = 2$. Damit lauten die Permutationen σ_3 und $\sigma_{2,3}$:

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 1 & 4 & 7 & 10 & 2 & 5 & 8 & 11 \end{pmatrix}, \tag{3.77}$$

$$\sigma_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 9 & 1 & 4 & 7 & 10 & 2 & 5 & 8 & 11 & 3 & 6 \end{pmatrix}. \tag{3.78}$$

Wird für N die Zahl 7 eingesetzt, so ist eine zirkulante Intervall-Transformation festgelegt, die durch ihr Schaubild (Abbildung 3.2) dargestellt wird.

Die Eigenschaften zulässiger Permutationen, die in die Konstruktion der Transformation T eingehen, haben zur Folge, daß die Sonderfälle $g = N + Mn$, $M \in \mathbf{Z}$, für jede ganze Zahl M auf folgende Vereinfachung führen:

$$x \mapsto T(x) = MNx + \frac{k}{n} \pmod 1. \tag{3.79}$$

Affine Kreis-Transformationen gehen demnach durch Spezialisierung aus der diskutierten Klasse von Modellsystemen hervor.

Liegt diese besondere Situation nicht vor, so bilden die Intervalle I_i die Elemente einer charakterisierenden Zerlegung:

$$\mathcal{C}_i^{min} := \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right), \; i = 1, \ldots, n, \tag{3.80}$$

die sogar minimal ist, da $T\partial\mathcal{C}^{min} \subseteq \partial\mathcal{C}^{min}$ und die Bilder:

$$T(\frac{i}{n}) = \frac{1}{n}\sigma_{k,g}(i), \; i = 1, \ldots, n, \tag{3.81}$$

paarweise verschieden sind.

Der Perron-Frobenius-Operator $\mathcal{L}_T$ einer derartigen Transformation T, formuliert bezüglich der Zerlegung $\mathcal{C}^{min}$, besitzt aufgrund der zuvor erzielten Ergebnisse das Spektrum:

$$\operatorname{spec}\mathcal{L}^{min} = \{\, \lambda \in \mathbf{C} : \lambda = \operatorname{sgn} N \, N^{-n}\mu, \; n \in \mathbf{N}, \; \mu \in \operatorname{spec} M^{\mathcal{C}^{min}} \,\}. \tag{3.82}$$

Den Eigenwerten der Matrix $M^{\mathcal{C}^{min}}$, die entscheidend die spektralen Eigenschaften des Perron-Frobenius-Operator bestimmen, gelten die Überlegungen des folgenden Abschnittes.

3.3.2 Das Spektum zirkulanter Adjazenzmatrizen

Den eingeführten Modellen wohnt eine Symmetrie-Eigenschaft inne, die den Adjazenzmatrizen der Graphen $\mathrm{G}_T(\mathcal{C}^{min})$ eine besondere Struktur verleiht.

Ohne die Allgemeingültigkeit einzuschränken, wenden wir uns zunächst dem Fall $N > 1$ zu. Die Bilder der Intervalle $\mathcal{C}_i^{min} = (\frac{i-1}{n}, \frac{1}{n})$, $i = 1, \ldots, n$, unter der Wirkung von T sind dargestellt durch die Mengen:

$$\begin{aligned} T\mathcal{C}_i^{min} \;=\; & \begin{cases} (\frac{1}{n}\sigma_{k,g}(i-1), \frac{1}{n}\sigma_{k,g}(i)) & \text{falls } \sigma_{k,g}(i-1) < \sigma_{k,g}(i) \\ (\frac{1}{n}\sigma_{k,g}, 1) \cup (0, \frac{1}{n}\sigma_{k,g}(i)) & \text{sonst} \end{cases} \\ & \cup\, (0,1)|_{\lfloor \frac{N}{n} \rfloor}, \end{aligned} \tag{3.83}$$

wobei die Zahl $i \in \{1, \ldots, n\}$ modulo n gerechnet wird und durch das Symbol $(0,1)|_{\lfloor \frac{N}{n} \rfloor}$ angedeutet wird, daß $T\mathcal{C}_i^{min}$ den gesamten Phasenraum genau $\lfloor \frac{N}{n} \rfloor$-mal überdeckt.

Die Elemente der zugehörigen Adjazenzmatrix $M^{\mathcal{C}^{min}}$ können aufgrund der Definition einer g-Permutation unmittelbar abgelesen werden. Als erste Spalte erhält man:

$$\begin{aligned} (M_{i1}^{\mathcal{C}^{min}}) = (\lfloor \tfrac{N}{n} + 1 \rfloor, \ldots, \lfloor \tfrac{N}{n} \rfloor + 1, \lfloor \tfrac{N}{n} \rfloor, \ldots, \\ \lfloor \tfrac{N}{n} \rfloor, \lfloor \tfrac{N}{n} \rfloor + 1, \ldots, \lfloor \tfrac{N}{n} + 1 \rfloor)^{Tr}. \end{aligned} \tag{3.84}$$

($\sigma_{k,g}(1) = k + N \pmod 1$ -teStelle; $\sigma_{k,g}(n) = k \pmod 1$ -teStelle)

Die übrigen Spalten der Matrix gehen aufgrund der Definition der Permutation $\sigma_{k,g}$ aus $(M_{i1}^{c^{min}})$ hervor vermöge der Rekursion:

$$M_{i,j+1}^{c^{min}} = M_{i+g,j}^{c^{min}} \text{ (alle Indizes modulo n).} \tag{3.85}$$

Matrizen, deren Spalten zueinander in diesem Verhältnis stehen, führen in der mathematischen Literatur den Namen *g-zirkulante Matrizen* [55]. Sie sind festgelegt durch die Vorgabe einer einzigen Spalte.

Definition 3.17 *Eine Matrix $A = (a_{ij})$ der Dimension n heißt* g-Zirkulant*:*

$$A = g\text{-}circ(a_1, \ldots, a_n), \quad a_i = a_{i1}, \; i = 1, \ldots, n, \tag{3.86}$$

wenn die Relation $a_{i,j+1} = a_{i+g,j}$ (alle Indizes modulo n) für ihre Elemente erfüllt ist.

Der Aussage des Lemmas 3.15, das erlaubten Permutationen die Symmetrierelation $\pi^g \circ \sigma_{k,g} = \sigma_{k,g} \circ \pi$ zuschreibt, entspricht bei zirkulanten Matrizen die Eigenschaft:

Lemma 3.18 *A ist ein g-Zirkulant genau dann, wenn gilt:*

$$P^g A = AP, \tag{3.87}$$

wobei P die der zyklischen Permutation π zugeordnete Permutationsmatrix darstellt.

Durch einen Rückgriff auf die Definition von Permutationsmatrizen folgt der Beweis unmittelbar.

Die Symmetrieeigenschaft 3.83 hat eine wichtige Konsequenz: Die Spektren g-zirkulanter Matrizen können durch explizite Formeln aus den Elementen einer ihrer Spalten berechnet werden. Zur Formulierung dieses Zusammenhanges benötigen wir den Begriff des *repräsentierenden Polynoms*:

$$P_A(z) = a_1 + a_2 z + \ldots + a_n z^{n-1} \tag{3.88}$$

einer g-zirkulanten Matrix $A = \text{g-circ}(a_1, \ldots, a_n)$ [55]. Ferner sei $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ eine Permutation mit der Eigenschaft $\pi^g \circ \sigma = \sigma \circ \pi$. Sie habe m Zyklen der Länge p_i, $i = 1, \ldots, m$; durch h_i sei ein beliebiges Element des i-ten Zyklus bezeichnet. Das Symbol ω stelle die n-te Einheitswurzel, $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, dar.

In einer unseren Bedürfnissen angepaßten Formulierung zitieren wir ein bekanntes Theorem über zirkulante Matrizen [56]:

Satz 3.19 (Ablov,Brenner,1963) *Ein g-Zirkulant besitzt höchstens m ihrem Absolutbetrage nach verschiedene Eigenwerte, die gegeben sind durch:*

$$\lambda(i,j) = \omega^j \prod_{k=1}^{p_i} |P_A(\omega^{hg^k})|^{\frac{1}{p_i}}, \tag{3.89}$$
$$i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, p_i.$$

Wir fassen die bisher erzielten Ergebnisse in einem Satz zusammen:

Satz 3.20 *Der Graph* $G_T(C^{cmin})$ *der minimalen charakterisierenden Zerlegung einer Intervall-Abbildung* T *zirkulanter Struktur, gekennzeichnet durch die vier natürlichen Zahlen* N, g, n *und* k*, besitzt die* g*-zirkulante Adjazenzmatrix:*

$$M^{C^{cmin}} = g\text{-}circ(\underbrace{\lfloor\tfrac{N}{n}\rfloor+1,\ldots,\lfloor\tfrac{N}{n}\rfloor+1}_{k+n \pmod n\text{-te Stelle}},\lfloor\tfrac{N}{n}\rfloor,\ldots,\underbrace{\lfloor\tfrac{N}{n}\rfloor,\lfloor\tfrac{N}{n}\rfloor+1,\ldots,\lfloor\tfrac{N}{n}\rfloor+1}_{k \pmod n\text{-te Stelle}}). \tag{3.90}$$

Über die interessanten Eigenschaften von Graphen mit g-zirkulanten Adjazenzmatrizen unterrichten die Referenzen [57,58].

Die Matrix $M^{C^{cmin}}$ kann aufgefaßt werden als die Summe:

$$\begin{aligned} M^{C^{cmin}} &= \text{g-circ}(1,\ldots,1,0,\ldots,0,1,\ldots,1) + \lfloor\frac{N}{n}\rfloor J \qquad (3.91)\\ &\quad \text{mit } J_{ij}=1 \text{ für alle } i,j=1,\ldots,n,\\ &= K + \lfloor\frac{N}{n}\rfloor J. \qquad (3.92)\end{aligned}$$

Offenbar sind die Spaltensummen der Matrix K, $\sum_i K_{ij} = N \pmod n$ für alle $j = 1,\ldots,n$ gleich. Da $\sigma_{k,g}$ eine Permutation ist oder äquivalent hierzu die Zahl g bezüglich n prim ist, gilt auch für ihre Zeilensummen $\sum_j K_{ij} = N \pmod n$ für alle $i = 1,\ldots,n$. Damit ist $(N \pmod n))^{-1}K$ zeilen- und spaltenstochastisch und der Vektor $e = (1,\ldots,1)$, N-Komponenten, Rechts- und Linkseigenvektor der Matrix K:

$$e^{Tr}K = e^{Tr}N \pmod n, \quad Ke = N \pmod n e. \tag{3.93}$$

Folglich ist auch $M^{C^{cmin}}$ zeilen- und spaltenstochastisch mit dem Spektralradius $\varrho(M^{C^{cmin}}) = N$. Aufgrund von 3.92 kommutieren die Matrizen K und J; sie sind also simultan diagonalisierbar. Die Matrix J besitzt nur einen einzigen von Null verschiedenen Eigenwert $\lambda = \lfloor\frac{N}{n}\rfloor$. Somit ist $\varrho(M^{C^{cmin}})$ Eigenwert zum Eigenvektor e der Adjazenzmatrix $M^{C^{cmin}}$; das übrige Spektrum ist allein von der Matrix K bestimmt.
Das repräsentierende Polynom an der Stelle ω^h der Matrix K lautet:

$$\begin{aligned} P_K(\omega^h) &= \sum_{j=0}^{\bar N-1}\omega^{k+jh},\ \bar N = N \pmod n, \qquad (3.94)\\ &= \sum_{j=0}^{\bar N-1}\cos(\tfrac{2\pi}{n}(k+jh)) + i\sum_{j=0}^{\bar N-1}\sin(\tfrac{2\pi}{n}(k+jh)) \qquad (3.95)\\ &= \frac{\cos(\frac{\pi}{n}(h(\bar N-1)+2k))\sin(\frac{\pi}{n}\bar N h)}{\sin(\frac{\pi}{n}h)}\\ &\quad + i\,\frac{\sin(\frac{\pi}{n}(h(\bar N-1)+2k))\sin(\frac{\pi}{n}\bar N h)}{\sin(\frac{\pi}{n}h)} \qquad (3.96)\end{aligned}$$

aufgrund der Identitäten:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(x+ky) = \frac{\cos(x+\frac{ny}{2})\sin(\frac{n+1}{2}y)}{\sin(\frac{y}{2})} \tag{3.97}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(x+ky) = \frac{\sin(x+\frac{ny}{2})\sin(\frac{n+1}{2}y)}{\sin(\frac{y}{2})}. \tag{3.98}$$

In Polardarstellung hat $P_K(\omega^h)$ die Gestalt:

$$P_K(\omega^h) = \left|\frac{\sin(\frac{\pi}{n}\bar{N}h)}{\sin(\frac{\pi}{n}h)}\right| \exp(\frac{i\pi}{n}(\bar{N}+2k-1)h) \tag{3.99}$$

unter Verwendung elementarer trigonometrischer Umformungen.

Gestützt auf Satz 3.19 kann nun das Spektrum der Matrix $M^{c^{min}}$ explizit dargestellt werden.

Satz 3.21 *Die Adjazenzmatrix $M^{c^{min}}$ einer Intervall-Abbildung zirkulanter Struktur ist eine stochastische Matrix mit dem Spektralradius $\varrho(M^{c^{min}}) = |N|$. Die von $|N|$ verschiedenen Eigenwerte sind gegeben durch:*

$$\lambda(q,r) = r(q)e^{i\phi(q,r)}, \quad q = 1,\ldots,m;\ r = 1,\ldots,p_q \tag{3.100}$$

$$\textit{mit} \quad r(q) = \prod_{j=0}^{p_q-1} \left|\frac{\sin(\frac{\pi}{n}\bar{N}h_q g^j)}{\sin(\frac{\pi}{n}h_q g^j)}\right|^{\frac{1}{p_q}} \tag{3.101}$$

$$\textit{und} \quad \phi(q,r) = \frac{\pi}{p_q}(2r + (\bar{N}+2k-1)h_q\frac{g^{p_q}-1}{g-1}). \tag{3.102}$$

Hierbei ist $h_q \neq n$ ein beliebig, aber fest gewähltes Element des q-ten Zyklus der Permutation $\sigma_{k,g}$.

Einige Charakteristika der erzielten Ergebnisse seien betont:

- Die Stochastizität der Matrix $M^{c^{min}}$ bedingt, daß das Lebesgue-Maß das absolut stetige invariante Maß,

$$dm_T(x) = dx, \tag{3.103}$$

  dynamischer Systeme zirkulanter Struktur ist.

- Die Resultate können sinngemäß auch auf negative ganze Zahlen N mit $N < -1$ übertragen werden.

- Wie aus Abschnitt 3.1 hervorgeht, ist der Logarithmus des Spektralradius $\varrho(M^{c^{min}}) = |N|$ mit der Kolmogorov-Sinai-Entropie $h_{KS} = \log|N|$ des zugrundeliegenden Systems identisch.

- Alle übrigen Eigenwerte sind betragsmäßig kleiner als $|N|$ und liegen in der komplexen Zahlenebene auf Kreisen, deren Radien unabhängig sind von der Wahl der natürlichen Zahl k, die eine der Bestimmungsstücke zirkulanter Intervall-Abbildungen ist.

- Als eindeutig bestimmte, von der konkret getroffenen Wahl eines Raumes natürlicher Observablen unabhängige Relaxationszeit τ ergibt sich der Ausdruck:

$$1/\tau = \max\{-\log(\max_{i=1,\ldots,m-1} \frac{r(i)}{|N|}), \log|N|\}. \tag{3.104}$$

  Offenbar hängt die Relaxationszeit in der Regel auf recht komplizierte Weise von den Größen N, n, und g ab, die ein zirkulantes dynamisches System definieren. Ein erkennbarer Zusammenhang mit der Kolmogorov-Sinai-Entropie des Systems besteht im allgemeinen nicht.

- Es wird auf drei vereinfachende Spezialisierungen hingewiesen:

  1. $g = 1$: $\sigma_{k,g} = \pi^k$ ist hier also eine zyklische Permutation.
     Es gilt: $\operatorname{spec} M^{C^{min}} = \{|N|, r(j)e^{i\phi}\}$, $j = 1, \ldots, n-1$, mit:

$$r(j) = \left|\frac{\sin(\frac{\pi}{n}\bar{N}j)}{\sin(\frac{\pi}{n}j)}\right|. \tag{3.105}$$

  2. $N = g^m$, $m \in \mathbf{Z}$, $m \neq 0$: Hier gilt: $1/\tau = \log|N|$ und damit zugleich auch die Relation: $\tau h_{KS} = 1$.
  3. $N = g + nm$: Der Fall affiner Kreisabbildungen.

3.3.3 Einige Beispiele

Dieser Abschnitt behandelt einige Beispiele dynamischer Systeme mit zirkulanter Struktur; sie illustrieren die zuvor dargelegte allgemeine Situation.

Beispiel 1: Wir wählen das Tupel ($n = 6, k = 0, g = 5$). Die diesen Zahlen korrespondierende Permutation $\sigma_{k,g} = \sigma_5$ lautet:

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.106}$$

Offenbar besteht σ_5 aus den vier Zyklen:

$$\pi_\sigma^{(1)} : (0) \mapsto (0), \quad \pi_\sigma^{(2)} : (1,5) \mapsto (5,1),$$
$$\pi_\sigma^{(3)} : (2,4) \mapsto (4,2), \text{ und } \pi_\sigma^{(4)} : (3) \mapsto (3). \tag{3.107}$$

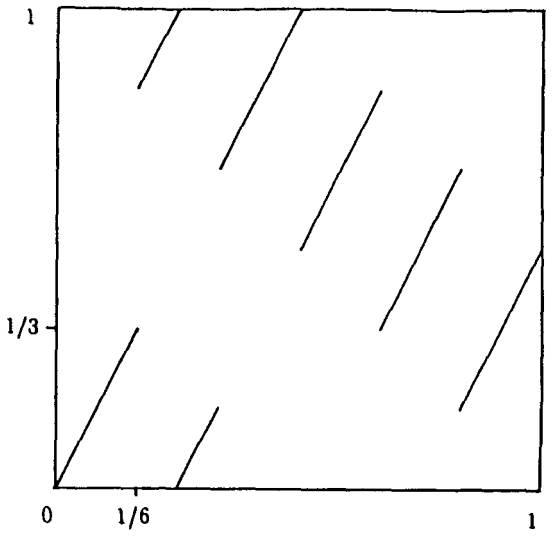


Bild 3.3: $(n = 6, k = 0, g = 5)$ und $N = 4$

Durch die Setzung $N = 4$ ist unter Verwendung von σ_5 eine Intervall-Transformation T festgelegt.

Die Intervalle $(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N})$, $i = 1, \ldots, n$, bilden die Elemente der minimalen charakterisierenden Zerlegung $\mathcal{C}^{min}$ des dynamischen Systems $([0,1], \mathcal{B}, T)$. Die Adjazenzmatrix $M^{\mathcal{C}^{min}}$ des Graphen $G_T(\mathcal{C}^{min})$ hat in diesem Beispiel die Gestalt:

$$M^{\mathcal{C}^{min}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.108}$$

die dem Schaubild der Intervall-Transformation entnommen werden kann (Abbildung 3.3). Die Zyklen $\pi_\sigma^{(1)}$ und $\pi_\sigma^{(4)}$ führen aufgrund des Satzes 3.21 auf die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 0$ der Matrix $M^{\mathcal{C}^{min}}$. Die beiden verbleibenden Zyklen tragen wie folgt zum Spektrum bei:

$$\pi_\sigma^{(2)}: \quad \lambda_{3/4} = \left| \frac{\sin(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{5\pi}{3})}{\sin(\frac{\pi}{6})\sin(\frac{5\pi}{6})} \right|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{3\pi j}{2}} = \pm\sqrt{3}, \; j = 0, 1, \tag{3.109}$$

$$\pi_\sigma^{(3)}: \quad \lambda_{5/6} = \pm|4\cos(\tfrac{\pi}{3})\cos(\tfrac{2\pi}{3})| = \pm 1. \tag{3.110}$$

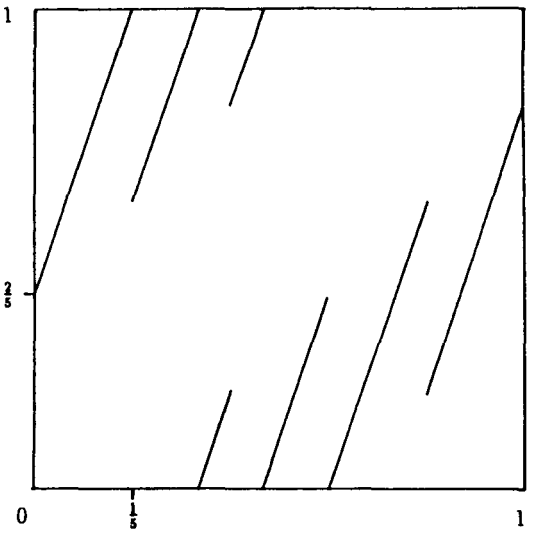


Bild 3.4: $(n = 5, k = 2, g = 1)$ und $N = 3$

Damit ist das Spektrum der Matrix $M^{C^{min}}$ gegeben durch:

$$\text{spec}M^{C^{min}} = \{2, \pm\sqrt{3}, \pm 1, 0\}. \tag{3.111}$$

Insbesondere ist auch die Relaxationszeit τ des diskutierten Beispiels bekannt und dargestellt durch:

$$1/\tau = -\log\sqrt{3}/2. \tag{3.112}$$

Offenbar liegt hier ein einfacher Zusammenhang zwischen Relaxationszeit und Kolmogorov-Sinai-Entropie h_{KS} des Systems von der Art $\tau h_{KS} = 1$ nicht vor.

Beispiel 2: Für die spezielle Wahl $(n = 5,\ k = 2,\ g = 1)$ der Bestimmungsstücke einer zirkulanten Intervallabbildung ist die Permutation $\sigma_{2,1} = \pi^2$ zyklisch:

$$\sigma_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{3.113}$$

Die Adjazenzmatrix der minimalen charakterisierenden Zerlegung des Modells ist in diesem Falle (Abbildung 3.4) gegeben durch:

$$M^{C^{min}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.114}$$

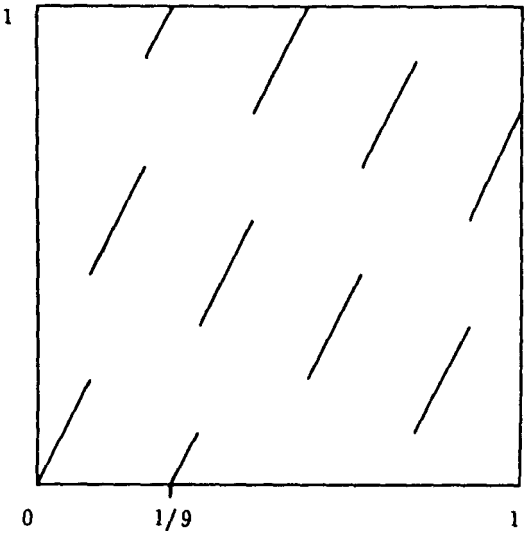


Bild 3.5: $(n = 9, k = 0, g = 4)$ und $N = 2$

$M^{C^{min}}$ ist eine zirkulante Matrix im üblichen Sinne. Ihr Spektrum ergibt sich mit Hilfe des Satzes 3.21. Das Produkt über die Zyklen von $\sigma_{2,1}$ in der Gleichung 3.101 reduziert sich auf einen einzigen Faktor. Man erhält:

$$\begin{aligned} \text{spec}M^{C^{min}} = \{3, \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})e^{\frac{2\pi i}{5}2}, \tfrac{1}{2}(+\sqrt{5})e^{\frac{2\pi i}{5}3}, \\ \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})e^{\frac{2\pi i}{5}}, \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})e^{\frac{2\pi i}{5}4}\}. \end{aligned} \tag{3.115}$$

Die Relaxationszeit dieses Beispielsystems kann demnach durch das Verhältnis des *goldenen Schnittes* $\chi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ ausgedrückt werden:

$$1/\tau = -\log \chi/3. \tag{3.116}$$

Beispiel 3: Im letzten Beispiel ist die Zahl g eine Potenz von N. Wir wählen den Fall $(n = 9,\ g = 4,\ k = 0)$ und $N = 2$. Die Permutation:

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 8 & 2 & 9 & 6 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 8 & 2 & 9 & 6 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \tag{3.117}$$

führt auf eine Transformation, die in Abbildung 3.5 dargestellt ist. Wie aus dem Schaubild abzulesen ist, lautet die Adjazenzmatrix $M^{C^{min}}$ des Graphen

$G_T(C^{min})$ der minimalen charakterisierenden Zerlegung C^{min} des Systems:

$$M^{C^{min}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.118}$$

Offenbar sind nach Gleichung 3.101 die von $\lambda_0 = 2$ verschiedenen Eigenwerte der Matrix $M^{C^{min}}$ ihrem Absolutbetrage nach gleich eins. Das Spektrum von $M^{C^{min}}$ ergibt sich als die Menge:

$$\text{spec}\, M^{C^{min}} = \{\, 2,\, 1|_3,\, -1,\, e^{\frac{2\pi i}{3}}|_2,\, e^{\frac{2\pi i 2}{3}}|_2 \,\} \tag{3.119}$$

mit den angegebenen Entartungsgraden. In dieser speziellen Situation gilt die Relation $\tau h_{KS} = 1$.

Kapitel 4

Mehrfach relaxierende Systeme, Phasenübergänge

Werden die strengen Bedingungen gelockert, denen die Modellsysteme unterworfen waren, die im letzten Kapitel untersucht wurden, so eröffnet das Studium der Relaxationseigenschaften dynamischer Systeme neuartige Perspektiven. Anhand von Beispielen werden typische Züge faßbar, die nach unserer Auffassung die generische Situation umfassenderer Klassen dynamischer Systeme kennzeichnen:

- Die Relaxationszeit hängt ab von der jeweils konkret getroffenen Wahl an sich gleichberechtigter Räume natürlicher Observablen. Damit erfährt die Bedeutung der Rolle der Relaxationszeit als eine ein System wesentlich charakterisierende Größe eine gewisse Einschränkung.
- In Familien dynamischer Systeme, die in glatter Weise von Kontrollparameteren abhängig sind, können Relaxationszeiten Singularitäten in ihrer funktionalen Abhängigkeit von den externen Parametern aufweisen, die analog zu den Begriffsbildungen der Thermodynamik als 'Phasenübergänge' interpretiert werden können.
- Ihre Gültigkeit verliert die Aussage, daß einem System auf natürliche Weise ein Graph zugeordnet werden kann, der alle wesentlichen Informationen über die Spektren der Perron-Frobenius-Operatoren enthält.

Das Relaxationsverhalten bei Familien dynamischer Systeme hat in der Literatur bereits mehrfach Interesse gefunden [59,60,61]. Die Besonderheit der hier untersuchten Modelle besteht darin, daß sie für jeden Parameterwert endliche charakterisierende Zerlegungen besitzen.

4.1 Eine einparametrige Familie dynamischer Systeme

Eine spezielle einparametrige Familie von Intervalltransformationen bildet den Ausgangspunkt der nachfolgenden Überlegungen. Das unterscheidende Merkmal, das die im folgenden behandelten Systeme von der im Kapitel 3 geschilderten Situation abhebt, ist die nur noch lokal vorliegende Konstanz der Ableitung der zugrundeliegenden Intervall-Abbildungen.

Als Glied der Familie erscheint bei einem speziellen Parameterwert die sogenannte *Zelt-Abbildung*, die zusammen mit der zu ihr konjugierten *Chebysheff-Transformation* $x \mapsto 2x^2 - 1$ ein prominentes Standardbeispiel der Ergodentheorie darstellt [62].

Für drei verschiedene, speziell herausgegriffene Räume von Observablen werden die Relaxationszeiten als Funktionen des Kontrollparameters berechnet. Wie sich zeigt, sind diese funktionalen Zusammenhänge für jede Klasse von Observablen von unterschiedlicher Natur.

4.1.1 Das Modell und seine Eigenschaften

Eine einparametrige Familie von Intervall-Abbildungen sei definiert durch:

$$T_\mu : [0,1] \to [0,1],$$
$$x \mapsto T_\mu(x) = \begin{cases} \frac{x}{\mu} & \text{für } x \in [0,\mu) \\ \frac{-x}{1-\mu} + \frac{1}{1-\mu} & \text{für } x \in [\mu,1]. \end{cases} \tag{4.1}$$

Der reelle Parameter μ kann dabei in stetig differenzierbarer Weise im Intervall $(0,1)$ variiert werden. Bei dem Parameterwert $\mu = \frac{1}{2}$ tritt die Zeltabbildung auf.

Wir berechnen den Absolutbetrag des zweithöchsten Eigenwertes des Perron-Frobenius-Operators $\mathcal{L}_\mu$ des Modells, dem zunächst die minimale charakterisierende Zerlegung $\mathcal{C}^{min}$ des Systems, sodann zwei spezielle Verfeinerungen von $\mathcal{C}^{min}$ zugrundegelegt werden.

Offenbar ist $\mathcal{C}^{min}$ für die obige Familie trivial und unabhängig von der Wahl des Parameters μ gegeben durch: $\mathcal{C}^{min} = (0,1)$. Ein Fixpunkt:

$$T_\mu(\tfrac{1}{2-\mu}) = \tfrac{1}{2-\mu} \tag{4.2}$$

und eine periodische Bahn der Periode 2:

$$T_\mu(\tfrac{\mu}{1+\mu(1-\mu)}) = \tfrac{1}{1+\mu(1-\mu)}, \quad T_\mu(\tfrac{1}{1+\mu(1-\mu)}) = \tfrac{\mu}{1+\mu(1-\mu)} \tag{4.3}$$

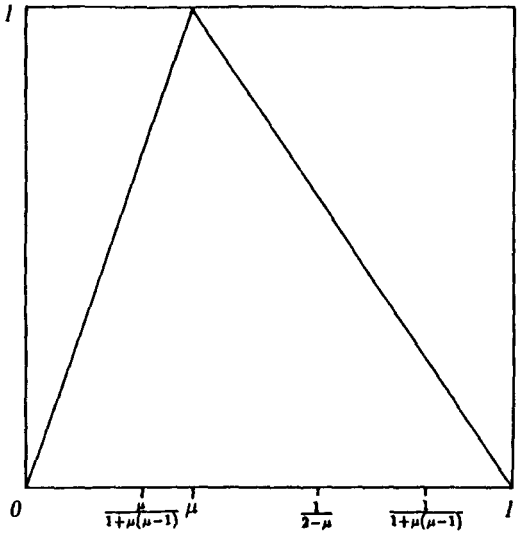


Bild 4.1: Die Transformation T_μ für $\mu = 1/3$

generieren zwei weitere charakterisierende Zerlegungen des Systems:

$$C^1 = \{(0, \tfrac{1}{2-\mu}), (\tfrac{1}{2-\mu}, 1)\}, \tag{4.4}$$

$$C^2 = \{(0, \tfrac{\mu}{1+\mu(1-\mu)}), (\tfrac{\mu}{1+\mu(1-\mu)}, \tfrac{1}{1+\mu(1-\mu)}), (\tfrac{1}{1+\mu(1-\mu)}, 1)\}. \tag{4.5}$$

Wie man sich vergewissert, gilt für alle Parameterwerte $\mu \in (0,1)$:

$$0 < \tfrac{\mu}{1+\mu(\mu-1)} < \mu < \tfrac{1}{1+\mu(\mu-1)} < 1. \tag{4.6}$$

Der Perron-Frobenius-Operator des beschriebenen Modells, wirkend in den verschiedenen, den Zerlegungen C^{min}, C^1 und C^2 zugeordneten Räumen lokal analytischer Funktionen, kann nun nach der allgemeinen Konstruktionsvorschrift des Kapitels 2 dargestellt werden als:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu^0 \;:\; & B(D) \to B(D), \\ & (\mathcal{L}_\mu^0 f)(x) = \mu f(\mu x) + (1-\mu) f((\mu-1)x + 1), \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu^1 \;:\; & B(I_{C^1}, D) \to B(I_{C^1}, D), \\ & (\mathcal{L}_\mu^1 f)(1,x) = \mu f(1,\mu x) + (1-\mu) f(2,(\mu-1)x+1) \\ & (\mathcal{L}_\mu^1 f)(2,x) = \mu f(1,\mu x) + (1-\mu) f(1,(\mu-1)x+1), \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu^2 \;:\; & B(I_{C^2}, D) \to B(I_{C^2}, D), \\ & (\mathcal{L}_\mu^2 f)(1,x) = \mu f(1,\mu x) + (1-\mu) f(3,(\mu-1)x+1) \\ & (\mathcal{L}_\mu^2 f)(2,x) = \mu f(1,\mu x) + (1-\mu) f(2,(\mu-1)x+1) \\ & (\mathcal{L}_\mu^2 f)(3,x) = \mu f(2,\mu x) + (1-\mu) f(2,(\mu-1)x+1). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Offenbar ist die konstante Funktion Eigenfunktion von $\mathcal{L}_\mu^0$ zum Eigenwert $\lambda = 1$. Demnach ist das Lebesgue-Maß das absolut stetige invariante Maß der Familie T_μ. Die Kolmogorov-Sinai-Entropie des Modells ist bekannt [13] und wurde berechnet zu:

$$-h_{KS}(T_\mu) = (1-\mu)\log(1-\mu) + \mu\log\mu. \tag{4.10}$$

4.1.2 Relaxationszeiten und Wahl der Observablen

Räume polynomialer Funktionen bleiben invariant unter der Wirkung des Perron-Frobenius-Operators des betrachteten Systems in seinen verschiedenen Darstellungen. Daher ist es möglich, die Operatoren $\mathcal{L}_\mu^0$, $\mathcal{L}_\mu^1$ und $\mathcal{L}_\mu^2$ durch Matrizen zu beschreiben.

Wählen wir völlig analog zur Vorgehensweise des Abschnittes 3.1.1 eine geeignete Basis im Vektorraum polynomialer Funktionen, so erscheinen die Operatoren $\mathcal{L}_\mu^i$, $i = 0, 1, 2$, als blocktrianguläre Matrizen. Ihre i-dimensionalen Diagonalblöcke $M_\mu^{(i,n)}$ können aus den Darstellungen (4.7)–(4.9) unmittelbar abgelesen werden:

$$M_\mu^{(1,n)} = \mu^{n+1} + (-1)^n(1-\mu)^{n+1}, \tag{4.11}$$

$$M_\mu^{(2,n)} = \begin{pmatrix} \mu^{n+1} & (-1)^n(1-\mu)^{n+1} \\ \mu^{n+1} + (-1)^n(1-\mu)^{n+1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

$$M_\mu^{(3,n)} = \begin{pmatrix} \mu^{n+1} & 0 & (-1)^n(1-\mu)^{n+1} \\ \mu^{n+1} & (-1)^n(1-\mu)^{n+1} & 0 \\ 0 & \mu^{n+1} + (-1)^n(1-\mu)^{n+1} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

mit $n = 0, 1, 2, \ldots$. Das Spektrum des Perron-Frobenius-Operators $\mathcal{L}_\mu^i$ ist demnach darzustellen durch:

$$\operatorname{spec}\mathcal{L}_\mu^i = \bigcup_{n=0}^{\infty} \operatorname{spec} M_\mu^{(i,n)}. \tag{4.14}$$

Die Eigenwerte des Perron-Frobenius-Operators, formuliert bezüglich einer charakterisierenden Zerlegung, sind also im Unterschied zu der Situation bei Intervall-Abbildungen konstanter Ableitung nicht mehr durch eine einzige Matrix, die Adjazenzmatrix des Graphen $G_T(\mathcal{C})$, festgelegt. Im allgemeinen gehen die ein System kennzeichnenden Größen und die Eigenschaften der charakterisierenden Zerlegungen auf verhältnismäßig komplizierte Weise in die Gestalt der Spektren der Perron-Frobenius-Operatoren ein.

Die niedrige Dimension der Matrizen $M_\mu^{(i,n)}$ erlaubt, ihre Eigenwerte explizit zu berechnen. Man erhält die charakteristischen Polynome sogar in faktorisierter Form:

$$\begin{aligned} char_{M^{(i,n)}}(\lambda) = {} & (\lambda - \mu^{n+1} - (-1)^n(1-\mu)^{n+1}) \\ & (\lambda + (-1)^n(1-\mu)^{n+1}) \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$char_{M(2,n)}(\lambda) = (\lambda - \mu^{n+1} - (-1)^n(1-\mu)^{n+1}) \\ (\lambda^2 + (-1)^n\mu^{n+1}(1-\mu)^{n+1}), \quad (4.16)$$

da aufgrund von Lemma 2.8 die Menge:

$$\operatorname{spec}\mathcal{L}_\mu^0 = \{\,\mu^{n+1} + (-1)^n(1-\mu)^{n+1}\,\}_{n=0}^{\infty} \quad (4.17)$$

in den Spektren der Operatoren $\mathcal{L}_\mu^1$ und $\mathcal{L}_\mu^2$ enthalten sein muß.

Die Absolutbeträge der zweitgrößten Eigenwerte der Perron-Frobenius-Operatoren $\mathcal{L}_\mu^i$, ihre subdominanten Spektralradien $\xi(\mathcal{L}_\mu^i)$, können nun in geschlossenen analytischen Formeln dargestellt werden, die durch die Abbildungen 4.2–4.4 veranschaulicht werden. Man erhält die Funktionen:

$$\xi(\mathcal{L}_\mu^0) = \max\{|2\mu - 1|, 3\mu^2 - 3\mu + 1\}, \quad (4.18)$$

$$1/\tau^{C^{min}} = -\log\xi(\mathcal{L}_\mu^0),$$

$$\xi(\mathcal{L}_\mu^1) = \max\{1-\mu, 2\mu - 1\}, \quad (4.19)$$

$$1/\tau^{C^1} = -\log\xi(\mathcal{L}_\mu^1),$$

$$\xi(\mathcal{L}_\mu^2) = \max\{|2\mu - 1|, \sqrt{\mu(1-\mu)}\}, \quad (4.20)$$

$$1/\tau^{C^2} = -\log\xi(\mathcal{L}_\mu^2).$$

Der Charakter des untersuchten Modells als eines dynamischen Systems mehrfachen Relaxationsverhaltens ist unmittelbar einsichtig. Offenbar weisen die Relaxationszeiten in ihrer funktionalen Abhängigkeit von dem Kontrollparameter μ Singularitäten auf. Ihrer Diskussion widmet sich der anschließende Abschnitt.

4.2 Phasenübergänge in einer zweiparametrigen Familie

Es wird eine zweiparametrige Familie von Intervall-Abbildungen vorgestellt. Sie enthält die im vorangehenden Abschnitt betrachteten Transformationen als einparametrige Teilfamilie. Eine einparametrige Familie von Intervall-Abbildungen, die in einem anderen Zusammenhang in der Referenz [63] eingeführt wurde, ist mit dem hier untersuchten Modell verwandt.

Anhand der Diskussion dieses Beispiels wird deutlich, daß Relaxationszeiten bei dynamischen Systemen, die auf glatte Weise von externen Parametern abhängen, keineswegs auch glatte Funktionen der Kontrollparameter sein müssen; vielmehr können Singularitäten auftreten, unstetige Ableitungen 1.Ordnung nach den Systemparametern, die wir in Analogie zur Thermodynamik als *Phasenübergänge*

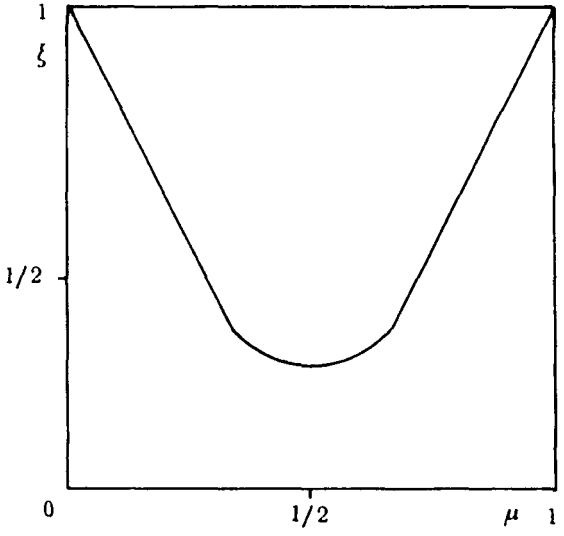


Bild 4.2: Die Größe $\xi(\mathcal{L}_\mu^0)$

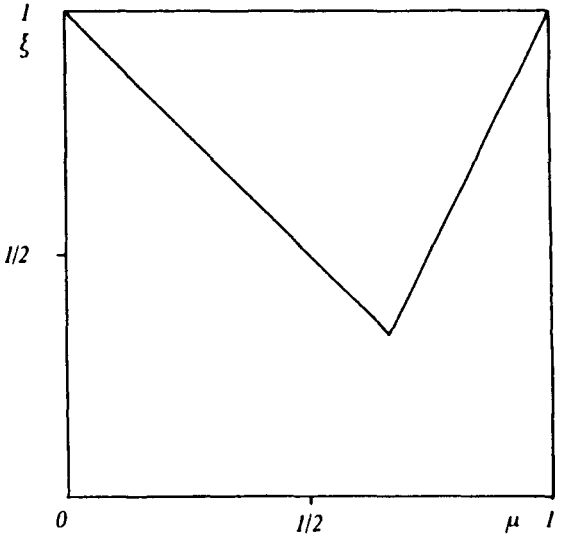


Bild 4.3: Die Größe $\xi(\mathcal{L}_\mu^1)$

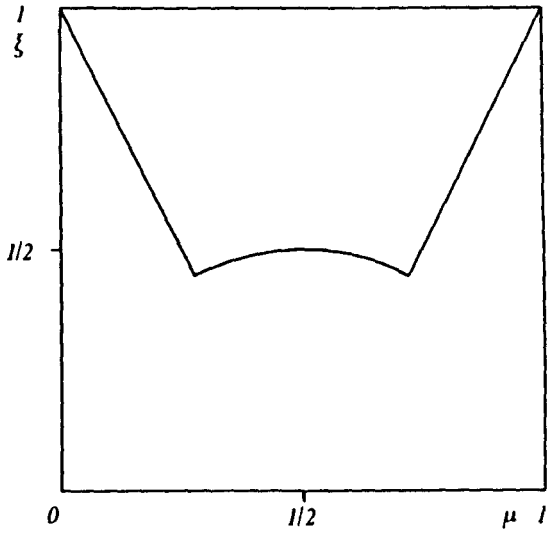


Bild 4.4: Die Größe $\xi(\mathcal{L}^2_\mu)$

1.Ordnung interpretieren. Erneut zeigt sich, daß Relaxationszeiten auf sehr komplexe und keineswegs unmittelbar zu durchschauende Weise mit den Bestimmungsstücken des zugrundeliegenden Systems verknüpft sind.

Das Modell erlaubt ferner die explizite Berechnung von topologischer und Kolmogorov-Sinai-Entropie sowie des Ljapunov-Exponenten. Diese die Dynamik eines Systems kennzeichnenden Größen erweisen sich als unabhängig von der Relaxationszeit.

4.2.1 Das Modell und sein Phasendiagramm

Ein von zwei reellen externen Parametern abhängiges dynamisches System ist definiert durch die stückweise lineare Intervallabbildung:

$$T_{\mu,\nu} : [0,1] \to [0,1],$$

$$x \mapsto T_{\mu,\nu}(x) = \begin{cases} \frac{x}{\mu+\nu} & \text{für } 0 \le x < \mu+\nu \\ \frac{\nu-\mu}{1/2-\mu}x + 1 + \frac{\mu^2-\nu^2}{1/2-\mu} & \text{für } \mu+\nu \le x < \nu+\frac{1}{2} \\ \frac{\mu-\nu}{1/2-\mu}x + 1 + \frac{\mu(\mu-1)-\nu(\nu-1)}{1/2-\mu} & \text{für } \nu+\frac{1}{2} \le x < \nu-\mu+1 \\ \frac{x}{\nu-\mu} + \frac{1}{\mu-\nu} & \text{für } \nu-\mu+1 \le x \le 1. \end{cases} \tag{4.21}$$

Die Parameter μ und ν des Systems entstammen dabei dem Parameterraum:

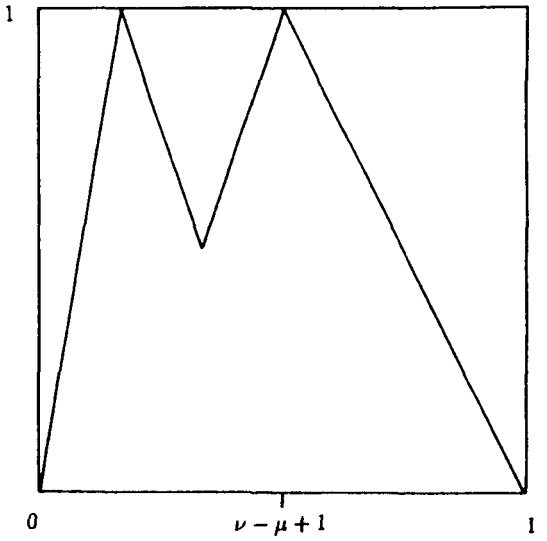


Bild 4.5: Die Transformation $T_{\mu,\nu}$ für $\mu = 1/3$, $\nu = -1/6$

$$\mathbf{P} = \{(\mu,\nu) : \nu \in (-\tfrac{1}{2}, 0),\ \mu \in [\tfrac{1}{4} + \tfrac{\nu}{2}, \tfrac{1}{2}]\}. \tag{4.22}$$

Für alle Elemente aus $\mathbf{P}$ stellt $T_{\mu,\nu}$ eine expansive, den Bedingungen des Kapitels 2 genügende Transformation des Einheitsintervalles dar.

Läßt man μ gegen $\frac{1}{2}$ gehen und setzt für den verbleibenden Parameter $\nu = \mu^* - \frac{1}{2}$, so erhält man die Familie T_{μ^*} des vorangegangenen Abschnittes.

Wie man der Abbildung 4.5 entnimmt, ist die minimale charakterisierende Zerlegung des Models für jedes Element (μ,ν) des Parameterraumes gegeben durch:

$$C^{min} = \{(0, \nu - \mu + 1), (\nu - \mu + 1, 1)\}. \tag{4.23}$$

Der Perron-Frobenius-Operator $\mathcal{L}_T^0$ des Systems, der dieser Zerlegung entspricht, besitzt die Darstellung:

$$\mathcal{L}_T^0 : B(I_{C^{min}}, D) \to B(I_{C^{min}}, D),$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_T^0 f)(1,x) &= (\mu+\nu) f(1,(\mu+\nu)x) + (\mu-\nu) f(2,(\nu-\mu)(x-\tfrac{1}{\mu-\nu})) \\
(\mathcal{L}_T^0 f)(2,x) &= (\mu+\nu) f(1,(\mu+\nu)x) + (\tfrac{1/2-\mu}{\mu-\nu})(f(1,\tfrac{\mu-1/2}{\mu-\nu}(x-1-\tfrac{\mu^2-\nu^2}{1/2-\mu})) \\
&\quad + f(1,\tfrac{1/2-\mu}{\mu-\nu}(x-1-\tfrac{\mu(\mu-1)-\nu(\nu-1)}{1/2-\mu}))) \\
&\quad + (\mu-\nu) f(2,(\nu-\mu)(x-\tfrac{1}{\mu-\nu})).
\end{aligned}$$

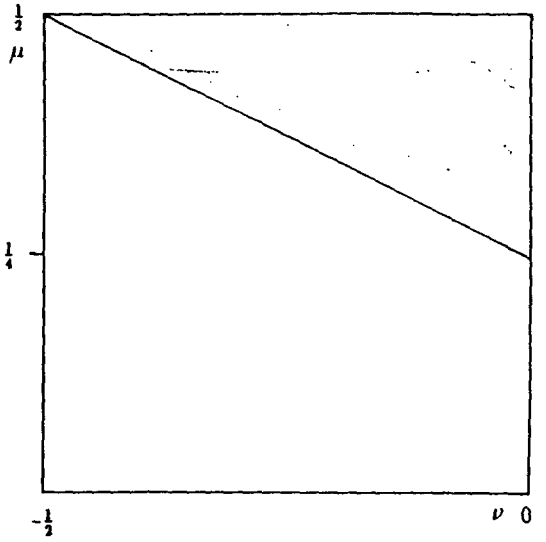


Bild 4.6: Der Parameterraum **P**

Man verifiziert, daß die stückweise konstante Funktion:

$$\varrho_{\mu,\nu}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-\mu)} & \text{für } x \in (0, \nu-\mu+1) \\ \frac{1-\mu-\nu}{2(\mu-\nu)(1-\mu)} & \text{für } x \in (\nu-\mu+1, 1) \end{cases} \tag{4.24}$$

eine Eigenfunktion des Perron-Frobenius-Operators zum Eigenwert $\lambda = 1$ darstellt. Aufgrund der Überlegungen des zweiten Kapitels ist $\varrho_{\mu,\nu}$ auch in allen weiteren Räumen natürlicher Observablen, die der Konstruktion des Perron-Frobenius-Operators zugrundegelegt werden können, die eindeutig bestimmte Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda = 1$. Damit ist:

$$dm_{\mu,\nu}(x) = \varrho_{\mu,\nu}(x)\,dx \tag{4.25}$$

das bezüglich des Lebesgue-Maßes absolut stetige invariante Maß des Systems $([0,1], \mathcal{B}, T_{\mu,\nu})$.

Der Gestalt des Perron-Frobenius-Operatos $\mathcal{L}_T^0$ ist abzulesen, daß sein Spektrum durch die Gesamtheit der Eigenwerte aller Matrizen:

$$M_{\mu,\nu}^{(n)} = \begin{pmatrix} (\mu+\nu)^{n+1} & (-1)^n(\mu-\nu)^{n+1} \\ (\mu+\nu)^{n+1} + ((-1)^n+1)\left(\frac{1/2-\mu}{\mu-\nu}\right)^{n+1} & (-1)^n(\mu-\nu)^{n+1} \end{pmatrix}, \tag{4.26}$$

$n = 0, 1, 2\ldots$, dargestellt ist. Explizit findet man für das Spektrum der Matrizen $M_{\mu,\nu}^{(n)}$ den Ausdruck:

$$\text{spec}\,\mathcal{L}_T^0 = \{\, \lambda_n^{\pm} = 1/2((\mu+\nu)^{n+1} + ((-1)^n+1)(\tfrac{1/2-\mu}{\mu-\nu})^{n+1})$$

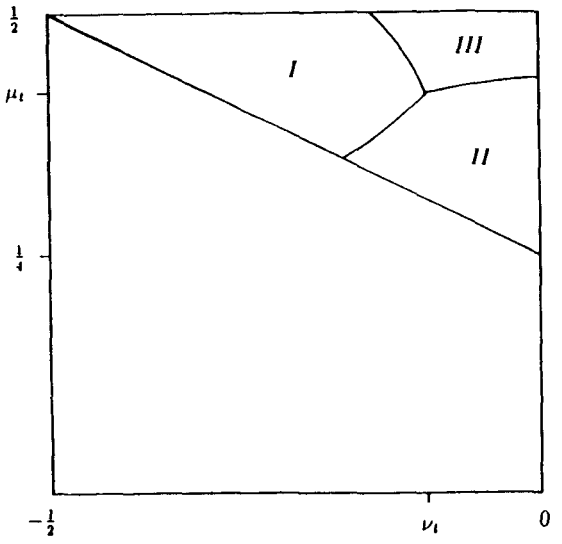


Bild 4.7: Das Phasendiagramm

$$\pm\sqrt{1/4((\mu+\nu)^{n+1}+((-1)^n+1)(\tfrac{1/2-\mu}{\mu-\nu})^{n+1})+((-1)^n+1)(\tfrac{1/2-\mu}{\mu-\nu})^{n+1}}\}_{n=0}^{\infty}.$$

Den Absolutbetrag des zweithöchsten Eigenwertes des Operators $\mathcal{L}_T^0$ stellen wir als Funktion der Parameter μ und ν im Parameterraum $\mathbf{P}$ durch ein 'Phasendiagramm' dar (Abbildung 4.7).

In den durch römische Ziffern bezeichneten Gebieten ist der subdominante Spektralradius $\xi(\mathcal{L}_T^0)$ bzw. die Relaxationszeit τ durch folgende Funktionen der Kontrollparameter gegeben:

$$I \;:\; \xi^I(\mathcal{L}_T^0) = 4\mu\nu \qquad (4.27)$$
$$1/\tau^I = -\log 4\mu\nu$$
$$II \;:\; \xi^{II}(\mathcal{L}_T^0) = 1-2\mu \qquad (4.28)$$
$$1/\tau^{II} = -\log(1-2\mu)$$
$$III \;:\; \xi^{III}(\mathcal{L}_T^0) = \mu(\mu^2+3\nu^2)+\sqrt{\mu^2(\mu^2+3\nu^2)^2+2(1/2-\mu)^3} \qquad (4.29)$$
$$1/\tau^{III} = -\log \xi(\mathcal{L}_T^0).$$

Die Trennlinie zwischen den Bereichen I und II ist durch die Funktion:

$$\xi^I(\mu,\nu)-\xi^{II}(\mu,\nu)=0 \;\Leftrightarrow\; \eta^1(\nu)=(4\nu+2)^{-1} \qquad (4.30)$$

beschrieben. Die übrigen Grenzlinien η^2 und η^3 wurden numerisch als Nullstellen der Funktionen $\xi^I(\mu,\nu)-\xi^{III}(\mu,\nu)$ und $\xi^{II}(\mu,\nu)-\xi^{III}(\mu,\nu)$ bestimmt und und in das Diagramm eingetragen.

Durch $\xi(\mu,\nu)$ bzw. $\tau(\mu,\nu)$ ist eine stetige Fläche beschrieben, die jedoch längs der Kurven η^1, η^2 und η^3 Singularitäten aufweist: Variiert man die Systemparameter des Modells längs einer generischen Kurve im Parameterraum, so stößt man typischerweise auf einen kritischen Parameterwert, bei dem die erste Ableitung der Relaxationszeit nach dem Kurvenparameter eine Unstetigkeit zeigt.

In Analogie zur Terminologie der Thermodynamik sprechen wir von einem *Phasenübergang 1.Ordnung*, indem wir der Relaxationszeit formal die Rolle eines thermodynamischen Potentials zuweisen. Unter einer 'Phase' verstehen wir dabei einen Bereich des Phasenraumes, in dem die Relaxationszeit eine bestimmte funktionale Abhängigkeit von den Kontrollparametern zeigt: In verschiedenen Phasen ist $\tau(\mu,\nu)$ durch verschiedene Funktionen gegeben. In dieser Sprechweise könnte man sagen, längs der Linien η^1, η^2 und η^3 befänden sich zwei Phasen im Gleichgewicht; der Punkt (μ_t,ν_t) bezeichnete dann einen 'Trippelpunkt' des Systems. Der innere Mechanismus, der die Unstetigkeiten in der ersten Ableitung der Relaxationszeit erzeugt, ist als 'crossing-over' von Eigenwerten bekannt.

Werden dem Perron-Frobenius-Operator weitere charakterisierende Zerlegungen zugrundegelegt, so ist nach den Resultaten des Abschnittes 4.1 zu erwarten, daß noch weitere funktionale Abhängigkeiten für die Relaxationszeiten sowie zusätzliche kritische Linien im Phasendiagramm sichtbar werden.

Das Studium der Relaxationszeit eines verhältnismäßig einfach gebauten dynamischen Systems, das einer analytischen Behandlung zugänglich ist, offenbart demnach ein recht komplexes Verhalten. Man muß damit rechnen, daß derartige Phänomene für Familien dynamischer Systeme generisch sind.

4.2.2 Kolmogorov-Sinai-Entropie und Ljapunov-Exponent

Die stückweise Linearität des diskutierten Modells erlaubt die explizite Berechnung der Kolmogorov-Sinai-Entropie h_{KS} und der topologischen Entropie h_{top}. Auch für den Ljapunov-Exponenten λ^L läßt sich ein geschlossener Ausdruck gewinnen. Während diese Größen in den meisten Fällen, in denen sie überhaupt analytisch zugänglich sind, auf triviale Weise mit den Bestimmungsstücken des Systems verknüpft sind, liegt hier ein verhältnismäßig komplizierter Zusammenhang mit den Systemparametern vor.

Indem im Sinne des thermodynamischen Formalismus dynamischer Systeme [51] in den Perron-Frobenius-Operator eine inverse 'Temperatur' β eingeführt wird, tritt der Operator $\mathcal{L}_\beta : B(I_{\mathcal{C}^{min}}, D) \to B(I_{\mathcal{C}^{min}}, D)$ in Erscheinung:

$$\mathcal{L}_\beta : B(I_{\mathcal{C}^{min}}, D) \to B(I_{\mathcal{C}^{min}}, D),$$

$$(\mathcal{L}_\beta^0 f)(1,x) = (\mu+\nu)^\beta f(1,(\mu+\nu)x) + (\mu-\nu)^\beta f(2,(\nu-\mu)(x-\tfrac{1}{\mu-\nu}))$$

$$(\mathcal{L}_\beta^0 f)(2,x) = (\mu+\nu)^\beta f(1,(\mu+\nu)x) + (\tfrac{1/2-\mu}{\mu-\nu})^\beta \big(f(1, \tfrac{\mu-1/2}{\mu-\nu}(x-1-\tfrac{\mu^2-\nu^2}{1/2-\mu})) + f(1, \tfrac{1/2-\mu}{\mu-\nu}(x-1-\tfrac{\mu(\mu-1)-\nu(\nu-1)}{1/2-\mu}))\big) + (\mu-\nu)^\beta f(2,(\nu-\mu)(x-\tfrac{1}{\mu-\nu}))$$

in Erscheinung. Das Spektum dieses Operators besteht aus den Eigenwerten aller Matrizen:

$$M^{(n)}(\beta) = \begin{pmatrix} (\mu+\nu)^{\beta+n} & (-1)^n(\mu-\nu)^{\beta+n} \\ (\mu+\nu)^{\beta+n} + ((-1)^n+1)(\frac{\frac{1}{2}-\mu}{\mu-\nu})^{\beta+n} & (-1)^n(\mu-\nu)^{\beta+n} \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

$n = 0,1,2,\ldots$. Man erhält als den höchsten Eigenwert des Operators $\mathcal{L}_\beta$ im Punkte $\beta = 0$ und in einer hinreichend kleinen Umgebung von $\beta = 1$ folgende Funktion der 'Temperatur' β:

$$\lambda(\beta) = \tfrac{1}{2}((\mu+\nu)^\beta + (\mu-\nu)^\beta) - \sqrt{\tfrac{1}{4}((\mu+\nu)^\beta + (\mu-\nu)^\beta)^2 + 2(\tfrac{1}{2}-\mu)^\beta}.$$

Der *topologische Druck* $P(\beta)$ des Systems, definiert als:

$$P(\beta) := \log \lambda_0(\beta), \quad (4.32)$$

trägt alle formalen Eigenschaften eines thermodynamischen Potentials: Viele Größen, die das dynamische Verhalten des zugrundeliegenden Systems charakterisieren, können durch Differentiation aus $P(\beta)$ berechnet werden. So erhält man für die topologische Entropie den Ausdruck:

$$h_{top}(T_{\mu,\nu}) = P(\beta=0) = \begin{cases} \log 2 & \text{für } \mu = \frac{1}{2} \\ \log(1+\sqrt{3}) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.33)$$

Man beobachtet eine Unstetigkeit, die als ein 'Phasenübergang 0-ter Ordnung' in der topologischen Entropie als Funktion der externen Parameter aufgefaßt werden könnte. Die physikalische Interpretation dieses Phänomens bleibt für uns jedoch eine offene Frage.

Für die Kolmogorov-Sinai-Entropie gilt die Relation:

$$h_{KS} = -\frac{d}{d\beta} P(\beta)|_{\beta=1}. \quad (4.34)$$

Unter Verwendung der Funktion $\lambda(\beta)$ kann nach einigen Umformungen für h_{KS} die Beziehung:

$$-h_{KS}(T_{\mu,\nu}) = 1/(2(\mu-1))\{(\mu+\nu)\log(\mu+\nu) + (\mu-\nu)\log(\mu-\nu) + 2(1/2-\mu)\log(1/2-\mu)\} \quad (4.35)$$

aufgestellt werden. Der Ljapunov-Exponent kann aufgrund der Ergodizität des vorliegenden Modells mit Hilfe der Identität,

$$\lambda^L(T_{\mu,\nu}) = \int_{[0,1]} dm_{\mu,\nu}(x) \log \left| \frac{d}{dx} T_{\mu,\nu}(x) \right|, \quad (4.36)$$

berechnet werden. Unter Verwendung des absolut stetigen invarianten Maßes $dm_{\mu,\nu}(x) = \varrho_{\mu,\nu}(x)\,dx$ aus Gleichung 4.24 erhält man wie erwartet:

$$\lambda^L = h_{KS}(T_{\mu,\nu}). \tag{4.37}$$

Es wird anhand der Diskussion des untersuchten Modellsystems $([0,1], \mathcal{B}, T_{\mu,\nu})$ besonders deutlich sichtbar, daß die Relaxationszeit τ anscheinend eine völlig eigenständige Rolle in der Charakterisierung dynamischer Systeme spielt. Offensichtlich besteht zwischen den Begriffen 'topologische Entropie', 'Komolgorov-Sinai-Entropie' und 'Ljapunov-Exponent' auf der einen und der Relaxationszeit auf der anderen Seite kein erkennbarer Zusammenhang.

Kapitel 5

Expansive Transformationen des d-Torus

Der Übergang zur Untersuchung mehrdimensionaler Beispiele dynamischer Systeme führt auf Probleme einer bisher noch nicht betrachteten Kategorie: Endliche charakterisierende Zerlegungen generischer Modelle besitzen Berandungen fraktaler Natur. Möchte man den Formalismus der Methode des Perron-Frobenius-Operators, wie er in den zuvor diskutierten Beispielen angewendet wurde, auf derartige Situationen übertragen, so ist man gezwungen, Räume von Observablen einzuführen, die Sprungstellen längs einer fraktalen Kurve besitzen.

Wir scheuen davor zurück, diesem Weg zu folgen; vielmehr werden nach der Diskussion der genannten Komplikation speziell beschaffene Klassen von Beispielen eingeführt, die dennoch eine explizite Untersuchung ihres Relaxationsverhaltens durch die Methode des Perron-Frobenius-Operators zulassen.

Die im folgenden diskutierten Modelle legen Evidenz für die Behauptung nahe, ein bestimmtes Strukturmerkmal einer Transformation, nämlich die Konstanz seiner Jakobi-Matrix, impliziere einfaches Relaxationsverhalten für das korrespondierende dynamische System. Damit findet das entsprechende Resultat aus dem dritten Kapitel eine Verallgemeinerung auf beliebige Dimensionen.

5.1 Das Problem charakterisierender Zerlegungen

Durch eine Klasse affiner, expansiver Transformationen des d-dimensionalen Torus:

$$T : Tor^d \to Tor^d,\ x \mapsto tx + q \pmod 1, \tag{5.1}$$

$$t \in Gl(d,\mathbf{Z}),\ q \in \mathbf{Q}^d,$$
$$\min\{|\lambda| : \lambda \in \operatorname{spec} t\} > 1,$$

sind mehrdimensionale dynamische Systeme $(Tor^d, \mathcal{B}, T)$ definiert, die auf natürliche Weise die in dem Abschnitt 3.2 diskutierten affinen Kreisabbildungen verallgemeinern. Anhand dieser Modelle soll ein Einblick in die grundsätzliche Problematik mehrdimensionaler dynamischer Systeme gegeben werden.

Im zweiten Kapitel wurde der Begriff einer erzeugenden Zerlegung $\mathcal{E} = \mathcal{N} \vee \mathcal{C}$ eingeführt, der es erlaubte, ein System durch die begrifflichen Hilfsmittel der symbolischen Dynamik zu beschreiben: Das zugrundeliegende dynamische System $(X, \mathcal{A}, T)$ konnte unter Vermittlung der erzeugenden Partition $\xi_{\mathcal{E}}$ mit einem symbolischen System $(\Sigma_{l_\epsilon}^+, \sigma)$ in Verbindung gebracht werden.

Wie im Fortgang noch deutlich wird, bereitet die Konstruktion natürlicher Zerlegungen $\mathcal{N}$ für die untersuchte Klasse von Torus-Endomorphismen keine Schwierigkeiten. Die Existenz endlicher charakterisierender Zerlegungen mit stückweise glatten Rändern kann dagegen nur unter sehr speziellen Voraussetzungen bewiesen werden. Um den Problemkreis der charakterisierenden Zerlegungen deutlicher sichtbar werden zu lassen, referieren wir an dieser Stelle über die in diesem Zusammenhang wichtigen Resultate der Artikels [27] von T.Bedford.

Schon länger ist bekannt, daß erzeugende Zerlegungen dynamischer Systeme, die mehr als eine Dimension besitzen, fraktale Berandungen aufweisen können. Für die Klasse expansiver Torus-Transformationen $T : x \mapsto tx \pmod 1$ kennzeichnet dieses Phänomen die typische Situation, wie durch Arbeiten von Urbanski [25] und Mané [26] (zitiert in [27]) gezeigt wurde. Unter Verwendung eines Verfahrens zur rekursiven Definition fraktaler geometrischer Objekte sind durch Bedford spezielle erzeugende Zerlegungen expansiver 2-Torus-Transformationen explizit konstruiert und graphisch dargestellt worden. Das uns in diesem Zusammenhang betreffende Theorem lautet in einer unserer Terminologie angepaßten Formulierung:

Satz 5.1 (Bedford,1986) *Es sei $t \in Gl(2,\mathbf{Z})$ eine Matrix mit $\min\{|\lambda| : \lambda \in spec\, t\} > 1$. Das durch $T : Tor^2 \to Tor^2$, $x \mapsto tx \pmod 1$ induzierte dynamische System besitzt erzeugende Zerlegungen $\mathcal{E}$ mit fraktalen Berandungen $\partial\mathcal{E}$ derart, daß $(Tor^2, \mathcal{B}, T)$ einem symbolischen System $(\Sigma_{l_\epsilon}^+, \sigma)$ korrespondiert mit $|\mathcal{E}| = |\det t|$.*

Ein Maß für die fraktalen Eigenschaften einer Kurve C gibt die ihr zugeordnete *Kapazität*. Bezeichnet $N(\epsilon)$ die kleinste Anzahl von Kugeln mit Radius ϵ, die benötigt wird, um C ganz zu überdecken, so ist:

$$\overline{\operatorname{cap}}\, C = \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{-\log \epsilon} \tag{5.2}$$

und:

$$\underline{\operatorname{cap}}\, C = \liminf_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{-\log \epsilon}. \tag{5.3}$$

Bei Gleichheit, $\overline{\text{cap}}\, C = \underline{\text{cap}}\, C$, spricht man von der Kapazität einer Kurve C.

Ein Resultat von Urbanski impliziert, daß die Kapazität der Berandung $\partial\mathcal{E}$ der erzeugenden Zerlegung $\mathcal{E}$ eines expansiven Torus-Endomorphismus nach unten beschränkt ist durch:

$$\text{cap}\,\partial\mathcal{E} \geq 2 - \frac{\log|\lambda_2|}{\log|\lambda_1|}, \tag{5.4}$$

wobei $1 < |\lambda_2| < |\lambda_1|$ Eigenwerte der Matrix t mit reellem Spektrum darstellen. Durch Bedford wurde die obere Schranke:

$$\text{cap}\,\partial\mathcal{E} \leq 1 + \frac{\log|\lambda_1| - \log|\lambda_2|}{\log|\lambda_1|} \tag{5.5}$$

bewiesen. Hierbei ist λ der dem Betrage nach größte Eigenwert der Matrix t. Für den Fall, daß t komplexe Eigenwerte besitzt, existieren erzeugende Zerlegungen, deren Berandungen Kapazitäten besitzen, die dem Wert $\text{cap}\,\partial\mathcal{E} = 1$ beliebig nahe kommen können.

Die beiden dem Artikel von Bedford entnommenen Abbildungen 5.1 und 5.2 zeigen zwei erzeugende Zerlegungen $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ der Transformation T mit:

$$T : Tor^d \to Tor^d, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} x \pmod 1. \tag{5.6}$$

Die Kapazitäten beider Zerlegungen sind voneinander verschieden: $\text{cap}\,\partial\mathcal{E}_1 < \text{cap}\,\partial\mathcal{E}_2$. Das Beispiel verdeutlicht ebenfalls, daß zu einem vorgegebenen dynamischen System im allgemeinen viele verschiedene, untereinander grundsätzlich gleichberechtigte erzeugende und damit auch charakterisierende Zerlegungen mit fraktalen Berandungen existieren.

5.2 Direkte Produkte eindimensionaler Transformationen

Sehr einfache Beispiele mehrdimensionaler Tranformationen des Torus, bei denen die Existenz endlicher charakterisierender Zerlegungen mit stückweise glatten Rändern von vornherein garantiert ist, gehen aus der Bildung direkter Produkte entsprechender Kreis-Abbildungen hervor.

Wie man anhand der Diskussion dieser Modelle erkennt, liegt die Problematik bei dem Übergang von der Betrachtung eindimensionaler Modelle zu Systemen höherer Dimension allein im Nachweis der Existenz geeigneter charakterisierender Zerlegungen. Ist diese gesichert, so kann die Methode des Perron-Frobenius-Operators analog zum eindimensionalen Fall angewendet werden. Ein erfolgreiches und detailliertes Studium der spektralen Eigenschaften des Perron-Frobenius-Operators ist

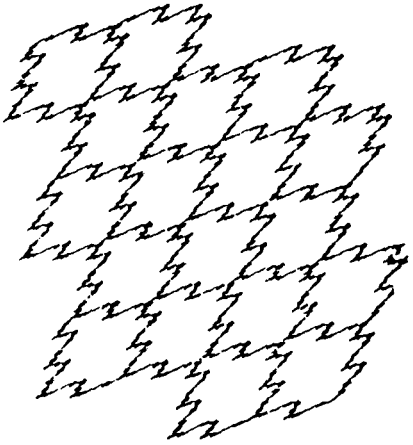


Bild 5.1: Die erzeugende Zerlegung $\mathcal{E}_1$

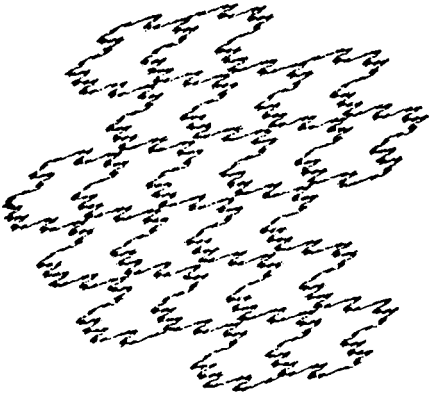


Bild 5.2: Die erzeugende Zerlegung $\mathcal{E}_2$

jedoch auch in der vorliegenden Situation vornehmlich bei Modellen möglich, die aufgrund der ihnen innewohnenden stückweisen Linearität Methoden der linearen Algebra zur Anwendung gelangen lassen.

Definition 5.2 *Sei $T_i : X_i \to X_i$ eine maßerhaltende Transformation eines Maßraumes $(X_i, \mathcal{B}_i, m_i)$ für $i = 1,2$. Das* direkte Produkt *$T_1 \otimes T_2$ ist die maßerhaltende Transformation von $(X_1 \times X_2, \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2, m_1 \times m_2)$ gegeben durch $(T_1 \otimes T_2)(x_1, x_2) := (T_1(x_1), T_2(x_2))$.*

Im folgenden seien $T_1 : [0,1] \to [0,1]$ und $T_2 : [0,1] \to [0,1]$ zwei Intervall-Abbildungen konstanter Ableitung mit endlichen charakterisierenden Zerlegungen $\mathcal{C}^1 = \{C_i^1\}_{i \in I_{\mathcal{C}^1}}$, $\mathcal{C}^2 = \{C_i^2\}_{i \in I_{\mathcal{C}^2}}$ und natürlichen Zerlegungen $\mathcal{N}^1 = \{\mathcal{N}_i^1\}_{i \in I_{\mathcal{N}^1}}$, $\mathcal{N}^2 = \{\mathcal{N}_i^2\}_{i \in I_{\mathcal{N}^2}}$. Das Einheitsquadrat $I^2 = [0,1]^2$ sei durch die Rechtecke:

$$C_i^1 \otimes C_j^2 := \{ x = (x_1, x_2) \in I^2 : x_1 \in C_i^1,\ x_2 \in C_j^2,\ i \in I_{\mathcal{C}^1},\ j \in I_{\mathcal{C}^2} \} \tag{5.7}$$

parkettiert. Offenbar ist $\mathcal{C} := \mathcal{C}^1 \otimes \mathcal{C}^2 = \{C_i^1 \otimes C_j^2\}_{i \in I_{\mathcal{C}^1}, i \in I_{\mathcal{C}^2}}$ eine paarweise disjunkte, endliche Zerlegung von I^2 mit stückweise glatten Rändern. Die Bilder ihrer Elemente unter der Wirkung von $T = T_1 \otimes T_2$ lauten:

$$T(C_i^1 \otimes C_j^2) := \{ (x_1, x_2) \in I^2 : x_1 \in T_1 C_i^1,\ x_2 \in T_2 C_j^2 \}. \tag{5.8}$$

$\mathcal{C}$ ist also eine charakterisierende Zerlegung des Systems $(I^2, \mathcal{B}, T)$. Die minimale charakterisierende Zerlegung $\mathcal{C}^{min}$ ist das Produkt $\mathcal{C}^{min} = \mathcal{C}^{1min} \otimes \mathcal{C}^{2min}$. Analog werden die natürliche Zerlegung $\mathcal{N} := \mathcal{N}^1 \otimes \mathcal{N}^2$ und die erzeugende Zerlegung $\mathcal{E} = \mathcal{N} \vee \mathcal{C}$ des Systems eingeführt.

Aufgrund der Definition der Graphen $G_T(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ und $G_T(\mathcal{C})$ gehen die korrespondierenden Adjazenzmatrizen L und $M^{\mathcal{C}}$, wie aus der Beziehung 5.8 abzulesen ist, durch die Bildung des *Kronecker-Produktes* [64] aus den Matrizen L^i und $M^{\mathcal{C}^i}$, $i = 1,2$, hervor: $L = L^1 \otimes L^2$ und $M = M^{\mathcal{C}^1} \otimes M^{\mathcal{C}^2}$.
Der Perron-Frobenius-Operator der Abbildung T lautet damit:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T \ &: \ B(I_{\mathcal{C}}, D) \to B(I_{\mathcal{C}}, D), \\ &(\mathcal{L}_T f)(j; x_1, x_2) = |a_1 a_2|^{-1} \sum_{i \in I_{\mathcal{E}}} L_{ji} f(i''; \frac{x_1 - b_{i_1}}{a_1}, \frac{x_2 - b_{i_2}}{a_2}) \qquad (5.9) \\ &\text{mit} \quad i'' \ : \ I_{\mathcal{E}} \to I_{\mathcal{C}} \quad \text{derart, daß } \mathcal{E}_i \in \mathcal{C}_{i''} \\ &\qquad\quad i_1 \ : \ I_{\mathcal{E}} \to I_{\mathcal{N}^1} \quad \text{derart, daß } \mathcal{E}_i \in \mathcal{N}_{i_1} \\ &\qquad\quad i_2 \ : \ I_{\mathcal{E}} \to I_{\mathcal{N}^2} \quad \text{derart, daß } \mathcal{E}_i \in \mathcal{N}_{i_2}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Linearität der Schnitte:

$$S_i(x,y) = \{\frac{x - b_{i_1}}{a_1}, \frac{y - b_{i_2}}{a_2}\}^{T_T} \tag{5.10}$$

läßt $\mathcal{L}_T$ den Raum polynomialer Funktionen $P_{n,m}(I_C, X)$ mit den Elementen:

$$p \in P_{n,m}(I_C, D),\ p(j;x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} p_{k,l}(j)\, x^k y^l, \qquad p_{k,l}(j) \in \mathbf{C},\ j \in I_C, \tag{5.11}$$

invariant. Angewandt auf monomiale Funktionen:

$$q \in P_{n,m}(I_C, D),\ q(j;x,y) = q(j)\, x^k y^l, \qquad q(j) \in \mathbf{C},\ j \in I_C, \tag{5.12}$$

bewirkt der Operator $\mathcal{L}_T$:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_T q)(j;x,y) &= \operatorname{sgn}(a_1 a_2)\, a_1^{-(k+1)} a_2^{-(l+1)} \sum_{i \in I_\ell} L_{ij}\, q(i'')(x - b_{i_1})^k (y - b_{i_2})^l \\
&= \operatorname{sgn}(a_1 a_2)\, a_1^{-(k+1)} a_2^{-(l+1)} \sum_{i \in I_\ell} L_{ij}\, q(i'')\, x^k y^l + p'(x,y) \qquad (5.13) \\
&= \operatorname{sgn}(a_1 a_2)\, a_1^{-(k+1)} a_2^{-(l+1)} \sum_{i \in I_C} M^{\mathcal{C}}_{ij}\, q(i)\, x^k y^l + p'(x,y), \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

wobei $p'(x,y) \in P_{n,m}(I_C, D)$ eine polynomiale Funktion geringeren Grades bezeichnet. Analog zu Schlußweise des Abschnittes 3.1 erhält man als Spektrum des Operators $\mathcal{L}_T$:

$$\operatorname{spec}\mathcal{L}_T = \{\, \lambda \in \mathbf{C} :\ \lambda = \operatorname{sgn}(a_1 a_2)\, a_1^{-n} a_2^{-m} \mu,\ n,m \in \mathbf{N},\ \mu \in \operatorname{spec} M^{\mathcal{C}} \,\}. \tag{5.15}$$

Das Spektrum des Kronecker-Produktes zweier Matrizen ist durch die Eigenwerte ihrer Faktoren bestimmt vermöge der Relation : $\operatorname{spec}(M_1 \otimes M_2) = \{\lambda : \lambda = \lambda_1 \lambda_2,\ \lambda_1 \in \operatorname{spec} M_1,\ \lambda_2 \in \operatorname{spec} M_2\}$. Insbesondere gilt für den Absolutbetrag seiner zweithöchsten Eigenwerte: $\xi(M_1 \otimes M_2) = \xi(M_1)\xi(M_2)$. Der subdominante Spektralradius $\xi(\mathcal{L}_T)$ des Perron-Frobenius-Operators der Transformation $T = T_1 \otimes T_2$ ist damit gegeben durch:

$$\xi(\mathcal{L}_T) = \max_{i=1,2} \xi(\mathcal{L}_{T_i}). \tag{5.16}$$

Wir verallgemeinern die beschriebene Situation in naheliegender Weise auf beliebige Dimensionen und gelangen zu der Aussage:

Satz 5.3 *D-dimensionale dynamische Systeme $(Tor^d, \mathcal{B}, T)$, induziert durch direkte Produkte von Intervall-Abbildungen $T_i : [0,1) \to [0,1)$ mit konstanter Ableitung, $T = \bigotimes_{i=1}^{d} T_i$, zeigen* einfaches Relaxationsverhalten. *Ihre Relaxationszeit τ ist das Minimum:*

$$\tau = \min_{i=1,\ldots,d} \tau_i \tag{5.17}$$

aller Relaxationszeiten τ_i der den Transformationen T_i entsprechenden eindimensionalen dynamischen Systeme.

Legt man der Konstruktion speziell affine Kreistransformationen $T_i : x \mapsto N_i x + q_i \pmod 1$ zugrunde, so gilt aufgrund der Ergebnisse des Abschnittes 3.2: $1/\tau = \min_{i=1,\ldots,d} \log|N_i|$.

Die Kolmogorov-Sinai-Entropie eines direkten Produktes von Abbildungen stellt sich als Summe der Entropien seiner Faktoren dar [36]: $h_{KS}(T_1 \otimes T_2) = h_{KS}(T_1) + h_{KS}(T_2)$. Für Produkte affiner Kreistransformationen gilt demnach: $h_{KS}(\bigotimes_{i=1}^{d} T_i) = \log(\prod_{i=1}^{d} |N_i|)$.

5.3 Eine spezielle Klasse affiner Torus-Transformationen

Unter bestimmten, jedoch recht einschränkenden Voraussetzungen können affine, expansive Torus-Transformationen:

$$\begin{aligned} T : Tor^d \to Tor^d,\ x \mapsto tx + q \pmod 1, \\ t \in Gl(d, \mathbf{R}),\ q \in \mathbf{R}^d, \\ \min\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{spec}\, t\} > 1, \end{aligned} \tag{5.18}$$

endliche charakterisierende Zerlegungen mit stückweise glatten Rändern besitzen. Damit sind derartige Beispielsysteme auf besonders einfache Weise dem Formalismus der Methode des Perron-Frobenius-Operators zugänglich.

Die untersuchten Modelle tragen das Merkmal, eine konstante Jakobi-Matrix zu besitzen, und erweisen sich als einfach relaxierend; ihre für alle natürlichen Observablen identische Relaxationszeit τ ist mit der Kolmogorov-Sinai-Entropie h_{KS} und der Dimension d der Systeme verknüpft über die Beziehung: $\tau h_{KS} = d$.

5.3.1 Eigenschaften, charakterisierende Zerlegungen

Eine affine Torus-Transformation in d Dimensionen, $T : Tor^d \to Tor^d$, $x \mapsto tx + q \pmod 1$, habe folgende Eigenschaften:

(E1) *Rationalität*: $q \in \mathbf{Q}^d$.

(E2) *Integralität*: $t \in Gl(d, \mathbf{Z})$.

(E3) *Expansivität*: $\min\{|\lambda| \in \mathbf{C} : \lambda \in spect\} > 1$.

(E4) *Potenzproportionalität*: $t^{m+1} = \vartheta t$ für geeignete Zahlen $m \in \mathbf{N}, \vartheta \in \mathbf{Z}$.

Die Forderung (E2) bedingt, daß das eindeutige invariante Maß der betrachteten Klasse von Transformationen durch das Lebesgue-Maß gegeben ist [36]. Die Postulate (E1) und (E4) garantieren die Existenz endlicher charakterisierender Zerlegungen mit stückweise glatten Rändern. Eine Bedingung an ganzzahlige Matrizen, welche die Eigenschaft der Potenzproportionalität als Spezialfall enthält, tritt bemerkenswerterweise in der Kombinatorik bei anders gearteten Fragestellungen auf (vergleiche Referenz [65]).

Das nachfolgende Lemma formuliert ein Kriterium, das potenzproportionale Matrizen mit ihren spektralen Eigenschaften in Verbindung bringt.

Lemma 5.4 *Für Matrizen $t \in Gl(d, \mathbf{Z})$ sind folgende Aussagen gültig:*

1. $t^m = \vartheta \mathbf{1} \Rightarrow$ *t ist diagonalisierbar.*
2. $t^m = \vartheta \mathbf{1} \Rightarrow |\vartheta| = |\det t|^{\frac{m}{d}}$.
3. $t^m = \vartheta \mathbf{1} \Leftrightarrow$ *$spect \subseteq \{\lambda \in \mathbf{C} : \lambda^m = \vartheta\}$ und t ist diagonalisierbar.*

Die Behauptung 3 impliziert, daß alle Eigenwerte einer potenzproportionalen Matrix betragsmäßig gleich sind. Die Abschätzungen (5.4) und (5.5) für die Kapazität der Berandung von erzeugenden Zerlegungen $\mathcal{E}$ ergeben unter den hier diskutierten speziellen Verhältnissen: $\operatorname{cap} \partial\mathcal{E} = 1$. Damit stehen die nachfolgenden Überlegungen zur Konstruktion stückweise glatter charakterisierender Zerlegungen nicht im Widerspruch zu den Ergebnissen von T.Bedford.

Beweis Zu 1: Durch eine Ähnlichkeitstransformation $SJS^{-1} = t$ ist die Matrix t mit seiner Jordanschen Normalform J verknüpft. Aus $t^m = \vartheta \mathbf{1}$ folgt $J^m = \vartheta \mathbf{1}$. Es sei $J_i(\lambda) = \lambda \mathbf{1} + N_i$ der i-te Jordan-Block der Matrix J. Für die nilpotenten Matrizen N_i gilt $N_i^{d'} = 0$ für alle $d' \geq d$. Somit ist:

$$J_i^m(\lambda) = \sum_{k=m-i+1}^{m} \binom{m}{k} \lambda^k N_k^{m-1}. \tag{5.19}$$

Die Relation $J^m = \vartheta \mathbf{1}$ kann aber nur dann erfüllt sein, wenn die Matrizen N_i für alle i identisch verschwinden, woraus die Diagonalisierbarkeit von t folgt.

Zu 2: Aus $t^m = \vartheta \mathbf{1}$ folgt $\det t^m = \vartheta^d$. Somit gilt: $|\vartheta| = |\det t|^{\frac{m}{d}}$.

Zu 3: Es gelte $t^m = \vartheta \mathbf{1}$. Aus Behauptung 1 folgt: $\operatorname{diag}(\lambda_1^m, \ldots, \lambda_d^m) = \vartheta \mathbf{1}$. Die Umkehrung ist trivial. ◇

Zur Konstruktion der natürlichen Zerlegungen $\mathcal{N}$ der zu untersuchenden Systeme betrachten wir die Schar der Hyperebenen E_i^i in $\mathbf{R}^d$ mit Normalenvektor:

$$e_i = (0, \ldots, \overset{i-teStelle}{1}, \ldots, 0) \tag{5.20}$$

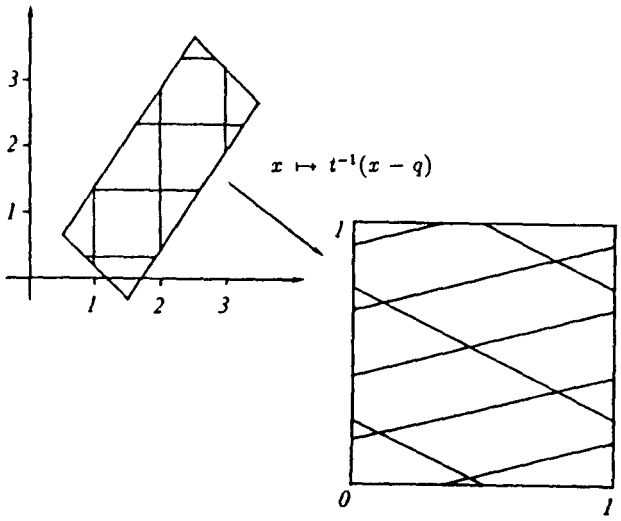


Bild 5.3: Zur Konstruktion der Zerlegung $\mathcal{N}$

durch den Punkt $\iota = (i_1, \ldots, i_d) \in \mathbf{Z}^d$. Die Bilder dieser Ebenen unter der Wirkung der linearen Abbildung $\mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$, $x \mapsto t^{-1}(x-q)$ parkettieren den ganzen Raum $\mathbf{R}^d$ durch Parallelepipede. Insbesondere wird auch der Einheitskubus $[0,1]^d$ in eine endliche Anzahl von Zellen $\mathcal{N}_i$, $i \in I_{\mathcal{N}}$, zerlegt, die durch endlich viele Stücke von Ebenen begrenzt sind. Wie man erkennt, gilt für die Einschränkungen $T|_{\mathcal{N}_i} x = tx + q - z_i$ mit einem ganzzahligen Vektor $z_i = \lfloor tx + q \rfloor \in \mathbf{Z}^d$, $x \in \mathcal{N}_i$, der davon abhängt, welche der Ebenen $t^{-1}(E_i^j - q)$ bzw. E_i^j, $j = 1, \ldots, d$, die Zelle $\mathcal{N}_i$ jeweils umgrenzen. Durch dieses Verfahren kann für jede beliebige Matrix $t \in Gl(d, \mathbf{R})$ stets die natürliche Zerlegung der korrespondierenden Torus-Abbildung aufgefunden werden.

Wir beleuchten die vorgeschlagene Konstruktionsmethode durch ein Beispiel:

Beispiel: Man betrachte die Transformation:

$$T : \mathrm{Tor}^2 \to \mathrm{Tor}^2,$$
$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Das in der Abbildung 5.3 dargestellte Parallelogramm wird unter der Wirkung der linearen Transformation $x \mapsto t^{-1}(x - \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}^{Tr})$ auf das Einheitsquadrat $[0,1]^2$ abgebildet. Die natürliche Zerlegung $\mathcal{N}$ des Beispiels kann dem Bild unmittelbar entnommen werden. Da $\mathrm{spec}\, t = \{2, 3\}$, ist die zugrundegelegte Matrix nicht potenzproportional. Wie in dem Abschnitt 5.1

dargelegt, können wir nicht erwarten, daß das hierdurch definierte dynamische System endliche charakterisierende Zerlegungen mit stückweise glatten Rändern besitzt.

Im folgenden weisen wir die Existenz charakterisierender, d.h. unter der Wirkung von T invarianter, mit der natürlichen Zerlegung $\mathcal{N}$ verträglicher Zerlegungen $\mathcal{C}$ für die betrachtete Klasse von Modellen nach.

Die triviale Zerlegung, $\mathcal{C} = \{(0,1)^d\}$, besitzt diese Eigenschaften offenbar nur dann, wenn die zugrundeliegende Matrix t diagonal und der Translationsvektor q gleich Null ist. Um eine Verfeinerung von $(0,1)^d$ zu konstruieren, welche die gewünschten Eigenschaften besitzt, betrachten wir die Mengen:

$$T^j E_i := \{ x \in [0,1]^d : x = y \ (\mathrm{mod}\ 1), (T^j e_i, y - T^j(0)), y \in \mathbf{R}^d \} \tag{5.21}$$

mit $j \in \mathbf{N}$, wobei $e_i = (0, \ldots, \overset{i-te Stelle}{1}, \ldots, 0)$, $i = 1, \ldots, d$, und (x,y) das euklidische Skalarprodukt in $\mathbf{R}^d$ bezeichnet. Insbesondere ist:

$$\begin{aligned} T^m E_i := \{ x \in [0,1]^d \ : \ & x = y \ (\mathrm{mod}\ 1), (e_i, y - b) \}, \\ \text{wobei } T^m x \ &= \vartheta x + \sum_{i=0}^{m-1} t^i q \ (\mathrm{mod}\ 1) \\ &= \vartheta x + b \ (\mathrm{mod}\ 1), \ \vartheta = \mathbf{Z}, \ b \in \mathbf{Q}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Folglich gilt:

$$T^m(0) = b \ (\mathrm{mod}\ 1). \tag{5.23}$$

Die Potenz T^m läßt sich demnach als direktes Produkt zweier affiner Kreis-Abbildungen auffassen. Da der Vektor $T^j e_i$ rationale Komponenten besitzt, sind durch $T^j E_i$ geschlossene Flächen auf dem Torus $Tor^d = q\,[0,1]^d$ beschrieben. Man betrachte nun die Mengen:

$$T^{nm} E_i := \{ x \in [0,1]^d : x = y \ (\mathrm{mod}\ 1), (y - T^m(b), e_i) \}. \tag{5.24}$$

Da jede rationale Zahl unter der Wirkung einer affinen Kreistransformation auf eine periodische Bahn gelangt (Lemma 3.9), existieren Zahlen $m = 0, 1, 2, \ldots$ und $p \in \mathbf{N}$ so beschaffen, daß gilt: $T^{m+p}(b) = T^m(b)$. Damit ist die Invarianz der Menge:

$$\bigcup_{j=0}^{m+p-1} \bigcup_{i=0}^{d} T^j E_i \tag{5.25}$$

unter der Wirkung von T erwiesen. Als Konsequenz ergibt sich, daß die Ränder der natürlichen Zerlegung beschrieben sind durch:

$$\partial \mathcal{N} = \bigcup_{i=1}^{d} T^{m-1} E_i. \tag{5.26}$$

Diesen Überlegungen zufolge besitzen die hier in Betracht gezogenen Modelle charakterisierende Zerlegungen $\mathcal{C}$, die durch die Angabe ihrer Berandungen

$$\partial\mathcal{C} = \bigcup_{j=1}^{m+p-1} \bigcup_{i=1}^{d} T^j E_i \tag{5.27}$$

festgelegt sind. Wie man sich vergewissert, sind die auf diese Weise konstruierten Zerlegungen sogar minimal.

Die nachfolgenden Beispiele illustrieren das beschriebene Verfahren und legen dar, wie Verfeinerungen minimaler charakterisierender Zerlegungen konstruiert werden können.

5.3.2 Beispiele in zwei Dimensionen

Im Falle zweier Dimensionen können die Bedingungen für die Eigenschaft der Potenzproportionalität einer Matrix durch algebraische Relationen zwischen ihrer Spur und ihrer Determinante formuliert werden.

Das charakteristische Polynom einer Matrix $t \in Gl(2,\mathbb{Z})$ lautet: $\mathrm{char}_t(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{spur}\, t\, \lambda + \det t$, woraus sich für ihre Eigenwerte ergibt:

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}(\mathrm{spur}\, t \pm \sqrt{\mathrm{spur}^2 t - 4 \det t}). \tag{5.28}$$

Die Beziehung $\lambda_1 = \lambda_2$ ist genau dann erfüllt, wenn $\mathrm{spur}^2 t = 4 \det t$.

Es sei im folgenden $\lambda_1 \neq \lambda_2$; t sei also diagonalisierbar. Mit Hilfe der Gleichung 5.28 kann die Bedingung:

$$\lambda_1^{m+1} = \lambda_2^{m+1},\ m \in \mathbb{N} \tag{5.29}$$

wie folgt umgeschrieben werden:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \mathrm{spur}^{m-k} t\, (\mathrm{spur}^2 t - 4 \det t)^{k/2} =$$

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \mathrm{spur}^{m-k} t\, (\mathrm{spur}^2 t - 4 \det t)^{k/2} (-1)^k \tag{5.30}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{m}{2k+1} (\mathrm{spur}^2 t - 4 \det t)^k \mathrm{spur}^{n-2k-1} t = 0. \tag{5.31}$$

Für die ersten möglichen Werte von m erhält man die Relationen:

1. $m = 2$: $\mathrm{spur}\, t = 0$

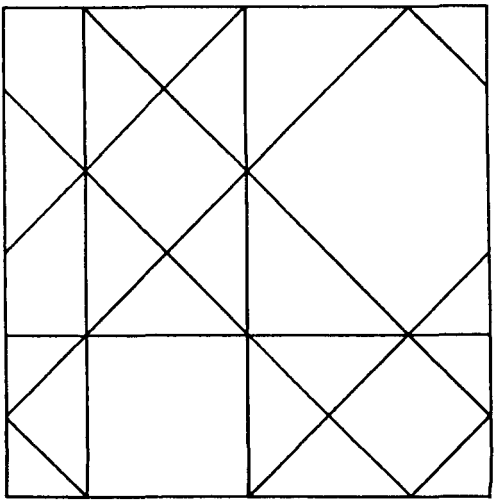


Bild 5.4: Die Zerlegung $\mathcal{C}^{1min}$

2. $m = 3$: $\text{spur}^2 t = \det t$
3. $m = 4$: $\text{spur}^2 t = 2 \det t$
4. $m = 5$: $\text{spur}^4 t - 3\text{spur}^2 t \det t + \det^2 t = 0$
5. $m = 6$: $\text{spur}^4 t = \det t$.

Die affine Transformation:

$$T_{t_1} : \text{Tor}^2 \to \text{Tor}^2,$$
$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix} \pmod 1$$

mit $t_1^2 = 21$ besitzt als minimale charakterisierende Zerlegung $\mathcal{C}^{1min}$ (Abbildung 5.4). Eine andere mögliche charakterisierende Zerlegung $\mathcal{C}^1$, die $\mathcal{C}^{1min}$ verfeinert, $\mathcal{C}^1 \prec \mathcal{C}^{1min}$, zeigt die Abbildung 5.5. Für die definierende Matrix t_2 der homogenen Torus-Transformation:

$$T_{t_2} : \text{Tor}^2 \to \text{Tor}^2,$$
$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x \pmod 1$$

gilt die Relation: $t_2^3 = -81$. Die entsprechende Zerlegung $\mathcal{C}^{2min}$ ist in Abbildung 5.6 dargestellt. Schließlich erscheint für die potenzproportionale Matrix t_3 der

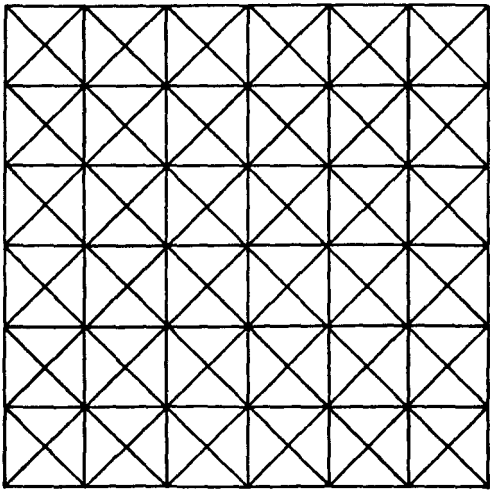


Bild 5.5: Die Zerlegung $\mathcal{C}^1$

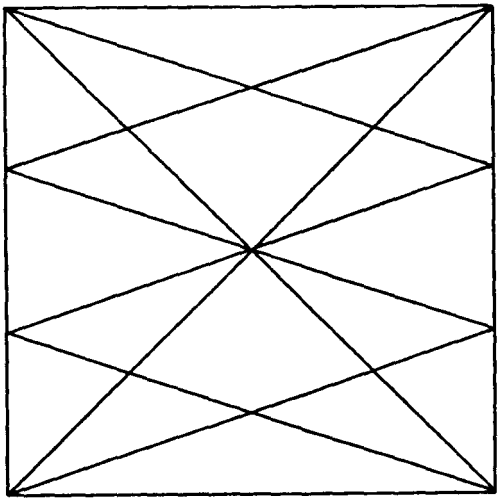


Bild 5.6: Die Zerlegung $\mathcal{C}^{2min}$

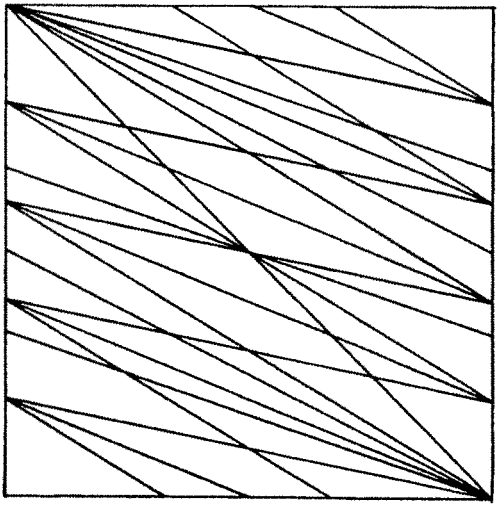


Bild 5.7: Die Zerlegung $\mathcal{C}^{3min}$

Abbildung:

$$T_{t_3} : \mathrm{Tor}^2 \to \mathrm{Tor}^2,$$
$$x \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x \pmod 1 \tag{5.32}$$

mit $t_3^4 = -41$ die minimale charakterisierende Zerlegung $\mathcal{C}^{3min}$ bereits in einer verhältnismäßig komplizierten Gestalt (Bild 5.7). Mit wachsender Zahl m nimmt offenbar auch die Komplexität der Berandungen $\partial\mathcal{C}$ charakterisierender Zerlegungen zu.

5.3.3 Die Relaxationszeit

Bezüglich einer beliebig ausgewählten charakterisierenden Zerlegung $\mathcal{C}$ lautet der Perron-Frobenius-Operator der Torus-Transformation $T : x \mapsto tx + q \pmod 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T \;:\; & B(I_\mathcal{C}, D) \to B(I_\mathcal{C}, D), \\ & (\mathcal{L}_T f)(j,x) = |\det t|^{-1} \sum_{i \in I_\mathcal{C}} M^\mathcal{C}_{ji} f(i, S_j x),\ j \in I_\mathcal{C}, \end{aligned} \tag{5.33}$$

unter Verwendung der Schnitte:

$$S_i : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R},\ x \mapsto t^{-1}(x + \lfloor ty + q \rfloor),\ y \in \mathcal{N}_i, \tag{5.34}$$

und der Adjazenzmatrix $M^{\mathcal{C}}$ des Graphen $\mathbf{G}_T(\mathcal{C})$. Diese spezielle Gestalt des Operators ist eine Konsequenz der Beziehung $\mathcal{E} = \mathcal{N} \vee \mathcal{C} = \mathcal{C}$, da gilt: $\mathcal{C} \preceq \mathcal{N}$, und der einer Eigenschaft der Schnitte S_i:

$$\det D_x S_i = \det t^{-1} \text{ für alle } i \in I_{\mathcal{N}}. \tag{5.35}$$

Aufgrund der Linearität der Schnitte bleiben Räume $P(I_{\mathcal{C}}, D)$ polynomialer Funktionen in d Variablen invariant unter der Wirkung von $\mathcal{L}_T$. Die Relation 5.35 enspricht der Bedingung der konstanten Ableitung aus Kapitel 3. Wie sich zeigen wird, ist auch der hier betrachtete Fall einer mehrdimensionalen, stückweise linearen Transformation, die eine konstante Jakobi-Matrix besitzt, mit einfachem Relaxationsverhalten verknüpft.

Eine erste Einsicht in die Struktur des Spektrums von $\mathcal{L}_T$ vermittelt die Aussage des nachfolgende Satzes:

Satz 5.5 *Das Spektrum des Perron-Frobenius-Operators $\mathcal{L}_T$ der hier untersuchten Klasse von Torus-Transformationen $T : Tor^d \to Tor^d$, $x \mapsto tx + q$ (mod 1) lautet:*

$$spec\,\mathcal{L}_T = \{\lambda \in \mathbf{C} : \lambda = sgn(\det t)\,\lambda_1^{-i_1}, \ldots, \lambda_d^{-i_d}\mu,\ \lambda_j \in spec\,t,\ \mu \in spec\,M^{\mathcal{C}}\},$$

wobei $i_j \in \mathbf{N}$ und $j = 1, \ldots, d$.

Die Spektren beider Matrizen t und $M^{\mathcal{C}}$, die einerseits die Torus-Abbildung T und anderseits die jeweils zugrundegelegte charakterisierende Zerlegung $\mathcal{C}$ kennzeichnen, gehen demnach als die wesentlichen Komponenten in die Gestalt des Spektrums von $\mathcal{L}_T$ ein.

Beweis Aufgrund von Lemma 5.4 ist die Matrix t stets diagonalisierbar:

$$U^{-1}tU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) = \Theta. \tag{5.36}$$

Man untersuche das Spektrum des Operators:

$$(\mathcal{L}_T^* g)(j, y) = |\lambda_1 \ldots \lambda_d|^{-1} \sum_{i \in I_{\mathcal{C}}} M_{ij}^{\mathcal{C}}\, g(i, \Theta(y + U\lfloor tU^{-1}y_{i'} + q \rfloor)) \tag{5.37}$$

wirkend auf Funktionen $g \in P(I_{\mathcal{C}}, D)$ mit $g(x) = f(U^{-1}x)$. Ist g daher eine Eigenlösung von $\mathcal{L}_T^*$, so ist die korrespondierende Funktion f Eigenfunktion zum gleichen Eigenwert des Operators $\mathcal{L}_T$. Völlig analog zur Vorgehensweise des 3.Kapitels kann nun aus der Darstellung 5.37 die Behauptung des Satzes abgelesen werden. ◇

Jede weitere Kenntnis des Spekrums von $\mathcal{L}_T$ und insbesondere Informationen über seinen subdominanten Spektralradius $\xi(\mathcal{L}_T)$, des Absolutbetrages seiner zweithöchsten Eigenwerte, hängen davon ab, inwieweit die spektralen Eigenschaften der Matrix $M^{\mathcal{C}}$ aufgeklärt werden können.

Zunächst halten wir fest, daß aufgrund der Invarianz des Lebesgue-Maßes der Vektor $e = (1, \ldots, 1)$, d Komponenten, Eigenvektor von M^C zum Eigenwert $\varrho(M^C) = |\det t|$ sein muß. $\varrho(M^C)$ ist damit zugleich Spektralradius von M^C und $\varrho^{-1}M^C$ eine stochastische Matrix für alle zugrundegelegten charakterisierenden Zerlegungen. Der subdominante Spektralradius $\xi(M^C)$ ist nach Satz (5.5) entscheidend für die korrespondierende Größe $\xi(\mathcal{L}_T)$. Gelingt es, die Gültigkeit der Ungleichung $\xi(M^C) \leq |\det t|^{\frac{d-1}{d}}$ nachzuweisen, so folgt, daß $\xi(\mathcal{L}_T)$ durch den Spektralradius $\varrho(t) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \operatorname{spec} t\}$ der Matrix t bestimmt wird, welche die Torus-Abbildung kennzeichnet:

$$\xi(\mathcal{L}_t) = \varrho(t) = |\det t|^{\frac{1}{d}}. \tag{5.38}$$

Der Translationsvektor q der Transformation $x \mapsto tx + q \pmod 1$ und vor allem die jeweils konkret betrachtete charakterisierende Zerlegung C gingen demnach in die Größe $\xi(\mathcal{L}_T)$ nicht ein.
Die Gültigkeit dieser Abschätzung gewährleistet das nachfolgende Lemma.

Lemma 5.6 *Der subdominante Spektralradius $\xi(M^C)$ der Adjazenzmatrix M^C des Graphen $G_T(C)$ ist für jede charakterisierende Zerlegung C der Abbildung T nach oben beschränkt durch:*

$$\xi(M^C) \leq |\det t|^{\frac{d-1}{d}}. \tag{5.39}$$

Diese Aussage ist konsistent zu den Resultaten des Abschnittes 3.2, da für $d = 1$ folgt: $\xi(M^C) = 1$.

Der Beweis des Lemmas stützt sich auf eine von Haviv u.a. [66] eingeführte Methode zur sukzessiven Approximation der subdominanten Spektralradien nichtnegativer Matrizen. Als Adjazenzmatrix eines Graphen fällt M^C in diese Kategorie. Für derartige Matrizen, die zudem auch stochastisch sind, lautet das zentrale Theorem der Referenz [66]:

Lemma 5.7 (Haviv u.a.,1987) *Es sei $|\det t|^{-1}M$ eine stochastische und nichtnegative n-dimensionale Matrix. Für den subdominanten Spektralradius $\xi(M)$ der Matrix M gilt:*

$$\xi(M) \leq \eta(M^k) \quad \textit{für jedes } k \in \mathbf{N} \tag{5.40}$$

$$\textit{mit } \eta(M^k) := |\det t| - \sum_{j=1}^{n} \min_i M_{ij}^k. \tag{5.41}$$

Darüber hinaus konvergiert die Folge $\{\eta(M^k)\}_{k=1}^{\infty}$ für $k \to \infty$ gegen den Grenzwert:

$$\xi(M) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\eta(M^k)}. \tag{5.42}$$

Beweis des Lemmas 5.6

Die Matrix t der Torus-Transformationen $T : Tor^d \to Tor^d$, $x \mapsto tx + q$

(mod 1) genüge der Bedingung $t^m = \vartheta \mathbf{1}$. Aufgrund von Lemma 5.4 gilt: $|\vartheta| = |\det t|^{m/d}$. Man betrachte nun die konvergente Teilfolge $\{\eta(M^{mk})\}_{k=1}^{\infty}$. Wird der Einheitskubus $I^d = [0,1]^d$ den linearen Transformationen:

$$\hat{T}^{mk} : x \mapsto t^{mk}x + \sum_{i=0}^{mk} t^i q = |\det t|^{\frac{mk}{d}} x + \beta_k \tag{5.43}$$

$$\text{mit } \beta_k = \sum_{i=0}^{mk} t^i q \in \mathbf{Q}^d \tag{5.44}$$

unterworfen, so stellt sein Bild $\hat{T}^{mk} I^d$ den um den Vektor β_k verschobenen Kubus $[0, |\det t|^{\frac{mk}{d}}]^d$ dar.

Da die Matrix t aus ganzzahligen Elementen besteht, sind die Abbildungen $\hat{T}^{mk}$ und T^{mk} verknüpft durch die Relation:

$$T^{mk}x = \hat{T}^{mk}x \pmod 1. \tag{5.45}$$

Aufgrund seiner Definition beschreibt das Element M_{ij}^{mk} der mk-ten Potenz der Adjazenzmatriz des Graphen $G_T(\mathcal{C})$, wie oft das Element $C_i \in \mathcal{C}$ einer charakterisierenden Zerlegung $\mathcal{C}$ auf das Element $C_j \in \mathcal{C}$ abgebildet wird. Wir suchen Abschätzungen für diese Größen zu gewinnen.

Es sei $\mathbf{R}^d$ durch die Hyperebenen E_ι^i, $i \in \{1, \ldots, d\}, \iota \in \mathbf{Z}^d$, in Einheitszellen ε_ι zerlegt. Man betrachte nun das Bild von C_i unter der Wirkung von $\hat{T}^{mk}$, $\hat{T}^{mk} C_i \subseteq \hat{T} I^d$, und bezeichne die Anzahl derjenigen Einheitszellen ε_ι, die vollständig in $\hat{T}^{mk} C_i$ liegen, mit:

$$c_i := \sharp\{\varepsilon_\iota : \varepsilon \subseteq \hat{T}^{mk} C_i\}. \tag{5.46}$$

Offenbar gilt für diese Zahlen stets:

$$c_i \leq \min\{M_{ij}^{mk} : j \in I_C\} \tag{5.47}$$

und folglich auch:

$$\eta(M^{mk}) \geq |\det t|^{mk} - \sum_{i \in I_C} c_i. \tag{5.48}$$

Die Summe über die Größen c_i kann alternativ auch als Differenz zweier weiterer Zahlen dargestellt werden:

$$\sum_{i \in I_C} c_i = \sharp\{\varepsilon_\iota : \varepsilon_\iota \cap \hat{T}^{mk} I^d \neq 0\} - \sharp\{\varepsilon_\iota : \varepsilon_\iota \cap \hat{T}^{mk} \partial\mathcal{C} \neq 0\}. \tag{5.49}$$

Der erste der beiden Terme ist nach unten beschränkt durch das Volumen des Kubus $\hat{T}^{mk} I^d$:

$$\sharp\{\varepsilon_\iota : \varepsilon \cap \hat{T}^{mk} I^d \neq 0\} \geq |\det t|^{mk}. \tag{5.50}$$

Als Konsequenz ergibt sich unmittelbar:

$$\eta(M^{mk}) \geq \sharp\{\varepsilon_\iota : \varepsilon_\iota \cap \hat{T}^{mk} \partial\mathcal{C} \neq 0\}. \tag{5.51}$$

Der Flächeninhalt $|\partial\mathcal{C}|$ aller $(d-1)$-dimensionalen Flächenstücke, welche die Elemente der charakterisierenden Zerlegung begrenzen, wächst unter der Wirkung von $\hat{T}^{mk}$ nach dem Potenzgesetz:

$$|\hat{T}^{mk}\partial\mathcal{C}| = |\partial\mathcal{C}|\,|\det t|^{\frac{d-1}{d}mk}. \tag{5.52}$$

Asymptotisch für $k \to \infty$ muß auch die Anzahl der Elementarzellen ε_i, die $\hat{T}^{mk}\partial\mathcal{C}$ umschließen, dem Wachstumsgesetz 5.52 genügen:

$$\#\{\varepsilon_i : \varepsilon_i \cap \hat{T}^{mk}\partial\mathcal{C} \neq 0\} = c(k)\,|\det t|^{\frac{d-1}{d}mk} \quad \text{mit} \lim_{k\to\infty} c(k) = c \in \mathbf{R}. \tag{5.53}$$

Mit diesen Resultaten ergibt sich :

$$\begin{aligned} \xi(M^{\mathcal{C}}) &\geq \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{c(k)|\det t|^{\frac{d-1}{d}mk}} \\ &= |\det t|^{\frac{d-1}{d}}, \end{aligned} \tag{5.54}$$

wodurch die Behauptung des Lemmas 5.6 bewiesen ist. ◇

Mit den bereitgestellten Hilfsmitteln sind wir nun imstande, die zentrale Aussage über das Relaxationsverhalten der in diesem Abschnitt betrachteten Klasse mehrdimensionaler Abbildungen zu formulieren.

Satz 5.8 *Existieren für affine, expansive Torus-Transformationen $T : Tor^d \to Tor^d$, $x \mapsto tx + q$ (mod 1) endliche charakterisierende Zerlegungen mit stückweise glatten Rändern, so gelten folgende Aussagen:*

1. *Die durch T definierten dynamischen Systeme sind* einfach relaxierend.

2. *Ihre Relaxationszeit τ ist gegeben durch die Relation:*

$$1/\tau = \log|\det t|^{\frac{1}{d}}. \tag{5.55}$$

3. *Die Relaxationszeit τ, die Kolmogorov-Sinai-Entropie h_{KS} und die Dimension d der betrachteten Systeme sind miteinander verknüpft durch die Beziehung:*

$$\tau h_{KS} = d. \tag{5.56}$$

5.4 Mehrdimensionale affine β-Transformationen

Am Schluß dieses Kapitels werden Beispiele untersucht, in denen die Matrix t einer affinenen, expansiven Torus-Transformation auch nichtganzzahliger, sogar irrationaler Elemente fähig ist:

$$T : Tor^d \to Tor^d,\ x \mapsto \beta x + \alpha \pmod 1 \qquad (5.57)$$
$$\beta \notin Gl(d, \mathbf{Z}),\ \alpha \notin \mathbf{Q}^d.$$

Inbesondere tritt das Verhältnis des *goldenen Schnittes* $\chi = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ in Erscheinung. Bei derartigen Systemen sind also die Eigenschaften der Integralität und Rationalität des vorangegegangenen Abschnittes aufgegeben.

Unter Umständen können diese Systeme dennoch endliche charakterisierende Zerlegungen mit stückweise glatten Rändern besitzen. Damit stellen sie eine mehrdimensionale Verallgemeinerung der Rényischen β-Transformation dar [28], die definiert ist durch:

$$T_\beta : Tor^1 \to Tor^1,\ x \mapsto \beta x \pmod 1, \qquad (5.58)$$
$$\beta \in \mathbf{R},\ |\beta| > 1.$$

T_β besitzt endliche charakterisierende Zerlegungen genau dann, wenn β eine 'β-Zahl' ist, was der Forderung gleichkommt, daß der Punkt $x = 1$ auf eine periodische Bahn des durch T_β definierten Systems gelangt. Ein entsprechendes Resultat von B.Gratza [67] besagt in unserer Interpretation, daß das Spektrum des Perron-Frobenius-Operators bezüglich der minimalen charakterisierenden Zerlegung des Systems mit zahlentheoretischen Eigenschaften von β in Verbindung gebracht werden kann.

Etwas allgemeiner gesprochen existieren für *affine* β-Transformationen einer Dimension:

$$T_{\alpha,\beta} : Tor^1 \to Tor^1,\ x \mapsto \beta x + \alpha, \qquad (5.59)$$
$$\alpha,\ \beta \in \mathbf{R},\ |\beta| > 1,$$

nach den Ergebnissen des Kapitels 3 endliche charakterisierende Zerlegungen genau dann, wenn die Randpunkte des Intervalles $[0, 1]$ nach endlich vielen Iterationen der Abbildung $T_{\alpha,\beta}$ auf periodische Bahnen gelangen. Dieser Forderung entspricht eine zahlentheoretische Bedingung an α und β. Als Intervall-Abbildungen konstanter Steigung sind affine β-Transformationen einfach relaxierend.

Das entsprechende Kriterium für mehrdimensionale affine β-Transformationen T lautet analog:

> T besitzt wenigstens eine endliche charakterisierende Zerlegung $\mathcal{C}$ mit stückweise glatten Rändern, wenn eine natürliche Zahl $n \in \mathbf{N}$ existiert,

derart, daß die Menge:

$$\partial\mathcal{C} := \bigcup_{i=0}^{n} T^i\,\partial[0,1]^d \tag{5.60}$$

unter der Wirkung von T invariant bleibt.

Es ist uns nicht gelungen, diese für konkret vorgegebene Vektoren $\alpha \in \mathbf{R}^d$ und Matrizen $\beta \in Gl(d,\mathbf{R})$ nicht leicht zu verifizierende Bedingung durch ein kompakteres und leichter zu handhabendes Postulat zahlentheoretischer Natur zu ersetzen.

Wir stellen zwei Beispiele vor:

Beispiel 1: Man betrachte die eindimensionale affine β-Transformation $T_{\beta,\beta} : [0,1) \to [0,1)$, $x \mapsto \beta x + \beta \pmod 1$, in der β diejenige reelle Lösung des Polynoms $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ ist, für die gilt: $\beta > 1$. Elementare Umformungen liefern für β den Ausdruck:

$$\beta = \tfrac{1}{3}\left\{\sqrt[3]{19 + \sqrt{297}} + \sqrt[3]{19 - \sqrt{297}}\right\} = 1{,}839286755\ldots.$$

Die Transformation $T_{\beta,\beta}$ ist in der Abbildung 5.8 dargestellt.

Die Bahn des Punktes $x = 0$:	Die Bahn des Punktes $x = 1$:
$c_1 = 0$	$c_5 = 1$
$c_2 = 0.839286755$	$c_6 = 0.678573510$
$c_3 = 0.382975767$	$c_7 = 0.087378024$
$c_4 = 0.543689011$	

Die Zahlen $\{c_i\}_{i=1}^{7} = \partial\mathcal{C}^{min}$ bilden die Ränder der minimalen charakterisierenden Zerlegung $\mathcal{C}^{min}$ des korrespondierenden dynamischen Systems.

Für das Spektrum des Perron-Frobenius-Operators $\mathcal{L}^{min}$, formuliert bezüglich der minimalen charakterisierenden Zerlegung, gilt aufgrund des Satzes 3.2 des dritten Kapitels:

$$\operatorname{spec}\mathcal{L}^{min} = \{\lambda \in \mathbf{C} : \lambda = \beta^{-n}\mu,\ \mu \in \operatorname{spec} M^{\mathcal{C}^{min}},\ n \in \mathbf{N}\} \tag{5.61}$$

unter Verwendung der dem Graphen $G_T(\mathcal{C}^{min})$ zu entnehmenden Adjazenzmatrix:

$$M^{\mathcal{C}^{min}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.62}$$

Auf numerischem Wege mit Hilfe eines modifizierten QR-Algorithmus [68] findet man als Eigenwerte dieser Matrix:

$$\operatorname{spec} M^{\mathcal{C}^{min}} = \{\beta, \beta_{\pm}, 1, e^{\frac{2\pi}{3}}, e^{\frac{2\pi}{3}2}\}, \tag{5.63}$$

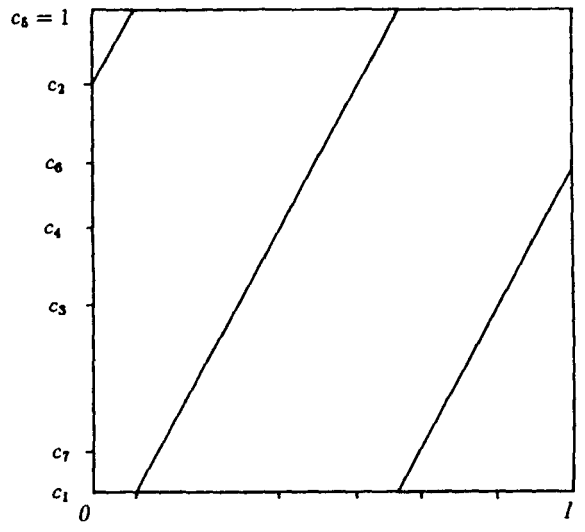


Bild 5.8: Die Transformation $T_{\beta,\beta}$

wobei durch die Relation:

$$\beta_{\pm} = \frac{1}{3}(e^{\pm\frac{2\pi}{3}}\sqrt[3]{19+\sqrt{297}} + e^{\mp\frac{2\pi}{3}}\sqrt[3]{19-\sqrt{297}} + 1) \tag{5.64}$$

die beiden übrigen Wurzeln des die Zahl β definierenden Polynoms dargestellt sind. Die Elemente des Spektrums wurden mit einer Rechengenauigkeit von $\epsilon < 10^{-25}$ bestimmt. Die Relaxationszeit des diskutierten einfach relaxierenden Beispielsystems ergibt sich demnach zu:

$$1/\tau = \log\beta. \tag{5.65}$$

Für dieses Beispiel gilt also $\tau h_{KS} = 1$. Jedoch zeigt ein Gegenbeipiel, das in der in der Referenz [67] angeführt wird, daß diese Relation im allgemeinen nicht gültig sein kann.

Beispiel 2: Eine expansive Transformation des 2-Torus sei gegeben durch:

$$T : Tor^2 \to Tor^2,$$
$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x \pmod 1, \tag{5.66}$$

wobei die Determinante der definierenden Matrix durch das Verhältnis des goldenen Schnittes gegeben ist:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \beta + 1 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1). \tag{5.67}$$

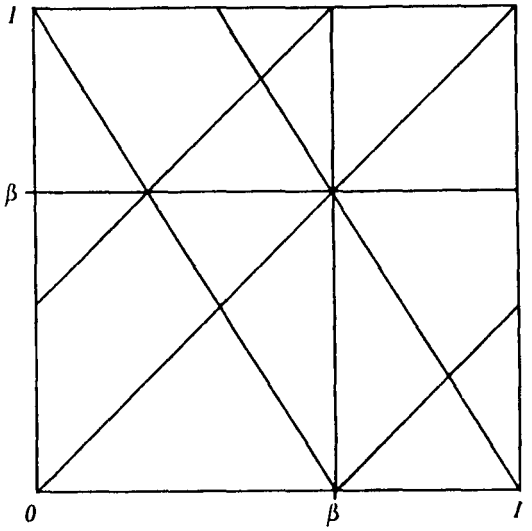


Bild 5.9: Die Zerlegung $\mathcal{C}^{min}$

Wie man nachprüft, ist die in Abbildung (5.9) dargestellte Zerlegung die minimale charakterisierende Zerlegung $\mathcal{C}^{min}$ des vorliegenden dynamischen Systems. Das Quadrat $[0,1]^2$ wird nämlich durch die lineare Transformation:

$$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x \tag{5.68}$$

auf ein Parallelogramm abgebildet, das in der Abbildung 5.10 darstellt ist. Der Satz 5.5 führt im vorliegenden Fall zu der Aussage:

$$\operatorname{spec} \mathcal{L}_T^{\mathcal{C}^{min}} = \{\, \lambda \in \mathbf{C} :\ \lambda = (-1)^n (\beta+1)^{(m+n)/2} \mu,\ \mu \in \operatorname{spec} M^{\mathcal{C}^{min}} \,\},$$

$n, m \in \mathbf{N}$, mit der aus den Abbildungen 5.9 und 5.10 abzulesenden, dünn besetzten Adjazenzmatrix $M^{\mathcal{C}^{min}}$, die in der Abbildung 5.11 dargestellt ist. Man findet numerisch als Spektum dieser Matrix die Menge:

$$\operatorname{spec} M^{\mathcal{C}^{min}} = \{\beta+1,\ \pm\sqrt{\beta+1},\ \pm i\sqrt{\beta},\ -\beta,\ \pm i|_2,\ 0|_6\} \tag{5.69}$$

mit der oben angegebenen Genauigkeit. Die Relaxationszeit bezüglich der minimalen charakterisierenden Zerlegung ist damit bekannt und lautet:

$$1/\tau^{\mathcal{C}^{min}} = \log\sqrt{\beta+1}; \tag{5.70}$$

sie ist also durch die Quadratwurzel der Determinante derjenigen Matrix gegeben, welche die Transformation definiert. In dieser speziellen Situation gilt demnach der Zusammenhang $\tau h_{KS} = 2 = d$; jedoch darf nicht

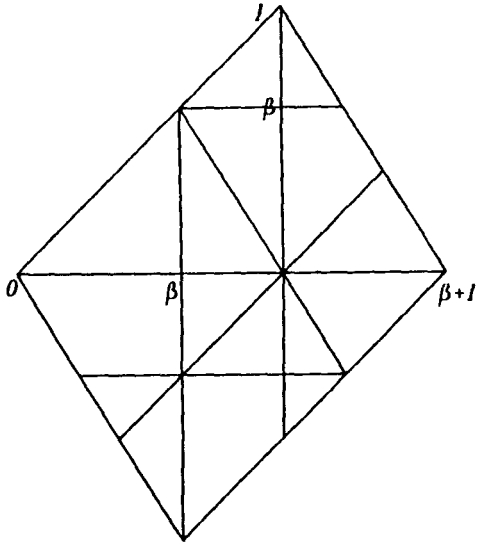


Bild 5.10: Das Bild von $[0,1]^2$

$$M^{c^{min}} = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Bild 5.11: Die Adjazenzmatrix $M^{c^{min}}$

erwartet werden, daß diese Beziehung allgemein bei mehrdimensionalen β-Transformationen Gültigkeit hat.

Mit Hilfe des Eigenvektors $p = (p_i)$ zu dem Eigenwert $\varrho(M^{\mathcal{C}^{min}})$ der Adjazenzmatrix $M^{\mathcal{C}^{min}}$ kann das invariante Maß des untersuchten Modells ausgedrückt werden:

$$dm_T(x) = p(x,y)\,dxdy \qquad (5.71)$$
$$\text{mit } p(x,y) = \sum_{i \in I_{\mathcal{C}^{min}}} p_i \chi_{C_i^{\mathcal{C}^{min}}}(x,y).$$

Wie man den besprochenen Beispielen entnehmen kann, steht das Spektrum der Adjazenzmatrix $M^{\mathcal{C}^{min}}$ offenbar in einem engen Zusammenhang mit der definierenden Matrix der Torus-Abbildung T. Es ist uns jedoch nicht gelungen, dieses Verhältnis näher zu kennzeichnen.

Ferner konnte keine Aussage bewiesen werden über die Modifikationen, die das Spektrum des Perron-Frobenius-Operators erfährt, wenn seiner Definition Verfeinerungen der minimalen charakterisierenden Zerlegung zugrundegelegt werden; die im vorangegangenen Abschnitt angewandten Methoden sind für die hier diskutierte Situation nicht praktikabel. Wir weisen jedoch auf das auch den mehrdimensionalen affinen β-Transformationen innewohnende Strukturmerkmal einer konstanten Jakobi-Matrix hin. Aufgrund des entsprechenden Resultates in einer Dimension und der Ergebnisse bei den im Abschnitt 5.3 behandelten speziellen Torus-Transformationen wagen wir folgende Hypothesen aufzustellen:

Hypothese 5.9 *Besitzt eine mehrdimensionale affine β-Transformation $T : x \mapsto \beta x + q \pmod 1$ endliche charakterisierende Zerlegungen mit stückweise glatten Rändern, so ist sie* einfach relaxierend. *Für die Relaxationszeit τ gilt:*

$$1/\tau = \max\{-\log(\xi(M^{\mathcal{C}^{min}})/|\det\beta|), \log|\det\beta|\}. \qquad (5.72)$$

Hypothese 5.10 *Der in obiger Hypothese formulierte Sachverhalt gilt allgemein für Transformationen mit konstanter Jakobi-Matrix, sofern sie den Postulaten des Kapitels 2 genügen.*

Kapitel 6

Chebysheff-Systeme in zwei Dimensionen

Den bisher diskutierten Beispielen dynamischer Systeme lagen ausschließlich stückweise lineare Transformationen des Phasenraumes zugrunde. Eine Klasse mehrdimensionaler Transformationen, die diese Eigenschaft nicht besitzen, steht im Mittelpunkt des abschließenden Kapitels dieser Arbeit.

Eindimensionale Chebysheff-Abbildungen des Intervalls $[-1,1]$:

$$T_n : [-1,1] \to [-1,1],\ x \mapsto \mathrm{T}_n(x), \tag{6.1}$$

worin $\mathrm{T}_n(x)$ das n-te Chebysheff-Polynom bezeichnet, bilden häufig untersuchte Standard-Beispiele der Ergodentheorie dynamischer Systeme. Ihre Mischungseigenschaften sind ausführlich untersucht in der Referenz [62]. Der einfache Koordinatenwechsel $y = \cos \pi x$ erweist T_n als zu der stückweise linearen Intervall-Abbildung [23]:

$$\begin{aligned} \hat{T}_n &: [0,1] \to [0,1], \\ x &\mapsto (-1)^{\lceil nx \rceil}(\lceil nx \rceil - nx - \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2} \end{aligned} \tag{6.2}$$

konjugiert. $\hat{T}_n$ genügt den Postulaten des Kapitels 2; inbesondere korrespondiert $\hat{T}_2$ der in Abschnitt 4.1 untersuchten Zelt-Abbildung.

Auch speziell beschaffene Klassen zweidimensionaler Verallgemeinerungen derartiger Systeme können mit stückweise linearen Modellen in Verbindung gebracht werden, auf welche die Methode des Perron-Frobenius-Operators in besonders einfacher Weise zur Anwendung gebracht werden kann. Dadurch werden invariante Maße der Berechnung zugänglich; ferner sind Aussagen über das Relaxationsverhalten möglich.

Einer Eigenfunktion $\hat{e}$ zu dem Eigenwert λ eines Perron-Frobenius-Operators $\hat{\mathcal{L}}$, der einem derartigen stückweise linearen Modell zugeordnet ist, entspricht eine

Eigenfunktion e zu demselben Eigenwert des korrespondierenden, bezüglich eines geeigneten Funktionenraumes formulierten PF-Operators $\mathcal{L}$ eines Chebysheff-Systems. Wir treffen im Rahmen dieser Arbeit keine Aussage darüber, ob das Spektrum von $\mathcal{L}$ nicht darüber hinaus noch weitere Elemente umfaßt, welche durch die folgende Untersuchung nicht erschlossen werden können.

Nach der Besprechung einiger Beispiele schließt ein Hinweis auf die Anwendung mehrdimensionaler Chebysheff-Modelle zur Beschreibung einfacher mechanischer Systeme das Kapitel ab.

6.1 Invariante Maße und Relaxationseigenschaften

Vorgegeben sei eine expansive 2×2-Matrix mit ganzzahligen Elementen:

$$t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Gl(2, \mathbf{Z}),$$
$$\min\{\lambda \in \mathbf{C} : \lambda \in \operatorname{spec} t\} > 1. \tag{6.3}$$

Ferner mögen $\mathtt{T}_n(x)$ und $\mathtt{U}_n(x)$ die Chebysheff-Polynome erster bzw. zweiter Art bezeichnen [50]. Chebysheff-Polynome negativer Ordnung seien eingeführt durch die Relationen $\mathtt{T}_{-n}(x) := \mathtt{T}_n(x)$ und $\mathtt{U}_{-n}(x) := -\mathtt{U}_n(x)$. Schließlich seien die Funktionen $\mathtt{S}_n$ definiert durch $\mathtt{S}_n(x) := \sqrt{1-x^2}\,\mathtt{U}_n(x)$.

Definition 6.1 *Die nicht invertierbare Transformation des Kubus* $[-1,1]^2$*:*

$$T : [-1,1]^2 \to [-1,1]^2,$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathtt{T}_a(x)\mathtt{T}_b(y) - \mathtt{S}_a(x)\mathtt{S}_b(y) \\ \mathtt{T}_c(x)\mathtt{T}_d(y) - \mathtt{S}_c(x)\mathtt{S}_d(y) \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

heißt zweidimensionale Chebysheff-Transformation.

Liegt der Abbildung T eine Diagonalmatrix t zugrunde, so erweist sich T als direktes Produkt zweier eindimensionaler Chebysheff-Transformationen (vergleiche Abschnitt 5.2). Analog zu dem Fall einer Dimension entsprechen zweidimensionalen Chebysheff-Abbildungen spezielle, stückweise lineare Transformationen des Einheitskubus. Das nachfolgende Lemma formuliert diesen Zusammenhang und erschließt damit die Klasse zweidimensionaler Chebysheff-Systeme einer eingehenden Untersuchung durch die Methode des Perron-Frobenius-Operators.

Lemma 6.2 *Durch die Vermittlung der Koordinatentransformation* $\chi : [0,1]^2 \to [-1,1]^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1', x_2') = (\cos \pi x_1, \cos \pi x_2)$ *ist die Abbildung* $T : [-1,1]^2 \to$

$[-1,1]^2$ *konjugiert zu der Transformation des Kubus* $[0,1]^2$*:*

$$\hat{T} : [0,1]^2 \to [0,1]^2,$$
$$x \mapsto diag((-1)^{\lfloor (tx)_1 \rfloor}, (-1)^{\lfloor (tx)_2 \rfloor}) tx \pmod 1. \tag{6.5}$$

Hierbei bezeichnet $diag(a,b)$ *eine* 2×2*-Diagonalmatrix mit den Elementen* a *und* b*; die Größe* $\lfloor (tx)_i \rfloor$, $i = 1,2$, *stellt den ganzzahligen Anteil der* i*-ten Komponente des Vektors* tx *dar.*

Offenbar besitzt $\hat{T}$ eine nur lokal konstante Jakobi-Matrix. Einfaches Relaxationsverhalten kann also nach den im Abschnitt 5.4 geäußerten Hypothesen im allgemeinen nicht erwartet werden.

Beweis Die Funktionen $\mathrm{T}_n : [-1,1] \to [-1,1]$ und $\mathrm{S}_n : [-1,1] \to [-1,1]$ besitzen die Darstellungen:

$$\mathrm{T}_n(x) = \cos(n \arccos x) \text{ bzw. } \mathrm{S}_n(x) = \sin(n \arccos x). \tag{6.6}$$

Offenbar gilt:

$$(T \circ \chi)(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos \pi a x_1 \cos \pi b x_2 - \sin \pi a x_1 \sin \pi b x_2 \\ \cos \pi c x_1 \cos \pi d x_2 - \sin \pi c x_1 \sin \pi d x_2 \end{pmatrix} \tag{6.7}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos \pi (a x_1 + b x_2) \\ \cos \pi (c x_1 + d x_2) \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

aufgrund der bekannten Additionstheoreme. Die Kosinus-Funktion ist periodisch und antisymmetrisch:

$$\cos \pi (x + 2n) = \cos \pi x, \ \cos \pi (x + 2n - 1) = -\cos \pi x \tag{6.9}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$. Daher gilt:

$$(T \circ \chi)(x_1, x_2) = (\chi \circ \hat{T}_t)(x_1', x_2'), \tag{6.10}$$

was behauptet wurde. ◇

Der Struktur der Transformation $\hat{T}$ kann unmittelbar entnommen werden, daß ihre natürliche Zerlegung $\mathcal{N}$ mit der entsprechenden Zerlegung der durch die Matrix t induzierten Torus-Transformation $T^1 : Tor^2 \to Tor^2$, $x \mapsto tx \pmod 1$ übereinstimmen muß.

Analog genügt es zur Konstruktion charakterisierender Zerlegungen, die entsprechenden Zerlegungen der Transformationen T^1 und $T^2 : Tor^2 \to Tor^2$, $x \mapsto \mathrm{diag}(1,-1)tx \pmod 1$ zu betrachten. Aufgrund der Ergebnisse des 5.Kapitels ist eine charakterisierende Zerlegung C^i von $T^i, i = 1,2$, zugleich auch charakterisierende Zerlegung von $-T^i$. Wir sind damit imstande, ein Kriterium für die Existenz charakterisierender Zerlegungen der Abbildung $\hat{T}$ anzugeben.

Lemma 6.3 *Die Transformation $\hat{T} : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ besitzt endliche charakterisierende Zerlegungen C mit stückweise glatten Rändern, wenn für die Matrix t mit Zahlen $n, m \in \mathbf{N}$ und $k, l \in \mathbf{Z}$ gilt:*

$$t^n = kt \tag{6.11}$$

$$(diag(1,-1)\,t)^m = l\,diag(1,-1)\,t. \tag{6.12}$$

Die Zerlegungen sind gegeben durch die Verfeinerungen $C = C^1 \vee C^2$; insbesondere gilt $C^{min} = C^{1min} \vee C^{2min}$.

Mit den Schnitten S_i, $i \in I_{\mathcal{N}}$, den linearen Funktionen:

$$S_i : x \mapsto (\mathrm{diag}((-1)^{\lfloor (tx)_1 \rfloor}, (-1)^{\lfloor (tx)_2 \rfloor}))^{-1} (x + \lfloor \mathrm{diag}((-1)^{\lfloor (ty)_1 \rfloor}, (-1)^{\lfloor (ty)_2 \rfloor})\, tx \rfloor), \tag{6.13}$$

$$y \in \mathcal{N},\ |\det D_x S_i| = |\det t|, \tag{6.14}$$

lautet der Perron-Frobenius-Operator $\mathcal{L}_{\hat{T}} : B(I_C, D) \to B(I_C, D)$ der zu der Chebysheff-Transformation T konjugierten Abbildung $\hat{T}$:

$$(\mathcal{L}_{\hat{T}} f)(j,x) = |\det t|^{-1} \sum_{i \in I_C} M^{\mathcal{C}}_{ji} f(i, S_{i'} x),\ \ j \in I_C. \tag{6.15}$$

Hierin bezeichnet $M^{\mathcal{C}}$ die Adjazenzmatrix des Graphen $\mathrm{G}_T(C)$ und $i' \in I_{\mathcal{N}}$ dasjenige Element aus $I_{\mathcal{N}}$, für das gilt: $C_i \subseteq \mathcal{N}_{i'}$.

Die Matrizen t und $s = \mathrm{diag}(1,-1)\,t$ sind aufgrund des Lemmas 5.4 diagonalisierbar unter Verwendung zweier Matrizen U_1 und U_2:

$$U_1 t U_1^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \tag{6.16}$$

$$U_2 s U_2^{-1} = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2). \tag{6.17}$$

Ferner gilt für die Eigenwerte der Matrizen s und t:

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\mu_1| = |\mu_2|. \tag{6.18}$$

Man betrachte nun die Wirkung des Perron-Frobenius-Operators $\mathcal{L}_{\hat{T}}$ auf Funktionen g, die definiert sind durch die Relation:

$$g(j,x) = f(j, U_i x),\ j \in I_C, \tag{6.19}$$

$$\text{mit } i = \begin{cases} 1 & \text{falls } D_x S_{j'} = (\pm 1)t \\ 2 & \text{falls } D_x S_{j'} = (\pm 1)s. \end{cases}$$

Durch einen Rückgriff auf die gleiche Vorgehensweise wie im Kapitel 5 kann $\mathcal{L}_{\hat{T}}$, auf den Raum $P(I_C, D)$ polynomialer Funktionen, als blocktrianguläre Matrix mit den Diagonalblöcken:

$$M^{(m,n)} = |\det t|^{-1} M^{\mathcal{C}} D^{(m,n)},\ \ m,n = 0,1,2,\ldots \tag{6.20}$$

aufgefaßt werden. Hierbei stellt $D^{(m,n)}$ eine Diagonalmatrix dar mit Elementen aus der Menge:

$$D^{(m,n)}_{ij} \in \{d \in \mathbf{C} : d = (\pm\alpha)^{-m} (\pm\beta)^{-n},\ \alpha, \beta \in \mathrm{spec}\, t \cup \mathrm{spec}\, s\}. \tag{6.21}$$

Lemma 6.4 *Die Spekralradien $\varrho(M^{(m,n)})$ der Matrizen $M^{(m,n)}$ genügen der Ungleichung:*

$$\varrho(M^{(m,n)}) \leq |\det t|^{-\frac{m+n}{2}}. \tag{6.22}$$

Beweis Der Absolutbetrag einer Matrix $A = (a_{ij})$ ist definiert durch $|A| := (|a_{ij}|)$. Nach einem bekannten Theorem über Spektralradien gilt die Ungleichung: $\varrho(A) \leq \varrho(|A|)$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \varrho(M^{(m,n)}) &= |\det t|^{-1}\varrho(M^C D^{(m,n)}) && (6.23)\\ &\leq |\det t|^{-1}\varrho(|M^C D^{(m,n)}|) && (6.24)\\ &= |\det t|^{-1}|\det t|^{-\frac{m+n}{2}}\varrho(M^C) && (6.25)\\ \Rightarrow\ \varrho(M^{(m,n)}) &\leq |\det t|^{-\frac{m+n}{2}}, && (6.26) \end{aligned}$$

da die Größe $|\det t|^{-1}\varrho(M^C)$ als Spektralradius des Perron-Frobenius-Operators gleich 1 sein muß. ◇

Die Dichtefunktion $p(x)$ des invarianten Maßes $d\hat{m}(x) = p(x)\,dx$ der Transformation $\hat{T}$ ist eine stückweise konstante Funktion: $p(x) = \sum_{i\in I_C} p_i \chi_{C_i}(x)$, deren Koeffizienten p_i, $i \in I_C$, die Komponenten des Eigenvektors p zum Eigenwert $\varrho(M^C) = |\det t|$ der Matrix M^C darstellen. Die Theorie nichtnegativer Matrizen garantiert die Eindeutigkeit und Nicht-Negativität dieses Vektors. Das invariante Maß der korrespondierenden Chebysheff-Abbildung ist damit der Berechnung zugänglich:

Satz 6.5 *Das bezüglich des Lebesgue-Maßes absolut stetige invariante Maß der Chebysheff-Transformation $T : [-1,1]^2 \to [-1,1]^2$ mit wenigstens einer endlichen charakterisierenden Zerlegung C mit stückweise glatten Rändern ist gegeben durch:*

$$\begin{aligned} dm_i(x,y) &= \frac{p(x,y)dxdy}{\pi^2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}},\\ p(x,y) &= \sum_{i\in I_C} p_i \chi_{C_i}(x,y), \end{aligned} \tag{6.27}$$

mit Konstanten $p_i \geq 0$, die bestimmt sind durch die Matrixgleichung $M^C p = |\det t|\, p$, $p = (p_i)$. Hierbei bezeichnet M^C die Adjazenzmatrix des Graphen $G_T(C)$ der zugrundeliegenden charakterisierenden Zerlegung des Systems.

Beweis Man betrachte das Integral $\int_{G\subseteq[0,1]^2} dxdy\, p(x,y)$. Eine einfache Substitution:

$$(x,y) = \chi^{-1}(x',y') = 1/\pi(\arccos x', \arccos y') \tag{6.28}$$

führt auf die Relation:

$$\int_G dxdy\, p(x,y) = \int_{\chi G\subseteq[-1,1]^2} dx'dy' \frac{p(x',y')}{\pi^2\sqrt{(1-x'^2)(1-y'^2)}}, \tag{6.29}$$

was behauptet wurde. ◇

Aufgrund der Beziehung 6.20 und des Lemmas 6.4 hängt der subdominante Spektralradius $\xi(\mathcal{L}_T)$ des Perron-Frobenius-Operators von der Natur der entsprechenden Größe $\xi(M^C)$ ab. Gilt die Ungleichung $\xi(M^C) \geq |\det t|^{1/2}$, so ist $\xi(\mathcal{L}_T) = \xi(M^C)/|\det t|$. Ist diese Abschätzung nicht erfüllt, so erhält man die Aussage: $\xi(\mathcal{L}_T) \leq |\det t|^{1/2}$.

Es ist uns im Falle der Chebysheff-Systeme nicht gelungen, die Größe $\xi(M^C)$ für alle möglicherweise auftretenden charakterisierenden Zerlegungen C zu berechnen oder die Ungleichung:

$$\xi(M^C) \leq \sqrt{|\det t|} \tag{6.30}$$

zu beweisen. Das Studium von Beispielen und die numerische Berechnung der Adjazenzmatrizen verschiedener charakterisierender Zerlegungen legen jedoch Evidenz für die Vermutung nahe, daß die Ungleichung 6.30 für jede Chebysheff-Transformation in zwei Dimensionen und alle charakterisierenden Zerlegungen erfüllt ist.

Hypothese 6.6 *Für die Relaxationszeit τ zweidimensionaler Chebysheff-Systeme gilt in allen, den Systemen auf natürliche Weise zugeordneten Räumen von Observablen die Abschätzung:*

$$\tau \log|\det t| \leq 2. \tag{6.31}$$

Wie man nachprüft, lautet die Kolmogorov-Sinai-Entropie h_{KS} der betrachteten Klasse dynamischer Systeme: $h_{KS} = \log|\det t|$. Die Beziehung:

$$\tau h_{KS} \leq 2 \tag{6.32}$$

steht, vorausgesetzt sie trifft zu, in enger Verwandtschaft zu der Relation $\tau h_{KS} = d$, die für die im Abschnitt 5.3 untersuchten Torus-Transformationen bewiesen wurde. Aufgrund der Überlegungen des 4.Kapitels kann jedoch nicht erwartet werden, daß bei den hier studierten zweidimensionalen Chebysheff-Systemen die Gleichung $\tau h_{KS} = 2$ für alle natürlichen Observablen Gültigkeit besitzt. Dort wurde nämlich für die Zelt-Abbildung $T_{\mu=1/2}$, die zu der eindimensionalen Chebysheff-Transformation $T_2 : x \mapsto 2x^2 - 1$ konjugiert ist, mehrfaches Relaxationsverhalten nachgewiesen.

Es ist demnach anzunehmen, daß auch mehrdimensionale Chebysheff-Systeme im allgemeinen mehrfaches Relaxationsverhalten aufweisen. Die hypothetische Ungleichung 6.30 erlaubt es jedoch trotzdem, die Größe:

$$\tau' = 2/\log|\det t| = 2/h_{KS} \tag{6.33}$$

als ein quantitatives Maß für die Relaxationsgeschwindigkeit der untersuchten Systeme anzusehen.

6.2 Beispiele, Verallgemeinerungen

Die zuvor beschriebenen Verhältnisse bei zweidimensionalen Chebysheff-Transformationen werden im folgenden durch zwei Beispiele beleuchtet. Ferner deuten wir an, auf welche Weise Chebysheff-Transformationen in drei oder mehr Dimensionen eingeführt werden können.

Wesentlich neue Erkenntnisse werden bei dem Übergang zu noch höheren Dimensionen jedoch nicht gewonnen; die Diskussion dieser Modelle kann analog zu dem zweidimensionalen Fall durchgeführt werden. Weil die Transformationsgleichungen jedoch auf verhältnismäßig komplizierte Weise von den Chebysheff-Polynomen erster und zweiter Art abhängig sind, verzichten wir auf ein ausführliches Studium dieser Systeme.

Beispiel 1: Ein sehr einfaches Beispiel einer zweidimensionalen Chebysheff-Abbildung ist gegeben durch Vorschrift:

$$\begin{aligned} T:\ & [-1,1]^2 \to [-1,1]^2, \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ & \mapsto \ \begin{pmatrix} \mathrm{T}_1(x)\mathrm{T}_1(y) - \mathrm{U}_1(x)\mathrm{U}_1(y) \\ \mathrm{T}_1(x)\mathrm{T}_{-1}(y) - \mathrm{U}_1(x)\mathrm{U}_{-1}(y) \end{pmatrix} \\ & = \ \begin{pmatrix} xy - (1-x^2)^{1/2}(1-y^2)^{1/2} \\ xy + (1-x^2)^{1/2}(1-y^2)^{1/2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.34}$$

Die Koordinatentransformation $\chi : x = \cos \pi x',\ y = \cos \pi y'$ bildet T auf eine stückweise lineare Tranformation des Einheitsquadrates ab:

$$\begin{aligned} & \hat{T} : [0,1]^2 \to [0,1]^2, \\ x \mapsto \hat{T} &= \sum_{i \in I_{\mathcal{N}}} l_i(x)\chi_{\mathcal{N}_i}(x), \end{aligned} \tag{6.35}$$

bei der die charakteristischen Funktionen $\chi_{\mathcal{N}_i}$ der natürlichen Zerlegung $\mathcal{N}$ (Abbildung 6.1) auftreten und durch l_i, $i = 1,2,3,4$, die linearen Abbildungen:

$$\begin{aligned} & l_1(x) = tx,\ \ l_2(x) = \mathrm{diag}(-1,1)\,t + (2,0)^{Tr}, \\ & l_3(x) = -t + (2,0)^{Tr} \ \text{ und } \ l_4 = \mathrm{diag}(1,-1)\,t \end{aligned} \tag{6.36}$$

bezeichnet sind. Offenbar ist nicht der gesamte Phasenraum $[0,1]^2$ für das Langzeitverhalten des Systems relevant, da unter der Wirkung von $\hat{T}$ gilt:

$$\hat{T}\,[0,1]^2 \subseteq \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2. \tag{6.37}$$

Man vergewissert sich, daß $\mathcal{N}$ im vorliegenden Fall zugleich die minimale charakterisierende Zerlegung $\mathcal{C}^{\min}$ des Systems darstellt und findet für den entsprechenden Perron-Frobenius-Operator $\mathcal{L}_{\hat{T}}^{\min}$ die Darstellung:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\hat{T}}^{\min} f)(1,x) &= 1/2(\,f(1,l_1^{-1}x) + f(2,l_2^{-1}x)\,) \\ (\mathcal{L}_{\hat{T}}^{\min} f)(2,x) &= 1/2(\,f(1,l_1^{-1}x) + f(2,l_2^{-1}x)\,). \end{aligned} \tag{6.38}$$

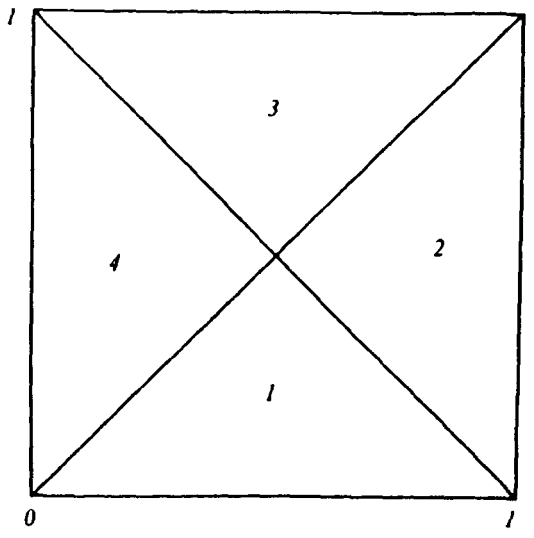


Bild 6.1: Die Zerlegung $\mathcal{N} = C^{min}$ des Beispiels 1

Sein Spektrum ergibt sich aufgrund der Relation 6.21 als die Menge:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{m=0}^{n} \operatorname{spec}\left(\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^m\sqrt{2^{-n}} & 0\\ 0 & (-1)^n\sqrt{2^{-n}}e^{i\frac{\pi}{4}(n-2m)}\end{pmatrix}\right),$$

da $\operatorname{spec} t = \{\pm\sqrt{2}\}$ und $\operatorname{spec}(\operatorname{diag}(-1,1)t) = \{-\sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\}$. Als Relaxationszeit bezüglich der minimalen charakterisierenden Zerlegung erhält man:

$$1/\tau = \log\sqrt{2} = \log\sqrt{|\det t|}. \tag{6.39}$$

Die Matrix $M^{C^{min}}$ des Graphen $G_T(C^{min})$ der Zerlegung $C^{min} = \mathcal{N}$ besitzt konstante Zeilensummen. Damit ist $(1,1)$ Eigenvektor zu dem Eigenwert $\varrho(M^{C^{min}}) = |\det t| = 2$, und das Maß:

$$dm(x,y) = \frac{\chi_{\mathcal{N}_1\cup\mathcal{N}_2}(x,y)\,dx\,dy}{\pi^2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} \tag{6.40}$$

stellt das absolut stetige invariante Maß der untersuchten Chebysheff-Transformation T dar.

Die bezüglich C^{min} verfeinerte charakterisierende Zerlegung C^1, die in Abbildung (6.2) dargestellt ist, führt in dem gewählten Beispiel auf die gleiche Relaxationszeit:

$$1/\tau = \log\sqrt{2}. \tag{6.41}$$

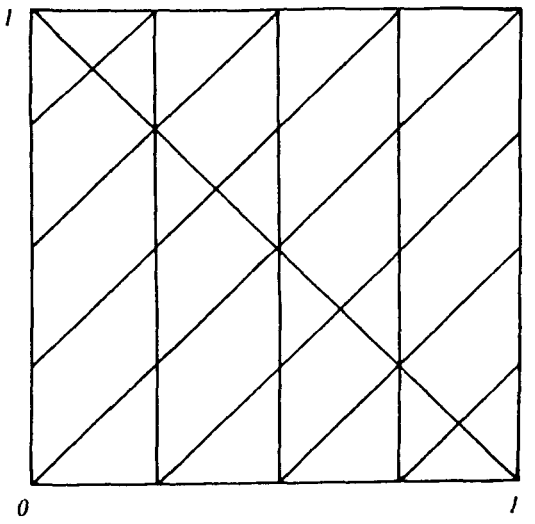


Bild 6.2: Die charakterisierende Zerlegung C^1 des Beispiels 1

Beispiel 2: Ein weiteres Chebysheff-System ist definiert durch die Transformation:

$$\begin{aligned} & T: \ [-1,1]^2 \to [-1,1]^2, \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ & \mapsto \ \begin{pmatrix} \mathrm{T}_1(x)\mathrm{T}_1(y) - \mathrm{U}_1(x)\mathrm{U}_1(y) \\ \mathrm{T}_3(x)\mathrm{T}_{-1}(y) - \mathrm{U}_3(x)\mathrm{U}_{-1}(y) \end{pmatrix} \\ & = \ \begin{pmatrix} xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \\ (4x^3-3x)y + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(4x^2-1)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.42}$$

Die minimale charakterisierende Zerlegung $C^{\min}$ des Systems umfaßt 18 Elemente. Ihre geometrische Gestalt ist in der Abbildung 6.3 dargestellt und wird durch verhältnismäßig kompliziert berandete Gebiete des Einheitsquadrates beschrieben.
Das Spektrum der korrespondierenden (18×18)-Adjazenzmatrix $M^{C^{\min}}$ wurde auf numerischem Wege mit einer Genauigkeit $\epsilon < 10^{-25}$ bestimmt. Man findet: spec $M^{C^{\min}} = \{4, 1, 0|_{16}\}$. Der Eigenwert Null ist offenbar sehr hoch entartet. Für die Relaxationszeit erhält man mit diesem Resultat, wie nach Hypothese 6.6 erwartet:

$$1/\tau = \log 4 = \log|\det t| < \log\sqrt{|\det t|}. \tag{6.43}$$

Um dreidimensionale Chebysheff-Transformationen zu erhalten, wählen wir eine

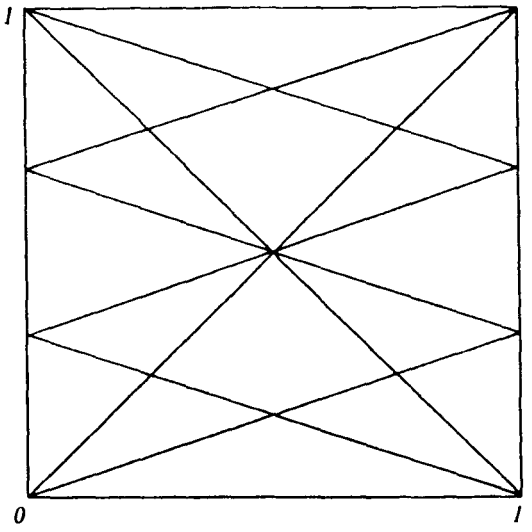


Bild 6.3: Die charakterisierende Zerlegung $\mathcal{C}^{\min}$ des Beispiels 2

(3×3)-Matrix $t \in Gl(3, \mathbb{Z})$ und setzen:

$$T : [-1,1]^3 \to [-1,1]^3,\ x \mapsto Tx, \tag{6.44}$$

wobei die i-te Komponente des Vektors $T_i x$, i=1, 2, 3, definiert ist durch folgende Relation:

$$\begin{aligned}(Tx)_i = &\left(\mathrm{T}_{t_{i1}}(x_1)\mathrm{T}_{t_{i2}}(x_2) - \mathrm{S}_{t_{i1}}(x_1)\mathrm{S}_{t_{i2}}(x_2)\right)\mathrm{T}_{t_{i3}}(x_3)\\ &-\left(\mathrm{S}_{t_{i1}}(x_1)\mathrm{T}_{t_{i2}}(x_2) + \mathrm{T}_{t_{i1}}(x_1)\mathrm{S}_{t_{i2}}(x_2)\right)\mathrm{S}_{t_{i3}}(x_3).\end{aligned} \tag{6.45}$$

Hierbei bezeichnen T_n und S_n die im letzten Abschnitt eingeführten Funktionen. Mit Hilfe bekannter trigonometrischer Identitäten ist es aufgrund der Darstellungen 6.6 möglich, eine zu T konjugierte stückweise lineare Transformation des Einheitskubus $[0,1]^3$ zu konstruieren, deren Relaxationsverhalten mit Hilfe der Methode des Perron-Frobenius-Operators untersucht werden kann. Die Vorgehensweise entspricht dabei völlig der Situation des zweidimensionalen Falles. Eine zu der Aussage des Lemmas 6.6 analoge Bedingung, die die Existenz endlicher charakterisierender Zerlegungen mit stückweise glatten Rändern garantiert, kann ohne grundsätzliche Schwierigkeiten formuliert werden.

Es wird aufgrund dieser Skizze deutlich, welchen Weg man im Prinzip einzuschlagen hat, um allgemein d-dimensionale Chebysheff-Tranformationen einzuführen. Diese Gedanken sollen jedoch hier nicht ausgeführt werden, da die charakteristischen Züge mehrdimensionaler Chebysheff-Transformationen bereits in zwei Dimensionen hinreichend deutlich diskutiert werden können.

6.3 Chebysheff-Systeme und harmonischer Oszillator

Als Inbegriff einer regulären, völlig unchaotischen Bewegungsform ist die periodische Bewegung eines Teilchens in einem harmonischen Oszillator-Potential anzusehen. Ein derartiges mechanisches Modell sei etwa gegeben durch die Hamilton-Funktion:

$$H = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \tfrac{1}{2}m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2) \tag{6.46}$$

mit $\omega_1 = 3$ und $\omega_2 = 1$. Aufgrund des rationalen Frequenzverhältnisses $\omega_1 : \omega_2 = 3 : 1$ führt die Lösung der zugehörigen Bewegungsgleichungen für geeignete Startwerte auf die Lissajoussche Figur:

$$x(t) = \cos \pi 3t,\ y(t) = \cos \pi t. \tag{6.47}$$

Diese sehr reguläre Trajektorie eines wohlbekannten Systems der klassischen Mechanik kann mit der Bahn eines exponentiell mischenden dynamischen Systems, das als Generator für Zufallszahlen fungieren könnte, in überraschende Verbindung gebracht werden. Es sei T die soeben ausführlich untersuchte Chebysheff-Transformation:

$$\begin{gathered} T:\ [-1,1]^2 \to [-1,1]^2, \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{T}_1(x)\mathrm{T}_3(y) - \mathrm{S}_1(x)\mathrm{S}_3(y) \\ \mathrm{T}_1(x)\mathrm{T}_{-1}(y) - \mathrm{S}_1(x)\mathrm{S}_{-1}(y) \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{6.48}$$

Der Vektor $(3,1)^{Tr}$ ist ein Eigenvektor der Matrix t zum Eigenwert $\lambda = 2$. Aufgrund der Eigenschaften der Funktionen T_n und S_n gilt die Relation:

$$T^n \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(2^n t) \\ y(2^n t) \end{pmatrix}. \tag{6.49}$$

Wir interpretieren dieses Resultat wie folgt (man ziehe zum Vergleich die in diesem Zusammenhang relevanten Aussagen der Referenz [69] heran):

> Unterwirft man die periodische Bewegung eines zweidimensionalen harmonischen Oszillators einer stroboskopischen, also zeitlich disketen Beobachtung, der eine exponentiell voranschreitende Zeitskala zugrundeliegt, so erhält man Meßdaten, die graphisch aufgetragen völlig irregulär verteilt erscheinen.
>
> Umgekehrt kann man die chaotisch den Phasenraum durchwandernde Bahn eines Startpunktes unter der Wirkung einer Chebysheff-Transformation durch den Übergang zu einer logarithmischen Zeitskala mit einer außerordentlich einfach gearteten periodischen Trajektorie in Verbindung bringen.

Aus dem besprochenen Beispiel läßt sich nach unserer Auffassung die prinzipielle Feststellung ableiten, daß nicht immer, wenn Computerexperimente oder reale Messungen eine chaotisch erscheinende Serie von Datenpunkten produzieren, der Dynamik des zugrundeliegenden physikalischen Prozesses 'Chaotizität' als reale Eigenschaft innewohnen muß. Ein einfacher Wechsel der Zeitskala, also allein der subjektiven Beobachtungsweise, könnte möglicherweise die dynamischen Eigenschaften eines derartig einfach strukturierten dynamischen Systems wie des harmonischen Oszillators enthüllen.

Die irregulären Eigenschaften der Bahn eines Chebysheff-Systems können diesen Überlegungen zufolge als ein Beispiel für 'subjektives Chaos' angesehen werden, das gewissermaßen künstlich erzeugt wird, allein durch eine der konkret vorliegenden Problematik unangepaßte Beobachtungsmethode bei der Untersuchung eines durchaus regulären physikalischen Systems.

Mit der Einführung exponentieller und logarithmischer Zeitskalen ziehen wir allgemeinere Zeitskalen-Transformationen in Betracht als die üblicherweise in der Physik des Meßprozesses diskutierten affinen Umskalierungen $t \mapsto \alpha t + t_0$. Wir schlagen vor, auch jene nichtlinearen Skalenänderungen als physikalisch legitim anzusehen.

Kapitel 7

Ansätze künftiger Entwicklung

Die in dieser Arbeit vorgestellten Überlegungen vermitteln die Einsicht, daß sich hinter dem Terminus 'Relaxation' ein sehr vielschichtiger Komplex physikalischer Phänomene und mathematischer Problematik verbirgt:

- Es wurde eine Klasse exakter dynamischer Systeme vorgestellt, bei der Relaxationsvorgänge in stationäre Gleichgewichtszustände mit Hilfe der Methode des Perron-Frobenius-Operators untersucht werden können.
- Der Anwendungsbereich dieser Methode ist an technische Voraussetzungen gebunden, die nicht immer erfüllt sind.
- Es besteht eine Wahlfreiheit unter verschiedenen, grundsätzlich gleichberechtigten Räumen natürlicher Observablen eines Systems.
- An Beispielen wird sichtbar, daß im allgemeinen verschiedene Klassen natürlicher Observablen zu unterschiedlichen Relaxationszeiten desselben Systems führen; das invariante Maß ist jedoch für alle Observablen identisch.
- Relaxationszeiten sind in der Regel auf verhältnismäßig komplizierte Weise mit den Bestimmungsstücken eines Systems verknüpft.
- Anscheinend besteht im allgemeinen kein einfach gearteter Zusammenhang der Relaxationszeit mit dem Ljapunov-Exponenten und der Kolmogorov-Sinai-Entropie.
- Unter sehr speziellen Umständen können dynamische Systeme einfach relaxierend sein. Ihnen ist damit eine einzige für alle natürlichen Observablen des Systems gleiche Relaxationszeit zugeordnet.

Die künftige Entwicklung in diesem Forschungsbereich hängt entscheidend davon ab, ob es in Zukunft gelingen wird, mathematische Methoden zu entwickeln, die

eine erfolgreiche und explizite Behandlung des Perron-Frobenius-Operators auch in allgemeineren als den im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Fällen ermöglichen. Abstrakt gesprochen wird eine umfassende Theorie sogenannter Kompositionsoperatoren benötigt. Ansätze hierzu finden sich in den Referenzen [70,71].

Ferner ist es eine drängende Aufgabe, das konzeptionelle Problem zu klären, auf welche Weise die Methode des Perron-Frobenius-Operators auch in solchen Situationen eine explizite Anwendung finden kann, die durch erzeugende Zerlegungen mit fraktalen Berandungen gekennzeichnet wird.

In diesem Zusammenhang ergibt sich die vielleicht noch auf längere Sicht unbeantwortet bleibende Frage, welchen Ort die Relaxationszeiten im Rahmen einer vollständigen begrifflichen Charakterisierung dynamischer Systeme einnehmen.

Literatur

[1] Beck,C., Roepstorff,G.: *From dynamical systems to the Langevin equation*, Physica **145A**, 1 (1987)

[2] Schuster,H.G.: *Deterministic Chaos*. Weinheim: Physik-Verlag, 1984

[3] Hao Bai-Lin: *Chaos*. Singapore: World Scientific Publ., 1984

[4] Lasota,A., Mackey,M.C.: *Probabilistic Properties of Deterministic Systems*. Cambridge: University Press, 1985

[5] Grossmann,S., Thomae,S.: *Invariant distributions and stationary correlation functions of one-dimensional discrete processes*, Z.Naturforsch. **32a**, 1353 (1977)

[6] Hofbauer,F., Keller,G.: *Ergodic properties of invariant measures for piecewise monotonic transformations*, Math.Z. **180**, 119 (1982)

[7] Krylov,N.S.: *Works on the Foundation of Statistical Physics*. Princeton Series in Physics, 1979

[8] Resibois,P., De Leener,M.: *Classical kinetic theory of fluids*. New York: John Wiley, 1977

[9] Landau,L.D., Lifschitz,E.M.: *Lehrbuch der theoretischen Physik*. Band V, S.6, Berlin: Akademie-Verlag, 1971

[10] Konishi,T.: *Relaxation and diffusion in Hamiltonian systems with many degrees of freedom*, Prog.Theor.Phys.Suppl. **98**, 19 (1989)

[11] Sokal,A.D., Thomas,L.E.: *Exponential convergence to equilibrium for a class of random-walk models*, J.Stat.Phys. **54**, 797 (1989)

[12] Kruscha,K.J.G., Pompe,B.: *Information flow in 1-D maps*, Z.Naturforsch. **43a**, 93 (1987)

[13] Mayer,D.: *Approach to equilibrium for locally expanding maps*, Commun.-Math.Phys. **95**, 1 (1984)

[14] Mayer,D., Roepstorff,G.: *On the relaxation time of Gauss's continued-fraction map*, J.Stat.Phys. **47**, 149 (1987)

[15] Györgyi,G., Szèpfalusy,P.: *Relaxation processes in chaotic states of one dimensional maps*, Acta Phys.Hung. **64**, 1 (1988)

[16] Mayer,D., Roepstorff,G.: *Strange attractors and asymptotic measures of discrete-time dissipative systems*, J.Stat.Phys. **31**, 309 (1983)

[17] Lohöfer,G.: *Korrelationsfunktionen eines zeitlich kontinuierlichen, chaotischen Systems mit seltsamem Attraktor.* Dissertation, RWTH Aachen, 1986

[18] Crawford,J.D., Cary,J.R.: *Decay of correlations in a chaotic measure-preserving transformation*, Physica **6D**, 223 (1983)

[19] Mayer,D.: *The Ruelle-Araki Transfer Operator in Classical Statistical Mechanics.* In: Lecture Notes in Physics Vol. **123**, Berlin Heidelberg New York: Springer, 1980

[20] Pollicott,M.: *On the rate of mixing of axiom A flows*, Invent.math. **81**, 413 (1985)

[21] Ruelle,D.: *Locating resonances for axiom A dynamical systems*, J.Stat.Phys. **44**, 281 (1986)

[22] Isola,S.: *Resonances in chaotic dynamics*, Comm.Math.Phys. **116**, 343 (1988)

[23] Roepstorff,G: *On the exponential decay of correlations in exact dynamical Systems*, unveröffentlicht

[24] Bowen,R: *Markov-Partitions are not smooth*, Proc.Amer.Math.Soc. **71**, 130 (1978)

[25] Urbanski,M.: *On capacity of continuum with non-dense orbit under a hyperbolic toral automorphism*, Preprint **289**, Inst.of.Math., Polish Academy of sciences (1983)

[26] Mané,R.: *Orbits of paths under hyperbolic toral automorphisms*, Proc.Amer.-Math.Soc. **73**, 121

[27] Bedford,T.: *Generating special Markov partitions for hyperbolic toral automorphisms using fractals*, Ergod.Th.&Dyn.Syst. **6**, 325 (1986)

[28] Rényi,A.: *Representations for real numbers and their ergodic properties*, Acta Math.Acad.Sci.Hung. **8**, 472 (1957)

[29] Parry,W.: *On the β-expansions of real numbers*, Acta Math.Acad.Sci.Hung. **11**, 401 (1960)

[30] Block,L., Guckenheimer,J., Misiurewicz,M., Young,L.,S.: *Periodic points and topological entropy of one dimensional maps,* Lecture Notes in Mathematics **918**, Springer

[31] Morris,C., Ho,C.-W.: *A graph theoretic proof of Sharkovsky's theorem on the periodic points of continuous functions,* Pacific J.of Math. **96**, 361 (1981)

[32] Adler,R.L., Marcus,B.: *Topological entropy and equivalence of dynamical systems,* Mem.Amer.Math.Soc. **219** (1979)

[33] Cvetković,D., Doob,M., Sachs,H.: *Spectra of Graphs.* New York San Franzisco London: Academic Press, 1980

[34] Fritz,F.-J., Huppert,B., Willems,W.: *Stochastische Matrizen.* Berlin Heidelberg New York: Springer, 1979

[35] Alekseev,V.M., Yakobson,M.V.: *Symbolic dynamics and hyperbolic dynamic systems,* Physics Reports **75**, 287 (1981)

[36] Walters,P.: *An Introduction to Ergodic Theory.* New York Heidelberg Berlin: Springer, 1975

[37] Mayer,D.: *On the thermodynamic formalism for the Gauss map,* Commun.Math.Phys. **130**, 311 (1990)

[38] Schaefer,H.: *Topological Vector Spaces.* New York Heidelberg Berlin: Springer, 1971

[39] Schatten,R: *A Theory of Cross Spaces.* Princeton University Press, 1950

[40] Mayer,D.: *The transfer-matrix of a one-sided subshift of finite type with exponential interaction,* Lett.Math.Phys. **1**, 335 (1976)

[41] Kantorovic,V.I., Vulih,B.Z., Pinsker,A.G.: *Funktional Analysis in Partially Orderes Spaces.* Groningen: P.Noordhoff, 1973

[42] Lasota,A., Yorke,J.A.: *Exact dynamical systems and the Frobenius-Perron operator,* Trans.Amer.Math.Soc. **273**, 375 (1982)

[43] Mayer,D.: *On the location of poles of Ruelle's zeta function,* Lett.Math.Phys. **14**, 105 (1987)

[44] Hofbauer,F., Keller,G.: *Zeta-functions and transfer-operators for piecewise linear transformations,* J.f.R.u.A.Math. **352**, 100 (1983)

[45] Jiang,Y., Gang,H.: *Exact solutions of the invariant density for piecewise linear approximation to cubic maps,* J.Phys.**A**: Math.Gen. **21**, 2717 (1988)

[46] Friedman,N, Boyarsky,A: *Matrices and eigenfunctions induced by Markov maps,* Linear Algebra Appl. **38**, 141 (1981)

[47] Byers,W: *Matrices induced by endomorphisms of finite sets*, Linear Algebra Appl. **93**, 81 (1987)

[48] Scholz,H.J.: *Markov chains and discrete chaos*, Physica **4D**, 281 (1982)

[49] Mori,H., So,B.-C., Ose,T.: *Time-correlation functions of one dimensional transformations*, Progr.Theor.Phys. **66**, 1266 (1981)

[50] Magnus,W., Oberhettinger,F., Soni,R.P.: *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics.* Berlin Heidelberg New York: Springer, 1966 (3.Aufl.)

[51] Parry,W., Tuncel,S.: Ergod.Th.&Dynam.Syst. **1**, 303 (1981)

[52] Rothblum,U.G., Tan,C.P.: *Upper bounds on the maximum modulus of subdominant eigenvalues of nonnegative matrices*, Linear Algebra Appl. **66**, 45 (1985)

[53] Wimmer,H.K.: *Powers of a matrix and a formula for the moduli of its eigenvalues*, Linear Algebra Appl. **71**, 339 (1985)

[54] Weyl,H.: *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod 1*, Math.Annalen **77**, 313 (1916)

[55] Davis,P.: *Circulant Matrices.* New York: Wiley, 1979

[56] Ablov,C.M., Brenner,J.L.: *Roots and canonical forms for circulant matrices*, Trans.Amer.Math.Soc. **107**, 360 (1963)

[57] Elspas,B:, Turner,J.: *Graphs with circulant adjacency matrices*, J.Comb.-Theory , 279 (1970)

[58] Hammersley,J.M.: *The friendship theorem and the love problem*, in: Surveys in Combinatorics, London Mathematical Society Lecture Notes Series: **82**, 31 (1983)

[59] Dörfle,M.: *Spectrum and eigenfunctions of the Frobenius-Perron operator of the tent map*, J.Stat.Phys. **40**, 93 (1985)

[60] Shigematsu,H., Mori,H., Yoshida,T., Okamoto,H.: *Analytic study of power spectra of the tent map near band-splitting transitions*, J.Stat.Phys. **30**, 649 (1983)

[61] Yoshida,T., Mori,H., Shigematsu,H.: *Analytic study of chaos of the tent map: band structures, power spectra and critical behaviors*, J.Stat.Phys. **31**, 279 (1983)

[62] Rivlin,T.J.: *The Chebysheff Ploynomials.* Yew York: Wiley, 1974

[63] Pompe,B., Kruscha,J., Leven,R.W.: *State predictability and information flow in simple chaotic systems*, Z.Naturforsch. **41a**, 801 (1985)

[64] Horn,R.A., Johnson,C.A.: *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, 1985

[65] Lam,C.W.H.: *On some solutions of* $\mathbf{A}^k = d\mathbf{I} + \lambda\mathbf{J}$, J.Comb. Theory **23A**, 140 (1977)

[66] Haviv,M., Ritov,Y., Rothblum,U.G.: *Iterative methods for approximating the suddominant modulus of an eigenvalue of a nonnegative matrix*, Linear Algebra Appl. **87**, 61 (1987)

[67] Gratza,B.: *Ergodische Eigenschaften lokal analytischer, expandierender Abbildungen des Intervalls.* Diplomarbeit in Physik, RWTH Aachen, 1989

[68] Wilkinson,J.H., Reinsch,C.: *Linear Algebra.* Handbook for Automatic Computation. New York Heidelberg Berlin: Springer, 1971

[69] Johnson,P.W.: *Relation of mixing transformations to periodic motion in one dimension*, Acta Physica Austriaca **55**, 111 (1983)

[70] Mayer,D.: *Spectral properties of certain composition operators arising in statistical mechanics*, Comm.Math.Phys. **68**, 1 (1979)

[71] Kamowitz,H.: *The spectra of composition operators on* H^p, J.Funct.Anal. **18**, 132 (1975)

Abbildungsverzeichnis

2.1 Der Graph $G_T(\mathcal{E},\mathcal{C})$ 12
2.2 Die Transformation $T(x) = 3x + 2/3 \pmod 1$ 15

3.1 Die Transformation $T(x) = Nx + q \pmod 1$ 48
3.2 Eine spezielle zirkulante Transformation 55
3.3 $(n = 6, k = 0, g = 5)$ und $N = 4$ 61
3.4 $(n = 5, k = 2, g = 1)$ und $N = 3$ 62
3.5 $(n = 9, k = 0, g = 4)$ und $N = 2$ 63

4.1 Die Transformation T_μ für $\mu = 1/3$ 67
4.2 Die Größe $\xi(\mathcal{L}_\mu^0)$ 70
4.3 Die Größe $\xi(\mathcal{L}_\mu^1)$ 70
4.4 Die Größe $\xi(\mathcal{L}_\mu^2)$ 71
4.5 Die Transformation $T_{\mu,\nu}$ für $\mu = 1/3, \nu = -1/6$ 72
4.6 Der Parameterraum P 73
4.7 Das Phasendiagramm 74

5.1 Die erzeugende Zerlegung $\mathcal{E}_1$ 82
5.2 Die erzeugende Zerlegung $\mathcal{E}_2$ 82
5.3 Zur Konstruktion der Zerlegung $\mathcal{N}$ 87
5.4 Die Zerlegung $\mathcal{C}^{1min}$ 90
5.5 Die Zerlegung $\mathcal{C}^1$ 91
5.6 Die Zerlegung $\mathcal{C}^{2min}$ 91
5.7 Die Zerlegung $\mathcal{C}^{3min}$ 92
5.8 Die Transformation $T_{\beta,\beta}$ 99
5.9 Die Zerlegung $\mathcal{C}^{min}$ 100
5.10 Das Bild von $[0,1]^2$ 101
5.11 Die Adjazenzmatrix $M^{\mathcal{C}^{min}}$ 101

6.1 Die Zerlegung $\mathcal{N} = \mathcal{C}^{min}$ des Beispiels 1 110
6.2 Die charakterisierende Zerlegung $\mathcal{C}^1$ des Beispiels 1 111
6.3 Die charakterisierende Zerlegung $\mathcal{C}^{min}$ des Beispiels 2 112

Danksagung

Herr Universitätsprofessor Dr.rer.nat. Gert Roepstorff hat mich in die Problemstellung dieser Arbeit eingeführt und in zahlreichen Fachgesprächen die Bearbeitung des Themas nachhaltig gedanklich gefördert. Für sein persönliches Engagement und den mir eingeräumten freizügigen Arbeitsrahmen sage ich ihm meinen herzlichen Dank.

Herrn Professor Dr.rer.nat. Dieter Mayer danke ich für die Übernahme des Koreferates. Seine Kommentare und Vorschläge waren der endgültigen Gestalt dieser Arbeit förderlich.

Herrn Universitätsprofessor Dr.rer.nat. Hans A. Kastrup ist dafür zu danken, daß ich diese Arbeit in der anregenden Atmosphäre seines Instituts anfertigen konnte.

Ich danke allen Mitarbeitern des Lehrstuhls E am Institut für Theoretische Physik der RWTH Aachen, die mich in den letzten Jahren durch Diskussion, Kritik und Ermutigung in meinen wissenschaftlichen Bemühungen unterstützt haben.

Schließlich gebührt sehr herzlicher Dank meinen lieben Eltern, die mir eine wissenschaftliche Ausbildung ermöglicht haben, und ganz besonders meiner lieben Ehefrau Dorothea, die diese Arbeit drei Jahre hindurch mitgetragen hat.

Die vorliegende Dissertation wurde durch Mittel der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanziell unterstützt.

Lebenslauf

18.10.1962	geboren in Nürnberg Eltern: Prof. Dr.jur. Peter Koch Luise Koch, geb. Köllner
1972 – 1981	Besuch des Kaiser-Karls-Gymnasiums Aachen
1981/82	Aufnahme des Studiums in den Fächern Physik und Mathematik an der RWTH Aachen
1983	Vordiplom im Fach Physik
06.03.1987	Abschluß der Diplom-Prüfung im Fach Physik an der RWTH Aachen
seit 1983	wissenschaftliche Hilfkraft an verschiedenen physikalischen Instituten
28.04.1987	Eheschließung mit Dorothea Wolff
01.05.1987 – 30.04.1990	wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Theoretische Physik, Lehrstuhl E, der RWTH Aachen
08.09.1989	Geburt der Tochter Maria Magdalena
17.04.1990	Abschluß der Promotion an der RWTH Aachen