Hajo Lauenstein

Raffaels Fresko „Die Schule von Athen" – die Tafeln des Pythagoras und Euklid vor und nach der Restaurierung 1995/96

II. Ergänzendes zur Dechiffrierung der Tafelbotschaften

1. Einleitung

In meinem 1998 beim Verlag Peter Lang erschienenen Buch „Arithmetik und Geometrie in Raffaels Schule von Athen"[1] habe ich beweiskräftig dargelegt, dass es mir gelungen war, bislang unerkannt gebliebene codierte Informationen auf den beiden rechts und links auf der unteren Bildebene in Raffaels Fresko dargestellten Schiefertafeln[2] zu dechiffrieren. Dadurch hatte ich zugleich deren konzeptionelle Bedeutung für die harmonikale Bildkomposition klären und die konsequente Umsetzung dieses „Programms" im Fresko umfänglich nachweisen können.

Obgleich die rechts auf dem Fußboden liegende *Sterntafel*, über der Euklid mit dem Zirkel hantiert, und die links bei Pythagoras aufrecht gehaltene *Zahlen*- oder *Harmonietafel* völlig verschieden erscheinen, ist beiden gemeinsam, dass sie auf musikalische Harmonien und insbesondere – allerdings verschlüsselt – auf das seinerzeit in der Bild- und Baukunst hochaktuelle Zahlenverhältnis des „Goldenen Schnittes" als komplexes Programm für die harmonikale Bildgestaltung verweisen. Umgesetzt sind die harmonikalen Zahlenverhältnisse sowohl geometrisch, insbesondere in der Hallen-Architektur des Freskos, als auch zahlenmäßig in der figürlichen Ausstattung und in etlichen anderen Bilddetails.

In den Grundzügen war all dies bereits Ende 1995 geklärt und die Ergebnisse hatte ich dem damaligen Direktor der Bibliotheca Hertziana, Matthias Winner, in Manuskriptform nach Rom geschickt. Bedauerlich war, dass in der anschließenden Hauptphase meiner Arbeit am Buchmanuskript gerade die Restauration am Fresko lief, denn das mir damals zugängliche Bildmaterial konnte hinsichtlich seiner Detailschärfe nicht eben befriedigen, und meine Anfrage betreffs einer angeblich schon existierenden photogrammetrischen Aufnahme blieb ergebnislos.

Zugang zur Bauhütte erhielt ich bei meinem Besuch der Stanzen Ende Mai 1996 nicht, und die restaurierte „Schule von Athen" noch rechtzeitig vor dem vereinbarten Termin der Manuskriptabgabe beim Verlag selbst genau in Augenschein zu nehmen, war mir nicht mehr möglich. Dank für das Buch[3] kam vom Staatssekretariat des Vatikans mit Hinweis auf die „zuständigen Instanzen" (Vatikanische Museen), doch da die für die Restauration Verantwortlichen Diskussionsbedarf nicht angemeldet hatten, habe ich mir die veröffentlichten Bilder des restaurierten Freskos auf Details hin auch nicht mehr genau angesehen und die Sache dann „ad acta" gelegt.

---

[1] Hajo Lauenstein, Arithmetik und Geometrie in Raffaels Schule von Athen. Die geheimnisvolle Schlüsselrolle der Tafeln im Fresko für das Konzept harmonischer Komposition und der ungeahnte Bezug zum Athena-Tempel von Paestum; Frankfurt a. M. 1998

[2] vgl. in vorliegender Publikation Conrad Doose: Raffaels Fresko „Die Schule von Athen" – die Tafeln des Pythagoras und Euklid vor und nach der Restaurierung. Neue Erkenntnisse zu Raffaels geheimnisvollen Zeichen, Seite 243 – 263, Seite 243, Abb. 1.1

[3] Schreiben vom 07.04.1998

Zehn Jahre nach Abschluss der Restauration erfahre ich nun von Doose, dass auf der Zahlentafel bei Pythagoras Zeichen, welche bei der Entschlüsselung eine wichtige Rolle gespielt hatten, übermalt bzw. verändert worden sind[4]. Darüber hinaus entdeckte Doose, dem die Beschaffung qualitativ guten Fotomaterials auch aus der Zeit vor der Restaurierung gelungen war, einige Zeichen auf den Tafeln, welche ich seinerzeit übersehen hatte bzw. welche ich auf den mir damals zur Verfügung stehenden qualitativ schlechteren Ausschnittsvergrößerungen nicht sehen konnte.

Für einige dieser neuen Details hatte Doose, der meine bisherigen Ergebnisse bestens kennt, auch gleich sehr treffende Interpretationsansätze parat[5], und für die Bedeutung aller übrigen konnte ich schlüssige Erklärungen finden. Widersprüche zu den früheren Auslegungen ergaben sich nicht; die entdeckten Zeichen sind allesamt zusätzliche versteckte Hinweise Raffaels, welche das „Lesen" der codierten zentralen „Botschaften" des Tafel-Konzeptes ermöglichen sollten.

2. Bisheriger Kenntnisstand

2.1 Zur Zahlentafel

1. Von der *Zahlentafel* links bei Pythagoras wusste man bereits seit langem, dass auf ihr *musikalische Harmonien* visualisiert sind:

   a) Durch die griechischen Bezeichnungen für Oktave, Quinte, Quarte in den Bögen des „Harmonieschlüssels" sowie die dazu gehörenden oben stehenden römischen Zahlen 6, 8, 9, 12 (= „Große Tetraktys"), welche – zueinander ins Verhältnis gesetzt – das 1:2 der Oktave, 2 x das 2:3 der Quinte und 2 x das 3:4 der Quarte ergeben sowie mittig mit 8:9 den großen Ganzton, für den das auf Pythagoras zurückgehende Wort ΕΠΟΓΛΟΩΝ (Δ von Raffael in Λ geändert) über dem Schlüssel steht,

   b) durch das Zehnerdreieck unten auf der Tafel, mit dem durch Kombination der 1, 2, 3, 4 (= „Kleine Tetraktys") außer den oben schon gegebenen Haupt-Harmonien mit 1:3 die Duodezime und 1:4 die Doppeloktave zusätzlich ins Spiel kommen.

Abb 1: Raffaels Fresko „Die Schule von Athen", Pythagorasgruppe, Zahlentafel; nach Doose, Abb. 2a

---

[4] vgl. Anm. 2, Seite 246f; Conrad Doose, mit dem ich wegen einer Forschungsarbeit über die Jülicher Befestigungsanlagen (unter http://www.juelich.de/index.php?index=991 vorveröffentlicht) in engem Kontakt stehe, ist Vorsitzender des Fördervereins »Festung Zitadelle Jülich e.V.«

[5] vgl. Anm. 2, Seite 246f

2. Mit der 98er Buchpublikation ist von mir der „Goldene Schnitt“ als zusätzlicher Programmteil der Zahlentafel bewiesen worden:

   a) Da an der VII über dem Harmonieschlüssel der dorthin eigentlich gehörende dritte Balken zu fehlen schien, wurde das als Absicht gedeutet und führte zu dem Schluss, dass hierdurch auf die Zahlen 8, 13, 21, 34 der Fibonacci-Reihe verwiesen werden sollte (Abb. 2).

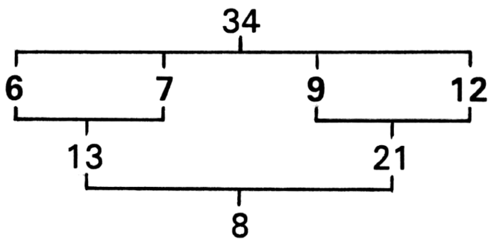


Abb. 2: Die Zahlen am Harmonieschlüssel verweisen auf Zahlen der Fibonaccireihe; Zeichnung: Verfasser

   b) Die Zeichen am + ΕΠ”ΟΓΛΟ/·ΩΝ – insbesondere das Pluszeichen vor dem Wort – legten den Verdacht nahe, dass die Buchstaben Zahlenbedeutung haben könnten und dass damit gerechnet werden soll. Nach Zahlenbelegung der Buchstaben entsprechend ihrer Stellung im ionischen Alphabet kam Addition als „vorgeschriebene“ Hauptoperation zur Anwendung; nur in der Mitte (zwischen Γ und Λ) bot sich Subtraktion an und bei einigen Ergebnissen Division, welche allerdings immer „streng symmetrisch“ durchgeführt wurde.

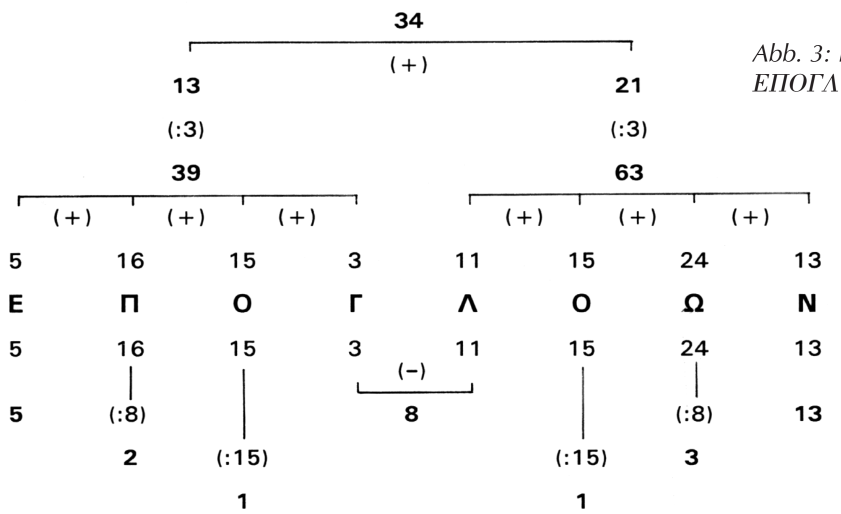


Abb. 3: Die Fibonaccireihe im ΕΠΟΓΛΟΩΝ; Zeichnung: Verfasser

Das Ergebnis waren alle Zahlen der Fibonacci-Reihe von 1 bis 34 – ein zweiter deutlicher Hinweis auf den „Goldenen Schnitt“ als konzeptionelle Vorgabe für die Proportionierung des Freskos (Abb. 3).

Anzumerken wäre noch, dass das **ΕΠ”ΟΓΛΟ/·ΩΝ** – in Zahlen transkribiert – in sich zusätzliche musikalische Intervalle birgt: Die Zahlenpaare, zwischen denen die Zeichen stehen, sind 16:15 – der Halbton und 15:24 (5:8) – die kleine Sexte. Die Differenz 8 in der Wortmitte ergibt zu den beiden 15er-Werten links und rechts die große Septime.

In der Literatur wird bezweifelt, dass Sexten und Septimen schon zum pythagoräischen[6] Tonsystem gehörten. Hier ergab sich bereits, dass sie bekannt gewesen sein müssten, und bei der Proportionsanalyse des Athenatempels (s. unten) stellte sich heraus, dass zumindest die Sexten dem „gängigen Repertoire" zuzurechnen sind (Seite 99ff)[7].

3. Nach Deutung der Zeichen am Π" und O/· als Zahl 2 einerseits sowie Divisions- und Multiplikationsvorschrift andererseits ergab die Berechnung ein Zahlenfeld, das sich eindeutig als das *Maßzahlensystem des Athenatempels von Paestum* identifizieren ließ (Seite 65ff).

Um Missverständnissen vorzubeugen, sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass von mir ein direkter Zusammenhang des Tafel- bzw. Bildkonzeptes mit dem 2000 Jahre älteren Bauwerk nicht suggeriert werden soll. Raffael kann das Wort einem alten Dokument entnommen und diese „3. Lösung" (Seite 63ff) ebenso wenig gekannt haben, wie die Tempelruine selbst. Aber unzweifelhaft ist das Wort ΕΠΟΓΔΟΩΝ der Schlüssel für das pythagoräische Proportionskonzept des Tempels! Und das Frappierende war, dass Raffaels Version, in der an Stelle des Δ ein Λ steht, dasselbe – sogar noch „elegantere" – Zahlenfeld erbrachte (Seite 67 und 68).

2.2 Zur Sterntafel

Mit der *Sterntafel* (Abb. 4), deren verzerrt dargestellte Sternfigur ein besonderes geometrisches Phänomen ist, hatten sich bereits etliche Autoren auseinandergesetzt, aber als Einzige war Simonetta Valtieri[8] mit einer aus gleichschenkligen Dreiecken gebildeten, in ein 3:5-Rechteck passenden Sternfigur und deren weitgehend überzeugender zentraler Verortung im Fresko der nach meiner Auffassung richtigen Lösung schon sehr nahe gekommen (Seite 14).

Als eine der 1997er-Editionen der Vatikanischen Museen erschien „Raffael's School of Athens"[9] mit dem Beitrag „Restoration Report and Technical Observations" von Enrico Guidi[10]. Zu den Schiefertafeln (The slate tablets, Seite 29f) präsentiert Guidi leider Interpretationsansätze, die nicht nur in sich nicht logisch, sondern längst obsolet sind.

Es ist durchaus denkbar, dass mein erst Anfang 1996 der Bibliotheca Hertziana zugestelltes Manuskript, in welchem die Geometrie der Sternfigur gedeutet und beweiskräftig begründet wird, in der kurzen Zeit den weiten Weg zu den Restauratoren nicht gefunden hatte; aber dass trotz des schon 25 Jahre auf dem Tisch liegenden – und weitgehend schlüssigen – Ansatzes von Valtieri die Sternfigur noch immer als „hexagonal", also aus zwei gleichseitigen Dreiecken bestehend, hingestellt wird, ist – gelinde ausgedrückt – doch recht befremdlich.

Dass bei den musikalischen Harmonien auf der Pythagoras-Tafel das 2/3 der Quinte als Terz (the third) bezeichnet wird, mag noch als Quidproquo durchgehen, aber die darauf folgende Beschreibung der Hexagonal-Geometrie einer Sternfigur kann man – auch wenn es die in der „Schule von Athen" gar nicht gibt – nicht kommentarlos hinnehmen:

> *„The two equilateral triangles (…) form a six-pointed star, which may be inscribed in a regular hexagon, while the diagonal which divides the rectangle defined by the conjunction of the points of intersection of the two equilateral triangles, forms two right-angled scalene triangles (…); a triangle whose longest side is the root of 3"*[11].

[6] Richtig wäre „pythagoreisch"; in meinem Buch war ich so frei, die Schreibweise einzudeutschen und bleibe dabei.
[7] Alle Seitenzahlen verweisen auf die entsprechenden Stellen in meiner Buchpublikation, vgl. Anm. 1.
[8] La Scuola d'Atene, in: Mitteilungen des Kunsthistorischen Institutes Florenz, 16, 1972
[9] vgl. Arnold Nesselrath, Raphaels' School of Athens, in: Allen Duston O.P. (Editor), Recent Restorations of the Vatican Museums, Vol. I; Vatican City State, MCMXCVI, Edizioni Musei Vaticani 1997
[10] ebd., Enrico Guidi, Restoration Report and Technical Observations, Seite 27 – 30
[11] ebd., Seite 29

Zum Ersten können *„definiert durch die Schnittpunkte der beiden gleichseitigen Dreiecke“* eines hexagonalen Sterns *zwei* Rechtecke eingeschrieben werden, aber egal, welches der Autor meint, gilt doch zum Zweiten für *keine* der beiden Rechteckvarianten die Aussage, dass die *längste Seite* der durch die diagonale Teilung der Rechtecke entstehenden rechtwinkligen ungleichschenkligen Dreiecke den Wert $\sqrt{3}$ hat.

Die längste Seite der durch Diagonalteilung beider Rechtecke entstehenden Dreiecke ist die jeweilige Diagonale, und die hat bei dem größeren Rechteck den Wert $\sqrt{7}$, und beim kleineren beträgt das Maß $^2/_3$ der Seitenlänge der Ausgangs-Dreiecke.

Den Wert $\sqrt{3}$ haben jeweils nur die kurzen Seiten des großen Rechtecks und die langen Seiten des inneren kleinen Rechtecks.

Wie der Autor im Weiteren dazu kommt, die zwei Zeichen unter der Sternfigur (vgl. Abb. 4) als $^1/_2\sqrt{3}$ *(„$^1/_2$ of the root of 3“)* zu interpretieren, bleibt ohne jede Begründung. Zwar ist das bekanntlich die Höhe im gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge 1, aber dass dieser Wert *„very similar and close to the Golden Section“* liegen soll, ist nun wirklich peinlich, denn $^1/_2\sqrt{3}$ liegt mit 0,866 „um Welten“ entfernt vom Quotienten 0,618… des Goldenen Schnitts.

Unbegründet bleibt auch der letzte Satz, in dem behauptet wird, dass die Komposition der „Schule von Athen“ auf Relationen von $\sqrt{2}$ beruht. Wurzel 2 – die Diagonale im 1x1-Quadrat – gibt die hexagonale Sternfigur nicht her, also fragt man sich, woher $\sqrt{2}$ kommt und wer sie wo im Fresko als Maß oder Zahl gefunden haben will. Die Herkunft und Umsetzung des 7:5-Verhältnisses – als pythagoräischer Näherungsbruch von $\sqrt{2}$ – im Fresko hatte ich in meinem Manuskript nachgewiesen (es sind neben Aristoteles 7 und neben Platon 5 Personen aufgereiht (Seite 197), und als Maß einer Quadratdiagonale findet sich $\sqrt{2}$ auch, doch muss man dafür die *richtige* Sternfigur und deren exakten Sitz im Fresko kennen!

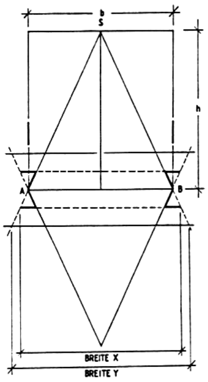
Greift man nämlich mit dem Zirkel das Diagonalmaß des zum Quadrat erweiterten Rechtecks der im Fresko verorteten Sternfigur ab (z.B. Seite 192) und schlägt damit einen Kreisbogen um die Sternmitte, berührt dieser die Kapitellecken der Sockel, welche den bildüberspannenden Bogen tragen. Der horizontale Sockelabstand von 35 Einheiten des von Raffael verwendeten Grundmaßes (ca. 23,17 cm; Seite 127) geht auf die Summe der Tetraktyszahlen über dem Harmonieschlüssel ebenso zurück wie das Spiel, das Raffael mit der Anzahl und Gruppierung der dargestellten Personen treibt (Seite 195ff). Besonders Letzteres lässt eindrucksvoll erkennen, dass $\sqrt{2}$ zwar durchaus „zentral“ verortet, aber dennoch nur ein Teil eines umfassenden harmonikalen Gesamtkonzeptes ist.

Zurück zu den Tafel-Zeichen: In der 1998er Buchpublikation wurde von mir die These aufgestellt, dass die Sternfigur aus zwei gleichschenkligen Dreiecken (Basisbreite = Höhe) besteht, die Raffael passgerecht für ein „Goldenes Rechteck“ der Kantenlänge von 8:13 Einheiten ineinander geschoben hat (Seite 19ff). Der Sitz des Sternrechtecks als strukturierendes Element der Bildkomposition ist ausführlich diskutiert und visualisiert worden (Seite 169ff). Das 8:13-Rechteck hat Raffael mit einer inneren Feinteilung von 21:34 versehen und bei der Proportionierung der Hallenarchitektur zur Anwendung gebracht (Seite 180ff).

Abb. 4: Raffaels Fresko „Die Schule von Athen“, Sterntafel; nach Doose, Abb. 12

Die bei Valtieri noch nicht korrekt sitzenden Sterndiagonalen wurden mathematisch bewiesen und geometrisch exakt in der Sternfigur „verortet“ (Seite 25ff). Aus der 8:13-Proportion des Rechtecks resultiert das signifikante 9:8-Längenverhältnis (großer Ganzton) der Verbindungsdiagnolen zu den Paralleldiagonalen und alle drei Schrägen spielen – wenn auch den Sterndreiecken nachgeordnet – eine strukturierende Rolle im Fresko (Seite 191f).

Die *Zeichen unter der Sternfigur* (Abb. 5b) waren in der Literatur u.a. auch als 1/2 (links) und 1/3 (rechts) gedeutet worden (Seite 13), aber erstens ohne plausible Begründung und zweitens – wie noch belegt wird – falsch herum.



5a *5b*

Abb. 5: Zur Konstruktion des Sternsechsecks; 5a: Die Zeichenpaare in der Sternkonstruktion als Maßstriche und Sternecken im Überschneidungsbereich der beiden Sterndreiecke; 5b: Die Zeichenpaare als Konstruktionshinweis; Zeichnung: Verfasser

Die Zeichenpaare unter dem Stern wurden von mir als diese Zahlenbrüche nicht gesehen, sondern als Maßstriche über den Symbolen der Sternecken im Überschneidungsbereich der beiden Dreiecke (Abb. 5a). Diese Interpretation der Zeichen als *Konstruktionshinweis* sowie der ihnen zugewiesene Sitz in der Sternfigur erscheint mir nach wie vor überzeugend (Seite 20ff), doch wie sich im Nachhinein herausstellt, ist das nicht die alleinige Bedeutung.

Zwischen die Linien und Schnittpunkte des Sterns im 21:34-Feinraster des 8:13-Rechtecks lassen sich Rechteckfiguren einschreiben, deren Relationen von Höhe:Breite *konsonante Tonintervalle* ergeben und damit das Programm der Harmonietafel um die Terzen, Sexten und Septimen erweitern (Seite 33).

Ein weiterer Zusammenhang zur Harmonietafel stellt sich über die Sterndiagonalen her: Das Längenverhältnis der beiden Paralleldiagonalen und der dazwischen liegenden schrägen Verbindungslinie (vgl. Abb. 4) beträgt 8:9 und verweist damit auf den *großen Ganzton*, für den über dem Harmonieschlüssel die beiden Zahlen und das Wort ΕΠΟΓΛΟΩΝ stehen (Seite 27).

3. Neuer Kenntnisstand

Anlass für eine nochmalige Befassung mit den beiden Raffael-Tafeln waren, wie eingangs schon angedeutet, die Beobachtungen von Conrad Doose[12]:

a) Bei der Restauration waren auf der *Zahlentafel* bei Pythagoras
- das von mir als Pluszeichen gedeutete Symbol vor dem ΕΠΟΓΛΟΩΝ sowie
- die Punkte am Schrägstrich über dem O übermalt und
- der VII ein deutlich sichtbarer dritter Balken hinzugefügt worden (Abb. 6a und b).

b) Auf den Tafeln sind Zeichen erkennbar, mit denen ich mich seinerzeit nicht befasst hatte, weil sie von mir übersehen wurden bzw. nicht deutlich genug erkennbar waren.

[12] vgl. Anm. 2, Seite 257f

Auf der *Zahlentafel* identifizierte Doose als Zeichen von Bedeutung

- die beiden schrägen Verbindungsstriche von den Zahlen VII und VIIII zu Ε und Ω (Abb. 6a und b),
- den kleinen Querstrich unterhalb der Lücke zwischen Γ und Λ (Abb. 6a, jetzt auch getilgt),
- den schrägen Strich zwischen I (von Diapente) links und Σ (von Diatessaron) rechts (Abb. 6c) sowie
- die vier am Fuß der X unter dem Zehnerdreieck gruppierten Schrägstriche (Abb. 6d).

a b c d

Abb. 6a – d: Raffaels Fresko „Die Schule von Athen", Zahlen- bzw. Harmonietafel; die Überschrift ΕΠΟΓΛΟΩΝ, a: vor der Restaurierung, b: nach der Restaurierung, c: der Verbindungsstrich zwischen I und Σ im Harmonieschlüssel, d: die vier Schrägstriche unterhalb der Zahlenpyramide der kleinen Tetraktys; nach Doose, Abb. 2a und b sowie 9a und 10 a

Auf der *Sterntafel* war Doose am rechten Zeichenpaar unter der Sternfigur am I über dem Σ ein Häkchen aufgefallen (Abb. 7), dessen Bedeutung auch noch zu klären ist.

Abb. 7: Raffaels Fresko „Die Schule von Athen", Sterntafel, das Häkchen am I über dem Σ; nach Doose, Abb. 13b

3.1 Zu den Zeichen am ΕΠΟΓΛΟΩΝ

Auch wenn Arnold Nesselrath als für die Restauration des Freskos Verantwortlicher an Doose schrieb, dass ihm das Pluszeichen *„aus dem 16. Jh. nicht geläufig"* sei und er darüber hinaus meine Deutung des Schrägstriches mit dem (mindestens darunter!) deutlich erkennbaren Punkt als Divisionszeichen für *„nicht original"* befindet und *„außerdem historisch in dieser Form ungewöhnlich"*, gab es für mich nicht den geringsten Zweifel daran, dass diese Zeichen von mir richtig gedeutet und angewendet worden waren.

Für die Richtigkeit der Deutung des Zeichens vor dem ΕΠΟΓΛΟΩΝ, dessentwegen das ganze Wort deutlich nach rechts verschoben ist, als *Pluszeichen* spricht das in Abb. 3 gezeigte Ergebnis – die Fibonacci-Reihe von 1 bis 34.

Das ***Pluszeichen*** bedeutet,

- dass die *Addition* Basisoperation beim Rechnen mit den Buchstabenwerten sein soll und
- dass die dabei gewonnene (irrationale) Proportion des „Goldenen Schnittes" *zusätzlich* zu den (rationalen) harmonischen Proportionen des unteren Tafelteils zum Fresko-Programm gehört.

Ausnahme von der Additionsvorschrift ist die 8 als Differenz zwischen den beiden mittleren Zahlen (worauf die 8 als Differenz zwischen den beiden äußeren Zahlen zusätzlich hinzuweisen scheint). In diesem Zusammenhang kommt der von Doose auf einer alten Abbildung entdeckte kleine Querstrich (vgl. Doose, Abb. 11a, Seite 260) unterhalb der Lücke zwischen Γ und Λ „wie gerufen“, denn er komplettiert das Bild um das bisher noch fehlende Subtraktionszeichen.

Das ***Minuszeichen*** markiert genau die Stelle unter dem Wort (Abb. 9, Seite 277), an der für die Herleitung der Fibonacci-Zahlen subtrahiert werden soll. Dass das Plus- und Minuszeichen schon gut 20 Jahre vor Entstehung des Freskos bekannt waren, kann man u. a. bei WIKIPEDIA[13] erfahren: Bereits 1489 kam die „Mercantile Arithmetic …“ des Leipziger Dozenten Johannes Weidemann als Buch heraus, in dem + und – als Rechenzeichen für die Addition und Subtraktion stehen.

Als ***Divisionszeichen*** wurde von mir der Schrägstrich mit den beiden Punkten **˙/.** zwischen Ο und Ω gedeutet. Aber auch die *zwei Häkchen* ” zwischen Π und Ο sind im Grunde ein Divisionshinweis, denn bei den alten Griechen standen zwei Häkchen zwischen zwei Zahlen für Bruchschreibweise. Da beide Zeichen eher links als mittig standen, wurde das als Hinweis verstanden, die linke Zahl zu dividieren.

Die Frage war allerdings: Wodurch dividieren? Da die beiden Häkchen die typische Form des in mittelalterlichen Handschriften häufig verwendeten und somit hinlänglich bekannten Apostrophs hatten, dieses aber nie doppelt gesetzt wurde, konnte den ***Häkchen die Zahl 2*** als Divisor zugeordnet werden, und dass die 2 dann rechtsseitig als Faktor eingesetzt werden müsste, war eine nicht unlogisch erscheinende Spekulation.

Das Ergebnis sprach für sich: Unter konsequenter Einhaltung der bei der Herleitung der Fibonacci-Zahlen (Abb. 3) als „Regel“ erkannten Symmetrie aller Rechenoperationen ergab sich das schon erwähnte Maßzahlenfeld, das sich als Proportionskonzept des Athenatempels zu Paestum identifizieren ließ. Diese Zuordnung war allerdings nur dem glücklichen Umstand zu verdanken, dass ich kurz zuvor Naredi-Rainers „Architektur und Harmonie“[14] gelesen hatte und mich der dort an der Vorderfront des Tempels angetragenen Höhenmaße in pheidonischen Fuß mit den auffälligen Werten $3\,{}^{3}/_{4}$, $7\,{}^{1}/_{2}$ und $18\,{}^{3}/_{4}$ entsann.

Bei WIKIPEDIA ist zu lesen[15], dass der Schrägstrich (**/** – ohne Punkte) das älteste Divisionszeichen zu sein scheint. Erstmals sei er 1631 von dem englischen Mathematiker William Oughtred verwendet worden. Letzteres ist jedoch so nicht richtig, denn in der 1521 in Como gedruckten Übersetzung Cesare Cesarianos des 3. Buches von Vitruv sind die römischen Zahlen erklärt, und dort wird bereits der horizontale Bruchstrich als Divisionszeichen verwendet.

Interessant an dieser Erklärung der römischen Zahlenzeichen ist der Umstand, dass hier einerseits eine bereits bei den Römern gebräuchliche Schreibweise der 4 übernommen wird, andererseits arabische Gobar-Zahlen verwendet werden.

Am besten erkennbar ist diese doppelte Verwendung beider Schreibweisen (siehe oben den Auszug aus Cesarianos Vitruvausgabe von 1521), am Bruch ${}^{1}/_{48}$ in der oberen Zeile rechts.

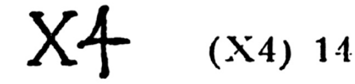
---

13 http:/de.wikipedia.org/wiki/Johannes Widmann (Mathematiker); letzter Zugriff 25.8.2009

14 3. Aufl., DuMont Köln 1986, Seite 153

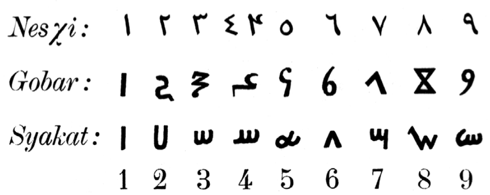
15 http://de.wikipedia.org/wiki/Geteiltzeichen#Geschichte der Symbole; letzter Zugriff 30.8.2009

Die 4 ist römische Schreibweise (s. röm. Zahl 14 aus „Dizionario di Abbreviature"[16]), die 8 hingegen ist arabisch, denn das oben und unten geschlossene X findet sich unten bei der Gobar-Schreibweise.



Anzumerken wäre noch, dass in der unteren Zeile an zweiter Stelle bei $^1/_{96}$ die 9 falsch herum geschrieben worden ist, während sie an vierter Stelle richtig verwendet wurde und dass die Schreibweise der 5 hier leider fehlt.

Die arabischen Zahlen waren im 12. Jahrhundert bereits im christlichen Europa aufgetaucht und Fibonacci hatte die arabisch-indischen bzw. westarabischen Gobar- (auch Ghubar-)Ziffern schon Anfang des 13. Jahrhunderts in seinem „Liber abaci" (1202) propagiert.



Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Arabische_Ziffern

Stellt man in Rechnung, dass der erste Druck der Vitruv-Handschriften bereits 1486 erfolgte und davor schon handschriftliche Vitruv-Übersetzungen kursierten, ist mehr als wahrscheinlich, dass auch in denen bereits der Bruchstrich verwendet wurde und dort vielleicht auch schräg. Und wenn es denn stimmt, dass das Divisionszeichen ohne Punkte gesetzt wurde, dann könnte der Punkt rechts am Fuß des Schrägstrichs am Omikron sogar ein ***Multiplikationszeichen*** sein, sofern der obere Punkt nicht original ist.

3.2 Zum dritten Balken an der VII

Die imaginäre Existenz des „dritten Balkens" war von mir ohnehin ins Kalkül gezogen worden, aber *seit der Restauration tritt der dritte Balken zu deutlich hervor!* Es lag mit Sicherheit in Raffaels Absicht, dass man ihn aus normaler Betrachterdistanz nicht oder zumindest nur andeutungsweise wahrnimmt, weil mit VII und VIII ein „doppeltes Spiel" getrieben werden sollte. Der letzte Strich der VIII war deshalb allenfalls schemenhaft zu sehen und zur Hälfte im Bogen versteckt.

Die 34 und 35 als Summen der Zahlen über dem Harmonieschlüssel mit und ohne den dritten Strich an der VII sind im Fresko nachweislich umgesetzt (Seite 195ff). Um darauf hinzuweisen, dass dieser schemenhafte letzte Strich dennoch gültig ist, hat Raffael die Neun als Fünf mit vier Balken geschrieben, statt wie üblich IX. Er brauchte an dieser Stelle vier Einsen, denn so hatte er V + **I**, V + **III**, V + **IIII**, X + **II**, – die Zahlen I bis IIII, welche unten mit ihren zehn Balken ja überdeutlich als Dreieck mit der Summe X darunter dargestellt sind. Damit verweist Raffael zugleich auf den Bedeutungszusammenhang beider Vierergruppen als sogenannte kleine und große Tetraktys (Seite 35).

[16] Ulrico Hoepli (Hrsg.): Lexicon Abbreviaturarum; Milano 1985, Seite 419

3.3 Zu den zwei Schrägstrichen über dem Harmonieschlüssel

Die zwei Schrägstriche zwischen ΕΠΟΓΛΟΩΝ und den Zahlen der großen Tetraktys lassen eine mehrfache Deutung zu, sollten aber zweifellos zunächst einmal als genereller Hinweis auf die Zahlenbedeutung der Buchstaben verstanden werden.

1. Deutung: a) Verbindung von Ε zur V als erste Ziffer der VII bzw. VIII verweist direkt auf den Zahlenwert 5 des Ε.

b) Verbindung von Ω zur IIII als zweiten Teil der Ziffer VIIII verweist auf die 4 des zweiten Teils des Zahlenwertes 24 von Ω.

2. Deutung: a) Verbindung von Ε = 5 zur VIII kann als Hinweis auf den „Goldenen Schnitt“ bzw. die Zahlen 5 und 8 der Fibonacci-Reihe verstanden werden.

b) Verbindung von Ω = 24 zur VIIII steht (gekürzt) für 8 und 3 – ebenfalls Fibonacci-Zahlen.

Zusätzlich ist das Wort ΕΠΟ_ΓΛΟΩΝ durch einen deutlichen Abstand zwischen Omikron und Gamma in drei und fünf Buchstaben geteilt.

3. Deutung: a) Verbindung von VII (ohne den „blassen“ 3. Balken) zu Ε = 5 – Hinweis auf das 7:5-Verhältnis (= pythagoräischer Näherungswert für $\sqrt{2}$, d.h. die Diagonale im 1:1-Quadrat), welches im Fresko ja sogar zentral „verortet“ und bereits rund 2000 Jahre vorher bei der Proportionierung des Athenatempels zu Paestum (Seite 76) sowie – wenig später – bei der des Doryphoros von Polyklet (Seite 48ff) umgesetzt wurde.

b) Verbindung von VIIII zu Ω = 24 könnte doppeldeutig sein, denn da der Strich genau auf den dritten Balken zielt[17], wäre das (wegen VIIII ohne 4. Balken) mit 8 : 24 ein Hinweis auf das 1:3 der Duodezime, welche die Sternfigur im 13:21 gerasterten Rechteck bildlich nämlich nicht hergibt (Seite 33).

Die 3. Deutungsvariante ist in doppelter Hinsicht als versteckter Hinweis zu werten:

– Es wird deutlich gemacht, dass die Zahlen VIII und VIIII optional auch ohne den letzten I-Balken gültig sind.

– Das 1:3 der Variante 3. b) ist zugleich ein Querverweis zur Sterntafel, denn auf dieser ist links unten eine Eins über einer (eckigen) Drei zu sehen.

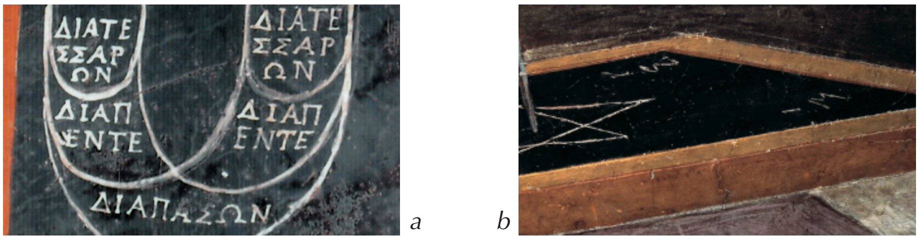
Auf Letzteres ist im Folgenden noch näher einzugehen, weil hier die bislang unbeachtet gebliebene arabische Zahlenschreibweise ins Spiel kommt. Das 1:3 der Duodezime realisiert Raffael z.B. geometrisch exakt mit dem Stab der Minerva in der rechten Nische der Vorhalle (Seite 128): Ein Rechteck mit dem Stab als Diagonale hat die Proportion 1:6, lässt sich also in zwei 1:3-Rechtecke mit dem Seitenverhältnis der Duodezime teilen. In diesem Zusammenhang: – Hinweis an die Verantwortlichen der Vatikanischen Museen auf meinen wohlbegründeten Verdacht, dass die Minerva wahrscheinlich Athena sein soll (Seite 129f).

[17] Von Doose erkannt und als die Entsprechung zur VII ohne dritten Balken identifiziert, vgl. Anm. 2, Seite 257.

3.4 Zum Verbindungsstrich Ι – Σ

Doose hatte den schrägen Strich durch die Mitte des Harmonieschlüssels (Abb. 8a) zwischen dem Ι (von Diapente) links und Σ (von Diatessaron) rechts entdeckt und prompt auch treffend interpretiert

- als Buchstabenwerte 9 und 18, d.h. das 1:2 der Oktave, sowie
- als Querverweis zur Sterntafel, denn Ι über Σ – mithin den „Bruch“ $^1/_2$ – findet man dort in der rechten unteren Tafelecke (Abb. 8b). Das wäre eigentlich eine hinreichend stichhaltige Erklärung für $^1/_2$ rechts und $^1/_3$ links (also genau anders herum, als früher spekulativ angenommen; Seite 13).



a *b*

Abb. 8a und b: Raffaels Fresko „Die Schule von Athen“, a: Harmonieschlüssel, Ausschnitt aus Abb. 1; b: Sterntafel, Ausschnitt aus Abb. 4, nach Doose, Abb. 9a und Abb. 12

Nimmt man das linke Zeichenpaar jedoch als $^1/_3$ hin, akzeptiert man stillschweigend, dass diese eindeutig arabische Zahlenschreibweise links gegen griechische Buchstaben rechts steht. Das aber widerspräche dem bisher durchgängig erkennbaren Prinzip der „symmetrischen“ Gleichbehandlung beider Seiten, d.h. irgendetwas stimmt hier noch nicht!

3.5 Zum „Apostroph“ am Ι über Σ

Der Vergleich mit den Gobar-Ziffern (siehe oben, 3.1) zeigt, dass auf der Sterntafel links unten tatsächlich – arabisch geschrieben – eine 1 über einer eckigen 3 und damit das 1:3-Verhältnis der Duodezime gemeint sein könnte. Bleibt man nun konsequent bei den damals bekannten arabischen Schreibweisen und berücksichtigt beim rechten Zeichenpaar, dass sich neben dem I-Strich oben rechts das von Doose bemerkte „Apostroph“ befindet (Abb. 7), zeigt der Vergleich mit den Nesχi-Ziffern, dass das Iota mit „Häkchen“ zugleich eine arabische 2, und das Sigma darunter eine arabische 4 ist – wie das griechische Ι:Σ das 1:2-Verhältnis der Oktave.

Die Deutung als $^1/_3$ in Gobar auf der linken Seite kann man also gelten lassen, aber die rechte Zeichengruppe hätte jetzt eine Bedeutung mehr, nämlich arabisch wie auch griechisch 1:2 – wieder Asymmetrie!?

Die Auslegung Dooses, dass die eckige 3 links aus Betrachtersicht auch als M gesehen werden kann und damit Ι:Μ zugleich für das Zahlenverhältnis 9:12, d.h. für das 3:4-Verhältnis der Quarte stehen könnte, traf bei mir – wegen der um 90° verdrehten Buchstabenstellung – auf Skepsis. Gegen diese Auslegung sprach zudem, dass links die griechischen Buchstaben und arabischen Zahlen nicht – wie rechts – dasselbe harmonikale Zahlenverhältnis erbrachten.

Aber andererseits wären ohne diese 3. Deutung für die linke Zeichengruppe beide Seiten ungleich „beweislastig“, und es gibt – neben Dooses Hinweis, dass Μ = 12 (links) zu Σ = 18 (rechts) eine Quinte ergeben – ein noch gewichtigeres Argument, das seine Interpretation stützt: Auf diese Weise erhält man unter dem Stern mit den *griechischen Buchstaben* rechts Ι (9) : Σ (18) = 1:2 und links Ι (9) : Μ (12) = 3:4, – wie unter dem Harmonieschlüssel die Zahlen 1 bis 4!

Damit bleibt als „asymmetrischer Makel“ jetzt nur die aus anderem Blickwinkel als griechisches M gelesene arabische Zahl 3. Als „Ausgleich“ dafür mag hier gelten, dass es auf der Zahlentafel ebenfalls eine Verletzung der Symmetrie gibt, – den schrägen Verbindungsstrich I – Σ (siehe 3.4).

Wenn man auf der Sterntafel erkannt hat, dass die Buchstaben Zahlenbedeutung haben, hat man einen direkten Querverweis zur Zahlentafel, für die dann – sofern man bis dahin noch nicht darauf gekommen ist – die Annahme nahe gelegt wird, dass hier ebenfalls Buchstaben für Zahlen stehen könnten.

Beide Zeichenkombinationen auf der Sterntafel sind ein Geniestreich von Raffael, denn die Kirche hatte den Ziffern der „Ungläubigen“ lange Zeit ablehnend gegenüber gestanden, aber Raffael – oder eventuell auch ein anderer „Programmautor“ der Tafeln – konnten sich auf die Erklärung zurückziehen, es handle sich um Maßstriche und die Sternecken (s. oben).

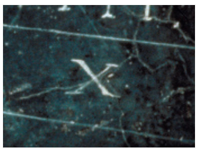
Für die Bestimmung der richtigen Sternfigur waren diese beiden Zeichengruppen allein allerdings nicht ausreichend.

Die von mir vorgeschlagene Lösung für die Geometrie der Sternfigur basierte auf folgenden Annahmen:

1. Die Zeichengruppen – als Maßstriche und Sternecken im Überschneidungsbereich – sind mit dem Zirkelschlag des Euklid in Zusammenhang zu bringen (Seite 20).
2. Der Symmetrie des Harmonieschlüssels auf der Zahlentafel entsprechend hat auch die Sternfigur eine senkrechte Symmetrieachse.
3. Die Verzerrung der Sternfigur entspricht – vor allem in der Breite – absichtlich nicht perspektivisch exakt der logischen Lösung, welche sich durch die Hinweise ergibt.

In Anbetracht der jetzt erkannten Doppeldeutigkeit der Zeichengruppen unter dem Stern ist auch für die Sternfigur selbst eine Doppeldeutigkeit nicht auszuschließen, so dass die von Doose und Eberhardt – unter geometrischem und musiktheoretischem Aspekt – diskutierte Variante durchaus Sinn macht[18]. Dieser Variante jedoch zugleich eine Bedeutung für den formalen Bildaufbau zuweisen zu wollen, trifft bei mir auf entschiedenen Widerspruch, da der regelmäßige Stern im 8:13-Rechteck sich allzu klar als bestimmend für die Struktur der Bildkomposition erwiesen hat.

3.6. Zu den vier Schrägstrichen unter dem Zahlendreieck



Mit den von Doose entdeckten vier Schrägstrichen bei der römischen Zehn unter dem Zahlendreieck (Abb. 6d) schließt sich der Kreis, denn diese führen uns zum „Schlüsselwort“ **+ΕΠ”ΟΓΛΟ/·ΩΝ** und seinen Rechenzeichen zurück.

Nach dem „Symmetrieprinzip“ war davon auszugehen, dass dieser ganz unten platzierte Hinweis für ganz oben gilt, und zumindest einen annähernd gleich langen und gleich schrägen Strich, der erwiesenermaßen ein Divisionszeichen ist, gibt es dort ja am Omikron (Abb. 9).

[18] vgl. in vorliegender Publikation: Conrad Doose, Jürgen Eberhardt, Raffaels Fresko „Die Schule von Athen“ – die Tafeln des Pythagoras und Euklid vor und nach der Restaurierung 1995/96; III. Die entzerrte Sternfigur und ihre Bezüge zum Bildaufbau, Seite 279 – 360.

Abb. 9: Raffaels Fresko „Die Schule von Athen“, Zahlentafel; das Minuszeichen unterhalb der Lücke zwischen Γ und Λ, d.h. Γ̲Λ; Ausschnitt aus Abb. 4; nach Doose, Abb. 2a

Division (links vom Zeichen) und Multiplikation (rechts vom Zeichen) waren Rechenoperationen am **+ ΕΠ”ΟΓ̲ΛΟ/·ΩΝ**, ohne die sich das Zahlenfeld für die Maße des Athenatempels (Seite 67 und 68) nicht ergeben hätte.

Unten teilt das Strichpaar unter X (als Summe des Tetraktys-Dreiecks) den horizontalen Strich bzw. wird von diesem geteilt. Das kann man durchaus als Divisionshinweis auffassen, denn wenn die Striche – wie die beiden Häkchen oben am Pi (Abb. 9) – lediglich als Zahlenwert verstanden werden sollten, hätten es zwei Strichpaare beiderseits der X auch getan.

Ist tatsächlich Division gemeint, sollte / X / auf Multiplikation hinweisen und X müsste dann logischerweise das heute noch gebräuchliche Malzeichen sein! Das wäre neu, denn bislang geht man anscheinend davon aus, dass x als Multiplikationszeichen erst rund 100 Jahre später (W. Oughtred, 1618) in Gebrauch kam[19].

Nahe liegend ist in Anbetracht des X zwischen zwei Strichen, dass der als Divisionszeichen identifizierte Schrägstrich am Omikron zwischen zwei Punkten steht. Der Punkt rechts unten am Strich war deutlich zu erkennen, doch den Punkt oben links hätte man auch für eine Schadstelle halten können, weil er sich etwas weiter abgerückt am Tafelrand befand. Beide Punkte sind bei der Restauration übermalt worden. Das war meines Erachtens ein Fehler!

Zu weiteren Deutungen führte die Frage: Wozu für den unteren Divisionshinweis zwei Striche? Da ein Strich genügt hätte, war anzunehmen, dass den Strichen zugleich Zahlenbedeutung zukommt. Eine erste denkbare Lösung findet sich oben: Nimmt man dort jedes Zeichen als 1, ist Π = 16 + 2 Häkchen = 18 und Ο = 15 + 1 Divisionszeichen = 16. Das sind die 9 und 8 des großen Ganztons, für die das Wort ΕΠΟΓΛΟΩΝ steht! Und zur Bestätigung bzw. als Hinweis darauf, dass Rechnen mit *entgegengesetzter Rechenart* hier oben Sinn macht bzw. anzuwenden ist: Π = 16 – 2 = 14 und Ο = 15 – 1 = 14, d.h. zweimal die Summe der X und ihrer 4 Striche unten.

[19] http://de.wikipedia.org/wiki/Malzeichen; letzter Zugriff 30.8.2009

Aber es scheint auch hier wiederum eine zweite Bedeutung beabsichtigt zu sein, denn nimmt man die 4 Striche bei der X als 2 Zweierpaare, ergibt sich – unter Einsatz aller Rechenarten – folgendes:

10 x 2 = 20		
	20 : 5 = 4 : 1 (Doppeloktave)	20 x 5 =100 (AM der Quinte)
10 : 2 = 5	↑	↑
	Zahlen der kleinen Tetraktys	Kanonteilung; 2. Ableitung (Seite 47)[20]
10 + 2 = 12	↓	↓
	12 : 8 = 3 : 2 (Quinte)	12 x 8 = 96 (HM der Quinte)
10 – 2 = 8		

Keine der Erklärungen für die von Conrad Doose neu entdeckten und z.T. von ihm selbst schon treffend gedeuteten Zeichen stellt irgendeine meiner früheren Auslegungen infrage, sondern es werden dadurch all meine vorherigen Thesen bzw. Erkenntnisse eindeutig untermauert. Wirklich neu ist für mich nur der Gedanke, dass Raffaels „Schule von Athen“ womöglich das erste bildkünstlerische Werk sein könnte, in welchem das Aufkommen der arabischen Zahlenschreibweise sowie der modernen Rechenzeichen dokumentiert ist.

Die *Sterntafel* könnte eine eigenständige Schöpfung Raffaels oder eines seiner Zeitgenossen sein; für die *Zahlentafel* hingegen hat es auf jeden Fall Vorlagen gegeben, die auf pythagoräische Zeit zurückgehen, aber diese sind keinesfalls einfach übernommen worden, sondern hier wurde übersetzt und modifiziert, was vermuten lässt, dass, wenn nicht Raffael, dann ein anderer genialer „Spiritus Rector“ den „Modus Operandi“ sehr wohl gekannt hat und auch gewusst haben dürfte, was damit anzufangen ist.

Berechtigt bleibt nur der Zweifel, ob er auch wusste, dass das 2000 Jahre alte Zahlenfeld, das sich aus dem **+ ΕΠ”ΟΓ̲ΛΟ/·ΩΝ** bei Berechnung nach den verschlüsselten Vorschriften ergibt, den Maßen des Athenatempels in Paestum, dem vormaligen griechischen Poseidonia, entspricht.

[20] Näheres zur Kanonteilung auch unter http://frp.landeco.rwth-aachen.de/downloads/Proportionenkanon