



Aachener Berichte aus dem Leichtbau

Optimierung allgemein belasteter dünnwandiger Profile

Tobias Meinert



Institut für
Strukturmechanik
und Leichtbau

RWTHAACHEN
UNIVERSITY

Optimierung allgemein belasteter dünnwandiger Profile

Optimisation of Universally Loaded Thin-walled Profiles

Von der Fakultät für Maschinenwesen der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Tobias Meinert

Berichter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Schröder
Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Christian Mittelstedt

Tag der mündlichen Prüfung: 11. April 2024

Diese Dissertation ist auf den Internetseiten der Universitätsbibliothek online verfügbar.

Aachener Berichte aus dem Leichtbau
herausgegeben von Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Schröder

Band 3/2024

Tobias Meinert

Optimierung allgemein belasteter dünnwandiger Profile

Shaker Verlag
Düren 2024

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: D 82 (Diss. RWTH Aachen University, 2024)

Copyright Shaker Verlag 2024

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-9508-1

ISSN 2509-663X

Shaker Verlag GmbH • Am Langen Graben 15a • 52353 Düren

Telefon: 02421 / 99 0 11 - 0 • Telefax: 02421 / 99 0 11 - 9

Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Danksagung

Die über mehrere Jahre andauernde Erstellung eines Werks ist niemals das Ergebnis der Tüchtigkeit eines Menschen alleine. So ist auch diese Arbeit nur unter der direkten und indirekten Mitwirkung von Familie, Freunden sowie Kolleginnen und Kollegen entstanden. Ich möchte mich daher herzlichst bei allen bedanken, die mich während der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben!

Die letzten Monate vor Fertigstellung dieser Dissertationsschrift waren aus verschiedenen Gründen die womöglich bisher schwierigsten meines Lebens. Die von so vielen Menschen auf so viele unterschiedliche Weise erhaltene Unterstützung war ausschlaggebend dafür, dass ich diese Arbeit in dieser schwierigen Zeit fertigstellen konnte. Ich bin mir des Privilegs bewusst, auf so viele verschiedene Menschen zählen zu dürfen. In der Hoffnung über die Vergänglichkeit einer mündlichen Danksagung hinausgehen zu können, bedanke ich mich an dieser Stelle bei all denjenigen, die mir während dieser Zeit auf all den unterschiedlichen Wegen geholfen haben!

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater, Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Schröder, der mir nicht nur die größtmögliche Freiheit zum Ausprobieren und Umsetzen verschiedenster Ideen gegeben, sondern diese Ideen noch mit einem unvergleichlichen Enthusiasmus und antreibender Motivation unterstützt hat. Weiterhin bedanke ich mich bei Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Christian Mittelstedt für die unkomplizierte Übernahme des Koreferats und bei Univ.-Prof. Dr. sc. Sebastian Trimpe für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Meinen ehemaligen Kolleginnen und Kollegen danke ich für ihre Unterstützung auf so vielfältigen Ebenen. Sei es von der administrativen oder technischen Bewältigung der von mir betreuten Forschungsprojekte über die gemeinsame Ideenentwicklung und -gestaltung bis hin zu Diskussionen über die verschiedenen Themen meiner Dissertation. Weiterhin danke ich allen Studierenden, die mit ihren Abschlussarbeiten oder als Hochleistungshiwi die Bearbeitung meiner verschiedensten Themenfelder unterstützt haben. Besonderer Dank gilt Jannik Bühring, Stefano Piacquadio und Maximilian Schirp-Schoenen, die nicht nur Arbeitskollegen waren, sondern Freunde geworden sind und trotz manch einer von mir losgetretenen Tirade zu jeder Zeit in festgefahrenen Situationen mit Rat und Tat zur Seite standen. Hervorheben möchte ich dazu die Herren Jannik Zimmermann und Lars Moosdorf, ohne die die Zeit am Institut nicht ansatzweise die gewesen wäre, die sie schließlich für mich war.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Freunden aus meiner Heimat, Theresa und Thomas Ahmann, Nina und Benjamin Libor, Kathrin und Andreas Lohaus, Louisa und Alexander Masson, Eva und Jan-Niklas May, Carolin und Matthias Orberger sowie Christian und Sascha Schlichtinger, die mir schon vor langer Zeit ihre Freundschaft geschenkt haben, auch wenn sie es nicht

immer leicht mit mir hatten. Die aus beruflichen Gründen leider seltener stattfindenden Treffen geben mir immer ein Gefühl der Geborgenheit und füllen die doch manchmal schwindende Energie zuverlässig wieder auf! Dazu darf ich in Aachen Menschen meine Freunde nennen, die mir gezeigt haben, dass man wahre Freunde immer und überall finden kann. Insbesondere ohne Alexander Lüking, Toni Ackermann, David Bierbüsse und die Familien Carré und Rentmeister sowie die Aachener Kickers wäre mein Leben doch recht eintönig. Ein Dank geht zudem an Jenny Bühring für die Erstellung des Titelbilds und an Aliaksandra Shymanskaya, die mir umfassend bei der Initialisierung der Mehrkörpersimulation und künstlichen Intelligenz für meinen Promotionsvortrag geholfen hat. Ausdrücklich möchte ich mich auch bei Ambre Margotin bedanken, ohne die ich nicht die Person geworden wäre, die ich heute bin. Merci beaucoup!

Meiner Familie gilt besonderer Dank. Agnese Lucchetti und Erik Meinert motivierten mich fortwährend, gaben unterstützende Ratschläge und lieferten die manchmal nötige Ablenkung. Meine Schwester Sara Meinert hat mich nicht nur im Lektorat der Dissertation und so manch einer vorangegangenen Arbeit unterstützt, sondern weiß dazu Rat in allen Lebenslagen und hat immer ein offenes Ohr. Mein Bruder Daniel Meinert hat mir umfassend beim Verständnis der mathematischen Herleitungen für diese Arbeit geholfen, bereichert darüber hinaus mein Leben auf so vielen Ebenen, wobei die herausfordernden Duelle in den verschiedensten Brettspielen sicherlich die schönsten Momente sind. Meine Eltern, Maria und Georg Meinert, haben mich immer und überall uneingeschränkt unterstützt. Sie waren für mich da, wenn niemand mehr da war, und gaben Rat, wenn ich ratlos war. Sie sind der sichere Hafen, den sich jedes Kind nur wünschen kann. Ich kann mir keine besseren Eltern vorstellen!

Zuletzt möchte ich mich bei Linda Waldscheck bedanken, die glücklicherweise in mein Leben getreten ist. Sie hat mir nicht nur die entscheidenden Hinweise zur Verbesserung meines Promotionsvortrags gegeben, sondern bietet mir stetig neue Perspektiven und Erfahrungen und hat meine Vorfreude auf die Zukunft bestärkt!

Während der Recherchen für meine verschiedenen Abschlussarbeiten haben mich die Vorworte der gefundenen Veröffentlichungen immer besonders interessiert, da man aus diesen doch so einiges über die jeweiligen Autorinnen und Autoren herauslesen kann. Daher möchte ich diese Danksagung mit einem Zitat eines Professors beenden, das ich in einem Vorwort einer Dissertation gelesen habe:

«Ein Abend, an dem sich alle Anwesenden völlig einig sind,
ist ein verlorener Abend.» [1, S. 6]

Ich danke allen, die mit mir versuchen, dass dieses Zitat so selten wie möglich zutrifft!

Aachen, im April 2024

Tobias Meinert

Kurzfassung

Der Entwicklungsprozess eines strukturmechanischen Bauteils ist gewöhnlich iterativ aufgebaut. Als Startpunkt bietet die Vorauslegung eine erste Abschätzung von Material, Dimension und Topologie. Sie erfordert jedoch aufgrund der geringen Informationsdichte eine Idealisierung von Geometrien und Belastungen, was zu ungenauen Abschätzungen führen kann. Eine verbesserte, gewichtsoptimierte Vorauslegung hat das Potential, Iterationsschritte zu reduzieren und somit Zeit, Kosten und Ressourcen einzusparen. Eine verbesserte, gewichtsoptimierte Vorauslegung kann aber nur durch ein tieferes Verständnis über die Auswirkungen und Abhängigkeiten der idealisierten Geometrien und Belastungen entwickelt werden.

Für diese Thematik werden in dieser Arbeit zwei Hypothesen formuliert. Mit der ersten Hypothese wird behauptet, dass allgemeine Belastungen auf einzelne Grundlastfälle vereinfacht werden können, wohingegen mit der zweiten Hypothese ausgesagt wird, dass optimiert ausgelegte Grundgeometrien Rückschlüsse auf die finalen komplexen Geometrieformen liefern können. Die zwei Hypothesen werden mit Ergebnissen eines für diese Arbeit entwickelten Optimierungsalgorithmus belegt. Der Optimierungsalgorithmus nutzt eine Kombination aus dem Strukturkennwert mit einer Evolutionsstrategie als metaheuristischen Ansatz, um beliebige komplexe Geometrien und Belastungszustände unter einer allgemeinen Betrachtung verarbeiten zu können. Mit dem Optimierungsalgorithmus werden Vierkantprofile sowohl unter den Grundlastfällen als auch unter kombinierten Lastfällen optimiert. Abschließend werden komplexe Profilformen als polygonisierte Profile ebenfalls mit dem Optimierungsalgorithmus optimiert. Mit den in dieser Arbeit gefundenen Ergebnissen werden die beiden Hypothesen unter Einschränkungen verifiziert.

Für die erste Hypothese kann gezeigt werden, dass Druckbelastungen bei einer Kombination mit Biege- beziehungsweise Torsionsbelastungen vernachlässigt werden können, solange der Strukturkennwert der Druckbelastung nicht größer als der Strukturkennwert der anderen Belastung ist. Bei einer Kombination aus Biege- und Torsionsbelastungen kann die geringere Belastung vernachlässigt werden, solange das Verhältnis der Strukturkennwerte $1/10$ nicht übersteigt. Die zweite Hypothese kann nur unter starken Einschränkungen verifiziert werden. Bei Druck- und Torsionsbelastungen und der Bedingung, dass das finale Bauteil ein Rechteck sein soll, entsprechen die idealisierten Geometrien dem gewichtsoptimalen komplexen Bauteil. Bei komplexeren Formen ist für die Druck- und Torsionsbelastung immer der Kreisring das gewichtsoptimale idealisierte Bauteil. Für diesen werden analytische gewichtsoptimierte Zusammenhänge angegeben. Bei der Biegebelastung können keine Zusammenhänge zwischen den optimalen komplexen Profilformen und dem gewichtsoptimierten Vierkantprofil festgestellt werden. Für weitergehende komplexe Formen mit Designeinschränkungen liefern die gewichtsoptimierten Idealisierungen wenigstens eine Orientierung, wie groß das Einsparungspotential der Masse durch eine weitere Optimierung dieser Profile noch ist.

Abstract

Structural-mechanical components are usually designed via iterative development processes. Initial estimates of material, dimensions, and topology are provided in a preliminary design, followed by iterative adaptations leading to the final product. Unfortunately, due to a lack of apriori information, the preliminary phases often rely on inaccurately idealized geometries and loads, resulting in poor estimations. A weight-optimized preliminary design has the potential to eliminate several iteration steps, reducing costs, resources, and design time. Achieving an efficiently optimal design in the preliminary phase requires a deeper understanding of correlations between idealized geometry and acting loads.

To address this issue, this work formulates and verifies two hypotheses. The first posits that general load scenarios can be simplified into basic load cases, while the second suggests that optimally designed basic geometries offer insights into the final complex shape.

Verification of these hypotheses is accomplished by making use of a purposefully developed optimization algorithm based on the structural index, allowing a problem generalization. The algorithm employs a metaheuristic approach with an evolutionary strategy, capable of handling diverse geometries and load conditions. The optimization process includes square profiles for basic and combined load cases, as well as more intricate shapes like polygonal profiles. While the results support both hypotheses, certain restrictions are identified.

For the first hypothesis, it is demonstrated that compressive loads in combination with either bending or torsional loads can be neglected, as long as the structural index of the compressive load does not exceed the structural index of the other load. In cases of combined bending and torsional loads, the lower load can be ignored if the ratio of structural indices does not exceed 1/10. The second hypothesis is verified with limitations. Meaningful results are obtained for compressive and torsional loads, specifically when the final component should have a rectangular shape. In this scenario, the weight-optimized square profile proves to be the optimal solution. However, for more complex shapes, the circular ring consistently emerges as the weight-optimal solution. Analytical weight-optimised correlations are specified for this. In the case of bending loads, no correlations can be identified between the optimum complex profile shapes and the weight-optimised square profile. For other complex profiles that are subject to additional design restrictions the weight-optimised profiles at least indicate how much mass can be saved by further optimising these complex profiles.

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	xi
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Problemstellung	3
1.3 Stand der Forschung	4
1.4 Zielsetzung und Vorgehensweise	8
2 Koordinatensystem und Materialdaten	11
3 Theoretische Grundlagen	13
3.1 Optimierung über den Strukturkennwert	13
3.2 Das Verhalten dünnwandiger gerader Stabtragwerke unter Druck und Biegung .	17
3.3 Das Verhalten dünnwandiger gerader Stabtragwerke unter Torsion	23
3.4 Evolutionäre Algorithmen	27
4 Wittrick-Williams-Algorithmus	31
4.1 Mathematische Grundlagen	33
4.2 Ablauf des Wittrick-Williams-Algorithmus	35
4.3 Der Einfluss einer einzelnen Platte auf das Stabilitätsverhalten einer Struktur . .	42
4.4 Zusammenfassung des Programmablaufs	43
4.5 Erweiterung um den Biegelastfall	45
5 Gewichtsoptimierte Auslegung nach PRECHTL	49
5.1 Gewichtsoptimierte Auslegung für Profil-Druckstäbe	50
5.2 Gewichtsoptimierte Auslegung für Profil-Biegeträger	59
5.3 Gewichtsoptimierte Auslegung für Profil-Torsionsstäbe	70
6 Optimierung von einzelbelasteten Profilstäben	79
6.1 Aufbau des Optimierungsalgorithmus für Profilstäbe	80
6.2 Analyse des Leichtbaupotenzials von Profil-Druckstäben	83
6.3 Analyse des Leichtbaupotenzials von Profil-Biegeträgern	85
6.4 Analyse des Leichtbaupotenzials von Profil-Torsionsstäben	88
7 Erweiterung der gewichtsoptimierten Auslegung um kombinierte Lastfälle	91
7.1 Kombination von Druck und Biegung	92
7.2 Kombination von Druck und Torsion	97

7.3	Kombination von Biegung und Torsion	99
7.4	Diskussion zur Idealisierung der Belastung	102
8	Gewichtsoptimierte Auslegung von polygonisierten Profilen	103
8.1	Gewichtsoptimierte Auslegung polygonisierter Profile unter Druckbelastung . .	104
8.2	Gewichtsoptimierte Auslegung polygonisierter Profile unter Torsionsbelastung	107
8.3	Gewichtsoptimierte Auslegung polygonisierter Profile unter Biegebelastung . .	110
8.4	Diskussion zur Idealisierung der Geometrie	114
9	Zusammenfassung	117
9.1	Schlussfolgerung	118
9.2	Ausblick	120
	Literaturverzeichnis	123
A	Anhang zum Verhalten dünnwandiger Stabtragwerke unter Torsion	133
A.1	St.-Venantsche Torsion geschlossener dünnwandiger Querschnitte	133
A.2	St.-Venantsche Torsion offener dünnwandiger Querschnitte	135
B	Anhang zum Wittrick-Williams-Algorithmus	137
B.1	Die Platten-Steifigkeitsmatrix bei konstanter Druck- und Schubspannung . . .	137
B.2	Die Scheiben-Steifigkeitsmatrix für den allgemeinen Spannungszustand	145
B.3	Der Einfluss einer einzelnen Platte auf die Stabilität einer Struktur	149
C	Anhang zur gewichtsoptimierten Auslegung nach PRECHTL	155
C.1	Herleitungen für den Profil-Druckstab	155
C.2	Herleitungen für den Profil-Biegeträger	157
C.3	Herleitungen für den Profil-Torsionsstab	164

Nomenklatur

Lateinische Schriftzeichen

A	Querschnittsfläche
\check{A}	umschlossene Fläche
\mathbf{A}	Submatrix der Steifigkeitsmatrix
\mathbf{A}^*	Submatrix der Steifigkeitsmatrix
b	Breite
\mathbf{B}	Submatrix der Steifigkeitsmatrix
\mathbf{B}^*	Submatrix der Steifigkeitsmatrix
c	Profilwertfaktor, Einspannfaktor
C	Integrationskonstante für die Biegelinie
\mathbf{d}	Verschiebungsvektor
D	Plattensteifigkeit
e	Eulersche Zahl
E	Elastizitätsmodul
f	Durchbiegung, Profilwertfunktion
F	funktionelle Anforderungen, Fitnesswert
G	Geometrieparameter, Schubmodul
h	Höhe
H	dimensionslose Konstante der Schubspannung
$H_{a,s}$	Hilfsvariable Wittrick-Williams-Algorithmus
i	$\sqrt{-1}$
J	Flächenträgheitsmoment, Anzahl der Beulmoden
J_0	Anzahl der Beulmoden der einzelnen Platten
$J_{a,s}$	Hilfsvariable Wittrick-Williams-Algorithmus
J_c	Anzahl der Beulmoden der Platten der Substruktur
k	modifizierter Beulfaktor, Anzahl mutierbarer Parameter

K	Strukturkennwert
\tilde{K}	kritischer Strukturkennwert
K_{X_1}	dimensionslose Konstante der Spannung
\mathbf{K}	(globale) Steifigkeitsmatrix
l	Länge
m	Masse, Malus
M	Materialeigenschaften, Biegemoment
n	Anzahl Parameter für Evolutionsstrategie, Frequenz der Vibration
N	Kraft in Plattenebene
\tilde{N}	Linienlast
p	Linienlast
\hat{p}	Flächenlast
\mathbf{p}	Lastvektor
P	Druckkraft, Wahrscheinlichkeit
P_0	Startpopulation
P_S	Anteil Nachkommen in Elterngeneration
q	Linienlast
Q	Querkraft, Last für Wittrick-Williams-Algorithmus
r	gesuchte Beulmoden; $r = 1$ kritische Beulmode
r^*	Hebelarm Querschnittsabschnitt zu beliebigen Punkt
R	Radius
$R_{p0,2}$	Dehngrenze
s	Umlaufvariable, Höhe, Eintrag in Steifigkeitsmatrix
$s\{\mathbf{K}\}$	Anzahl der negativen Einträge auf der Diagonale von \mathbf{K}
\mathbf{S}^*	Steifigkeitsmatrix für zusammengesetzte Platten
t	Profil-, Plattendicke
t_0	Schubfluss
T	Torsionsmoment, Schub in Plattenebene
\mathbf{T}	Transformationsmatrix
U	Verschiebung in x_1 -Richtung
V	Funktionsvermögen, Verschiebung in x_2 -Richtung, Volumen
w	Biegelinie

W	Widerstandsmoment, Verschiebung in x_3 -Richtung
$x_{1,2,3}$	Achse in 1, 2, 3-Richtung
x_i	reelwertiger Vektor für Evolutionsstrategie
X	dimensionslose Koordinaten
Z	Zielfunktion

Griechische Schriftzeichen

α	dynamischer Anpassungsfaktor der Normalverteilung
β	Toleranz
γ	Gleitwinkel für Verdrehung ϕ und Verwölbung w , spezifisches Gewicht
δ	Breiten-Höhenverhältnis b/h
Δ	Diskriminante
ε	Längsdehnung
η	H/Ω^2
η_3	Korrekturfaktor für offene Profile
ϑ	Verdrehung
ϑ'	Verdrillung
κ	Beulfaktor
λ	Wellenlänge, Anzahl Nachkommen
μ	Anzahl Elternindividuen, Verdrehwinkel
ν	Querkontraktion
ξ	K/Ω^2
π	Kreiszahl
ρ	Dichte
σ	Spannung, Normalverteilung
τ	Schubspannung
ϕ	Gewichtsfunktion
Φ	Geometriefunktion
φ	Gewichtsfunktion
χ	Wert bei Restriktionsberechnung
ψ	Krümmung bzw. Drillung, Rotation am Plattenrand, Gewichtsfunktion

- Ψ Geometriefunktion
 Ω dimensionslose Wellenlänge

Obere und untere Indizes

- A die Fläche betreffend
alt alter Wert
anal analytisch berechnet
bes. bestes Individuum
B Beulen
BS Beulen durch Schub
ci auf das Scheibenverhalten bezogen
co auf das Plattenverhalten bezogen
D bezogen auf den Drucklastfall
 Δ obere Dreiecksform der Matrix ohne Pivotisierung
evo Evolutionärer Algorithmus
f die Durchbiegung betreffend
g einen großen Strukturkennwert betreffend
Grenz Grenzwert
I Scheibenverhalten
J das Flächenträgheitsmoment betreffend
K Biegelastfall, Eulerfall
k einen kleinen Strukturkennwert betreffend
 $K_{1,2}$ Kante 1 bzw. Kante 2
krit kritisch
M bezogen auf den Biegelastfall, bezogen aufs Randmoment
max maximal
min minimal
N bezogen auf die Kraft in der Plattenebene
neu neuer Wert
num numerisch berechnet
o obere Grenze

O	Plattenverhalten
opt	optimal
P	das Profil betreffend
Q	bezogen auf die Querkraft
rest	Grenzwert durch die Restriktion
σ	den Biegelastfall betreffend
schl.	schlechtestes Individuum
tat	tatsächlich vorliegender Wert
T	bezogen auf den Torsionslastfall, bezogen auf die Schubkraft
τ	den Schublastfall betreffend
ϑ	die Verdrehung betreffend
u	untere Grenze
U	Übergangsbereich
v	von Mises
W	das Widerstandsmoment betreffend
zul	zulässig

1 Einleitung

Eine Neu- oder Weiterentwicklung von strukturmechanischen Bauteilen beginnt gewöhnlich mit einer Vorauslegung, bei der eine erste Abschätzung des Materials, der Dimension und der Topologie erfolgt. Da die Vorauslegung zu Beginn des Entwicklungsprozesses stattfindet, existieren zwangsläufig noch nicht alle nötigen Informationen über genaue Belastung, finalen Bauraum und Verbindungsstellen zu anderen Bauelementen. Aus diesem Grund wird eine Idealisierung von Bauteil und Belastung vorgenommen (siehe Abbildung 1.1).

Inwieweit auf Basis dieser Idealisierungen schon eine gewichtsoptimierte Vorauslegung zur Verkürzung des Entwicklungsprozesses von Bauteilen erfolgen kann, ist das Thema dieser Arbeit. Dafür wird ein Optimierungsalgorithmus entwickelt, mit dessen Ergebnissen ein Vergleich zwischen unter idealisierten Annahmen für Geometrie und Belastung erstellten Profilen und frei optimierten Profilen durchgeführt wird. Auf diese Weise können tiefere Erkenntnisse gewonnen werden, in welchem Maße eine Optimierung von idealisierten Profilen schon hinreichend genaue Ergebnisse für Materialwahl, Profilform und Dimensionierung für das spätere reale Bauteil liefert. Wenn dies zulässig ist, können Kosten und Zeit in der Entwicklung neuer Bauteile eingespart werden.

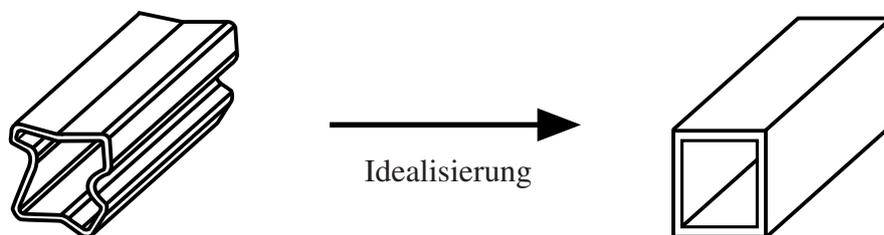


Abb. 1.1: Ein typisches Vorgehen bei der Vorauslegung: Das spätere reale Bauteil (links) wird zu Beginn als Grundprofil idealisiert [2].

1.1 Motivation

Der Verkehrssektor ist derzeit einem erheblichen Wandel unterworfen, den es so vermutlich zum letzten Mal zur Zeit der industriellen Revolution gab. Damals wurde der Wechsel von menschlicher und tierischer auf mechanische Antriebskraft vollzogen, wohingegen heutzutage der Verkehrssektor aufgrund des Klimawandels auf einen emissionsfreien Betrieb umgestellt werden muss. Dies soll vor allem durch eine Umstellung der Mobilitäts- und Antriebskonzepte

erfolgen [3]. Mit einem Anteil von ungefähr 32 % an den gesamten CO₂-Emissionen in der Europäischen Union im Jahr 2018 ist der Verkehrssektor einer der größten Verursacher der schädlichen Klimaerwärmung. Er birgt bei einer zügigen Umsetzung aber auch ein großes Potential, das Erreichen der von der Europäischen Union beschlossenen Klimaneutralität bis zur Mitte dieses Jahrhunderts zu beschleunigen. [4, 5]

Für den Automobilssektor gilt eine Umstellung auf CO₂-freie beziehungsweise CO₂-neutrale Antriebskonzepte zum Erreichen der Klimaneutralität daher als absolute Notwendigkeit [3]. Konventionell angetriebene Fahrzeuge könnten mit der Verwendung von synthetischen, CO₂-neutral hergestellten Kraftstoffen auf einen CO₂-neutralen Betrieb umgestellt werden. Alternativ bietet sich die Benutzung von Brennstoffzellen unter der Verwendung von CO₂-frei hergestelltem Wasserstoff an [6]. Beide Energieträger weisen aber den erheblichen Nachteil einer ineffizienten Herstellung auf, da weniger als 30 % der eingesetzten Primärenergie an den Rädern ankommt [7]. Da auch die Stromproduktion auf einen klimaneutralen Betrieb umgestellt werden muss und die vollständige Elektrifizierung beispielsweise des privaten Automobilverkehrs mit mehr als 15 % des heutzutage jährlich erzeugten Stroms zusätzlich erhebliche Energiemengen benötigen wird, scheint ein großflächiger Wechsel auf ein wenig effizientes Antriebskonzept unplausibel [8, 9]. Aus diesem Grund haben alle großen Automobilhersteller den Wechsel auf batterieelektrische Antriebe angekündigt beziehungsweise befinden sich zur Zeit mitten in der Umstellung [10].

Bei einem batterieelektrischen Antrieb gelangt mit über 70 % der mit Abstand größte Teil der produzierten Primärenergie an die Räder [6, 7, 11], sodass diese Antriebsart im Vergleich zu den anderen Alternativen höchst effizient ist. Allerdings muss die vergleichsweise schwere Batterie im Fahrzeug mitgeführt werden, wodurch Elektroautos im Schnitt 20 % schwerer sind als ihre konventionell angetriebenen Pendanten [12, 13]. Aus diesem Grund nimmt der Leichtbau im Verkehrssektor eine immer wichtigere Rolle ein. Neben dem Ausgleich der zusätzlichen Masse durch das veränderte Antriebskonzept ist die Ressourcenschonung aktuell eine weitere wichtige Thematik. Nicht nur der Klimawandel bedroht die Lebensgrundlage der Menschheit, sondern auch die rapide schwindende Verfügbarkeit von Ressourcen [14]. Mit der konsequenten Verwendung von Leichtbaukonzepten können somit nicht nur der Weg zur Klimaneutralität im Verkehrssektor, sondern auch die Reduktion des Ressourcenverbrauchs unterstützt werden [15].

Batterieelektrische Fahrzeuge unterscheiden sich in der Masseverteilung erheblich von konventionellen Fahrzeugen, da die Batterie in der Regel im Unterboden des Fahrzeugs mitgeführt wird [12]. Neben einem veränderten Fahrzeugverhalten bei einem Unfall und dem nötigen Schutz der leicht entzündlichen Batteriezellen wirken auf viele Abschnitte der Karosserie aufgrund der veränderten Masseverteilung andere Lasten ein, als dies bei konventionellen Fahrzeugen der Fall ist. Zusätzlich entsteht durch die Verwendung von Elektromotoren frei werdender Bauraum im Fahrzeug, da Elektromotoren deutlich kompakter sind als Verbrennungskraftmaschinen und auch beispielsweise in die Räder der Fahrzeuge verbaut werden können [12]. Der sich ergebende Freiraum erlaubt eine komplette Umgestaltung der Fahrzeugform. Neue Mobilitätskonzepte, welche zum Beispiel durch die fortschreitende Automatisierung von Fahrzeugen möglich werden,

gewähren eine noch weitergehende Umgestaltung der Fahrzeuge. So können zukünftig Fahrzeuge entwickelt werden, die im Äußeren nur noch wenig mit ihren konventionell angetriebenen Vorgängern gemein haben.

Eine Verringerung von Zeit und Kosten bei der Neuentwicklung von Fahrzeugstrukturen wird durch eine effiziente Vorauslegung möglich. Zu Beginn einer Auslegungsaufgabe stehen in der Regel nur die groben, maximal zulässigen Dimensionen und eine erste Lastabschätzung zur Verfügung [16]. Wenn mit diesen wenigen Informationen zu Beginn schon eine Materialwahl getroffen und die Form und Dimensionierung ausreichend genau festgelegt werden können, kann dies den iterativen Auslegungsprozess verkürzen. Das Ziel dieser Arbeit ist daher, bestehende effiziente Vorauslegungsmethoden zu verbessern und zu erweitern sowie insbesondere Empfehlungen für komplexe Vorbedingungen und Einschränkungen von Form oder einwirkenden Lastkombinationen abzuleiten.

1.2 Problemstellung

Die Wahl einer effizienten Methode für die Vorauslegung ist demnach ein entscheidender Baustein für eine zeit- und kostensparenden Entwicklung eines strukturmechanischen Bauteils. Eine solche Vorauslegungsmethode ist die gewichtsoptimierte Auslegung nach PRECHTL [2], welche von ihm für einen grundlegenden Vergleich von verschiedenen Bauweisen und Materialkombinationen entwickelt wurde. Mit seiner Methode konnte PRECHTL über einen allgemeinen Ansatz die absoluten Vorteile von hybriden Metallbauteilen zeigen. Dafür hat er einen geschlossen-analytischen Ansatz entwickelt, um für gängige Profilgrundformen (siehe Abbildung 1.2) die gewichtsoptimalen Breiten-Höhenverhältnisse b/h , relativen Profilhöhen h/l und relativen Profildicken t/h zu bestimmen. Den Ansatz hat PRECHTL sowohl für isotrope Materialien als auch für hybride Bauteile aufgestellt. Als ersten Schritt in seiner Auslegung hat er eine Idealisierung real eingesetzter Bauteile vorgenommen (vergleiche mit Abbildung 1.1). Anschließend wurde von ihm für reine Druck- und reine Biegebelastung die gewichtsoptimierte Auslegung durchgeführt. Die Frage, inwiefern die Idealisierung der komplexen Geometrie auf die Grundprofile zulässig ist, war für PRECHTL zum Belegen seiner Forschungshypothese nur von geringer Relevanz. Denn seine Erkenntnisse über die Gewichtsvorteile von hybriden Metallbauteilen können von den idealisierten Bauteilen qualitativ auch auf komplexe Bauteilgeometrien übertragen werden.

Die von PRECHTL erstellte Methode ist indes im Kontext einer effizienten Vorauslegung interessant. Denn möglicherweise können die von ihm gewonnenen Erkenntnisse aus der gewichtsoptimierten Auslegung auf reale Bauteile anwendbar sein. Wären die durch die Idealisierung gewonnenen Erkenntnisse auf das reale Bauteil übertragbar, könnten mit nur wenigen Informationen zu Beginn der Auslegung die Gewichtsvorteile von verschiedenen Materialien verglichen und bewertet sowie schon frühzeitig gewichtsoptimierte Dimensionen des Bauteils ermittelt werden. Dies würde die Vorauslegung umfassend vereinfachen und beschleunigen. Im Kontext der Idealisierung stellt sich zudem die Frage, inwieweit die Ergebnisse von PRECHTL auch für

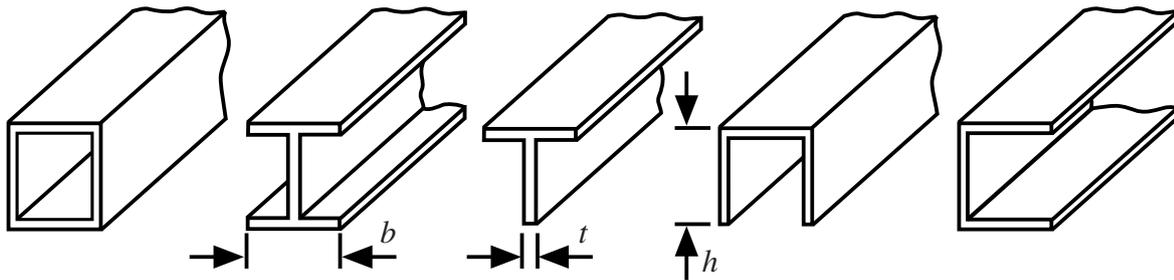


Abb. 1.2: Die von PRECHTL [2] betrachteten Grundprofilformen: Vierkant-, Doppel-T-, T-, U- und C-Profil (von links nach rechts) mit den von ihm optimierten Größen Breite b , Profildicke t und Höhe h .

komplexere, kombinierte Belastungen verwendet werden können. Kann also neben der Idealisierung der Geometrie auch eine Idealisierung der Belastung für die Vorauslegung angenommen werden?

Auf dieser Grundlage wird in dieser Arbeit folgende Forschungshypothese behandelt:

Mit einem hinsichtlich der Belastung und Geometrie idealisierten Bauteil können in der Vorauslegung hinreichend genaue Aussagen über das finale, reale Bauteil getroffen werden.

Davon leiten sich zwei Unterhypothesen ab:

1. Kombinierte Lastfälle können auf die einzelnen Grundlastfälle Druck-, Biege- und Torsionsbelastung reduziert werden.
2. Die in der Vorauslegung ermittelten reduzierten Geometrien liefern hinreichend genaue Ergebnisse für komplexere Profilformen.

Um die Forschungshypothese belegen zu können, wird in dieser Arbeit der Ansatz von PRECHTL um kombinierte Lastfälle erweitert. Die Erweiterung wird über den Einsatz eines effizienten Optimierungsalgorithmus umgesetzt, welcher aus einer Kombination einer Metaheuristik und einer Finite-Platten-Methode aufgebaut ist. Dieser Ansatz wird gewählt, um nicht nur die oben genannten Grundprofile, sondern auch beliebige aus Polygonen aufgebaute Profilgeometrien optimieren zu können.

1.3 Stand der Forschung

Die Auslegung eines Bauteils ist ein komplexer Vorgang, bei dem verschiedenste gestalterische Parameter festgelegt werden müssen. Dies erfordert zahlreiche Iterationen, bei denen von einer zunächst groben Lösung immer mehr Details ausgearbeitet werden. Ein Merkmal ist dabei, dass bereits gestaltete Bereiche durch Änderungen an anderen Stellen des Bauteils unter Umständen

ebenfalls wieder geändert werden müssen. Entscheidend ist ebenfalls, dass «manche Arbeitsschritte (...) mehrfach zu durchlaufen (sind), wenn ein höherer Informationsstand erreicht ist» [17, S. 159]. Zu Beginn dieses Iterationsprozesses steht die Vorauslegung, bei der aufgrund der nur geringen Informationsdichte zunächst nur eine grobe Abschätzung durchgeführt werden kann. Eine gewichtsoptimierte Auslegung findet erst zum Ende des Iterationsprozesses statt, für die standardmäßig Form- und Topologieoptimierungsprogramme verwendet werden, deren Grundlage in der Regel die Finite-Elemente-Methode ist. [17]

Mit der Forschungshypothese dieser Arbeit wird behauptet, dass schon in der Vorauslegung, also am Startpunkt des Iterationsprozesses, eine gewichtsoptimierte Auslegung vorgenommen werden kann. Für dieses Vorgehen eignet sich die Finite-Elemente-Methode allerdings nur bedingt. Denn zum einen liegen in der Regel zu wenige Informationen über das zu optimierende Bauteil vor, zum anderen ist die Finite-Elemente-Methode aufgrund der praktisch beliebig möglichen Detailtiefe vergleichsweise zeitintensiv. Zusätzlich können bei der Finite-Elemente-Methode die elementaren Zusammenhänge im Verhalten des Bauteils nur schwer verstanden werden. Sie kann daher für eine effiziente gewichtsoptimierte Vorauslegung nicht verwendet werden. [18, 19]

Bei einer analytischen Betrachtung des Problems können die Zusammenhänge und Einflussgrößen hingegen direkt erkannt werden. Aus diesem Grund bietet sich die Verwendung analytischer Berechnungen in der Vorauslegung an. Wenn in der Vorauslegung nun auch eine gewichtsoptimierte Auslegung durchgeführt werden soll, ist die allgemeine Betrachtung von Strukturen sinnvoll. So kann unvoreingenommen die bestmögliche Lösung für das vorhandene Problem gesucht werden. Für eine allgemeine Betrachtung von Strukturen existiert der Strukturkennwert, welcher vergleichbar zu den Ähnlichkeitskennzahlen aus der Strömungsmechanik eine Transformation zwischen unterschiedlichen Geometrien und Belastungszuständen zulässt. Im Gegensatz zu den Ähnlichkeitskennzahlen ist der Strukturkennwert nicht dimensionslos, sondern führt die Einheit einer Spannung. Der Strukturkennwert verknüpft eine charakteristische Länge des betrachteten Bauteils mit der einwirkenden Belastung. Unterschiedlich lange Bauteile, die den gleichen Strukturkennwert aufweisen, verhalten sich aufgrund der Definition des Strukturkennwerts grundsätzlich gleich. Zum Beispiel verhalten sich zwei Druckstäbe identisch, wenn einer der beiden Druckstäbe doppelt so lang wie der andere ist, dafür aber auch mit einer viermal höheren Druckkraft belastet wird. Wenn für beide Druckstäbe die relativen Profilgrößen von PRECHTL verwendet werden, haben sie die gleichen Schnittgrößen und versagen auf identische Weise. Mithilfe des Strukturkennwerts können so verallgemeinerte Aussagen über das Verhalten von Bauteilen getroffen werden.

Zum Verifizieren der Forschungshypothese wird die Vorauslegungsmethode nach PRECHTL [2] weiterentwickelt. Die Möglichkeit der Vorauslegung unter kombinierter Belastung ist dabei ein Ziel der Weiterentwicklung. Dies kann nicht mehr mit dem von PRECHTL entwickelten geschlossen-analytischen Ansatz erfolgen, sondern benötigt eine numerische Umsetzung. Für den numerischen Ansatz wird der sogenannte Wittrick-Williams-Algorithmus verwendet, da er eine wenig rechenintensive numerische Methode darstellt, was für die Zielerreichung dieser Arbeit vorteilhaft ist. Zum Belegen der aufgestellten Forschungshypothese ist daher die Verknüpfung

der gewichtsoptimierten Auslegung nach PRECHTL mit dem Strukturkennwert als Basis und des Wittrick-Williams-Algorithmus entscheidend. Im Folgenden werden beide kurz vorgestellt:

1.3.1 Strukturkennwert

Erstmals aufgestellt wurde der Strukturkennwert von WAGNER [20] für die Verwendung bei Knickstäben und Biegeträgern unter dem Begriff «Kennwert» beziehungsweise auf Englisch «Index Value». WAGNER setzt den «Kennwert» zur Bewertung unterschiedlicher Materialien und für die Dimensionierung von Bauteilen ein und gibt den Hinweis, dass für sinnvolle Vergleiche nur gewichtsbezogene Kenngrößen verwendbar seien. Darauf aufbauend verwenden verschiedene Autoren den Strukturkennwert in der Luftfahrtforschung, erweitern teilweise das Konzept durch Lasteinleitungsfaktoren, um verschiedene Materialien und unterschiedliche Versteifungen an Bauteilen vergleichen zu können [21–23].

In der jüngeren englischsprachigen Literatur wird der Strukturkennwert von ASHBY [24] aufgegriffen. ASHBY verwendet für den Strukturkennwert den Begriff «Structural Index», wobei er anmerkt, dass auch die Begriffe «Structural Loading Coefficient», «Strain Number» oder «Strain Index» verwendet werden. Die Uneindeutigkeit der Benennung deutet auf eine geringe Verbreitung im englischen Sprachraum hin. ASHBY nutzt den Strukturkennwert im Rahmen von Optimierungen von Tragwerken, wobei die Zielfunktion neben der Masse auch das Volumen oder die Kosten beinhaltet und maximiert oder minimiert werden kann. Er teilt seine Auslegungsaufgabe neben der Geometrie auch auf Materialeigenschaften und auf funktionale Anforderungen als Einflussfaktoren auf. Zur Beschreibung der drei voneinander unabhängigen Einflussfaktoren verwendet ASHBY [24] neben gewichtsbezogenen Materialkenngrößen und sogenannten Gestaltfaktoren auch den Strukturkennwert. Für ihn ist der Strukturkennwert eine Größe für die Intensität der Last, wird im Gegensatz zu den anderen beiden Einflussfaktoren allerdings nur kurz von ihm besprochen. In vorangegangenen Arbeiten befassten sich ASHBY und CEBON [25] sowie WEAVER und ASHBY [26] schon im Rahmen von homogenen Biegebalken mit dem Strukturkennwert. WEAVER [27] hat sich zudem noch mit der Bewertung von Zylinderschalen beschäftigt, wobei er die Versagensmöglichkeiten in Abhängigkeit vom Strukturkennwert aufzeigt. Für die Optimierung von Druckstäben und Biegebalken verwendet REES [28] den Strukturkennwert. Er betrachtet neben Vollprofilen auch dünnwandige Profile in der Ausführung als Vierkant-, Doppel-T- und T-Profil.

In der deutschsprachigen Literatur wurde der Strukturkennwert im Wesentlichen von WIEDEMANN [29] weiterentwickelt. WIEDEMANN verwendet den Strukturkennwert für die Optimierung von verschiedenen Voll- und dünnwandigen Profilen unter Druck-, Zug-, Biege- und Schubbelastung. Als Restriktionen werden neben den zulässigen Materialgrenzen die Stabilitätsgrenzen nur teilweise integriert. Zusätzlich verwendet WIEDEMANN den Strukturkennwert für die optimierte Auslegung von versteiften Platten, bei denen er die Rechnungen neben homogenen Bauweisen auch für Materialien aus Faserkunststoffverbund aufzeigt. Neben WIEDEMANN hat auch KLEIN [30] eine optimierte Auslegung von Bauteilen unter Druck- und Biegebelastung in Abhängigkeit des Strukturkennwerts diskutiert, wobei für ihn der Strukturkennwert ein nützliches Werkzeug für die Optimierung von Einzelzweckstrukturen darstellt.

Schließlich führt PRECHTL [2] die verschiedenen vorstehend beschriebenen Verwendungen des Strukturkennwerts in seiner Dissertationsschrift zusammen. Er stellt erstmals einen umfassenden geschlossen-analytischen Ansatz für die gewichtsoptimierte Auslegung von druck- und biegebelasteten dünnwandigen Profilen in der Ausführung als Vierkant-, Doppel-T-, T-, U- und C-Profil auf. Seine Ausführungen liefern Ergebnisse für gewichtsoptimale Breiten-Höhenverhältnisse b/h , relative Profilhöhen h/l und relative Profildicken t/h , wobei er sowohl Festigkeits- als auch Stabilitätsrestriktionen beachtet. Neben homogenen Bauteilen bespricht PRECHTL auch hybride Bauteile.

1.3.2 Wittrick-Williams-Algorithmus

Der Wittrick-Williams-Algorithmus ist eine Berechnungsmethode auf Basis eines *Finite-Platten*-Ansatzes zur Bestimmung der kritischen Beulspannung von aus Platten zusammengesetzten Strukturen unter kombinierter Belastung [31–33]. Entwickelt wurde diese Methode vor dem Hintergrund der geringen Rechenleistung von Computern in den 1960er-Jahren, mit welchen die Berechnung von komplexen Strukturen mit alternativen Methoden wie der Finite-Elemente-Methode noch nicht durchführbar war. Durch den Aufbau mit Platten als Grundelemente wird beispielsweise eine im Vergleich zur Finite-Elemente-Methode deutlich kleinere Steifigkeitsmatrix gebildet, was in einem erheblichen Geschwindigkeitsvorteil und einem deutlich geringeren Speicherbedarf bei der Berechnung resultiert.

Der Wittrick-Williams-Algorithmus verwendet einen allgemeinen Ansatz aus der nichtlinearen Plattentheorie nach NOVOZHILOV [34], dessen Grundlage die Annahme bildet, dass jede beliebige Beulmode von aus einzelnen Platten zusammengesetzten Strukturen in einer in Längsrichtung sinusförmigen Verformung des Profils auftritt. Dadurch treten an allen Verbindungsstellen zwischen den einzelnen Plattenelementen sinusförmige Verteilungen von Kräften und Momenten mit einer für alle Platten gleichen Wellenlänge λ auf. Der Algorithmus bildet die passende Steifigkeitsmatrix, die die Amplituden der Randkräfte und Randmomente mit den Amplituden der Verschiebungen und Rotationen derselben Ränder verbindet. Aufgrund der sinusförmigen Verformung werden die Einträge der Steifigkeitsmatrix mit trigonometrischen Funktionen und Hyperbelfunktionen gebildet, sodass die Steifigkeitsmatrix transzendent ist. Das bedeutet, dass für jede gewählte Wellenlänge λ unendlich viele Spannungen σ existieren, die diese sinusförmigen Verformungen hervorrufen können und somit passende Lösungen darstellen würden. Ein klassisches Invertieren der Steifigkeitsmatrix zum Finden der Eigenwerte wie bei der Finite-Elemente-Methode ist daher nicht möglich [31]. WILLIAMS und WITTRICK [33] haben ein numerisches Verfahren entwickelt, mit dem trotz der transzendenten Steifigkeitsmatrix die gesuchte Beulmode gefunden werden kann, wobei die Geschwindigkeits- und Speicherbedarfsvorteile gegenüber der Finite-Elemente-Methode bestehen bleiben.

WITTRICK [31] hat 1968 die grundlegende Idee und die mathematische Herleitung für Profile aus isotropen Materialien unter einer konstanten Druckbelastung veröffentlicht. In den folgenden Jahren haben WILLIAMS und WITTRICK den Algorithmus auf anisotropes Material, konstante

Schub- und Quer- und variable Druckbelastung sowie kombinierte Druck- und Torsionsbelastungen erweitert. Die Methode ist neben offenen und geschlossenen Profilen auch auf versteifte Platten anwendbar [35–37].

In neuerer Zeit werden der Wittrick-Williams-Algorithmus und Adaptionen sowie Erweiterungen davon für Vibrations- [38, 39] und Eigenwertberechnungen [40] sowie für Spezialanwendungen wie beispielsweise zur Berechnung von Wellenausbreitungen in Strukturen [41] genutzt.

1.4 Zielsetzung und Vorgehensweise

Um die in Kapitel 1.2 aufgestellte Forschungshypothese und die beiden Unterhypothesen verifizieren beziehungsweise falsifizieren zu können, werden in dieser Arbeit drei Ziele verfolgt. Die Grundlage bilden Ergebnisse der gewichtsoptimierten Auslegung für die drei einzelnen Grundlastfälle, angelehnt an die Auslegungsmethode von PRECHTL [2]. Um die erste Unterhypothese zu den Lastfällen belegen zu können, wird in einem zweiten Schritt die gewichtsoptimierte Auslegung um kombinierte Lastfälle erweitert, wobei die Profile in den Grundprofilformen verbleiben. Die Auslegung erfolgt dann nicht mehr geschlossen-analytisch, sondern wird über eine Optimierung mit dem Wittrick-Williams-Algorithmus als Grundlage durchgeführt. Eine Optimierung ist nötig, da der Algorithmus die gewichtsoptimalen Profile finden muss. Als abschließender Schritt wird der Algorithmus so verändert, dass polygonisierte Profile gewichtsoptimal ausgelegt werden, wodurch die Profilform ebenfalls optimiert wird. Diese Ergebnisse können dann mit den Ergebnissen der Grundprofile verglichen werden, um die zweite Unterhypothese belegen zu können. Die Erkenntnisse aus allen Ergebnissen ermöglichen abschließend, die Forschungshypothese zu belegen. Um das beschriebene Vorgehen in dieser Arbeit umsetzen zu können, werden demnach folgende Arbeitsschritte durchgeführt:

- Anpassung und Erweiterung der gewichtsoptimierten Auslegung nach PRECHTL auf die drei Grundlastfälle Druck-, Biege- und Torsionsbelastung.
- Anpassung des Wittrick-Williams-Algorithmus mit dem Strukturkennwert als Belastungssystem und eine Erweiterung auf die Möglichkeit der Verarbeitung der drei Grundlastfälle.
- Auswahl und Umsetzung einer geeigneten Optimierungsmethode, um sowohl Grundprofilformen als auch polygonisierte Profilformen optimieren zu können.

Für die Umsetzung der Optimierungsmethode bietet sich ein sogenannter Evolutionärer Algorithmus an. Mit einem solchen Algorithmus kann sehr flexibel auf eine Veränderung und Erhöhung der Anzahl der Optimierungsparameter reagiert werden. Bei den Grundprofilen muss lediglich zwischen drei Größen (Breite, Höhe und Profildicke) optimiert werden. Bei polygonisierten Strukturen erhöht sich die Anzahl der veränderlichen Größen deutlich, wenn, wie in dieser Arbeit angewendet, die Koordinaten der einzelnen Plattenränder in der Profilquerschnittsebene beliebig veränderbar und optimierbar sind. Ein Evolutionärer Algorithmus hat aufgrund seines stochastischen Vorgehens im zweiten Fall deutliche Vorteile gegenüber deterministischen Optimierungsalgorithmen, ohne dass bei den Grundprofilen mit den wenigen Parametern zu viele

Nachteile hingenommen werden müssen. Zusätzlich bietet sich eine Integration des Wittrick-Williams-Algorithmus aufgrund seiner kurzen Rechendauer in einen Evolutionären Algorithmus an, da bei Evolutionären Algorithmen in der Regel eine hohe Anzahl an sich wiederholenden Rechendurchgängen durchgeführt werden müssen. Die Geschwindigkeitsvorteile des Wittrick-Williams-Algorithmus kommen dann besonders zur Geltung.

Vor diesem Hintergrund ergibt sich für diese Arbeit folgende Struktur: In **Kapitel 2** werden das Koordinatensystem für diese Arbeit definiert und die in den Rechnungen verwendeten Materialparameter genannt. **Kapitel 3** liefert die theoretischen Grundlagen, um alle Methoden und Herleitungen vollständig nachvollziehen zu können. In **Kapitel 4** werden der Aufbau und die Herleitung des Wittrick-Williams-Algorithmus nachvollzogen sowie um die Anwendung des Biegelastfalls erweitert. **Kapitel 5** befasst sich mit der gewichtsoptimierten Auslegung nach PRECHTL [2]. Zunächst wird die Herleitung von PRECHTL nachvollzogen, wobei auf unsachgemäße Herleitungsschritte aufmerksam gemacht wird und Korrekturen an diesen Stellen stattfinden. Anschließend wird die Methodik verwendet, um auch für eine reine Torsionsbelastung eine gewichtsoptimierte Auslegung vornehmen zu können. In **Kapitel 6** werden jeweils die Ergebnisse zur gewichtsoptimierten Auslegung für die Grundprofile unter den Grundlastfällen vorgestellt. Dabei findet ein Vergleich zwischen den Ergebnissen der in dieser Arbeit entwickelten Methode mit den Ergebnissen von PRECHTL und den Ergebnissen des Optimierungsalgorithmus statt. Dieser Schritt wird unter anderem auch für die Validierung des entwickelten Optimierungsalgorithmus genutzt. In **Kapitel 7** werden die Ergebnisse des Optimierungsalgorithmus von Grundprofilen unter kombinierten Belastungen vorgestellt. Mit diesen Ergebnissen kann die erste Unterhypothese belegt werden. In **Kapitel 8** werden die Ergebnisse für polygonisierte Profile vorgestellt, womit die zweite Unterhypothese belegt wird. Im letzten **Kapitel 9** werden die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst, womit die Forschungshypothese abschließend belegt wird. Die Arbeit schließt mit dem Ausblick ab, in dem Empfehlungen für eine effizientere Vorauslegung gegeben und mögliche Erweiterungen für den in dieser Arbeit entwickelten Optimierungsalgorithmus genannt werden.

2 Koordinatensystem und Materialdaten

Alle Berechnungen, Herleitungen und Ergebnisse in dieser Arbeit werden anhand des in Abbildung 2.1 gezeigten Koordinatensystems aufgestellt, wenn an der jeweiligen Stelle nicht etwas anderes angegeben ist. Die x_1 -Achse des Koordinatensystems zeigt immer in die Längsrichtung des Profils beziehungsweise der Platte. Die anderen beiden Achsen sind entsprechend angeordnet. Der Koordinatenursprung befindet sich dabei, wenn nicht anderweitig angegeben, immer im Schwerpunkt des Profils.

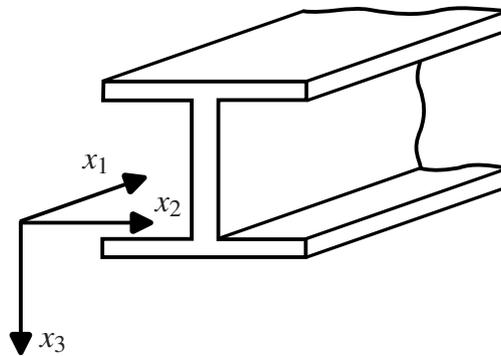


Abb. 2.1: Das Koordinatensystem, wie es für diese Arbeit definiert ist.

Zum Vergleich der verschiedenen Auslegungsmethoden werden quantitative Werte benötigt. Alle in dieser Arbeit verwendeten Auslegungsmethoden sind prinzipiell für beliebige isotrope Materialien anwendbar. Da die Arbeiten von PRECHTL eine Grundlage dieser Arbeit ist und Ergebnisse untereinander verglichen werden, wird in dieser Arbeit das von PRECHTL verwendete Material genommen. Das von ihm verwendete Material «Stahl» weist die in Tabelle 2.1 aufgelisteten Materialparameter auf.

Tab. 2.1: Die in dieser Arbeit verwendeten Materialparameter nach PRECHTL [2]

Bezeichnung	Symbol	Wert
Elastizitätsmodul	E	210000 MPa
Dehngrenze	$R_{p0,2}/\sigma_{zul}$	430 MPa
Querkontraktionszahl	ν	0,3
Dichte	ρ	7860 kg/m ³

3 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen vorgestellt, die benötigt werden, um den in dieser Arbeit entwickelten Optimierungsalgorithmus verstehen und nachvollziehen zu können. Der Wittrick-Williams-Algorithmus und die gewichtsoptimierte Auslegung nach PRECHTL [2] sind zentrale Themen dieser Arbeit und werden gesondert in den separaten Kapiteln 4 und 5 besprochen. Da der in dieser Arbeit entwickelte Optimierungsalgorithmus den Strukturkennwert als Grundlage hat, wird zunächst auf die Optimierung mithilfe des Strukturkennwerts eingegangen. Anschließend folgen die nötigen analytischen Zusammenhänge für dünnwandige Profilstäbe unter den drei Grundlastfällen, um die geschlossen-analytischen Herleitung in Kapitel 5 nachvollziehen zu können. Das Kapitel schließt mit der Vorstellung von Evolutionären Algorithmen ab, die als metaheuristisches Verfahren im für diese Arbeit entwickelten Optimierungsalgorithmus verwendet werden.

3.1 Optimierung über den Strukturkennwert

Nach BAIER, SEESSELBERG und SPECHT [42] bezeichnet die Optimierung in der Strukturmechanik eine Auswahl an Entwurfsvariablen für eine mechanische Struktur, für die eine oder mehrere Zielfunktionen unter Beachtung von verschiedenen Restriktionen bestmöglich erfüllt werden. Die Optimierung kann dabei unter Berücksichtigung verschiedener Gestaltungsvariablen erfolgen, die nach SCHUMACHER [43] in fünf unterschiedliche Klassifizierungen eingeteilt werden können. Die Klassifizierungen sind in Abbildung 3.1 am Beispiel eines Stabprofils gezeigt. Die fünf Klassifizierungen sind:

- Über die Wahl der Bauweise beispielsweise mit Verstärkungen oder Füllungen kann das Profil optimiert werden.
- Über die Wahl der Materialeigenschaften kann mit verschiedenen isotropen Materialien, wie beispielsweise Stahl oder Aluminium, Faserkunststoffverbunden, wie ein Carbonfaserkunststoffverbund, oder auch Keramiken oder beliebig andere Materialien das Verhalten des Bauteils verändert werden.
- Mit der Topologieoptimierung kann der Querschnitt des Stabprofils gewählt werden. Dies können beispielsweise ein Voll-, ein Vierkant- oder ein Doppel-T-Profil sein. Allgemeiner nach BAIER, SEESSELBERG und SPECHT [42] bezeichnet die freie Verteilung der Materie im Raum die Veränderung der Topologie.
- Mit der Formoptimierung kann eine Optimierung über strukturmechanische Einflussgrößen wie dem Flächenträgheitsmoment erfolgen. Im Unterschied zur Topologieoptimierung

ist nach BAIER, SEESSELBERG und SPECHT [42] die Veränderung der Gestalt bei unveränderter Topologie die Abgrenzung der Form- von der Topologieoptimierung.

- Schließlich erlaubt die Dimensionierung eine lokale Optimierung über beispielsweise die Einstellung der Wandstärken des Profils. Diese kann für das gesamte Profil einheitlich aber auch für jede Profilfläche unterschiedlich gewählt werden.

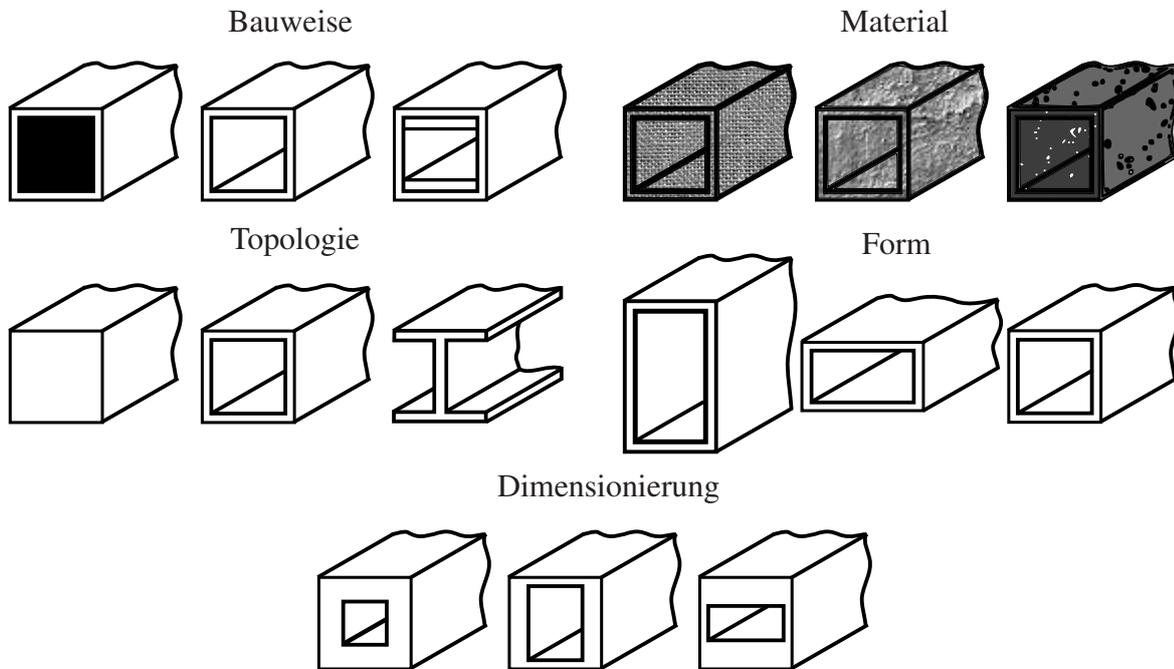


Abb. 3.1: Einteilung von Strukturoptimierungsproblemen am Beispiel eines Stabprofils [2].

Typischerweise erfolgt in der Strukturmechanik die Topologie- und Formoptimierung über numerische Verfahren wie die Methode der Finite-Elemente. Diese Arbeit vertieft die Arbeiten von PRECHTL [2], der in seiner Arbeit eine geschlossen-analytische Lösung mit dem Strukturkennwert als Grundlage entwickelt hat. Aus diesem Grund wird auch in dieser Arbeit auf den Strukturkennwert zurückgegriffen, um die Arbeiten von PRECHTL [2] zu erweitern und auf überlagerte Lastfälle zu übertragen.

Nach ASHBY [24] ist das Funktionsvermögen eines Strukturbauteils über drei Eigenschaften definiert: Geometrische Parameter, Materialeigenschaften und funktionelle Anforderungen, die je nach Einsatzzweck des Bauteils auf verschiedenste Art ausgeführt werden können wie beispielsweise eine spezifische Festigkeit für ein Verbindungselement, eine bestimmte Rückstellkraft für eine Feder oder ein bestimmter Wärmeübertrag für einen Wärmetauscher. Allgemein kann das Funktionsvermögen V mit

$$V = \left[\left(\begin{array}{c} \text{funktionelle} \\ \text{Anforderungen} \end{array} F \right), \left(\begin{array}{c} \text{Geometrie-} \\ \text{parameter} \end{array} G \right), \left(\begin{array}{c} \text{Material-} \\ \text{eigenschaften} \end{array} M \right) \right]$$

beziehungsweise mit

$$V = f(F, G, M) \quad (3.1.1)$$

beschrieben werden. [24]

Die drei Eigenschaften sind unabhängig voneinander wenn Gleichung 3.1.1 folgendermaßen geschrieben werden kann

$$V = f_1(F) f_2(G) f_3(M). \quad (3.1.2)$$

Vor diesem Hintergrund ist die Auswahl des optimalen Materials unabhängig von der optimalen Geometrie G und dem Funktionszweck F . ASHBY [24] nennt die Funktion $f_3(M)$ Materialkennwert (beziehungsweise auf Englisch «material index»). Der andere Term $f_1(F) \cdot f_2(G)$ kann als Strukturkennwert K zusammengefasst werden. Wenn das Ziel der Optimierung beziehungsweise der Auslegung die Reduktion der Masse ist, kann die Berechnung der Masse m für einen Profilstab

$$m = A l \rho \quad (3.1.3)$$

als Startpunkt für die Herleitung des Strukturkennwerts genutzt werden. A bezeichnet dabei die Querschnittsfläche des Profils, l die Länge des Profilstabs und ρ die Dichte des Materials. Bei feststehender Länge l und unabhängig vom Material kann die Masse m nur durch eine Reduktion der Querschnittsfläche A verringert werden. Nun wird eine funktionelle Randbedingung benötigt. Wenn zum Beispiel ein Profilstab unter einer Kraft P belastet wird, kann die Querschnittsfläche A nicht beliebig reduziert werden, da eine definierte Spannung σ_{zul} nicht überschritten werden darf. [24]

Daher muss gelten:

$$\sigma_{zul} \geq \frac{P}{A}$$

beziehungsweise eingesetzt in Gleichung 3.1.3

$$m \geq P l \frac{\rho}{\sigma_{zul}}. \quad (3.1.4)$$

Gleichung 3.1.4 ist nun ähnlich aufgebaut wie Gleichung 3.1.2, da die Kraft P für die funktionellen Anforderungen, die Länge l für die Geometrieparameter und der Term ρ/σ_{zul} für die Materialeigenschaften stehen. Nach ASHBY [24] kann die Effizienz eines Designs mit der Volumendichte m/l^3 bestimmt werden. Wenn Gleichung 3.1.4 nun durch l^3 geteilt wird, ergibt sich

$$\frac{m}{l^3} \geq \frac{P}{l^2} \frac{\rho}{\sigma_{zul}}$$

Wie zu Beginn erwähnt, bilden alle Terme, abgesehen von den Materialeigenschaften, den Strukturwert K . In dem Beispiel eines Profilstabs unter einer Einzellast ist dies P/l^2 . Der Strukturwert K weist demnach die Einheit einer Spannung auf. ASHBY [24] nennt noch weitere Beispiele für die Herleitung wie eine versteifte Platte oder ein versteifter Balken, wobei auch hier der Strukturwert K immer die Einheit einer Spannung aufweist. Der Strukturwert K beschreibt somit die Intensität der Belastung. Mit ihm kann die Einordnung der Belastung erfolgen, da bei einem kleinen Strukturwert ein Stabilitätsproblem und bei einem großen Strukturwert ein Festigkeitsproblem vorherrschen. Durch die Verknüpfung von Belastung und Geometrie verhalten sich Bauteile, die über den gleichen Strukturwert K verfügen, grundsätzlich gleich. Wie von ASHBY [24] gezeigt, ist die Definition des Strukturwerts von der aufgetragenen Last und der Geometrie des betrachteten Bauteils abhängig (vergleiche mit Abbildung 3.2).

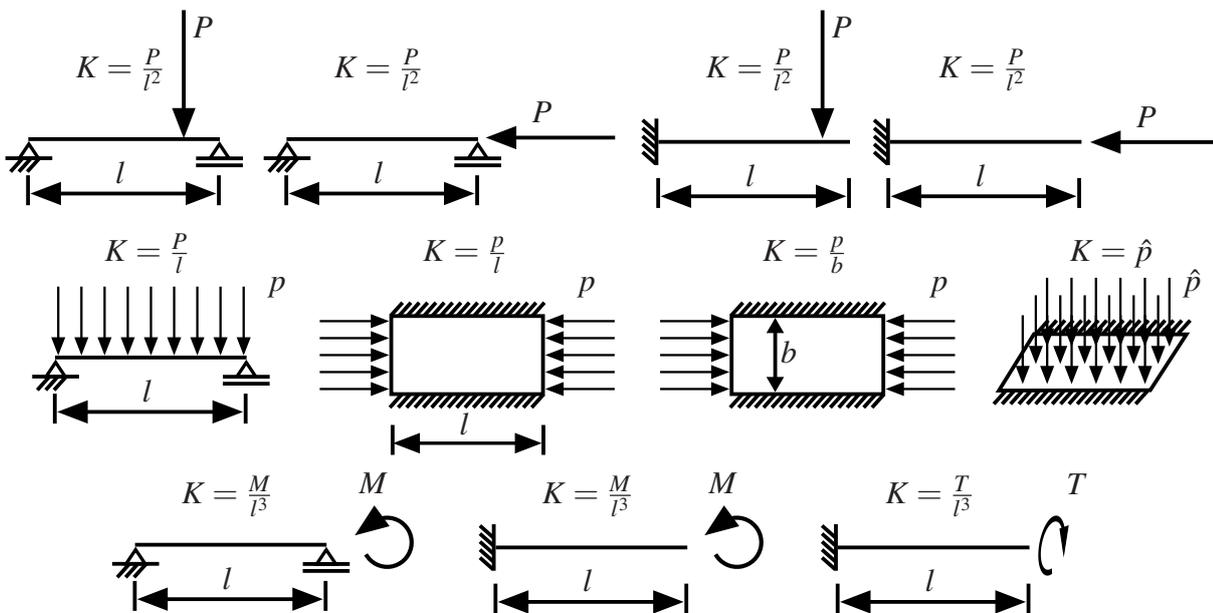


Abb. 3.2: Die Definition des Strukturwerts ist von der Belastung (punkt-, linien- oder flächenförmig) und von der charakteristischen Länge abhängig. Angelehnt an PRECHTL [2].

Wenn ein Tragwerk über eine Einzellast P belastet wird, so geht, wie oben gezeigt, die Länge des Tragwerks quadratisch mit der Formel $K = P/l^2$ ein. Erfolgt die Belastung über eine Linienlast p , geht die charakteristische Länge linear über $K = p/l$ ein. Wenn die Belastung über eine Flächenlast auftritt, gilt für den Strukturwert $K = \hat{p}$. Wenn die Belastung über ein Moment M erfolgt, ist der Strukturwert mit $K = M/l^3$ definiert. Das gleiche gilt bei einem Torsionsmoment T . Die charakteristische Länge ist vom Anwendungsfall abhängig und kann beispielsweise auch die Breite b des Profils bezeichnen.

Die an dieser Stelle aufgestellten allgemeinen Beziehungen für den Strukturkennwert werden in Kapitel 5 verwendet, um eine optimierte Auslegung verschiedener Standardquerschnitte durchführen zu können. PRECHTL [2] muss dafür weitere Wirkungsfaktoren einführen und Erweiterungen definieren, da nach WIEDEMANN [29] zur Stabilitätsbetrachtung die statische Verformung und die Knick- sowie Beulstabilität gehören, wohingegen die Festigkeit von Spannungsverteilungen und -spitzen abhängig ist.

3.2 Das Verhalten dünnwandiger gerader Stabtragwerke unter Druck und Biegung

Stäbe und Biegebalken sind aufgrund hoher Biege- und Knicksteifigkeiten typische Leichtbauelemente und gehören zur Gruppe der geraden Stabtragwerke. Zusammen mit gekrümmten Elementen wie Ringe, Bögen und Seile gehören sie zur Untergruppe der eindimensionalen Tragwerkselemente. Stäbe und Balken müssen für die hier angewendete Theorien eine gewisse Schlankheit im Verhältnis von Länge l zu Höhe h und Breite b und von der Höhe h beziehungsweise der Breite b zur Blechdicke t von wenigstens $1/10$ aufweisen. [44]

3.2.1 Steifigkeiten und Spannungszustand

Die Reaktion von Stabtragwerken «unter Querkraftbiegung, Torsion, Knickbeanspruchung oder Schwingung wird durch die Profilsteifigkeiten des Stabes bestimmt. Diese sind aus den Dehnungs- und Spannungsverteilungen im Querschnitt zu ermitteln und verknüpfen die resultierenden Schnittlasten mit den Verformungen des Stabelements» [29, S. 86]. Die Verformung wird nach der elementaren Stabtheorie über vier Freiheitsgrade definiert. Grundvoraussetzung ist, dass die Querschnitte bei Querkraftbiegung eben bleiben. Die Freiheitsgrade sind die Längsdehnung ε_1 , die Krümmungskomponenten ψ_2 und ψ_3 sowie die Drillung ψ_1 . Aus den vier Verschiebungen bilden sich Spannungsverteilungen im Querschnitt des Profils, woraus vier Schnittlasten resultieren. Diese sind die Längskraft P , die Komponenten des Biegemoments M_2 und M_3 sowie das Torsionsmoment T . [29]

Die in dieser Arbeit betrachteten Grundprofilformen sind entweder einfach oder doppelt achsensymmetrisch, wodurch die Hauptträgheitsachsen mit den Symmetrieachsen des Profils identisch sind. Zusätzlich kann nach WIEDEMANN [29] zur Vereinfachung angenommen werden, dass bei dünnwandigen Profilen die Normalspannung über die Blechdicke t konstant ist. Auf diese Weise ergibt sich im homogenen, rein elastisch beanspruchten Querschnitt die linear verteilte Normalspannung σ_{11} mit

$$\sigma_{11} = \frac{P}{A} + x_3 \frac{M_2}{J_{22}} - x_2 \frac{M_3}{J_{33}}.$$

Wobei P eine in x_1 -Richtung wirkende Einzellast darstellt. Die Momente M_2 und M_3 wirken um die jeweils angegebene Achse. A bezeichnet die Querschnittsfläche des Profils und J_{22} sowie J_{33} stehen für die Flächenträgheitsmomente bezogen auf die angegebene Achse.

Falls die Belastung nur in eine der beiden Haupttrichtung wirkt, können die maximalen Spannungen mit

$$|\sigma|_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_2}{W_{22}}, \quad |\sigma|_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_3}{W_{33}}$$

berechnet werden. Die Widerstandsmomente W_{22} und W_{33} lassen sich mit

$$W_{22} = J_{22}/|x_3|_{\max}, \quad W_{33} = J_{33}/|x_2|_{\max}$$

bestimmen. [29]

Wenn Profilstäbe als Druckstäbe oder Biegeträger eingesetzt werden, muss nicht immer ein Versagen hinsichtlich des Materials eintreten. Das Bauteil kann auch durch Instabilwerden versagen. Das sogenannte Stabilitätsversagen tritt in diesem Fall vor einem möglichen Material- beziehungsweise dem sogenannten Festigkeitsversagen ein. Solche Zustände, die als Knicken und lokales Beulen bezeichnet werden, sind «als Grenzfälle nichtlinearen Verhaltens zu verstehen, bei denen ein geringer Lastzuwachs undefinierbar große Verformungen hervorruft» [29, S. 127]. Knicken und Beulen werden daher nachfolgend näher beschrieben, wobei alle Versagensarten, die durch Torsion hervorgerufen werden in Kapitel 3.3 besprochen werden. Neben einem Stabilitätsversagen kann ein Bauteil auch durch eine maximal zulässige Durchbiegung beschränkt werden. Dies stellt nicht direkt ein Versagen im Sinne des Verlusts der Einsatzfähigkeit dar, kann aber trotzdem unerwünscht sein. Eine zu große Verformung muss zum Beispiel unterbunden werden, wenn dadurch der zulässige Bauraum überschritten oder die gewollte Krafteinleitung nicht mehr gewährleistet wird. Daneben spielen auch optische Überlegungen eine Rolle, da zu große Durchbiegungen bei Profilen durch Laien als Unsicherheit eingestuft werden. [45]

3.2.2 Knicken

Wenn Stäbe unter zentrischer Längsdruckbelastung stehen, können sie durch verschiedene Formen des Knickens versagen. Die auftretende Knickform hängt von der Profilform und -symmetrien ab und kann sich als Biegeknicken in einer der Hauptträgheitsrichtungen, als Drillknicken oder als Biegedrillknicken ausbilden. Bei den in dieser Arbeit verwendeten doppelt- oder punktsymmetrischen Grundprofilen, also bei identischer Neutral- und Schubmittelpunktachse, existieren um jede Profalachse voneinander unabhängige Knickformen und Knicklasten. [29]

Diese sind das Biegeknicken um die x_2 - beziehungsweise die x_3 -Achse sowie das Drillknicken um die x_1 -Achse. Die Knicklasten P_{krit} für das Biegeknicken lauten nach WIEDEMANN [29]

$$P_{\text{krit}_2} = \frac{EJ_{22}\pi^2}{cl^2} \quad \text{Biegeknicken um die } x_2\text{-Achse,}$$

$$P_{\text{krit}_3} = \frac{EJ_{33}\pi^2}{cl^2} \quad \text{Biegeknicken um die } x_3\text{-Achse.}$$

Wobei E für das Elastizitätsmodul des verwendeten Materials steht, der Einfluss der Lagerung über den Faktor c bestimmt wird und l die Länge des Stabs beschreibt. Einfachsymmetrische Profile knicken in Richtung der Symmetrieachse aus. Somit knickt ein bezüglich der x_2 -Achse symmetrisches Profil bei einer Last P_{krit_2} um die x_2 -Achse aus.

Das «Drillknicken ist nur bei gedrungenen Stäben zu erwarten, oder bei solchen, deren Biegeverformung durch seitliche Fesseln, etwa durch Anschluß an eine Haut behindert ist.» [29, S. 131] Diese Profile kommen in dieser Arbeit nicht vor, weswegen das Drillknicken um die x_1 -Achse nicht weiter behandelt wird.

3.2.3 Beulen

Um ein Stabilitätsversagen zu verhindern, ist also eine hohe kritische Knicklast P_{krit} beziehungsweise eine hohe Knicksteifigkeit nötig. Wenn Material und Länge des Bauteils nicht veränderlich sind, ist dies nur über ein großes Flächenträgheitsmoment J zu erreichen. Da die Dicke der Profilflächen fürs Flächenträgheitsmoment nur eine untergeordnete Rolle spielt, sollten sie zur Massenreduktion möglichst dünnwandig ausgeführt werden. Die Breite und die Höhe des Profils sollten hingegen die maximal möglichen Werte aufweisen. Bei einer Druckbelastung können die dünnen Profilwände allerdings ausbeulen. Das zuvor dargestellte Knicken ist ein globales Phänomen für das gesamte Stabbauteil, wohingegen das Beulen ein lokales Phänomen der Teilflächen des Stabes in Form eines Plattenproblems darstellt. Die Profilflächen des Stabs, die als Stege und Flansche fungieren, können als ebene Plattenstreifen angesehen werden. [29]

Charakteristisch ist, dass die Plattenstreifen eines Profils nicht unabhängig voneinander betrachtet werden können, da sie sich gegenseitig beeinflussen, indem die jeweiligen Längskanten gegen seitliches Verschieben oder Krümmen vom benachbarten Plattenstreifen gestützt werden. Zusätzlich beeinflusst die Steifigkeit der Verbindung die Plattenstreifen, da bei einer angenommenen gelenkigen Verbindung jeder Streifen unabhängig von seinen Nachbarn ausbeulen würde. Durch die existierende Drehkopplung stützen beziehungsweise schwächen sich alle Plattenstreifen gegenseitig. Der schwächste Plattenstreifen bringt das gesamte Profil zum Beulen. [29]

Die analytische Berechnung zur Bestimmung der kritischen Beulspannung σ_{krit} haben TIMOSHENKO und GERE [46] umfassend dargelegt. KROLL, FISHER und HEIMERL [47] sowie BECKER [48] haben numerische Werte von Beulwerten ermittelt. Deren Berechnung basiert auf von LUNDQUIST, STOWELL und SCHUETTE [49] entwickelten numerischen Methoden. Eine umfassende Übersicht über das Beulverhalten von isotropen und anisotropen Materialien unter verschiedensten Lager- und Lastbedingungen gibt das «Handbuch Strukturberechnung» [50].

PRECHTL [2] greift in seiner Arbeit auf den analytischen Ansatz zur Bestimmung der kritischen Beulspannung σ_{krit} nach WIEDEMANN [29] zurück, da «diese (numerischen) Berechnungen aufwändiger sind und die daraus resultierenden Ergebnisse die (...) (in seiner Arbeit) entwickelten Methoden unüberschaubar bis nicht mehr handhabbar machen.» [2, S. 31] Da diese Arbeit die Methoden von PRECHTL aufgreift und erweitert, wird für die analytische Auslegung ebenfalls der Ansatz von WIEDEMANN [29] gewählt.

WIEDEMANN [29] zeigt, dass das Beulverhalten von Plattenstreifen eines Profils zwischen dem einer gelenkig gelagerten und einer fest eingespannten Platte liegt. Die kritische Beulspannung σ_{krit} einer Platte ist mit

$$\sigma_{\text{krit}} = k_{\sigma} E \left(\frac{t}{h} \right)^2 \quad (3.2.2)$$

definiert. [29] Wobei t für die Dicke und h für die Breite der Platte stehen. Der modifizierte Beulfaktor k_{σ} ist von der Einspannung, dem Lastfall und dem Material abhängig. Unabhängig von Einspannung und Lastfall lässt sich der modifizierte Beulfaktor k_{σ} mit

$$k_{\sigma} = \kappa_{\text{P}} \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \quad (3.2.3)$$

beschreiben [50], wobei ν die Querkontraktionszahl ist. Der Beulfaktor κ_{P} ist dann nur noch von der Einspannung und dem Lastfall abhängig. Einfluss hat, ob die Kanten der Platte gelenkig oder fest eingespannt sind. Hier beträgt der Unterschied bei reiner Druckbelastung zwischen $\kappa_{\text{P}} = 4$ und $\kappa_{\text{P}} = 6,97$. Wenn eine Kante der Platte frei ist, sinkt der Beulfaktor auf $\kappa_{\text{P}} = 0,425$ beziehungsweise $\kappa_{\text{P}} = 1,25$, je nachdem, ob die eingespannte Seite fest oder gelenkig gelagert ist. Wenn nun nicht reine Druckbelastung vorliegt, sondern die Platte unter einem Lastverlauf belastet wird und somit ein Wechsel von Druck- zu Zugspannung stattfindet, erhöhen sich die Werte auf $\kappa_{\text{P}} = 23,88$ beziehungsweise $\kappa_{\text{P}} = 39,52$ (siehe Abbildung 3.3). [50]

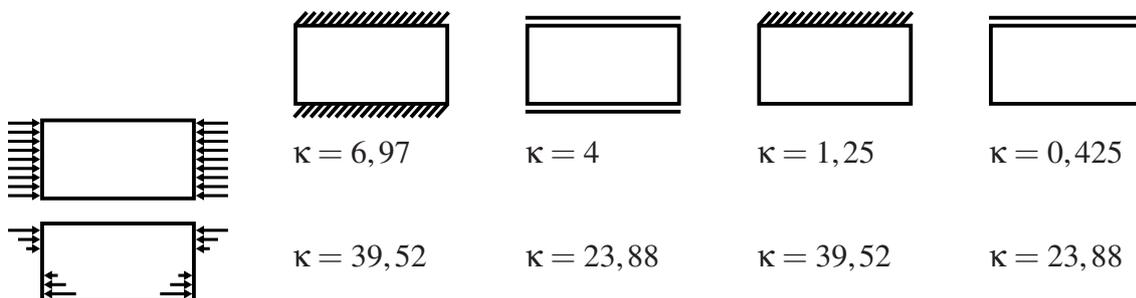


Abb. 3.3: Beulfaktoren für die Grenzfälle von fester (jeweils links) und gelenkiger (jeweils rechts) Einspannung mit beiden Kanten gelagert (links) sowie beim Freilassen einer Kante (rechts). Für reine Druckbelastung (erste Zeile) und bei einem Kraftverlauf (zweite Zeile) angelehnt an PRECHTL [2] und Zahlenwerte aus [50].

Für die kritische Beulspannung σ_{krit} des Profils kann nun ein zur kritischen Beulspannung der Platte aus Gleichung 3.2.2 vergleichbarer Zusammenhang aufgestellt werden. Für den Steg des Profils gilt

$$\sigma_{\text{krit}_S} = k_S E \left(\frac{t}{h} \right)^2$$

mit k_S als modifizierten Beulfaktor für die Stegfläche, h für die Breite des Stegs und t für die Dicke. Der modifizierte Beulfaktor k_S liegt, wie von WIEDEMANN [29] gezeigt, zwischen den Grenzen für gelenkige und feste Einspannung. Für den Flansch des Profils, der über die Breite b und die Dicke t verfügt, lässt sich ein ähnlicher Zusammenhang aufstellen, wobei für die weitere analytische Rechnung in dieser Arbeit eine Verknüpfung mit der Höhe des Profils sinnvoll ist. Aus diesem Grund ergibt sich die kritische Beulspannung σ_{krit} des Flansches zu

$$\sigma_{\text{krit}_F} = k_F E \left(\frac{t}{b} \right)^2 = k_F \frac{1}{\delta^2} E \left(\frac{t}{h} \right)^2.$$

Wobei $\delta = b/h$ gilt. Der modifizierte Beulfaktor k_F wird analog zum modifizierten Beulfaktor k_S des Stegs bestimmt und liegt zwischen den modifizierten Beulfaktoren für eine gelenkige und eine feste Einspannung. Die Zahlenwerte für die modifizierten Beulfaktoren wurden umfassend von anderen Autoren ermittelt und können für reine Druckbelastung und für biegebelastete Platten unter anderem bei PFLÜGER [51] oder aus dem «Handbuch Strukturberechnung» entnommen werden [50].

PRECHTL [2] führt die Gleichungen für das Steg- und Flanschbeulen zusammen, sodass sich die kritische Beulspannung eines Profils mit

$$\sigma_{\text{krit}} = k_P(\delta) E \left(\frac{t}{h} \right)^2$$

ergibt. Der modifizierte Beulfaktor k_P ist eine Funktion des Breiten-Höhenverhältnis δ des betrachteten Profils. Werden die Grenzen des modifizierten Beulfaktors k_P für gelenkige Lagerung und feste Einspannung über dem Breiten-Höhenverhältnis δ in einem Diagramm aufgetragen, liegen die Grenzen des Stegs als Horizontale und die Grenzen des Flansches als quadratisch abfallende Kurven vor. Der tatsächliche modifizierte Beulfaktor des Profils liegt auf einer Kurve zwischen diesen beiden Grenzen, was für ein Z-Profil unter reiner Druckbelastung in Abbildung 3.4 dargestellt ist. Am tatsächlichen Verlauf des modifizierten Beulwerts kann gut die gegenseitige Beeinflussung von Steg und Flansch erkannt werden. Bei einem Breiten-Höhenverhältnis δ , was gegen null tendiert, sind die Flansche so klein, dass sie keine stützende Wirkung auf den Steg ausüben, sodass dieser mit dem unteren Grenzwert einer gelenkig gelagerten Platte beult. Mit steigendem Breiten-Höhenverhältnis δ erhöht sich die versteifende Wirkung der Flansche auf den Steg, sodass der tatsächliche modifizierte Beulwert ungefähr bei $k_{P_{\text{max}}} \approx 4,3$ liegt und bei einem Breiten-Höhenverhältnis $\delta \approx 0,2$ eintritt. Mit steigendem Breiten-Höhenverhältnis δ

sinkt der tatsächliche modifizierte Beulfaktor, durch die sich erhöhende Instabilität der Flansche. [29]

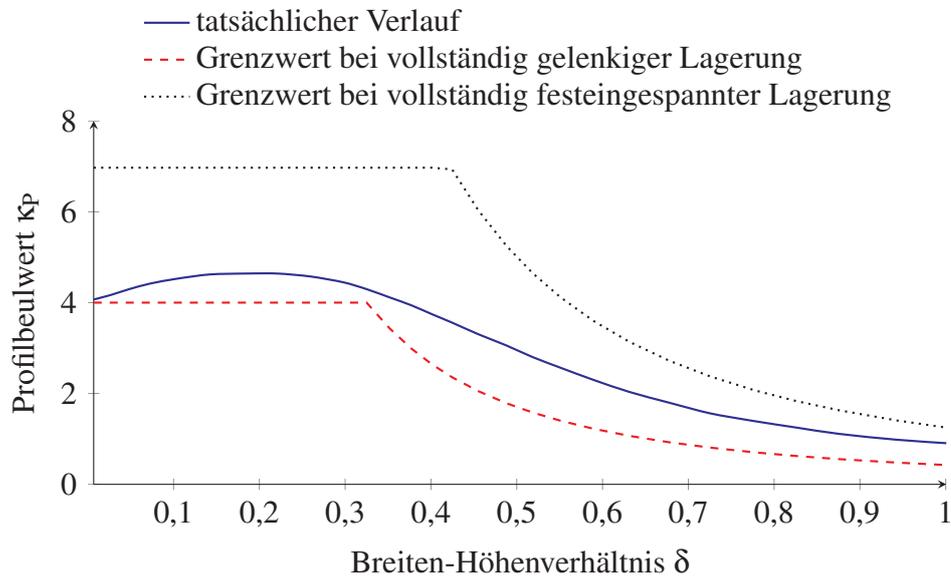


Abb. 3.4: Grenzen des Beulfaktors κ_P für ein Z-Profil unter reiner Druckbelastung und tatsächlicher Verlauf des Beulfaktors angelehnt an PRECHTL [2] und erweitert um den tatsächlichen modifizierten Beulfaktor nach WIEDEMANN [29].

3.2.4 Durchbiegung

Grundvoraussetzung für die elementare Biegetheorie dünnwandiger Profilstäbe ist, dass die Querschnitte eben bleiben und dadurch die Schubverformung vernachlässigt werden kann. Zusätzlich muss lokales Beulen der Profilwände ausgeschlossen sein. Diese Voraussetzungen sind für schlanke Profilstäbe mit «nicht zu dünnen Stegen» gültig [29, S. 87].

Für diese Arbeit und in der Regel auch in der Auslegung ist die maximale Durchbiegung des Profilstabs unter Biegebelastung von Interesse. Dafür muss zunächst die Differentialgleichung der Biegelinie $w(x_1)$ aufgestellt werden, die abhängig von der Belastungsart und den Einspannungsbedingungen ist. Die Ableitungen der Biegelinie stellen über die Biegesteifigkeit EJ_{22} einen Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen im Balken und der Verformung des Balkens her. Für einen Momentenverlauf $M_2(x_1)$, einen Querkraftverlauf $Q_3(x_1)$ oder einer von außen aufgetragenen Linienlast $q_3(x_1)$ ergibt sich nach MITTELSTEDT [52]:

$$EJ_{22}w''''(x_1) = q_3(x_1), \quad EJ_{22}w'''(x_1) = Q_3(x_1), \quad EJ_{22}w''(x_1) = M_2(x_1).$$

Die Biegelinie kann dann durch Integrieren berechnet werden, wobei beachtet werden muss, dass bei jedem Integrationsschritt Integrationskonstanten C_i hinzuaddiert werden müssen. Die Werte

der Integrationskonstanten müssen je nach Einspannungs- und Belastungsbedingung einzeln berechnet werden. DUBBEL, GROTE und FELDHUSEN [53] geben für verschiedenste Einspannungs- und Belastungszustände die Lösung der Biegelinie inklusive Integrationskonstanten an.

Die maximale Durchbiegung f_{\max} kann dann berechnet werden, indem zunächst der Ort der maximalen Durchbiegung $x_{f_{\max}}$ bestimmt wird. Dies erfolgt über Nullsetzen der ersten Ableitung der Biegelinie. Mit dem Ort der maximalen Durchbiegung kann dann die maximale Durchbiegung durch Einsetzen von $x_{f_{\max}}$ in $w(x_1)$ berechnet werden. Die allgemeine Form lautet:

$$f_{\max} = \frac{1}{c_f} \frac{ql^4}{EJ_{22}} = \frac{1}{c_f} \frac{Ql^3}{EJ_{22}} = \frac{1}{c_f} \frac{Ml^2}{EJ_{22}}.$$

Wobei unterschiedliche Einspannungs- und Belastungszustände über den Vorfaktor c_f einberechnet werden. [53]

3.3 Das Verhalten dünnwandiger gerader Stabtragwerke unter Torsion

Die Ermittlung der äquivalenten Spannungen ist bei einer Torsionsbelastung «ungleich schwieriger als bei den übrigen Schnittgrößen» [54, S. 361], da die Querschnitte unter einer Torsionsbelastung nicht eben bleiben. Bei allgemeinen Querschnitten stellt sich aufgrund unterschiedlicher Gleitwinkel benachbarter Querschnittselemente eine Verwölbung ein (siehe dazu auch Abbildung A.1). Ausnahmen bilden lediglich Stäbe mit Vollkreis- oder Kreisringquerschnitten, die sich nicht verwölben, die in dieser Arbeit aber nicht analytisch betrachtet werden. Eine Näherung liefert die St.-Venantsche Torsion, bei der eine Verwölbung unter der Annahme der Formhaltung des Querschnitts erlaubt ist. Dies wird als unbehinderte Querschnittsverwölbung bezeichnet. In der Praxis ist diese Voraussetzung in der Regel nicht erfüllt, da zum Beispiel die Einspannung die Verwölbung behindert. Die St.-Venantsche Torsion liefert jedoch für diese Fälle eine ausreichend genaue Lösung. Weitere Voraussetzungen für die St.-Venantsche Torsion sind die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes und dass die Verformungen klein gegenüber den Dimensionen des Bauteils sind. [54]

Bei der Betrachtung der Torsion von dünnwandigen Querschnitten muss zwischen geschlossenen und offenen Querschnitten unterschieden werden. Bei Profilen mit geschlossenem Querschnitt bildet sich ein umlaufender Schubfluss aus, sodass die Profilwand dann als Scheibe oder Membran wirkt. Bei Profilen mit offenem Querschnitt entsteht eine antimetrisch verteilte Schubspannung. Aus diesem Grund ist die Drillsteifigkeit bei offenen Profilen um Größenordnungen kleiner als bei geschlossenen Profilen. [29]

3.3.1 St.-Venantsche Torsion geschlossener dünnwandiger Querschnitte

Abbildung 3.5 zeigt ein Beispiel eines geschlossenen Querschnitts, der mithilfe der St.-Venantschen Torsion berechnet werden kann. Wie zu sehen, kann ein beliebiger einzelliger Querschnitt untersucht werden, solange nach MITTELSTEDT [52] folgende Annahmen gelten:

- Die Profildicke t ist klein gegenüber den restlichen Abmessungen des Querschnitts. Die Profildicke t muss dabei nicht konstant sein.
- Querschnitt und Torsionsmoment T sind in Längsrichtung konstant.
- Die Querschnitte bleiben bei der Verformung in ihrer ursprünglichen Form. Lediglich unterschiedliche Verschiebungen in Stabrichtung (Verwölbung) sind zulässig.
- Die Verwölbung des Querschnitts wird nicht behindert, sodass keine Normalspannungen entstehen.
- Über die Profildicke t sind die Schubspannungen τ konstant.

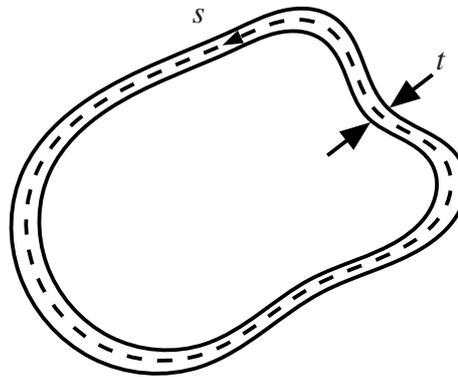


Abb. 3.5: Alle geschlossenen Profile mit nur einer geschlossenen Zelle können über den hier dargestellten Weg berechnet werden. Die Profildicke t darf veränderlich sein. Angelehnt an DANKERT und DANKERT [54].

Ähnlich wie bei der Druck- und Biegebelastung sind bei der Torsionsbelastung die drei Versagensarten, Festigkeit, Steifigkeit und lokales Beulen, für die Fragestellung dieser Arbeit von Interesse. Bei einem Torsionslastfall ist die Grenze der zulässigen Festigkeit die zulässige Schubspannung τ_{zul} , für die Steifigkeit die zulässige Verdrehung der Endquerschnitte zueinander ϑ_{zul} und beim lokalen Beulen die zulässige kritische Schubspannung τ_{krit} . Das Phänomen des lokalen Beulens wird in Kapitel 3.3.3 beschrieben. Die detaillierte Herleitung zur Ermittlung der maximalen Schubspannung τ_{max} und der Verdrehung ϑ ist in Anhang A.1 gegeben.

Die maximale Schubspannung für ein geschlossenes, dünnwandiges Profil ergibt sich dann zu

$$\tau_{max} = \frac{t_0}{t_{min}} = \frac{T}{2\check{A}t_{min}} = \frac{T}{W_T}, \quad (3.3.1)$$

wobei W_T als Torsionswiderstandsmoment bezeichnet wird und \check{A} die vom Profil umschlossene Fläche darstellt.

Die Verdrehung der beiden Endquerschnitte zueinander wird mit

$$\vartheta = \frac{Tl}{GI_T} \quad (3.3.2)$$

berechnet, wobei I_T als Torsionsträgheitsmoment bezeichnet wird und mit der zweiten Bredtschen Formel bestimmt wird:

$$GI_T = \frac{4\check{A}^2}{\oint G_t^{ds}}.$$

3.3.2 St.-Venantsche Torsion offener dünnwandiger Querschnitte

Für die Bestimmung von maximaler Schubspannung und der Verdrehung der Endquerschnitte eines Torsionsstabs mit einem offenen Profil gelten ebenfalls die Gleichungen 3.3.1 und 3.3.2. Das Torsionswiderstandsmoment W_T und das Torsionsträgheitsmoment I_T ändern sich allerdings. Die detaillierte Herleitung dazu ist in Anhang A.2 gegeben.

Bei offenen Querschnitten, die aus schmalen Rechteckquerschnitten aufgebaut sind, werden die Torsionsträgheits- und Torsionswiderstandsmomente der schmalen Rechtecke einzeln berechnet und aufaddiert. Die Summe wird dann um einen Korrekturfaktor η_3 ergänzt, da durch das Zusammensetzen die Torsionssteifigkeit «durch die Ausrundungen zwischen Steg und Flansch und die hiermit verbundene Flächenkonzentration im Flanschzentrum» [45, S. 139] erhöht wird. Eine Übersicht über die Korrekturfaktoren für verschiedene Profilformen ist in Tabelle 3.1 gegeben.

Tab. 3.1: Verschiedene offene Profilformen und ihr Korrekturfaktor nach PETERSEN [45]

Profilform	L	U	Z	T	I	X
η_3	0,99	1,12	1	1,12	1,30	1,17

Die Torsionsträgheits- und Torsionswiderstandsmomente für die angegebenen Querschnitte ergeben sich dann zu

$$I_T = \eta_3 \frac{1}{3} \sum_i s_i t_i^3, \quad W_T = \frac{I_T}{t_{\max}} = \eta_3 \frac{1}{3t_{\max}} \sum_i s_i t_i^3,$$

wobei s die Höhe und t die Breite der schmalen Rechtecke sind.

3.3.3 Beulen von Plattenstreifen unter Schubbelastung

Das Beulverhalten von Plattenstreifen und aus Plattenstreifen zusammengesetzten Profilen unter Schubbelastung ist ähnlich zu dem Beulverhalten von Plattenstreifen unter Druck- oder Biegebelastung aus Kapitel 3.2.3. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle nur auf die Unterschiede zwischen dem Beulverhalten eingegangen.

Analog zu Gleichung 3.2.2 ist die kritische Beul-Schubspannung einer Platte mit der Breite b und der Plattendicke t

$$\tau_{\text{krit}} = k_{\tau} E \left(\frac{t}{b} \right)^2.$$

Wobei hier gilt, dass die Breite b der Platte deutlich kleiner ist als die Länge l . Der modifizierte Beulfaktor k_{τ} ist analog zu Gleichung 3.2.3 mit

$$k_{\tau} = \kappa_{\tau} \frac{\pi^2}{12(1 - \nu^2)}$$

definiert. [50]

Wie in Kapitel 3.2.3 ist auch hier der Beulfaktor κ_{τ} nur noch von der Einspannung abhängig. Die Grenzen des Beulfaktors werden durch die feste ($\kappa_{\tau} = 9$) und gelenkige ($\kappa_{\tau} = 5,3$) Einspannung gebildet. Wenn ein Plattenrand frei ist, verringern sich die Beulfaktoren bei fester ($\kappa_{\tau} = 1,59$) und gelenkiger ($\kappa_{\tau} = 0,66$) Einspannung deutlich. [50]

Eine Übersicht über die verschiedenen Einspannungen und die korrespondierenden Beulfaktoren ist in Abbildung 3.6 gegeben.

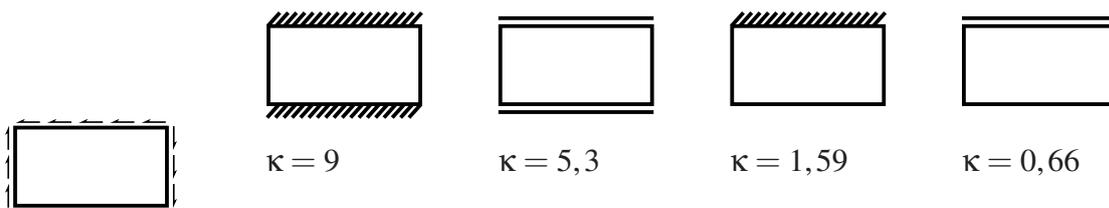


Abb. 3.6: Beulfaktoren für die Grenzfälle von fester (jeweils links) und gelenkiger (jeweils rechts) Einspannung mit beiden Kanten gelagert (links) sowie beim Freilassen einer Kante (rechts) für reine Schubbelastung. Angelehnt an PRECHTL [2] und Zahlenwerte aus [50].

Wie in Kapitel 3.2.3 kann nun auch aus dem Beulverhalten der einzelnen Platte ein vergleichbarer Zusammenhang für das Profil aufgestellt werden. Für den Steg des Profils gilt

$$\tau_{\text{krit}} = k_{\tau_s} E \left(\frac{t}{h} \right)^2$$

mit k_{τ_S} als modifizierten Beulfaktor für die Stegfläche, h für die Breite des Stegs und t für die Profildicke. Der modifizierte Beulfaktor k_{τ_S} liegt wie bei der Druck- beziehungsweise der Biegebelastung zwischen den Grenzen für gelenkige und feste Einspannung. Für den Flansch des Profils lässt sich ein ähnlicher Zusammenhang aufstellen, wobei auch an dieser Stelle für die weitere Berechnung die Verknüpfung mit der Höhe des Profils sinnvoll ist. Daher ergibt sich als kritische Beul-Schubspannung für den Flansch

$$\tau_{\text{krit}} = k_{\tau_F} E \left(\frac{t}{b} \right)^2 = k_{\tau_F} \frac{1}{\delta^2} E \left(\frac{t}{h} \right)^2.$$

Auch hier liegt der Beulfaktor k_{τ_F} zwischen den Beulfaktoren für eine gelenkige und eine feste Einspannung.

Wie beim Beulen unter einer Druck- beziehungsweise einer Biegebelastung können die Gleichungen nun auch zusammengeführt werden, sodass sich

$$\tau_{\text{krit}} = k_{\tau}(\delta) E \left(\frac{t}{h} \right)^2$$

ergibt. Der modifizierte Beulfaktor k_{τ} ist eine Funktion des Breiten-Höhenverhältnis δ des jeweiligen Profils. Wie auch in Kapitel 3.2.3 hängt der genaue Beulfaktor k_{τ} nun davon ab, ob der Flansch den Steg stützt oder umgekehrt. Qualitativ ergibt sich ein identischer Verlauf wie er schon in Abbildung 3.4 aufgezeigt ist.

3.4 Evolutionäre Algorithmen

Evolutionäre Algorithmen werden zum Lösen von Optimierungsaufgaben eingesetzt. Diese sind aber nur eine Möglichkeit von einer Vielzahl von Möglichkeiten, um Optimierungsprobleme zu lösen. Ganz allgemein existieren zur Berechnung von Optimierungsproblemen drei Oberklassen von Algorithmen: Deterministische globale Optimierungen, Metaheuristiken und deterministische Heuristiken. Die deterministisch globalen Optimierungsmethoden sind den anderen beiden Methoden überlegen, da sie unter Garantie das globale Optimum finden. Jedoch werden solche Methoden durch die beschränkte Leistungsfähigkeit von Computern oder bei sehr komplexen Problemen durch sehr viele Lösungsmöglichkeiten eingeschränkt und benötigen die Gradienteninformationen der Ziel- und Zwangsfunktionen, die nicht immer vorliegen. Sie können daher nicht immer zielführend verwendet werden. [55]

Wie die globalen Optimierungsalgorithmen stützen sich die deterministischen Heuristiken in der Regel ebenfalls auf Gradienteninformationen. Im Gegensatz zu Metaheuristiken nutzen sie den Kern des Problems, um eine Lösung zu finden. Zum Beispiel passen sie den Querschnitt entsprechend ihres erwarteten Einflusses auf Masse und zulässige Belastung an. Auch hier ist

bei einem Fehlen von ausreichenden Informationen über das gesuchte Ziel eine Verwendung nicht zielführend. [56, 57]

Metaheuristiken benutzen stochastische Methoden, um eine Lösung zu finden. Nach STOLPE [58] wird der überwiegende Teil von mechanischen Fachwerk- und Stabgeometrieoptimierungen in der Mechanik mit Metaheuristiken gelöst. Gewöhnlich generieren sie zufällige Ergebnisse, welche dann miteinander verglichen werden. Anschließend werden sie in die Richtung der besseren Lösung angepasst. In der Regel werden mit Metaheuristiken existierende natürliche oder soziale Prozesse imitiert. Die bekannteste Metaheuristik sind Evolutionäre Algorithmen, welche die Rekombination und Mutation der Evolution nachahmen [59–62]. Weitere Metaheuristiken benutzen die Harmonische Suche [63, 64], Ameisenkolonie-Optimierung [65, 66], simuliertes Ausglühen [67, 68], Tabu-Suche [69, 70] und neuerdings auch sogenannte auf «Teaching-Learning» basierte Optimierung [71–73] sowie die sogenannte «Passing Vehicle»-Suche [74, 75].

Die folgende Beschreibung zu Evolutionären Algorithmen fasst die Arbeit und Recherche von BLUME und JAKOB [76] zusammen und stellt die für diese Arbeit relevanten Themen dar:

Evolutionäre Algorithmen fußen auf der Evolutionstheorie nach DARWIN [77] und bilden einen Evolutionsprozess nach. Dafür werden die wichtigsten Bestandteile der Evolutionstheorie übernommen, welche Selektion, Rekombination und Mutation sind. Bei der Selektion überleben die besten an die Umweltbedingungen angepassten Individuen und können sich in die nächste Generation fortpflanzen. Bei der Rekombination werden die Erbgutinformationen von zwei Eltern in einem Nachkommen zufällig verknüpft. Mutationen sind spontane Veränderungen im Erbgut, wodurch eine Variation des kombinierten Erbguts entsteht. Die Rekombination durchmischt das Erbgut in der Population, wohingegen die Mutation spontan neue Varianten des bestehenden Erbguts erzeugt. Nur in Kombination kann eine immer erfolgreichere Anpassung an die Umweltbedingungen gelingen. [78]

Als zusätzlicher Aspekt existiert noch eine Isolation und Migration von verschiedenen Individuen. Dies führt dazu, dass die Evolution in einzelnen Gruppen isoliert ablaufen kann und ein Austausch zwischen diesen Gruppen nur beschränkt stattfindet. Solch eine Evolution, die in der Realität aufgrund der Geographie existiert, vermeidet das Hineinlaufen in lokale Optima. [78]

Generell wird ein evolutionärer Algorithmus in einem Suchraum ausgeführt. Dieser Suchraum kann über ein Optimum oder mehrere Optima, Unstetigkeitsstellen und Randbedingungen und somit verbotene Bereiche verfügen. In der Regel ist der Suchraum unbekannt, da lediglich die Ausgangssituation (Anzahl zu optimierender Variablen, Randbedingungen) bekannt ist. [79, 80]

Die ersten Konzepte zu Evolutionären Algorithmen wurden in den 1960er Jahren entwickelt. In den Jahrzehnten danach haben sich vier Kategorien herausgebildet, die für unterschiedliche Problemstellungen eingesetzt werden können:

- Evolutionsstrategie von RECHENBERG [81, 82] für Parameteroptimierung mit adaptiver Schrittweitensteuerung.
- Genetische Algorithmen von HOLLAND [83] für Aufgaben, die sich aus mehreren Kombinationen zusammensetzen.
- Evolutionäre Programmierung von FOGEL [84], die sich vor allem auf die Mutation fokussiert.
- Genetische Programmierung von KOZA [85–87], bei der Computerprogramme eine Evolution durch Baumstrukturen vollziehen.

Aufgrund der Problemstellung in dieser Arbeit wird eine Evolutionsstrategie angewendet, weswegen im folgenden nur noch diese im Detail erläutert wird:

Die Evolutionsstrategie ist, wie oben schon genannt, von RECHENBERG [81] entwickelt worden. Anschließend haben verschiedene Autoren die Strategie deutlich erweitert und verbessert [82, 88–90].

Die Evolutionsstrategie verwendet einen reelwertigen Vektor x_i , der aus n Parametern besteht. Besonders bei der Evolutionsstrategie ist, dass die Mutationsschrittweite dynamisch mit dem Verlauf der Evolution angepasst wird. [91]

Alle evolutionären Algorithmen verfolgen im Grundsatz die gleiche Abfolge: Zunächst wird eine Startpopulation P_0 mit μ -Individuen zufällig erzeugt. Diese bildet die erste Elterngeneration. Anschließend werden λ -Nachkommen aus jeweils zwei Eltern gezeugt. Mit den Jahren der Anwendung hat sich aus Effizienzgründen ergeben, dass λ siebenmal größer als μ sein sollte. [92]

Die Wahl der Eltern zur Erzeugung der Nachkommen kann entweder zufällig erfolgen oder mit abnehmender Wahrscheinlichkeit von dem Individuum mit dem besten Fitnesswert. Die Nachkommen setzen sich als Rekombination der Eltern zusammen. Dafür werden die einzelnen Variablen der Eltern zufällig auf den Nachkommen verteilt. Anschließend werden die Variablen der Nachkommen mutiert. Die Mutationsrate soll dabei so gewählt werden, dass kleine Veränderungen wahrscheinlicher sind als große. Dies wird über eine einfache Gauß-Verteilung erreicht, wobei die Normalverteilung σ dynamisch angepasst wird. [91, 93]

Abschließend erfolgt die Selektion, indem entweder die besten Nachkommen μ die Elterngeneration vollständig ersetzen ((μ, λ) -Strategie) oder die Eltern und Nachkommen zusammen selektiert werden ($(\mu + \lambda)$ -Strategie). Beim vollständigen Ersetzen der Elterngeneration können optimale Werte wieder verloren gehen, wenn die Nachkommengeneration degeneriert. Bei der Übernahme von Eltern und Nachkommen existiert hingegen eine höhere Wahrscheinlichkeit der Stagnation und dem Hängenbleiben in lokalen Optima. [79, 92]

In dieser Arbeit wird die $(\mu + \lambda)$ -Strategie angewendet, wofür sich die dynamische Anpassung der Normalverteilung σ nach BEYER [94] mit der sogenannten 1/5-Regel etabliert hat. Dabei wird geprüft, wie hoch der Anteil der gerade gezeugten Nachkommen (P_S) in der neuen Elterngeneration ist. Liegt der Wert oberhalb von 1/5 wird die Standardabweichung um

den Faktor α erhöht, um das Mutationsintervall zu vergrößern. Wenn P_s kleiner als $1/5$ ist, wird die Standardabweichung entsprechend um $1/\alpha$ verkleinert. Zusammengefasst ergibt sich demnach.

$$\sigma_{\text{neu}} := \begin{cases} \alpha \sigma_{\text{alt}} & \text{wenn } P_s > \frac{1}{5} \\ \frac{\sigma_{\text{alt}}}{\alpha} & \text{wenn } P_s < \frac{1}{5} \\ \sigma_{\text{alt}} & \text{wenn } P_s = \frac{1}{5} \end{cases} .$$

α ist dabei ein rein numerischer Wert, der prinzipiell beliebige Werte über eins annehmen kann. Nach BEYER [94] sollte α aber zwischen 1,1 und 1,5 liegen, wobei sich aus Effizienzgründen $\alpha = 1,224$ als Standard etabliert hat.

Die Evolutionsstrategie ist als Zyklus angelegt, bei dem nach den oben aufgeführten Schritten mit dem Zeugen neuer Nachkommen die nächste Generation beginnt und die Schritte erneut durchlaufen werden. Der Prozess wird abgebrochen, wenn der Fitnesswert des besten und des schlechtesten Individuums der Generation innerhalb einer bestimmten Toleranz β liegt.

Eine Übersicht über den Ablauf eines evolutionären Algorithmus ist in Abbildung 3.7 gegeben.

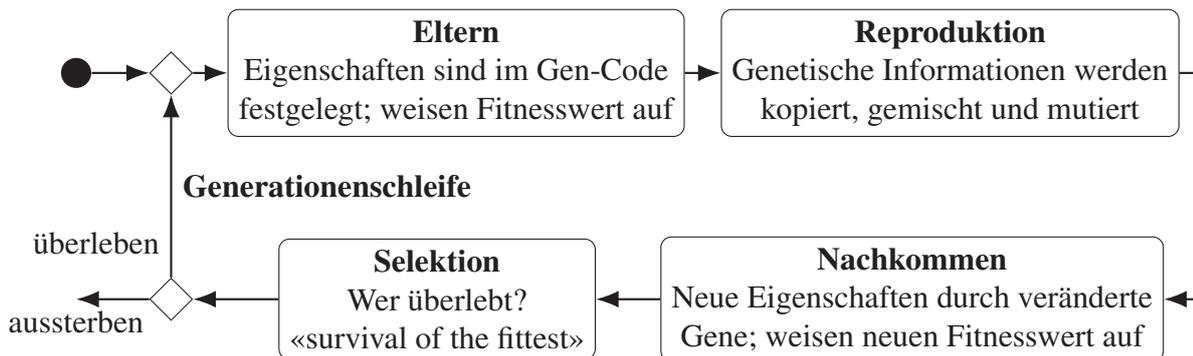


Abb. 3.7: Grundsätzlicher Aufbau eines evolutionären Algorithmus nach BEYER [94].

4 Wittrick-Williams-Algorithmus

Der Wittrick-Williams-Algorithmus ist eine Berechnungsmethode zur Bestimmung der Beulspannung von aus Platten zusammengesetzten Strukturen unter variabler Druck-, konstanter Querbelastrung und konstantem Schub [31, 32]. Im Gegensatz zur Finite-Elemente-Methode verfolgen WILLIAMS und WITTRICK [33] einen *Finite-Platten-Ansatz*, bei dem Plattenelemente die Ausgangsbasis der Berechnung bilden. Entwickelt wurde diese Methode vor dem Hintergrund der geringen Rechenleistung von Computern in den 1960er Jahren, womit Berechnungen von komplexen Strukturen mit der Finite-Elemente-Methode noch nicht durchführbar waren. Durch den Aufbau mit Platten als Grundelemente wird eine im Vergleich zur Finite-Elemente-Methode deutlich kleinere Matrix gebildet, was in einem erheblichen Geschwindigkeitsvorteil resultiert. Zur Berechnung von Kräften, Momenten und Verschiebungen in den Plattenelementen wird eine nichtlineare Plattentheorie nach NOVOZHILOV [34] verwendet, sodass die aufgestellte Steifigkeitsmatrix transzendent ist. Aus diesem Grund ist die von der Finite-Elemente-Methode bekannte «klassische» Berechnung der Eigenwerte nicht durchführbar. WILLIAMS und WITTRICK [33] haben ein numerisches Verfahren entwickelt, mit dem trotz der transzendenten Steifigkeitsmatrix eine beliebige Anzahl an Beulmoden gefunden werden kann, wobei der Geschwindigkeitsvorteil gegenüber der Finite-Elemente-Methode bestehen bleibt. Aufgrund der Verwendung der Plattentheorie sind die berechneten Beulwerte exakt und nicht wie bei der Finite-Elemente-Methode numerische Approximationen. [31]

Für die *Finite-Platten*-Methode wird angenommen, dass die betrachtete Struktur aus einer Reihe von Platten zusammengesetzt wird, die an ihren langen Seiten fest miteinander verbunden sind. Auf diese Weise kann die Beulspannung von beliebig so aufgebauten Strukturen wie zum Beispiel versteifte Platten aber auch von offenen und geschlossenen Profilen berechnet werden, solange die Geometrie des Profilquerschnitts in Längsrichtung unverändert bleibt. Der Algorithmus beinhaltet nicht nur Verformung ausserhalb der Ebene sondern auch innerhalb, sodass wie in Abbildung 4.1 dargestellt alle beliebigen Beulmoden gefunden werden können, wie beispielsweise globale und lokale Moden, aber auch überlagerte und gekoppelte Moden wie Torsionsmoden. [31]

Der Wittrick-Williams-Algorithmus basiert auf einem allgemeinen Ansatz, dessen Grundlage die Annahme bildet, dass jede beliebige Beulmode von aus einzelnen Platten zusammengesetzten Strukturen in einer in Längsrichtung sinusförmige Verformung des Profils auftritt. Dadurch treten an allen Verbindungsstellen zwischen den einzelnen Platten sinusförmige Verteilungen von Kräften und Momenten mit einer für alle Platten gleichen Wellenlänge λ auf. Die Aufgabe ist nun, die passende Steifigkeitsmatrix zu bilden, die die Amplituden der Randkräfte und Randmomente mit den Amplituden der Verschiebungen und Rotationen der selben Ränder verbindet. Die

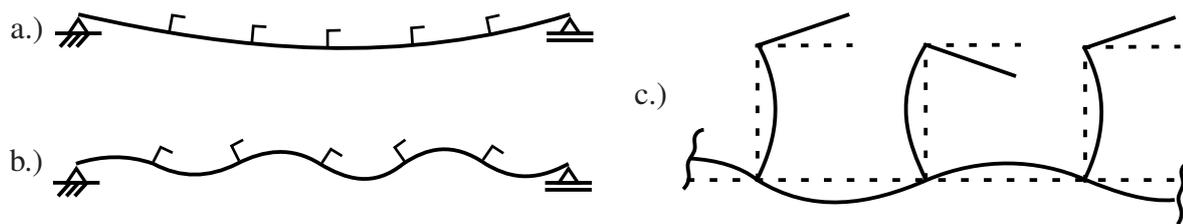


Abb. 4.1: Verschiedene Beulmoden, die vom Wittrick-Williams-Algorithmus abgedeckt werden:
a.) Globale Mode, b.) Torsionsmode, c.) Lokale Mode [31].

Steifigkeitsmatrix ist transzendent, sodass für jede gewählte Wellenlänge λ unendlich viele Spannungen σ existieren, die eine passende Lösung ergeben. Aus diesem Grund wird eine von WILLIAMS und WITTRICK [36] entwickelte numerische Lösungsmethode verwendet, die für jedes λ immer die niedrigste kritische Beulspannung σ_{krit} ermittelt. Da aus Platten aufgebaute Strukturen nur mit Halbwellenlängen $\lambda = l, l/2, l/3, \dots$ beulen können, müssen nur die σ_{krit} bis zu einer gewählten unteren Grenze von λ berechnet werden. Die gesuchte kritische Beulspannung entspricht dann dem Minimum aus allen σ_{krit} . [36, 46]

WITTRICK [31] hat 1968 die grundlegende Idee und die mathematische Herleitung für Profile aus isotropen Materialien unter einer konstanten Druckbelastung veröffentlicht. WILLIAMS und WITTRICK [36] haben im darauf folgenden Jahr das Konzept um die numerische Lösungsmethode erweitert und die Logik für die Umsetzung des Algorithmus in einem Computerprogramm präsentiert. In den folgenden Jahren haben die Autoren ihr Konzept erweitert, sodass auch die Beulmoden von Profilen unter konstantem Schub und konstanter Querbelastung [35] mit einer variablen Druckbelastung [32], von Profilen aus anisotropem Material [37], polygonale Rohre unter kombinierter Druck- und Torsionsbelastung [95] oder auch die Stabilität zweidimensionaler Fachwerke [33] berechnet werden können.

Aus dem Gesamtwerk von WILLIAMS und WITTRICK werden im folgenden nur die für diese Arbeit wesentlichen Teile vorgestellt. Beginnend mit der mathematischen Herleitung des Grundkonzepts und nachgefolgt vom grundsätzlichen Programmaufbau zur Berechnung der kritischen Beulspannung. WITTRICK [32] leitet für das Grundkonzept die Steifigkeitsmatrix mit einer variablen Druckspannung her. Er schließt seine Herleitung aber nur für den Spezialfall konstanter Druckspannung ab, da die Lösung für einen variablen Verlauf eine numerische Integration beispielsweise mit dem Runge-Kutta-Verfahren benötigt. Für den Spezialfall der konstanten Druckspannung wird von WITTRICK [32] der Programmaufbau vorgestellt und auch in allen weiteren Veröffentlichungen des Gesamtwerks von WILLIAMS und WITTRICK arbeiten sie mit konstanter Druckspannung.

Da für die Verarbeitung von Biegung und den überlagerten Lastfällen von Biegung und Druck sowie Biegung und Torsion in dieser Arbeit Spannungsverläufe vorliegen, wird das Konzept von WILLIAMS und WITTRICK am Ende dieses Kapitels um die Berechnung eines variablen Spannungsverlaufs erweitert.

4.1 Mathematische Grundlagen

Betrachtet wird eine lange, dünne Platte mit der Breite b , der Dicke t und der Plattensteifigkeit D , welche in der x_1 - x_2 -Ebene liegt und deren lange Seite in die x_1 -Richtung weist. Die Platte wird unter einer variablen Spannung σ_{11} in x_1 -Richtung, einer konstanten Spannung σ_{22} in x_2 -Richtung und einer konstanten Schubspannung τ belastet. Dieser allgemeine Spannungszustand am Plattenelement ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Für die Vorzeichenregel wird σ_{11} als positiv angenommen, wenn sie als Druckspannung vorliegt und τ ist bei Wirken in der dargestellten Richtung positiv. [31, 32]

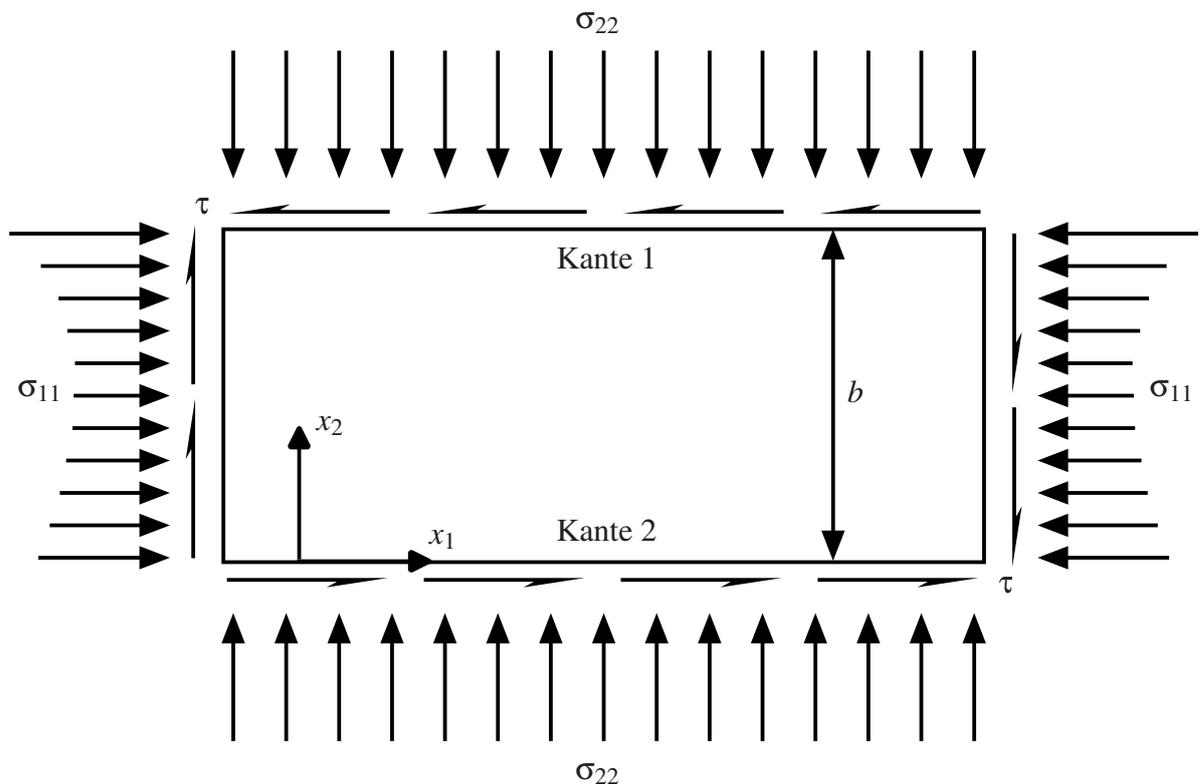


Abb. 4.2: Der allgemeine Spannungszustand am Plattenelement [32].

Der allgemeine Spannungszustand wird mithilfe der dimensionslosen Konstanten K_{x_1} und H über die Gleichung

$$\{K_{x_1}; H\} = (b^2 h / \pi^2 D) \{\sigma_{11}; \tau\}$$

definiert, wobei H konstant ist und K_{x_1} eine Funktion der dimensionslosen Koordinaten X_2 mit

$$X_2 = \pi x_2 / b \quad (4.1.1)$$

ist. [32]

4.1.1 Steifigkeitsmatrix einer sinusförmig beulenden langen dünnen Platte

Wenn eine Platte beult, liegen an den Plattenrändern Kräfte und Momente an, die in Längsrichtung einen mit der halben Wellenlänge λ sinusförmigen Verlauf aufweisen. Aus diesem Grund sind die auf die Strecke bezogenen Kräfte und Momente an den Rändern die Realteile von

$$\{M_{K_1}; Q_{K_1}; N_{K_1}; T_{K_1}; M_{K_2}; Q_{K_2}; N_{K_2}; T_{K_2}\} e^{iX_1}$$

mit

$$X_1 = \pi x_1 / \lambda. \quad (4.1.2)$$

M repräsentiert das Moment um die Plattenränder, Q ist die Kraft quer zur Plattenebene, N die in die Plattenebene wirkende Kraft und T der in der Plattenebene wirkende Schub. Die Vorzeichenkonvention ist aus Abbildung 4.3 zu entnehmen. [32]

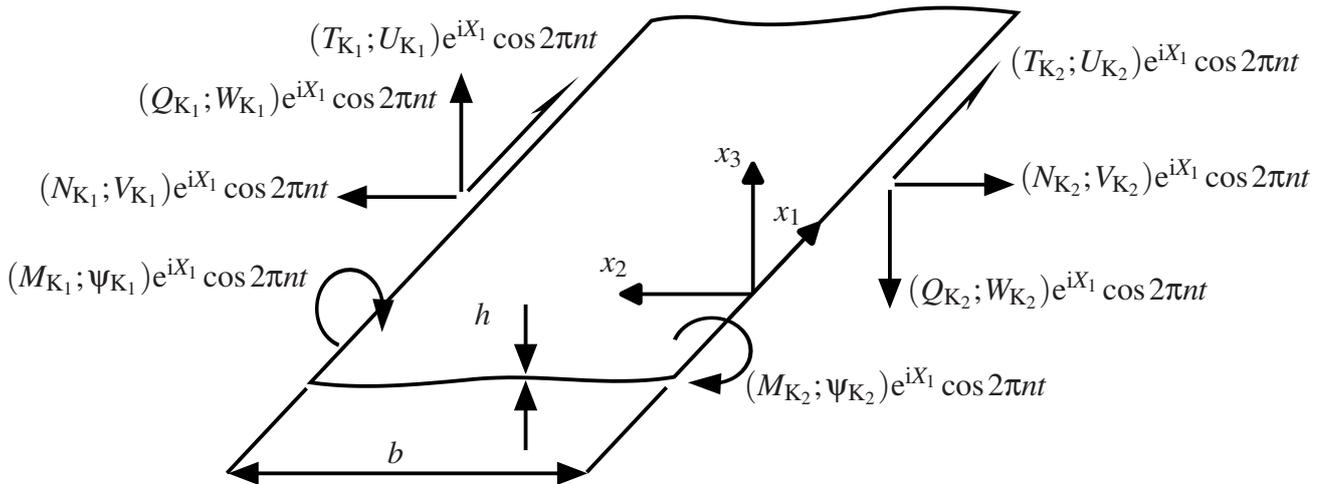


Abb. 4.3: Sinusoidales System von Kräften und Verschiebungen der Plattenränder. [31].

Die zu den Kräften passenden Verschiebungen der Plattenränder seien die Realteile von

$$\{\Psi_{K_1}; W_{K_1}; V_{K_1}; U_{K_1}; \Psi_{K_2}; W_{K_2}; V_{K_2}; U_{K_2}\} e^{iX_1} \cos 2\pi n t$$

mit ψ als Rotation um den Plattenrand und U, V, W als Verschiebungen in x_1 -, x_2 -, x_3 -Richtung und n als Frequenz der Vibration, die in dieser Arbeit aufgrund der Suche nach der kritischen Beulast mit $n = 0$ festgesetzt ist. Die genannten Kräfte, Momente, Rotationen und Verschiebungen sind aufgrund von Phasenverschiebungen im allgemeinen komplex und können in zwei

zueinander entkoppelte Systeme aufgeteilt werden. Das erste System, senkrecht zur Plattenebene, besteht aus den Kräften und Momenten M_{K_1} , Q_{K_1} , M_{K_2} und Q_{K_2} , welche die Rotationen und Verschiebungen ψ_{K_1} , W_{K_1} , ψ_{K_2} sowie W_{K_2} hervorrufen. Das zweite System wirkt in der Plattenebene und besteht aus den Kräften N_{K_1} , T_{K_1} , N_{K_2} und T_{K_2} , die die Verschiebungen V_{K_1} , U_{K_1} , V_{K_2} sowie U_{K_2} erzeugen. [32]

Hieraus lässt sich der Zusammenhang zwischen Lasten, Verschiebungen und globaler Steifigkeitsmatrix zu

$$\mathbf{p} = \mathbf{k}\mathbf{d} \quad (4.1.3)$$

darstellen [37]. Wobei sich Gleichung 4.1.3 auch in die Platten- und Scheiben-Steifigkeitsmatrizen \mathbf{s}_O und \mathbf{s}_I aufteilen lässt:

$$\mathbf{p}_O = \mathbf{s}_O \mathbf{d}_O, \quad (4.1.4a)$$

$$\mathbf{p}_I = \mathbf{s}_I \mathbf{d}_I. \quad (4.1.4b)$$

Die Suffixe O und I stehen für *Plattenverhalten* beziehungsweise auf Englisch *out-of-plane* und *Scheibenverhalten* beziehungsweise auf Englisch *in-plane*. Die Spaltenvektoren \mathbf{p}_O , \mathbf{p}_I sowie \mathbf{d}_O , \mathbf{d}_I bezeichnen die Randschnittgrößen

$$\mathbf{p}_O = \{M_{K_1}, Q_{K_1}, M_{K_2}, Q_{K_2}\}, \quad \mathbf{d}_O = \{\psi_{K_1}, W_{K_1}, \psi_{K_2}, W_{K_2}\}, \quad (4.1.5a)$$

$$\mathbf{p}_I = \{N_{K_1}, iT_{K_1}, N_{K_2}, iT_{K_2}\}, \quad \mathbf{d}_I = \{V_{K_1}, iU_{K_1}, V_{K_2}, iU_{K_2}\}, \quad (4.1.5b)$$

wobei $i(= \sqrt{-1})$ bei T_{K_1} , T_{K_2} , U_{K_1} und U_{K_2} aufgrund der 90° -Phasenverschiebung zwischen der Schubkraft T zu den anderen Kräften beziehungsweise der Verschiebung U zu den anderen Verschiebungen eingeführt wird. [32]

Ab dieser Stelle können die Platten- und die Scheiben-Steifigkeitsmatrizen unabhängig voneinander betrachtet werden. Die Herleitungen für die Einträge der Steifigkeitsmatrizen sind für die Platten-Steifigkeitsmatrix in Anhang B.1 und für die Scheiben-Steifigkeitsmatrix in Anhang B.2 dargelegt.

4.2 Ablauf des Wittrick-Williams-Algorithmus

Nach dem Berechnen der Einträge für die Scheiben- und Platten-Steifigkeitsmatrizen, können die Einträge der Matrizen auf die beiden longitudinalen Kanten aufgeteilt werden, um wieder zu dem

System von Abbildung 4.3 zurückkehren zu können. Die folgende Herleitung folgt, wenn nicht anderweitig angegeben, nach WILLIAMS und WITTRICK [36, Abschnitt 3]: Die Spaltenvektoren der Randschnittgrößen aus Gleichung 4.1.5 werden entsprechend der Kanten auf

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_{K_j} &= \{M_{K_j}, Q_{K_j}, N_{K_j}, iT_{K_j}\} \\ \mathbf{d}_{K_j} &= \{\psi_{K_j}, W_{K_j}, V_{K_j}, iU_{K_j}\} \end{aligned} \right\} (j = 1 \text{ oder } 2)$$

umgestellt. Die Steifigkeitsmatrizen $\mathbf{s}_{K_{jk}}$ ($j = 1, 2; k = 1, 2$) können dann wie folgt definiert werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{K_1} &= \mathbf{s}_{K_{11}} \mathbf{d}_{K_1} + \mathbf{s}_{K_{12}} \mathbf{d}_{K_2}, \\ \mathbf{p}_{K_2} &= \mathbf{s}_{K_{21}} \mathbf{d}_{K_1} + \mathbf{s}_{K_{22}} \mathbf{d}_{K_2}. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Die Einträge aus den Scheiben- und Platten-Steifigkeitsmatrizen verteilen sich dann wie folgt, wobei die Erweiterung über die konjugierte Form (Querstrich) nach WITTRICK und WILLIAMS [37] erfolgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{K_{11}} &= \begin{bmatrix} s_{MM} & -s_{MQ} & 0 & 0 \\ -\bar{s}_{MQ} & s_{QQ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{NN} & -s_{NT} \\ 0 & 0 & -s_{NT} & s_{TT} \end{bmatrix}, & \mathbf{s}_{K_{22}} &= \begin{bmatrix} s_{MM} & \bar{s}_{MQ} & 0 & 0 \\ s_{MQ} & s_{QQ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{NN} & s_{NT} \\ 0 & 0 & s_{NT} & s_{TT} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{s}_{K_{12}} &= \bar{\mathbf{s}}_{K_{12}}^T \begin{bmatrix} f_{MM} & f_{MQ} & 0 & 0 \\ -f_{MQ} & -f_{QQ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f_{NN} & -f_{NT} \\ 0 & 0 & f_{NT} & f_{TT} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Die Nullen in den Matrizen sind die Konsequenz aus der Entkopplung der in der Ebene wirkenden Kräfte und der aus der Ebene heraus entstehenden Verschiebungen und umgekehrt.

Die Steifigkeitsmatrizen müssen noch in das globale Koordinatensystem übertragen werden, um aus den Matrizen der einzelnen Platten die globale Steifigkeitsmatrix aufbauen zu können. Die Kraft- und Verschiebungs-Spaltenvektoren \mathbf{p}_{K_j} und \mathbf{d}_{K_j} können über eine Transformationsmatrix \mathbf{T} in die globalen Spaltenvektoren \mathbf{P}_{K_j} und \mathbf{D}_{K_j} übertragen werden. Dafür gilt der sehr einfache Zusammenhang

$$\mathbf{P}_{K_j} = \mathbf{T} \mathbf{p}_{K_j}, \quad \mathbf{D}_{K_j} = \mathbf{T} \mathbf{d}_{K_j}$$

mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\mu & -\sin\mu & 0 \\ 0 & \sin\mu & \cos\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und dem Drehwinkel μ , der wie in Abbildung 4.4 eingezeichnet angenommen ist.

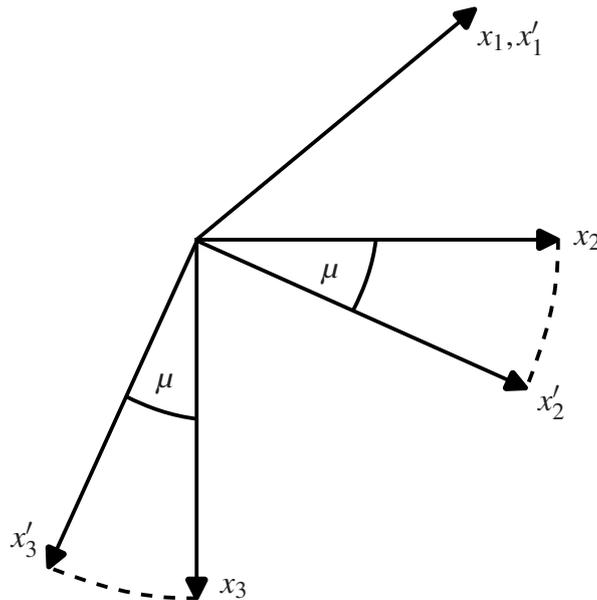


Abb. 4.4: Rotation der Achsen um den Winkel μ vom lokalen ins globale Koordinatensystem [31].

Gleichungen 4.2.1 werden dann transformiert zu

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{K_1} &= \mathbf{S}_{K_{11}} \mathbf{D}_{K_1} + \mathbf{S}_{K_{12}} \mathbf{D}_{K_2}, \\ \mathbf{P}_{K_2} &= \mathbf{S}_{K_{21}} \mathbf{D}_{K_1} + \mathbf{S}_{K_{22}} \mathbf{D}_{K_2} \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

mit

$$\mathbf{S}_{K_{jk}} = \mathbf{T} \mathbf{s}_{K_{jk}} \mathbf{T}^T \quad (j = 1, 2; k = 1, 2).$$

Die Groß- und Kleinschreibung gibt an, ob sich die Steifigkeitsmatrix auf das globale oder das lokale Koordinatensystem bezieht.

Wenn von allen Platten die jeweilige Steifigkeitsmatrix im globalen Koordinatensystem vorliegt, kann die globale Steifigkeitsmatrix durch eine Erweiterung von Gleichung 4.2.3 aufgebaut werden.

4.2.1 Einbinden von Substrukturen

Die Methode von WILLIAMS und WITTRICK erlaubt das Einbinden von Substrukturen. Bei den Substrukturen werden zusammenhängende Strukturen zunächst verrechnet und das Ergebnis in die globale Steifigkeitsmatrix übernommen. Auf diesem Weg kann die Größe der globalen Steifigkeitsmatrix reduziert werden. Die Idee hinter dieser Methode ist eine Beschleunigung der Rechengeschwindigkeit und eine Reduktion des Speicherbedarfs. Dies gilt insbesondere dann, wenn das Profil sich wiederholende Substrukturen aufweist, die dann nur einmal berechnet werden müssen. Die Substrukturen können beliebig aufgebaut werden oder auch beliebig viele eigene Substrukturen enthalten, welche wiederum aus beliebig vielen Substrukturen aufgebaut sein können. Die folgende Herleitung erfolgt nach WILLIAMS und WITTRICK [36, Abschnitt 4].

Als Beispiel sei im folgenden eine Substruktur aus zwei verbundenen Platten aufgebaut. Aus der Logik des Beispiels lassen sich beliebige andere Substrukturen ableiten. Betrachtet werden zwei Platten «a» und «b», die an ihrer gemeinsamen Kante miteinander verbunden sind, wie es in Abbildung 4.5 dargestellt ist. Die in der Abbildung gezeigten Pfeile zeigen von Kante 1 zu Kante 2 der jeweiligen Platte. Die Kraftvektoren \mathbf{P}_{K_1} und \mathbf{P}_{K_2} und die korrespondierenden Verschiebungsvektoren \mathbf{D}_{K_1} und \mathbf{D}_{K_2} liegen an den offenen Kanten der Substruktur an. Die Verbindung der beiden Platten ist unbelastet und frei verschiebbar mit dem Verschiebungsvektor \mathbf{D}_{K_3} . Die Gleichgewichtsbedingung lautet dann:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{K_1} &= \mathbf{S}_{K_{11a}} \mathbf{D}_{K_1} + \mathbf{S}_{K_{12a}} \mathbf{D}_{K_3}, \\ 0 &= \mathbf{S}_{K_{21a}} \mathbf{D}_{K_1} + (\mathbf{S}_{K_{22a}} + \mathbf{S}_{K_{11b}}) \mathbf{D}_{K_3} + \mathbf{S}_{K_{12b}} \mathbf{D}_{K_2}, \\ \mathbf{P}_{K_2} &= \mathbf{S}_{K_{21b}} \mathbf{D}_{K_3} + \mathbf{S}_{K_{22b}} \mathbf{D}_{K_2}.\end{aligned}$$

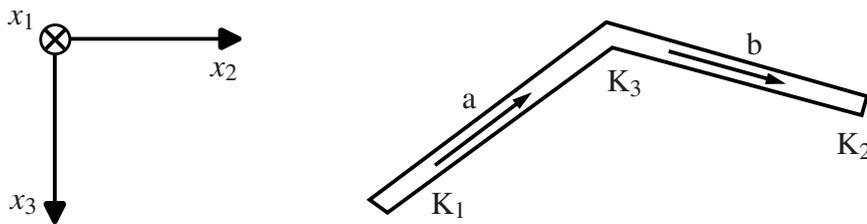


Abb. 4.5: Zwei miteinander verbundene Platten und die entsprechende Zuordnung von Kanten und Kontaktstellen [36].

Durch Eliminierung von \mathbf{D}_{K_3} lassen sich die Gleichungen wie folgt reduzieren:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{K_1} &= \mathbf{S}_{K_{11}}^* \mathbf{D}_{K_1} + \mathbf{S}_{K_{12}}^* \mathbf{D}_{K_2}, \\ \mathbf{P}_{K_2} &= \mathbf{S}_{K_{21}}^* \mathbf{D}_{K_1} + \mathbf{S}_{K_{22}}^* \mathbf{D}_{K_2}\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{K_{11}}^* &= \mathbf{S}_{K_{11a}} - \mathbf{S}_{K_{12a}} (\mathbf{S}_{K_{22a}} + \mathbf{S}_{K_{11b}})^{-1} \mathbf{S}_{K_{21a}}, \\
\mathbf{S}_{K_{22}}^* &= \mathbf{S}_{K_{22b}} - \mathbf{S}_{K_{21b}} (\mathbf{S}_{K_{22a}} + \mathbf{S}_{K_{11b}})^{-1} \mathbf{S}_{K_{12b}}, \\
\mathbf{S}_{K_{12}}^* &= \mathbf{S}_{K_{21}}^{*\top} = -\mathbf{S}_{K_{12a}} (\mathbf{S}_{K_{22a}} + \mathbf{S}_{K_{11b}})^{-1} \mathbf{S}_{K_{12b}}.
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Die Substrukturen sind auf diesem Weg für die globale Steifigkeitsmatrix auf die gleichen Einträge wie eine einzelne Platte reduziert, da Gleichung 4.2.4 nun den exakt gleichen Aufbau wie Gleichung 4.2.3 hat. Die Einträge können nun genau so wie bei einer einzelnen Platte in die globale Steifigkeitsmatrix des Profils eingesetzt werden.

4.2.2 Aufbau der globalen Steifigkeitsmatrix

Die in das globale Koordinatensystem gedrehten Steifigkeitsmatrizen der einzelnen Platten des Profils beziehungsweise die auf die Einträge einer einzelnen Platte reduzierten Steifigkeitsmatrizen von Substrukturen müssen für die Durchführung der Beulanalyse in einer globalen Steifigkeitsmatrix zusammengeführt werden. Im folgenden wird dies beispielhaft für ein Vierkantprofil und ein Doppel-T-Profil gezeigt, welche in Abbildung 4.6 dargestellt sind. Auf analogem Weg können beliebige Kombinationen aus einzelnen Platten oder Substrukturen zu einer globalen Steifigkeitsmatrix zusammengesetzt werden.

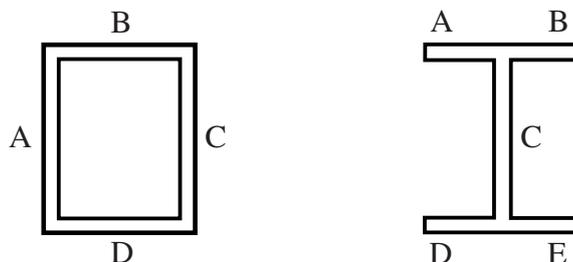


Abb. 4.6: Vierkant- und Doppelt-T-Profil und die Zuordnung der einzelnen Platten.

Der Aufbau der globalen Steifigkeitsmatrix erfolgt analog zum Vorgehen beim Einbinden der Substrukturen. Für die Verbindungsknoten zwischen den einzelnen Platten werden die Gleichungen für die Verknüpfung zwischen Kräften und Verschiebungen aufgestellt. Das Gleichungssystem wird anschließend auf eine Vektor- und Matrixschreibweise umgestellt, wodurch sich automatisch die globale Steifigkeitsmatrix ergibt, in der die Beziehungen der Steifigkeitsmatrizen der einzelnen Platten zueinander abgebildet sind. Im folgenden sind die globalen Steifigkeitsmatrizen für ein Vierkantprofil und ein Doppel-T-Profil aufgezeigt:

$$\mathbf{K}_{\text{Vierkant}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{K_{22D}} + \mathbf{S}_{K_{11A}} & \mathbf{S}_{K_{12A}} & 0 & \mathbf{S}_{K_{21D}} \\ \mathbf{S}_{K_{21A}} & \mathbf{S}_{K_{22A}} + \mathbf{S}_{K_{11B}} & \mathbf{S}_{K_{12B}} & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_{K_{21B}} & \mathbf{S}_{K_{22B}} + \mathbf{S}_{K_{11C}} & \mathbf{S}_{K_{12C}} \\ \mathbf{S}_{K_{12D}} & 0 & \mathbf{S}_{K_{21C}} & \mathbf{S}_{K_{22C}} + \mathbf{S}_{K_{11D}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{\text{Doppel-T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{K_{11A}} & \mathbf{S}_{K_{12A}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{S}_{K_{21A}} & \mathbf{S}_{K_{22A}} + \mathbf{S}_{K_{22B}} + \mathbf{S}_{K_{11C}} & \mathbf{S}_{K_{21B}} & 0 & \mathbf{S}_{K_{12C}} & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_{K_{12B}} & \mathbf{S}_{K_{11B}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{S}_{K_{22D}} & \mathbf{S}_{K_{21D}} & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_{K_{21C}} & 0 & \mathbf{S}_{K_{12D}} & \mathbf{S}_{K_{22C}} + \mathbf{S}_{K_{11D}} + \mathbf{S}_{K_{11E}} & \mathbf{S}_{K_{12E}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{S}_{K_{21E}} & \mathbf{S}_{K_{22E}} \end{bmatrix}.$$

4.2.3 Berechnungsablauf des Wittrick-Williams-Algorithmus

Wie zu Beginn dieses Kapitels geschrieben, ist die aufgestellte globale Steifigkeitsmatrix transzendent, sodass die Eigenwerte nicht durch Invertieren der Matrix gefunden werden können. WITTRICK und WILLIAMS [96] haben ein Vorgehen entwickelt, um die Beulmoden dennoch bestimmen zu können. Die Autoren haben ihren Algorithmus in den Jahren der ersten Veröffentlichung mehrfach erweitert, weswegen für die nachfolgende Beschreibung des Berechnungsablaufs die für diese Arbeit passendste Variante verwendet wird. Wenn nicht anders angegeben basiert die Beschreibung auf den Ausführungen von WILLIAMS und WRIGHT [97].

Die Basis des Algorithmus zunächst ohne die Integration von Substrukturen bildet folgende Gleichung:

$$J = s\{\mathbf{K}\} + J_0. \quad (4.2.5)$$

J gibt die Anzahl an Beulmoden an, die einen bestimmten Wert der Halbwellenlänge λ überschreiten. \mathbf{K} ist die globale Steifigkeitsmatrix des betrachteten Profils, was entweder ein offenes oder geschlossenes Balkenprofil, wie in Abbildung 4.6 dargestellt, oder auch eine aus mehreren einzelnen Platten aufgebaute Struktur, wie beispielsweise eine mit Stringern versteifte große Platte, sein kann. Die Strukturen können entweder frei im Raum stehen oder aber an übergeordnete Strukturen gelagert sein. In diesem Fall wird die globale Steifigkeitsmatrix noch an den entsprechenden Lagerpunkten um Einträge mit unendlich steifen Federn erweitert. Falls die Balkenprofile oder Plattengebilde frei im Raum stehen, findet der Algorithmus auch globale Beulmoden wie das Knicken nach Euler.

Die kritische Beullast liegt nun bei der Spannung vor, bei der in Gleichung 4.2.5 der Wechsel zwischen $J = 0$ und $J = 1$ stattfindet. Die Bestimmung dieses Punkts erfolgt mit einem einfachen

Bisektionsverfahren. Dabei kann nicht nur die kritische Beullast sondern jede beliebige höhere Beulmode errechnet werden. r sei daher die gesuchte Nummer der Beulmode. Falls die kritische Beullast gesucht ist, wird $r = 1$ gesetzt. Für die Berechnung kann das Verfahren entweder nach WILLIAMS und WRIGHT [97] über eine aufgeprägte Verschiebung ε oder nach WILLIAMS und HOWSON [98] über eine aufgebrauchte Last Q durchgeführt werden.

Im folgenden wird das Vorgehen mit einer aufgebrauchten Last Q beschrieben: Zunächst müssen die obere und untere Schranke für das Bisektionsverfahren gefunden werden. Dafür wird die untere Grenze Q_u als 0 gesetzt. Die obere Grenze Q_o beginnt mit dem Wert 50 N und wird solange verdoppelt, bis J gleich oder größer r ist. Nun beginnt die eigentliche Bisektion, indem in jedem Schritt $Q = (Q_u + Q_o)/2$ gesetzt wird und J erneut bestimmt wird. Falls $J < r$ ist, wird $Q_u = Q$ gesetzt und falls $J > r$ ist, wird $Q_o = Q$ genommen. Anschließend wird ein neues Q bestimmt. Die Bisektion wird bis zu einer vorher festgelegten Genauigkeit $(Q - Q_u)/Q$ wiederholt.

J setzt sich immer aus der Summe von $J_0 + s\{\mathbf{K}\}$ zusammen. $s\{\mathbf{K}\}$ ist gleich der Anzahl an negativen Einträgen auf der Diagonale der oberen Dreiecksform \mathbf{K}^Δ der globalen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} des betrachteten Profils. Nach WITTRICK und WILLIAMS [96] geben die negativen Eigenwerte einer Steifigkeitsmatrix unter einer Halbwellenlänge λ die Anzahl an Beulmoden unterhalb dieser Wellenlänge an. Die Vorzeichen der Eigenwerte finden sich aber auch in der Anzahl an Vorzeichenwechseln in der sturmschen Kette derselben Matrix wieder, was weniger Rechenaufwand bedeutet, als die Bestimmung der Eigenwerte. WITTRICK und WILLIAMS [96] stellen eine Methode vor, die Anzahl an Vorzeichenwechsel möglichst effizient bestimmen zu können. Dafür wird die obere Dreiecksmatrix \mathbf{K}^Δ mit dem gaußschen Eliminationsverfahren ohne Pivotisierung gebildet. Als Hinweis sei hier gegeben, dass das Vorgehen nur ohne Pivotisierung also ohne Reihen- und Spaltenvertauschung funktioniert. Falls auf der Diagonale der Eingangsmatrix ein Nulleintrag existiert, kann das gaußsche Eliminationsverfahren ohne Pivotisierung nicht durchgeführt werden. Für die in dieser Arbeit verwendeten Steifigkeitsmatrizen ist dies aufgrund des Aufbaus des Wittrick-Williams-Algorithmus aber ausgeschlossen. Die Anzahl an negativen Einträgen auf der Diagonalen der oberen Dreiecksmatrix \mathbf{K}^Δ entspricht dann exakt den Vorzeichenwechseln in der sturmschen Kette und somit den negativen Eigenwerten der Eingangsmatrix bei einer bestimmten Halbwellenlänge λ .

J_0 ist die Summe an Platten- und Scheiben-Beulmoden, die bei einem gegebenen Wert von λ in den einzelnen Platten der Struktur auftreten, unter der Annahme, dass die Ränder der Platten in Längsrichtung fest eingespannt sind. J_0 setzt sich daher wie folgt zusammen:

$$J_0 = \sum (J_{co} + J_{ci}). \quad (4.2.6)$$

Die Indizes «co» und «ci» stehen für Plattenverhalten respektive Scheibenverhalten. Die Berechnung von J_{co} und J_{ci} ist aufwendig und wird im Detail im folgenden Kapitel 4.3 erläutert.

Falls die betrachtete Struktur Substrukturen enthält, wird Gleichung 4.2.6 auf der rechten Seite durch Addition von $\sum J_{0s}$ erweitert. J_{0s} wird dann bestimmt mit

$$J_{0s} = s\{\mathbf{K}_{ii}\} + J_c.$$

$s\{\mathbf{K}_{ii}\}$ ist die Anzahl an negativen Vorzeichen in der Steifigkeitsmatrix der Substruktur, wobei die Einträge an den Verbindungspunkten zur übergeordneten Struktur aus der Matrix weggelassen werden. Zusätzlich existiert hier der Sonderfall, wenn die Substruktur wie in 4.2.1 nur aus zwei Platten zusammengesetzt ist. Dann wird nach WILLIAMS und WITTRICK [36] die Anzahl der negativen Einträge auf der Diagonale der oberen Dreiecksmatrix der Matrix $(\mathbf{S}_{K_{22a}} + \mathbf{S}_{K_{11b}})$ verwendet.

J_c ist dann äquivalent zu Gleichung 4.2.6 und gibt die Anzahl an Beulmoden der einzelnen Platten der Substruktur an, unter der Voraussetzung, dass diese Platten in Längsrichtung fest eingespannt sind. Falls die Substruktur ebenfalls aus weiteren Substrukturen besteht, wird zu J_c analog zu J_0 das J_{0s} der weiteren Substruktur addiert. Auf diese Weise können beliebig tiefe Ebenen an Substrukturen in den Algorithmus implementiert werden.

4.3 Der Einfluss einer einzelnen Platte auf das Stabilitätsverhalten einer Struktur

Wie im vorherigen Kapitel dargestellt, muss für die Berechnung des kritischen Beulwerts neben dem Verhalten der Struktur im globalen auch das Verhalten der einzelnen Platten betrachtet werden.

Die folgende Herleitung bezieht sich, wenn nicht anders angegeben, auf WITTRICK und WILLIAMS [37, Abschnitt 8]. Der Einfluss der einzelnen Platten wird in Gleichung 4.2.5 durch J_0 eingefügt. J_0 gibt dabei die Anzahl an Beulmoden an, die bei der gegebenen Last Q bei den einzelnen Platten der Struktur auftreten würden, wenn sich diese in einem fest eingespannten Zustand befänden. Dieser Wert muss für jede einzelne Platte separat berechnet werden. Dafür wird Gleichung 4.1.3 invertiert, sodass:

$$\mathbf{d} = \mathbf{k}^{-1}\mathbf{p}$$

ist. Wenn die Platte fest eingespannt ist, gilt $\mathbf{d} = 0$, weswegen nicht triviale Lösungen nur möglich sind, wenn die Determinante von \mathbf{k}^{-1} gleich 0 ist. Dies ist nur der Fall, wenn $\det(\mathbf{k}) = \infty$ gilt. Da \mathbf{k} von endlicher Ordnung ist, tritt dies nur ein, wenn Einträge in den Steifigkeitsmatrizen gegen unendlich divergieren. Dies kann in folgenden Fällen auftreten:

- Die Einträge in der Platten-Steifigkeitsmatrix divergieren gegen unendlich, wenn die Funktion im Nenner der Variable $Z = 0$ ist. Die Variable Z wird in Anhang B.1 hergeleitet.

- Die Einträge in der Scheiben-Steifigkeitsmatrix divergieren gegen unendlich, wenn entweder bei $B^2 > C$ die Variablen H_a oder $H_s = 0$ oder bei $B^2 \leq C$ die Variablen J_a oder $J_s = 0$ werden. Diese Variablen werden in Anhang B.2 hergeleitet.

Diese Bedingungen definieren demnach, ob Eigenwerte bei einer einzelnen Platte mit fest eingespannten Seitenrändern auftreten. Da die Ausdrücke von Z , H_a , H_s , J_a und $J_s = 0$ aber eine gewisse Komplexität aufweisen, können keine expliziten analytischen Zusammenhänge aufgestellt werden, bei welchen äußeren Belastungen die genannten Ausdrücke zu Null werden. Aus diesem Grund haben WITTRICK und WILLIAMS [37] ein alternatives Vorgehen entwickelt.

Wie oben schon erklärt, sind die aus der Plattenebene heraus und in der Ebene wirkende Kräfte und Momente sowie die Verschiebungen und Verdrehungen unabhängig voneinander. Aus diesem Grund kann die Anzahl der vorliegenden Eigenwerte bei einer fest eingespannten Platte ebenfalls getrennt unter einem Plattenverhalten und einem Scheibenverhalten betrachtet werden, weswegen auch Gleichung 4.2.6 aufgestellt wurde. Die Herleitung zur Berechnung der Anzahl der vorliegenden Eigenwerte für das Scheibenverhalten ist in Anhang B.3.1 und für das Plattenverhalten in Anhang B.3.2 dargelegt.

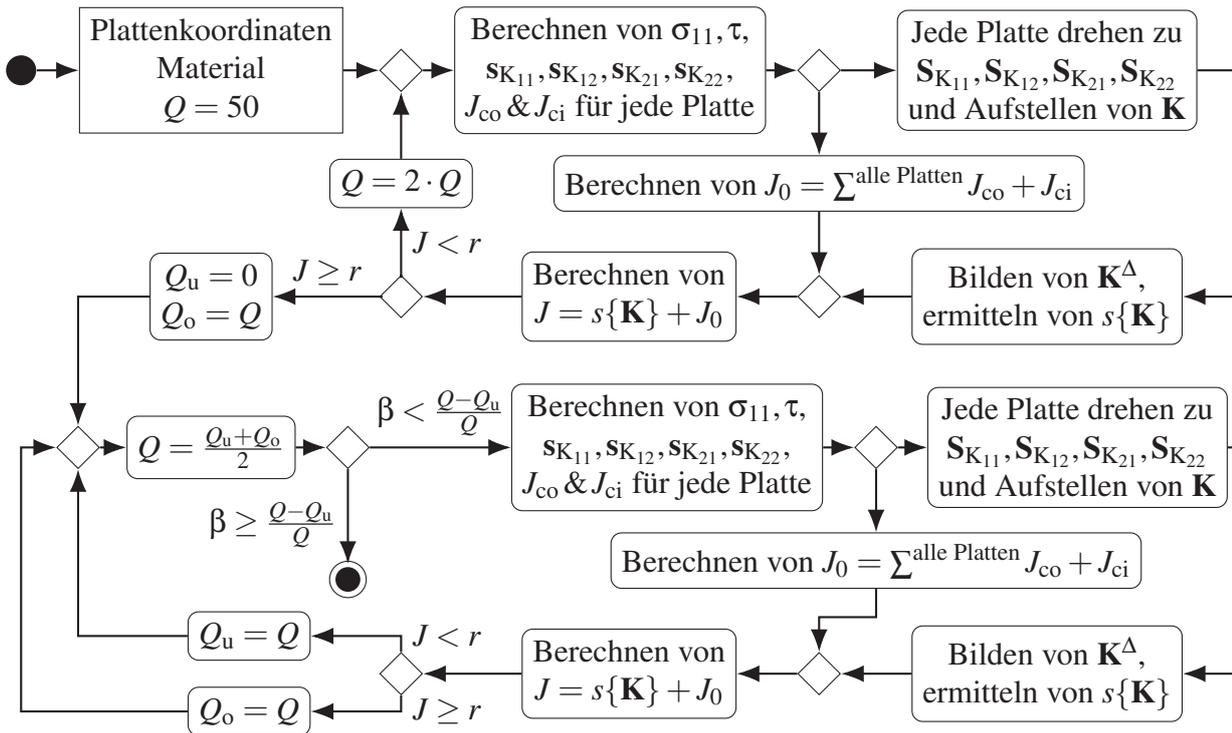
4.4 Zusammenfassung des Programmablaufs

Eine Zusammenfassung des Programmablaufs ist in Abbildung 4.7 gegeben. Die Berechnung beginnt mit dem Festlegen der unteren Schranke Q_u fürs Bisektionsverfahren sowie mit einem Startwert für Q , der in diesem Fall bei 50 N liegt. Als erster Schritt werden mit dem Startwert für Q , den Materialwerten, den Dicken und Breiten der einzelnen Platten die Spannung σ_{11} und die Schubspannung τ für jede Platte bestimmt.

Die Belastungen aus Druck beziehungsweise Zug, Biegung und der Schub aus Torsion müssen dafür in einem vorher definierten, festen Verhältnis stehen. Dieses Verhältnis ergibt sich direkt aus dem Verhältnis der zu prüfenden Belastung. Aus diesem Grund werden Vielfache von Q gebildet, die dieses Verhältnis darstellen. Wenn eine Druckbelastung über einen Strukturkennwert K_D vorliegt, lautet dieses Verhältnis:

$$\begin{aligned} Q_D &= Q, \\ Q_M &= Q \frac{K_M l}{K_D}, \\ Q_T &= Q \frac{K_T l}{K_D}. \end{aligned}$$

Wenn keine Druckbelastung und nur eine Kombination aus Biegung und Torsion vorliegt, bildet sich folgendes Verhältnis aus:

Abb. 4.7: Programmablauf für einen λ -Wert ohne Substrukturen.

$$\begin{aligned}
 Q_D &= 0, \\
 Q_M &= Q, \\
 Q_T &= Q \frac{K_T}{K_M}.
 \end{aligned}$$

Falls nur mit einer Belastung gerechnet wird, wird keine Aufteilung benötigt und die Berechnung erfolgt für diese Belastung lediglich mit Q . Mit den Lasten können die Einträge der Platten- und Scheiben-Steifigkeitsmatrizen der einzelnen Platten aufgestellt werden. Aus den Einträgen werden dann die lokalen Steifigkeitsmatrizen der einzelnen Platten gebildet. Parallel werden an dieser Stelle auch die Beulmoden J_{co} und J_{ci} der einzelnen Platten bestimmt, die an späterer Stelle benötigt werden.

Die lokalen Steifigkeitsmatrizen werden nun in das globale Koordinatensystem gedreht. Die globale Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} kann anschließend unter Berücksichtigung der Verbindungspunkte der einzelnen Platten zueinander aufgestellt werden. Von \mathbf{K} wird nun die obere Dreiecksmatrix \mathbf{K}^Δ ohne Pivotisierung gebildet. Mit \mathbf{K}^Δ kann nun die Anzahl an negativen Einträgen auf der Diagonalen $s\{\mathbf{K}\}$ bestimmt werden. $s\{\mathbf{K}\}$ wird mit den in den vorderen Schritten bestimmten J_{co} und J_{ci} zu J aufsummiert. Falls $J < r$ wird Q verdoppelt und die Rechnung beginnt mit der Berechnung neuer Spannungen σ_{11} und Schubspannung τ für die einzelnen Platten erneut. Falls $J \geq r$ kann in das Bisektionsverfahren gewechselt werden.

Dafür wird $Q_o = Q$ gesetzt und $Q = (Q_u + Q_o)/2$ bestimmt. Mit diesem Q wird die gleiche Rechnung wie im vorherigen Abschnitt durchgeführt, indem zunächst die Spannungen σ_{11} und die Schubspannung τ der einzelnen Platten berechnet werden, wodurch über die lokalen Steifigkeitsmatrizen die globale Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} aufgestellt werden kann. Mit \mathbf{K} kann nun wieder $s\{\mathbf{K}\}$ bestimmt werden, was dann mit J_{co} und J_{ci} der einzelnen Platten zu J aufaddiert wird. Ist $J < r$ wird $Q_u = Q$ gesetzt, andernfalls gilt $Q_o = Q$. Nun beginnt die Rechnung mit der Berechnung eines neuen $Q = (Q_u + Q_o)/2$ von neuem. An dieser Stelle wird auch geprüft, ob $(Q - Q_u)/Q$ eine vorher definierte Genauigkeit β unterschreitet. Ist dies der Fall, endet die Berechnung und der kritische Beulwert Q ist gefunden. Anderenfalls werden neue Spannungen σ_{11} und die Schubspannung τ für die einzelnen Platten berechnet und die Rechnung wird weitergeführt.

Nachdem Q gefunden ist, wird die gesamte Rechnung mit einem neuem Wert für λ wiederholt, wobei λ mit $\lambda = l/1, l/2, l/3, \dots, l/n$ gebildet wird. l ist die Länge des Plattengebildes. Gesucht ist der minimale Wert Q_{\min} für alle λ aus der vorher genannten Reihe.

4.5 Erweiterung um den Biegelastfall

WITTRICK [32] hat in seiner Arbeit das Verhalten einer Platte beziehungsweise einer aus Platten zusammengesetzten Struktur unter kombinierten Lasten hergeleitet. Dies inkludiert auch eine variable Druck- beziehungsweise Zugbelastung σ_{11} in Plattenlängsrichtung (siehe Abbildung 4.2). Daher kann grundsätzlich auch eine Biegebelastung auf eine Platte beziehungsweise - für diese Arbeit relevanter - auf einem aus Plattenstreifen aufgebautes Profil berechnet werden. Allerdings gibt WITTRICK [32] in seiner Arbeit an, dass eine exakte Lösung für die Einträge der Steifigkeitsmatrix nur in den Fällen einer konstanten Zug- oder Druckspannung oder bei einer symmetrischen Verteilung von σ_{11} (also ein reiner Biegelastfall) möglich ist. Da in dieser Arbeit aber kombinierte Lastfälle aus Druck und Biegung berechnet werden sollen, liegt im allgemeinen keine symmetrische Verteilung von σ_{11} vor.

Aus diesem Grund wurde der Wittrick-Williams-Algorithmus adaptiert, um für diese Arbeit zufriedenstellende Lösungen generieren zu können.

Die Grundlage der Adaption bildet das Umwandeln der stetigen Biegespannung σ_{11} in eine Treppenfunktion. Die Platte, die einen veränderlichen Spannungsverlauf erfährt, wird in Plattenstreifen aufgeteilt, welche wiederum mit einer konstanten Spannung als Mittelwert der Anfangs- und Endspannung des Plattenstreifens belastet werden. Auf diese Weise können für die einzelnen Plattenstreifen die Einträge der Steifigkeitsmatrix mit den oben dargestellten Herleitungen von WITTRICK und WILLIAMS aufgestellt werden. Die Plattenstreifen werden allerdings nicht direkt in die globale Steifigkeitsmatrix eingesetzt, sondern als Substrukturen behandelt (siehe Kapitel 4.2.1) und zunächst separat zusammengesetzt und anschließend als eine Platte in die Gesamtsteifigkeitsmatrix eingesetzt. Der Grund liegt in einem einfacheren Aufbau des Algorithmus insbesondere bei Profilen mit beliebigen Querschnitten wie in Kapitel 8.

Da die Treppenfunktion nur eine Näherung darstellt, muss ein Fehler in Kauf genommen werden. Dieser wird abnehmen, je größer die Anzahl an Abschnitten ist, also je genauer der Verlauf der Biegespannung nachgebildet werden kann. Eine höhere Anzahl an Abschnitten bedeutet aber einen höheren Rechenaufwand. Aus diesem Grund muss ein Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechenzeit gefunden werden. Für diese Überprüfung wurden die optimalen Profile für die einzelnen Lastfälle (Druck, Biegung, Torsion) aus Kapitel 5 verwendet, da sie die Randwerte aller weiteren Rechnungen darstellen.

In Abbildung 4.8 sind sowohl die durchschnittliche Rechenzeit zur Berechnung eines Profils und die durchschnittliche Abweichung zu den Ergebnissen der Finite-Elemente-Methode in Abhängigkeit der Anzahl der Abschnitte dargestellt. Zu sehen ist, dass die Rechenzeit linear mit der Erhöhung der Anzahl an Abschnitten zunimmt. Die Abweichung zu den Ergebnissen der Finite-Elemente-Methode fällt zu Beginn sehr stark ab und verändert sich ab fünf Abschnitten nicht mehr signifikant und verbleibt bei einem Fehler von 15 %. Eine wie hier positiv vorliegende Abweichung bedeutet, dass die absoluten Werte des Wittrick-Williams-Algorithmus geringer sind als die der Finite-Elemente-Methode.

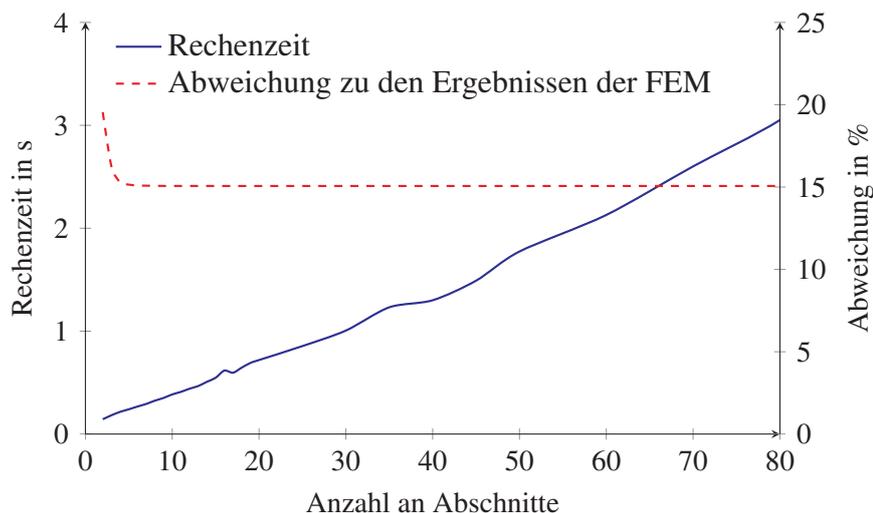


Abb. 4.8: Veränderung der Rechenzeit und des Fehlers zur Finite-Elemente-Methode (FEM) bei einer unterschiedlichen Anzahl an Abschnitten in den biegebelasteten Plattenelementen bei einem Vierkantprofil.

Die Abweichungen können mit unterschiedlichen Einspannungsbedingungen des Profils beim Wittrick-Williams-Algorithmus und der Finite-Elemente-Methode erklärt werden. Dies wird bei einer längenabhängigen Betrachtung ersichtlich. In Abbildung 4.9 sind die Abweichungen zwischen den Ergebnissen des Wittrick-Williams-Algorithmus und der Finite-Elemente-Methode abhängig von der Länge des Profils für die reine Druck-, Torsions- und Biegebelastung gezeigt.

Zu erkennen ist, dass die Abweichung der Ergebnisse zu den Ergebnissen der Finite-Elemente-Methode mit der Erhöhung der Länge deutlich abnimmt. Die ersten Stabilitätsmoden dieser Profile sind lokale Moden, weswegen die Einspannungsbedingungen an den Ende des Profils

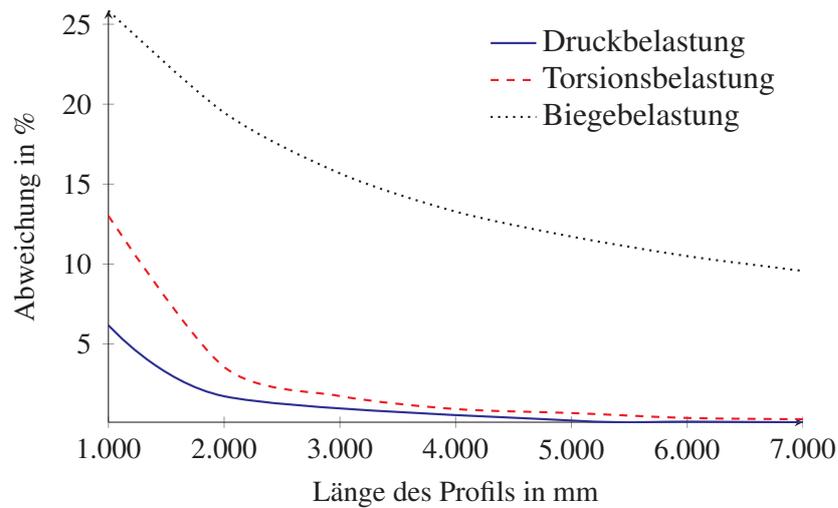


Abb. 4.9: Veränderung des Fehlers zur Finite-Elemente-Methode (FEM) abhängig von der Länge des Profils für reine Druck-, Torsions- und Biegebelastung.

beziehungsweise den kurzen Plattenränder der einzelnen Platten einen starken Einfluss auf das Stabilitätsverhalten haben. Dies ist an den Kurvenverläufen eindeutig zu erkennen. Deutlicher wird es noch, wenn die absoluten Zahlen betrachtet werden. Hierfür wurde ein quadratisches Profil mit der Kantenlänge 372,34 mm und der Profildicke 5,81 mm gewählt, dessen prozentuale Abweichung ungefähr dem Verlauf von Abbildung 4.9 entspricht.

In Abbildung 4.10 ist die kritische Beulspannung berechnet durch die Finite-Elemente-Methode und durch den Wittrick-Williams-Algorithmus aufgezeichnet.

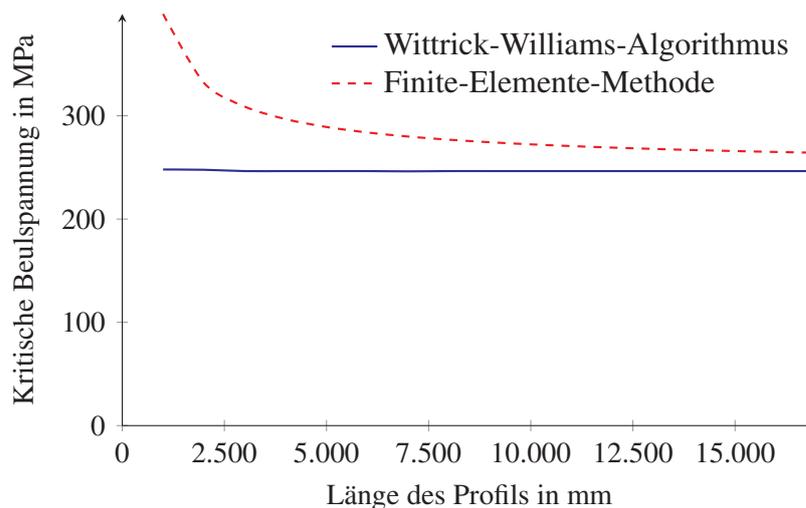


Abb. 4.10: Kritische Beulspannung eines Vierkantprofils mit quadratischem Querschnitt und einer Höhe von 372,34 mm und einer Profildicke von 5,81 mm in Abhängigkeit der Länge berechnet mit der Finite-Elemente-Methode und dem Wittrick-Williams-Algorithmus.

Zu erkennen ist, dass die Werte des Wittrick-Williams-Algorithmus nahezu konstant sind, wohingegen sich die Werte berechnet durch die Finite-Elemente-Methode asymptotisch den Werten des Wittrick-Williams-Algorithmus annähern. Daher erscheint es plausibel, dass die Einspannung beim Wittrick-Williams-Algorithmus keine versteifenden Eigenschaften aufweist. WITTRICK und WILLIAMS [96] verwenden als Grundlage für alle ihre Berechnungen eine sinusförmige Auslenkung der Platte unter Last. Eine reine sinusförmige Auslenkung kann aber nur bei vollständig gelenkiger Lagerung erzielt werden. Aus diesem Grund bilden die Werte des Wittrick-Williams-Algorithmus in Abbildung 4.10 die Grundlinie, an die sich die Werte der Finite-Elemente-Methode annähern. Für die weiteren Berechnungen kann daher mit dem Wittrick-Williams-Algorithmus gerechnet werden, da dessen Werte somit immer die «sichere Seite» der Berechnung darstellen. Denn in der Realität wirkt jede Einspannung in gewisser Weise immer versteifend.

Für die weitere Berechnung wird eine Unterteilung der mit einem Spannungsverlauf belasteten Platten in vier Abschnitte vorgenommen. Dies stellt einen Kompromiss zwischen hoher Rechengeschwindigkeit und ausreichender Genauigkeit der Ergebnisse dar.

5 Gewichtsoptimierte Auslegung nach PRECHTL

In diesem Kapitel werden die von PRECHTL [2] entwickelten Methoden zur Bestimmung des Leichtbaupotenzials von profilmförmigen Tragwerken vorgestellt. Diese werden zunächst für druck- und biegebelastete Tragwerke nachvollzogen und erweitert sowie anschließend analog zu der von PRECHTL entwickelten Methode ebenfalls für einen Torsionsstab aufgestellt. Das Ziel der Optimierungsaufgabe ist die Minimierung der Masse m des Tragwerks. Zum Bilden einer geschlossenen-analytischen Lösung werden dazu noch die Spannung σ und die Volumendichte V/l^3 benötigt. Für die Optimierung werden neben den Systemgleichungen auch die Funktion des Tragwerks und der Strukturkennwert K benötigt, wobei sich die Systemgleichungen aus Zielgröße, Entwurfsvariablen und Restriktionen zusammensetzen.

Die Herleitungen für den Profil-Druckstab (siehe folgendes Kapitel 5.1) und für den Profil-Biegeträger (siehe Kapitel 5.2) orientieren sich am Vorgehen von PRECHTL, weichen aber an einigen Stellen von seinen Ausführungen ab. Neben kleinerer unterschiedlicher Auffassungen, die entsprechend gekennzeichnet sind, behauptet PRECHTL, eine geschlossene-analytische Lösung vorzustellen. Dies ist allerdings nicht der Fall, da er in seiner Lösung empirisch-numerische Verfahren verwendet.

Aus diesem Grund werden zunächst geschlossen-analytische Lösungen vorgestellt, die «schlechter» (also schwerer) sind, als die Lösungen von PRECHTL. Die Abweichungen zu der Herleitung zu PRECHTL sind entsprechend kenntlich gemacht. Anschließend wird kurz die Lösung von PRECHTL vorgestellt, welche aufgrund des empirisch-numerischen Ansatzes für die jeweiligen Profile die optimale Bauform darstellt. Die Lösungen von PRECHTL ermöglichen, die Ergebnisse des Wittrick-Williams-Algorithmus kombiniert mit dem evolutionären Algorithmus zu validieren.

Für den Profil-Torsionsstab (siehe Kapitel 5.3) werden ebenfalls zunächst die geschlossene-analytische Lösung aufgestellt und anschließend auch die verbesserte Lösung mit dem Vorgehen nach PRECHTL aufgestellt.

Im Folgenden liegt der Fokus auf den wesentlichen Punkten der Herleitung, der Ergebnisse für die relativen Profilgrößen und der verschiedenen Methodiken zur Bestimmung dieser relativen Profilgrößen. Die detaillierte Herleitung der gewichtsoptimierten Auslegung für alle drei Grundlastfälle, die sich nahe an der Ausführung von PRECHTL hält, ist in Anhang C zu finden, worauf an den entsprechenden Stellen im einzelnen nochmals verwiesen wird.

5.1 Gewichtsoptimierte Auslegung für Profil-Druckstäbe

In diesem Abschnitt wird die Herleitung für eine gewichtsoptimierte Auslegung für Profil-Druckstäbe nach PRECHTL [2, Kapitel 4.3] vorgestellt und erweitert. Wenn nicht anders angegeben, beziehen sich die folgenden Abschnitte auf die Ausführungen von PRECHTL.

Für die Auslegungsaufgabe wird ein in Abbildung 5.1 gezeigtes Profil mit der Last P auf Druck belastet. Der Querschnitt weist die Höhe h und die Breite b sowie die im Querschnitt konstante Profildicke t auf. Die Länge l ist gegeben. Voraussetzung ist, dass die klassischen Hypothesen für schlanke Stäbe und das lineare Elastizitätsgesetz gelten. Dies bedeutet, dass $h, b \ll l$ und $t \ll h, b$ gilt. Der Strukturkennwert ist für diese Aufgabe mit $K = P/l^2$ definiert.

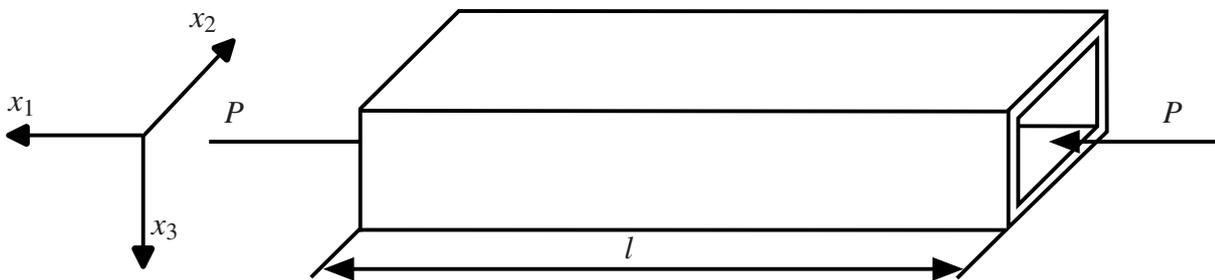


Abb. 5.1: Homogen und als Vierkantprofil ausgeführter Profil-Druckstab nach PRECHTL [2].

Das Ziel der Auslegungsaufgabe ist die Bestimmung der minimalen Masse m . Die Zielgröße wird zur Vereinfachung auf die Maximierung der Spannung σ umgestellt, da sich beim Druckstab die Spannung σ proportional zur Masse m verhält und so ein zusätzlicher Rechenschritt weggelassen werden kann. Die Restriktionen sind zum einen die gegebene Länge l und die funktionalen Restriktionen für das Festigkeits- und Stabilitätsversagen. Freie Variablen sind die relative Profilhöhe h/l , die relative Profildicke t/h und das Breiten-Höhenverhältnis $\delta = b/h$. Eine Zusammenfassung der Auslegungsaufgabe ist in Abbildung 5.2 gegeben.

Neben dem in Abbildung 5.1 gezeigten Vierkantprofil wird die gewichtsoptimierte Auslegung für Doppelt-T-, T- und U-Profile vorgestellt. PRECHTL gibt an, dass Vollprofile und Kreisring-Profile bereits von WIEDEMANN [29] behandelt wurden. WIEDEMANN und auch REES [28] haben dazu auch schon teilweise eine gewichtsoptimierte Auslegung für die genannten Profilformen vorgenommen. Diese wurden aber nicht allgemeingültig formuliert und auch die Breite b und die Höhe h des Profils wurden nicht optimiert. Dies hat PRECHTL in seiner Arbeit getan.

5.1.1 Profilwerte

Für die in Abbildung 5.3 dargestellten Profile werden im Folgenden die Querschnittsfläche A und die Flächenträgheitsmomente J_{22} und J_{33} in allgemeiner Form hergeleitet. Da die Profile einfach beziehungsweise doppelt achsensymmetrisch sind, sind die Hauptträgheitsmomente identisch zu den Eigenträgheitsmomenten. Die Querschnittsfläche in allgemeiner Form ist

Funktion:	Profiltragwerk unter Druckbelastung ($h, b \ll l$ und $t \ll h, b$)		
Strukturkennwert:	$K = \frac{P}{l^2}$		
Zielgröße:	Masse $m \rightarrow \text{Min}$; bzw. Spannung $\sigma \rightarrow \text{Max}$		
Restriktionen:	geometrisch:	Länge l	
	funktional:	Festigkeit:	Fließgrenze $ \sigma \leq \sigma_{\text{zul}}$
		Stabilität:	Knicken $P \leq P_{\text{krit}}$
		Beulen $ \sigma \leq \sigma_{\text{krit}}$	
freie Variablen:	relative Profilhöhe $\frac{h}{l}$		
	relative Profildicke $\frac{t}{h}$		
	Breiten-Höhenverhältnis $\delta = \frac{b}{h}$		

Abb. 5.2: Zusammenfassung der Auslegungsaufgabe für den Profil-Druckstab nach PRECHTL [2].

$$A = c_A t h f_A(\delta).$$

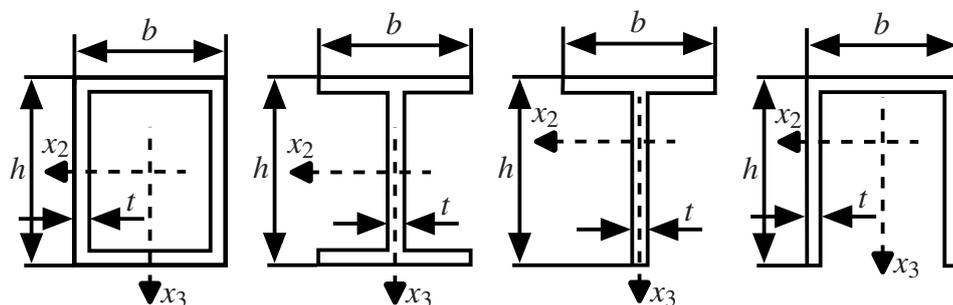


Abb. 5.3: Querschnitte der betrachteten Profilformen: Vierkantprofil, Doppel-T-Profil, T-Profil, U-Profil (von links nach rechts) nach PRECHTL [2].

Die Hauptträgheitsmomente um die x_2 - und die x_3 -Achse lauten

$$J_{22} = c_{J_{22}} t h^3 f_{J_{22}}(\delta),$$

$$J_{33} = c_{J_{33}} t h^3 f_{J_{33}}(\delta).$$

Die für die einzelnen Profile nötigen Profilwertfaktoren $c_A, c_{J_{22}}, c_{J_{33}}$ und die Profilwertfunktionen $f_A(\delta), f_{J_{22}}(\delta)$ und $f_{J_{33}}(\delta)$ sind in der Tabelle 5.1 gegeben.

Tab. 5.1: Profilwertfaktoren und Profilwertfunktionen für Querschnittsfläche und Flächenträgheitsmomente der angegebenen Profilformen beim Druckstab nach PRECHTL [2]

Profilform	c_A	$c_{J_{22}}$	$c_{J_{33}}$	$f_A(\delta)$	$f_{J_{22}}(\delta)$	$f_{J_{33}}(\delta)$
Vierkantprofil	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$1 + \delta$	$1 + 3\delta$	$\delta^2 \left(1 + \frac{\delta}{3}\right)$
Doppel-T-Profil	1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$1 + 2\delta$	$1 + 6\delta$	δ^3
T-Profil	1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$1 + \delta$	$\frac{1+4\delta}{1+\delta}$	δ^3
U-Profil	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$1 + \frac{\delta}{2}$	$\frac{1+2\delta}{1+\frac{\delta}{2}}$	$\delta^2 \left(1 + \frac{\delta}{6}\right)$

5.1.2 Zielfunktion und Restriktionen

Wie zu Beginn dieses Kapitels schon erwähnt, ist beim Druckstab die Spannung konstant und indirekt proportional zur Masse des Stabes. Daher wird als Zielfunktion die Spannung im Stab verwendet. Diese lautet

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{1}{c_A f_A(\delta)} \left(\frac{l}{h}\right)^2 \frac{h}{t} K \rightarrow \text{Max.} \quad (5.1.2)$$

Die Spannung muss für den optimalen Profilquerschnitt maximiert werden. Die Restriktionen liegen zum einen beim Festigkeitsversagen mit

$$\sigma < \sigma_{\text{zul}} \quad (5.1.3)$$

und zum anderen beim Stabilitätsversagen, welches sich durch Knicken um die jeweilige Achse mit

$$\sigma < \sigma_{\text{krit}_{K_{22}}} = c_{K_{22}} \frac{\pi^2 E J_{22}}{l^2 A} = \frac{c_{K_{22}} c_{J_{22}}}{c_A} \pi^2 \frac{f_{J_{22}}(\delta)}{f_A(\delta)} \left(\frac{h}{l}\right)^2 E, \quad (5.1.4a)$$

$$\sigma < \sigma_{\text{krit}_{K_{33}}} = c_{K_{33}} \frac{\pi^2 E J_{33}}{l^2 A} = \frac{c_{K_{33}} c_{J_{33}}}{c_A} \pi^2 \frac{f_{J_{33}}(\delta)}{f_A(\delta)} \left(\frac{h}{l}\right)^2 E \quad (5.1.4b)$$

und durch lokales Beulen mit

$$\sigma < \sigma_{\text{krit}_B} = k_P(\delta) E \left(\frac{t}{h}\right)^2 \quad (5.1.5)$$

äußert.

Die Faktoren $c_{K_{22}}$ und $c_{K_{33}}$ aus Gleichung 5.1.4 geben den Spannungszustand an, wodurch der Eulerfall festgelegt wird. Um die Ergebnisse mit den Berechnungen des Wittrick-Williams-Algorithmus vergleichen zu können, müssen die beiden Faktoren $c_{K_{22}}, c_{K_{33}} = 1$ gesetzt werden, was dem Eulerfall 2 entspricht. PRECHTL merkt an, «dass für die doppeltsymmetrischen Profilformen wie das (Vierkant- und das Doppel-T-Profil) ein zusätzliches Drillknicken um die x_1 -Achse des Stabs zu berücksichtigen ist». Teil der Voraussetzung ist aber, dass die Stäbe nicht durch seitliche Fesseln behindert werden beziehungsweise dass sie nicht gedungen sind. In diesen Fällen ist daher nach WIEDEMANN [29] kein Drillknicken zu erwarten. Für das T- und das U-Profil, die einfachsymmetrisch sind, wird auf jeden Fall das Phänomen des Biegedrillknickens auftreten. PRECHTL schlägt daher vor, dass die Ergebnisse dieser Profile zusätzlich noch gegen Biegedrillknicken geprüft werden müssen.

Die Funktion $k_P(\delta)$ in Gleichung 5.1.5 ist die sogenannte Profilbeulwertfunktion. Wie zu Beginn schon angemerkt, tritt an dieser Stelle eine Abweichung zum Vorgehen von PRECHTL auf. Für eine geschlossen-analytische Lösung muss mit den Grenzbeulwerten $k_{P,Grenz}$ für Steg- und Flanschbeulen gerechnet werden (Vergleich Kapitel 3.2.3). In Tabelle 5.2 sind die jeweiligen Grenzbeulwerte für die verschiedenen Querschnitte angegeben. Der tatsächliche Beulwert liegt zwischen diesen Grenzen, was aber nur numerisch oder experimentell ermittelt werden kann. Für die geschlossen-analytische Lösung werden daher die jeweils unteren Grenzbeulwerte des Stegs und Flansches verwendet. Aus diesem Grund müssen im Folgenden die beiden Bereiche (der Steg beult zuerst oder der Flansch beult zuerst) immer separat geprüft werden.

Tab. 5.2: Untere und obere Grenze der Beulwerte κ_{Grenz} für die betrachteten Querschnitte

Profilform	κ_{S_u}	κ_{S_o}	κ_{F_u}	κ_{F_o}
Vierkant-Profil	4	6,97	$\frac{4}{\delta^2}$	$\frac{6,97}{\delta^2}$
Doppel-T-Profil	4	6,97	$\frac{1,7}{\delta^2}$	$\frac{5}{\delta^2}$
T-Profil	0,425	1,25	$\frac{1,7}{\delta^2}$	$\frac{5}{\delta^2}$
U-Profil	0,425	1,25	$\frac{4}{\delta^2}$	$\frac{6,97}{\delta^2}$

PRECHTL verwendet an dieser Stelle einen numerischen Ansatz, indem er mit aufwendigen Finite-Elemente-Methode-Rechnungen die realen Beulwerte des Profils für unterschiedliche Breiten-Höhenverhältnisse δ ermittelt. Dieses Vorgehen wird im Detail im Nachgang der geschlossen-analytischen Lösung besprochen (siehe Kapitel 5.1.4).

5.1.3 Optimierte Auslegung

Die genaue Herleitung der gewichtsoptimierten Auslegung ist in Anhang C.1 dargelegt. Sie folgt größtenteils den Ausführungen von PRECHTL, wobei Abweichungen entsprechend gekennzeichnet sind. Für einen kleinen Strukturkennwerte $K < \tilde{K}$ ergeben sich dann die gewichtsoptimalen Geometrieverhältnisse h/l und t/h mit

$$\left(\frac{h}{l}\right)_{\min,k} = c_{\left(\frac{h}{l}\right),k} \left(\frac{1}{1-\nu^2}\right)^{\frac{1}{10}} \left(\frac{K}{E}\right)^{\frac{1}{5}}, \quad (5.1.6a)$$

$$\left(\frac{t}{h}\right)_{\min,k} = c_{\left(\frac{t}{h}\right),k} (1-\nu^2)^{\frac{2}{5}} \left(\frac{K}{E}\right)^{\frac{1}{5}} \quad (5.1.6b)$$

mit

$$c_{\left(\frac{h}{l}\right),k} = \left(\frac{1}{12\pi^4} \frac{c_A}{c_{K22}^3 c_{J22}^3} \frac{f_A(\delta_{\text{opt}}) \kappa(\delta_{\text{opt}})}{f_{J22}(\delta_{\text{opt}})^3} \right)^{\frac{1}{10}},$$

$$c_{\left(\frac{t}{h}\right),k} = \left(\left(\frac{12}{\pi}\right)^2 \frac{c_{K22} c_{J22}}{c_A^2} \frac{f_{J22}(\delta_{\text{opt}})}{f_A(\delta_{\text{opt}})^2 \kappa(\delta_{\text{opt}})^2} \right)^{\frac{1}{5}}.$$

Die nötigen optimalen Breiten-Höhenverhältnisse δ_{opt} werden ebenfalls in Anhang C.1 hergeleitet und sind in Tabelle 5.3 aufgelistet.

Tab. 5.3: Optimales Breiten-Höhenverhältnis δ_{opt} und der dazugehörige Profilbeulwert $\kappa(\delta_{\text{opt}})$ des Druckstabs der angegebenen Profilformen

Profilform	δ_{opt}	$\kappa(\delta_{\text{opt}})$
Vierkantprofil	1	4
Doppel-T-Profil	1,81	0,519
T-Profil	1,4	0,425
U-Profil	0,73	0,425

Für einen großen Strukturkennwert $K > \tilde{K}$ liegt ein Versagen nach Festigkeit vor. Da eine zweite Restriktion nicht benötigt wird, existieren beliebig viele Lösungen. PRECHTL wählt eine dieser Lösungen ohne weitere Begründung aus, indem er einfach den Zusammenhang für die relative Profildicke t/h bei einem kleinen Strukturkennwert auch für den großen Strukturkennwert nutzt. Zielführender ist die Einführung einer geometrischen Restriktion. Die Grenzen der Lösungsmenge bilden ein optimal kleines und optimal großes Profil. Diese liegen vor, wenn entweder Knicken und Festigkeitsversagen oder lokales Beulen und Festigkeitsversagen gleichzeitig eintreten. Die Herleitung der optimalen relativen Geometriebeziehungen h/l und t/h ist ebenfalls in Anhang C.1 gegeben. Für ein optimal kleines Profil ergibt sich dann

$$\left(\frac{h}{l}\right)_{\text{opt, gmin}} = c_{\left(\frac{h}{l}\right), \text{gmin}} \sqrt{\frac{\sigma_{\text{zul}}}{E}}, \quad (5.1.8a)$$

$$\left(\frac{t}{h}\right)_{\text{opt, gmin}} = c_{\left(\frac{t}{h}\right), \text{gmin}} \frac{EK}{\sigma_{\text{zul}}^2} \quad (5.1.8b)$$

mit

$$c_{\left(\frac{h}{l}\right), \text{gmin}} = \sqrt{\frac{1}{\pi^2} \frac{c_A}{c_{K22} c_{J22}} \frac{f_A(\delta_{\text{opt}})}{f_{J22}(\delta_{\text{opt}})}},$$

$$c_{\left(\frac{t}{h}\right), \text{gmin}} = \pi^2 \frac{c_{K22} c_{J22}}{c_A^2} \frac{f_{J22}(\delta_{\text{opt}})}{f_A(\delta_{\text{opt}})^2}.$$

Für einen großen Strukturkennwert und der Bedingung, dass das Profil optimal groß sein soll ergibt sich

$$\left(\frac{h}{l}\right)_{\text{opt, gmax}} = c_{\left(\frac{h}{l}\right), \text{gmax}} \left(\frac{1}{1-\nu^2}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{EK^2}{\sigma_{\text{zul}}^3}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad (5.1.10a)$$

$$\left(\frac{t}{h}\right)_{\text{opt, gmax}} = c_{\left(\frac{t}{h}\right), \text{gmax}} (1-\nu^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma_{\text{zul}}}{E}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.1.10b)$$

mit

$$c_{\left(\frac{h}{l}\right), \text{gmax}} = \left(\frac{\pi^2}{12} \frac{1}{c_A^2} \frac{\kappa(\delta_{\text{opt}})}{f_A(\delta_{\text{opt}})^2}\right)^{\frac{1}{4}},$$

$$c_{\left(\frac{t}{h}\right), \text{gmax}} = \left(\frac{12}{\pi^2} \frac{1}{\kappa(\delta_{\text{opt}})}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Werte für die Faktoren $c_{(h/l), k}$, $c_{(t/h), k}$, $c_{(h/l), \text{gmin}}$, $c_{(t/h), \text{gmin}}$, $c_{(h/l), \text{gmax}}$ und $c_{(t/h), \text{gmax}}$ für das optimale Breiten-Höhenverhältnis δ_{opt} der jeweiligen Profile sind in Tabelle 5.4 angegeben.

Wenn nun die gewichtsoptimalen Geometrieverhältnisse aus Gleichungen 5.1.6 und 5.1.8 beziehungsweise 5.1.10 in Gleichung 5.1.2 eingesetzt werden, ergeben sich die maximalen Spannungen für kleine und große Strukturkennwerte, wie folgt

Tab. 5.4: Die Faktoren $c_{(h/l),k}$, $c_{(t/h),k}$, $c_{(h/l),g_{\min}}$, $c_{(t/h),g_{\min}}$, $c_{(h/l),g_{\max}}$ und $c_{(t/h),g_{\max}}$ für das optimale Breiten-Höhenverhältnis δ_{opt} der angegebenen Profilformen

Profilform	$c_{(h/l),k}$	$c_{(t/h),k}$	$c_{(h/l),g_{\min}}$	$c_{(t/h),g_{\min}}$	$c_{(h/l),g_{\max}}$	$c_{(t/h),g_{\max}}$
Vierkantprofil	0,735	0,520	0,780	0,411	0,673	0,551
Doppel-T-Profil	0,54	1,20	0,689	0,457	0,376	1,53
T-Profil	0,769	1,26	1,03	0,393	0,496	1,69
U-Profil	0,72	1,27	0,960	0,398	0,465	1,69

$$\sigma_{\max} = \Phi \left(\frac{1}{1-\nu^2} \right)^{\frac{1}{5}} (E^3 K^2)^{\frac{1}{5}} \quad \text{für } K < \tilde{K}, \quad (5.1.12a)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{zul}} \quad \text{für } K > \tilde{K} \quad (5.1.12b)$$

mit der Geometriefunktion

$$\Phi = \left(\frac{\pi^6 c_{K22}^2 c_{J22}^2 f_1(\delta_{\text{opt}})^2 K_P(\delta_{\text{opt}})}{12 c_A^4 f_A(\delta_{\text{opt}})^4} \right)^{\frac{1}{5}},$$

für welche in Tabelle 5.5 berechnete Werte angegeben sind.

Tab. 5.5: Für die Geometriefunktion Φ berechnete Werte der angegebenen Profilformen für das jeweilige optimale Breiten-Höhenverhältnis δ_{opt} (siehe Tabelle 5.3) und die dazugehörigen kritischen Strukturkennwerte \tilde{K}

Profilform	Φ	\tilde{K}
Vierkantprofil	0,889	0,051 MPa
Doppel-T-Profil	0,617	0,127 MPa
T-Profil	0,558	0,164 MPa
U-Profil	0,560	0,162 MPa

Der kritische Strukturkennwert \tilde{K} und somit der Wechsel von einem kleinen zu einem großen Strukturkennwert liegt dann vor, wenn die maximalen Spannungen aus Gleichung 5.1.12 gleich groß sind. Zur Bestimmung von \tilde{K} werden diese daher gleichgesetzt. Es ergibt sich folgender Zusammenhang, von dem die Zahlenwerte in Tabelle 5.5 angegeben sind:

$$\tilde{K} = \sqrt{\frac{1}{\Phi^5} (1 - \nu^2) \frac{\sigma_{zul}^5}{E^3}}.$$

5.1.4 Numerischer Ansatz für den Druckstab nach PRECHTL

Wie oben schon angesprochen, hat PRECHTL einen numerischen Ansatz verfolgt, um den exakten Profilbeulwert für das jeweilige Breiten-Höhenverhältnis δ verwenden zu können. Insofern weichen die Werte in den Tabellen 5.4 und 5.5 von den von PRECHTL ermittelten und genannten Werten ab. Der Vollständigkeit halber ist im Folgenden der numerische Ansatz nach PRECHTL kurz zusammengefasst.

Das im vorherigen Kapitel 5.1.3 beziehungsweise in Anhang C.1 vorgestellte Vorgehen zum Ermitteln der optimierten Profilgeometrien ist mit dem numerischen Ansatz nach PRECHTL identisch. Auch die optimalen Breiten-Höhenverhältnisse δ_{opt} in Tabelle 5.3 sind gleich. Die aufgestellten Gleichungen sind ebenso identisch, abgesehen davon, dass PRECHTL bei großen Strukturkennwerten ohne weitere Begründung die Annahme $(t/h)_{min,g} = (t/h)_{min,k}$ trifft. Das gewichtsoptimale Geometrieverhältnis h/l für einen großen Strukturkennwert $K > \tilde{K}$ ist nach PRECHTL

$$\left(\frac{h}{l}\right)_{opt, gPrecht} = c_{\left(\frac{h}{l}\right), gPrecht} \left(\frac{1}{1 - \nu^2}\right)^{\frac{2}{5}} \left(\frac{K^4 E}{\sigma_{zul}^4}\right)^{\frac{1}{10}}$$

mit

$$c_{\left(\frac{h}{l}\right), gPrecht} = \left(\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 \frac{1}{c_A^3 c_{K1} c_{J22}} \frac{\kappa(\delta_{opt})^2}{f_A(\delta_{opt})^3 f_{J22}(\delta_{opt})} \right)^{\frac{1}{10}}.$$

Zur Berechnung der c -Faktoren wird ab dieser Stelle der numerische Ansatz verwendet, indem der exakte Profilbeulwert für das optimale Breiten-Höhenverhältnis δ_{opt} berechnet wird. Die Profilbeulwertfunktionen für die besprochenen Querschnittsformen, aus denen die Profilbeulwerte für die weitere Berechnung entnommen wurden, sind in Abbildung 5.4 dargestellt.

Für die in Tabelle 5.3 genannten optimalen Breiten-Höhenverhältnisse δ_{opt} können in Tabelle 5.6 die numerisch ermittelten exakten κ -Werte entnommen werden. Für einen besseren Vergleich sind ebenso die analytisch berechneten Werte genannt.

Mit diesen κ -Werten können nun die numerisch-optimalen c -Faktoren berechnet werden, welche in Tabelle 5.7 aufgelistet sind. Als Hinweis sei gegeben, dass die c -Faktoren für einen kleinen Strukturkennwert $K < \tilde{K}$ von PRECHTL und aus dieser Arbeit identisch sind. Aus diesem Grund findet keine Unterscheidung statt. Deswegen wird lediglich die relative Profilhöhe h/l für einen großen Strukturkennwert entsprechend mit «Prechtl» markiert.

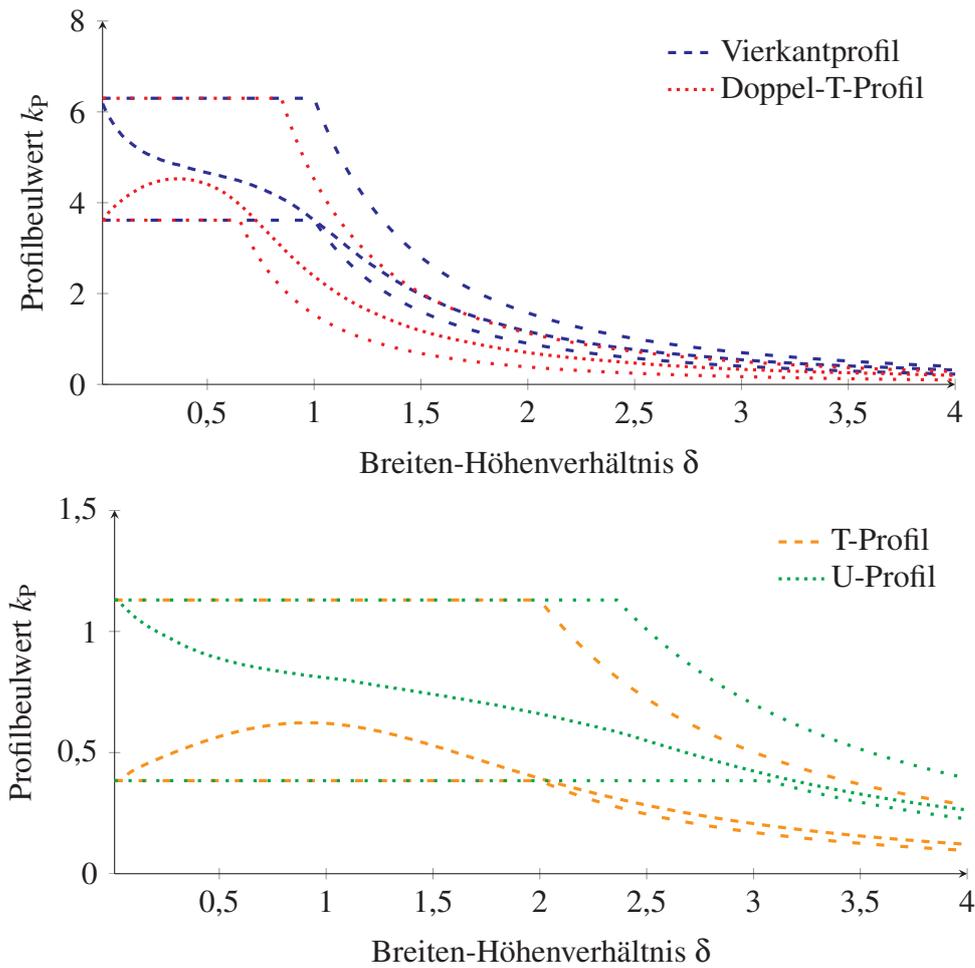


Abb. 5.4: Numerisch berechnete Profilbeulwertfunktionen k_p für die besprochenen Querschnittsformen. Die unteren und oberen Grenzprofilbeulwertfunktionen $k_{p,Grenz}$ sind in der gleichen Linienfarbe und in einer aufgeweiteten Ausführung dargestellt. Die Darstellung orientiert sich an der Ausarbeitung von PRECHTL [2].

Tab. 5.6: Analytische und numerische κ -Werte für die optimalen Breiten-Höhenverhältnis δ_{opt} des Druckstabs der angegebenen Profilformen

Profilform	δ_{opt}	$\kappa(\delta_{opt})^{anal}$	$\kappa(\delta_{opt})^{num}$
Vierkantprofil	1	4	4
Doppel-T-Profil	1,81	0,519	0,934
T-Profil	1,4	0,425	0,613
U-Profil	0,73	0,425	0,932

Mit den veränderten c -Faktoren ergeben sich auch bessere Werte für die Geometriefunktion Φ sowie veränderte kritische Strukturkennwerte \tilde{K} , welche in Tabelle 5.8 angegeben sind.

Tab. 5.7: Die mit dem numerisch optimalen κ -Wert berechneten Faktoren $c_{(h/l), \kappa}^{\text{num}}$, $c_{(t/h), \kappa}^{\text{num}}$, $c_{(h/l), g_{\min}}^{\text{num}}$, $c_{(t/h), g_{\min}}^{\text{num}}$, $c_{(h/l), g_{\max}}^{\text{num}}$, $c_{(t/h), g_{\max}}^{\text{num}}$ und $c_{(h/l), g_{\text{PrechtL}}}^{\text{num}}$ für das optimale Breiten-Höhenverhältnis δ_{opt} der behandelten Profilformen

Profilform	$c_{(h/l), \kappa}^{\text{num}}$	$c_{(t/h), \kappa}^{\text{num}}$	$c_{(h/l), g_{\min}}^{\text{num}}$	$c_{(t/h), g_{\min}}^{\text{num}}$	$c_{(h/l), g_{\max}}^{\text{num}}$	$c_{(t/h), g_{\max}}^{\text{num}}$	$c_{(h/l), g_{\text{PrechtL}}}^{\text{num}}$
Vierkantpr.	0,735	0,520	0,707	0,500	0,673	0,551	0,693
Doppel-T-Pr.	0,573	0,950	0,507	0,841	0,436	1,141	0,477
T-Profil	0,797	1,091	0,673	0,920	0,544	1,408	0,618
U-Profil	0,777	0,925	0,675	0,804	0,566	1,142	0,629

Tab. 5.8: Für die Geometriefunktion Φ mit dem numerisch exakten κ -Wert berechnete Werte der besprochenen Profilformen für das jeweilige optimale Breiten-Höhenverhältnis

Profilform	Φ^{num}	\tilde{K}^{num}
Vierkantprofil	0,889	0,051 MPa
Doppel-T-Profil	0,693	0,095 MPa
T-Profil	0,600	0,136 MPa
U-Profil	0,656	0,109 MPa

5.2 Gewichtsoptimierte Auslegung für Profil-Biegeträger

In diesem Abschnitt wird die gewichtsoptimierte Auslegung für Profil-Biegeträger nach PRECHTL [2, Kapitel 4.4] vorgestellt. Wenn nicht anders angegeben, bezieht sich alles weitere auf die Ausführungen von PRECHTL.

Für die Auslegungsaufgabe wird ein in Abbildung 5.5 gezeigtes Profil mit dem Moment M auf Biegung belastet. Der Querschnitt weist die Höhe h und die Breite b sowie die im Querschnitt konstante Profildicke t auf. Die Länge l ist gegeben. Voraussetzung ist, dass die klassischen Hypothesen für schlanke Stäbe und das lineare Elastizitätsgesetz gelten. Dies bedeutet, dass $h, b \ll l$ und $t \ll h, b$ sind. Der Strukturkennwert ist für diese Aufgabe mit $K = M/l^3$ definiert. In der Herleitung von PRECHTL kann die Belastung auch durch eine Querkraft P oder eine Streckenlast p hervorgerufen werden. Dadurch ergibt sich der korrespondierende Strukturkennwert $K = P/l^2 = p/l$. Da die Einbindung des Wittrick-Williams-Algorithmus ein Ziel dieser Arbeit ist, müssen die Rand- und Einspannungsbedingungen, die der Algorithmus verarbeiten kann, beachtet werden. Aus diesem Grund wird im weiteren Verlauf nur mit einem Moment M gerechnet. Zusätzlich gelten die Anforderungen der elementaren Stabtheorie, welche die Vernachlässigung der Schubverformung der Profilwände, die Nichtbehinderung von Querkontraktion

und Querkrümmung und die Formhaltung des Profils insbesondere am Punkt der Lasteinleitung beinhalten.

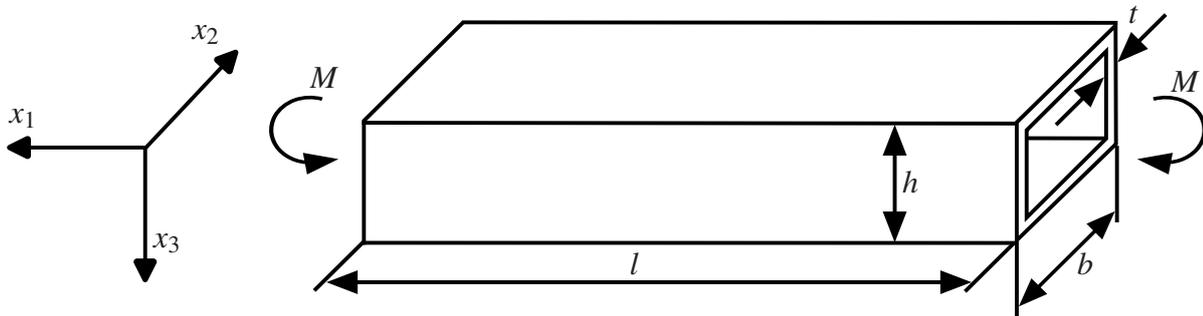


Abb. 5.5: Homogen und als Vierkantprofil ausgeführter Profil-Biegeträger, der mit einem Moment M belastet wird, nach PRECHTL [2].

Auch in diesem Abschnitt ist weiterhin eine minimale Masse m das Ziel. Die Zielgröße ist allerdings die dimensionslose Zielfunktion Z , die als Volumendichte interpretiert wird. Die Restriktionen sind zum einen die gegebene Länge l und die funktionalen Restriktionen für das Festigkeits- und Stabilitätsversagen. Für die Steifigkeit ist die Verformung f entscheidend, die kleiner als die erlaubte Verformung f_{zul} sein muss. Ein allgemeiner Wert für f_{zul} ist nicht definiert, sondern immer von der Anwendung und dem Einzelfall abhängig. PETERSEN [45] gibt an, dass mit einem Wert von $f_{zul}/l = 1/300$ gerechnet werden kann. Dies wird in dieser Arbeit dementsprechend angewendet.

Freie Variablen sind wie beim Profil-Druckstab die relative Profilhöhe h/l , die relative Profildicke t/h und das Breiten-Höhenverhältnis $\delta = b/h$. Eine Zusammenfassung der Problemstellung ist in Abbildung 5.6 gegeben.

Funktion:	Profiltragwerk unter Biegebelastung ($h, b \ll l$ und $t \ll h, b$)	
Strukturkennwert:	$K = \frac{M}{l^3}$	
Zielgröße:	Masse $m \rightarrow \text{Min}$; bzw. Volumendichte $\frac{V}{l^3} \rightarrow \text{Min}$	
Restriktionen:	geometrisch:	Länge l
	funktional: Festigkeit:	Fließgrenze $ \sigma \leq \sigma_{zul}$
	Stabilität:	Verformung $f \leq f_{zul}$ Beulen $ \sigma \leq \sigma_{krit}$
freie Variablen:	relative Profilhöhe $\frac{h}{l}$	
	relative Profildicke $\frac{t}{h}$	
	Breiten-Höhenverhältnis $\delta = \frac{b}{h}$	

Abb. 5.6: Zusammenfassung der Auslegungsaufgabe für den Profil-Biegeträger nach PRECHTL [2].

Neben dem in Abbildung 5.5 gezeigten Vierkantprofil wird auch die gewichtsoptimierte Auslegung für Doppelt-T-, T-, U- und C-Profile vorgestellt. PRECHTL gibt auch hier an, dass WIEDEMANN [29] und auch REES [28] teilweise eine gewichtsoptimierte Auslegung für die genannten Profilformen vorgenommen haben. Aber auch für den Biegeträger hat PRECHTL erstmals eine allgemein gültige Formulierung mit zusätzlichen Restriktionen aufgestellt.

Im Gegensatz zum Profil-Druckstab sind die Auswirkungen auf die Herleitung der geschlossenen-analytischen Lösung der gewichtsoptimierten Auslegung für den Profil-Biegeträger durch das numerische Vorgehen von PRECHTL erheblich größer. Die Methode der Herleitung ist aber weitestgehend identisch und eine Abweichung ist entsprechend kenntlich gemacht. Auch in diesem Abschnitt werden zunächst die geschlossenen-analytische Lösung vorgestellt und anschließend die numerische Lösung zusammengefasst.

5.2.1 Profilwerte

Für die in Abbildung 5.7 dargestellten Profile des Biegeträgers müssen die Querschnittsfläche A , das axiale Flächenträgheitsmoment J_{22} und das axiale Widerstandsmoment W_{22} hergeleitet werden. Da beim Biegeträger die Richtung der Biegung relevant ist, wird neben dem U-Profil auch das C-Profil betrachtet. Die allgemeine Form der Fläche und des Flächenträgheitsmoments sind unverändert zum Druckstab, werden aber aus Gründen der Vollständigkeit an dieser Stelle noch einmal wiederholt. Sie lauten

$$A = c_A t h f_A(\delta),$$

$$J_{22} = c_{J_{22}} t h^3 f_{J_{22}}(\delta).$$

Die allgemeine Form für das Widerstandsmoment lautet

$$W_{22} = c_W t h^2 f_W(\delta).$$

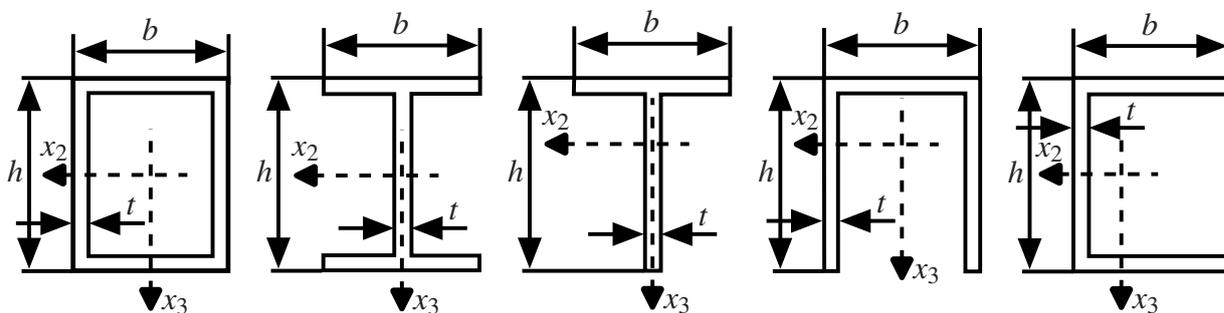


Abb. 5.7: Querschnitte der betrachteten Profilformen: Vierkantprofil, Doppelt-T-Profil, T-Profil, U-Profil und C-Profil (von links nach rechts) nach PRECHTL [2].

In Tabelle 5.9 sind für die jeweiligen Profile des Biegeträgers die Werte für die Profilwertfaktoren c_A , $c_{J_{22}}$ und c_W sowie die dazu gehörenden Profilwertfunktionen $f_A(\delta)$, $f_{J_{22}}(\delta)$ und $f_W(\delta)$ angegeben.

Tab. 5.9: Profilwertfaktoren und Profilwertfunktionen für Querschnittsfläche, Flächenträgheitsmoment und Widerstandsmoment der angegebenen Profilformen beim Biegeträger nach PRECHTL [2]

Profilform	c_A	$c_{J_{22}}$	c_W	$f_A(\delta)$	$f_{J_{22}}(\delta)$	$f_W(\delta)$
Vierkantprofil	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$1 + \delta$	$1 + 3\delta$	$1 + 3\delta$
Doppel-T-Profil	1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$1 + 2\delta$	$1 + 6\delta$	$1 + 6\delta$
T-Profil	1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$1 + \delta$	$\frac{1+4\delta}{1+\delta}$	$\frac{1+4\delta}{1+2\delta}$
U-Profil	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$1 + \frac{\delta}{2}$	$\frac{1+2\delta}{1+\frac{\delta}{2}}$	$\frac{1+2\delta}{1+\delta}$
C-Profil	1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$1 + 2\delta$	$1 + 6\delta$	$1 + 6\delta$

5.2.2 Zielfunktion und Restriktionen

Das Ziel dieser Auslegungsaufgabe ist die Minimierung der Masse. Die Zielfunktion ist daher die Masse des Balkens. Die Zielfunktion Z wird in die dimensionslose Darstellung der Volumendichte gebracht und muss minimiert werden. Sie lautet

$$Z \equiv \frac{m}{\gamma l^3} = \frac{\gamma A l}{\gamma l^3} = \frac{A}{l^2} \rightarrow \text{Min.}$$

Die minimal mögliche Masse des Balkens wird durch die Spannung im Balkenträger bestimmt, welche je nach Belastung durch Restriktionen in Festigkeit und Stabilität eine maximale Grenze aufweist. Die Spannung im Biegeträger lautet

$$\sigma = \frac{1}{c_\sigma} \frac{M}{W_{22}} = \frac{1}{c_\sigma} \frac{1}{c_W f_W(\delta)} \left(\frac{l}{h} \right)^3 \frac{h}{t} K. \quad (5.2.1)$$

Die Restriktion beim Versagen nach Festigkeit wird durch die maximal zulässige Spannung im Bauteil definiert. Diese lautet

$$\sigma < \sigma_{\text{zul}}.$$

Beim Stabilitätsversagen existieren zwei Begrenzungen, welche entweder durch die Steifigkeit mit

$$\frac{f}{l} = \frac{1}{c_f} \frac{Ml}{EJ_{22}} = \frac{1}{c_f c_{J_{22}} f_{J_{22}}(\delta)} \left(\frac{l}{h}\right)^4 \frac{hK}{tE} < \frac{f_{zul}}{l} \quad (5.2.2)$$

oder durch Beulen mit

$$\sigma < \sigma_{kritB} = k_P(\delta)E \left(\frac{t}{h}\right)^2 \quad (5.2.3)$$

ausgedrückt wird. Die Faktoren c_σ und c_f in den Gleichungen 5.2.1 und 5.2.2 stellen unterschiedliche Lastfälle und Randbedingungen dar. PRECHTL gibt auf Basis von DUBBEL, GROTE und FELDHUSEN [53] für verschiedenste Einspannungs- und Belastungszustände entsprechende Werte an. Wie schon beim Druckstab ist die Berechnung auf die Einspannungsbedingungen beim Wittrick-Williams-Algorithmus angewiesen, weswegen nur ein Wertepaar verwendet werden kann und sich $c_\sigma = 1$ und $c_f = 9\sqrt{3}$ ergeben.

Wie beim Druckstab tritt durch die Profilbeulwertfunktion $k_P(\delta)$ in Gleichung 5.2.3 die Abweichung zum Vorgehen von PRECHTL auf. Für eine geschlossen-analytische Lösung muss auch hier mit den Grenzbeulwerten $k_{P,Grenz}$ für die Stege und Flansche unter Biegebelastung gerechnet werden (Vergleich Kapitel 3.2.3). In Tabelle 5.10 sind die jeweiligen Grenzbeulwerte für die verschiedenen Querschnitte angegeben. Der tatsächliche Beulwert liegt auch hier zwischen diesen Grenzen, was aber nur numerisch oder experimentell ermittelt werden kann.

Für die geschlossen-analytische Lösung werden daher die jeweils unteren Grenzbeulwerte des Stegs und Flanschs verwendet. Aus diesem Grund müssen auch beim Biegeträger im Folgenden die jeweiligen Bereiche (der Steg beult zuerst oder der Flansch beult zuerst) immer separat geprüft werden.

Tab. 5.10: Untere und obere Grenze der Beulwerte κ_{Grenz} bei einer Biegebelastung für die betrachteten Querschnitte

Profilform	κ_{S_u}	κ_{S_o}	κ_{F_u}	κ_{F_o}
Vierkant-Profil	23,88	39,52	$\frac{4}{\delta^2}$	$\frac{6,97}{\delta^2}$
Doppel-T-Profil	23,88	39,52	$\frac{1,7}{\delta^2}$	$\frac{5}{\delta^2}$
T-Profil	23,88	39,52	$\frac{1,7}{\delta^2}$	$\frac{5}{\delta^2}$
U-Profil	23,88	39,52	$\frac{4}{\delta^2}$	$\frac{6,97}{\delta^2}$
C-Profil	23,88	39,52	$\frac{0,406}{\delta^2}$	$\frac{1,25}{\delta^2}$

Wie schon erwähnt, verwendet PRECHTL an dieser Stelle einen numerischen Ansatz, indem er mit aufwendigen Finite-Elemente-Methode-Rechnungen die realen Beulwerte des Profils für unterschiedliche Breiten-Höhenverhältnisse δ ermittelt. Aufgrund dieses Vorgehens kann er in seiner Arbeit seiner eigenen Herleitungslogik im Grunde nicht folgen. Das tatsächliche Vorgehen

von PRECHTL wird im Nachgang zur geschlossen-analytischen Lösung kurz vorgestellt (siehe Kapitel 5.2.5).

5.2.3 Gewichtsoptimierte Auslegung

Wie beim Druckstab basiert die Herleitung für den Profil-Biegeträger trotz des Wechsels auf das numerische Vorgehen größtenteils auf den Ausführungen von PRECHTL. Die detaillierte Herleitung der Geometriezusammenhänge ist in Anhang C.2 dargelegt. Dort sind auch die Abweichungen zum Vorgehen von PRECHTL entsprechend gekennzeichnet. Als Ergebnis können folgende relativen Zusammenhänge für einen großen und kleinen Strukturkennwert ermittelt werden:

$$\left(\frac{t}{h}\right)_{\text{opt,g}} = c_{\left(\frac{t}{h}\right),\text{g}} \sqrt{(1-\nu^2) \frac{\sigma_{\text{zul}}}{E}}, \quad (5.2.4a)$$

$$\left(\frac{h}{l}\right)_{\text{opt,g}} = c_{\left(\frac{h}{l}\right),\text{g}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{KE^{\frac{1}{2}}}{\sigma_{\text{zul}}^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (5.2.4b)$$

$$\left(\frac{t}{h}\right)_{\text{opt,k}} = c_{\left(\frac{t}{h}\right),\text{k}} \left((1-\nu^2)^4 \frac{\left(\frac{f_{\text{zul}}}{l}\right)^3 K}{E} \right)^{\frac{1}{9}}, \quad (5.2.4c)$$

$$\left(\frac{h}{l}\right)_{\text{opt,k}} = c_{\left(\frac{h}{l}\right),\text{k}} \left(\frac{1}{1-\nu^2} \frac{K^2}{E^2 \left(\frac{f_{\text{zul}}}{l}\right)^3} \right)^{\frac{1}{9}} \quad (5.2.4d)$$

mit

$$c_{\left(\frac{t}{h}\right),\text{g}} = \sqrt{\frac{12}{\pi^2} \frac{1}{\kappa(\delta_{\text{opt}})}}, \quad (5.2.5a)$$

$$c_{\left(\frac{h}{l}\right),\text{g}} = \left(\frac{\pi}{\sqrt{12}} \frac{1}{c_{\sigma} c_{\text{W}}} \frac{\sqrt{\kappa(\delta_{\text{opt}})}}{f_{\text{W}}(\delta_{\text{opt}})} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (5.2.5b)$$

$$c_{\left(\frac{t}{h}\right),\text{k}} = \left(\left(\frac{12}{\pi^2} \right)^4 \frac{c_{\text{f}}^3 c_{\text{J}22}^3}{c_{\sigma}^4 c_{\text{W}}^4} \frac{f_{\text{J}22}(\delta_{\text{opt}})^3}{f_{\text{W}}(\delta_{\text{opt}})^4 \kappa(\delta_{\text{opt}})^4} \right)^{\frac{1}{9}}, \quad (5.2.5c)$$

$$c_{\left(\frac{h}{l}\right),\text{k}} = \left(\frac{\pi^2}{12} \frac{c_{\sigma} c_{\text{W}}}{c_{\text{f}}^3 c_{\text{J}22}^3} \frac{f_{\text{W}}(\delta_{\text{opt}}) \kappa(\delta_{\text{opt}})}{f_{\text{J}22}(\delta_{\text{opt}})^3} \right)^{\frac{1}{9}}. \quad (5.2.5d)$$

Berechnete Werte für die c -Faktoren der optimalen Profilgeometrien sind in Tabelle 5.11, für die optimalen Breiten-Höhenverhältnisse δ_{opt} und die dazugehörigen Profilbeulwerte $\kappa(\delta_{\text{opt}})$ in Tabelle 5.12 zu finden. Wie zu sehen, existieren bei manchen Profilformen für einen kleinen und großen Strukturkennwert unterschiedliche optimale Breiten-Höhenverhältnisse $\delta_{\text{opt},k,g}$.

Tab. 5.11: Die Faktoren $c_{(t/h),k}$, $c_{(h/l),k}$, $c_{(t/h),g}$, $c_{(h/l),g}$ sowie die kritischen Strukturkennwerte \tilde{K}_k und \tilde{K}_g für die kleinen und großen optimale Breiten-Höhenverhältnis $\delta_{\text{opt},k/g}$ der betrachteten Profilformen beim Biegeträger

Profilform	$c_{(t/h),k}$	$c_{(h/l),k}$	$c_{(t/h),g}$	$c_{(h/l),g}$	\tilde{K}_k	\tilde{K}_g
Vierkantprofil	0,546	0,750	0,226	1,814	0,00152 MPa	0,00152 MPa
Doppel-T-Profil	0,582	0,852	0,226	2,170	0,00085 MPa	0,00089 MPa
T-Profil	0,652	0,980	0,226	2,880	0,00031 MPa	0,00032 MPa
U-Profil	0,604	0,841	0,226	2,285	0,00061 MPa	0,00064 MPa
C-Profil	0,604	0,920	0,226	2,463	0,00061 MPa	0,00061 MPa

Tab. 5.12: Optimales Breiten-Höhenverhältnis δ_{opt} für große und kleine Strukturkennwerte und entsprechende Profilbeulwert κ der angegebenen Profilformen beim Biegeträger

Profilform	$\delta_{\text{opt},k}$	κ_k	$\delta_{\text{opt},g}$	κ_g
Vierkantprofil	0,409	23,88	0,409	23,88
Doppel-T-Profil	0,250	23,88	0,267	23,85
T-Profil	0,103	23,88	0,064	23,88
U-Profil	0,203	23,88	0,129	23,88
C-Profil	0,130	23,63	0,130	23,63

Die optimalen Profilgeometrien können in Gleichung 5.2.1 zur Ermittlung der Spannung im Biegeträger eingesetzt werden. Dadurch ergeben sich die maximalen Spannungen bei großem und kleinem Strukturkennwert. Diese lauten

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{zul}} \quad \text{für } K > \tilde{K}, \quad (5.2.6a)$$

$$\sigma_{\text{max}} = \left(\frac{\pi^2 c_f^6 c_{J22}^6}{12 c_\sigma^8 c_W^8} \frac{f_{J22}(\delta_{\text{opt}})^6}{f_W(\delta_{\text{opt}})^8} \kappa(\delta_{\text{opt}}) \frac{1}{1-\nu^2} E^7 K^2 \left(\frac{f_{\text{zul}}}{l} \right)^6 \right)^{\frac{1}{9}} \quad \text{für } K < \tilde{K}. \quad (5.2.6b)$$

Der kritische Strukturkennwert \tilde{K} und somit der Wechsel zwischen kleinem zu großem Strukturkennwert liegt dann vor, wenn die maximalen Spannungen aus Gleichungen 5.2.6 gleich

groß sind. Zur Bestimmung von \tilde{K} werden diese daher gleichgesetzt. Es ergibt sich folgender Zusammenhang

$$\tilde{K} = \frac{\sqrt{12} c_{\sigma}^4 c_W^4}{\pi c_f^3 c_{J22}^3} \frac{f_W(\delta_{\text{opt}})^4}{f_{J22}(\delta_{\text{opt}})^3 \kappa(\delta_{\text{opt}})^{\frac{1}{2}}} \sqrt{1-v^2} \left(\frac{\sigma_{\text{zul}}^9}{E^7 \left(\frac{f_{\text{zul}}}{l}\right)^6} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.2.7)$$

Zum Berechnen von Zahlenwerten (siehe Tabelle 5.11) für den kritischen Strukturkennwert \tilde{K} können nun entweder die Zusammenhänge bei einem kleinen Strukturkennwert oder bei einem großen Strukturkennwert eingesetzt werden, wodurch unterschiedliche kritische Strukturkennwerte existieren. In diesem Übergangsbereich wechselt das jeweilige Profil von den Profilverhältnissen bei einem kleinen Strukturkennwert zu den Zusammenhängen bei einem großen Strukturkennwert. Dieser Übergangsbereich wird im folgenden besprochen.

5.2.4 Übergangsbereich beim Wechsel vom kleinen zum großen Strukturkennwert

Bei einigen Profilformen existieren für kleine und große Strukturkennwerte unterschiedliche Breiten-Höhenverhältnisse δ_{opt} . Dies wird durch die numerische Berechnung des Profilbeulwertes k_P im nachfolgenden Kapitel 5.2.5 für alle Profilformen zutreffen. Durch die unterschiedlichen Breiten-Höhenverhältnisse $\delta_{\text{opt},k/g}$ muss an einer Stelle der Wechsel von einem Breiten-Höhenverhältnis zum anderen stattfinden. Da nun auch zwei kritische Strukturkennwerte \tilde{K}_k und \tilde{K}_g aufgrund der jeweiligen Breiten-Höhenverhältnisse existieren, ergibt sich zwischen diesen beiden kritischen Strukturkennwerten ein Übergangsbereich, in dem das Breiten-Höhenverhältnis von $\delta_{\text{opt},k}$ zu $\delta_{\text{opt},g}$ wechselt. Die Berechnung des Breiten-Höhenverhältnisses und der Profilgeometrien im Übergangsbereich orientiert sich an den Ausführungen von PRECHTL, wobei auch an dieser Stelle wenig ausgearbeitete Passagen entsprechend erweitert werden.

Die Methodik zur Ermittlung der Profilgeometrien im Übergangsbereich muss umgedreht werden, da das Breiten-Höhenverhältnisse δ_U im Übergangsbereich nun nicht mehr konstant sein kann. Die Bedingung ist, dass die beiden Zielfunktionen Z_k und Z_g (siehe Anhang C.2.3) im Übergangsbereich gleich sein müssen. Es gilt daher:

$$Z_k \stackrel{!}{=} Z_g. \quad (5.2.8)$$

Nun wird Gleichung 5.2.8 so umgestellt, dass auf einer Seite alle von δ_U abhängigen Werte stehen, sodass sich

$$k_P(\delta_U) \frac{f_{J22}(\delta_U)^6}{f_W(\delta_U)^8} = \frac{c_{\sigma}^8 c_W^8}{c_f^6 c_{J22}^6} \frac{\sigma_{\text{zul}}^9}{E^7 \left(\frac{f_{\text{zul}}}{l}\right)^6} \frac{1}{K_U^2} \quad (5.2.9)$$

ergibt. Mit dieser Funktion kann nun für jeden beliebigen Strukturkennwert K_U im Übergangsbereich ein δ_U gefunden werden, wodurch Gleichung 5.2.9 erfüllt ist. Das passende δ_U kann aufgrund der numerisch ermittelten Profilbeulwerte k_P nicht berechnet werden, sondern muss für jeden verwendeten Strukturkennwert K_U einzeln aus einem eigens aufgestellten Diagramm abgelesen werden. In Abbildung 5.8 ist dies exemplarisch für ein Doppel-T-Profil mit dem Strukturkennwert $K_U = 0,00088$ dargestellt. Der Wert $\delta = 0,263$ abgelesen auf der Abszisse beim Schnittpunkt zwischen der Funktion und der horizontalen Linie, welche die rechte Seite von Gleichung 5.2.9 darstellt, ist das gesuchte Breiten-Höhenverhältnis δ_{optU} .

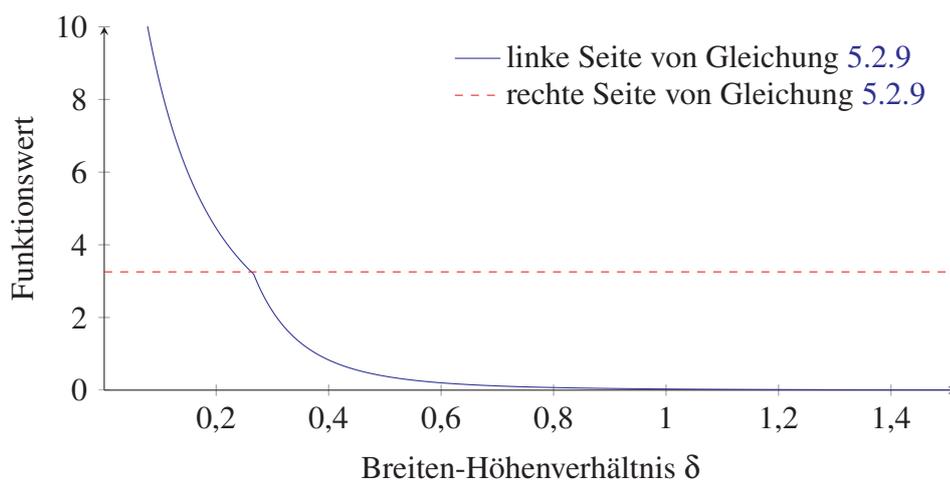


Abb. 5.8: Linke und rechte Seite von Gleichung 5.2.9 zur Ermittlung des optimalen Breiten-Höhenverhältnisses $\delta_{optU} = 0,263$ eines Doppel-T-Profiles bei einem Strukturkennwert $K_U = 0,00088$ MPa. Der Übergangsbereich liegt beim geschlossen-analytisch berechneten Doppel-T-Profil zwischen den Strukturkennwerten $\tilde{K}_k = 0,000873$ MPa und $\tilde{K}_g = 0,000890$ MPa.

Die relative Profilhöhe und die relative Profildicke für das ermittelte optimale Breiten-Höhenverhältnis δ_{optU} und den gegebenen Strukturkennwert K_U können nun mit den vorher aufgestellten Gleichungen 5.2.4 berechnet werden, wobei frei gewählt werden kann, ob die Gleichungen des kleinen oder großen Strukturkennwerts genommen werden, da die Ergebnisse identisch sind.

5.2.5 Numerischer Ansatz für den Biegeträger nach PRECHTL

Wie oben schon angesprochen, hat PRECHTL auch beim Biegeträger einen numerischen Ansatz verfolgt, um den exakten Profilbeulwert für das jeweilige Breiten-Höhenverhältnis der verschiedenen Querschnitte verwenden zu können. Insofern weichen die Werte in den Tabellen C.2 und C.3 von den von PRECHTL ermittelten und genannten Werten ab. Der Vollständigkeit halber werden im Folgenden der Ansatz nach PRECHTL kurz zusammengefasst und die von PRECHTL hergeleiteten Profilgeometrien vorgestellt.

Das im vorherigen Kapitel 5.2.3 und im Anhang C.2.2 vorgestellte Vorgehen zum Ermitteln der optimierten Breiten-Höhenverhältnisse und Profilgeometrien ist mit dem numerischen Ansatz nach PRECHTL identisch. Die aufgestellten Gleichungen sind daher vollständig identisch.

Aufgrund des numerischen Vorgehens von PRECHTL kann er die in seiner Herleitungslogik geforderten Ableitungen, welche ein $k_P(\delta)$ beziehungsweise ein $\kappa(\delta)$ enthalten (beispielsweise $d\Psi/d\delta = 0$), allerdings nicht durchführen. Aus den numerisch ermittelten Profilbeulwerte eine ableitungsfähige Funktion zu bilden, stellt sich als äußerst schwierig dar und PRECHTL deutet auch an keiner Stelle an, dass dieser Weg gewählt wurde. Daher wird davon ausgegangen, dass die Profilbeulwerte mit genügend Stützstellen ermittelt wurden, sodass die (reduzierten) Geometriefunktionen ($\tilde{\phi}(\delta, k)$, $\Psi(\delta)$ sowie $\Phi(\delta)$) entsprechend mit den numerisch ermittelten Profilbeulwerten gebildet werden konnten. Die Maximalwerte wurden anschließend einfach abgelesen, um die optimalen Breiten-Höhenverhältnisse und die Maximalwerte der (reduzierten) Gewichtsfunktionen ermitteln zu können.

Für den numerischen Ansatz werden wie beim Druckstab zunächst die exakten Profilbeulwerte der besprochenen Querschnittsformen benötigt. Diese sind in Abbildung 5.9 dargestellt.

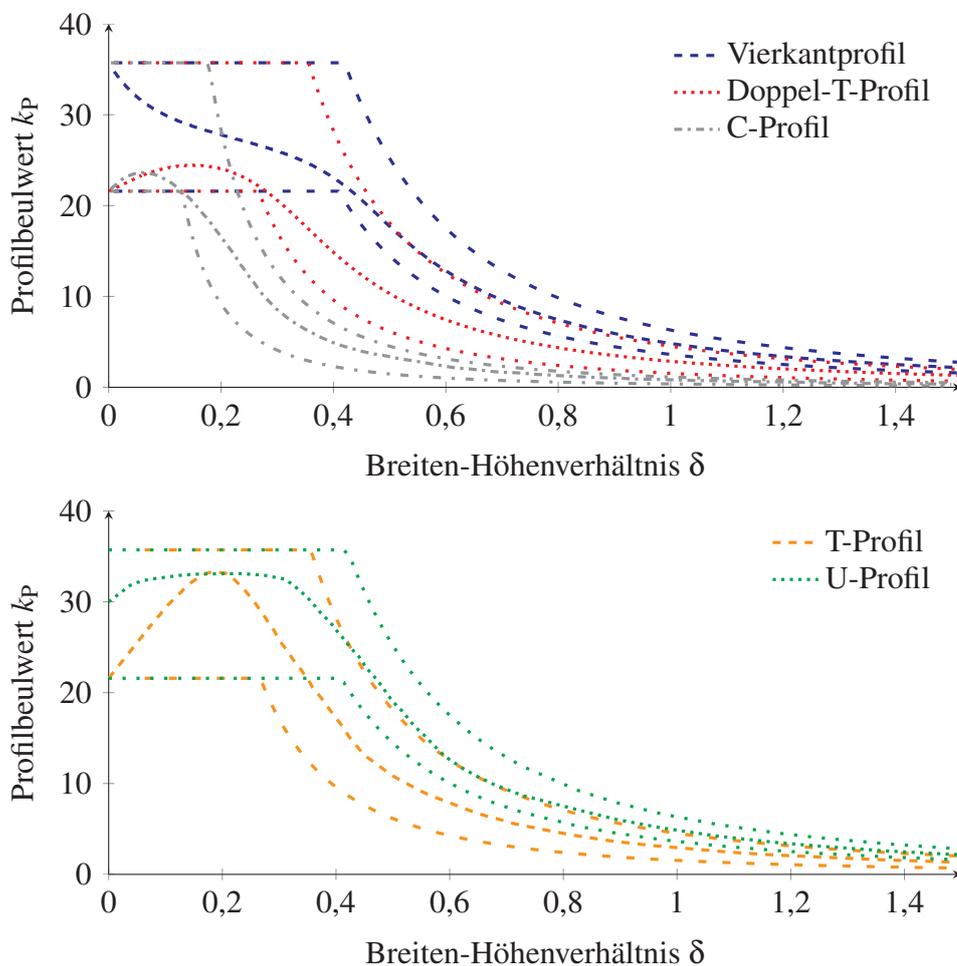


Abb. 5.9: Numerisch berechnete Profilbeulwertfunktionen k_P für den Biegelastfall für die besprochenen Querschnittsformen. Die unteren und oberen Grenzprofilbeulwertfunktionen $k_{P,Grenz}$ sind in der gleichen Linienfarbe und in einer aufgeweiteten Ausführung dargestellt. Die Darstellung orientiert sich an der Ausarbeitung von PRECHTL [2].

Mithilfe der Profilbeulwerte können nun Graphen für die Funktionen aus den Gleichungen C.2.4c, C.2.6 und C.2.8 gebildet werden. Folgend wird dies exemplarisch für den Doppel-T-Träger durchgeführt. In Abbildung 5.10 sind die Graphen der oben genannten Gleichungen aufgetragen. Als k_P beziehungsweise $\kappa(\delta)$ wurden numerisch ermittelte Werte verwendet. Für den Doppel-T-Träger kann so nun ein optimales Breiten-Höhenverhältnis $\delta_{\text{opt}_B}^{\text{num}} = 0,196$ mit einem Maximalwert $\tilde{\phi}_{\text{max}}^{\text{num}}(\delta_{\text{opt}_B}) = 3,05$ für die Restriktion des Beulens ermittelt werden. Für die anderen Werte und die weiteren Profilformen kann analog vorgegangen werden. Alle numerisch ermittelten Werte sind in Tabelle 5.13 zu finden.

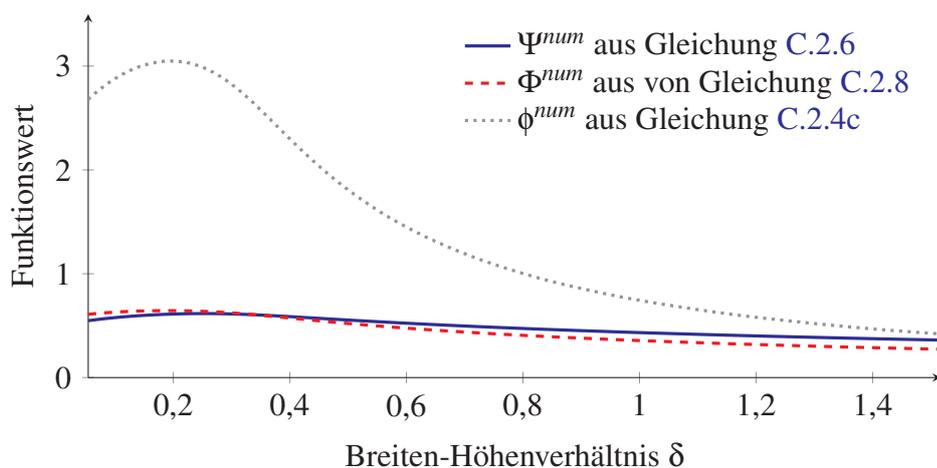


Abb. 5.10: Graphen für die Funktionen aus den Gleichungen C.2.4c, C.2.6 und C.2.8. Die optimalen Breiten-Höhenverhältnisse können an den Maxima der Graphen abgelesen werden.

Tab. 5.13: Numerisch berechnete optimierte Breiten-Höhenverhältnisse für die Restriktion des Beulens und entsprechendes Maximum der reduzierten Gewichtsfunktionen aus Gleichung C.2.4 sowie für kleinen und großen Strukturkennwert und entsprechender Profilbeulwert κ sowie Maxima der Gewichtsfunktionen aus Gleichungen C.2.6 und C.2.8 der angegebenen Profilformen beim Biegeträger nach PRECHTL [2]

Profilform	$\delta_{\text{opt}_B}^{\text{num}}$	κ_B^{num}	$\tilde{\phi}_{\text{max}}^{\text{num}}(\delta_{\text{opt}_B})$	$\delta_{\text{opt}_k}^{\text{num}}$	κ_k^{num}	$\Phi_{\text{max}}^{\text{num}}$	$\delta_{\text{opt}_g}^{\text{num}}$	κ_g^{num}	$\Psi_{\text{max}}^{\text{num}}$
Vierkantprofil	0,14	38,3	2,55	0,26	29,6	0,48	0,35	29,6	0,48
Doppel-T-Profil	0,20	26,7	3,05	0,26	26,8	0,65	0,19	25,0	0,60
T-Profil	0,18	36,8	3,10	0,18	36,8	0,63	0,15	35,7	0,53
U-Profil	0,17	36,6	2,50	0,24	36,6	0,47	0,16	36,5	0,43
C-Profil	0,09	25,6	2,8	0,15	22,7	0,62	0,15	22,7	0,58

Auf Basis der numerisch optimierten Breiten-Höhenverhältnisse und den numerisch ermittelten Profilbeulwerten können die c -Faktoren aus Gleichung 5.2.5 und neue kritische Strukturkennwerte aus Gleichung 5.2.7 berechnet werden, welche in Tabelle 5.14 aufgelistet sind. Mithilfe dieser

verbesserten c -Faktoren können nun verbesserte relative Profilhöhen und relative Profildicken aus Gleichung 5.2.4 ermittelt werden.

Tab. 5.14: Numerisch berechnete Faktoren $c_{(t/h),k}^{\text{num}}$, $c_{(h/l),k}^{\text{num}}$, $c_{(t/h),g}^{\text{num}}$, $c_{(h/l),g}^{\text{num}}$ sowie die kritischen Strukturkennwerte \tilde{K}_k^{num} und \tilde{K}_g^{num} für die kleinen und großen optimale Breiten-Höhenverhältnis $\delta_{\text{opt},k/g}^{\text{num}}$ der betrachteten Profilformen beim Biegeträger

Profilform	$c_{(t/h),k}^{\text{num}}$	$c_{(h/l),k}^{\text{num}}$	$c_{(t/h),g}^{\text{num}}$	$c_{(h/l),g}^{\text{num}}$	\tilde{K}_k^{num}	\tilde{K}_g^{num}
Vierkantprofil	0,51	0,81	0,21	1,90	0,00109 MPa	0,00132 MPa
Doppel-T-Profil	0,55	0,86	0,22	2,33	0,00083 MPa	0,00071 MPa
T-Profil	0,54	0,99	0,18	2,08	0,00023 MPa	0,00024 MPa
U-Profil	0,50	0,87	0,18	2,44	0,00049 MPa	0,00051 MPa
C-Profil	0,61	0,90	0,23	0,58	0,00067 MPa	0,00067 MPa

5.3 Gewichtsoptimierte Auslegung für Profil-Torsionsstäbe

In diesem Abschnitt wird die gewichtsoptimierte Auslegung für Profil-Torsionsstäbe vorgestellt. PRECHTL [2] hat diesen Lastfall in seiner Arbeit nicht untersucht. Das Vorgehen orientiert sich sehr eng an der Methodik für die Auslegung des Profil-Biegeträgers, die im Kapitel 5.2 dargestellt ist.

Für die Auslegungsaufgabe wird ein in Abbildung 5.11 gezeigtes Profil mit dem Moment T auf Torsion belastet. Der Querschnitt weist die Höhe h und die Breite b sowie die im Querschnitt konstante Profildicke t auf. Die Länge l ist gegeben. Voraussetzung ist, dass die klassischen Hypothesen für schlanke Stäbe und das lineare Elastizitätsgesetz gelten. Dies bedeutet, dass $h, b \ll l$ und $t \ll h, b$ sind. Der Strukturkennwert ist für diese Aufgabe mit $K = T/l^3$ definiert. Zusätzlich gelten die Anforderungen für die St.-Venantsche Torsion (siehe Kapitel 3.3), also die Formhaltung des Profils abgesehen von der Verwölbung, die Annahme einer konstanten Schubspannung über die Profildicke und eine Nichtbehinderung der Verwölbung.

Auch in diesem Abschnitt ist weiterhin das Ziel, eine minimale Masse m zu erhalten. Die Zielgröße ist wie beim Profil-Biegeträger die dimensionslose Zielfunktion Z , die eine Volumendichte darstellt. Die Restriktionen sind weiterhin die gegebene Länge l und die funktionalen Restriktionen für das Festigkeits- und Stabilitätsversagen. Für die Steifigkeit ist die Verdrehung ϑ entscheidend, die kleiner als die erlaubte Verdrehung ϑ_{zul} sein muss. Ein allgemeiner Wert für ϑ_{zul} konnte auch mit sorgfältigster Recherche nicht ermittelt werden. Es erscheint logisch, dass das Vorgehen analog zur erlaubten Verformung bei einer Biegebelastung ist und der Wert somit je nach Einzelfall gewählt werden kann. Um das Stabilitätsverhalten in einem ähnlichen

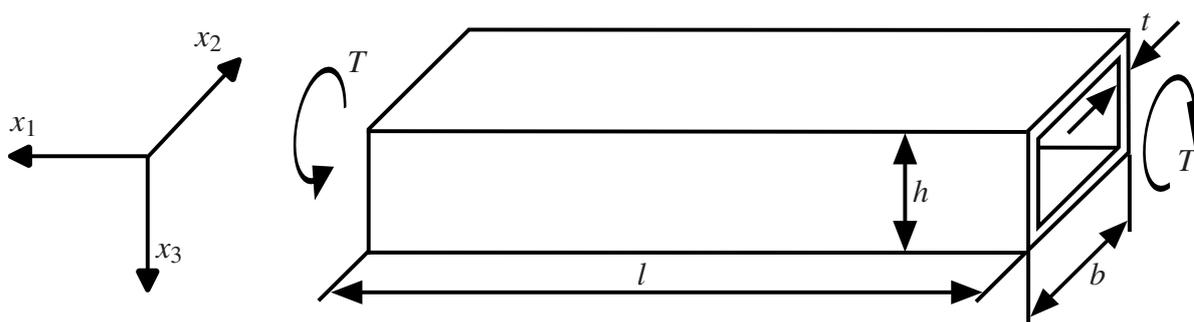


Abb. 5.11: Homogen und als Vierkantprofil ausgeführter Profil-Torsionsstab, der mit einem Moment T belastet wird.

Strukturkennwertbereich wie bei der Druck- und Biegebelastung zu halten, wird mit $\vartheta_{\text{zul}} = 1^\circ/\text{m}$ gerechnet.

Freie Variablen sind wie bei den anderen beiden Lastfällen die relative Profilhöhe h/l , die relative Profildicke t/h und das Breiten-Höhenverhältnis $\delta = b/h$. Eine Zusammenfassung der Problemstellung ist in Abbildung 5.12 gegeben.

Funktion:	Profiltragwerk unter Torsionsbelastung ($h, b \ll l$ und $t \ll h, b$)	
Strukturkennwert:	$K = \frac{T}{l^3}$	
Zielgröße:	Masse $m \rightarrow \text{Min}$; bzw. Volumendichte $\frac{V}{l^3} \rightarrow \text{Min}$	
Restriktionen:	geometrisch:	Länge l
	funktional:	Festigkeit: Fließgrenze $ \tau \leq \tau_{\text{zul}}$
	Stabilität:	Verdrehung $\vartheta \leq \vartheta_{\text{zul}}$ Beulen $ \tau \leq \tau_{\text{krit}}$
freie Variablen:	relative Profilhöhe $\frac{h}{l}$	
	relative Profildicke $\frac{t}{h}$	
	Breiten-Höhenverhältnis $\delta = \frac{b}{h}$	

Abb. 5.12: Zusammenfassung der Auslegungsaufgabe für den Profil-Torsionsstab angelehnt an PRECHTL [2].

Neben dem in Abbildung 5.11 gezeigten Vierkantprofil, wird auch die gewichtsoptimierte Auslegung für Doppelt-T-, T- und U-Profile hergeleitet. Weder PRECHTL noch WIEDEMANN [29] haben sich mit der Torsion in Kombination mit dem Strukturkennwert befasst. REES [28] hat auch für die Torsion teilweise eine gewichtsoptimierte Auslegung für offene und geschlossene Profilformen vorgenommen. Aber auch wie beim Profil-Biegeträger hat REES keine allgemein gültige Formulierung mit umfassenden Restriktionen hergeleitet, was nachfolgend durchgeführt wird.

Wie bei den beiden vorangegangenen Abschnitten wird zunächst die geschlossen-analytische Lösung und anschließend die numerisch berechnete Verbesserung vorgestellt. Die Methodik der Herleitung entspricht derselben wie beim Profil-Biegeträger. Bei der Torsion muss allerdings zwischen geschlossenen (Vierkantprofil) und offenen Profilformen (die anderen betrachteten Querschnitte) unterschieden werden. Beim Druckstab und Biegeträger unterscheidet sich die allgemeine Form des Flächenträgheits- und Widerstandsmoments nur in den Profilwertfaktoren und -funktionen. Das äquivalente Torsionsflächen- und Torsionswiderstandsmoment beim Torsionsstab unterscheiden sich hingegen aber zusätzlich noch im Zusammenspiel von Höhe h und Profildicke t . Daher muss die Aufstellung der Ziel- und Gewichtsfunktionen und die Optimierung des Breiten-Höhenverhältnisses δ separat für geschlossene und offene Profile durchgeführt werden. Da die Drillsteifigkeit bei offenen Profilen um Größenordnungen kleiner als bei geschlossenen Profilen ist, führt nur die Betrachtung von geschlossenen Profilen zu technisch sinnvollen Lösungen. Daher wird nach der Vorstellung der Grundzusammenhänge die restliche Herleitung für offene Profilformen in Anhang C.3.4 dargelegt. Zusammenhänge beim offenen Profil, die sich von den geschlossenen Profilen unterscheiden sind mit einem * gekennzeichnet.

5.3.1 Profilwerte

Beim Torsionsstab werden die gleichen Profile wie beim Druckstab untersucht, welche in Abbildung 5.3 dargestellt sind. Für diese Profile müssen die Querschnittsfläche A , das Torsionsflächenmoment J_T und das Torsionswiderstandsmoment W_T hergeleitet werden. Die allgemeine Form zur Berechnung der Fläche ist unverändert zum Druckstab und zum Biegeträger, wird aber aus Gründen der Vollständigkeit an dieser Stelle noch einmal wiederholt. Sie lautet

$$A = c_A t h f_A(\delta).$$

Die allgemeine Form für das Torsionsflächenmoment und der Torsionswiderstandsmoment unterscheiden sich grundsätzlich, ob das Profil offen oder geschlossen ist. Für die geschlossene Form lauten sie:

$$\begin{aligned} J_T &= c_{J_T} t h^3 f_{J_T}(\delta), \\ W_T &= c_{W_T} t h^2 f_{W_T}(\delta). \end{aligned}$$

Für die offene Form lauten sie hingegen:

$$\begin{aligned} J_T^* &= c_{J_T} t^3 h f_{J_T}(\delta), \\ W_T^* &= c_{W_T} t^2 h f_{W_T}(\delta). \end{aligned}$$

In Tabelle 5.15 sind für die jeweiligen Profile des Torsionsstabs die Werte für die Profilwertfaktoren c_A , c_{J_T} und c_{W_T} und die dazu gehörenden Profilwertfunktionen $f_A(\delta)$, $f_{J_T}(\delta)$ und $f_{W_T}(\delta)$ angegeben. Bei den angegebenen Profilen ist lediglich das Vierkantprofil ein geschlossenes Profil. Alle anderen genannten Profile haben offene Profilformen.

Tab. 5.15: Profilwertfaktoren und Profilwertfunktionen für Querschnittsfläche, Torsionsflächenmoment und Torsionswiderstandsmoment der angegebenen Profilformen beim Torsionsstab

Profilform	c_A	c_{J_T}	c_{W_T}	$f_A(\delta)$	$f_{J_T}(\delta)$	$f_{W_T}(\delta)$
Vierkantprofil	2	2	2	$1 + \delta$	$\frac{\delta^2}{1+\delta}$	δ
Doppel-T-Profil	1	$\frac{1,3}{3}$	$\frac{1,3}{3}$	$1 + 2\delta$	$1 + 2\delta$	$1 + 2\delta$
T-Profil	1	$\frac{1,12}{3}$	$\frac{1,12}{3}$	$1 + \delta$	$1 + \delta$	$2 + \delta$
U-Profil	2	$\frac{1,12}{6}$	$\frac{1,12}{6}$	$1 + \frac{\delta}{2}$	$1 + \frac{\delta}{2}$	$1 + \frac{\delta}{2}$

5.3.2 Zielfunktion und Restriktionen

Unabhängig von der Profilform ist das Ziel dieser Auslegungsaufgabe weiterhin die Minimierung der Masse. Die Zielfunktion ist daher die Masse des Torsionsstabs. Die Zielfunktion Z wird wie beim Biegeträger in eine dimensionslose Darstellung gebracht und muss minimiert werden. Sie lautet:

$$Z \equiv \frac{m}{\gamma l^3} = \frac{\gamma A l}{\gamma l^3} = \frac{A}{l^2} \rightarrow \text{Min.}$$

Die minimal mögliche Masse des Torsionsstabs wird durch die Schubspannung bestimmt, welche je nach Belastung durch Restriktionen in Festigkeit und Stabilität eine maximale Grenze aufweist. Die Schubspannung im Torsionsstab für ein geschlossenes Profil lautet

$$\tau = \frac{1}{c_\tau} \frac{T}{W_T} = \frac{1}{c_\tau} \frac{1}{c_{W_T} f_{W_T}(\delta)} \left(\frac{l}{h}\right)^3 \frac{h}{t} K, \quad (5.3.3)$$

beziehungsweise für ein offenes Profil:

$$\tau^* = \frac{1}{c_\tau} \frac{T}{W_T} = \frac{1}{c_\tau} \frac{1}{c_{W_T} f_{W_T}(\delta)} \left(\frac{l}{h}\right)^3 \left(\frac{h}{t}\right)^2 K. \quad (5.3.4)$$

Die Restriktion beim Versagen nach Festigkeit wird durch die maximal zulässige Spannung im Bauteil definiert. Diese lautet

$$\tau \leq \tau_{\text{zul}}. \quad (5.3.5)$$

Beim Stabilitätsversagen existieren zwei Begrenzungen, welche entweder durch die maximal erlaubte Verdrehung bei einem geschlossenen Profil

$$\vartheta = \frac{1}{c_\vartheta} \frac{Tl}{GJ_T} = \frac{1}{c_\vartheta c_{J_T} f_{J_T}(\delta)} \left(\frac{l}{h}\right)^4 \frac{hK}{tG} \leq \vartheta_{\text{zul}} \quad (5.3.6)$$

beziehungsweise bei einem offenen Profil

$$\vartheta^* = \frac{1}{c_\vartheta} \frac{Tl}{GJ_T} = \frac{1}{c_\vartheta c_{J_T} f_{J_T}(\delta)} \left(\frac{l}{h}\right)^4 \left(\frac{h}{t}\right)^3 \frac{K}{G} \leq \vartheta_{\text{zul}} \quad (5.3.7)$$

oder durch Beulen mit

$$\tau \leq \tau_{\text{kritBS}} = k_\tau(\delta) E \left(\frac{t}{h}\right)^2 \quad (5.3.8)$$

ausgedrückt wird. Die Faktoren c_τ und c_ϑ in den Gleichungen 5.3.3 beziehungsweise 5.3.4 und 5.3.6 beziehungsweise 5.3.7 stellen unterschiedliche Lastfälle und Randbedingungen dar. Wie bei den anderen beiden Lastfällen ist die Berechnung auf die Einspannungsbedingungen beim Wittrick-Williams-Algorithmus angewiesen, weswegen nur ein Wertepaar verwendet werden kann und sich $c_\tau = 1$ und $c_\vartheta = 1$ ergeben

Wie bei den anderen beiden Lastfällen findet durch die Profilbeulwertfunktion $k_\tau(\delta)$ in Gleichung 5.3.8 die Abgrenzung zwischen der geschlossen-analytischen und der numerischen Lösung statt. Für eine geschlossen-analytische Lösung muss auch hier mit den Grenzbeulwerten $k_{\tau,\text{Grenz}}$ für die Stege und Flansche unter Schub gerechnet werden (Vergleich Kapitel 3.3.3). In Tabelle 5.16 sind die jeweiligen Grenzbeulwerte für die verschiedenen Querschnitte angegeben. Der tatsächliche Beulwert liegt auch hier zwischen diesen Grenzen, was aber nur numerisch oder experimentell ermittelt werden kann.

Tab. 5.16: Untere und obere Grenze der Beulwerte κ_{Grenz} bei einer Torsionsbelastung und somit eine Schubbelastung in den Profilflächen für die betrachteten Querschnitte

Profilform	$\kappa_{\tau S_u}$	$\kappa_{\tau S_o}$	$\kappa_{\tau F_u}$	$\kappa_{\tau F_o}$
Vierkant-Profil	5,3	9	$\frac{5,3}{\delta^2}$	$\frac{9}{\delta^2}$
Doppel-T-Profil	5,3	9	$\frac{2,64}{\delta^2}$	$\frac{6,36}{\delta^2}$
T-Profil	0,66	1,59	$\frac{2,64}{\delta^2}$	$\frac{6,36}{\delta^2}$
U-Profil	0,66	1,59	$\frac{5,3}{\delta^2}$	$\frac{9}{\delta^2}$

Für die geschlossen-analytische Lösung werden daher die jeweils unteren Grenzbeulwerte des Stegs und Flanschs verwendet. Aus diesem Grund müssen auch beim Torsionsstab im Folgenden die jeweiligen Bereiche (der Steg beult zuerst oder der Flansch beult zuerst) immer separat geprüft werden.

5.3.3 Gewichtsoptimierte Auslegung für den Torsionsstab für geschlossene Profilformen

Bei der Herleitung für den Profil-Torsionsstab existieren praktisch keine Unterschiede zur Herleitung des Profil-Biegeträgers. Um auch an dieser Stelle den Fokus auf die wesentlichen Punkte dieser Arbeit zu belassen, ist die detaillierte Herleitung der Geometriezusammenhänge in Anhang C.3 dargelegt. Dort sind auch die Unterschiede zwischen offenen und geschlossenen Profilformen entsprechend dargestellt. Als Ergebnis für eine geschlossene Profilform können folgende relativen Zusammenhänge für einen großen und kleinen Strukturkennwert ermittelt werden:

$$\left(\frac{t}{h}\right)_{\text{opt,g}} = c_{\left(\frac{t}{h}\right),\text{g}} \sqrt{(1-\nu^2) \frac{\tau_{\text{zul}}}{E}}, \quad (5.3.9a)$$

$$\left(\frac{h}{l}\right)_{\text{opt,g}} = c_{\left(\frac{h}{l}\right),\text{g}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{KE^{\frac{1}{2}}}{\tau_{\text{zul}}^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (5.3.9b)$$

$$\left(\frac{t}{h}\right)_{\text{opt,k}} = c_{\left(\frac{t}{h}\right),\text{k}} \left(\frac{(1-\nu^2)^4 \vartheta_{\text{zul}}^3 K}{(1+\nu)^3 E} \right)^{\frac{1}{9}}, \quad (5.3.9c)$$

$$\left(\frac{h}{l}\right)_{\text{opt,k}} = c_{\left(\frac{h}{l}\right),\text{k}} \left(\frac{(1+\nu)^3 K^2}{1-\nu^2 E^2 \vartheta_{\text{zul}}^3} \right)^{\frac{1}{9}}. \quad (5.3.9d)$$

mit

$$c_{\left(\frac{t}{h}\right),\text{g}} = \sqrt{\frac{12}{\pi^2} \frac{1}{\kappa_{\tau}(\delta_{\text{opt}})}}, \quad (5.3.10a)$$

$$c_{\left(\frac{h}{l}\right),\text{g}} = \left(\frac{\pi}{\sqrt{12}} \frac{1}{c_{\tau} c_{W_T}} \frac{\kappa_{\tau}(\delta_{\text{opt}})^{\frac{1}{2}}}{f_{W_T}(\delta_{\text{opt}})} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (5.3.10b)$$

$$c_{\left(\frac{t}{h}\right),\text{k}} = \left(2 \left(\frac{6}{\pi^2} \right)^4 \frac{c_{\vartheta}^3 c_{J_T}^3}{c_{\tau}^4 c_{W_T}^4} \frac{f_{J_T}(\delta_{\text{opt}})^3}{f_{W_T}(\delta_{\text{opt}})^4 \kappa_{\tau}(\delta_{\text{opt}})^4} \right)^{\frac{1}{9}}, \quad (5.3.10c)$$

$$c_{\left(\frac{h}{l}\right),\text{k}} = \left(\frac{2\pi^2}{3} \frac{c_{\tau} c_{W_T}}{c_{\vartheta}^3 c_{J_T}^3} \frac{f_{W_T}(\delta_{\text{opt}}) \kappa_{\tau}(\delta_{\text{opt}})}{f_{J_T}(\delta_{\text{opt}})^3} \right)^{\frac{1}{9}}. \quad (5.3.10d)$$

Berechnete Werte für das Vierkantprofil für die c -Faktoren der optimalen Profilgeometrien sind in Tabelle 5.17, für die optimalen Breiten-Höhenverhältnisse δ_{opt} und die dazugehörigen Profilbeulwerte $\kappa(\delta_{\text{opt}})$ in Tabelle 5.18 zu finden. Für die offenen Profilformen befinden sich die gewichtsoptimalen relativen Zusammenhänge in Anhang C.3.4.

Tab. 5.17: Die Faktoren $c_{(t/h),k}$, $c_{(h/l),k}$, $c_{(t/h),g}$, $c_{(h/l),g}$ und der kritische Strukturkennwert \tilde{K} für das optimale Breiten-Höhenverhältnis δ_{opt} der geschlossenen Profilform des Vierkantprofils beim Torsionsstab

Profilform	$c_{(t/h),k}$	$c_{(h/l),k}$	$c_{(t/h),g}$	$c_{(h/l),g}$	\tilde{K}
Vierkantprofil	0,303	1,603	0,479	1,01	0,0423 MPa

Tab. 5.18: Optimales Breiten-Höhenverhältnis für große und kleine Strukturkennwerte und entsprechende Maxima der Gewichtsfunktionen aus den Gleichungen C.3.9 und C.3.11 der geschlossenen Profilform des Vierkantprofils beim Torsionsstab

Profilform	δ_{opt_k}	$\kappa_{\tau,k}$	$\Phi_{T,\text{max}}$	δ_{opt_g}	$\kappa_{\tau,g}$	$\Psi_{T,\text{max}}$
Vierkantprofil	1	5,3	0,321	1	5,3	0,507

Die optimalen Profilgeometrien können in Gleichung 5.3.3 zur Ermittlung der Spannung im Torsionsstab eingesetzt werden. Dadurch ergeben sich die maximalen Spannungen bei großem und kleinem Strukturkennwert. Diese lauten für das geschlossene Profil

$$\tau_{\text{max}} = \tau_{\text{zul}} \quad \text{für } K > \tilde{K}, \quad (5.3.11a)$$

$$\tau_{\text{max}} = \left(\frac{\pi^2}{16\sqrt{3}} \frac{c_{\vartheta}^6 c_{J_T}^6}{c_{\tau}^8 c_{W_T}^8} \frac{f_{J_T}(\delta_{\text{opt}})^6}{f_{W_T}(\delta_{\text{opt}})^8} \kappa_{\tau}(\delta_{\text{opt}}) \frac{(1-\nu)^6}{(1-\nu^2)^7} E^7 K^2 \vartheta_{\text{zul}}^6 \right)^{\frac{1}{9}} \quad \text{für } K < \tilde{K}. \quad (5.3.11b)$$

Der kritische Strukturkennwert \tilde{K} und somit der Wechsel zwischen kleinem zu großem Strukturkennwert liegt dann vor, wenn die maximalen Spannungen aus Gleichungen 5.3.11 gleich groß sind. Zur Bestimmung von \tilde{K} werden diese daher gleichgesetzt. Für geschlossene Profile ergibt sich folgender Zusammenhang, dessen Zahlenwert für ein Vierkantprofil in Tabelle 5.17 gegeben ist

$$\tilde{K} = \frac{3^{\frac{1}{4}} c_{\tau}^4 c_{W_T}^4}{\pi c_{\vartheta}^3 c_{J_T}^3} \frac{f_{W_T}(\delta_{\text{opt}})^4}{f_{J_T}(\delta_{\text{opt}})^3 \kappa_{\tau}(\delta_{\text{opt}})^{\frac{1}{2}}} \frac{(1-\nu^2)^{\frac{7}{2}}}{(1-\nu)^3} \left(\frac{\tau_{\text{zul}}^9}{E^7 \vartheta_{\text{zul}}^6} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

5.3.4 Numerischer Ansatz für das Vierkantprofil unter Torsionsbelastung

Aufgrund der symmetrischen Torsionsbelastung ist zu erwarten, dass die numerische Lösung beim Vierkantprofil nicht weit von der geschlossen-analytischen Lösung abweicht. Der Vollständigkeit halber wird sie im nachfolgenden aber trotzdem kurz vorgestellt. Durch den numerischen Ansatz weichen alle Werte aus den Tabellen 5.18 und C.5, welche in der Berechnung ein $k_{\tau}(\delta)$ oder ein $\kappa_{\tau}(\delta)$ enthalten, von den analytischen Berechnungen ab. Auch an dieser Stelle kann der numerische Ansatz nach PRECHTL befolgt werden. Die aufgestellten Gleichungen sind weiterhin identisch. In Abbildung 5.13 sind die exakten Profilbeulwerte des Vierkantprofils für unterschiedliche Breiten-Höhenverhältnisse δ dargestellt.

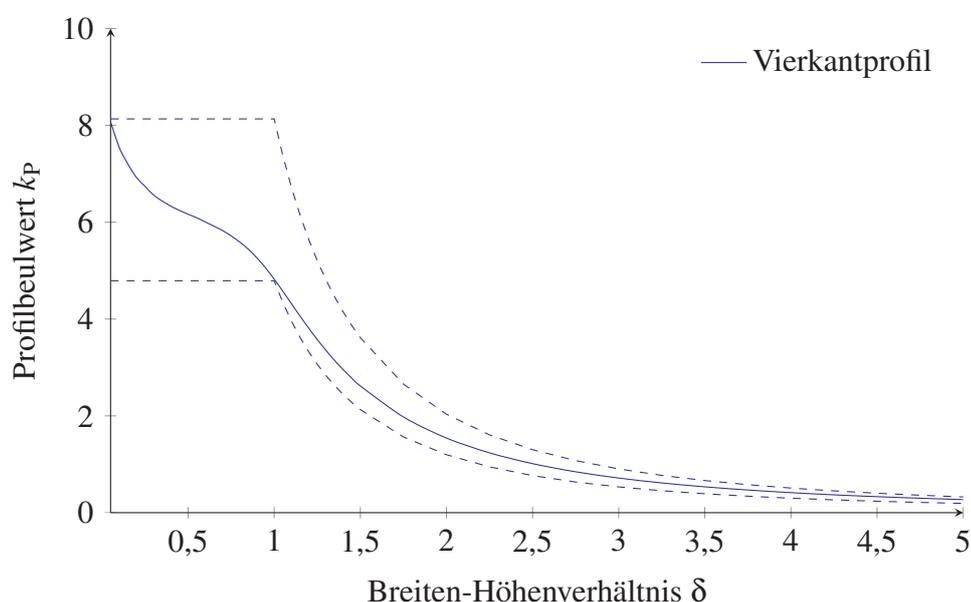


Abb. 5.13: Numerisch berechnete Profilbeulwertfunktionen k_p für den Torsionslastfall für das Vierkantprofil. Die unteren und oberen Grenzprofilbeulwertfunktionen $k_{p,Grenz}$ sind jeweils gestrichelt dargestellt. Die Darstellung orientiert sich an der Ausarbeitung von PRECHTL [2].

Das im vorherigen Kapitel 5.3.3 und in Anhang C.3.2 vorgestellte Vorgehen zum Ermitteln der optimierten Breiten-Höhenverhältnisse und Profilgeometrien ist auch für den Torsionsstab mit dem numerischen Ansatz nach PRECHTL identisch. Die aufgestellten Gleichungen sind daher vollständig gleich. Anstatt die geforderten Ableitungen durchzuführen, müssen hier ebenfalls die Maximalwerte aus den Graphen abgelesen werden. Alle numerisch ermittelten Werte sind in Tabelle 5.19 zu finden.

Auf Basis der numerisch optimierten Breiten-Höhenverhältnisse δ_{opt}^{num} und der numerisch ermittelten Profilbeulwerten können die c -Faktoren aus Gleichung 5.3.10 berechnet werden, welche in Tabelle 5.20 aufgelistet sind. Mithilfe dieser verbesserten c -Faktoren können nun verbesserte relative Profilhöhen und relative Profildicken aus Gleichung 5.3.9 berechnet werden. Zusätzlich

ändern sich der kritische Strukturkennwert \tilde{K} leicht. Der aktualisierte Wert ist ebenfalls in Tabelle 5.20 genannt.

Tab. 5.19: Numerisch berechnete optimierte Breiten-Höhenverhältnisse für die Restriktion des Beulens und entsprechendes Maximum der reduzierten Gewichtsfunktionen aus Gleichung C.3.7 sowie für kleinen und großen Strukturkennwert und entsprechende Maxima der Gewichtsfunktionen aus Gleichungen C.3.9 und C.3.11 für das Vierkantprofil unter Torsionsbelastung

Profilform	$\delta_{\text{optBS}}^{\text{num}}$	$\kappa_{\tau, \text{BS}}^{\text{num}}$	$\tilde{\Phi}_{\text{T,max}}^{\text{num}}(\delta_{\text{optBS}})$	$\delta_{\text{optk}}^{\text{num}}$	$\kappa_{\tau, \text{k}}^{\text{num}}$	$\Phi_{\text{T,max}}^{\text{num}}$	$\delta_{\text{optg}}^{\text{num}}$	$\kappa_{\tau, \text{g}}^{\text{num}}$	$\Psi_{\text{T,max}}^{\text{num}}$
Vierkantprofil	0,75	6,3	1,197	1	5,33	0,32	1	5,33	0,51

Tab. 5.20: Numerisch berechnete Faktoren $c_{(t/h), \text{k}}^{\text{num}}$, $c_{(h/l), \text{k}}^{\text{num}}$, $c_{(t/h), \text{g}}^{\text{num}}$, $c_{(h/l), \text{g}}^{\text{num}}$ und der kritische Strukturkennwert \tilde{K}^{num} für das optimale Breiten-Höhenverhältnis $\delta_{\text{opt}}^{\text{num}}$ der geschlossenen Profilform des Vierkantprofils beim Torsionsstab

Profilform	$c_{(t/h), \text{k}}^{\text{num}}$	$c_{(h/l), \text{k}}^{\text{num}}$	$c_{(t/h), \text{g}}^{\text{num}}$	$c_{(h/l), \text{g}}^{\text{num}}$	\tilde{K}^{num}
Vierkantprofil	0,302	1,603	0,478	1,015	0,1907 MPa

6 Optimierung von einzelbelasteten Profilstäben

Wie in Kapitel 5 dargestellt, basiert die Methode der gewichtsoptimierten Auslegung nach PRECHTL [2] auf einem geschlossen-analytischen Ansatz, bei dem zum Lösen der Gleichungen Vereinfachungen hingenommen werden müssen. Die Vereinfachungen müssen dabei beim Stabilitätsversagen und insbesondere beim lokalen Beulen vorgenommen werden. Aus diesem Grund ist die geschlossen-analytische gewichtsoptimierte Auslegung nicht vollständig gewichtsoptimal und wichtige Größen wie das optimale Breiten-Höhenverhältnis δ_{opt} oder der kritische Strukturkennwert \bar{K} können bei einer besseren Optimierung andere Größen annehmen. Die vorgestellte numerische Erweiterung von PRECHTL löst das Problem, indem die Vereinfachungen beim lokalen Beulen aufgelöst werden. PRECHTL liefert für den Druck- und Biegelastfall optimale Lösungen.

Als Erweiterung der gewichtsoptimierten Auslegung werden in dieser Arbeit kombinierte Lastfälle betrachtet. Eine Berechnung der einzelbelasteten Profile erlaubt, die Methodik des mit einem Evolutionären Algorithmus verknüpften Wittrick-Williams-Algorithmus zu validieren. Zunächst wird der Aufbau des Optimierungsalgorithmus für Profilstäbe in allgemeiner Form unabhängig vom Lastfall vorgestellt. Anschließend erfolgt die jeweilige Teilbeschreibung für die einzelnen Lastfälle. In den jeweiligen Unterkapiteln findet auch ein Ergebnisvergleich mit der analytischen gewichtsoptimierten Auslegung nach PRECHTL [2] und der Erweiterung aus dieser Arbeit statt. Die Betrachtung bei den einzelnen Lastfällen und bei den kombinierten Lastfällen wird ausschließlich für ein Vierkantprofil durchgeführt. Auch die polygonisierte Version stellt ein geschlossenes Profil dar und tendiert somit zu einem Vierkantprofil. PRECHTL hat für den Biegelastfall ermittelt, dass das Doppel-T-Profil leichter als ein Vierkantprofil ist. Dies trifft aber nur unter der Voraussetzung zu, dass das Doppel-T-Profil nicht seitlich auskippen darf. Der Wittrick-Williams-Algorithmus berücksichtigt allerdings das seitliche Auskippen als Instabilität, sodass bei einem Optimierungsalgorithmus auf Basis des Wittrick-Williams-Algorithmus das Vierkantprofil deutlich leichter ist. Zusätzlich verfügt das Doppel-T-Profil aufgrund der offenen Profilform über eine sehr geringe Torsionssteifigkeit. Kombinierte Lastfälle, die die Torsion beinhalten, würden daher zu sehr schweren Ergebnissen führen, um die mangelnde Torsionssteifigkeit zu kompensieren. Ein Vergleich ist dann so nicht mehr wirklich durchzuführen. Aus diesem Grund werden alle folgenden Rechnungen ausschließlich mit einem Vierkant- beziehungsweise einem geschlossenen Profil durchgeführt.

6.1 Aufbau des Optimierungsalgorithmus für Profilstäbe

Der Aufbau des Optimierungsalgorithmus hält sich eng an die Vorgaben, die in Kapitel 3.4 dargestellt werden. Ein Ablaufschema für den Programmablauf ist in Abbildung 6.1 gegeben. Als erstes beginnt jede Rechnung mit der Vorgabe des Strukturkennwerts, der Materialdaten und der Profildicke. Die Profildicke wird als Koordinaten der Plattenränder in der x_2 - x_3 -Ebene verarbeitet. Mit dem Algorithmus können beliebige aus unterschiedlich dicken Plattenstreifen aufgebaute offene oder geschlossene Profile verarbeitet werden, solange die Plattenstreifen die Bedingungen der Plattentheorie einhalten. Für den Vergleich mit der analytischen gewichtsoptimierten Auslegung verfügen allerdings alle Plattenstreifen über dieselbe Dicke t .

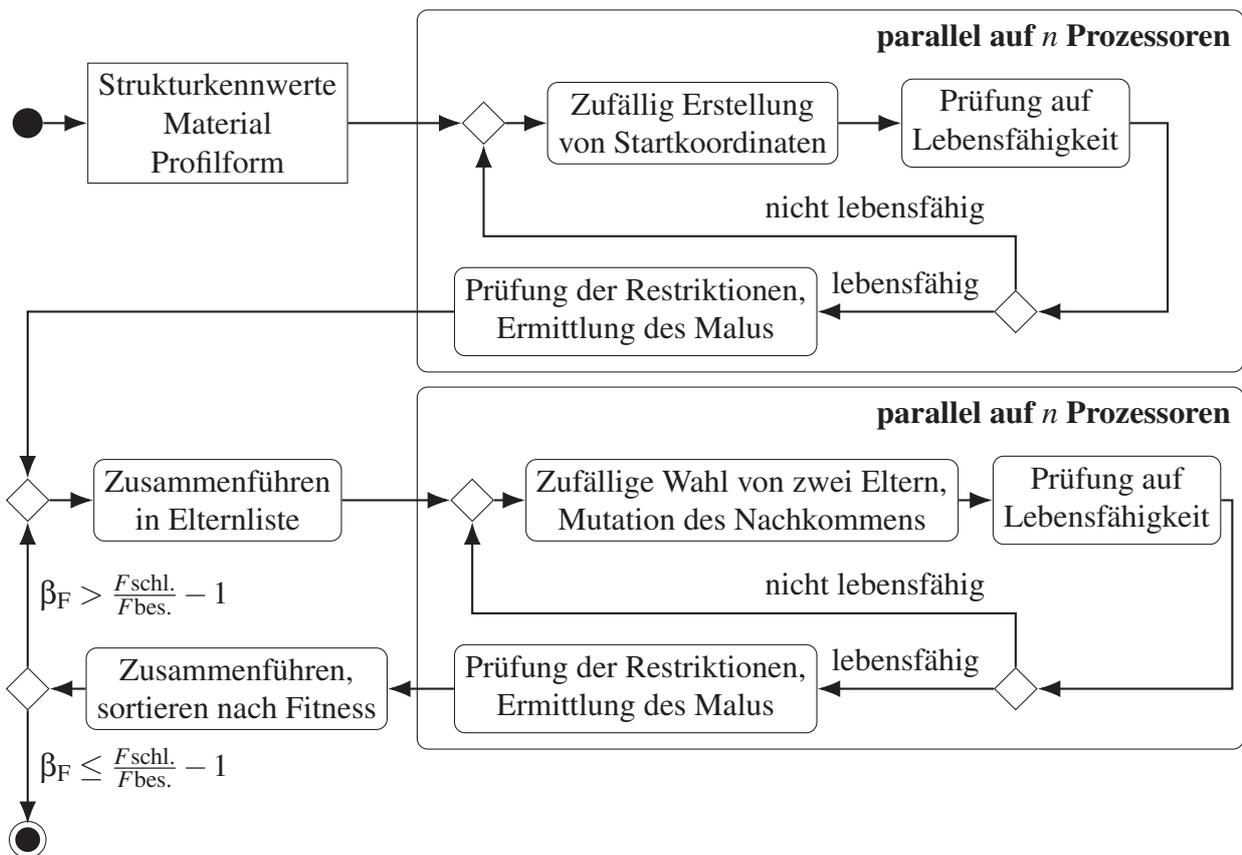


Abb. 6.1: Allgemeiner Ablauf des Evolutionären Algorithmus, um ein optimales Profil unter einem bestimmten Strukturkennwert zu finden.

Zum Beginn der Berechnung wird zunächst die Startgeneration erstellt. Der Algorithmus ist dabei so aufgebaut, dass «Multiprocessing» beherrscht wird und somit die Berechnung zur Erhöhung der Rechengeschwindigkeit auf mehreren Prozessoren parallel durchgeführt werden kann. Daher wird auf jedem verwendeten Prozessor per Zufall ein Individuum erstellt, welches aus seinen Koordinaten und der Profildicke besteht. Das erstellte Individuum wird dann auf die Einhaltung von Randbedingungen geprüft. Dies beinhaltet die Einhaltung von geometrischen

Randbedingungen und die Festigkeits- und Stabilitätsvorgaben. Bei Prüfung der Stabilitätsvorgabe kommt der Wittrick-Williams-Algorithmus zum Einsatz, mit dem die kritische Knick- und Beulspannung des Profils berechnet wird. Die kritischen Restriktionen vergleicht der Algorithmus mit den tatsächlich im Profil vorliegenden Werten, die durch die Profilform und den gegebenen Strukturkennwert berechnet werden können. Liegen die tatsächlichen Werte oberhalb der Restriktionen, erhält das Individuum einen Malus auf seinen Fitnesswert. In der Literatur wird dieses Vorgehen aus Effizienzgründen gegenüber dem Löschen und Neuerstellen eines Individuums präferiert [99].

Der Malus auf den Fitnesswert wird abhängig davon berechnet, wie weit die Restriktion überschritten wird. Dazu wird die relative Abweichung mit

$$\beta_i = \frac{\chi_{\text{tat}} - \chi_{\text{rest}}}{\chi_{\text{rest}}} \quad (6.1.1)$$

gebildet, wobei β für den Faktor der relativen Abweichung und χ_{tat} für den durch die Belastung hervorgerufenen Wert beziehungsweise χ_{rest} für den Wert der Restriktion stehen. So wird der Empfehlung gefolgt, dass geringe Abweichungen von der Restriktion weniger stark als große Abweichungen bestraft werden [99]. Zusätzlich wird, wie von SCHUTTE und GROENWOLD [63] empfohlen, mit fortschreitender Evolution der Malus dynamisch erhöht. Dies hat den Vorteil, dass zunächst das Suchfenster nicht zu stark eingeschränkt wird, mit fortlaufender Berechnung aber praktisch nur noch Individuen gute Fitnesswerte erreichen können, die keine Restriktionen reißen. Nach dem Prüfen aller Restriktionen wird der Fitnesswert des Individuums entsprechend angepasst und das Individuum wird der vorläufigen Start-Elterngeneration hinzugefügt.

Die oben beschriebene Berechnung wird auf jedem zugewiesenen Prozessor durchgeführt, bis jeder Prozessor eine vorher festgelegte Anzahl an Individuen erstellt hat. Beispielsweise reicht es aus, dass bei einer hohen Anzahl an zur Verfügung stehenden Prozessoren jeder Prozessor nur ein Individuum erstellt, um die Rechengeschwindigkeit maximieren zu können. Die vorläufige Start-Elterngeneration wird aufsteigend zur Masse der Profile sortiert. Wie in Kapitel 3.4 vorgeschlagen wird aus der Liste nur das obere Siebtel in die eigentliche Start-Elterngeneration übernommen. Dies ist Generation «0» und die eigentliche Evolution beginnt.

Die folgende Berechnung findet wiederum parallel auf allen verwendeten Prozessoren statt. Aus der Elterngeneration werden per Zufall zwei Individuen gewählt. Es ist nicht ausgeschlossen, dass beides mal dasselbe Individuum gewählt wird. Anschließend wird ein Nachkommen erzeugt, wobei jeder einzelne Parameter mit einer 50 %-igen Wahrscheinlichkeit von einem der beiden Elternteile gewählt wird. Falls zufällig alle Parameter von einem Elternteil genommen werden, wird der letzte Parameter vom bisher nicht berücksichtigten Elternteil gewählt, um einen minimalen Austausch zu gewährleisten. Beim Vierkantprofil sind die Parameter beispielsweise nur die Breite b , Höhe h und die Dicke t der Platten, sodass diese Ausnahme mit einer relativ hohen Wahrscheinlichkeit greift. Bei einem komplett polygonisierten Profil, welches aus einer hohen Anzahl an Plattenstreifen aufgebaut ist, sind die Parameter beispielsweise die Koordinaten

der Ränder der Plattenstreifen. Das so gebildete Individuum erfährt anschließend eine Mutation. Die Mutation erfolgt für die einzelnen Parameter nacheinander in einer zufällig gewählten Reihenfolge. Die Wahrscheinlichkeit der Mutation eines Parameter erfolgt, wie in Kapitel 3.4 vorgestellt, anhand eines Binärvektors, welcher mit folgender Formel gebildet wird:

$$P = 1 - \frac{1}{k}$$

Wobei P die Wahrscheinlichkeit und k die Anzahl an mutierbaren Parametern angibt. Die Mutation erfolgt, wie ebenfalls in Kapitel 3.4 dargestellt, mithilfe der Standardabweichung und einer dynamischen Varianz.

Nachdem die Mutation des neuen Individuums abgeschlossen ist, erfolgen die gleichen Prüfungen wie bei der Startgeneration. Zunächst wird auf allgemeine Lebensfähigkeit geprüft, womit die geometrischen Randbedingungen gemeint sind. Zu große oder zu kleine Profile werden ausgeschlossen, da der Wittrick-Williams-Algorithmus sonst Fehler produzieren kann. Bei einem vollständig polygonisierten Profil wird auch geprüft, ob die Polygone sich schneiden. Anschließend wird überprüft, inwieweit die strukturmechanischen Restriktionen eingehalten werden. Scheitert eine Prüfung, wird wie bei der Startgeneration dem Fitnesswert ein Malus angerechnet. Sind alle Prüfungen abgeschlossen, wird das Individuum mit seinem angepassten Fitnesswert in der Liste der nachfolgenden Generation gespeichert. Nachdem alle Prozessoren ihre Berechnungen abgeschlossen haben, wird auch die vorhergegangene Elterngeneration der Liste der neuen Individuen hinzugefügt, da ansonsten der Fall eintreten kann, dass alle neugebildeten Individuen einen schlechteren Fitnesswert als das beste Elternindividuum aufweisen. Die Evolution würde sich so vom Optimum wegbewegen.

Diese vollständige Liste wird nun wieder aufsteigend zur Masse der Profile sortiert und nach dem obersten Siebtel abgeschnitten. Wichtig ist hier zudem, dass doppelte Individuen nicht akzeptiert werden. Mit fortschreitender Evolution steigt die Wahrscheinlichkeit, dass nicht mutierte Individuen mit zwei identischen Eltern entstehen. Dies schreitet so weit voran, dass alle Individuen der Elterngeneration aus einem oder zwei identischen Individuen bestehen. Um diesen genetischen Verlust zu verhindern, werden bei dem Auswählen des besten Siebtels aus der Generationsliste mehrfache identische Individuen übergangen. Gewählt wird dabei immer das älteste der identischen Individuen.

Die neue Elterngeneration ist nun gefunden. Über einen Abgleich, wie viele in dieser Generation neugebildete Individuen in die neue Elterngeneration übernommen wurden, wird die Varianz der Standardabweichung eingestellt. Analog zur Vorstellung in Kapitel 3.4 wird bei dem Fall, dass weniger als $1/5$ der Individuen der neuen Elterngeneration in der aktuellen Generation gebildet wurden, die Standardabweichung um den Faktor $1/\alpha$ verkleinert. Falls mehr Individuen aus der aktuellen Generation übernommen wurden, wird die Standardabweichung um den Faktor α vergrößert.

Der Generationendurchlauf ist nun abgeschlossen. Nun wird geprüft, ob die Optimierung konvergiert ist, indem die Fitnesswerte des besten Individuums und des schlechtesten Individuums der Elterngeneration miteinander ins Verhältnis gesetzt werden. Liegt das Verhältnis unter einer bestimmten Genauigkeit β_F , ist die Evolution abgeschlossen und wird beendet. Der Wert wurde über eine Parameterstudie auf $\beta_F = 0,0075 \%$ festgesetzt.

Falls keine Konvergenz festgestellt wurde, beginnt der Prozess mit der neugebildeten Elterngeneration mit der Erstellung von Nachkommen auf jedem Prozessor von neuem. Bei Eintritt der Konvergenz ist die Berechnung abgeschlossen. Da der Evolutionäre Algorithmus das optimierte Profil nicht unter Garantie finden kann, wird die gesamte Berechnung erneut gestartet, bis drei optimale Profile gefunden wurden, deren Fitness sich nicht mehr als 0,1 % und deren Geometrieparameter sich nicht mehr als 0,25 % unterscheiden. Wobei mindestens zehn Profile erstellt werden.

6.2 Analyse des Leichtbaupotenzials von Profil-Druckstäben

Bei einer reinen Druckbelastung müssen die wenigsten Restriktionen geprüft werden. Der Ablauf der Prüfung ist in Abbildung 6.2 gegeben. Zunächst wird geprüft, ob die Spannung die zulässige Spannung σ_{zul} des Materials überschreitet. Anschließend erfolgt die Stabilitätsprüfung. Diese wird über den Wittrick-Williams-Algorithmus durchgeführt, der sowohl die globalen als auch die lokalen Moden prüft. Bei einer reinen Druckbelastung gibt der Wittrick-Williams-Algorithmus eine kritische Druckkraft aus, bei welcher Stabilitätsversagen einsetzt. Diese kritische Druckkraft wird in einen kritischen Strukturkennwert $K_{D,krit}$ umgerechnet. Anschließend kann überprüft werden, ob der tatsächliche Strukturkennwert über dem kritischen Strukturkennwert liegt. Falls Restriktionen überschritten werden, wird mit Gleichung 6.1.1 die relative Abweichung für den Malus berechnet. Am Ende werden alle relativen Abweichungen addiert und mit dem Fitnesswert multipliziert, um den angepassten Fitnesswert zu bilden.

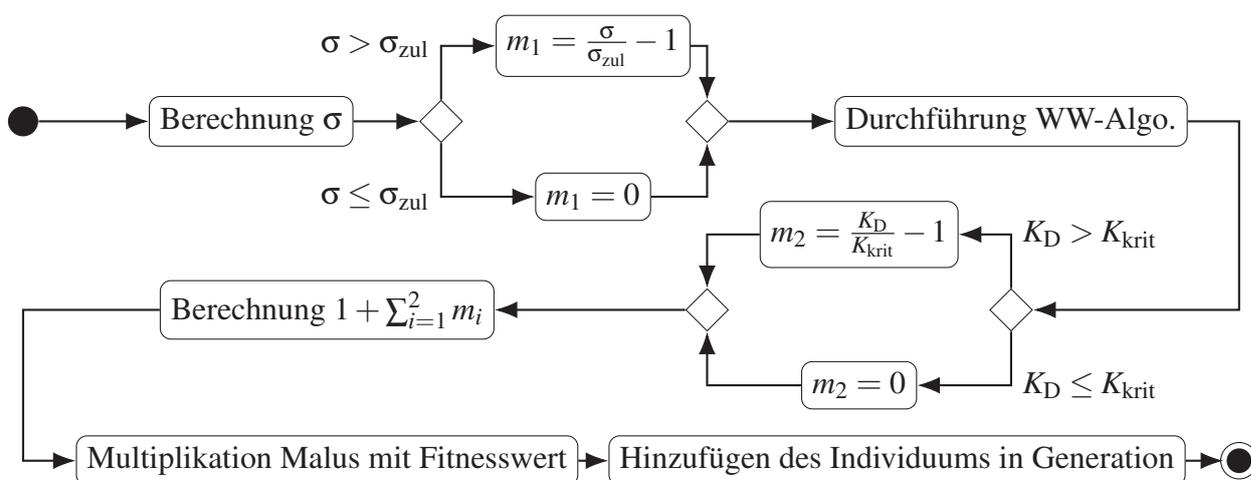


Abb. 6.2: Das Vorgehen der Prüfungen der Restriktionen bei reiner Druckbelastung.

In Abbildung 6.3 sind die Ergebnisse für das Vierkantprofil der geschlossen-analytischen Lösung, der numerischen Erweiterung durch PRECHTL und des evolutionären Algorithmus aus dieser Arbeit aufgezeigt.

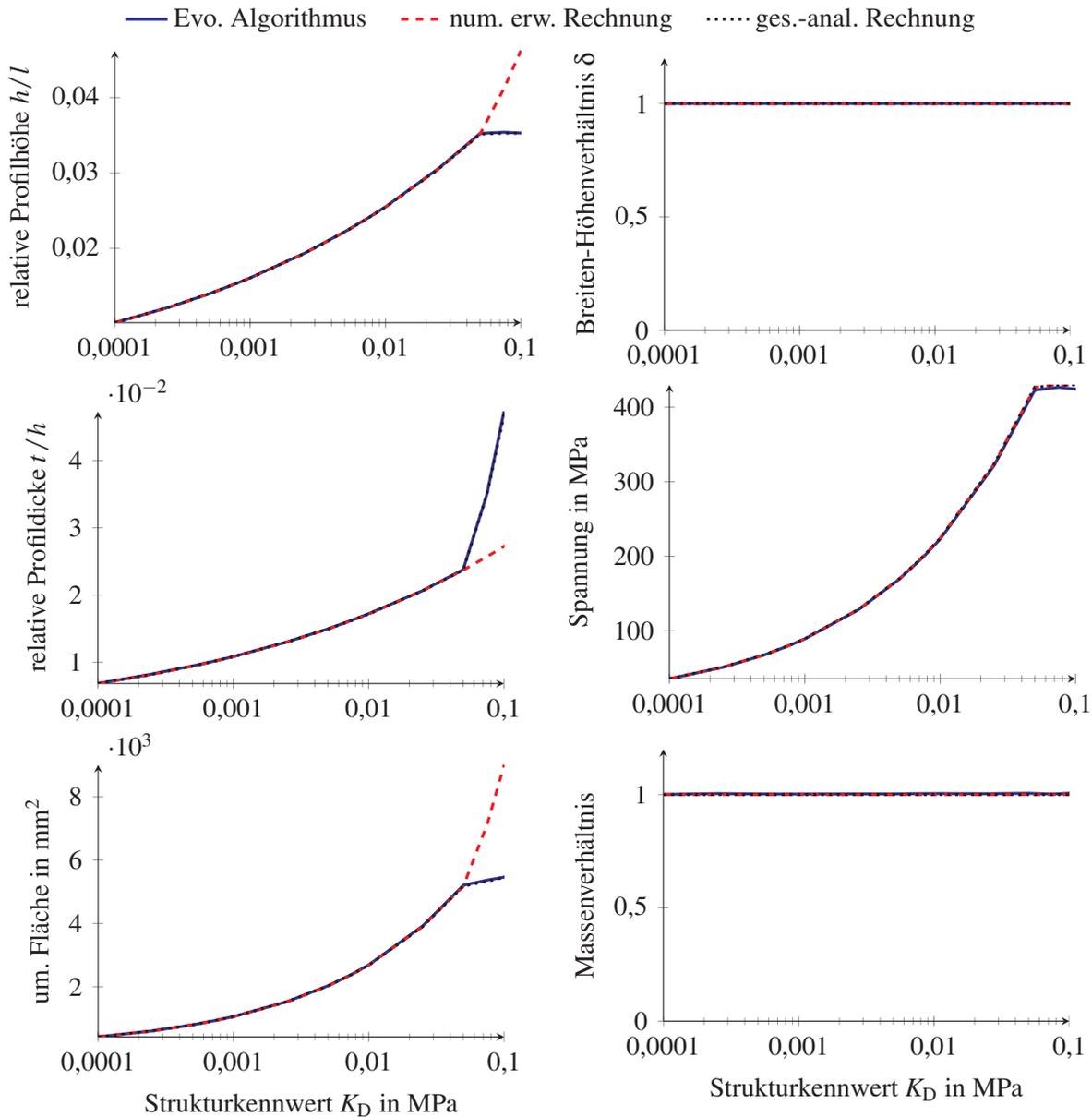


Abb. 6.3: Relative Profilhöhe h/l (oben links), Breiten-Höhenverhältnis b/h (oben rechts), relative Profildicke t/h (Mitte links), Spannung (Mitte rechts), umschlossene Fläche (unten links) sowie das Masseverhältnis der Stäbe im Vergleich zu der geschlossen-analytischen Lösung (unten rechts) für die Ergebnisse des Evolutionären Algorithmus, der numerischen Verbesserung durch PRECHTL [2] und der geschlossen-analytischen Lösung für ein Vierkantprofil unter Druckbelastung.

Zu erkennen ist, dass die Ergebnisse bei kleinem Strukturkennwert $K < K_{\text{krit}}$ bei allen drei Rechnungen identisch sind. Dies überrascht nicht, da bei einem Vierkantprofil ein quadratischer Querschnitt optimal ist, wodurch die analytische Beulabschätzung mit der numerischen übereinstimmt. Auch der kritische Strukturkennwert K_{krit} ist bei allen drei Rechenmethoden identisch und liegt bei $K_{\text{krit}} = 0,051 \text{ MPa}$.

Bei einem großen Strukturkennwert $K > K_{\text{krit}}$ liegen allerdings Abweichungen vor. Wie schon in Kapitel 5.1.3 angesprochen, wählt PRECHTL für die relative Profildicke t/h den selben Zusammenhang wie bei einem kleinen Strukturkennwert. Aus diesem Grund ist im Kurvenverlauf auch keine Steigungsveränderung auszumachen. Da die begründungslose Annahme der unveränderten relativen Profildicke t/h unplausibel erscheint, wurde vorgeschlagen, als weitere Restriktion eine geometrische Beschränkung einzuführen. Dabei bilden die kleinstmögliche und die größtmögliche umschlossene Fläche die Ränder des Lösungsraums, in dem es beliebig viele weitere Lösungen gibt, wie die von PRECHTL eine darstellt. Die Diagramme sind mit den Ergebnissen für die kleinste umschlossene Fläche erstellt worden. Zu erkennen ist, dass die Ergebnisse des Algorithmus exakt mit den Ergebnissen der geschlossen-analytischen Herleitung übereinstimmen. Für ein Vierkantprofil unter Druckbelastung kann somit auf die analytische Lösung zurückgegriffen werden, um die gewichtsoptimierte Profilgeometrie zu finden. Zusätzlich ist am Diagramm der Massenverhältnisse zu erkennen, dass alle Lösungen, also auch die von PRECHTL für einen großen Strukturkennwert, wie vorstehend schon genannt, die gleiche Masse aufweisen.

6.3 Analyse des Leichtbaupotenzials von Profil-Biegeträgern

Bei einer reinen Biegebelastung kommt zu den zwei Restriktionsprüfungen bei der Druckbelastung noch die Prüfung der Durchbiegung hinzu. Der Ablauf der Prüfung ist in Abbildung 6.4 gegeben. Die Durchbiegung durch die vom vorgegeben Strukturkennwert ausgelöste Biegebelastung wird mit der zulässigen Durchbiegung $f_{\text{zul}} = l/300$ verglichen. Falls sie größer ist, wird der relative Malus auf bekanntem Weg berechnet. Anschließend folgt der Abgleich mit der durch das Moment verursachten Spannung und die Stabilitätsprüfung mithilfe des Wittrick-Williams-Algorithmus. Auch hier wird das vom Wittrick-Williams-Algorithmus berechnete kritische Moment in einen kritischen Strukturkennwert $K_{\text{B,krit}}$ umgerechnet und mit dem vorgegebenen Strukturkennwert verglichen. Abschließend wird dann wie bei der Druckbelastung der angepasste Fitnesswert berechnet und das Individuum der Generation hinzugefügt.

In Abbildung 6.5 sind die Ergebnisse für das Vierkantprofil der geschlossen-analytischen Lösung, der numerischen Erweiterung durch PRECHTL und des Evolutionären Algorithmus aus dieser Arbeit aufgezeigt. Zu erkennen ist, dass die Ergebnisse zwischen der geschlossen-analytischen Lösung und den beiden mit genaueren Profilbeulwerten berechneten Lösungen abweichen. Die geschlossen-analytische Lösung ist signifikant schwerer als die anderen beiden Lösungen. Dies liegt im Gegensatz zu den Ergebnissen beim Druckstab an den nun vorliegenden Abweichungen bei den Profilbeulwerten, da nun nicht mehr das Breiten-Höhenverhältnis $\delta = 1$ beträgt.

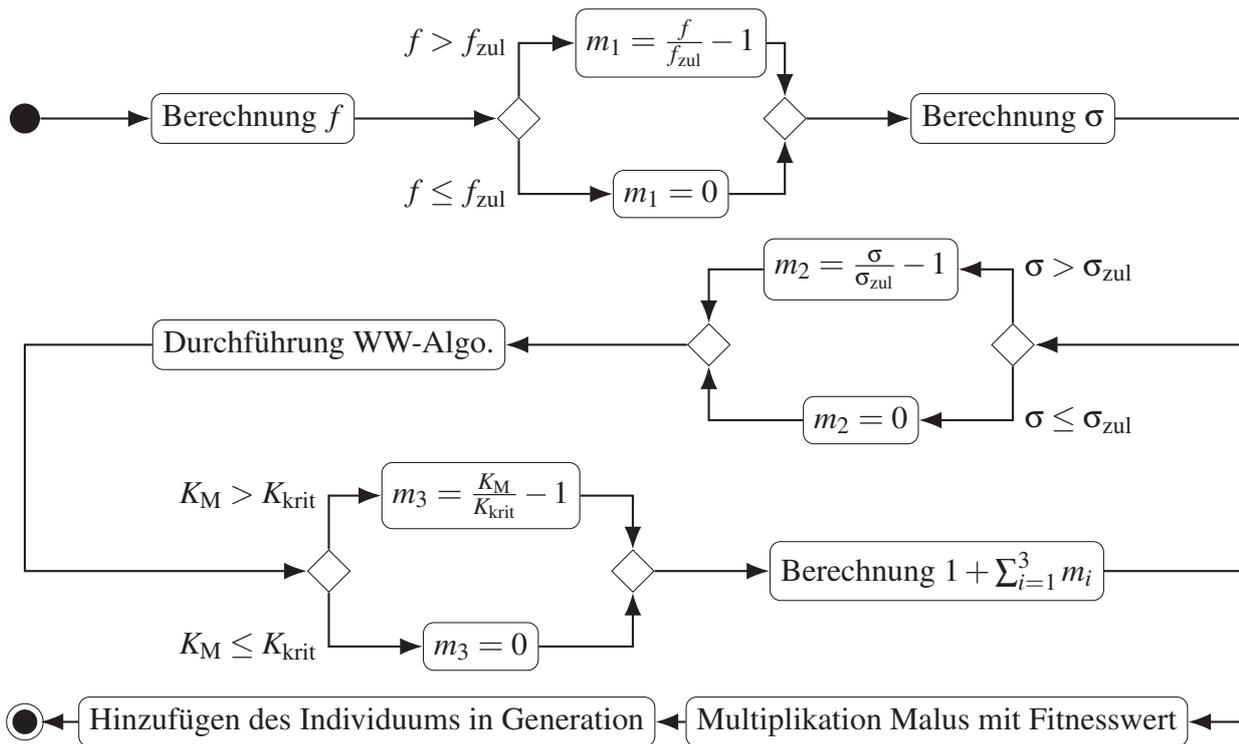


Abb. 6.4: Das Vorgehen der Prüfungen der Restriktionen bei reiner Biegebelastung.

Zwischen der numerischen Erweiterung von PRECHTL und den Ergebnissen des Evolutionären Algorithmus sind die Ergebnisse bei kleinem Strukturkennwert und auch im Übergangsbereich zum großen Strukturkennwert praktisch identisch. Für den Übergangsbereich kann festgestellt werden, dass für den gesamten Bereich die relative Profilhöhe t/h konstant ist. Dies gilt sowohl für die numerische Erweiterung von PRECHTL als auch für die Ergebnisse des evolutionären Algorithmus. Der Wechsel vom Stabilitäts- zum Festigkeitsversagen ist dann optimal, wenn nur die Profildicke entsprechend bei konstanter Höhe und steigender Belastung angepasst werden.

Bei einem großen Strukturkennwert fällt auf, dass das optimale Breiten-Höhenverhältnis $\delta_{\text{opt,g}}$ beim Algorithmus mit $\delta_{\text{opt,g}}^{\text{evo}} = 0,362$ im Gegensatz zu $\delta_{\text{opt,g}}^{\text{num}} = 0,35$ ist. Dadurch ergibt sich für den großen Strukturkennwert bei einem Vierkant-Profil ein c -Faktor für die relative Profilhöhe h/l mit $c_{(h/l),g}^{\text{evo}} = 1,89$. Das dadurch gebildete Profil ist gut einen halben Prozentpunkt leichter als die von PRECHTL ermittelten Profile.

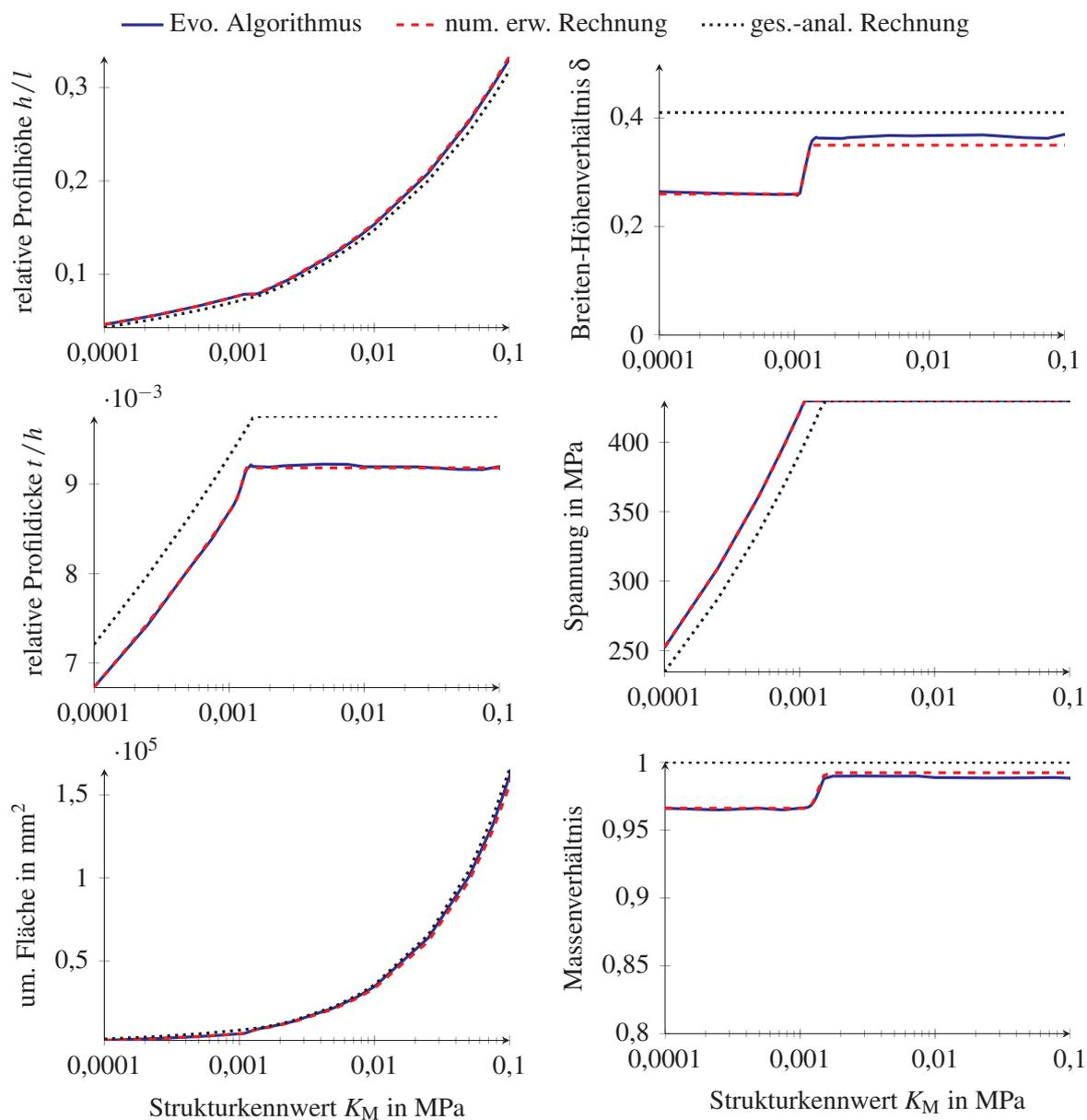


Abb. 6.5: Relative Profilhöhe h/l (oben links), Breiten-Höhenverhältnis b/h (oben rechts), relative Profildicke t/h (Mitte links), Spannung (Mitte rechts), umschlossene Fläche (unten links) sowie das Masseverhältnis der Stäbe im Vergleich zu der geschlossen-analytischen Lösung (unten rechts) für die Ergebnisse des Evolutionären Algorithmus, der numerischen Verbesserung durch PRECHTL [2] und der geschlossen-analytischen Lösung für ein Vierkantprofil unter Biegebelastung.

6.4 Analyse des Leichtbaupotenzials von Profil-Torsionsstäben

Das Vorgehen bei einer reinen Torsionsbelastung unterscheidet sich nur geringfügig zum Vorgehen bei reiner Biegebelastung. Anstelle der Durchbiegung wird die Verdrehung geprüft und anstatt der zulässigen Spannung wird die zulässige Schubspannung geprüft. Der Ablauf der Prüfung ist in Abbildung 6.6 aufgezeigt. Die Verdrehung wird mithilfe von Gleichung 3.3.2 bestimmt. Daher ist die Vorgabe, dass die Voraussetzungen der St.-Venantsche Torsion gelten.

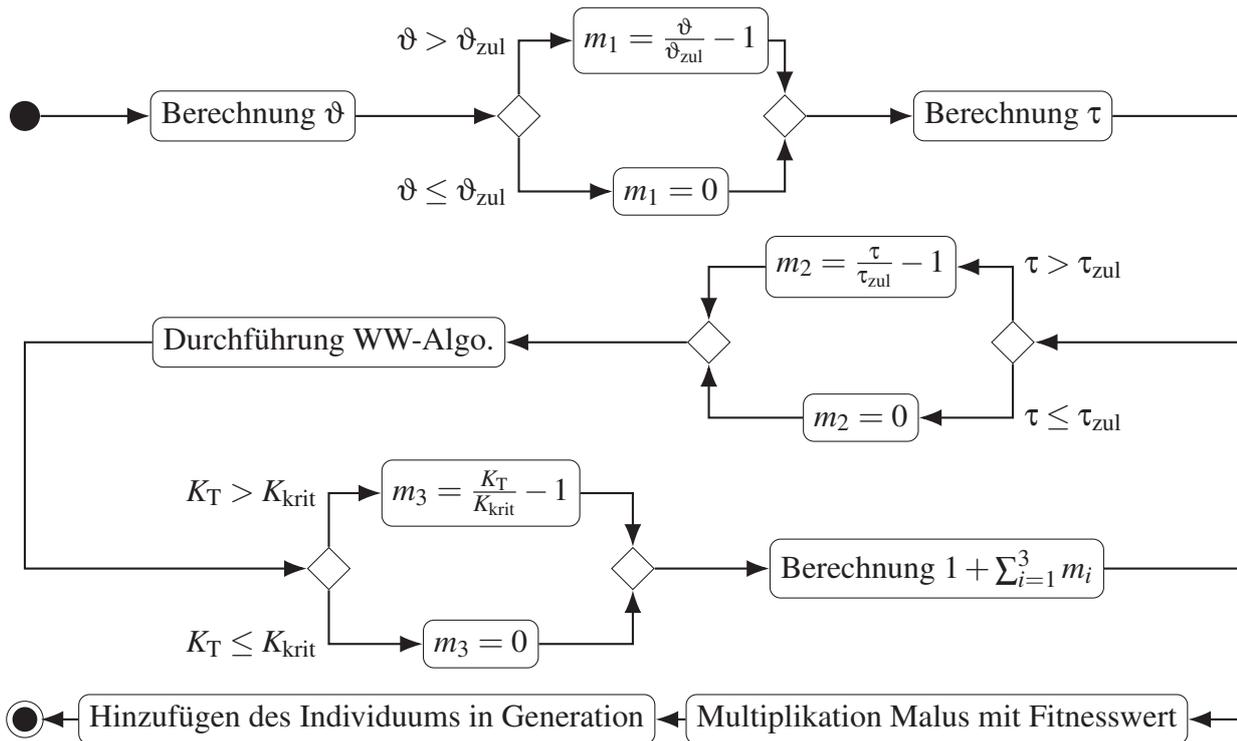


Abb. 6.6: Das Vorgehen der Prüfungen der Restriktionen bei reiner Torsionsbelastung.

In Abbildung 6.7 sind die Ergebnisse für das Vierkantprofil unter Torsionsbelastung der geschlossenen-analytischen Lösung, der numerischen Erweiterung durch PRECHTL und des Evolutionären Algorithmus aus dieser Arbeit aufgezeigt. Zu erkennen ist, dass die Ergebnisse bei einem kleinen und großen Strukturkennwert bei allen drei Rechenmethoden praktisch identisch sind. Leichte Abweichungen existieren aufgrund des Unterschieds beim Beulwert. In der Analytik beträgt $\kappa_{\text{anal}} = 5,37$ und numerisch berechnet ist $\kappa_{\text{num}} = 5,34$. Aus diesem Grund unterscheiden sich auch die kritischen Strukturkennwerte leicht. Welche bei $K_{\text{krit,anal}} = 0,0423$ MPa und $K_{\text{krit,num}} = 0,0424$ MPa nur vernachlässigbar auseinander liegen. Bei reiner Torsionsbelastung kann bei einem Vierkantprofil somit ohne Probleme mit den analytisch hergeleiteten Zusammenhängen gerechnet werden, um das optimale Profil zu bestimmen.

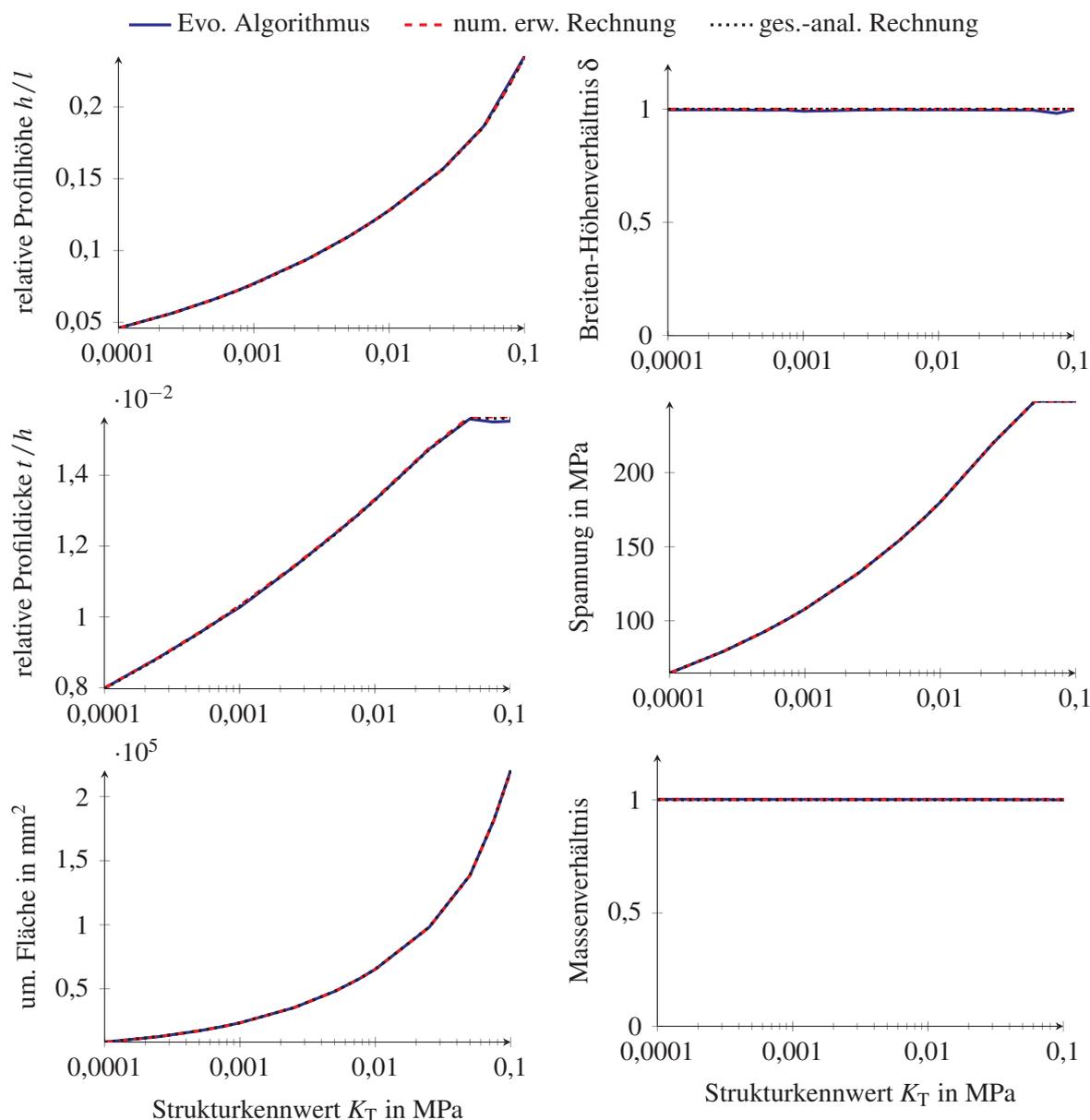


Abb. 6.7: Höhen-Längenverhältnis h/l (oben links), Breiten-Höhenverhältnis b/h (oben rechts), Profildicken-Höhenverhältnis t/h (Mitte links), Spannung (Mitte rechts), umschlossene Fläche (unten links) sowie das Masseverhältnis der Stäbe im Vergleich zu der geschlossen-analytischen Lösung (unten rechts) für die Ergebnisse des Algorithmus, der numerischen Verbesserung durch PRECHTL [2] und der geschlossen-analytischen Lösung für ein Vierkantprofil unter Torsionsbelastung.

7 Erweiterung der gewichtsoptimierten Auslegung um kombinierte Lastfälle

Für kombinierte Lastfälle kann eine gewichtsoptimierte Auslegung nur numerisch aufgestellt werden. Dies gilt sowohl für den Fall des Festigkeits- als auch für den Fall des Stabilitätsversagens. Wenn ein, wie in Abbildung 7.1 dargestellter Balken, unter kombinierten Lastfällen belastet wird, ergibt sich nach KRÄTZIG [100] für eine Kombination aus Druck- und Biegebelastung folgender Zusammenhang für die maximale Spannung im Balken:

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{c_A f_A(\delta)} \left(\frac{l}{h}\right)^2 \frac{h}{t} K_D + \frac{1}{c_\sigma f_W c_W(\delta)} \left(\frac{l}{h}\right)^3 \frac{h}{t} (K_B + K_D f_{\max}) \quad (7.0.1)$$

Wie direkt ersichtlich ist, kann der Zusammenhang nicht nach der relativen Profilhöhe l/h umgestellt werden, was der erste Schritt für die geschlossen-analytische Lösung wäre. Bei einer Kombination von Biege- und Torsionsbelastung wäre diese Umformung noch möglich. Allerdings würde die Kombination der Belastung beim Festigkeitsversagen in allen Fällen nach der Theorie erster Ordnung noch hinreichend genaue Ergebnisse liefern, was bei den Stabilitätskriterien nicht weiter gilt. Das Erreichen der kritischen Spannung beim Stabilitätsversagen zeigt sich durch ein schlagartiges Anwachsen der Verformung. Durch die Kombination verursacht die Druckbelastung aufgrund der Durchbiegung und des daraus resultierenden Hebelarms ein zusätzliches Moment, wodurch die Durchbiegung vergrößert wird. Dieser Effekt kann bei der Auslegung nur gemäß der Theorie zweiter Ordnung am verformten System aufgestellt werden, was in Abbildung 7.1 gezeigt ist. In Gleichung 7.0.1 ist die Theorie zweiter Ordnung über den Term $K_D f_{\max}$ inkludiert. Die vergrößerte Durchbiegung durch die Kombination der Lastfälle kann nur durch das Lösen der Differentialgleichung der Biegelinie bestimmt werden. Dies schließt einen geschlossen-analytischen Lösungsweg aus. [100]

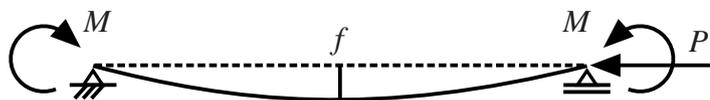


Abb. 7.1: Verformter Balken unter überlagerter Biege- und Druckbelastung nach KRÄTZIG [100].

Auch bei der Kombination von Biege- und Torsionsbelastung tritt ein ähnliches Problem auf. Durch die von der Torsionsbelastung ausgelöste Verdrehung entsteht eine schiefe Biegung, da die Biegebelastung bei einem symmetrischen Profil nicht mehr im System der Hauptträgheitsachsen angreift. In allen Fällen ist ein iteratives Verfahren notwendig, welches numerisch

unterstützt gelöst werden muss. Aus diesem Grund kann so eine Auslegung nur noch durch einen Optimierungsalgorithmus erfolgen, wie er für diese Arbeit entwickelt wurde.

Der Aufbau des Optimierungsalgorithmus und der Ablauf der Optimierung sind annähernd gleich zum beschriebenen Aufbau aus Kapitel 6.1. Die jeweiligen Prüfungen der Restriktionen müssen an die kombinierten Lastfälle entsprechend angepasst werden, was in den folgenden Kapiteln jeweils für die Lastpaare einzeln erläutert wird. Die passende Eingabe für den Wittrick-Williams-Algorithmus ist in Kapitel 4.4 beschrieben, da durch die kombinierte Belastung die *Lasteingabe* Q entsprechend des Verhältnisses der Strukturkennwerte der einzelnen Belastungen gewählt werden muss. Auf die gleiche Weise kann das ermittelte Q_{krit} entsprechend des Verhältnisses zu den kritischen Belastungen $Q_{\text{kritD,M,T}}$ der drei Lastfälle zurückgerechnet werden. Aus den kritischen Belastungen $Q_{\text{kritD,M,T}}$ können dann die jeweiligen kritischen Strukturkennwerte $K_{\text{kritD,M,T}}$ bestimmt werden, welche dann mit der tatsächlich vorliegenden Belastungen verglichen wird. Ist $K_{\text{D,M,T}} > K_{\text{kritD,M,T}}$ liegt Stabilitätsversagen vor. Aufgrund des festen Verhältnisses zwischen den Strukturkennwerten, liegen die kritischen Strukturkennwerte im gleichen Verhältnis. Die Prüfung von einem kritischen Wert genügt, um den relativen Malus zu bestimmen.

7.1 Kombination von Druck und Biegung

Die Restriktionsprüfung bei einer Kombination aus Druck- und Torsionsbelastung unterscheidet sich nur geringfügig von dem Vorgehen bei einer Einzelbelastung. Der Ablauf der Prüfung ist in Abbildung 7.2 aufgezeigt. Bei der Berechnung der maximalen Durchbiegung f_{max} wird die Theorie zweiter Ordnung angewendet, sodass auch die durch die Druckkraft zusätzlich verursachte Durchbiegung mit einbezogen wird. Dafür wird ein iteratives Verfahren eingesetzt, bei dem zunächst die Durchbiegung f alleine durch die Biegebelastung bestimmt wird. Anschließend wird ein f_{neu} berechnet, wobei nun die vorher berechnete Durchbiegung f als Hebelarm für das durch die Druckkraft ausgelöste Moment genutzt wird. Die Durchbiegung f wird nun mit der gerade berechnete Durchbiegung f_{neu} aktualisiert. Die Berechnung wird solange wiederholt bis eine Abweichung zwischen f und f_{neu} unter einer vorher definierten Grenze β_f liegt, welche für diese Arbeit mit $1/10000$ bestimmt wurde. Die Durchbiegung f wird mit der vorgegebenen zulässigen Durchbiegung f_{zul} verglichen. Ist die berechnete Durchbiegung höher, wird, wie schon bei den Fällen der Einzelbelastung, ein relativer Malus bestimmt.

Anschließend wird die kombinierte maximale Spannung σ_{max} ebenfalls nach Theorie zweiter Ordnung berechnet, indem durch die im vorherigen Schritt berechnete Durchbiegung f als Hebelarm für die Druckbelastung ein zusätzliches Moment aufgebracht wird. Die berechnete Spannung σ_{max} wird mit der zulässigen Spannung σ_{zul} des Materials verglichen. Auch hier wird beim Überschreiten der zulässigen Spannung σ_{zul} ein relativer Malus bestimmt. Als letztes wird die Stabilitätsprüfung mithilfe des Wittrick-Williams-Algorithmus vorgenommen. Dafür muss, wie in Kapitel 4.4 beschrieben, ein Verhältnis der Belastungen gebildet werden, da der Wittrick-Williams-Algorithmus nur mit einer verknüpften Belastung Q rechnen kann. Beispielsweise würde sich bei einem Strukturkennwert durch die Druckbelastung $K_D = 0,075$ MPa und einem

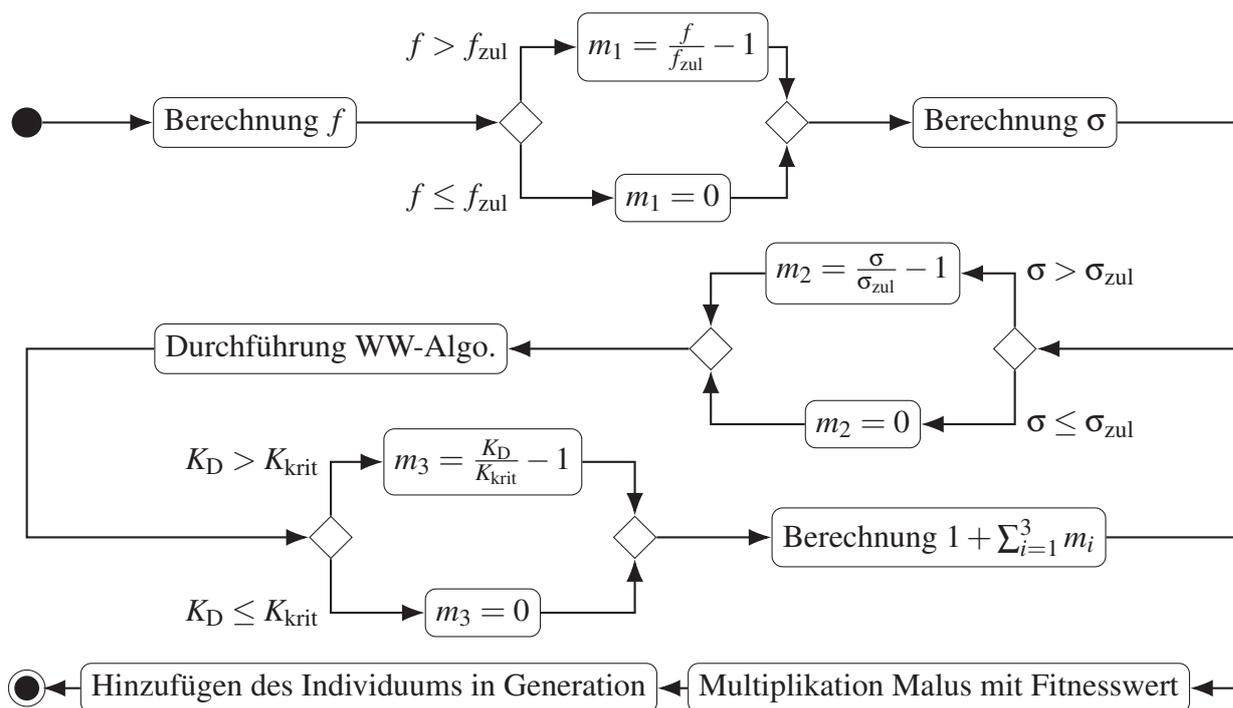


Abb. 7.2: Das Vorgehen der Prüfungen der Restriktionen bei einer Kombination aus Druck- und Biegebelastung.

Strukturkennwert durch die Biegebelastung $K_M = 0,1$ MPa und einer Profillänge $l = 2000$ mm das relative Verhältnis zwischen Druck- und Biegebelastung bei $Q_D = 1$ und $Q_M = 2666,67$ mm ergeben. Dieses Verhältnis wird zum einen als Input für den Wittrick-Williams-Algorithmus, um so die tatsächlich vorliegende Aufteilung zwischen Druck- und Biegebelastung einstellen zu können, und zum anderen für die Rückrechnung der einzelnen kritischen Strukturkennwerte K_{krit} verwendet. Sind diese überschritten wird der relative Malus auf die vorgestellte Weise berechnet. Die Restriktionsprüfung des Individuums ist an dieser Stelle abgeschlossen und der Fitnesswert kann über den Gesamtmalus angepasst werden. Anschließend wird das Individuum der Generation hinzugefügt.

In Abbildung 7.3 sind die Ergebnisse für das Vierkantprofil unter kombinierter Druck- und Biegebelastung dargestellt. Die auffälligste Erkenntnis ist, dass die Biegebelastung einen deutlich größeren Einfluss auf die gewichtsoptimale Geometrie des Profils als die Druckbelastung hat. Solange der Strukturkennwert für die Druckbelastung nicht größer als der Strukturkennwert für die Biegebelastung ist, kann die Druckbelastung vernachlässigt werden. Das Profil verhält sich wie unter einer reinen Biegebelastung und auch die entsprechenden Formeln für reine Biegebelastung können verwendet werden. Sobald der Strukturkennwert durch die Druckbelastung unterhalb von $K_D \leq 0,001$ MPa liegt, kann die Druckbelastung unabhängig der Biegebelastung vollständig vernachlässigt werden. Zusätzlich ist deutlich zu erkennen, dass der Einfluss der Druckbelastung auf die relative Profilhöhe h/l sehr gering ist. Alle Kurven folgen sehr eng der relativen Profilhöhe unter reiner Biegebelastung. Im Bereich von kleinen Strukturkenn-

werten $K_M < K_{M,krit} \approx 0,001$ MPa sind die Kurven ein Stück weit aufgefächert. Bei großen Strukturkennwerten hingegen liegen die Kurven sehr nah beieinander, sodass im Bereich des Festigkeitsversagens unabhängig von der Druckbelastung mit den Ergebnissen der reinen Biegebelastung gerechnet werden kann.

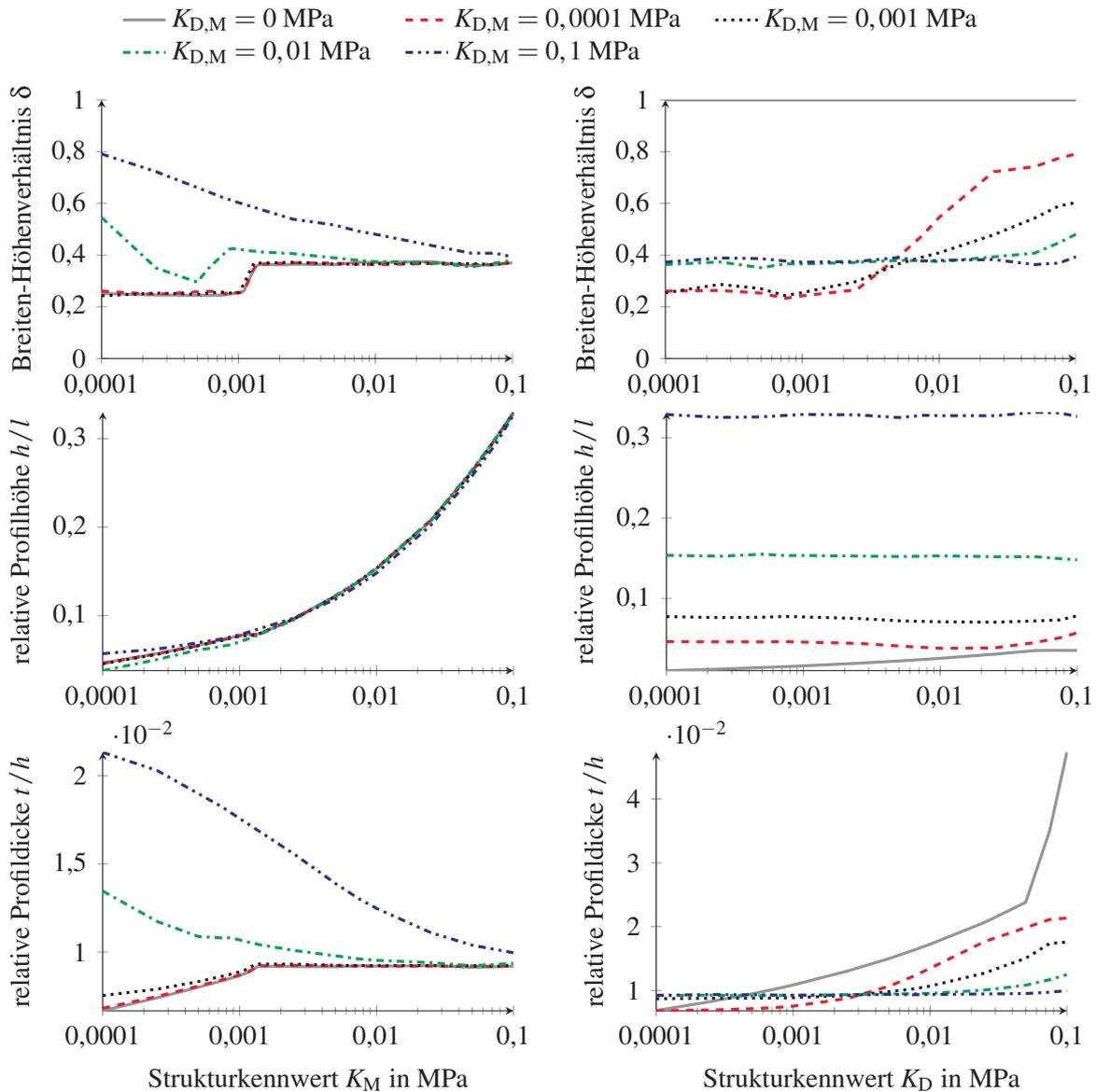


Abb. 7.3: Breiten-Höhenverhältnis b/h (erste Zeile), relative Profilhöhe h/l (zweite Zeile) und relative Profildicke t/h (dritte Zeile) für ein Vierkantprofil unter kombinierter Druck- und Biegebelastung. Auf der linken Seite sind Verläufe bei konstantem Strukturkennwert durch Druckbelastung abhängig vom Strukturkennwert durch Biegebelastung und auf der rechten Seite sind die umgekehrten Fälle dargestellt.

Sowohl im Breiten-Höhenverhältnis δ und bei der relativen Profildicke t/h ist bei den Diagrammen, die abhängig vom Strukturkennwert der Biegebelastung K_M aufgetragen sind, existiert ein

Übergang abhängig vom Strukturkennwert der Druckbelastung K_D . Wie oben schon geschrieben, ist das gewichtsoptimale Profil bei Strukturkennwerten der Druckbelastung $K_D < 0,001$ MPa praktisch ausschließlich vom Strukturkennwert der Biegebelastung K_M abhängig. Bei Erhöhung des Strukturkennwerts der Druckbelastung ergibt sich zunächst ein Verlauf, welcher sich bei steigendem Strukturkennwert der Biegebelastung an den Verlauf der reinen Biegebelastung schnell annähert. Der kritische Strukturkennwert liegt aber niedriger, sodass früher der Wechsel auf die Profilgeometrie für große Strukturkennwerte gewechselt wird. Die gewichtsoptimale Profilgeometrie ist dann aber wieder die gleiche wie bei einer reinen Biegebelastung.

Wenn der Strukturkennwert der Druckbelastung mit $K_D = 0,1$ MPa sehr groß ist, bildet sich auch bei einem sehr kleinen Strukturkennwert der Biegebelastung keine gewichtsoptimale Profilgeometrie aus, die bei einer reinen Druckbelastung optimal wäre. Auch bei einem Strukturkennwert der Biegebelastung $K_M = 0,0001$ MPa ist ein Profil gewichtsoptimaler, wenn es um 1/5 höher als breit ist. Dies liegt am Knick- und Kippverhalten von Trägern, die unter einer kombinierten Last stehen. Durch kleine Biegebelastungen und somit ein Spannungsverlauf in den Stegen des Profils steigt die kritische Versagensspannung für das globale Stabilitätsverhalten, was bei reiner Druckbelastung gemeinhin als Knicken bezeichnet wird, deutlich an. Somit gilt auch bei einer sehr kleinen Biegebelastung nicht mehr der Symmetriezusammenhang aus Gleichung C.1.4. Bei der relativen Profildicke t/h können dieselben Erkenntnisse gewonnen werden. Für ein besseres Verständnis dieses Übergangsbereichs sind in Abbildung 7.4 die optimalen Profilverhältnisse für Strukturkennwerte der Druckbelastung im Übergangsbereich aufgetragen.

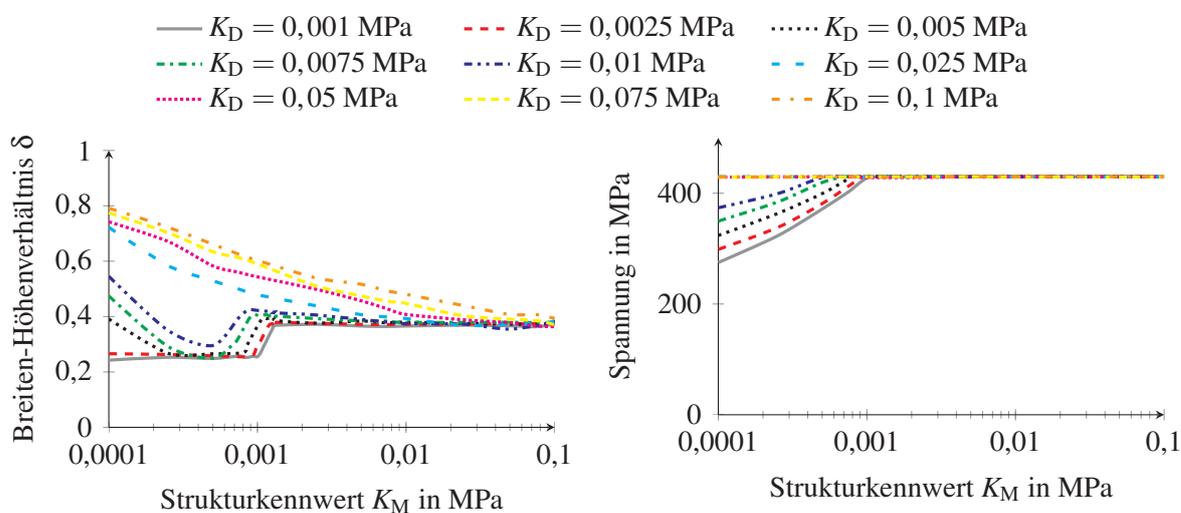


Abb. 7.4: Breiten-Höhenverhältnis b/h (links) und maximale Spannung (rechts) für ein Vierkantprofil unter kombinierter Druck- und Biegebelastung. Die Verläufe sind für konstante Strukturkennwerte durch Druckbelastung und abhängig vom Strukturkennwert durch Biegebelastung aufgetragen.

Bei einer detaillierten Betrachtung des Übergangsbereichs wird deutlich, dass sich die optimale Profilform kontinuierlich mit ansteigendem Strukturkennwert der Druckbelastung verändert. Es existiert kein Sprung mit einem schlagartigen Wechsel. Zunächst kann nun genauer ermittelt

werden, dass die Druckbelastung bis zu einem Strukturkennwert $K_D \leq 0,00025$ MPa keinen Einfluss auf die gewichtsoptimale Profilgeometrie aufweist. Bis zu einem Strukturkennwert der Druckbelastung von $K_D \leq 0,025$ MPa existiert ein Übergangsbereich, bei dem sich bei großen Strukturkennwerten $K_B > K_{\text{krit}}(K_D)$ weiterhin die gewichtsoptimale Profilgeometrie unabhängig vom Strukturkennwert durch die Druckkraft ergibt. In den Bereichen mit kleinem Strukturkennwert nähert sich der Verlauf, wie oben schon erwähnt, relativ schnell dem für eine reine Biegebelastung an, wobei die Annäherung mit steigendem Strukturkennwert der Druckbelastung geringer wird und sich der kritische Strukturkennwert $K_{\text{krit}}(K_D)$ mit steigendem Strukturkennwert der Druckbelastung nach vorne verschiebt. Die Erklärung ergibt sich durch die Erkenntnisse aus den einzelbelasteten Profilen. Bei einem kleinen Strukturkennwert liegt die maximale Spannung im Profil σ_{max} unterhalb der zulässigen Spannung σ_{zul} . Durch die Kombination mit der Druckbelastung erhöht sich die Spannung im druckbelasteten Flansch, sodass die zulässige Spannung σ_{zul} bei schon niedrigeren Strukturkennwerten der Biegebelastung erreicht wird. Aus diesem Grund verkleinert sich der kritische Strukturkennwert $K_{\text{krit}}(K_D)$ bei steigendem Strukturkennwert der Druckbelastung. An dieser Stelle stellt sich auch der Wechsel des optimalen Breiten-Höhenverhältnis δ_{opt} ein, weswegen sich der Wechsel mit einer Erhöhung des Strukturkennwerts der Druckbelastung K_D immer weiter nach vorne verschiebt.

Bei einem Strukturkennwert der Druckbelastung $K_D \geq 0,025$ MPa liegt nur noch die oben beschriebene kontinuierliche Annäherung an die gewichtsoptimierte Auslegung im reinen Biegebelastfall bei großen Strukturkennwerten vor. Im rechten Diagramm von Abbildung 7.4 ist zu erkennen, dass ab diesem Wert des Strukturkennwerts der Druckbelastung die maximale Spannung immer der zulässigen Spannung σ_{zul} entspricht. Diese Profile versagen immer nach Festigkeitsversagen, sodass auch kein kritischer Strukturkennwert existiert. Mit steigendem Strukturkennwert der Druckbelastung strebt das Bauteil immer mehr zum Verhalten bei reiner Druckbelastung, nähert sich mit steigendem Strukturkennwert der Biegebelastung dem Verhalten bei reiner Biegebelastung kontinuierlich an. Die Annäherung verläuft als Gerade in der logarithmischen Darstellung, wobei die verschiedenen Geraden bei unterschiedlichen Strukturkennwerten der Druckbelastung annähernd parallel verlaufen.

Die Verläufe der optimalen Profilgeometrien in den Diagrammen in Abbildung 7.3, die abhängig vom Strukturkennwert der Druckbelastung aufgezeigt sind, also auf der rechten Seite, stützen die oben genannten Erkenntnisse. Horizontale Verläufe in den Diagrammen zeigen an, dass die dort dargestellte Profilgeometrie unabhängig vom Strukturkennwert der Druckbelastung ist und einzig vom Strukturkennwert der Biegebelastung abhängt. Aus den Diagrammen ist sehr gut abzuleiten, dass Profile mit zunehmender Biegebelastung eine größere relative Profilhöhe h/l und eine geringere relative Profildicke t/h aufweisen als rein druckbelastete Profile. In den Verläufen der relativen Profildicke t/h ist auch sehr gut zu erkennen, dass bei einer kombinierten Druck- und Biegebelastung kein kritischer Strukturkennwert der Druckbelastung existiert. Die stark ansteigende Kurve nach Überschreiten des Strukturkennwerts bei reiner Druckbelastung existiert so bei keinem anderen Verlauf. Die oben genannte These, dass das Versagen nach Stabilität oder Festigkeit rein von der Biegebelastung abhängig ist, wird so weiter gestützt.

7.2 Kombination von Druck und Torsion

Die Restriktionsprüfung bei einer Kombination aus Druck- und Torsionsbelastung unterscheidet sich in zwei Schritten vom Vorgehen bei der Kombination aus Druck- und Biegebelastung. Der Ablauf der Prüfung ist in Abbildung 7.5 aufgezeigt.

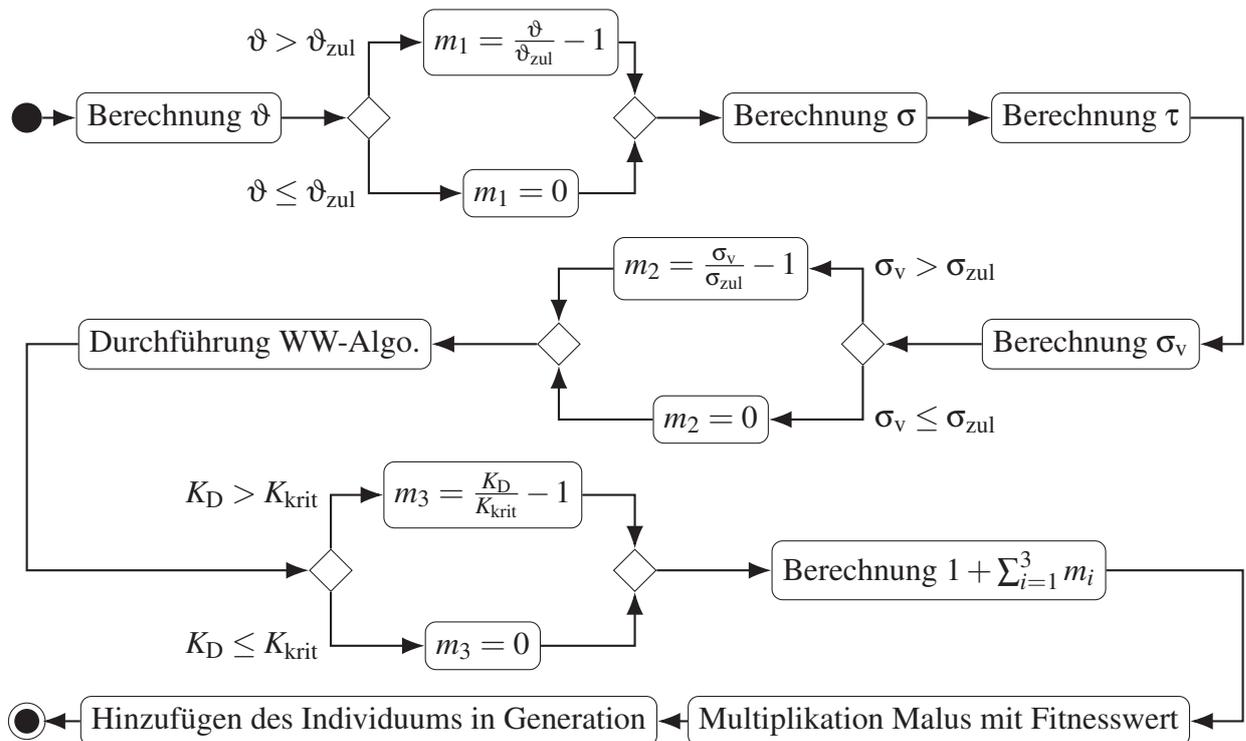


Abb. 7.5: Das Vorgehen der Prüfungen der Restriktionen bei einer Kombination aus Druck- und Torsionsbelastung.

Anstatt der Berechnung der Durchbiegung wird zunächst die Verdrehung berechnet. Da hier kein Einfluss durch die Druckkraft existiert, erfolgt die Berechnung wie bei einer reinen Torsionsbelastung. Auch hier gilt, wenn die Verdrehung $\vartheta > \vartheta_{zul}$ ist, wird ein Malus aus dem relativen Verhältnis von Verdrehung und zulässiger Verdrehung berechnet. Anschließend muss die maximale Spannung aus Druck- und Torsionsbelastung berechnet werden. Dafür wird die Vergleichsspannung nach von Mises verwendet [29].

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3\tau^2} \quad (7.2.1)$$

Die maximale Spannung σ_{\max} und die Schubspannung τ werden separat mit der Druck- und der Torsionsbelastung berechnet. Anschließend bilden sie zusammen die Vergleichsspannung, welche mit der zulässigen Spannung σ_{zul} verglichen wird. Liegt die Vergleichsspannung über der zulässigen Spannung wird nach dem bekannten Schema der relative Malus berechnet. Als letzter Schritt erfolgt wieder die Durchführung des Wittrick-Williams-Algorithmus. Auch hier

erfolgt die Bestimmung des Verhältnisses der Belastungen wie im vorher beschriebenen Kapitel. Aufgrund des Verhältnisses reicht es auch hier aus, nur K_{krit} zu prüfen und den relativen Malus zu berechnen. Der Fitnesswert wird abschließend mithilfe des relativen Malus angepasst und das Individuum wird der Generation hinzugefügt. Die Ergebnisse für das Vierkantprofil unter kombinierter Druck- und Torsionsbelastung sind in Abbildung 7.6 sind dargestellt.

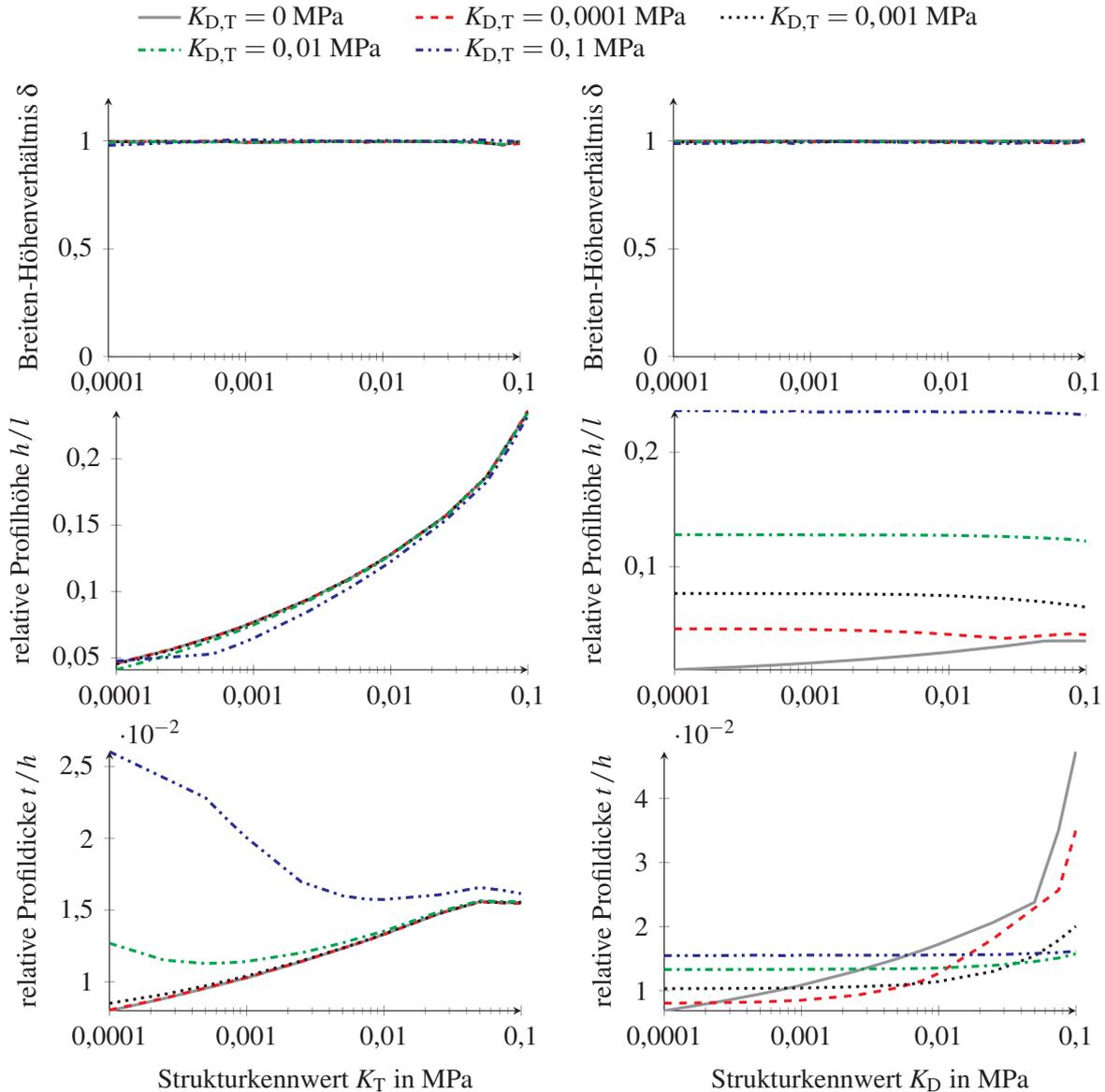


Abb. 7.6: Breiten-Höhenverhältnis b/h (erste Zeile), relative Profilhöhe h/l (zweite Zeile) und relative Profildicke t/h (dritte Zeile) für ein Vierkantprofil unter kombinierter Druck- und Torsionsbelastung. Auf der linken Seite sind Verläufe bei konstantem Strukturkennwert durch die Druckbelastung abhängig vom Strukturkennwert durch die Torsionsbelastung und auf der rechten Seite sind die umgekehrten Fälle dargestellt.

Da bei beiden Belastungsarten bei einer nicht kombinierten Belastung das optimale Breiten-Höhenverhältnis $\delta_{\text{opt}} = 1$ ist, erscheint es nicht überraschend, dass dies auch bei der kombinierten Belastung der Fall ist.

Wie bei der Biegebelastung überwiegt auch bei dieser Kombination der Einfluss des Strukturkennwerts der Torsionsbelastung gegenüber der Druckbelastung. Dies ist gut an den relativen Profilhöhen h/l zu erkennen, die bei den vom Strukturkennwert der Druckbelastung abhängigen Verläufen praktisch horizontale Verläufe bilden und bei den vom Strukturkennwert der Torsionsbelastung sich an den Verlauf der reinen Torsionsbelastung anschmiegen. Dies zeigt auch die Wichtigkeit der Profilhöhe h für die Torsionssteifigkeit. Denn bei den Verläufen der relativen Profildicke t/h ist zu erkennen, dass die zusätzliche Druckbelastung mit ansteigendem Strukturkennwert durch die Druckbelastung über eine deutliche Vergrößerung der Profildicke verarbeitet wird. Das Verhalten ist hier ähnlich wie bei der Kombination aus Druck- und Biegebelastung. Solange der Strukturkennwert der Druckbelastung gleich dem oder kleiner als der Strukturkennwert der Torsionsbelastung ist, kann die Druckbelastung vernachlässigt werden. Bis zu einem Strukturkennwert $K_D < 0,001$ MPa liegt sogar praktisch kein Unterschied zu den Zusammenhängen bei reiner Torsionsbelastung vor, weswegen die Druckbelastung dann sogar unabhängig von der Torsionsbelastung vernachlässigt werden kann.

Bei größeren Strukturkennwerten für die Druckbelastung steigt die relative Profildicke an, wobei aber nie die Verhältnisse aus reiner Druckbelastung erreicht werden. Mit steigendem Strukturkennwert der Torsionsbelastung schmiegen sich die Verläufe dann wieder denen der reinen Torsionsbelastung an. Hier wird die Dominanz der Torsionsbelastung deutlich. Bei der Auslegung auf Torsion verfügt das Profil über eine gewisse «Reserve», die zunächst auch die Belastung durch die Druckkraft aufnehmen kann. Erst wenn die Druckbelastung deutlich über der Torsionsbelastung liegt, muss dies durch eine Erhöhung der relativen Profildicke t/h kompensiert werden.

7.3 Kombination von Biegung und Torsion

Die Restriktionsprüfung bei einer Kombination aus Biege- und Torsionsbelastung weicht etwas zu den anderen beiden Kombinationen ab. Für den Ablauf siehe Abbildung 7.7. Die Abweichung liegt an der Beeinflussung der Torsionsbelastung auf die Biegebelastung bei der Bestimmung der Durchbiegung. Da durch die Torsionsbelastung der Querschnitt aus der Biegebelastung aus den Hauptträgheitsachsen herausgedreht wird, müssen die Berechnungen der Durchbiegung und der maximalen Spannung bei einer schiefen Biegung berechnet werden.

Als erstes wird wie bei der Kombination aus Druck- und Torsionsbelastung die Verdrehung berechnet. Auch hier wird bei Überschreiten der zulässigen Verdrehung der relative Malus bestimmt. Anschließend werden auf Basis der berechneten Verdrehung die Flächenträgheitsmomente angepasst. Mit diesen neuen Flächenträgheitsmomenten können dann die maximale Durchbiegung und anschließend die maximale Spannung durch die Biegebelastung berechnet werden. Wie bei

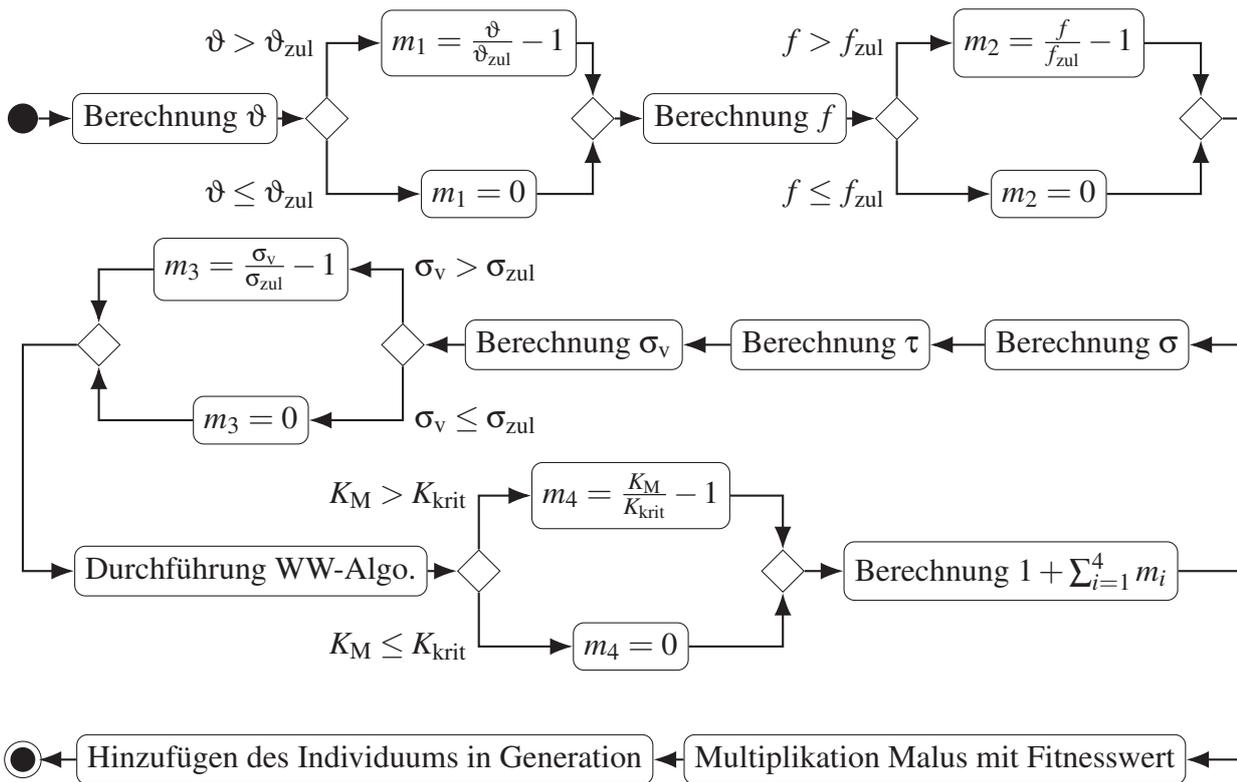


Abb. 7.7: Das Vorgehen der Prüfungen der Restriktionen bei einer Kombination aus Biege- und Torsionsbelastung.

der Kombination aus Druck- und Torsionsbelastung wird auch mit der Schubspannung aufgrund der Torsionsbelastung die Vergleichsspannung nach Gleichung 7.2.1 bestimmt. Anschließend erfolgt nach gleichem Schema mit dem entsprechenden Lastverhältnis die Berechnung mit dem Wittrick-Williams-Algorithmus. Auch hier werden der Fitnesswert abschließend mithilfe des relativen Malus angepasst und das Individuum der Generation hinzugefügt.

In Abbildung 7.8 sind die Ergebnisse für das Vierkantprofil unter kombinierter Druck- und Torsionsbelastung dargestellt. Im Vergleich zu den anderen beiden Kombinationen, die jeweils eine Druckbelastung inkludieren, existiert bei der Kombination von Biege- und Torsionsbelastung keine überlegene Belastungsart. Daher ist die primäre Erkenntnis, dass bei einem Verhältnis der Strukturkennwerte von 1/10 der jeweils größere Strukturkennwert dominiert und damit die Zusammenhänge aus den Einzelbelastungen gelten. Dies ist neben den Verläufen beim Breiten-Höhenverhältnis δ auch bei den relativen Größen h/l und t/h ersichtlich. Dies gilt sowohl für eine Dominanz der Torsion als auch der Biegung.

Beim Breiten-Höhenverhältnis δ ist sehr gut zu erkennen, dass dieser Wechsel bei allen Strukturkennwertverhältnissen annähernd gleich stattfindet. Dies gilt sowohl abhängig vom Strukturkennwert durch die Torsionsbelastung (linke Seite) als auch abhängig vom Strukturkennwert durch die Biegebelastung (rechte Seite). Die optimalen Breiten-Höhenverhältnisse δ_{opt} wechseln nach dem Überschreiten des oben genannten Strukturkennwertverhältnisses von 1/10 kontinu-

ierlich zu dem optimalen Breiten-Höhenverhältnis δ_{opt} der jeweils anderen Belastung. Sobald das umgedrehte Strukturkennwertverhältnis dann wiederum $1/10$ unterschreitet, verbleibt das optimale Breiten-Höhenverhältnis δ_{opt} bei dem der jeweils dominierenden Belastungsart.

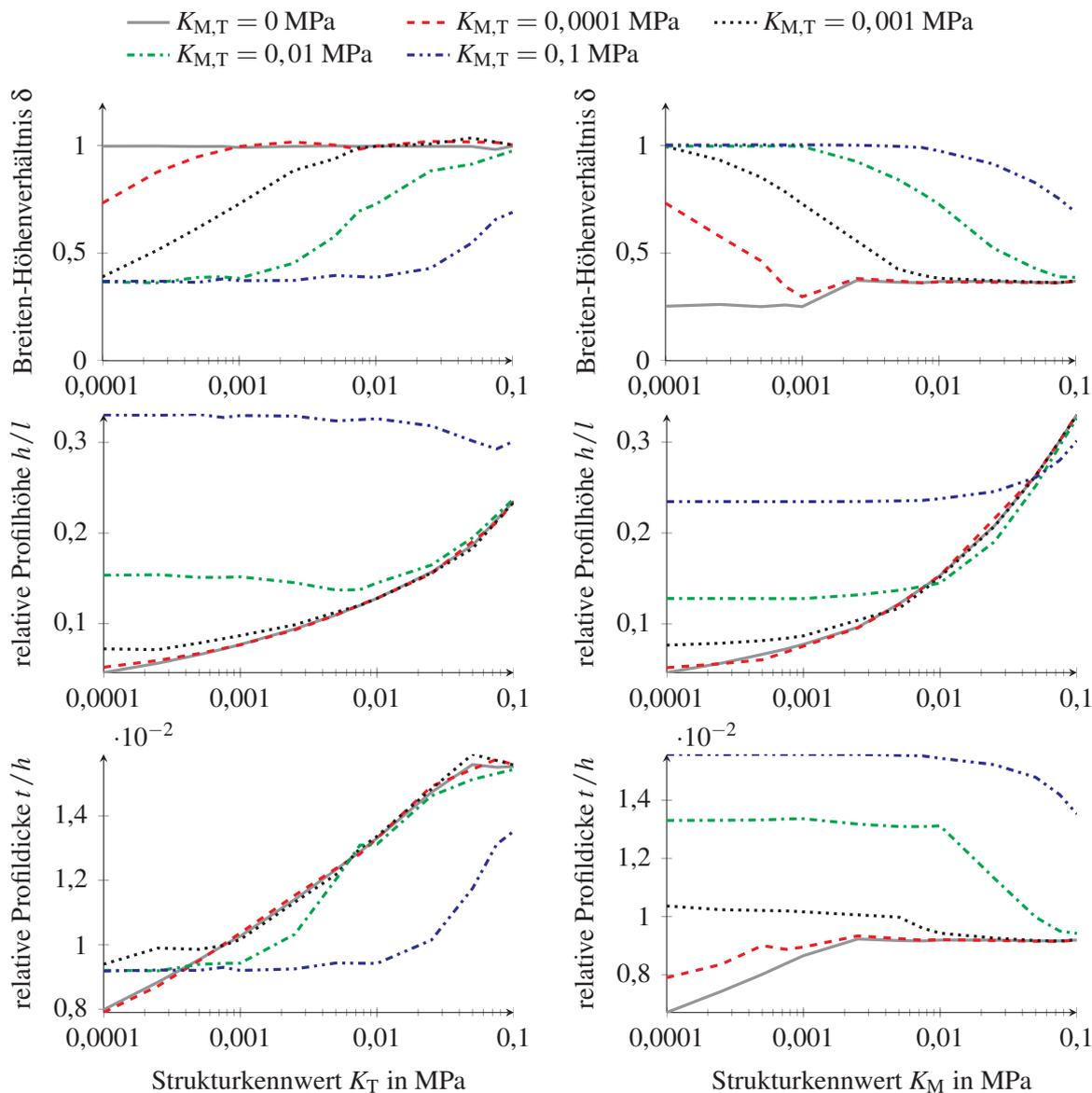


Abb. 7.8: Breiten-Höhenverhältnis b/h (erste Zeile), relative Profilhöhe h/l (zweite Zeile) und relative Profildicke t/h (dritte Zeile) für ein Vierkantprofil unter kombinierter Biege- und Torsionsbelastung. Auf der linken Seite sind Verläufe bei konstantem Strukturkennwert durch die Biegebelastung abhängig vom Strukturkennwert durch die Torsionsbelastung und auf der rechten Seite sind die umgedrehten Fälle dargestellt.

Bei den relativen Profilhöhen h/l und Profildicken t/h ist der Wechsel bei einem Strukturkennwertverhältnis von $1/10$ ebenfalls gut zu erkennen. Ersichtlich wird dies insbesondere an den jeweiligen Verläufen bei sehr hohen konstanten Strukturkennwerten $K_{M,T} = 0,1$ MPa. Sie weisen

bis zu einem Strukturkennwert $K_{T,M} = 0,01$ MPa einen horizontalen Verlauf auf und wechseln dann in einen Übergangsbereich. In diesem schmiegt sich die Kurve an den Verlauf für die reine Belastung der jeweils anderen Belastungsart an.

7.4 Diskussion zur Idealisierung der Belastung

Die Ergebnisse in diesem Kapitel belegen die erste Unterthese der in dieser Arbeit behandelten Forschungshypothese. Mit der ersten Unterthese wurde behauptet, dass kombinierte und komplexere Lastfälle auf Grundlastfälle reduziert werden können.

Die These kann unter Einschränkungen bestätigt werden. Für eine Kombination aus Druck- und Biegebelastung kann die Druckbelastung vernachlässigt werden, solange der Strukturkennwert der Druckbelastung nicht größer als der Strukturkennwert der Biegebelastung ist. Bis zu einem Strukturkennwert $K_D \leq 0,0025$ MPa kann die Druckbelastung unabhängig vom Strukturkennwert der Biegebelastung vollständig vernachlässigt werden. Das Profil verhält sich dann wie ein Träger unter reiner Biegebelastung. Dies gilt unabhängig vom Strukturkennwert der Biegung (eine Mindestbelastung von $K_M \leq 0,0001$ MPa wird vorausgesetzt). Für die Druckbelastung kann unter der Kombination mit der Biegebelastung keine solche Aussage getroffen werden. Auch bei einem deutlichen Überwiegen des Strukturkennwerts für Druck gegenüber dem für Biegung liegt ein Übergangsprofil von reiner Druckbelastung zur Biegebelastung vor.

Bei der Kombination von Druck- und Torsionsbelastung können ähnliche Aussagen getroffen werden. Auch hier gilt, solange der Strukturkennwert der Druckbelastung nicht größer als der Strukturkennwert der Torsionsbelastung ist, kann die Druckbelastung vernachlässigt werden. Solange der Strukturkennwert der Druckbelastung $K_D \leq 0,001$ MPa ist, kann die Druckbelastung unabhängig von der Torsionsbelastung vernachlässigt werden und das Profil als reiner Torsionsstab berechnet werden. Andersherum können wie bei der Kombination aus Druck- und Biegebelastung keine solche Aussagen getroffen werden.

Bei der Kombination von Biege- und Torsionsbelastung kann eine Vernachlässigung der jeweils anderen Belastung erfolgen, solange das Verhältnis der Strukturkennwerte $1/10$ nicht überschreitet. In dem Zwischenbereich liegt ein kontinuierlicher Übergang vor.

Zusammenfassend können also bei gewissen Verhältnissen und einer Dominanz einer Belastung die anderen vernachlässigt werden. Die Betrachtung über den Strukturkennwert gewährleistet, dass diese Beziehung unabhängig von Dimension der Geometrie und Belastungsart allgemein gültig ist.

8 Gewichtsoptimierte Auslegung von polygonisierten Profilen

Aufgrund der frei einstellbaren Koordinaten der Plattenränder des Profils existieren zu viele Freiheitsgrade, um wie bei den Grundprofilen eine geschlossen-analytische Lösung aufstellen zu können. Wie bei den kombinierten Lastfällen kann daher bei einer polygonisierten Profilform die gewichtsoptimierte Auslegung nur noch numerisch erfolgen. Mit steigender Anzahl an Plattenelementen in der Profilform erhöhen sich die möglichen Kombinationen zum Aufbau eines Profils erheblich. Ein Prüfen all dieser Kombination ist auch mit den besten Computern in endlicher Zeit nicht durchführbar. An dieser Stelle wird die Stärke des Evolutionären Algorithmus mit der metaheuristischen Vorgehensweise deutlich. Mit solch einem Ansatz können auch mit vergleichsweise geringem Rechenaufwand zufriedenstellende Ergebnisse ermittelt werden.

Der Optimierungsalgorithmus und der Ablauf der Optimierung sind praktisch gleich zum beschriebenen Aufbau aus den vorangegangenen Kapiteln. Die jeweiligen Prüfungen der Restriktionen können je nach Belastung entweder für einen einzigen Lastfall oder für eine kombinierte Belastung durchgeführt werden. Das Vorgehen mit dem Malus auf den Fitnesswert ist identisch. Der einzige Unterschied ist, dass nun nicht mehr die Breite b , die Höhe h und die Profildicke t die veränderlichen Größen sind. Einzig die Profildicke t verbleibt bei den Variablen. Mit der Umstellung auf den polygonisierten Ansatz sind für jeden Punkt des Polygons die x_2 - und die x_3 -Koordinate veränderlich. Sie werden also zwischen den Eltern ausgetauscht, um einen neuen Nachkommen zu zeugen, wobei jede Koordinate nachträglich mutieren kann.

Die Prüfung auf Lebensfähigkeit gelangt so zu einer wichtigen Bedeutung. Bei den Optimierungen der Grundprofile muss nur geprüft werden, ob die Profildicke nicht zu groß oder zu klein im Sinne der Plattentheorie ist. Beim frei-verschieblichen Ansatz der polygonisierten Profile muss dazu noch geprüft werden, ob sich Platten überschneiden, da dies mit der verwendeten Methode nicht erlaubt ist. Diese Profile können nicht mit einem Malus versehen werden, da in der Regel die Berechnung mit dem Wittrick-Williams-Algorithmus Fehler verursacht und so die Optimierung abgebrochen wird. Aus diesem Grund werden die fehlerhaften Individuen gelöscht und der Algorithmus erstellt solange neue Individuen, bis alle lebensfähig sind und die Prüfung der Restriktionen beginnen kann.

Die gewichtsoptimierte Auslegung von polygonisierten Profilen wird getrennt für die einzelnen Grundlastfälle durchgeführt. Zunächst für eine reine Druckbelastung, dann für eine reine Torsionsbelastung und abschließend für reine Biegebelastung. Bei allen drei Berechnungen wird die Anzahl an Koordinaten schrittweise jeweils um vier von vier auf 16 Koordinaten erhöht. Für jeden Grundlastfall werden die Rechnungen einmal mit einem Wert deutlich unterhalb ($K = 0,00025$ MPa) und einmal deutlich oberhalb ($K = 0,1$ MPa) des geschlossen-analytisch berechneten kritischen Strukturkennwertes \tilde{K} durchgeführt. So kann sichergestellt werden, dass

einmal eine optimierte Form für ein stabilitätsgefährdetes und einmal für ein festigkeitsgefährdetes polygonisiertes Bauteil berechnet wird.

Abschließend sei noch der Hinweis gegeben, dass die Ergebnisse des Evolutionären Algorithmus nicht zwangsläufig das Optimum finden, da es eine stochastische Methode ist. Zusätzlich streuen die Ergebnisse um so stärker, je weniger ausgeprägt das Optimum einer Optimierungsaufgabe ist. Bei diesen Berechnungen existiert kein ausgeprägtes Optimum, weswegen die Anordnung der Koordinaten bei unterschiedlichen Berechnungsdurchgängen mit gleicher Koordinatenanzahl stark streut, wobei die jeweiligen Fitnesswerte nur kleine Abweichungen zueinander aufweisen. Die ausgewählten Profile sind daher repräsentativ für die jeweilige Koordinatenanzahl zu betrachten, um Tendenzen und Logiken in der Auslegung beziehungsweise Optimierung abzuleiten. In jedem Querschnitt ist zum Vergleich auch der Querschnitt des gewichtsoptimalen Vierkantprofils als zugehöriges Grundprofil eingezeichnet.

8.1 Gewichtsoptimierte Auslegung polygonisierter Profile unter Druckbelastung

Bei den Berechnungen zu einem kleinen Strukturkennwert $K_D \ll \tilde{K}$ (siehe Abbildung 8.1) ist zu erkennen, dass mit einer Erhöhung der Koordinatenanzahl das Gewicht des Bauteils signifikant gesenkt werden kann. Die optimierte polygonisierte Form mit vier Koordinaten entspricht im Rahmen der Rechengenauigkeit der analytischen Auslegung.

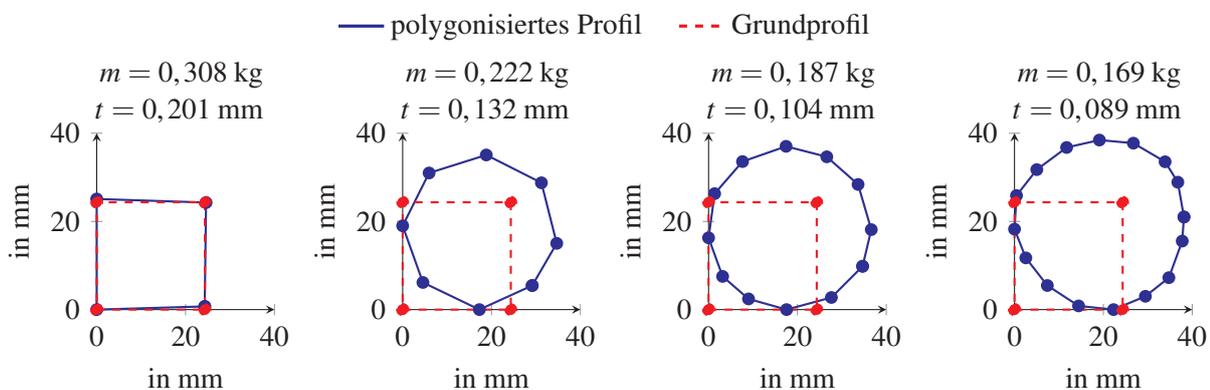


Abb. 8.1: Optimierte polygonisierte Querschnitte mit vier, acht, zwölf und 16 Koordinaten (von links nach rechts) unter dem Strukturkennwert $K_D = 0,00025 \text{ MPa}$. Zum Vergleich ist jeweils der gewichtsoptimierte Querschnitt mit dem Vierkantprofil als Grundprofil angegeben. Dieses weist bei einer Profildicke $t = 0,201 \text{ mm}$ einen Fitnesswert $m = 0,308 \text{ kg}$ auf. Die angegebenen Fitnesswerte beziehen sich auf das Gewicht eines Druckstabs aus Stahl und 2000 mm Länge.

Für alle vier Profile gilt, dass sich die Koordinaten so anordnen, dass sie ein Kreisprofil annähern. Dies gilt auch für das Profil mit vier Koordinaten, da ein Quadrat die bestmögliche Approximation

eines Kreises durch ein Rechteck ist. Bei einer höheren Anzahl an Koordinaten sind die Breiten der einzelnen Platten des polygonisierten Profils kürzer. Eine schmalere Platte ist weniger stark durch lokales Beulen gefährdet, weswegen die Plattendicke reduziert werden kann. Die optimale Geometrie bei einem kleinen Strukturkennwert ist dann erreicht, wenn lokales Beulen und Knicken gleichzeitig stattfindet, wobei die tatsächlich vorherrschende Spannung σ im Profil nicht die kritische Beul- und Knickspannung σ_{krit} überschreiten darf. Wenn die Profildicke t reduziert werden kann, weil die Breiten der Platten durch die Erhöhung der Polygonanzahl kleiner wird, steigt die Spannung σ im Profil. Der Durchmesser muss daher entsprechend mit erhöht werden, um das Flächenträgheitsmoment des Profils zu vergrößern. Auf diese Weise bleibt die kritische Knickspannung σ_{krit} weiterhin über der tatsächlich vorherrschenden Spannung σ im Profil beziehungsweise entspricht bei einer gewichtsoptimierten Auslegung genau dieser. Aus diesem Grund werden die Profile mit einer Erhöhung der Polygonanzahl größer. Da der Radius kubisch in das Flächenträgheitsmoment eingeht, erhöht sich die kritische Knickspannung σ_{krit} schneller als die tatsächlich vorherrschende Spannung σ im Profil durch die Reduktion der Profildicke t ansteigt. Dies bewirkt die Gewichtsreduktion. In Kapitel 5.1 wird der Kreisring nicht als Grundprofil besprochen. Ein optimaler relativer Radius R/l und eine optimale Profildicke t/R können aber mit der gleichen Herleitungsmethodik aufgestellt werden und lauten

$$\left(\frac{R}{l}\right)_{\text{opt,k}} = \left(\frac{2k_p K}{\pi^5 E}\right)^{\frac{1}{6}},$$

$$\left(\frac{t}{R}\right)_{\text{opt,k}} = \left(\frac{\pi K}{4k_p^2 E}\right)^{\frac{1}{3}},$$

wobei $k_p = 0,2$ für dünnwandige Kreisprofile anzunehmen ist [29]. Dadurch ergeben sich bei einer Belastung von $K_D = 0,00025$ MPa ein Radius $R = 21,520$ mm mit einer Profildicke $t = 0,062$ mm. Die Masse so eines Rohres liegt dann bei $m = 0,131$ kg. Der Kreisring bildet somit die Grenze, wohin sich die polygonisierten Profile mit Erhöhung der Koordinatenanzahl annähern. Veranschaulicht wird dies in Abbildung 8.2, in der die gewichtsoptimierten Profile inklusive des Kreisrings übereinander gelegt sind. Der Kreisring stellt somit die gewichtsoptimierte Geometrie für ein Profil unter Druckbelastung dar.

Die Ergebnisse der polygonisierten Profile bei einem großen Strukturkennwert $K_D \gg \tilde{K}$ sind in Abbildung 8.3 aufgezeigt. Der größte Unterschied zu den Ergebnissen bei einem kleinen Strukturkennwert ist, dass die Masse unabhängig von der Anzahl der Koordinaten ist. Dies trifft auch für das Profil aus der geschlossen-analytischen Lösung zu. In Kapitel 5.1.3 konnte festgestellt werden, dass das Materialversagen die einzige Restriktion für die Auslegung der optimalen Geometrie ist, solange Knicken und Beulen keine niedrigeren kritischen Spannungen σ_{krit} aufweisen. Daher existieren beliebig viele Lösungen. Eine Erhöhung der Koordinatenanzahl verändert nichts an diesem Zustand, da sie nur wieder andere Lösungen des unendlichen großen Lösungsraums darstellen. Aus diesem Grund wurde als zusätzliche sinnvolle weitere Restriktion

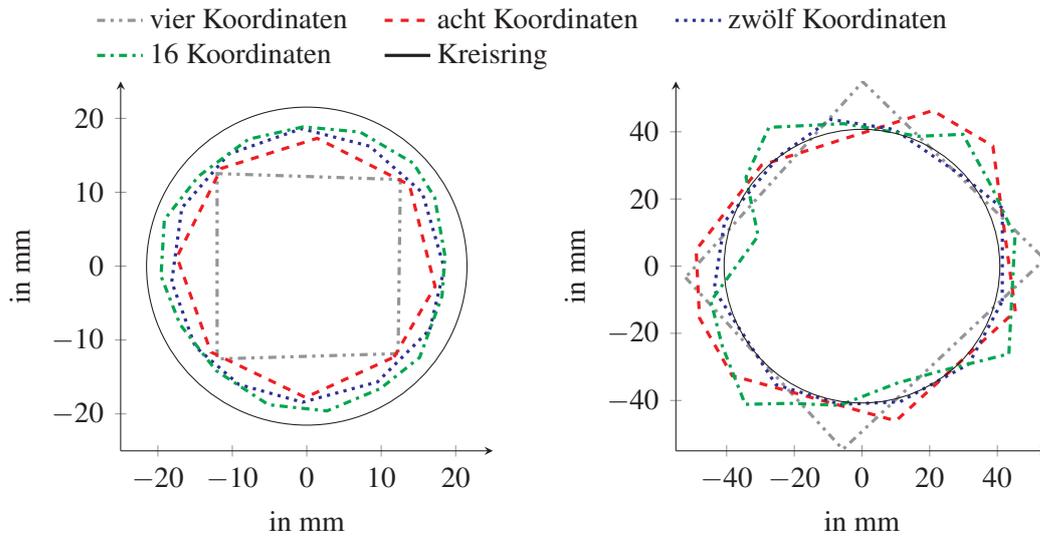


Abb. 8.2: Polygonisierte Profile (4, 8, 12, 16 Koordinaten) und der gewichtsoptimierte Kreisring bei einer Belastung von $K_D = 0,00025$ MPa (links) beziehungsweise $K_D = 0,1$ MPa (rechts). Die Schwerpunkte der Profile liegen übereinander.

daher eine möglichst kompakte Bauform beziehungsweise eine minimale umschlossene Fläche gewählt.

Mit der zusätzlichen Restriktion, ein möglichst kompaktes Profil zu erreichen, bilden sich ebenfalls Kreisringe als Lösung aus. Diese können wie bei einem kleinen Strukturkennwert mit dem gewichtsoptimierten Kreisring verglichen werden. Der relative Radius R/l und eine optimale Profildicke t/R lauten analog zum Vorgehen beim kleinen Strukturkennwert

$$\left(\frac{R}{l}\right)_{\text{opt,g}} = \left(\frac{2 \sigma_{\text{zul}}}{\pi^2 K}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left(\frac{t}{R}\right)_{\text{opt,g}} = \frac{\pi KE}{4 \sigma_{\text{zul}}},$$

wobei auch hier $k_p = 0,2$ für dünnwandige Kreisprofile anzunehmen ist [29]. Dadurch ergibt sich bei einer Belastung von $K_D = 0,1$ MPa ein Radius $R = 40,740$ mm mit einer Profildicke $t = 3,634$ mm. Die Masse so eines Rohres liegt dann bei $m = 14,623$ kg. Damit wiegt der analytisch optimierte Kreisring exakt so viel wie die polygonisierten Profile. Ein Vergleich des Kreisrings mit den polygonisierten Profilen ist in Abbildung 8.2 gegeben. Im Unterschied zu den Ergebnissen bei einem kleinen Strukturkennwert werden die angenäherten Kreise mit steigender Koordinatenzahl nicht größer, bis sie sich schließlich dem Kreisring anschmiegen. Da, wie oben schon gesagt, beliebig viele Lösungen mit gleicher Masse bei einer Druckbelastung unter großem Strukturkennwert existieren, wird der Kreisring auch mit wenigen Koordinaten direkt

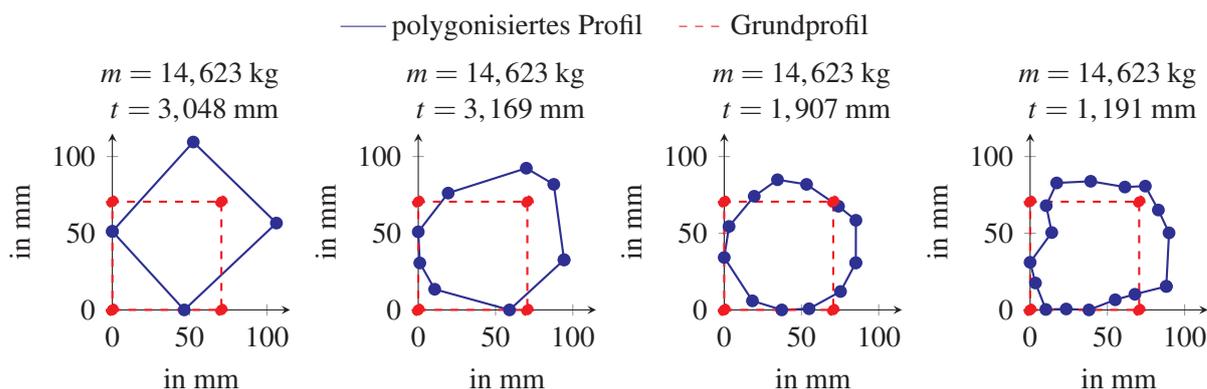


Abb. 8.3: Optimierte polygonisierte Querschnitte mit vier, acht, zwölf und 16 Koordinaten (von links nach rechts) unter dem Strukturkennwert $K_D = 0,1 \text{ MPa}$. Zum Vergleich ist jeweils der gewichtsoptimierte Querschnitt mit dem Vierkantprofil als Grundprofil angegeben. Dieses weist bei einer Profildicke $t = 3,296 \text{ mm}$ einen Fitnesswert $m = 14,623 \text{ kg}$ auf. Die angegebenen Fitnesswerte beziehen sich auf die Masse eines Druckstabs aus Stahl und 2000 mm Länge.

nachgebildet, da er die kompakteste Lösung darstellt. Dadurch, dass das Stabilitätsverhalten nicht mehr kritisch ist, können die Profile viel flexibler zwischen Positionierung der Koordinaten und Einstellen der passenden Profildicke optimiert werden. Daher wird jedes polygonisierte Profil, so gut wie es die Koordinatenanzahl hergibt, an den Kreisring angenähert.

8.2 Gewichtsoptimierte Auslegung polygonisierter Profile unter Torsionsbelastung

Auch bei der Torsionsbelastung gilt der Hinweis aus der Druckbelastung, dass die ausgewählten Profile repräsentativ für die jeweilige Koordinatenanzahl zu betrachten sind, um auch hier Tendenzen und Logiken in der Auslegung ableiten zu können. Bei jedem Querschnitt ist zum Vergleich auch der Querschnitt des gewichtsoptimalen Vierkantprofils als zugehöriges Grundprofil eingezeichnet.

Bei den Ergebnissen zu einem kleinen Strukturkennwert $K_T \ll \tilde{K}$ (siehe Abbildung 8.4) ist zu erkennen, dass mit einer Erhöhung der Koordinatenanzahl, die Masse des Bauteils signifikant gesenkt werden kann. Die Koordinaten werden so angeordnet, dass ein Kreisprofil angenähert wird. Das Verhalten ist identisch wie beim Druckstab. Mit einer Erhöhung der Koordinatenanzahl strebt das optimale Profil der Lösung des Kreisrings entgegen. Der Durchmesser erhöht sich mit jedem Schritt und die Wandstärke nimmt entsprechend ab, sodass sich die Masse aber weiterhin reduziert. Wie auch beim Druckstab kann auch für den Kreisring eine analytische gewichtsoptimierte Auslegung durchgeführt werden.

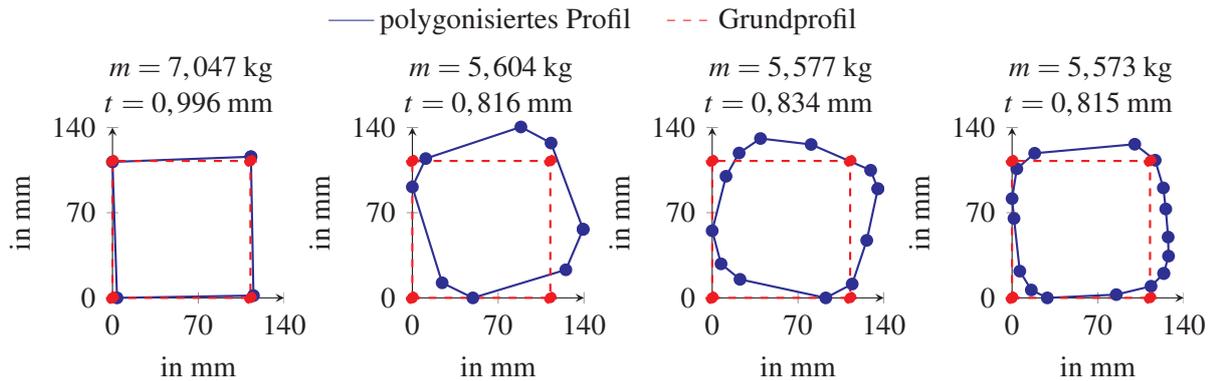


Abb. 8.4: Optimierte polygonisierte Querschnitte mit vier, acht, zwölf und 16 Koordinaten (von links nach rechts) unter dem Strukturkennwert $K_D = 0,00025$ MPa. Zum Vergleich ist jeweils der gewichtsoptimierte Querschnitt mit dem Vierkantprofil als Grundprofil angegeben. Dieses weist bei einer Profildicke $t = 0,996$ mm einen Fitnesswert $m = 7,047$ kg auf. Die angegebenen Fitnesswerte beziehen sich auf die Masse eines Torsionsstabs aus Stahl und 2000 mm Länge.

Die Herleitungsmethodik für den Kreisring ist entsprechend zu Kapitel 5.3 und der relative Radius R/l und die relative Profildicke t/R lauten dann

$$\left(\frac{R}{l}\right)_{\text{opt,k}} = \left(\frac{16k_\tau^4(1+\nu)^9}{\pi^5} \frac{K^5}{E^5 \vartheta_{\text{zul}}^9}\right)^{\frac{1}{22}},$$

$$\left(\frac{t}{R}\right)_{\text{opt,k}} = \left(\frac{1}{256\pi k_\tau^8(1+\nu)^7} \frac{K \vartheta_{\text{zul}}^7}{E}\right)^{\frac{1}{11}},$$

wobei in diesem Geometriebereich $k_\tau = 0,74$ für dünnwandige Kreisprofile unter Torsionsbelastung anzunehmen ist [29]. Dadurch ergibt sich bei einer Belastung von $K_T = 0,00025$ MPa ein Radius $R = 68,147$ mm mit einer Profildicke $t = 0,713$ mm. Die Masse eines solchen Rohres liegt dann bei $m = 4,802$ kg. In Abbildung 8.5 sind die gewichtsoptimierten Profile inklusive des Rohres übereinander gelegt. Mit steigender Koordinatenanzahl approximieren die Profile den Kreisring immer stärker, wobei der Durchmesser im Rahmen der Rechengenauigkeit konstant bleibt. Dies liegt an der Restriktion der Verdrehung, da ein großer Durchmesser eine höhere Torsionssteifigkeit bietet. Um die zulässige Verdrehung einhalten zu können, müssen alle Profile unabhängig von der Koordinatenanzahl den größtmöglichen Durchmesser aufweisen. Daher ist dieser für alle Profile schon im optimalen Bereich. Durch eine Erhöhung der Koordinatenanzahl kann dann die Profildicke t reduziert werden und nähert sich den Werten des Kreisrings an. Dies bewirkt die Massereduktion mit steigender Koordinatenanzahl.

Bei einem großen Strukturkennwert $K_T \gg \tilde{K}$ zeichnet sich für den Torsionsstab ein ähnliches Bild wie bei einem kleinen Strukturkennwert ab (siehe Abbildung 8.6). Die Profilform strebt mit einer

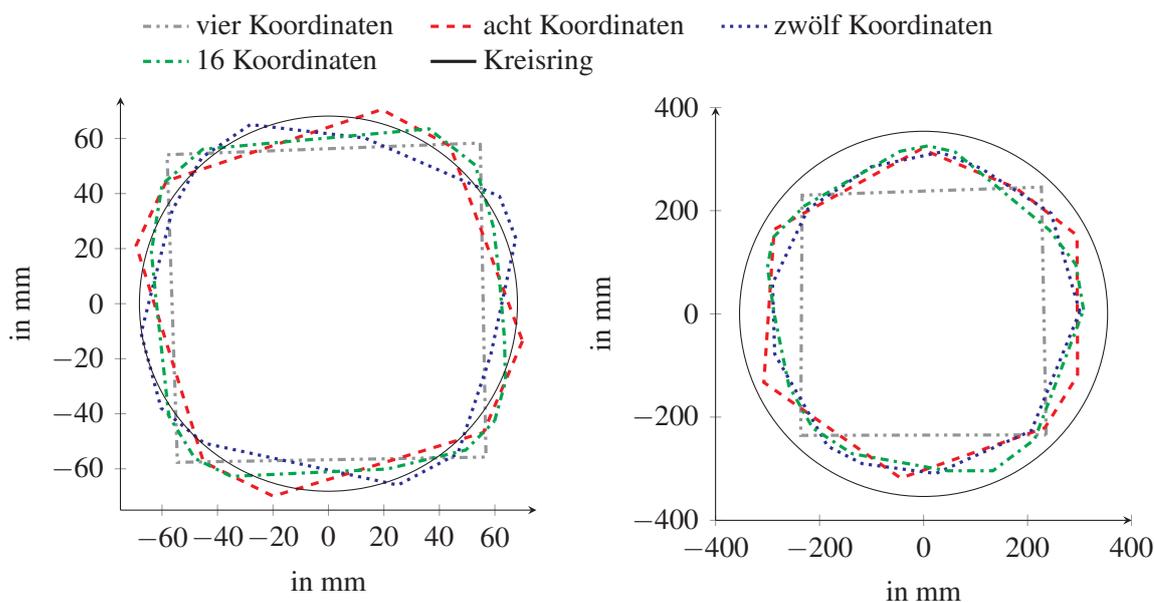


Abb. 8.5: Polygonisierte Profile (4, 8, 12, 16 Koordinaten) und der gewichtsoptimierte Kreisring bei einer Belastung von $K_T = 0,00025$ MPa (links) und $K_T = 0,1$ MPa (rechts). Die Schwerpunkte der Profile liegen übereinander.

Erhöhung der Koordinatenanzahl zu einem Kreisringprofil. Im Gegensatz zum Druckstab reduziert sich die Masse auch mit einer Erhöhung der Koordinatenanzahl weiter. Dies liegt daran, dass beim Torsionsstab bei einem großen Strukturkennwert das Optimum bei einem gleichzeitigen Einsätzen von Versagen durch lokalem Beulen und dem Erreichen der zulässigen Spannung σ_{zul} erreicht ist. Mit einer Erhöhung der Koordinatenanzahl sinkt die Breite der Polygone, wodurch die Profildicke reduziert werden kann, ohne dass die kritische Schubspannung τ_{kritBS} ansteigt. Da der Radius R beziehungsweise die Höhe h des Profils kubisch und die Profildicke nur einfach in die Schubspannung eingeht (siehe Gleichung 5.3.3), kann eine Reduktion der Profildicke t durch eine Erhöhung der Höhe h des Profils überkompensiert werden. Dies erlaubt die Massereduktion. Bei lediglich vier Koordinaten entspricht das Vierkant-Grundprofil dem frei optimierten Profil. Auch die Massen können im Rahmen der Rechengenauigkeit als gleich angesehen werden. Bei einer Erhöhung der Koordinatenanzahl sinkt die Masse signifikant um gut 20 %. Anschließend kann die Masse aber mit einer Erhöhung der Koordinatenanzahl nur noch geringfügig reduziert werden.

Wie bei einem kleinen Strukturkennwert, strebt das Ergebnis zur gewichtsoptimalen Auslegung eines Kreisrings hin. Auch für diesen kann analog zu den anderen Grundprofilen ein relativer Radius R/l und eine relative Profildicke t/R wie folgt aufgestellt werden:

$$\left(\frac{R}{l}\right)_{opt,g} = \left(\frac{k_\tau^4 K^5 E^4}{(2\pi)^5 \tau_{zul}^9}\right)^{\frac{1}{13}},$$

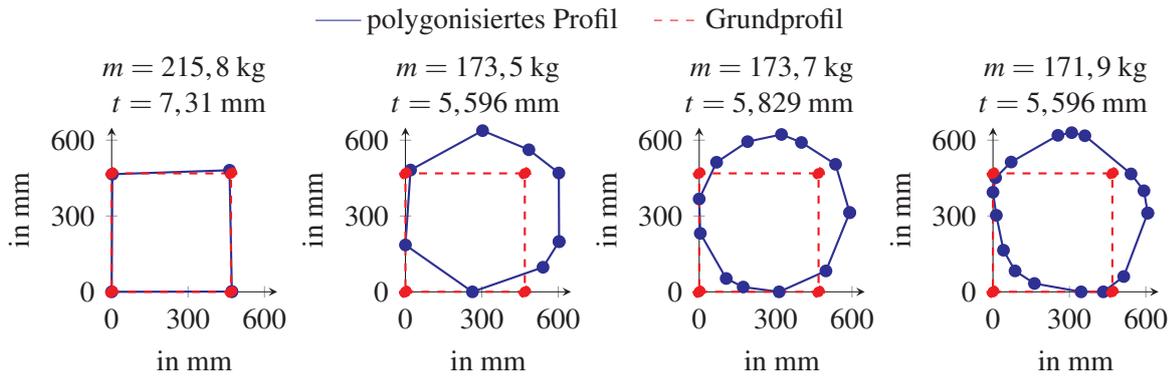


Abb. 8.6: Optimierte polygonisierte Querschnitte mit vier, acht, zwölf und 16 Koordinaten (von links nach rechts) unter dem Strukturkennwert $K_M = 0,1$ MPa. Zum Vergleich ist jeweils der gewichtsoptimierte Querschnitt mit dem Vierkantprofil als Grundprofil angegeben. Dieses weist bei einer Profildicke $t = 7,335$ mm einen Fitnesswert $m = 216,2$ kg auf. Die angegebenen Fitnesswerte beziehen sich auf die Masse eines Torsionsstabs aus Stahl und 2000 mm Länge.

$$\left(\frac{t}{R}\right)_{\text{opt, g}} = \left(\frac{2\pi \tau_{\text{zul}}^7}{k_t^6 KE^6}\right)^{\frac{2}{13}},$$

wobei auch in diesem Geometriebereich $k_t = 0,74$ für dünnwandige Kreisprofile unter Torsionsbelastung anzunehmen ist [29]. Dadurch ergibt sich bei einer Belastung von $K_T = 0,1$ MPa ein Radius $R = 353,817$ mm mit einer Profildicke $t = 4,097$ mm. Die Masse eines solchen Rohres mit 2000 mm Länge liegt dann bei $m = 143,171$ kg. In Abbildung 8.5 sind die gewichtsoptimierten Profile inklusive des Rohres übereinander gelegt. Wie beim Druckstab nähern sich die Geometrien bei jeder Erhöhung der Koordinatenanzahl immer weiter dem Rohr an. Dies trifft zum einen für den Radius R als auch für die Profildicke t und schließlich auch für die Masse m zu.

8.3 Gewichtsoptimierte Auslegung polygonisierter Profile unter Biegebelastung

Auch beim Biegeträger gelten die gleichen Einschränkungen wie bei den anderen beiden Belastungen. Die dargestellten Profile stehen repräsentativ für die Koordinatenanzahl und lassen auf Zusammenhänge und Tendenzen schließen. Sie stellen daher nicht absolut das beste Profil dar. Dies kann auch beim Biegeträger der Evolutionäre Algorithmus mit seinem metaheuristischen Verfahren nicht liefern.

In Abbildung 8.7 sind die optimierten polygonisierten Profile für einen kleinen Strukturkennwert $K_M \ll \tilde{K}$ aufgezeigt. Als Anmerkung sei gegeben, dass die Biegung, wie in Abbildung 5.5

dargestellt, wirkt. Dies bedeutet, dass im unteren Teil des Profils Druck- und im oberen Teil Zugspannungen vorherrschen. Im Gegensatz zu den Ergebnissen aus der Druck- und Torsionsbelastung, die beide relativ ähnlich waren und sich der optimierten Auslegung des Kreisrings angenähert haben, unterscheiden sich die Ergebnisse bei der Biegebelastung deutlich.

Zunächst fällt auf, dass in keinem Fall, also auch bei nur vier Koordinaten, ein Ergebnis erzielt wird, was annähernd dem Vierkantprofil als Grundprofil entspricht. Einzig ein Breiten-Höhenverhältnis $\delta < 1$ haben alle Lösungen gemeinsam. Der feste Wert für das optimale Breiten-Höhenverhältnis $\delta_{\text{opt}} = 0,26$ bei einem kleinen Strukturkennwert trifft auch nicht zu. Allgemein ist zu beobachten, dass beim Algorithmus der Großteil der Koordinaten in der unteren Hälfte also im Druckbereich des Profils angeordnet werden. Der Druckbereich bei einem Biegeträger ist durch lokales Beulen gefährdet. Die Breite der dort liegenden Polygone gibt daher die Profildicke vor. Mit einer Erhöhung der Koordinatenanzahl können die Abstände und somit die Breiten der einzelnen Platten reduziert werden, wodurch die Profildicke erheblich verkleinert werden kann. Bei 16 Koordinaten entspricht sie nur noch knapp einem Drittel der Profildicke bei der geschlossen-analytischen Lösung.

Die unter Zugspannung stehenden Teile des Profils sind nicht stabilitätsgefährdet, weswegen die Platten dort vergleichsweise breit sein können. Dadurch kann ein noch höheres Profil gebildet werden, was zusätzliche Biegesteifigkeit bereitstellt und die Durchbiegung begrenzt. Dies erlaubt eine deutliche Massereduktion auf fast die Hälfte der Masse im Vergleich zum Profil aus der geschlossen-analytischen Berechnung. So geartete Profilformen werden heutzutage bei stark unter Biegung belasteten Bauteilen eingesetzt, wie beispielsweise bei Teleskopkränen.

Bei dem Ergebnis mit vier Koordinaten ist zusätzlich sehr gut zu sehen, inwieweit eine Veränderung der Form eine starke Gewichtsreduktion ermöglicht. Durch die Drehung des Profils um 45° und eine Stauchung der Koordinaten hin zur Druckbelastung können knapp 20 % Masse eingespart werden. Allgemein ist zudem die Tendenz erkennbar, dass mit einer Erhöhung der Koordinatenanzahl die Profile breiter und höher werden.

Da die Druckseite mit einer Erhöhung der Koordinatenanzahl einen Halbkreis annähert, könnte sich auch für den Biegeträger die Betrachtung eines gewichtsoptimal ausgelegten Kreisrings anbieten. Analog zum Druck- beziehungsweise Torsionsstab kann die Herleitung wie in Kapitel 5.2 erfolgen. Der relative Radius R/l und die relative Profildicke t/R für einen kleinen Strukturkennwert lauten:

$$\left(\frac{R}{l}\right)_{\text{opt,k}} = \left(\frac{k_P}{c_f \pi} \frac{K}{E \left(\frac{f_{\text{zul}}}{l}\right)^2}\right)^{\frac{1}{5}},$$

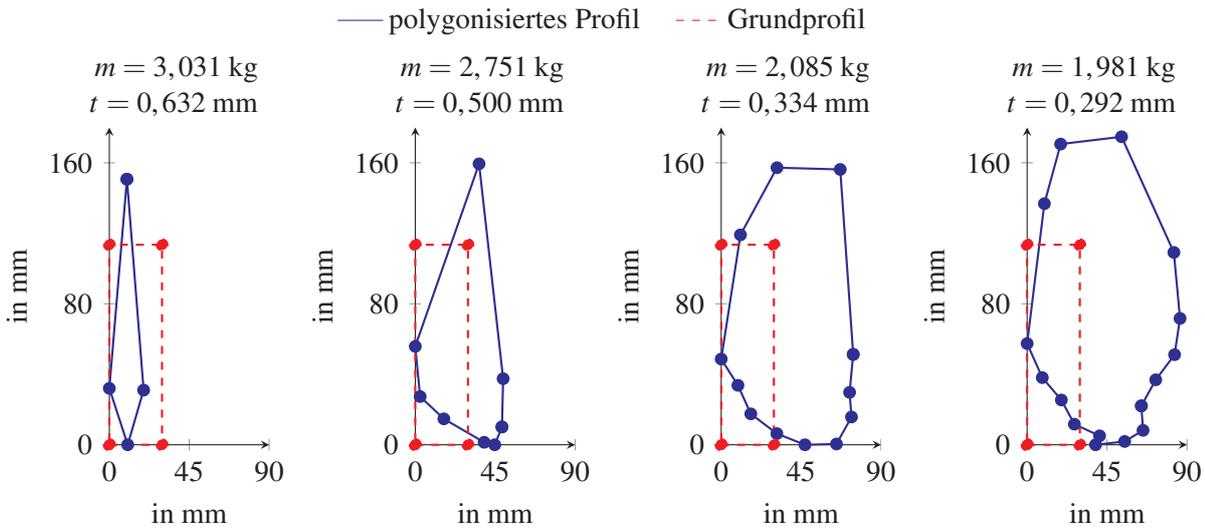


Abb. 8.7: Optimierte polygonisierte Querschnitte mit vier, acht, zwölf und 16 Koordinaten (von links nach rechts) unter dem Strukturkennwert $K_M = 0,00025$ MPa. Zum Vergleich ist jeweils der gewichtsoptimierte Querschnitt mit dem Vierkantprofil als Grundprofil angegeben. Dieses weist bei einer Profildicke $t = 0,843$ mm einen Fitnesswert $m = 3,795$ kg auf. Die angegebenen Fitnesswerte beziehen sich auf die Masse eines Biegeträgers aus Stahl und 2000 mm Länge.

$$\left(\frac{t}{R}\right)_{\text{opt,k}} = \left(\frac{c_f^3 K \left(\frac{f_{\text{zul}}}{t}\right)^3}{\pi k_p^4 E} \right)^{\frac{1}{5}}.$$

Wobei beim Biegeträger $k_p = 0,32$ für dünnwandige Kreisprofile anzunehmen ist [50]. Bei einer Belastung unter einem Strukturkennwert $K_M = 0,00025$ MPa ergeben sich ein Radius $R = 67,842$ mm und eine Profildicke $t = 0,374$ mm. Die Masse so eines Rohres mit 2000 mm Länge beträgt dann $m = 2,504$ kg. Wie direkt ersichtlich ist, liegt die Masse des gewichtsoptimierten Kreisrings deutlich über den Massen der polygonisierten Profile. In Abbildung 8.8 sind die Profile für einen besseren Vergleich übereinander gelegt. Dort ist zu erkennen, dass die polygonisierten Profile viel schmaler aber dafür deutlich höher als der Kreisring sind. Der Radius des abgerundeten unter Druckspannung stehenden Bereichs ist dadurch viel kleiner. Auf diese Weise kann die Profildicke im Vergleich zum Kreisring nochmals deutlich kleiner gewählt werden. Da der unter Zugspannung stehende Bereich nicht lokal stabilitätsgefährdet ist, kann dieser zur Erhöhung der Biegesteifigkeit deutlich verlängert werden. Auf diese Weise können die polygonisierten Profile im Vergleich zum Kreisring die Masse noch einmal reduzieren.

Bei einem großen Strukturkennwert $K_M \gg \tilde{K}$ verhalten sich die gewichtsoptimalen polygonisierten Profile ähnlich zu denen bei einem kleinen Strukturkennwert (siehe Abbildung 8.9). Im Druckspannungsbereich bildet sich zur Erhöhung der kritischen lokalen Beulspannung ein Halbkreis aus, wobei zur Minimierung der Polygonbreite möglichst viele Koordinaten in diesen

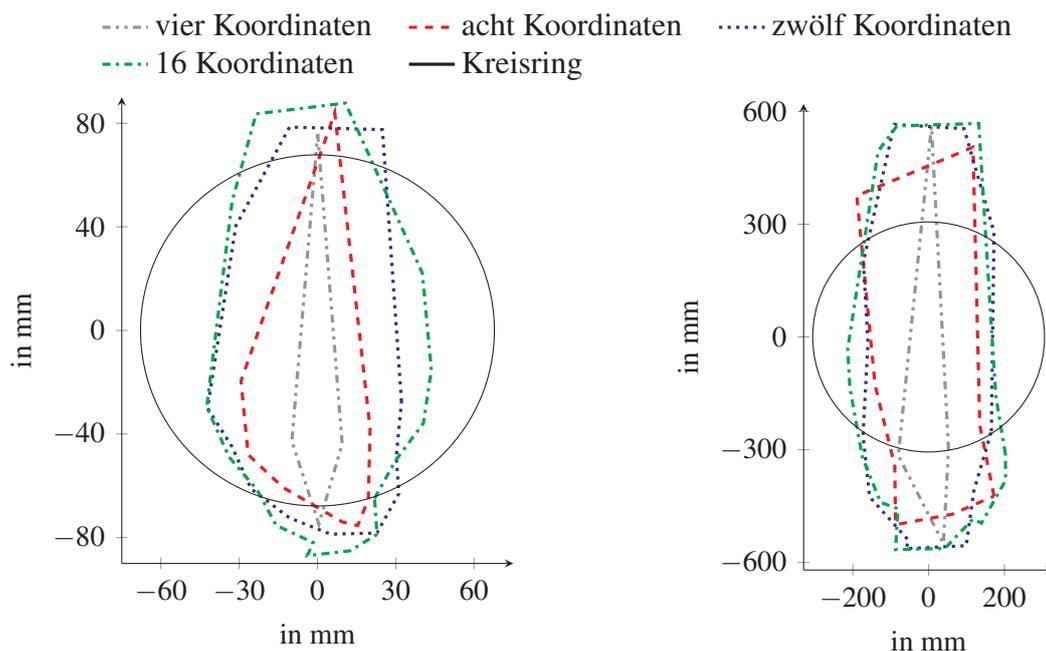


Abb. 8.8: Polygonisierte Profile (4, 8, 12, 16 Koordinaten) und der gewichtsoptimierte Kreisring bei einer Belastung von $K_M = 0,00025$ MPa (links) und $K_M = 0,1$ MPa (rechts). Die Schwerpunkte der Profile liegen übereinander.

Bereich gesetzt werden. Im Zugspannungsbereich ist das Profil zur Erhöhung der Biegesteifigkeit lang gestreckt. Wie auch bei den Profilen mit kleinem Strukturkennwert können keine Parallelen zum Vierkantprofil als Grundprofil ausgemacht werden. Dazu kommt, dass anders als bei den Profilen unter Druck- und Torsionsbelastung eine signifikante Gewichtsreduktion mit einer Erhöhung der Koordinatenanzahl erreicht werden kann. Dies liegt daran, dass bei den Profilen unter den anderen beiden Belastungsarten die Kreisform möglichst gut angenähert werden soll. Dies genügt schon mit acht Koordinaten, um die Masse entsprechend reduzieren zu können. Dazu ist eine möglichst symmetrische Verteilung der Koordinaten auf dem Kreisring wichtig, um eine optimale Masse zu erzielen. Beim Biegeträger hingegen erlaubt auch bei einem großen Strukturkennwert eine Erhöhung der Koordinatenanzahl eine Verdichtung der Koordinaten im Druckbereich, wodurch die Profildicke signifikant gesenkt werden kann. Das optimale Breiten-Höhenverhältnis δ_{opt} entspricht aber ungefähr dem des gewichtsoptimierten Rechtecks. Die Analytik bietet dadurch eine kleine Orientierung.

Der Vollständigkeit halber sind im folgenden die Zusammenhänge für den relativen Radius R/l und die relative Profildicke t/R gegeben:

$$\left(\frac{R}{l}\right)_{\text{opt,g}} = \left(\frac{k_p KE}{\pi \sigma_{\text{zul}}^2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

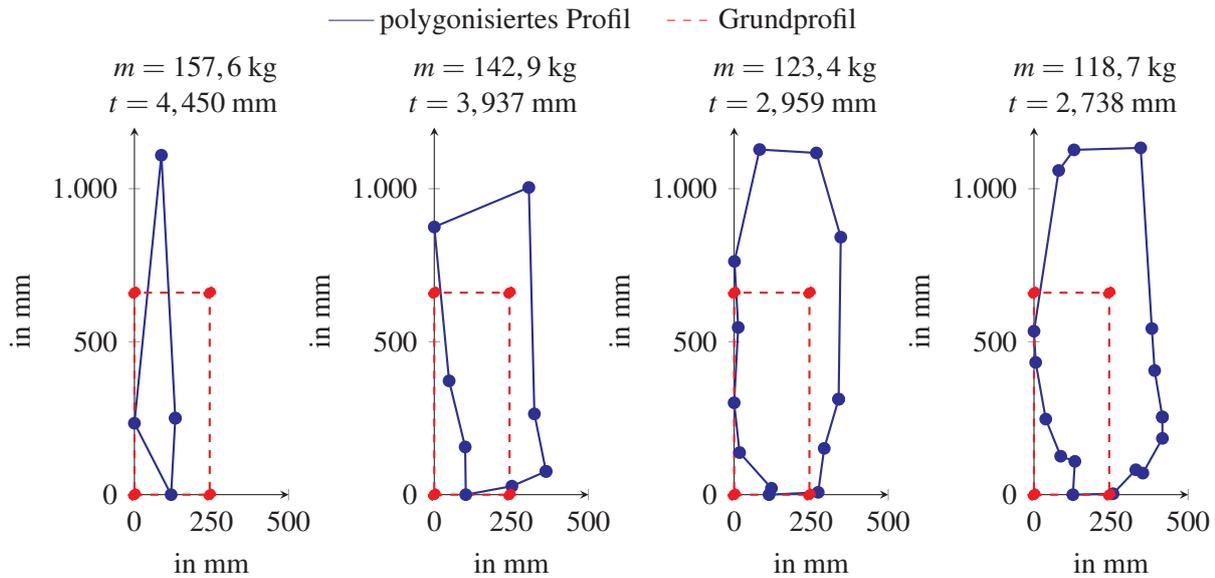


Abb. 8.9: Optimierte polygonisierte Querschnitte mit vier, acht, zwölf und 16 Koordinaten (von links nach rechts) unter dem Strukturkennwert $K_M = 0,1$ MPa. Zum Vergleich ist jeweils der gewichtsoptimierte Querschnitt mit dem Vierkantprofil als Grundprofil angegeben. Dieses weist bei einer Profildicke $t = 6,07$ mm einen Fitnesswert $m = 172,6$ kg auf. Die angegebenen Fitnesswerte beziehen sich auf die Masse eines Biegeträgers aus Stahl und 2000 mm Länge.

$$\left(\frac{t}{R}\right)_{\text{opt,g}} = \frac{1}{k_p} \frac{\sigma_{\text{zul}}}{E}.$$

Auch beim Biegeträger als dünnwandiges Kreisringprofil mit einem großen Strukturkennwert gilt $k_p = 0,32$ [50]. Bei einer Belastung unter einem Strukturkennwert $K_M = 0,1$ MPa ergeben sich ein Radius $R = 452,332$ mm und eine Profildicke $t = 2,894$ mm. Die Masse so eines Rohres mit 2000 mm Länge beträgt dann $m = 129,314$ kg. Eine Orientierung für die gewichtsoptimale Auslegung bei einem großen Strukturkennwert liefert der Kreisring ebenfalls nicht. In Abbildung 8.8 sind die entsprechenden Profile für einen besseren Vergleich übereinander gelegt. Durch den viel kleineren Radius im Druckspannungsbereich weisen die polygonisierten Profile eine deutlich geringe Profildicke auf. Die Biegesteifigkeit wird wiederum durch eine lang gestreckte Profilform gewährleistet, die der Kreisring nicht liefern kann.

8.4 Diskussion zur Idealisierung der Geometrie

Die Ergebnisse in diesem Kapitel belegen die zweite Unterthese der in dieser Arbeit behandelten Forschungshypothese. Mit der zweiten Unterthese wurde behauptet, dass die Ergebnisse der reduzierten Geometrien hinreichend genau sind und in den Grundmaßen die Ergebnisse für komplexere Profilformen vorwegnehmen können.

Diese These kann mit den hier vorgestellten Ergebnissen nur bedingt verifiziert werden. Für die Druck- und die Torsionsbelastung können die reduzierten Geometrien gute Ergebnisse für komplexere Profilformen liefern. Dies gilt insbesondere, wenn bei komplexeren Profilformen vom Kreisring als Optimum ausgegangen wird. Der Kreisring liefert die bestmöglichen Dimensionen des Profils und gibt als Vergleich an, wie viel Masse ein Bauteil durch eine Optimierung noch reduzieren kann. Soll das finale Bauteil eine rechteckige Profilform aufweisen, liefert die gewichtsoptimierte Auslegung sehr gute Anhaltspunkte für die gewichtsoptimalen Profildimensionen. Auch bei einem großen Strukturkennwert mit einer Druck- und Torsionsbelastung gelten diese Beziehungen. Hier muss allerdings ergänzt werden, dass durch die fehlende zweite Restriktion bei der Druckbelastung beliebig viele Profile existieren, die gewichtsoptimal sind. In der Konstruktion besteht daher eine sehr große Freiheit. Allerdings kann auch hier das Kreisringprofil als kompakteste Grenze verstanden werden.

Unter einer Biegebelastung wird die Unterthese allerdings durch die hier vorgestellten Ergebnisse falsifiziert. Bei einem kleinen Strukturkennwert weisen die polygonisierten Profile keine Gemeinsamkeiten mit der reduzierten Geometrie des Vierkantprofils auf. Auch kleinste Zusammenhänge, wie sie zum Beispiel beim Breiten-Höhenverhältnis δ vorliegen könnten, existieren nicht. Auch mit dem Kreisringprofil kann beim Biegeträger keine Annäherung getroffen werden. Als Orientierung kann lediglich die Erkenntnis dienen, dass solche Profile im Druckbereich abgerundet und zur Erhöhung der Biegesteifigkeit schlank und lang gezogen sein sollen. Bei einem großen Strukturkennwert existiert lediglich die weitere Orientierung, dass das optimale Breiten-Höhenverhältnis $\delta_{\text{opt}} \approx 0,35$ dem der gewichtsoptimierten Vierkantprofile annähernd entspricht.

Die Idealisierung auf Grundprofilformen ist zusammenfassend somit nur sehr eingeschränkt durchführbar. Geringe Erkenntnisse können mit dem Kreisring als Startpunkt der Auslegung gewonnen werden. Liegen allerdings Einschränkungen des Designgebiets vor, weil das auszulegende Bauteil gewisse optische Eigenschaften aufweisen soll oder für Lasteinleitung oder die Anbindung an andere Bauteile entsprechende Formen haben muss, bieten die gewichtsoptimierten Auslegungen nur noch eine Orientierung des Massepotentials. Mit einem Massevergleich zu den gewichtsoptimierten Vierkantprofilen beziehungsweise des gewichtsoptimierten Kreisrings können die möglichen Richtungen der weiteren Entwicklungsiteration gesetzt werden. Auch ist dann ersichtlich, wie viel Potential beispielsweise eine numerische Optimierung noch liefern kann und ob der Aufwand für diese dann überhaupt lohnenswert ist.

9 Zusammenfassung

Diese Arbeit hat die Möglichkeit der gewichtsoptimierten Vorauslegung von idealisierten Bauteilen zur Verkürzung der Auslegungsdauer neuer Bauteile zum Thema. Die aufgestellte Forschungshypothese sagte aus, dass mit einem hinsichtlich der Belastung und der Geometrie idealisierten Bauteil in der Vorauslegung hinreichend genaue Aussagen über das finale reale Bauteil getroffen werden können. Die These konnte mit den Ergebnissen dieser Arbeit unter bestimmten Voraussetzungen bei den Belastungen und der Zielgeometrie bestätigt werden. Die Ergebnisse wurden mit einem entwickelten Optimierungsalgorithmus erzielt, der eine Kombination aus der gewichtsoptimierten Auslegung nach PRECHTL und dem sogenannten Wittrick-Williams-Algorithmus ist.

PRECHTL hat die gewichtsoptimierte Auslegung aufgestellt, um über relative Profilgrößen einen allgemeinen Vergleich zwischen verschiedenen (hybriden) Bauweisen durchführen zu können. Die Grundlage seiner Auslegung bildet der Strukturkennwert, der durch das Verhältnis von Belastung und einer repräsentativen Länge (in dieser Arbeit wird die Länge l des Profils verwendet) eine allgemeine Betrachtung von Bauteilen zulässt. Mit den relativen Größen konnte PRECHTL gewichtsoptimierte Grundprofile unter den Grundlastfällen Druck und Biegung auslegen und miteinander vergleichen. Reale Bauteile müssen aber nicht den Grundprofilen entsprechen, sondern können über weitaus komplexere Formen verfügen. Zum Verifizieren seiner Hypothese, dass hybride Bauteile im Allgemeinen leichter sind als konventionelle isotrope Bauteile, war die vorgenommene Idealisierung ausreichend. Denn die von ihm aufgezeigten allgemeinen Vorteile hybrider Bauteile gelten auch ohne Idealisierung für komplexere Bauteile. Das Vorgehen der Idealisierung eröffnet die dieser Arbeit zugrunde liegende These, ob mit einer gewichtsoptimierten Auslegung eines idealisierten Bauteils schon hinreichend genaue Aussagen über das spätere finale Bauteil getroffen werden können. Grundsätzlich eignet sich die Methode der gewichtsoptimierten Auslegung auf Basis des Strukturkennwerts zum Belegen der These, da mit dem Strukturkennwert auch komplexere Geometrien und auch kombinierte Belastungen berechnet werden können. Daher wurde die Methode von PRECHTL in dieser Arbeit angepasst und weiterentwickelt.

Zunächst wurde die Methodik von PRECHTL für die Druck- und Biegebelastung nachvollzogen. Unsachgemäße Herleitungsschritte wurden korrigiert. Mit der gleichen Methodik wurde eine gewichtsoptimierte Auslegung für Profile unter Torsionsbelastung aufgestellt. Als weiteren nötigen Entwicklungsschritt zur Berechnung komplexer Geometrien und Belastungen wurde der Wittrick-Williams-Algorithmus mit dem Strukturkennwert verknüpft und in einen Optimierungsalgorithmus mit einem Evolutionären Algorithmus als Basis eingebettet. Der Wittrick-Williams-Algorithmus ist ein sehr schnelles numerisches Verfahren zur Stabilitätsberechnung von aus

Plattenelementen zusammengesetzten Profilen und versteiften Platten. Der Wittrick-Williams-Algorithmus wurde in dem entwickelten Evolutionären Algorithmus für die Berechnung der kritischen Last beim Stabilitätsversagen verwendet. Da beim Evolutionären Algorithmus sehr viele Rechendurchgänge durchgeführt werden müssen, bis das optimierte Ergebnis erzielt werden kann, können die Vorteile in der Rechengeschwindigkeit beim Wittrick-Williams-Algorithmus so voll zur Geltung kommen. Der Evolutionäre Algorithmus ist dann durch Strukturkennwert und Wittrick-Williams-Algorithmus in der Lage, beliebige aus Platten zusammengesetzte Profile unter verschiedenster Lastkombinationen zu berechnen.

Mit dem Optimierungsalgorithmus konnten optimierte Grundprofile unter den drei Grundlastfällen Druck, Biegung und Torsion berechnet werden. Diese wurden mit den Ergebnissen aus der gewichtsoptimierten Auslegung für die drei Grundlastfälle verglichen. Der Vergleich diente zur Validierung des Optimierungsalgorithmus, lieferte aber auch erweiterte Erkenntnisse, wodurch die Zusammenhänge bei der gewichtsoptimierten Auslegung angepasst werden konnten. Durch die Anpassung können noch leichtere und kompaktere Profile analytisch berechnet werden. Mit dem validierten Optimierungsalgorithmus konnten abschließend die zwei Unterthesen der in dieser Arbeit behandelten Forschungsthese getrennt voneinander belegt werden. Die Betrachtung erfolgte nur noch für das Vierkantprofil, da die anderen offenen Profilformen nicht genügend Torsionssteifigkeit bieten und jede Belastungskombination unter Einbezug der Torsion zu technisch nicht sinnvollen Ergebnissen führt. Für die erste Unterthese wurde das Vierkantprofil mit kombinierten Lastfällen berechnet, womit die gegenseitige Beeinflussung der Belastungen ermittelt werden konnte. Für die zweite Unterthese wurden frei polygonisierbare, geschlossene Profile unter den einzelnen nicht kombinierten Lastfällen optimiert ausgelegt. Dafür wurden die Anzahl der Polygone schrittweise erhöht und die Ergebnisse miteinander verglichen. Die aufgestellten Hypothesen konnten so mit Einschränkungen verifiziert werden.

9.1 Schlussfolgerung

Die formulierte Hypothese, dass mit einem hinsichtlich der Belastung und der Geometrie idealisierten Bauteil in der Vorauslegung hinreichend genaue Aussagen über das finale reale Bauteil getroffen werden können, kann unter Einschränkungen verifiziert werden. Für ein besseres Verständnis werden zunächst die beiden abgeleiteten Unterhypothesen besprochen. Diese lauten:

1. Kombinierte Lastfälle können auf die einzelnen Grundlastfälle Druck-, Biege- und Torsionsbelastung reduziert werden.
2. Die in der Vorauslegung ermittelten reduzierten Geometrien liefern hinreichend genaue Ergebnisse für komplexere Profilformen.

Eine Reduktion von kombinierten Lastfällen auf Grundlastfälle kann unter bestimmten Verhältnissen der Kombination erfolgen. Wenn die Kombination aus Druckbelastung und Biege- oder

Torsionsbelastungen besteht, überragt die Biege- beziehungsweise Torsionsbelastung die Druckbelastung deutlich. Solange der Strukturkennwert der Druckbelastung nicht größer als der Strukturkennwert der anderen Belastung ist, kann die Druckbelastung vernachlässigt werden. Wenn die Druckbelastung mit einem Strukturkennwert $K_D \leq 0,0025$ MPa respektive $K_D \leq 0,0001$ MPa vorliegt, kann sie unabhängig vom Strukturkennwert der anderen Belastung vernachlässigt werden. Andersherum können die anderen beiden Belastungen nie vernachlässigt werden. Eine Auslegung rein nach der Druckkraft ist daher nicht sinnvoll. Wenn eine höhere Druckbelastung vorliegt, existieren Übergangsbereiche, für die die Diagramme in Kapitel 7.1 respektive Kapitel 7.2 eine Orientierung für die Bestimmung der relativen Größen des Profils liefern. Bei einer Kombination von Biege- und Torsionsbelastung kann die jeweils andere Belastung vernachlässigt werden, wenn die Verhältnisse der Strukturkennwerte $1/10$ betragen. In dem Zwischenbereich existiert ebenso ein Übergangsbereich, für den die Diagramme in Kapitel 7.3 die entsprechende Orientierung für die relativen Größen bieten.

Die zweite Unterthese kann nur mit starken Einschränkungen bestätigt werden. Bei reinen Druck- und Torsionsbelastungen liefert das Vierkantprofil eine optimierte Auslegung, solange das Polygon selber nur aus vier Platten aufgebaut ist. Bei einer Erhöhung der Plattenzahl nähern sich die optimalen Profile einem Kreisring an. Dieser liefert die Grenze der Auslegung und kann natürlich auch als Grundprofil verwendet werden. Entsprechende analytische Zusammenhänge für die relativen Größen sind in Kapitel 8.1 respektive Kapitel 8.2 gegeben. Bei der Biegebelastung sind praktisch keine Zusammenhänge zwischen dem optimierten Grundprofil und den polygonisierten Varianten ersichtlich. Dies liegt an der Verteilung von Druck- und Zugspannung, weswegen eine Abrundung des Druckspannungsbereichs und eine Streckung des Zugspannungsbereichs eine deutliche Massereduktion erlaubt. Bei einem kleinen Strukturkennwert gelten noch nicht einmal einfache Grundzusammenhänge wie das optimale Breiten-Höhenverhältnis δ_{opt} . Bei einem großen Strukturkennwert entspricht das optimale Breiten-Höhenverhältnis $\delta_{\text{opt}} \approx 0,35$ allerdings ungefähr dem des gewichtsoptimierten Vierkantprofils, wodurch eine minimale Orientierung gegeben ist. Auch der gewichtsoptimierte Kreisring liefert im Gegensatz zur Druck- und Torsionsbelastung keine Anhaltspunkte für eine optimale Auslegung biegebelasteter Profile.

Zusammenfassend kann somit gesagt werden, dass mit einer gewichtsoptimierten Auslegung auf Basis von idealisierten Profilen und Belastungen unter bestimmten Voraussetzungen weiterführende Aussagen für das spätere reale Bauteil getroffen werden können. Dies kann somit die Anzahl an Iterationen im Auslegungsprozess verkürzen. Die wichtigsten Erkenntnisse sind, dass ab den oben stehenden Verhältnissen bei den Strukturkennwerten lediglich die Belastung durch den dominierenden Strukturkennwert betrachtet werden muss. Der Fehler durch die Reduktion auf einen Grundlastfall ist dann vernachlässigbar. Komplizierter sieht dies bei der Idealisierung der Geometrie aus. Hier lassen sich keine einfachen Regeln ableiten. Allerdings liefern die Idealisierungen als Kreisring bei reiner Druck- beziehungsweise Torsionsbelastung zumindest die Masse- und Auslegungsgrenzen des betrachteten Bauteils. Bei reiner Biegebelastung können praktisch keine Anhaltspunkte (ausgenommen das optimale Breiten-Höhenverhältnis $\delta_{\text{opt}} \approx 0,35$ bei einem großen Strukturkennwert) aus den gewichtsoptimierten Vierkant- beziehungsweise Kreisringprofilen gewonnen werden. Als Grundregel kann durch die polygonisierten Profile

allerdings abgeleitet werden, dass die Profile im Druckspannungsbereich abgerundet und zur Erhöhung der Biegesteifigkeit schlank und lang gestreckt sein sollten. Sobald die Geometrie komplexer wird, weil zum Beispiel Anbindungspunkte an andere Bauteile hergestellt werden müssen oder andere Designvorgaben existieren, können praktisch keine Orientierungen aus der Idealisierung der Geometrie gewonnen werden. Die Idealisierungen können allerdings das optimale Massepotential aufzeigen, wodurch leicht geprüft werden kann, inwieweit der Aufwand für eine weitere Optimierung lohnenswert ist.

Final gelten aber auch weiterhin die Erkenntnisse aus der Allgemeingültigkeit des Strukturkennwerts. Über die Idealisierung von Geometrie und Belastung können beispielsweise Materialien miteinander verglichen werden. Die durch die Idealisierung gewonnenen quantitativen Erkenntnisse können zumindest qualitativ auf komplexere Bauteile und Belastungen übertragen werden. Wenn zum Beispiel für das idealisierte Bauteil eine Aluminiumlegierung die gewichtsoptimale Wahl ist, wird dies auch bei dem realen Bauteil der Fall sein.

9.2 Ausblick

Der für diese Arbeit entwickelte Optimierungsalgorithmus bietet verschiedene Möglichkeiten für eine Weiterentwicklung. Der hier verwendete Algorithmus ist mit geringen Anpassungen in der Lage, versteifte Platten und polygonisierte Profile berechnen zu können. Er kann zum Beispiel für den Einsatz zur Berechnung von Schalen weiterentwickelt werden. Dafür kann entweder die Schale durch Plattenelemente approximiert werden oder ein Schalenelement kann zu dem Plattenelement hinzugefügt werden. Dafür müssten mathematisch die Einträge der Scheiben- und Plattensteifigkeitsmatrix hergeleitet werden. Mit so einem Algorithmus könnten anschließend beliebige aus Platten- und Teilschalenelementen aufgebaute Gebilde berechnet werden. Darüber hinaus kann im jetzigen Optimierungsalgorithmus nur mit isotropen Materialien gerechnet werden. WITTRICK und WILLIAMS haben den Algorithmus schon erweitert, um auch mit anisotropem Materialverhalten rechnen zu können, solange der Materialverbund symmetrisch aufgebaut ist. Dies kann ebenso in den Optimierungsalgorithmus implementiert werden, wie auch die Möglichkeit, nicht symmetrisches anisotropes Material verarbeiten zu können. Zusätzlich müssen die Dimensionen der Profile beziehungsweise Platten in Längsrichtung des Profils konstant sein. Auch hier würde eine Adaption zur Möglichkeit der Berechnung von sich verjüngenden oder erweiternden Profilen das Einsatzgebiet vergrößern. Daneben berechnet der Algorithmus bisher nur einzellige Profile. Eine Erweiterung auf zwei- beziehungsweise mehrzellige Profilformen ist über die Anpassung der Steifigkeitsmatrix leicht möglich. Mit den Erweiterungen könnten dann neben Schalen beispielsweise auch Flugzeug- oder Windradflügel berechnet werden.

Die Umsetzung als Evolutionärer Algorithmus eröffnet zusätzlich die Möglichkeit, grundlegende Zusammenhänge in der Strukturmechanik gezielt zu betrachten. Beim jetzigen Algorithmus wird die Anzahl an Polygonen vorher festgelegt. Eine dynamische Anpassung und somit eine Optimierung über die Evolution könnte hier Erkenntnisse liefern, in welchem Verhältnis die Polygone

zueinander optimal sind. Daneben könnte der Algorithmus auch dahingehend erweitert werden, auch interne Strukturen ausbilden zu lassen. Dies kann für die sehr freie Fertigung von Profilen durch Stangenpressen interessante und gewichtsoptimierte Geometrien liefern. Zusätzlich ist bisher die Profildicke im gesamten Profil konstant. Auch hier kann durch eine Erweiterung auch die Profildicke für jedes Polygon optimierbar gemacht werden. Abschließend kann der gesamte Algorithmus aus der vergleichsweise langsamen Sprache «Python» in schnellere Sprachen wie «C» oder «Julia» portiert werden.

Neben den technischen Erweiterungen können mit dem Algorithmus auch grundlegende Fragen geklärt werden. Wie verhält sich die Optimierung bei gesperrten Bereichen oder festgesetzten Koordinaten? Wie groß ist der Einfluss der Startpositionierung der Polygonkoordinaten auf die finale Geometrie? Und inwieweit lassen sich neben gewichtsoptimierten Zielsetzungen auch Fertigungsbedingungen und Kostenfunktionen einbinden? Durch die dynamische Anpassung der Evolution und der großen Flexibilität von Strukturkennwert sowie Wittrick-Williams-Algorithmus kann mit der in dieser Arbeit geschaffenen technischen Grundlage eine Vielfalt an strukturmechanischen Fragestellungen von einer neuen Seite betrachtet werden.

Literatur

- [1] Ursula BAZANT. Selbstständigkeit im konservativen Wohlfahrtssystem. Diss. Münster, 2009.
- [2] Gerhard PRECHTL. Zur systematischen und gewichtsoptimierten Auslegung von Tragwerkselement in Hybridbauweise. Diss. Linz, 11. Sep. 2014.
- [3] Wolfgang MAUS, Hrsg. Zukünftige Kraftstoffe: Energiewende des Transports als ein weltweites Klimaziel. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2019. DOI: 10.1007/978-3-662-58006-6.
- [4] EUROPEAN ENVIRONMENT AGENCY. und EUROPEAN TOPIC CENTRE FOR AIR POLLUTION AND CLIMATE CHANGE MITIGATION. Monitoring CO2 emissions from passenger cars and vans in 2018. LU: Publications Office, 2020. URL: <https://data.europa.eu/doi/10.2800/19757> (besucht am 26. 10. 2023).
- [5] Ein sauberer Planet für alle Eine Europäische strategische, langfristige Vision für eine wohlhabende, moderne, wettbewerbsfähige und klimaneutrale Wirtschaft. Brüssel: Europäische Kommission, 28. Nov. 2018. URL: <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/DE/TXT/PDF/?uri=CELEX:52018DC0773> (besucht am 26. 10. 2023).
- [6] Claudia KÄMPER, Heinrich HELMS und Kirsten BIEMANN. Wie klimafreundliche sind Elektroautos? Update Bilanz 2020. Berlin: Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz, nukleare Sicherheit und Verbraucherschutz, 2021. URL: https://www.bmu.de/fileadmin/Daten_BMU/Download_PDF/Verkehr/emob_klimabilanz_bf.pdf (besucht am 26. 10. 2023).
- [7] Felix REEK. Wasserstoff: Eine Alternative zum Elektroauto? In: Süddeutsche Zeitung (3. Nov. 2021). URL: <https://www.sueddeutsche.de/auto/wasserstoff-brennstoffzelle-1.5445458> (besucht am 01. 11. 2023).
- [8] Hannah DECKER. Knapper Wasserstoff - Forscher sehen E-Fuels in Autos kritisch. In: Frankfurter Allgemeine (8. Sep. 2023). URL: <https://www.faz.net/-iu4-bemjc> (besucht am 26. 10. 2023).
- [9] Kurzinformation Elektromobilität bzgl. Strom- und Ressourcenbedarf. Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz, nukleare Sicherheit und Verbraucherschutz, 2018. URL: https://www.bmu.de/fileadmin/Daten_BMU/Download_PDF/Verkehr/emob_strom_ressourcen_bf.pdf (besucht am 01. 11. 2023).

- [10] Christiane KÖLLNER. Verbrenner-Ausstieg: Die Pläne der Autohersteller Teil 2: Wer plant wann den Verbrennungsmotor-Ausstieg? Springer Professional. 9. Sep. 2021. URL: <https://www.springerprofessional.de/antriebsstrang/verkehrswende/verbrenner-ausstieg--die-plaene-der-autohersteller/18906344> (besucht am 26. 10. 2023).
- [11] Maximilian FICHTNER. Recent Research and Progress in Batteries for Electric Vehicles. In: Batteries & Supercaps 5.2 (Feb. 2022), e202100224. ISSN: 2566-6223, 2566-6223. DOI: 10.1002/batt.202100224.
- [12] Oliver SCHWEDES und Marcus KEICHEL, Hrsg. Das Elektroauto: Mobilität im Umbruch. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2021. DOI: 10.1007/978-3-658-32742-2.
- [13] Elias HOLDENRIED. Übergewicht bei E-Autos: Sind die schweren Batterien eine Kinderkrankheit oder bleiben sie der Dauerzustand? Business Insider. 22. Feb. 2022. URL: <https://www.businessinsider.de/wirtschaft/mobility/uebergewicht-bei-e-autos-sind-die-schweren-batterien-eine-kinderkrankheit-oder-bleiben-sie-der-dauerzustand-a/> (besucht am 01. 11. 2023).
- [14] James BRABAZON. Erde am Limit - Unser Planet im Zeitalter des Menschen. SRF school. Zürich, 5. Okt. 2022. URL: <https://www.srf.ch/sendungen/school/gesellschaft-ethik-religion/schwindende-ressourcen-erde-am-limit-unser-planet-im-zeitalter-des-menschen> (besucht am 26. 10. 2023).
- [15] Bundesregierung der BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND. Leichtbaustrategie der Bundesregierung. 27. Juli 2023. URL: <https://dserver.bundestag.de/btd/20/079/2007930.pdf> (besucht am 26. 10. 2023).
- [16] Beate BENDER und Kilian GERICKE, Hrsg. Pahl/Beitz Konstruktionslehre: Methoden und Anwendung erfolgreicher Produktentwicklung. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2021. DOI: 10.1007/978-3-662-57303-7.
- [17] Josef PONN und Udo LINDEMANN. Konzeptentwicklung und Gestaltung technischer Produkte. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008. DOI: 10.1007/978-3-540-68563-0.
- [18] Bernd KLEIN. FEM: Grundlagen und Anwendungen der Finite-Element-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015. DOI: 10.1007/978-3-658-06054-1.
- [19] Fritz KLOCKE und Wilfried KÖNIG. Fertigungsverfahren 1. VDI-Buch. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008. DOI: 10.1007/978-3-540-35834-3.
- [20] Herbert WAGNER. Remarks on airplane struts and girders under compressive and bending stresses: index values. 1929.
- [21] Adam ZAHORSKI. Effects of Material Distribution on Strength of Panels. In: Journal of the Aeronautical Sciences 11.3 (Juli 1944), S. 247–253. ISSN: 1936-9956. DOI: 10.2514/8.11138.

- [22] Evan H SCHUETTE. Charts for the Minimum-weight Design of the 24S-T Aluminum-alloy Flat Compression Panels with Longitudinal Z-section Stiffeners. 827. National Advisory Committee for Aeronautics, 1945.
- [23] D. J. FARRAR. The Design of Compression Structures for Minimum Weight. In: Journal of the Royal Aeronautical Society 53.467 (Nov. 1949), S. 1041–1052. ISSN: 0368-3931, 2398-4600. DOI: [10.1017/S0368393100120747](https://doi.org/10.1017/S0368393100120747).
- [24] M. F. ASHBY. Materials selection in mechanical design. 4th ed. OCLC: ocn639573741. Burlington, MA: Butterworth-Heinemann, 2011. 646 S. ISBN: 978-1-85617-663-7.
- [25] M. F. ASHBY und D. CEBON. Materials selection in mechanical design. In: Le Journal de Physique IV 03 (C7 Nov. 1993), S. C7–1–C7–9. ISSN: 1155-4339. DOI: [10.1051/jp4:1993701](https://doi.org/10.1051/jp4:1993701).
- [26] P. M. WEAVER und M. F. ASHBY. The Optimal Selection of Material and Section-shape. In: Journal of Engineering Design 7.2 (Juni 1996), S. 129–150. ISSN: 0954-4828, 1466-1837. DOI: [10.1080/09544829608907932](https://doi.org/10.1080/09544829608907932).
- [27] P.M. WEAVER. Design of laminated composite cylindrical shells under axial compression. In: Composites Part B: Engineering 31.8 (Jan. 2000), S. 669–679. ISSN: 13598368. DOI: [10.1016/S1359-8368\(00\)00029-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(00)00029-9).
- [28] David W. A. REES. Mechanics of Optimal Structural Design: Minimum Weight Structures. 1. Aufl. Wiley, 9. Okt. 2009. DOI: [10.1002/9780470749784](https://doi.org/10.1002/9780470749784).
- [29] Johannes WIEDEMANN. Leichtbau. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1. Jan. 2007. ISBN: 978-3-540-33656-3. DOI: [10.1007/978-3-540-33657-0](https://doi.org/10.1007/978-3-540-33657-0).
- [30] Bernd KLEIN. Statisch unbestimmte Strukturen. In: Leichtbau-Konstruktion: Berechnungsgrundlagen und Gestaltung (2009). ISBN: 383480701X Publisher: Springer, S. 184–191.
- [31] W. H. WITTRICK. A Unified Approach to the Initial Buckling of Stiffened Panels in Compression. In: Aeronautical Quarterly 19.3 (1. Jan. 1968), S. 265–283. ISSN: 0001-9259. DOI: [10.1017/S0001925900004662](https://doi.org/10.1017/S0001925900004662).
- [32] W. H. WITTRICK. General sinusoidal stiffness matrices for buckling and vibration analyses of thin flat-walled structures. In: International Journal of Mechanical Sciences 10.12 (1. Jan. 1968), S. 949–966. ISSN: 00207403. DOI: [10.1016/0020-7403\(68\)90049-0](https://doi.org/10.1016/0020-7403(68)90049-0).
- [33] Frederic W. WILLIAMS und William H. WITTRICK. Exact Buckling and Frequency Calculations Surveyed. In: Journal of Structural Engineering 109.1 (1. Jan. 1983), S. 169–187. ISSN: 0733-9445. DOI: [10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1983\)109:1\(169\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1983)109:1(169)).
- [34] Valentin Valentinovich NOVOZHILOV. Foundations of the nonlinear theory of elasticity. Rochester, N.Y.: Graylock Press, 1. Jan. 1953.

- [35] W. H. WITTRICK und P. L. V. CURZON. Stability Functions for the Local Buckling of Thin Flat-Walled Structures with the Walls in Combined Shear and Compression. In: *Aeronautical Quarterly* 19.4 (1. Jan. 1968), S. 327–351. ISSN: 0001-9259. DOI: [10.1017/S0001925900004728](https://doi.org/10.1017/S0001925900004728).
- [36] F. W. WILLIAMS und W. H. WITTRICK. Computational procedures for a matrix analysis of the stability and vibration of thin flat-walled structures in compression. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 11.12 (1. Jan. 1969), S. 979–998. ISSN: 00207403. DOI: [10.1016/0020-7403\(69\)90010-1](https://doi.org/10.1016/0020-7403(69)90010-1).
- [37] W. H. WITTRICK und F. W. WILLIAMS. Buckling and vibration of anisotropic or isotropic plate assemblies under combined loadings. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 16.4 (1. Jan. 1974), S. 209–239. ISSN: 00207403. DOI: [10.1016/0020-7403\(74\)90069-1](https://doi.org/10.1016/0020-7403(74)90069-1).
- [38] Fei HAN u. a. An improved Wittrick-Williams algorithm for beam-type structures. In: *Composite Structures* 204 (Nov. 2018), S. 560–566. ISSN: 02638223. DOI: [10.1016/j.compstruct.2018.07.108](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.07.108).
- [39] Md. Imran ALI u. a. Free vibration of sigmoid functionally graded plates using the dynamic stiffness method and the Wittrick-Williams algorithm. In: *Computers & Structures* 244 (Feb. 2021). ISSN: 00457949. DOI: [10.1016/j.compstruc.2020.106424](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2020.106424).
- [40] S. ILANKO und F. W. WILLIAMS. Wittrick–Williams algorithm proof of bracketing and convergence theorems for eigenvalues of constrained structures with positive and negative penalty parameters. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 75.1 (2. Juli 2008), S. 83–102. ISSN: 00295981, 10970207. DOI: [10.1002/nme.2247](https://doi.org/10.1002/nme.2247).
- [41] Xiang LIU u. a. Exact wave propagation analysis of lattice structures based on the dynamic stiffness method and the Wittrick–Williams algorithm. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 174 (Juli 2022), S. 109044. ISSN: 08883270. DOI: [10.1016/j.ymsp.2022.109044](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2022.109044).
- [42] Horst BAIER, Christoph SEESSELBERG und Bernhard SPECHT. *Optimierung in der Strukturmechanik*. Springer-Verlag, 2013. ISBN: 3-322-90700-7.
- [43] Axel SCHUMACHER. *Weitere exemplarische Anwendungen der Strukturoptimierung*. In: *Optimierung mechanischer Strukturen: Grundlagen und industrielle Anwendungen* (2005). ISBN: 3540218874 Publisher: Springer, S. 237–266.
- [44] K. ZILCH, C. J. DIEDERICHS und R. KATZENBACH. *Rozdz. 2.1. 5. Baubetriebsrechnung*. W: *Handbuch für Bauingenieure*. KJ Beckmann. Springer-Verlag, Heidelberg, 2012.
- [45] Christian PETERSEN. *Stahlbau: Grundlagen der Berechnung und baulichen Ausbildung von Stahlbauten*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2013. DOI: [10.1007/978-3-8348-8610-1](https://doi.org/10.1007/978-3-8348-8610-1).
- [46] Stephen P. TIMOSHENKO und James M. GERE. *Theory of elastic stability*. Courier Corporation, 2009. ISBN: 0-486-47207-8.

- [47] W. D. KROLL, Gordon P. FISHER und George J. HEIMERL. Charts for calculation of the critical stress for local instability of columns with I-, Z-, channel, and rectangular-tube section. National Advisory Committee for Aeronautics, 1943. ISBN: 1-68015-650-0.
- [48] Herbert BECKER. Handbook of structural stability part II: buckling of composite elements. 1957.
- [49] Eugene E. LUNDQUIST, Elbridge Z. STOWELL und Evan H. SCHUETTE. Principles of moment distribution applied to stability of structures composed of bars or plates. 1943.
- [50] Handbuch Strukturberechnung - Fundamentals and Methods for Aeronautical Design and Analyses. Version 1.4.0. Industrie-Ausschuss-Struktur-Berechnungsunterlagen, 2020.
- [51] Alf PFLÜGER. Stabilitätsprobleme der Elastostatik. Springer-Verlag, 2013. ISBN: 3-662-09994-2.
- [52] Christian MITTELSTEDT. Rechenmethoden des Leichtbaus: Grundlagen, Stäbe und Balken, Energiemethoden. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2021. DOI: [10.1007/978-3-662-62720-4](https://doi.org/10.1007/978-3-662-62720-4).
- [53] Heinrich DUBBEL, Karl-Heinrich GROTE und J. FELDHUSEN. Taschenbuch für den Maschinenbau. 22., neubearbeitete und erw. Aufl. OCLC: ocn159921365. Berlin ; New York: Springer, 2007. 1 S. ISBN: 978-3-540-49714-1.
- [54] Jürgen DANKERT und Helga DANKERT. Technische Mechanik: Statik, Festigkeitslehre, Kinematik/Kinetik. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2013. DOI: [10.1007/978-3-8348-2235-2](https://doi.org/10.1007/978-3-8348-2235-2).
- [55] M. STOLPE. On the reformulation of topology optimization problems as linear or convex quadratic mixed 0–1 programs. In: Optimization and Engineering 8.2 (25. Mai 2007), S. 163–192. ISSN: 1389-4420, 1573-2924. DOI: [10.1007/s11081-007-9005-3](https://doi.org/10.1007/s11081-007-9005-3).
- [56] W. GUTKOWSKI, J. BAUER und J. ZAWIDZKA. An effective method for discrete structural optimization. In: Engineering Computations 17.4 (Juni 2000), S. 417–426. ISSN: 0264-4401. DOI: [10.1108/02644400010334829](https://doi.org/10.1108/02644400010334829).
- [57] D. S. JUANG und W. T. CHANG. A revised discrete Lagrangian-based search algorithm for the optimal design of skeletal structures using available sections. In: Structural and Multidisciplinary Optimization 31.3 (März 2006), S. 201–210. ISSN: 1615-147X, 1615-1488. DOI: [10.1007/s00158-005-0571-8](https://doi.org/10.1007/s00158-005-0571-8).
- [58] Mathias STOLPE. Truss optimization with discrete design variables: a critical review. In: Structural and Multidisciplinary Optimization 53.2 (Feb. 2016), S. 349–374. ISSN: 1615-147X, 1615-1488. DOI: [10.1007/s00158-015-1333-x](https://doi.org/10.1007/s00158-015-1333-x).
- [59] Kusum DEEP u. a. A real coded genetic algorithm for solving integer and mixed integer optimization problems. In: Applied Mathematics and Computation 212.2 (Juni 2009), S. 505–518. ISSN: 00963003. DOI: [10.1016/j.amc.2009.02.044](https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.02.044).

- [60] S. RAJEEV und C. S. KRISHNAMOORTHY. Discrete Optimization of Structures Using Genetic Algorithms. In: *Journal of Structural Engineering* 118.5 (Mai 1992), S. 1233–1250. ISSN: 0733-9445, 1943-541X. DOI: [10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1992\)118:5\(1233\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1992)118:5(1233)).
- [61] Wenyan TANG, Liyong TONG und Yuanxian GU. Improved genetic algorithm for design optimization of truss structures with sizing, shape and topology variables: IMPROVED GENETIC ALGORITHM FOR DESIGN OPTIMIZATION. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 62.13 (7. Apr. 2005), S. 1737–1762. ISSN: 00295981. DOI: [10.1002/nme.1244](https://doi.org/10.1002/nme.1244).
- [62] Takao YOKOTA, Mitsuo GEN und Yin-Xiu LI. Genetic algorithm for non-linear mixed integer programming problems and its applications. In: *Computers & Industrial Engineering* 30.4 (Sep. 1996), S. 905–917. ISSN: 03608352. DOI: [10.1016/0360-8352\(96\)00041-1](https://doi.org/10.1016/0360-8352(96)00041-1).
- [63] J.F. SCHUTTE und A.A. GROENWOLD. Sizing design of truss structures using particle swarms. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 25.4 (Okt. 2003), S. 261–269. ISSN: 1615-147X, 1615-1488. DOI: [10.1007/s00158-003-0316-5](https://doi.org/10.1007/s00158-003-0316-5).
- [64] Xin-She YANG. *Engineering optimization: an introduction with metaheuristic applications*. John Wiley & Sons, 2010. ISBN: 0-470-64041-3.
- [65] Alberto COLORNI, Marco DORIGO und Vittorio MANIEZZO. „Distributed optimization by ant colonies“. In: *Proceedings of the first European conference on artificial life*. Bd. 142. Paris, France, 1991, S. 134–142.
- [66] Oğuzhan HASANÇEBİ und Mp SAKA. A reformulation of the ant colony optimization algorithm for large scale structural optimization. In: (2011).
- [67] El-Ghazali TALBI. *Metaheuristics: from design to implementation*. Hoboken, NJ: Wiley, 2009. 593 S. ISBN: 978-0-470-27858-1.
- [68] Bao-wei XIANG, Rong-qin CHEN und TAO ZHANG. „Optimization of trusses using simulated annealing for discrete variables“. In: *2009 International Conference on Image Analysis and Signal Processing*. 2009 International Conference on Image Analysis and Signal Processing. Linhai, China: IEEE, 2009, S. 410–414. ISBN: 978-1-4244-3987-4. DOI: [10.1109/IASP.2009.5054647](https://doi.org/10.1109/IASP.2009.5054647).
- [69] Warren HARE, Julie NUTINI und Solomon TESFAMARIAM. A survey of non-gradient optimization methods in structural engineering. In: *Advances in Engineering Software* 59 (Mai 2013), S. 19–28. ISSN: 09659978. DOI: [10.1016/j.advengsoft.2013.03.001](https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2013.03.001).
- [70] S MANOHARAN und S SHANMUGANATHAN. A comparison of search mechanisms for structural optimization. In: *Computers & Structures* 73.1 (Okt. 1999), S. 363–372. ISSN: 00457949. DOI: [10.1016/S0045-7949\(98\)00287-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00287-9).
- [71] C.V. CAMP und M. FARSHCHIN. Design of space trusses using modified teaching-learning based optimization. In: *Engineering Structures* 62-63 (März 2014), S. 87–97. ISSN: 01410296. DOI: [10.1016/j.engstruct.2014.01.020](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.01.020).

- [72] Tayfun DEDE. Application of Teaching-Learning-Based-Optimization algorithm for the discrete optimization of truss structures. In: *KSCE Journal of Civil Engineering* 18.6 (Sep. 2014), S. 1759–1767. ISSN: 1226-7988, 1976-3808. DOI: [10.1007/s12205-014-0553-8](https://doi.org/10.1007/s12205-014-0553-8).
- [73] Shouheng TUO u. a. HSTLBO: A hybrid algorithm based on Harmony Search and Teaching-Learning-Based Optimization for complex high-dimensional optimization problems. In: *PLOS ONE* 12.4 (12. Apr. 2017). Hrsg. von Wen-Bo DU, e0175114. ISSN: 1932-6203. DOI: [10.1371/journal.pone.0175114](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0175114).
- [74] Poonam SAVSANI und Vimal SAVSANI. Passing vehicle search (PVS): A novel metaheuristic algorithm. In: *Applied Mathematical Modelling* 40.5 (März 2016), S. 3951–3978. ISSN: 0307904X. DOI: [10.1016/j.apm.2015.10.040](https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.10.040).
- [75] Ghanshyam G. TEJANI u. a. Size, shape, and topology optimization of planar and space trusses using mutation-based improved metaheuristics. In: *Journal of Computational Design and Engineering* 5.2 (), S. 198–214. ISSN: 2288-5048. DOI: [10.1016/j.jcde.2017.10.001](https://doi.org/10.1016/j.jcde.2017.10.001).
- [76] Christian BLUME und Wilfried JAKOB. GLEAM: General Learning Evolutionary Algorithm and Method ; ein evolutionärer Algorithmus und seine Anwendungen. Schriftenreihe des Instituts für Angewandte Informatik / Automatisierungstechnik am Karlsruher Institut für Technologie 32. Karlsruhe: KIT Scientific Publishing, 2009. 196 S. ISBN: 978-3-86644-436-2.
- [77] Charles DARWIN. *On the origin of species by means of natural selection: or, the preservation of favoured races in the struggle for life*. London, UK: Murray, 1860.
- [78] Volker NISSEN. *Evolutionäre algorithmen: darstellung, beispiele, betriebswirtschaftliche anwendungsmöglichkeiten*. Springer-Verlag, 2013. ISBN: 3-322-83430-1.
- [79] Thomas BÄCK, Frank HOFFMEISTERT und H.-P. SCHWEFEL. „A Survey of Evolution Strategies“. In: *4th Int. Conf. on Genetic Algorithms*. Hrsg. von R. K. BELEW und L. B. BOOKER. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann, 1991, S. 2–9.
- [80] Frank HOFFMEISTER und Thomas BÄCK. Genetic Algorithms and evolution strategies: Similarities and differences. In: *Parallel Problem Solving from Nature*. Hrsg. von Hans-Paul SCHWEFEL und Reinhard MÄNNER. Bd. 496. Series Title: Lecture Notes in Computer Science. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 1991, S. 455–469. ISBN: 978-3-540-54148-6. DOI: [10.1007/BFb0029787](https://doi.org/10.1007/BFb0029787).
- [81] Ingo RECHENBERG. *Evolutionsstrategie: Optimierung technischer systeme nach prinzipien der biologischen evolution, frommann–holzboog*. In: *Stuttgart-Bad Cannstatt (1973)*, S. 47.
- [82] Ingo RECHENBERG. *Evolutionsstrategie '94. Werkstatt Bionik und Evolutionstechnik*. Stuttgart-Bad Cannstatt: Frommann-Holzboog, 1994.

- [83] John H. HOLLAND. *Adaptation in Natural and Artificial Systems - An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control, and Artificial I.* OCLC: 1235962848. Cambridge: The MIT Press, 2019. ISBN: 978-0-262-27555-2.
- [84] David B. FOGEL. *Artificial Intelligence through Simulated Evolution.* In: *Evolutionary Computation.* IEEE, 2009. ISBN: 978-0-470-54460-0. DOI: [10.1109/9780470544600.ch7](https://doi.org/10.1109/9780470544600.ch7).
- [85] John R. KOZA. *Genetic programming as a means for programming computers by natural selection.* In: *Statistics and Computing 4.2 (Juni 1994).* ISSN: 0960-3174, 1573-1375. DOI: [10.1007/BF00175355](https://doi.org/10.1007/BF00175355).
- [86] John R. KOZA. *Genetic programming II: automatic discovery of reusable programs.* MIT press, 1994. ISBN: 0-262-11189-6.
- [87] John R. KOZA. *Genetic programming III: Darwinian invention and problem solving.* Bd. 3. Morgan Kaufmann, 1999. ISBN: 1-55860-543-6.
- [88] K. FALKENHAUSEN. *Optimierung regionaler Entsorgungssysteme mit der Evolutionsstrategie.* In: *Vorträge der Jahrestagung 1979 / Papers of the Annual Meeting 1979.* Hrsg. von J. SCHWARZE u. a. Heidelberg: Physica-Verlag HD, 1980, S. 46–51. DOI: [10.1007/978-3-662-00401-2_5](https://doi.org/10.1007/978-3-662-00401-2_5).
- [89] Joachim BORN und Klaus BELLMANN. *Numerical adaptation of parameters in simulation models by using evolution strategies.* In: *Molecular genetic information systems: Modelling and simulation (1983),* S. 291–320.
- [90] Joachim BORN, Hans-Michael VOIGT und Ivan SANTIBÁNEZ-KOREF. „Alternative Evolution Strategies to Global Optimization.“ In: *PPSN.* 1992, S. 189–198.
- [91] Hans-Paul SCHWEFEL. *Numerical optimization of computer models.* John Wiley & Sons, Inc., 1981. ISBN: 0-471-09988-0.
- [92] Thomas BÄCK und Hans-Paul SCHWEFEL. *An Overview of Evolutionary Algorithms for Parameter Optimization.* In: *Evolutionary Computation 1.1 (März 1993),* S. 1–23. ISSN: 1063-6560, 1530-9304. DOI: [10.1162/evco.1993.1.1.1](https://doi.org/10.1162/evco.1993.1.1.1).
- [93] Hans-Paul Paul SCHWEFEL. *Evolution and optimum seeking: the sixth generation.* John Wiley & Sons, Inc., 1993. ISBN: 0-471-57148-2.
- [94] Hans-Georg BEYER. *The Theory of Evolution Strategies.* Bearb. von G. ROZENBERG u. a. *Natural Computing Series.* Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2001. DOI: [10.1007/978-3-662-04378-3](https://doi.org/10.1007/978-3-662-04378-3).
- [95] W. H. WITTRICK und P.L.V. CURZON. *Local buckling of long polygonal tubes in combined compression and torsion.* In: *International Journal of Mechanical Sciences* 10.10 (1. Jan. 1968), S. 849–857. ISSN: 00207403. DOI: [10.1016/0020-7403\(68\)90024-6](https://doi.org/10.1016/0020-7403(68)90024-6).

-
- [96] W. H. WITTRICK und F. W. WILLIAMS. A GENERAL ALGORITHM FOR COMPUTING NATURAL FREQUENCIES OF ELASTIC STRUCTURES. In: *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 24.3 (1. Jan. 1971), S. 263–284. ISSN: 0033-5614. DOI: [10.1093/qjmam/24.3.263](https://doi.org/10.1093/qjmam/24.3.263).
- [97] F. W. WILLIAMS und C. J. WRIGHT. A compact computer program for calculating buckling stresses and natural frequencies of vibration of prismatic plate assemblies. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 12.9 (1. Jan. 1978). Num Pages: 28, S. 1429–1456. ISSN: 0029-5981. DOI: [10.1002/nme.1620120911](https://doi.org/10.1002/nme.1620120911).
- [98] F. W. WILLIAMS und W. P. HOWSON. Compact computation of natural frequencies and buckling loads for plane frames. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 11.7 (1. Jan. 1977), S. 1067–1081. ISSN: 0029-5981. DOI: [10.1002/nme.1620110704](https://doi.org/10.1002/nme.1620110704).
- [99] Min-Yuan CHENG u. a. A Hybrid Harmony Search algorithm for discrete sizing optimization of truss structure. In: *Automation in Construction* 69 (Sep. 2016), S. 21–33. ISSN: 09265805. DOI: [10.1016/j.autcon.2016.05.023](https://doi.org/10.1016/j.autcon.2016.05.023).
- [100] Wilfried KRÄTZIG. *Tragwerke 2 - Theorie und Berechnungsmethoden statisch unbestimmter Stabtragwerke*. VDI-Buch. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. ISBN: 978-3-540-67636-2. DOI: [10.1007/b137491](https://doi.org/10.1007/b137491).
- [101] Holm ALTENBACH. *Holzmann/Meyer/Schumpich Technische Mechanik Festigkeitslehre*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2014. DOI: [10.1007/978-3-658-06041-1](https://doi.org/10.1007/978-3-658-06041-1).

A Anhang zum Verhalten dünnwandiger Stabtragwerke unter Torsion

A.1 St.-Venantsche Torsion geschlossener dünnwandiger Querschnitte

Die Grundlage für die Torsionsberechnungen bildet der Schubfluss $t_0 = t\tau$, der in den Querschnitten eines dünnwandig geschlossenen Querschnitts konstant ist. Das aus dem Schubfluss resultierende Moment muss über den Querschnitt dem Torsionsmoment T entsprechen. Dazu wird ein Kreisintegral gebildet, bei dem der Schubfluss über einen infinitesimalen Querschnittsabschnitt ds und dem Hebelarm r^* bezüglich eines beliebigen Punktes aufsummiert wird, wodurch das Torsionsmoment

$$T = \oint t_0 r^* ds = t_0 \oint r^* ds \quad (\text{A.1.1})$$

gebildet wird. [54]

Mit der in Gleichung A.1.1 im Integral übrig gebliebenen Fläche, lässt sich ein infinitesimales Dreieck $d\check{A} = r^* ds/2$ aufspannen, wodurch sich die sogenannte 1. Bredtsche Formel mit

$$t_0 = \frac{T}{2\check{A}}$$

ergibt. \check{A} steht dabei für die vom Querschnitt umschlossene Fläche. [101]

Die Schubspannung τ eines Querschnitts ergibt sich aus dem Zusammenhang von Schubfluss t_0 und Profildicke $t(s)$ zu

$$\tau = \frac{t_0}{t(s)}. \quad (\text{A.1.2})$$

Um nun die maximale Schubspannung τ_{\max} des Querschnitts zu ermitteln, die als Festigkeitsnachweis nötig ist, wird die 1. Bredtsche Formel in Gleichung A.1.2 eingesetzt:

$$\tau_{\max} = \frac{t_0}{t_{\min}} = \frac{T}{2\check{A}t_{\min}} = \frac{T}{W_T}.$$

Wobei W_T als Torsionswiderstandsmoment bezeichnet wird.

Neben der maximalen Schubspannung ist die maximal zulässige Verdrehung als Stabilitätsnachweis für die Bauteilintegrität entscheidend. Zur Bestimmung der durch das Torsionsmoment ausgelösten gegenseitigen Verdrehung der Enden des Torsionsstabs wird zunächst der Gleitwinkel $\gamma = \tau/G$ benötigt. Betrachtet wird eine unendlich dünne Scheibe mit konstanter Dicke, bei der eine konstante Schubspannung einen konstanten Gleitwinkel hervorruft (siehe Abbildung A.1). [52]

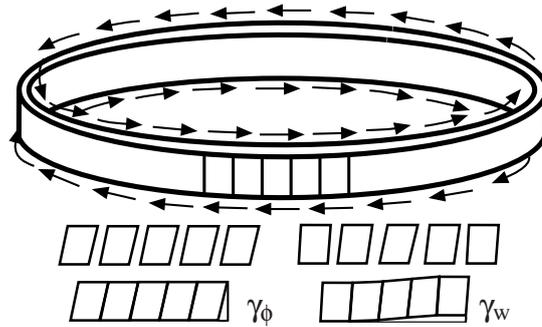


Abb. A.1: Bei einem Kreisring unter Schubspannung entsteht bei einer konstanten Dicke eine konstante Verzerrung ohne Verwölbung (links) wohingegen bei einer variablen Dicke neben der Verzerrung auch eine Verwölbung hervorgerufen wird. Nach DANKERT und DANKERT [54].

Wird nach DANKERT und DANKERT [54] in den Zusammenhang zum Gleitwinkel Gleichung A.1.2 eingesetzt, entsteht eine Beziehung zwischen Gleitwinkel und Torsionsmoment:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{t_0}{Gt} = \frac{T}{2\check{A}Gt} = \gamma_\phi + \gamma_w.$$

γ_ϕ bezeichnet dabei den Anteil der Verdrehung der einzelnen infinitesimalen Querschnitte und γ_w die Anteile der Verwölbung.

Die beiden Anteile können über das Bilden des Umlaufintegrals entkoppelt werden, da das Umlaufintegral der Verwölbung aufgrund des Zusammenfallens von Anfangs- und Endpunkt null ist. Somit ergibt sich nach DANKERT und DANKERT [54]:

$$\oint \frac{T}{2\check{A}Gt} ds = \oint \gamma_\phi ds + \oint \gamma_w ds = \phi' \oint r^* ds = 2\check{A}\phi'.$$

Wie bei Gleichung A.1.1 gilt auch hier, dass das Kreisintegral über r^* der doppelten umschlossenen Fläche \check{A} entspricht. Auf diese Weise kann die 2. Bredtsche Formel mit

$$GI_T = \frac{4\check{A}^2}{\oint G_t ds}$$

gebildet werden, wobei I_T als Torsionsträgheitsmoment bezeichnet wird. [52]

Die Verdrillung ergibt sich dann zu

$$\vartheta' = \frac{T}{GI_T}.$$

Wenn das Torsionsmoment über die Länge des Torsionsstabs konstant ist, kann die Verdrehung der beiden Endquerschnitte des Torsionsstabs schließlich mit

$$\vartheta = \frac{Tl}{GI_T}$$

berechnet werden. [101]

A.2 St.-Venantsche Torsion offener dünnwandiger Querschnitte

Für die Bestimmung von maximaler Schubspannung und der Verdrehung der Endquerschnitte eines Torsionsstabs gelten für offene Profile ebenfalls die Gleichungen 3.3.1 und 3.3.2. Das Torsionswiderstandsmoment W_T und das Torsionsträgheitsmoment I_T ändern sich allerdings. Dafür betrachten DANKERT und DANKERT [54] zunächst ein Rechteck mit der Breite t und der Höhe s , wobei $t \ll s$ gilt. Für die Berechnung der Schubspannung müssen folgende zwei Voraussetzungen erfüllt sein:

- Die Schubspannungen verlaufen zu den Rändern parallel, sind über die Höhe konstant und werden am oberen und unteren Rand umgelenkt.
- Die Schubspannungen können sich über die Breite des Rechtecks linear verändern, wobei die Maximalwerte τ_{\max} in den entgegengesetzten Richtungen gleich groß sind.

Bei dem in Abbildung A.2 dargestellten schmalen Rechteck kann der Schubfluss zu

$$t_0 = \frac{1}{4}\tau_{\max}t$$

bestimmt werden. Dieser Schubfluss wirkt im Abstand von $2/3 \cdot t/2$ von der Mittellinie und wird an den Rändern umgelenkt. [54]

Damit ergibt sich nach DANKERT und DANKERT [54] ein resultierendes Torsionsmoment zu:

$$T = 2 \left(t_0 s \frac{t}{3} + t_0 \frac{2}{3} t \frac{s}{2} \right) = \frac{1}{3} \tau_{\max} s t^2.$$

Durch Umstellen kann die maximale Schubspannung

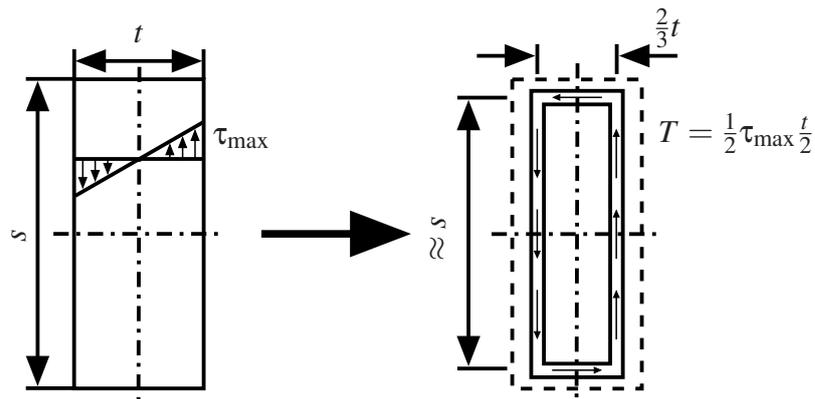


Abb. A.2: Modellannahme, wie der Schubfluss in einem schmalen Rechteck auf ein äquivalentes dünnwandiges Profil übertragen werden kann [54].

$$\tau_{\max} = \frac{3T}{st^2} = \frac{T}{W_T}$$

gebildet werden. Durch die Annahme des schmalen Rechtecks entspricht das Torsionswiderstandsmoment einem theoretischen Wert, wodurch analog das Torsionsträgheitsmoment zu

$$I_T = \frac{1}{3}st^3$$

aufgestellt werden kann. [52]

B Anhang zum Wittrick-Williams-Algorithmus

Im Folgenden werden die Einträge für die Scheiben- und Platten-Steifigkeitsmatrix hergeleitet. Die Ergebnisse sind so aufbereitet, dass sie direkt in die Programmierung eines Algorithmus oder Computerprogramms übernommen werden können.

B.1 Die Platten-Steifigkeitsmatrix bei konstanter Druck- und Schubspannung

Die folgende Herleitung bezieht sich, wenn nicht anders angegeben, auf WITTRICK [32, Abschnitt 5].

Zunächst werden die Spaltenvektoren \mathbf{p}_O und \mathbf{d}_O auf den linken und rechten Plattenrand aufgeteilt, sodass

$$\mathbf{p}_O = \{\mathbf{p}_{OK_1}, \mathbf{p}_{OK_2}\}, \quad \mathbf{d}_O = \{\mathbf{d}_{OK_1}, \mathbf{d}_{OK_2}\}$$

mit

$$\mathbf{p}_{OK_j} = \{M_{K_j}, Q_{K_j}\}, \quad \mathbf{d}_{OK_j} = \{\Psi_{K_j}, W_{K_j}\} \quad (j=1,2)$$

gilt.

Daraus wird das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{OK_1} &= \mathbf{A} \mathbf{d}_{OK_1} + \mathbf{B} \mathbf{d}_{OK_2}, \\ \mathbf{p}_{OK_2} &= \mathbf{B}^* \mathbf{d}_{OK_1} + \mathbf{A}^* \mathbf{d}_{OK_2} \end{aligned}$$

gebildet, wobei \mathbf{A} , \mathbf{A}^* , \mathbf{B} und \mathbf{B}^* jeweils 2×2 -Matrizen sind und

$$\mathbf{s}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^* & \mathbf{A}^* \end{bmatrix}$$

gilt.

Die seitliche Auslenkung der Platte $w(x_1, x_2)$ wird mit der Differentialgleichung

$$D\nabla^4 w + h \left(\sigma_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \sigma_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \quad (\text{B.1.2})$$

beschrieben. ∇^4 ist der biharmonische Operator in x_1 - und x_2 -Richtung und die Annahme gilt, dass Dämpfung vernachlässigt werden kann. Dazu variiert w mit der selben Halbwellenlänge λ wie die Randkräfte entlang jeder Linie mit konstantem x_2 -Wert sinusoidal in x_1 -Richtung .

Damit gilt

$$w(x_1, x_2) = W(X_2)e^{iX_1} .$$

Für $\tau \neq 0$ ist $W(X_2)$ eine komplexe Funktion. Unter der Annahme, dass σ_{11} konstant und $\sigma_{22} = 0$ ist, lässt sich die Differentialgleichung [B.1.2](#) zu

$$W^{IV} - 2\Omega W'' + 2i\Omega H W' + \Omega^2(\Omega^2 - K_{x_1})W = 0 \quad (\text{B.1.3})$$

mit

$$\Omega = b/\lambda$$

vereinfachen.

Bei Druckspannung in x_1 -Richtung ist K_{x_1} positiv und bei Zugspannung wird K_{x_1} negativ angenommen. H ist immer positiv. Die Platten-Steifigkeitsmatrix s_O kann unter einem allgemeinen Spannungszustand mit konstantem σ_{11} und $\sigma_{22} = 0$ folgendermaßen gebildet werden:

$$s_O = \begin{bmatrix} s_{MM} & s_{MQ} & f_{MM} & f_{MQ} \\ \bar{s}_{MQ} & s_{QQ} & f_{MQ} & f_{QQ} \\ \bar{f}_{MM} & \bar{f}_{MQ} & s_{MM} & \bar{s}_{MQ} \\ \bar{f}_{MQ} & \bar{f}_{QQ} & s_{MQ} & s_{QQ} \end{bmatrix} .$$

Die Einträge s_{MM} und s_{QQ} sind niemals komplex, wohingegen die anderen vier Elemente s_{MQ} , f_{MM} , f_{MQ} und f_{QQ} immer komplex sind, wenn $\tau \neq 0$ ist. Falls $\tau = 0$ gilt, sind keine Einträge komplex. Das Makron bei den jeweiligen Einträgen von s_O gibt die komplexe Konjugation an.

Die charakteristische Gleichung von Gleichung [B.1.3](#) ist

$$(m/\Omega)^4 - 2(m/\Omega)^2 + 2i\eta(m/\Omega) + 1 - \psi = 0$$

mit

$$\xi = K_{x1}/\Omega^2, \quad \eta = H/\Omega^2$$

und der Diskriminante Δ

$$\Delta = \left(\frac{4}{3} - \xi\right)^3 - 27\Gamma^2 \quad (\text{B.1.4})$$

mit

$$\Gamma = \eta^2/4 + \xi/3 - 8/27. \quad (\text{B.1.5})$$

Bei $\Delta = 0$ hat die charakteristische Gleichung mehrfache Wurzeln, was für $\xi = \eta = 0$ und für

$$\eta^2 = \frac{4}{27} \left(8 - 9\xi + (4 - 3\xi)^{\frac{3}{2}}\right) \quad (\text{B.1.6})$$

eintritt.

Für ein besseres Verständnis zum Finden der passenden Lösung ist in Abbildung B.1 die $\xi - \eta$ -Ebene mit der Kurve von Gleichung B.1.6 dargestellt. Die Kurve teilt die $\xi - \eta$ -Ebene in zwei Bereiche *I* und *II* mit $\Delta > 0$ beziehungsweise $\Delta < 0$. Alle Punkte auf der Abzisse ($\eta = 0$) und auf der Kurve selber sind nicht Bestandteil der beiden Bereiche, da sie gesondert betrachtet werden müssen.

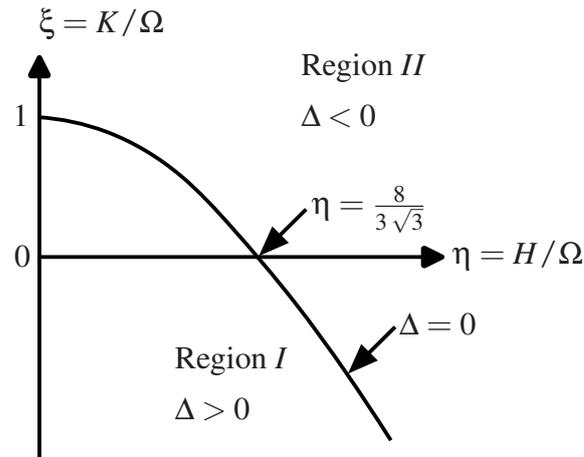
Gleichung B.1.3 hat in Bereich *I* vier komplexe Wurzeln in der Form $m = \Omega(\pm\alpha - i\beta)$ und $m = \Omega(\pm\gamma + i\beta)$, wohingegen im Bereich *II* zwei komplexe und zwei imaginäre Wurzeln in der Form $m = \Omega(\pm\alpha - i\beta)$ und $\Omega(\pm\delta + \beta)i$ vorliegen. Auf der beide Bereiche trennenden Kurve gilt $\gamma = \delta = 0$, wodurch das Paar der mehrfachen Wurzeln $\Omega\beta i$ ist.

Der Parameter β ist in allen Fällen die reale, positive Wurzel der folgenden kubischen Funktion in β^2

$$16\beta^6 + 16\beta^4 + 4\xi\beta^2 - \eta^2 = 0. \quad (\text{B.1.7})$$

Für alle Werte von ξ und η existiert immer nur ein realer und positiver Wert von β , der die Gleichung B.1.7 erfüllt.

Für die Parameter α , γ und δ gilt in allen Fällen:

Abb. B.1: Regionen I und II in der $\xi - \eta$ -Ebene [31].

$$\alpha^2 = 1 + \beta^2 + \frac{\eta}{2\beta} \quad (\text{B.1.8a})$$

$$\gamma^2 = -\delta^2 = 1 + \beta^2 - \frac{\eta}{2\beta}. \quad (\text{B.1.8b})$$

Die rechte Seite der vorstehenden Gleichung ist in Bereich I positiv, sodass γ real ist. In Bereich II ist sie negativ, wodurch δ real ist. Auf der beide Bereiche trennenden Kurve ist die rechte Seite 0, womit $\gamma = \delta = 0$ gilt.

Die Herleitung der Einträge der Platten-Steifigkeitsmatrix kann jetzt in Abhängigkeit der Bereichen und der äußeren Belastungen σ_{11} und τ erfolgen.

B.1.1 Fall 1: $\eta \neq 0$

β wird im Bereich I ($\Delta > 0$) nach folgender Gleichung bestimmt:

$$3\beta^2 = (4 - 3\xi)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\Phi}{3}\right) - 1$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \cos \Phi &= 27\Gamma(4 - 3\xi)^{-\frac{3}{2}} \\ \sin \Phi &= (27\Delta)^{\frac{1}{2}}(4 - 3\xi)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \right\} (0 \leq \Phi \leq \pi).$$

In Region II ($\Delta < 0$) kann β mit

$$\beta^2 = \frac{1}{2} \left\{ \Gamma + \left(-\frac{\Delta}{27} \right)^{1/2} \right\}^{1/3} + \frac{1}{2} \left\{ \Gamma - \left(-\frac{\Delta}{27} \right)^{1/2} \right\}^{1/3} - \frac{1}{3}$$

berechnet werden. Δ und Γ werden über Gleichungen B.1.4 und B.1.5 bestimmt. Die Werte von α und γ für Region *I* und α und δ für Region *II* ergeben sich aus den Gleichungen B.1.8

Mit den nun vorliegenden Lösungen für die Wurzeln der charakteristischen Gleichung können explizite Ausdrücke für die Einträge der Platten-Steifigkeitsmatrix gebildet werden:

$$\begin{aligned} s_{MM} &= \frac{D}{b} \pi \Omega R_1 Z, \\ s_{QQ} &= \frac{D}{b^3} \pi^3 \Omega^3 R_2 Z, \\ s_{MQ} &= \frac{D}{b^2} \pi^2 \Omega^2 (A - \nu - (R_3 + iI_3)Z), \\ f_{MM} &= \frac{D}{b} \pi \Omega (R_4 + iI_4)Z, \\ f_{QQ} &= \frac{D}{b^3} \pi^3 \Omega^3 (A(R_4 + iI_4) + C(R_5 + iI_5))Z, \\ f_{MQ} &= -\frac{D}{b^2} \pi^2 \Omega^2 (R_6 + iI_6)Z \end{aligned} \tag{B.1.9}$$

mit

$$\begin{aligned} Z &= ((A + \beta^2)p_1 p_3 + 2q_2^2 - q_1 q_3 - 1)^{-1}, \\ R_1 &= B_1 q_1 p_3 + b_3 q_3 p_1 - 4\beta p_2 q_2, \\ R_2 &= 4A\beta p_2 q_2 + (C - AB_1)q_1 p_3 + (C - AB_3)q_3 p_1, \\ R_3 &= C p_1 p_3, \\ R_4 &= 2\beta p_2 (q_1 + q_3) - q_2 (B_1 p_3 + B_3 p_1), \\ R_5 &= q_2 (p_1 + p_3), \\ R_6 &= B_2 q_2 (q_1 - q_3) + \beta p_2 (p_1 (1 + A + B_1) + p_3 (1 + A + B_3)), \\ I_3 &= 2B_2 p_2 q_2 + \beta q_1 p_3 (1 + A + B_3) - \beta q_3 p_1 (1 + A + B_1), \\ I_4 &= p_2 (B_1 p_3 - B_3 p_1) - 2\beta q_2 (q_1 - q_3), \\ I_5 &= p_2 (p_1 - p_3), \\ I_6 &= B_2 p_2 (q_1 + q_3) + \beta q_2 (p_3 (1 + A + B_3) - p_1 (1 + A + B_1)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
A &= 1 + 2\beta^2, & C &= \xi + 8\beta^2 + 12\beta^4, \\
B_1 &= 2\beta^2 + \frac{\eta}{2\beta}, & B_2 &= \frac{\eta}{2\beta}, & B_3 &= 2\beta^2 - \frac{\eta}{2\beta}, \\
p_1 &= \alpha^{-1} \sinh \pi\Omega\alpha, & q_1 &= \cosh \pi\Omega\alpha, \\
p_2 &= \sin \pi\Omega\beta, & q_2 &= \cos \pi\Omega\beta, \\
p_3 &= \gamma^{-1} \sinh \pi\Omega\gamma & \text{wenn } \delta > 0 \text{ (Region I),} \\
&= \delta^{-1} \sin \pi\Omega\delta & \text{wenn } \delta < 0 \text{ (Region II),} \\
&= \pi\Omega & \text{wenn } \delta = 0, \\
q_3 &= \cosh \pi\Omega\gamma & \text{wenn } \delta > 0 \text{ (Region I),} \\
&= \cos \pi\Omega\delta & \text{wenn } \delta < 0 \text{ (Region II),} \\
&= 1 & \text{wenn } \delta = 0.
\end{aligned}$$

B.1.2 Fall 2: $\eta = 0$; $0 < \xi < 1$ und $\xi > 1$

In diesem Fall vereinfachen sich die mehrfachen Wurzeln der charakteristischen Gleichung zu:

$$\begin{aligned}
\beta &= 0, \\
\alpha^2 &= 1 + \sqrt{\xi}, \\
\gamma^2 &= -\delta^2 = 1 - \sqrt{\xi}.
\end{aligned}$$

Gleichungen B.1.9 gelten weiterhin, jedoch mit veränderten Parametern:

$$\begin{aligned}
Z &= (p_1 p_3 - q_1 q_3 + 1)^{-1}, \\
R_1 &= \xi^{1/2} (q_1 p_3 - q_3 p_1), \\
R_2 &= \xi (q_1 p_3 + q_3 p_1) - R_1, \\
R_3 &= \xi p_1 p_3, \\
R_4 &= \xi^{1/2} (p_1 - p_3), \\
R_5 &= p_1 + p_3, \\
R_6 &= \xi^{1/2} (q_1 - q_3), \\
I_3 &= I_4 = I_5 = I_6 = 0, \\
A &= 1, & C &= \xi
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
p_1 &= \alpha^{-1} \sinh \pi \Omega \alpha, & q_1 &= \cosh \pi \Omega \alpha, \\
p_3 &= \gamma^{-1} \sinh \pi \Omega \gamma & \text{wenn } 0 < \xi < 1, \\
&= \delta^{-1} \sin \pi \Omega \delta & \text{wenn } \xi > 1, \\
q_3 &= \cosh \pi \Omega \gamma & \text{wenn } 0 < \xi < 1, \\
&= \cos \pi \Omega \delta & \text{wenn } \xi > 1.
\end{aligned}$$

B.1.3 Fall 3: $\eta = 0$; $\xi = 1$

Für diesen Sonderfall ändern sich die Einträge der Platten-Steifigkeitsmatrix zu:

$$\begin{aligned}
s_{MM} &= \frac{D}{b} \pi \Omega (\pi \Omega q - p) Z, \\
s_{QQ} &= f_{QQ} = \frac{D}{b^3} 2 \pi^3 \Omega^3 p Z, \\
s_{MQ} &= \frac{D}{b^2} \pi^2 \Omega^2 (1 - \nu - \pi \Omega p Z), \\
f_{MM} &= \frac{D}{b} \pi \Omega (p - \pi \Omega) Z, \\
f_{MQ} &= -\frac{D}{b^2} \pi^2 \Omega^2 (q - 1) Z
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
Z &= (\pi \Omega p - q + 1)^{-1}, \\
p &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh \pi \Omega \sqrt{2}, \\
q &= \cosh \pi \Omega \sqrt{2}
\end{aligned}$$

B.1.4 Fall 4: $\eta = 0$; $\xi = 0$

Wenn keine äußeren Kräfte auf die Platte wirken, können die Einträge der Platten-Steifigkeitsmatrix folgendermaßen gebildet werden:

$$\begin{aligned}
s_{MM} &= \frac{D}{b} \pi \Omega (\sinh 2\pi \Omega - 2\pi \Omega) Z, \\
s_{QQ} &= \frac{D}{b^3} 2\pi^3 \Omega^3 (\sinh 2\pi \Omega + 2\pi \Omega) Z, \\
s_{MQ} &= \frac{D}{b^2} \pi^2 \Omega^2 (1 - \nu - 2Z \sinh^2 \pi \Omega), \\
f_{MM} &= \frac{D}{b} 2\pi \Omega (\pi \Omega \cosh \pi \Omega - \sinh \pi \Omega) Z, \\
f_{QQ} &= \frac{D}{b^3} 2\pi^3 \Omega^3 (\pi \Omega \cosh \pi \Omega + \sinh \pi \Omega) Z, \\
f_{MQ} &= -\frac{D}{b^2} 2\pi^2 \Omega^2 Z \sinh \pi \Omega
\end{aligned}$$

mit

$$Z = (\sinh^2 \pi \Omega - \pi^2 \Omega^2)^{-1}.$$

B.1.5 Fall 5: $\eta = 0$; $\xi < 0$

Für den Fall, dass kein Schub an der Platte anliegt und σ_{11} als Zugspannung wirkt, gelten folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}
\beta^2 &= \frac{1}{2} \left((1 - \xi)^{1/2} - 1 \right), \\
\alpha^2 &= \frac{1}{2} \left((1 - \xi)^{1/2} + 1 \right).
\end{aligned}$$

Die Einträge der Platten-Steifigkeitsmatrix ergeben sich dann mit:

$$\begin{aligned}
s_{MM} &= \frac{D}{b} \pi \Omega (p_1 q_1 - p_2 q_2) Z, \\
s_{QQ} &= \frac{D}{b^3} \pi^3 \Omega^3 (1 + 2\beta^2) (p_1 q_1 + p_2 q_2) Z, \\
s_{MQ} &= \frac{D}{b^2} \pi^2 \Omega^2 (1 - \nu - (q_1^2 - q_2^2) Z), \\
f_{MM} &= \frac{D}{b} \pi \Omega (q_1 p_2 - q_2 p_1) Z, \\
f_{QQ} &= \frac{D}{b^3} \pi^3 \Omega^3 (1 + 2\beta^2) (p_1 q_2 + p_2 q_1) Z, \\
f_{MQ} &= -\frac{D}{b^2} \pi^2 \Omega^2 (1 + 2\beta^2) p_1 p_2 Z
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
Z &= 2(p_1^2 - p_2^2)^{-1}, \\
p_1 &= \alpha^{-1} \sinh \pi \Omega \alpha, & q_1 &= \cosh \pi \Omega \alpha, \\
p_2 &= \beta^{-1} \sin \pi \Omega \beta, & q_2 &= \cos \pi \Omega \beta.
\end{aligned}$$

B.2 Die Scheiben-Steifigkeitsmatrix für den allgemeinen Spannungszustand

Die Scheiben-Steifigkeitsmatrix ist nach WITTRICK [32] einzig von der Spannung σ_{11} abhängig, da sowohl die Spannung σ_{22} quer zur Plattenlängsrichtung als auch die Schubspannung τ nur Verschiebungen aus der Plattenebene heraus erzeugen.

Die im folgenden dargelegte Herleitung der Einträge der Scheiben-Steifigkeitsmatrix s_I ist aus WITTRICK [31, Abschnitt 4] übernommen und bezieht sich darauf, wenn nicht anders angegeben:

Die Grundlage der Herleitung der Einträge der Scheiben-Steifigkeitsmatrix basiert auf der verformten Geometrie eines infinitesimalen Elements, was mit der allgemeinen, linearen Plattentheorie nicht in entsprechender Genauigkeit durchgeführt werden kann. Aus diesem Grund wird eine nicht-lineare Plattentheorie nach NOVOZHILOV [34] verwendet. Nach Einsetzen der Spannungs-Dehnungs-Zusammenhänge und der von Außen aufgetragenen Spannung σ_{11} ergeben sich die zwei folgenden partiellen Differentialgleichungen in u und v :

$$\begin{aligned}
2[1 - (1 - \nu^2)\epsilon] \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + (1 + \nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0, \\
2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + (1 - \nu)[1 - 2(1 + \nu)\epsilon] \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + (1 + \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0
\end{aligned} \tag{B.2.1}$$

mit

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}.$$

Da sich auch in diesem Fall die Randkräfte sinusoidal in x_1 -Richtung verändern, gilt

$$u = U(X_2)e^{iX_1}, \quad v = V(X_2)e^{iX_2}$$

mit X_1 und X_2 aus Gleichungen 4.1.2 und 4.1.1. Wenn diese nun in Gleichung B.2.1 eingesetzt werden, ergibt sich die folgende allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} iU(X_2) &= (A_1 \cosh \theta X_2 - \phi B_1 \cosh \phi X_2) + (A_2 \sinh \theta X_2 - \phi B_2 \sinh \phi X_2), \\ V(X_2) &= (-\theta A_1 \sinh \theta X_2 + B_1 \sinh \phi X_2) + (-\theta A_2 \cosh \theta X_2 + B_2 \cosh \phi X_2) \end{aligned}$$

mit

$$\theta^2 = 1 - (1 - \nu^2)\varepsilon, \quad \phi^2 = 1 - 2(1 + \nu)\varepsilon.$$

Das System aus Spannungen und Verschiebungen kann nun in ein antisymmetrisches und ein symmetrisches System aufgeteilt werden (siehe Abbildung B.2). Mit diesen Systemen lassen sich jeweils die Grundgleichungen herleiten, die aus den Gleichungen 4.1.4, 4.1.5 und der folgenden Definition der Scheiben-Steifigkeitsmatrix s_I

$$s_I = \begin{bmatrix} s_{NN} & s_{NT} & f_{NN} & f_{NT} \\ s_{NT} & s_{TT} & f_{NT} & f_{TT} \\ f_{NN} & f_{NT} & s_{NN} & s_{NT} \\ f_{NT} & f_{TT} & s_{NT} & s_{TT} \end{bmatrix}$$

entstehen:

$$\begin{aligned} N_a &= (s_{NN} - f_{NN})V_a + (s_{NT} - f_{NT})iU_a, \\ iT_a &= (s_{NT} - f_{NT})V_a + (s_{TT} - f_{TT})iU_a \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} N_s &= (s_{NN} + f_{NN})V_s + (s_{NT} + f_{NT})iU_s, \\ iT_s &= (s_{NT} + f_{NT})V_s + (s_{TT} + f_{TT})iU_s. \end{aligned}$$

Die Suffixe a und s bedeuten antisymmetrisch und symmetrisch. Nach Einsetzen, Auflösen und Umstellen können die Einträge der Scheiben-Steifigkeitsmatrix berechnet werden. Die folgenden Ergebnisse der Herleitung sind aus WITTRICK und WILLIAMS [37, Anhang 2] übernommen. Von WITTRICK und WILLIAMS wird der Algorithmus für anisotropisches Materialverhalten und unter zusätzlicher Belastung einer Druckspannung in den langen Seiten der Platten vorgestellt. Da in dieser Arbeit ausschließlich isotropes Material verwendet wird und die Platten lediglich mit Spannungen auf der kurzen Plattenseite und einer Schubspannung belastet werden, ergeben sich erhebliche Vereinfachungen, die entsprechend dargestellt sind:

Die Berechnung der Einträge der Scheiben-Steifigkeitsmatrix unterscheidet sich für die Fälle, ob eine Spannung σ_{11} vorliegt oder nicht.

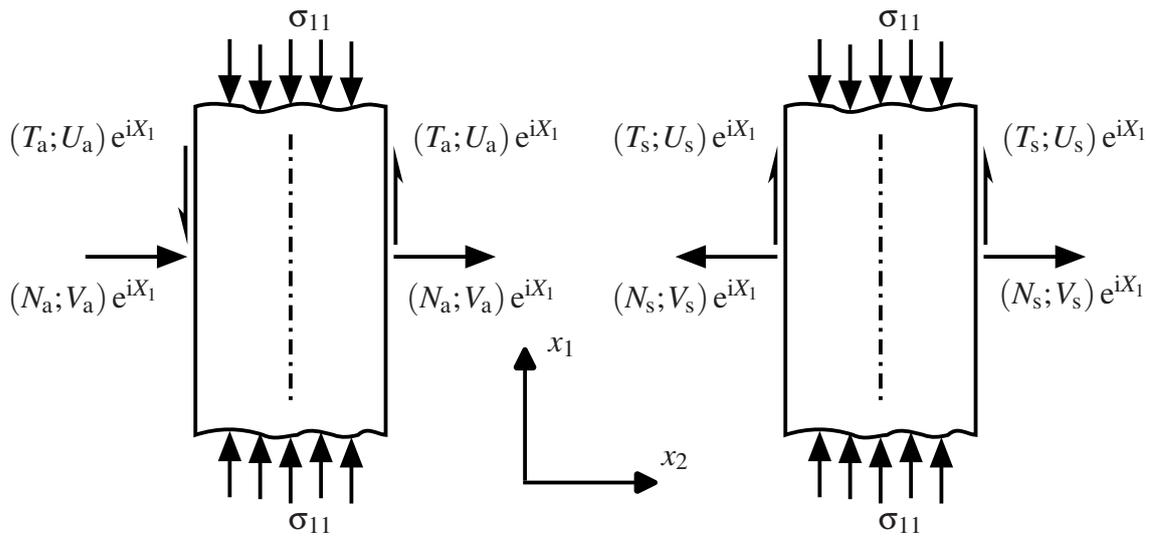


Abb. B.2: Antisymmetrische (links) und symmetrische Anteile der in der Ebene liegenden Randkräfte, Momente und Verschiebungen [31].

B.2.1 Fall 1: $\sigma_{11} \neq 0$

Für den Fall $\sigma_{11} \neq 0$ werden zunächst die Hilfsvariablen B und C eingeführt:

$$B = \frac{1}{2} (2 - \varepsilon(3 - \nu)(1 + \nu)),$$

$$C = 1 - \varepsilon(3 - \nu)(1 + \nu) + 2\varepsilon^2(1 - \nu^2)(1 + \nu).$$

Anschließend können die Winkel θ und ϕ (beziehungsweise $\hat{\theta}$ und $\hat{\phi}$, falls θ^2 und ϕ^2 negativ sind) berechnet werden:

$$\theta^2 = -\hat{\theta}^2 = B + (B^2 - C)^{\frac{1}{2}},$$

$$\phi^2 = -\hat{\phi}^2 = B - (B^2 - C)^{\frac{1}{2}}.$$

Daran schließen sich die Berechnungen der Hilfsvariablen s_5 , c_5 , s_6 , c_6 sowie der Variablen H_a und H_s an:

$$\begin{aligned}
s_5 &= \frac{1}{\theta} \sinh \frac{1}{2} \pi \Omega \theta = \frac{1}{\hat{\theta}} \sin \frac{1}{2} \pi \Omega \hat{\theta}, \\
c_5 &= \cosh \frac{1}{2} \pi \Omega \theta = \cos \frac{1}{2} \pi \Omega \hat{\theta}, \\
s_5 &= \frac{1}{\phi} \sinh \frac{1}{2} \pi \Omega \phi = \frac{1}{\hat{\phi}} \sin \frac{1}{2} \pi \Omega \hat{\phi}, \\
c_5 &= \cosh \frac{1}{2} \pi \Omega \phi = \cos \frac{1}{2} \pi \Omega \hat{\phi}, \\
H_a &= \left(\frac{L_3}{A_{22}} - \phi^2 \right) c_5 s_6 - \left(\frac{L_3}{A_{22}} - \theta^2 \right) c_6 s_5, \\
H_s &= \left(\frac{L_1}{A_{33}} - \phi^2 \right) c_5 s_6 - \left(\frac{L_1}{A_{33}} - \theta^2 \right) c_6 s_5
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
A_{22} &= \frac{Et}{1 - \nu^2}, \quad A_{33} = \frac{Et}{2(1 + \nu)}, \\
L_1 &= A_{22} - \sigma_{11} t, \quad L_3 = A_{33} - \sigma_{11} t.
\end{aligned}$$

Nun können die Einträge der Scheiben-Steifigkeitsmatrix berechnet werden:

$$\begin{aligned}
s_{\text{NN}} &= \frac{\pi}{2\lambda} (\theta^2 - \phi^2) \left(\frac{A_{22}}{H_s} c_5 c_6 + \frac{L_3}{H_a} s_5 s_6 \right), \\
f_{\text{NN}} &= \frac{\pi}{2\lambda} (\theta^2 - \phi^2) \left(\frac{A_{22}}{H_s} c_5 c_6 - \frac{L_3}{H_a} s_5 s_6 \right), \\
s_{\text{NT}} &= \frac{\pi}{2\lambda} \left(\frac{A_0}{H_s} (\theta^2 s_5 s_6 - \phi^2 s_6 c_5) + \frac{A_0 L_3}{A_{22} H_a} (c_5 s_6 - c_6 s_5) - 2A_{33} \right), \\
f_{\text{NT}} &= \frac{\pi}{2\lambda} \left(\frac{A_0}{H_s} (\theta^2 s_5 s_6 - \phi^2 s_6 c_5) - \frac{A_0 L_3}{A_{22} H_a} (c_5 s_6 - c_6 s_5) \right), \\
s_{\text{TT}} &= \frac{\pi}{2\lambda} (\theta^2 - \phi^2) \left(\frac{L_1}{H_s} s_5 s_6 + \frac{A_{33}}{H_a} c_5 c_6 \right), \\
f_{\text{TT}} &= \frac{\pi}{2\lambda} (\theta^2 - \phi^2) \left(\frac{L_1}{H_s} s_5 s_6 - \frac{A_{33}}{H_a} c_5 c_6 \right)
\end{aligned}$$

mit

$$A_0 = \frac{Et}{2(1 - \nu)}.$$

B.2.2 Fall 2: $\sigma_{11} = 0$

Für den Fall $\sigma_{11} = 0$ vereinfachen sich die Hilfsvariablen B und C zu jeweils 1, wodurch sich die Winkel $\theta = 1$ und $\phi = 0$ ergeben. Das Aufstellen der Hilfsvariablen s_7 , c_7 sowie s_8 bedarf nun auch keine Fallunterscheidung mehr, womit sie sich wie auch die Variablen J_a und J_s zu

$$\begin{aligned} s_7 &= \frac{1}{\theta} \sinh \pi \Omega \theta, \\ c_7 &= \cosh \pi \Omega \theta, \\ s_8 &= \pi \Omega, \\ J_a &= (s_7 - s_8) + \left(\frac{L_1}{A_{33}} (s_7 + s_8) \right), \\ J_s &= (s_7 + s_8) + \left(\frac{L_1}{A_{33}} (s_7 - s_8) \right) \end{aligned}$$

ergeben.

Nun können die Einträge der Scheiben-Steifigkeitsmatrix berechnet werden:

$$\begin{aligned} s_{\text{NN}} &= \frac{\pi A_{22}}{\lambda} \left(\frac{c_7 + 1}{J_s} + \frac{c_7 - 1}{J_a} \right), \\ f_{\text{NN}} &= \frac{\pi A_{22}}{\lambda} \left(\frac{c_7 + 1}{J_s} - \frac{c_7 - 1}{J_a} \right), \\ s_{\text{NT}} &= \frac{\pi}{2\lambda} \left(\frac{A_0}{J_s} (s_7 + s_8) + \frac{A_0}{J_a} (s_7 - s_8) - 2A_{33} \right), \\ f_{\text{NT}} &= \frac{\pi}{2\lambda} \left(\frac{A_0}{J_s} (s_7 + s_8) - \frac{A_0}{J_a} (s_7 - s_8) \right), \\ s_{\text{TT}} &= \frac{\pi L_1}{\lambda} \left(\frac{c_7 - 1}{J_s} + \frac{c_7 + 1}{J_a} \right), \\ f_{\text{TT}} &= \frac{\pi L_1}{\lambda} \left(\frac{c_7 - 1}{J_s} - \frac{c_7 + 1}{J_a} \right). \end{aligned}$$

B.3 Der Einfluss einer einzelnen Platte auf die Stabilität einer Struktur

Im folgenden wird der Einfluss einer einzelnen Platte auf das Stabilitätsverhalten der gesamten Struktur vorgestellt und bezieht sich, wenn nicht anders angegeben, auf WITTRICK und WILLIAMS [37, Abschnitt 8]. Dies erfolgt zunächst für die Eigenwerte des Scheibenverhaltens und anschließend für die Eigenwerte des Plattenverhaltens.

B.3.1 Bestimmung der Anzahl der Eigenwerte J_{ci} für das Scheibenverhalten

Die Berechnung von J_{ci} setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Zunächst wird ein erste Teil J_{r_1} und anschließend ein zweiter Teil J_{r_2} berechnet. Für J_{r_1} werden zuerst die Linienlast \tilde{N} und die Hilfsvariable \tilde{B} mit

$$\begin{aligned}\tilde{N} &= \sigma_{11}t, \\ \tilde{B} &= \frac{A_{22}^2 + A_{33}^2 - A_0^2 - \tilde{N}(A_{22} + A_{33})}{2A_{22}A_{33}}\end{aligned}$$

aufgestellt.

Anschließend wird eine Fallunterscheidung getroffen, ob $\tilde{N} > A_{22}$, $A_{33} < \tilde{N} \leq A_{22}$ oder $\tilde{N} \leq A_{33}$ ist.

Für den Fall $\tilde{N} > A_{22}$ gilt:

Zunächst werden die Winkel $\tilde{\theta}$ und $\tilde{\phi}$ aufgestellt:

$$\begin{aligned}\tilde{\theta} &= \sqrt{-\tilde{B} - \sqrt{\tilde{B}^2 - C}}, \\ \tilde{\phi} &= \sqrt{-\tilde{B} + \sqrt{\tilde{B}^2 - C}}.\end{aligned}$$

Anschließend können i_1 und i_2 berechnet werden

$$\begin{aligned}i_1 &= \frac{b\tilde{\theta}}{\lambda}, \\ i_2 &= \frac{b\tilde{\phi}}{\lambda},\end{aligned}$$

wobei i_1 und i_2 die jeweils größten ganzen Zahlen sind, die kleiner als die jeweils berechneten Werte sind. J_{r_1} ergibt sich dann zu

$$J_{r_1} = 1 + i_1 + i_2.$$

Für den Fall $A_{33} < \tilde{N} \leq A_{22}$ gilt:

In diesem Fall existiert kein Winkel $\tilde{\theta}$ und somit wird nur der Winkel $\tilde{\phi}$ über

$$\tilde{\phi} = \sqrt{-\tilde{B} + \sqrt{\tilde{B}^2 - C}}$$

gebildet.

Demnach existiert auch nur ein i_2 , was der selben Definition wie im vorangegangenen Fall unterliegt:

$$i_2 = \frac{b\tilde{\phi}}{\lambda}.$$

J_{r_1} ergibt sich in diesem Fall zu:

$$J_{r_1} = i_2 + \frac{1}{2}\text{sg}(L_3).$$

Der Ausdruck $\text{sg}()$ ist entweder $+1$ oder -1 , je nachdem, welches Vorzeichen der Wert in der Klammer hat.

Für den Fall $\tilde{N} \leq A_{33}$ ist $J_{r_1} = 0$.

Nun kann der sg -Teil berechnet werden. Wenn $J_{r_1} = 0$ ist, ist auch der sg -Teil = 0, sodass J_{ci} ebenfalls 0 ist. Für alle anderen Fälle gilt folgende Gleichung:

$$J_{ci} = J_{r_1} - \frac{1}{2}(1 - \text{sg}(s_{NN})) - \frac{1}{2}\left(1 - \text{sg}\left(s_{NN} - \frac{f_{NN}^2}{s_{NN}}\right)\right).$$

s_{NN} und f_{NN} sind die Einträge in der lokalen Steifigkeitsmatrix der betrachteten Platte unter der gegebenen Last und des betrachteten λ .

B.3.2 Bestimmung der Anzahl der Eigenwerte J_{co} für das Plattenverhalten

Für die Bestimmung von J_{co} müssen die beiden Fälle betrachtet werden, ob eine Schubspannung τ vorliegt oder nicht. Für den Fall, dass keine Schubspannung τ vorliegt, erfolgt die Betrachtung ähnlich wie bei der Bestimmung des Scheiben-Beulverhaltens. Die Berechnung der Eigenwerte J_{co} unterhalb der aufgegebenen Last setzt sich aus den zwei Teilen J_{r_2} und sg zusammen.

Für die Berechnung von J_{r_2} werden zwei Fälle unterschieden. Für $\sigma_{11} = 0$ ist $J_{r_2} = 0$. Für alle anderen Werte von σ_{11} wird zunächst die Hilfsvariable L berechnet:

$$L = \frac{\lambda^2 \sigma_{11} 12(1 - \nu^2)}{\pi^2 E t^2}.$$

Wenn $L \leq 1$ ist, ist $J_{r_2} = 0$. Für $L > 1$ werden der Winkel $\tilde{\gamma}$ und die ganze Zahl i_4 berechnet:

$$\tilde{\gamma} = \sqrt{\sqrt{L} - 1},$$

$$i_4 = \frac{b\tilde{\gamma}}{\lambda}.$$

Für i_4 gilt die selbe Definition wie bei der Berechnung beim Scheibenverhalten, sodass i_4 die größte ganze Zahl ist, die kleiner als der aus der Gleichung berechnete Wert ist. J_{r_2} entspricht dann dem Wert von i_4 .

Die Berechnung für J_{co} verläuft ebenso analog wie die Berechnung von J_{ci} . Falls $J_{r_2} = 0$ ist auch $J_{co} = 0$. Für alle anderen Werte von J_{r_2} wird J_{co} zu

$$J_{co} = J_{r_2} - \frac{1}{2} (1 - \text{sg}(s_{MM})) - \frac{1}{2} \left(1 - \text{sg}\left(s_{MM} - \frac{f_{MM}^2}{s_{MM}}\right) \right)$$

berechnet. Auch hier sind s_{MM} und f_{MM} die Einträge in der lokalen Steifigkeitsmatrix der betrachteten Platte unter der gegebenen Last und des betrachteten λ .

Für den Fall, dass eine Schubspannung $\tau \neq 0$ vorliegt, kann die Anzahl der Eigenwerte nicht wie in den oberen Fällen direkt berechnet werden. WITTRICK und WILLIAMS haben eine Methode entwickelt, wie die Anzahl an Eigenwerten über einen indirekten, zweistufigen Weg trotzdem berechnet werden kann.

Als erstes wird geprüft, wie viele Eigenwerte bei der gewählten Last existieren, wenn die Platte gelenkig gelagert ist. Wenn Eigenwerte existieren, wird die Plattenbreite so lange halbiert, bis keine Eigenwerte mehr vorliegen. Diese Breite wird $b/2^r$ genannt, wobei r die Anzahl der Halbierungsschritte angibt. Dieser Weg wird gewählt, da die Eigenwerte einer fest eingespannten Platte immer höher sind, als die einer gelenkig gelagerten Platte. So ist sichergestellt, dass auch für die fest eingespannte Platte kein Eigenwert mehr bei der ermittelten Breite existiert. Für die Bestimmung der Zahl der Eigenwerte für eine gelenkig gelagerte Platte haben WITTRICK und WILLIAMS ein numerisches Verfahren auf Basis einer Galerkin-Methode entwickelt. Für die in dieser Arbeit betrachteten Platten (isotropes Material, keine Krafteinleitung an den langen Plattenrändern) kann eine erste Näherung für die nötige Breite \hat{b} , bei der eine gelenkig gelagerte Platte unter der gegebenen Last nicht beult, mit

$$\left(1 + \left(\frac{\lambda}{\hat{b}} \right)^2 \right)^2 - \xi > 0$$

berechnet werden. Die Anzahl an nötigen Halbierungsschritten ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned} r &= 1 && \text{wenn } \xi \geq 1, \\ r &= 1 && \text{wenn } \frac{\ln \frac{b \sqrt{\sqrt{\xi}-1}}{\lambda}}{\ln 2} \leq 0, \\ r &= \frac{\ln \frac{b \sqrt{\sqrt{\xi}-1}}{\lambda}}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Anschließend wird $\hat{b} = b/2^r$ berechnet und eine 4×4 -Matrix \mathbf{R} aufgestellt, die über folgende Einträge R_{pm} verfügt:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{pm} &= \left(1 + \left(\frac{m\lambda}{\hat{b}} \right)^2 \right)^2 - \xi && \text{wenn } m = p, \\ &= i\eta \frac{\lambda}{\hat{b}\pi} \frac{8mp}{p^2 - m^2} && \text{wenn } m + p \text{ ungerade ist,} \\ &= 0 && \text{für alle übrigen Einträge.} \end{aligned}$$

Nun wird von \mathbf{R} die obere Dreiecksmatrix ohne Pivotisierung gebildet und überprüft, welche Vorzeichen die Einträge auf der Diagonale haben. Falls noch negative Einträge vorhanden sind, wird die Breite um einen weiteren Schritt halbiert und die Matrix erneut aufgestellt. Dies wird solange wiederholt, bis alle Einträge auf der Diagonale positiv sind. WITTRICK und WILLIAMS geben zur Kenntnis, dass dieses Verfahren nur eine Näherung ist und weiterhin ein oder mehrere Eigenwerte bei der berechneten Breite existieren können, da bei dieser Methode die ermittelten Eigenwerte die obere Grenze der tatsächlichen Eigenwerte darstellen. Allerdings sind, wie oben schon erwähnt, die Eigenwerte einer fest eingespannten Platte, was eigentlich gesucht ist, höher als bei einer gelenkig gelagerten Platte. Daher schlagen WITTRICK und WILLIAMS vor, die Breite final noch einmal zu halbieren, um absolut sicher zu sein, dass keine Eigenwerte der fest eingespannten Platte bei der dann finalen Breite existieren.

Wenn nun die finale Breite gefunden ist, werden zwei Platten mit der Breite $b/2^r$ zusammengesetzt, um so eine Platte mit der Breite $b/2^{r-1}$ zu bilden (siehe Abbildung B.3). Die 6×6 -Steifigkeitsmatrix dieser Plattenkombination ausschließlich für die Verschiebungen aus der Plattenebene heraus lautet dann

$$\mathbf{s}^{r-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{s}_{K11}^r + \mathbf{s}_{K22}^r) & \mathbf{s}_{K21}^r & \mathbf{s}_{K12}^r \\ \mathbf{s}_{K12}^r & \mathbf{s}_{K11}^r & 0 \\ \mathbf{s}_{K21}^r & 0 & \mathbf{s}_{K22}^r \end{bmatrix}, \quad (\text{B.3.1})$$

wobei das hochgestellte r bedeutet, dass die Plattenbreite $b/2^r$ beträgt. Die 2×2 - \mathbf{s}_{ij} -Matrizen sind entsprechend Gleichung 4.2.2 definiert, wobei nur die Elemente in den ersten beiden Zeilen und Spalten verwendet werden. Die Einträge dieser Steifigkeitsmatrizen können dann mit der in Anhang B.1 vorgestellten Methode berechnet werden, wobei einige Werte unabhängig von der Plattenbreite sind und nicht neu berechnet werden müssen. Diese sind ξ , η , α , β , γ , A , C , B_1 , B_2 , B_3 .

Zur Bestimmung, ob Eigenwerte bei der gegebenen Last für die fest eingespannte Platte mit Breite $b/2^{r-1}$ existieren, ist lediglich der erste Eintrag $\mathbf{s}_{K11}^r + \mathbf{s}_{K22}^r$ der Matrix \mathbf{s}^{r-1} aus Gleichung B.3.1 relevant. Diese 2×2 -Matrix wird ohne Pivotisierung trianguliert und die Anzahl

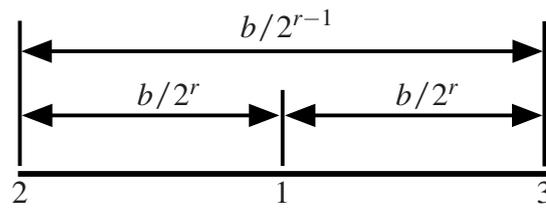


Abb. B.3: Aufbau einer Platte mit der Breite $b/2^{r-1}$ aus zwei Platten der Breite $b/2^r$ und entsprechende Knotenbezeichnung nach WITTRICK und WILLIAMS [37].

j_{r-1} an negativen Einträgen auf der Diagonale bestimmt. Nun wird der Vorgang mit $r - 1$ solange wiederholt, bis die original Breite b wieder erreicht ist. J_{co} ergibt sich dann zu

$$J_{co} = 2^{r-1} j_{r-1} + 2^{r-2} j_{r-2} + \cdots + 2j_1 + j_0.$$

Die von WITTRICK und WILLIAMS entwickelte Methode sieht umständlich und rechenintensiv aus. Sie merken aber an, dass die Matrizen nur von geringer Ordnung seien, sodass die Triangulationen schnell durchgeführt werden können. Zusätzlich reduziere sich die Breite der Platte relativ schnell, sodass in der Regel nur wenige Halbierungen nötig seien.

C Anhang zur gewichtsoptimierten Auslegung nach PRECHTL

Im Folgenden werden die detaillierten Herleitungen der gewichtsoptimierten Auslegung nach PRECHTL [2] für die drei Grundlastfälle Druck, Biegung und Torsion vorgestellt.

C.1 Herleitungen für den Profil-Druckstab

Die Details und Vorbedingungen für die gewichtsoptimierte Auslegung von Druckstäben sind am Anfang von Kapitel 5.1 genannt. Die Definitionen der nötigen Profilwerte sind in Kapitel 5.1.1 und der Zielfunktionen und Restriktionen in Kapitel 5.1.2 zu finden. Mit dieser Basis kann die optimierte Auslegung durchgeführt werden, die im Folgenden vorgestellt wird.

C.1.1 Optimierte Auslegung

Obwohl PRECHTL [2] im eigentlichen Sinne keine geschlossen-analytische Lösung entwickelt, ist das Vorgehen der Herleitung trotzdem mit seiner Herleitung identisch, da er zwar die Herleitung geschlossen-analytisch durchführt, für die Profilbeulwerte aber numerisch ermittelte Werte verwendet. Für die geschlossen-analytische Lösung werden hier analytisch ermittelte Beulwerte verwendet. Da der Rest aber weiterhin die Ausführungen von PRECHTL folgt, beziehen sich alle folgenden Herleitungsschritte, wenn es nicht anders angegeben ist, weiterhin auf die Ausführungen von PRECHTL [2, Kapitel 4.3].

Für einen kleinen Strukturkennwert $K < \tilde{K}$ liegt ein Versagen nach Stabilität vor. Die Restriktionen aus Gleichungen 5.1.4 und 5.1.5 sind dann maßgebend. Eine gewichtsoptimierte Auslegung wird dann erreicht, wenn Knicken und lokales Beulen gleichzeitig eintreten. Durch Gleichsetzen der beiden Gleichungen und Einsetzen von Gleichung 5.1.2 in einer der beiden oben genannten können die beiden geometrischen Variablen h/l und t/h bestimmt werden. Somit ergibt sich

$$\frac{h}{l} = \left(\frac{1}{\pi^6} \frac{c_A}{c_{K22}^3 c_{J22}^3} \frac{f_A(\delta) k_P(\delta)}{f_{J22}(\delta)^3} \right)^{\frac{1}{10}} \left(\frac{K}{E} \right)^{\frac{1}{5}}, \quad (\text{C.1.1a})$$

$$\frac{t}{h} = \left(\pi^2 \frac{c_{K22} c_{J22}}{c_A^2} \frac{f_{J22}(\delta)}{f_A(\delta)^2 k_P(\delta)^2} \right)^{\frac{1}{5}} \left(\frac{K}{E} \right)^{\frac{1}{5}}. \quad (\text{C.1.1b})$$

Werden die geometrischen Variablen in Gleichung 5.1.2 eingesetzt, kann die maximale Spannung mit

$$\sigma_{\max} = \phi_1 (E^3 K^2)^{\frac{1}{5}}$$

und der Geometriefunktion

$$\phi_1 = \left(\pi^4 \frac{c_{K22}^2 c_{J22}^2}{c_A^4} \frac{f_{J22}(\delta)^2 k_P(\delta)}{f_A(\delta)^4} \right)^{\frac{1}{5}}. \quad (\text{C.1.2})$$

Analog kann aus Gleichungen 5.1.4b und 5.1.5 die Geometriefunktion für das Knicken um die zweite Achse ermittelt werden. Diese lautet

$$\phi_2 = \left(\pi^4 \frac{c_{K33}^2 c_{J33}^2}{c_A^4} \frac{f_{J33}(\delta)^2 k_P(\delta)}{f_A(\delta)^4} \right)^{\frac{1}{5}}. \quad (\text{C.1.3})$$

Minimale Masse im Profil wird erreicht, wenn die beiden Geometriefunktionen gleich groß sind. Somit müssen Gleichungen C.1.2 und C.1.3 gleichgesetzt werden. Mit

$$\phi_1 \stackrel{!}{=} \phi_2$$

ergibt sich

$$c_{K22} c_{J22} f_{J22}(\delta) = c_{K33} c_{J33} f_{J33}(\delta). \quad (\text{C.1.4})$$

Hieraus kann nun das optimale Breiten-Höhenverhältnis δ_{opt} berechnet werden, welches für die verschiedenen Profilformen in Tabelle 5.3 genannt ist. Werden diese optimalen Breiten-Höhenverhältnisse nun in Gleichungen C.1.1 eingesetzt, ergeben sich die gewichtsoptimalen Geometrieverhältnisse h/l und t/h für kleine Strukturkennwerte $K < \tilde{K}$, die in Gleichung 5.1.6 gegeben sind.

Für einen großen Strukturkennwert $K > \tilde{K}$ liegt ein Versagen nach Festigkeit vor. Die Restriktion aus Gleichung 5.1.3 ist dann maßgebend. Durch Gleichsetzen der Gleichung mit Gleichung 5.1.2 kann die geometrische Variable h/l bestimmt werden. Somit ergibt sich

$$\frac{h}{l} = \left(\frac{1}{c_A f_A(\delta)} \frac{h}{t} \frac{K}{\sigma_{\text{zul}}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

welche nur noch abhängig von der geometrischen Variable t/h und δ ist. PRECHTL verwendet in seiner Arbeit für große Strukturkennwerte die Annahme $(t/h)_{\text{min,g}} = (t/h)_{\text{min,k}}$. Er begründet diesen Schritt nicht. Tatsächlich ist durch das Fehlen einer zweiten Restriktion das Verhältnis für

t/h frei wählbar, solange die Versagen durch Knicken und Beulen nicht vor dem Festigkeitsversagen eintreten. Die Annahme von PRECHTL ist daher eine Möglichkeit von vielen.

Zielführender ist die Einführung einer geometrischen Restriktion. Daher sind zwei Grenzfälle zu betrachten. Die vom Profil umschlossene Fläche kann optimal klein oder optimal groß sein. Diese Grenzfälle bieten sich an, wenn der Träger möglichst wenig Volumen verbrauchen soll oder in seinem Inneren ein möglichst großes Volumen zur Verfügung stehen soll. Dies kann zum Beispiel dann interessant sein, wenn in den Träger eine andere Struktur eingesetzt werden soll. Zwischen diesen beiden Fällen existieren beliebige andere Kombinationen, von denen die Annahme von PRECHTL eine ist. Damit die umschlossene Fläche möglichst klein ist, müssen Knicken und Versagen nach Festigkeit gleichzeitig einsetzen. Die kritische Knickspannung wird hauptsächlich durch eine Veränderung des Flächenträgheitsmoments beeinflusst. Das Flächenträgheitsmoment ist dazu vor allem von der Höhe beziehungsweise Breite des Profils abhängig. Eine möglichst kleine Knickspannung wird dann erreicht, wenn das Flächenträgheitsmoment und somit die äußere Dimension des Bauteils soweit wie möglich reduziert werden. Da sich die Querschnittsfläche des Profils durch die Reduktion der äußeren Geometrie verringert, muss entsprechend die Profildicke erhöht werden, um die Spannung auf Höhe des Festigkeitsversagens zu halten. Aus diesem Grund erhöht sich die kritische lokale Beulspannung entsprechend von alleine und liegt höher als die kritische Knickspannung und die Fließgrenze σ_{zul} . Somit ergibt sich für einen großen Strukturkennwert und der Bedingung, dass die umschlossene Fläche möglichst klein sein soll, die Gleichung 5.1.8.

Für die Bedingung, dass die umschlossene Fläche möglichst groß sein soll, muss sicher gestellt werden, dass lokales Beulen und das Versagen nach Festigkeit gleichzeitig eintreten. Die zulässige Beulspannung sinkt mit der Wandstärke des Profils. Da für das Versagen nach Festigkeit die Querschnittsfläche relevant ist, muss dadurch die Breite und Höhe des Profils entsprechend vergrößert werden, wodurch die kritische Knickspannung automatisch ansteigt und dann höher als die kritische Beulspannung und die Fließgrenze σ_{zul} ist. Es ergibt sich somit für einen großen Strukturkennwert und der Bedingung, dass die umschlossene Fläche möglichst groß sein soll Gleichung 5.1.10.

C.2 Herleitungen für den Profil-Biegeträger

Die Details und Vorbedingungen für die gewichtsoptimierte Auslegung von Biegeträgern sind am Anfang von Kapitel 5.2 genannt. Die Definitionen der nötigen Profilwerte sind in Kapitel 5.2.1 und der Zielfunktionen und Restriktionen in Kapitel 5.2.2 zu finden. Mit dieser Basis kann die optimierte Auslegung durchgeführt werden, die im Folgenden vorgestellt wird.

C.2.1 Gewichtsfunktionen

Obwohl PRECHTL [2] aufgrund der Verwendung numerisch ermittelter Profilbeulwerte keine geschlossen-analytische Lösung entwickelt und mit seinem Vorgehen seine vorgestellte Logik

nicht einmal befolgen kann, ist seine verwendete Methode trotzdem eine geschlossen-analytische Methode, solange analytisch ermittelte Profilbeulwerte verwendet werden. Dies wird in dieser Arbeit gemacht, weswegen sich die folgenden Abschnitte, wenn nicht anders angegeben, auf die Ausführungen von PRECHTL [2, Kapitel 4.4] beziehen.

Für die optimierte Auslegung müssen zunächst sogenannte Gewichtsfunktionen aufgestellt werden. Nach KLEIN [30] bildet die Gewichtsfunktion einen dimensionslosen Zusammenhang zwischen der Masse des Biegeträgers und den Belastungen ab. In die Zielfunktion Z werden daher jeweils die Tragwerkslängen l , die sich durch Umstellen der Restriktionen ergeben, eingesetzt. Es ergibt sich für die Festigkeit die Zielfunktion

$$Z_{\sigma} > \frac{1}{c_{\sigma}^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{\psi} \left(\frac{K}{\sigma_{zul}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (\text{C.2.1})$$

mit der Gewichtsfunktion

$$\psi = \frac{c_{\text{W}}^{\frac{2}{3}} f_{\text{W}}(\delta)^{\frac{2}{3}}}{c_{\text{A}} f_{\text{A}}(\delta)} \left(\frac{h}{t} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Für die Restriktion der Steifigkeit ergibt sich folgende Zielfunktion

$$Z_{\text{f}} > \frac{1}{c_{\text{f}}^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\phi} \left(\frac{K}{E \frac{f_{zul}}{t}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{C.2.2})$$

mit der Gewichtsfunktion

$$\phi = \frac{c_{\text{J}22}^{\frac{1}{2}} f_{\text{J}22}(\delta)^{\frac{1}{2}}}{c_{\text{A}} f_{\text{A}}(\delta)} \left(\frac{h}{t} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Zielfunktion der Restriktion des Beulens ist

$$Z_{\text{B}} > \frac{1}{c_{\sigma}^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{\phi} \left(\frac{K}{E} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (\text{C.2.3})$$

mit der Gewichtsfunktion

$$\phi = \frac{c_{\text{W}}^{\frac{2}{3}} f_{\text{W}}(\delta)^{\frac{2}{3}} k_{\text{P}}(\delta)^{\frac{2}{3}} t}{c_{\text{A}} f_{\text{A}}(\delta) h}.$$

Die Gewichtsfunktionen sind nun nur noch abhängig von der relativen Profildicke t/h und dem Breiten-Höhenverhältnis δ .

C.2.2 Optimierung der Breiten-Höhenverhältnisse bei den einzelnen Restriktionen für den Biegeträger

Die oben bestimmten Zielfunktionen Z_σ , Z_f , und Z_B bestehen aus Faktoren, die voneinander unabhängig vom Spannungszustand, von der Geometrie und von den Materialeigenschaften und des Strukturkennwerts abhängig sind. Das Ziel der Auslegungsaufgabe ist, die Zielfunktion zu minimieren. Dies kann über das Einstellen der verschiedenen Parameter erfolgen. Somit kann zum einen der Spannungszustand geändert werden, um c_σ und c_f zu erhöhen. Alternativ kann über eine Erhöhung von σ_{zul} , dem E-Modul oder der erlaubten maximalen Verformung f_{zul}/l - also durch eine Änderung des Materials - eine kleinere Gewichtsfunktion gebildet werden.

Die für diese Aufgabe entscheidende Faktoren sind die Geometriefunktionen ψ , φ und ϕ , welche nur noch abhängig vom Breiten-Höhenverhältnis δ und der relativen Profildicke t/h sind. Im ersten Schritt werden die optimalen Breiten-Höhenverhältnisse δ_{opt} isoliert für die drei Restriktionen Festigkeit, Steifigkeit und Beulen ermittelt. Dafür werden die reduzierte Geometriefunktionen

$$\tilde{\psi}(\delta) = \frac{c_W^{\frac{2}{3}} f_W(\delta)^{\frac{2}{3}}}{c_A f_A(\delta)} \quad (C.2.4a)$$

$$\tilde{\varphi}(\delta) = \frac{c_{J22}^{\frac{1}{2}} f_{J22}(\delta)^{\frac{1}{2}}}{c_A f_A(\delta)} \quad (C.2.4b)$$

$$\tilde{\phi}(\delta, k) = \frac{c_W^{\frac{2}{3}} f_W(\delta)^{\frac{2}{3}} k_P(\delta)^{\frac{2}{3}}}{c_A f_A(\delta)} \quad (C.2.4c)$$

gebildet, welche die Geometriefunktionen ψ , φ und ϕ ohne die relative Profildicke t/h darstellen. Zur Minimierung der Gewichtsfunktionen müssen die Geometriefunktionen maximiert werden. Das für die drei Restriktionen optimale Breiten-Höhenverhältnis δ_{opt} kann daher durch Ableiten der reduzierten Gewichtsfunktionen mit anschließendem Nullsetzen berechnet werden. Die gesuchten δ_{opt_σ} , δ_{opt_f} und δ_{opt_B} ergeben sich somit durch $d\tilde{\psi}/d\delta = 0$, $d\tilde{\varphi}/d\delta = 0$ beziehungsweise $d\tilde{\phi}/d\delta = 0$.

Die Berechnung von δ_{opt_B} weicht deutlich vom Vorgehen von PRECHTL ab, weswegen an dieser Stelle auf die Berechnung detaillierter eingegangen wird. Durch die Biegebelastung auf das Profil liegen in den Stegen und Flanschen unterschiedliche Spannungsverläufe vor. Dies führt zu unterschiedlichen kritischen Beulspannungen. Je nach Breiten-Höhenverhältnis δ beult zuerst der Steg oder der Flansch. Aus diesem Grund muss die Rechnung bei einem geschlossenen-analytischen Vorgehen für die verschiedenen unteren Grenzen der Plattenbeulwerte $k_{P,Grenz}$ abschnittsweise für entsprechende Breiten-Höhenverhältnisse δ durchgeführt werden. Daher

wird zunächst das Breiten-Höhenverhältnis δ_{kritB} gesucht, bei dem der Wechsel zwischen Beulen des Stegs und Beulen des Flanschs stattfindet. Gesucht ist demnach

$$\sigma_{\text{kritF}} \stackrel{!}{=} \sigma_{\text{kritS}}.$$

Die kritische Beulspannung des Flansches ist

$$\sigma_{\text{kritF}} = k_{\text{F}} E \left(\frac{t}{b} \right)^2 = \frac{k_{\text{F}}}{\delta^2} E \left(\frac{t}{h} \right)^2$$

und die kritische Beulspannung des Stegs ist

$$\sigma_{\text{kritS}} = k_{\text{S}} E \left(\frac{t}{h} \right)^2$$

Daraus ergibt sich das kritische Breiten-Höhenverhältnis δ_{kritB} mit

$$\delta_{\text{kritB}} = \sqrt{\frac{k_{\text{F}}}{k_{\text{S}}}} = \sqrt{\frac{\kappa_{\text{F}}}{\kappa_{\text{S}}}}.$$

Auf diesem Weg ergeben sich die für die einzelnen Profile in Tabelle C.1 angegebenen kritischen Breiten-Höhenverhältnisse δ_{kritB} . Für ein besseres Nachvollziehen der Rechnung sind auch die Plattenbeulwerte k_{F} und k_{S} angegeben, die dem *Handbuch Strukturberechnung* entnommen sind [50].

Tab. C.1: Kritische Breiten-Höhenverhältnisse δ_{kritB} , bei der sowohl Steg als auch Flansch gleichzeitig Beulen, der angegebenen Profilformen beim Biegeträger [50]

Profilform	κ_{S}	κ_{F}	δ_{kritB}
Vierkantprofil	23,88	4	0,409
Doppel-T-Profil	23,88	1,7	0,267
T-Profil	23,88	1,7	0,267
U-Profil	23,88	4	0,409
C-Profil	23,88	0,406	0,130

Nun kann die Berechnung von $d\tilde{\Phi}/d\delta = 0$ mit den beiden Plattenbeulwerten k_{S} und k_{F} durchgeführt werden, wobei für den Abschnitt $\delta \leq \delta_{\text{kritB}}$ $k_{\text{p}}(\delta) = k_{\text{S}}$ und für den Abschnitt $\delta \geq \delta_{\text{kritB}}$ $k_{\text{p}}(\delta) = k_{\text{F}}/\delta^2$ gilt.

Tabelle C.2 listet die optimalen Breiten-Höhenverhältnisse $\delta_{\text{opt}_{\alpha, f, B}}$ für die Restriktionen Festigkeit, Steifigkeit und Beulen auf, die die Maximalwerte der reduzierten Geometriefunktionen aus Gleichung C.2.4 bilden, welche ebenfalls in Tabelle C.2 aufgeführt sind. Es kann erkannt werden, dass für die verschiedenen Restriktionen unterschiedliche Breiten-Höhenverhältnisse optimal sind. Die Frage, welche dieser drei Größen optimiert werden muss, ist nun vom Strukturkennwert K abhängig.

Tab. C.2: Optimierte Breiten-Höhenverhältnisse für die Restriktionen Festigkeit, Steifigkeit und Beulen und entsprechendes Maximum der reduzierten Gewichtsfunktionen aus Gleichung C.2.4 der angegebenen Profilformen beim Biegeträger nach PRECHTL [2]

Profilform	$\delta_{\text{opt}_{\sigma}}$	$\tilde{\Psi}_{\text{max}}(\delta_{\text{opt}_{\sigma}})$	δ_{opt_f}	$\tilde{\Phi}_{\text{max}}(\delta_{\text{opt}_f})$	δ_{opt_B}	$\tilde{\Phi}_{\text{max}}(\delta_{\text{opt}_B})$
Vierkantprofil	1	0,303	1/3	0,217	0,409	2,255
Doppel-T-Profil	0,5	0,382	1/6	0,306	0,267	2,89
T-Profil	0,064	0,306	0,125	0,296	0,064	2,370
U-Profil	0,129	0,243	0,250	0,210	0,129	2,370
C-Profil	0,5	0,382	1/6	0,306	0,130	2,74

C.2.3 Optimierte Tragwerksauslegung für den Biegeträger

Analog zur optimierten Auslegung des Druckstabs können die Restriktionen in einen großen und kleinen Strukturkennwert aufgeteilt werden. Da die Gewichtsfunktionen Z_{σ} (Gleichung C.2.1), Z_f (Gleichung C.2.2) und Z_B (Gleichung C.2.3) geometrisch nur von der relativen Profildicke t/h und dem Breiten-Höhenverhältnis δ abhängig sind, kann mit diesen eine optimierte Auslegung aufgestellt werden. Für große Strukturkennwerte $K > \tilde{K}$ gilt ein gleichzeitiges Versagen durch Festigkeit und Beulen. Daher können die Zielfunktionen der Festigkeit und des Beulens gleichgesetzt werden. Es ergibt sich

$$Z_{\sigma}\left(\frac{t}{h}, \delta\right) \stackrel{!}{=} Z_B\left(\frac{t}{h}, \delta\right).$$

Durch Umstellen kann die relative Profildicke t/h gebildet werden, welche dann nur noch abhängig von δ ist.

$$\frac{t}{h}(\delta) = \sqrt{\frac{1}{k_P(v, \delta)} \frac{\sigma_{\text{zul}}}{E}}. \quad (\text{C.2.5})$$

Gleichung C.2.5 kann nun entweder in Gleichung C.2.1 oder in Gleichung C.2.3 eingesetzt werden, wodurch $Z_g(\delta)$ gebildet wird:

$$Z_g(\delta) = \frac{1}{c_\sigma^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{\Psi(\delta)} (1 - \nu^2)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{K^4}{E \sigma_{zul}^3} \right)^{\frac{1}{6}}$$

mit der Geometriefunktion

$$\Psi(\delta) = \left(\frac{\pi^2}{12} \right)^{\frac{1}{6}} \frac{c_W^{\frac{2}{3}} f_W(\delta)^{\frac{2}{3}}}{c_A f_A(\delta)} \kappa(\delta)^{\frac{1}{6}}. \quad (C.2.6)$$

Das Ziel ist, dass Z_g minimal wird, wodurch das Breiten-Höhenverhältnis δ für einen großen Strukturkennwert dann optimal ist, wenn Ψ maximiert wird. Dies wird über die Ableitung der Geometriefunktion Ψ nach δ und anschließendem Nullsetzen erreicht. Es ist daher $d\Psi/d\delta = 0$ durchzuführen. Analog zum Vorgehen beim Profil-Druckstab muss auch an dieser Stelle darauf geachtet werden, dass der Plattenbeulwert k_p abhängig vom Breiten-Höhenverhältnis verschiedene Werte aufweist. Aus diesem Grund müssen zwei Ableitungen gebildet werden, wobei für den Abschnitt $\delta \leq \delta_{krit_B}$ $k_p(\delta) = K_S$ und für den Abschnitt $\delta \geq \delta_{krit_B}$ $k_p(\delta) = K_F/\delta^2$ gilt. Das optimale Breiten-Höhenverhältnis δ_{opt_g} und der Maximalwert der Geometriefunktion Ψ_{max} für die verschiedenen Profilformen sind in Tabelle C.3 wiedergegeben.

Für einen kleinen Strukturkennwert $K < \tilde{K}$ muss das Versagen nach lokalem Beulen und das Erreichen der maximalen Durchbiegung gleichzeitig auftreten. Aus diesem Grund müssen die beiden Zielfunktionen Z_f und Z_B gleichgesetzt werden. Das restliche Vorgehen ist analog zu den Schritten beim großen Strukturkennwert. Die Ausgangsbedingung ist

$$Z_f\left(\frac{t}{h}, \delta\right) \stackrel{!}{=} Z_B\left(\frac{t}{h}, \delta\right).$$

Durch Umstellen kann die relative Profildicke t/h gebildet werden, welche dann nur noch abhängig von δ ist.

$$\frac{t}{h}(\delta) = \left(\frac{c_f^3 c_{J22}^3 f_{J22}(\delta)^3 \left(\frac{f_{zul}}{t}\right)^3 K}{c_\sigma^4 c_W^4 f_W(\delta)^4 k_p(\nu, \delta)^4 E} \right)^{\frac{1}{9}}. \quad (C.2.7)$$

Gleichung C.2.7 kann nun entweder in Gleichung C.2.2 oder in Gleichung C.2.3 eingesetzt werden, wodurch $Z_k(\delta)$ gebildet wird. Diese lautet

$$Z_k(\delta) = \frac{1}{c_\sigma^{\frac{2}{9}} c_f^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{\Phi} (1 - \nu^2)^{\frac{2}{9}} \left(\frac{K}{E \left(\frac{f_{zul}}{t}\right)^{\frac{3}{5}}} \right)^{\frac{5}{9}}$$

mit der Geometriefunktion

$$\Phi(\delta) = \left(\frac{\pi^2}{12}\right)^{\frac{2}{9}} \frac{c_W^{\frac{2}{9}} c_{J22}^{\frac{1}{3}}}{c_A} \frac{f_W(\delta)^{\frac{2}{9}} f_{J22}(\delta)^{\frac{1}{3}}}{f_A(\delta)} \kappa(\delta)^{\frac{2}{9}}. \quad (\text{C.2.8})$$

Auch an dieser Stelle gilt, für eine optimierte Auslegung muss Z_k minimal werden. Daher ist das Breiten-Höhenverhältnis δ für einen kleinen Strukturkennwert optimal, wenn Φ maximiert wird. Dies wird über die Ableitung der Geometriefunktion Φ nach δ und anschließendem Nullsetzen erreicht. Es ist daher $d\Phi/d\delta = 0$ durchzuführen. Analog zum Vorgehen beim großen Strukturkennwert muss auch an dieser Stelle darauf geachtet werden, dass der Plattenbeulwert k_p abhängig vom Breiten-Höhenverhältnis verschiedene Werte aufweist. Aus diesem Grund müssen zwei Ableitungen gebildet werden, wobei für den Abschnitt $\delta \leq \delta_{\text{krit}_B}$ $k_p(\delta) = K_S$ und für den Abschnitt $\delta \geq \delta_{\text{krit}_B}$ $k_p(\delta) = K_F/\delta^2$ gilt. Die kritischen Breiten-Höhenverhältnisse sind in Tabelle C.1 aufgeführt. Das optimale Breiten-Höhenverhältnis δ_{opt_k} und der Maximalwert der Geometriefunktion Φ_{max} für die verschiedenen Profilformen sind in Tabelle C.3 wiedergegeben.

Tab. C.3: Optimales Breiten-Höhenverhältnis $\delta_{\text{opt}_{k,g}}$ für große und kleine Strukturkennwerte, entsprechende Profilbeulwert κ und entsprechende Maxima der Gewichtsfunktionen aus den Gleichungen C.2.6 und C.2.8 der angegebenen Profilformen beim Biegeträger

Profilform	δ_{opt_k}	κ_k	Φ_{max}	δ_{opt_g}	κ_g	Ψ_{max}
Vierkantprofil	0,409	23,88	0,462	0,409	23,88	0,477
Doppel-T-Profil	0,250	23,88	0,630	0,267	23,85	0,613
T-Profil	0,103	23,88	0,580	0,064	23,88	0,502
U-Profil	0,203	23,88	0,426	0,129	23,88	0,399
C-Profil	0,130	23,63	0,620	0,130	23,63	0,580

Nun fehlt nur noch die optimal relative Profilhöhe h/l . Die so genannte Stegshlankheit wird gebildet, indem zunächst die Spannung aus Gleichung 5.2.1 in die Restriktionen aus Gleichungen 5.2.2 und 5.2.3 eingesetzt wird und diese dann sowie auch Gleichung 5.2.2 nach der Stegshlankheit h/l umgestellt werden. Auf diesem Weg können die Stegshlankheiten für die drei Restriktionen Festigkeit, Steifigkeit und Beulen gebildet werden, die folgendermaßen lauten

$$\left(\frac{h}{l}\right)_{\sigma} = \left(\frac{1}{c_{\sigma} c_W f_W(\delta)} \frac{K}{\sigma_{\text{zul}} \frac{t}{h}}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad (\text{C.2.9a})$$

$$\left(\frac{h}{l}\right)_{f} = \left(\frac{1}{c_f c_{J22} f_{J22}(\delta)} \frac{K}{E \frac{f_{\text{zul}}}{l} \frac{t}{h}}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad (\text{C.2.9b})$$

$$\left(\frac{h}{l}\right)_B = \left(\frac{1}{c_{\sigma} c_W f_W(\delta) k_P(\delta)} \frac{K}{E \left(\frac{t}{h}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (\text{C.2.9c})$$

Um nun die Stegslankheit für einen großen Strukturkennwert zu erhalten, kann die relative Profilhöhe t/h aus Gleichung C.2.5 in die Gleichungen C.2.9a oder C.2.9c eingesetzt werden. Analog verhält es sich für einen kleinen Strukturwert, bei dem die relative Profilhöhe t/h aus Gleichung C.2.7 in die Gleichungen C.2.9b oder C.2.9c eingesetzt werden muss. So können alle nötigen optimalen Profilgeometrien bestimmt werden, welche in Gleichung 5.2.4 zusammengefasst sind.

C.3 Herleitungen für den Profil-Torsionsstab

Die Details und Vorbedingungen für die gewichtsoptimierte Auslegung von Torsionsstäben sind am Anfang von Kapitel 5.3 genannt. Die Definitionen der nötigen Profilwerte sind in Kapitel 5.3.1 und der Zielfunktionen und Restriktionen in Kapitel 5.3.2 zu finden. Mit dieser Basis kann die optimierte Auslegung durchgeführt werden, die im Folgenden vorgestellt wird. Angemerkt sei, dass wie schon in Kapitel 5.3 erwähnt, eine Unterscheidung zwischen geschlossenen und offenen Profilformen getroffen werden muss. Aus diesem Grund müssen die meisten Schritte der Herleitung für die beiden Profilarten durchgeführt werden. Die Zusammenhänge bei offenen Profilformen sind mit einem * gekennzeichnet.

C.3.1 Gewichtsfunktionen

Auch beim Torsionsstab werden wie beim Biegeträger sogenannte Gewichtsfunktionen nach KLEIN [30] aufgestellt. In die Zielfunktion Z werden daher jeweils die Tragwerkslängen l , die sich durch Umstellen der Restriktionen ergeben, eingesetzt. Für die Festigkeit ergibt sich die Zielfunktion für geschlossene Profile

$$Z_{\tau} > \frac{1}{c_{\tau}^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{\Psi_T} \left(\frac{K}{\tau_{zul}}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (\text{C.3.1})$$

mit der Gewichtsfunktion

$$\Psi_T = \frac{c_{W_T}^{\frac{2}{3}} f_{W_T}(\delta)^{\frac{2}{3}}}{c_A f_A(\delta)} \left(\frac{h}{t}\right)^{\frac{1}{3}}$$

beziehungsweise bei offenen Profilformen

$$Z_{\tau}^* > \frac{1}{c_{\tau}^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{\Psi_T^*} \left(\frac{K}{\tau_{zul}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (C.3.2)$$

mit der Gewichtsfunktion

$$\Psi_T^* = \frac{c_{W_T}^{\frac{2}{3}} f_{W_T}(\delta)^{\frac{2}{3}}}{c_A f_A(\delta)} \left(\frac{t}{h} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Für die Restriktion der Verdrehung ergibt sich folgende Zielfunktion für geschlossene Profile

$$Z_{\vartheta} > \frac{1}{c_{\vartheta}^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\Phi_T} \left(\frac{K}{G \vartheta_{zul}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (C.3.3)$$

mit der Gewichtsfunktion

$$\Phi_T = \frac{c_{J_T}^{\frac{1}{2}} f_{J_T}(\delta)^{\frac{1}{2}}}{c_A f_A(\delta)} \left(\frac{h}{t} \right)^{\frac{1}{2}}$$

beziehungsweise für offene Profilformen

$$Z_{\vartheta}^* > \frac{1}{c_{\vartheta}^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\Phi_T^*} \left(\frac{K}{G \vartheta_{zul}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (C.3.4)$$

mit der Gewichtsfunktion

$$\Phi_T^* = \frac{c_{J_T}^{\frac{1}{2}} f_{J_T}(\delta)^{\frac{1}{2}}}{c_A f_A(\delta)} \left(\frac{t}{h} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Zielfunktion der Restriktion des Beulens ist für geschlossene Profile

$$Z_{BS} > \frac{1}{c_{\tau}^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{\Phi_T} \left(\frac{K}{E} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (C.3.5)$$

mit der Gewichtsfunktion

$$\phi_T = \frac{c_{W_T}^{\frac{2}{3}} f_{W_T}(\delta)^{\frac{2}{3}} k_\tau(\delta)^{\frac{2}{3}} t}{c_A f_A(\delta) h}$$

und für offene Profilformen

$$Z_{BS}^* > \frac{1}{c_\tau^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{\phi_T^*} \left(\frac{K}{E} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (\text{C.3.6})$$

mit der Gewichtsfunktion

$$\phi_T^* = \frac{c_{W_T}^{\frac{2}{3}} f_{W_T}(\delta)^{\frac{2}{3}} k_\tau(\delta)^{\frac{2}{3}}}{c_A f_A(\delta)} \left(\frac{t}{h} \right)^{\frac{5}{3}}.$$

Die Gewichtsfunktionen sind nun nur noch von der relativen Profildicke t/h und dem Breiten-Höhenverhältnis δ abhängig.

C.3.2 Optimierung des Breiten-Höhenverhältnis

Wie auch beim Biegeträger sind bei den Zielfunktionen Z_τ , Z_ϑ , und Z_{BS} beziehungsweise Z_τ^* , Z_ϑ^* , und Z_{BS}^* die jeweiligen Faktoren unabhängig voneinander optimierbar. Der Einspannungszustand, die Geometrie, die Materialeigenschaften oder der Strukturkennwert können geändert werden. Das Ziel ist weiterhin, die Zielfunktion zu minimieren. Für diese Aufgabe entscheidenden Faktoren sind die Geometriefunktionen ψ_T , φ_T und ϕ_T beziehungsweise ψ_T^* , φ_T^* , und ϕ_T^* , welche nur noch abhängig vom Breiten-Höhenverhältnis δ und der relativen Profildicke t/h sind.

Im ersten Schritt werden die optimalen Breiten-Höhenverhältnisse $\delta_{\text{opt}_{\tau,\vartheta,BS}}$ wie beim Biegeträger über die reduzierten Gewichtsfunktionen isoliert für die drei Restriktionen Festigkeit, Steifigkeit und Beulen ermittelt. Da die allgemeinen Formen der reduzierten Gewichtsfunktionen für offene und geschlossene Profile identisch sind, muss im folgenden keine Unterscheidung zwischen den Profilarten vorgenommen werden.

C.3.2.1 Optimierung des Breiten-Höhenverhältnis bei den einzelnen Restriktionen für den Torsionsstab

Als erster Schritt werden die reduzierte Geometriefunktionen

$$\tilde{\Psi}_T(\delta) = \frac{c_{W_T}^{\frac{2}{3}} f_{W_T}(\delta)^{\frac{2}{3}}}{c_A f_A(\delta)}, \quad (\text{C.3.7a})$$

$$\tilde{\Phi}_T(\delta) = \frac{c_{J_T}^{\frac{1}{2}} f_{J_T}(\delta)^{\frac{1}{2}}}{c_A f_A(\delta)}, \quad (\text{C.3.7b})$$

$$\tilde{\phi}_T(\delta, k) = \frac{c_{W_T}^{\frac{2}{3}} f_{W_T}(\delta)^{\frac{2}{3}} k_\tau(\delta)^{\frac{2}{3}}}{c_A f_A(\delta)} \quad (\text{C.3.7c})$$

gebildet, welche die Geometriefunktionen Ψ_T , Φ_T und ϕ_T beziehungsweise Ψ_T^* , Φ_T^* , und ϕ_T^* ohne die relative Profildicke t/h darstellen. Zur Minimierung der Gewichtsfunktionen müssen die Geometriefunktionen maximiert werden. Das für die drei Restriktionen optimale Breiten-Höhenverhältnis $\delta_{\text{opt}_{\tau, \emptyset, \text{BS}}}$ kann daher durch Ableiten der reduzierten Gewichtsfunktionen mit anschließendem Nullsetzen berechnet werden. Die gesuchten $\delta_{\text{opt}_\emptyset}$, $\delta_{\text{opt}_\#}$ und $\delta_{\text{opt}_{\text{BS}}}$ ergeben sich somit durch $d\tilde{\Psi}_T/d\delta = 0$, $d\tilde{\Phi}_T/d\delta = 0$ beziehungsweise $d\tilde{\phi}_T/d\delta = 0$.

Wie beim Biegeträger muss auch beim Torsionsstab das kritische Breiten-Höhenverhältnis $\delta_{\text{krit}_{\text{BS}}}$ durch das gleichzeitige Beulen von Steg und Flansch bestimmt werden, um das optimale Breiten-Höhenverhältnis $\delta_{\text{opt}_{\text{BS}}}$ anschließend ermitteln zu können. Gesucht ist demnach

$$\tau_{\text{krit}_F} \stackrel{!}{=} \tau_{\text{krit}_{\text{BS}}}.$$

Die kritische Beulspannung des Flansches ist

$$\tau_{\text{krit}_F} = k_F E \left(\frac{t}{b} \right)^2 = \frac{k_F}{\delta^2} E \left(\frac{t}{h} \right)^2$$

und die kritische Beulspannung des Stegs ist

$$\tau_{\text{krit}_{\text{BS}}} = k_S E \left(\frac{t}{h} \right)^2.$$

Daraus ergibt sich das kritische Breiten-Höhenverhältnis mit

$$\delta_{\text{krit}_{\text{BS}}} = \sqrt{\frac{k_F}{k_S}}.$$

Auf diesem Weg ergeben sich die für die einzelnen Profile in Tabelle C.4 angegebenen kritischen Breiten-Höhenverhältnisse $\delta_{\text{krit}_{\text{BS}}}$. Für ein besseres Nachvollziehen der Rechnung sind

auch die Plattenbeulwerte k_F und k_S angegeben, die auf Analysen dargelegt im «Handbuch Strukturberechnung» beruhen [50].

Tab. C.4: Kritische Breiten-Höhenverhältnisse, bei der sowohl Steg als auch Flansch gleichzeitig Beulen, der angegebenen Profilformen beim Torsionsstab

Profilform	$k_{\tau,S}$	$k_{\tau,F}$	δ_{kritBS}
Vierkantprofil	5,3	5,3	1
Doppel-T-Profil	5,3	2,64	0,706
T-Profil	0,66	2,64	2
U-Profil	0,66	5,3	2,834

Nun kann die Berechnung von $d\tilde{\phi}/d\delta = 0$ mit den beiden Plattenbeulwerten $k_{\tau,S}$ und $k_{\tau,F}$ durchgeführt werden, wobei für den Abschnitt $\delta \leq \delta_{\text{kritBS}}$ $k_{\tau}(\delta) = k_{\tau,S}$ und für den Abschnitt $\delta \geq \delta_{\text{kritBS}}$ $k_{\tau}(\delta) = k_{\tau,F}/\delta^2$ gilt.

Tabelle C.5 listet die optimalen Breiten-Höhenverhältnisse für die Restriktionen Festigkeit, Verdrehung und Beulen sowie die entsprechenden Maxima der reduzierten Geometriefunktionen aus Gleichung C.3.7 auf. Es kann erkannt werden, dass beim Vierkantprofil für die verschiedenen Restriktionen unterschiedliche Breiten-Höhenverhältnisse optimal sind. Bei den offenen Profilen wird deutlich, dass die jeweiligen optimalen Breiten-Höhenverhältnisse bei null liegen. Da offene Profile sehr schlecht auf Torsion belastbar sind, erscheint dies logisch, dass eine einfache Platte bei den jeweiligen Restriktionen die optimale Form darstellt. Die Zahlenwerte für die reduzierten Gewichtsfunktionen entsprechen einem Breiten-Höhenverhältnis von 0, 1.

Auch bei der Torsion ist die weitere Optimierung nun vom Strukturkennwert K abhängig. Die optimierte Tragwerksauslegung für den Torsionsstab wird im folgenden zunächst für geschlossene und anschließend für offene Profilformen durchgeführt.

Tab. C.5: Optimierte Breiten-Höhenverhältnisse für die Restriktionen Festigkeit, Steifigkeit und Beulen und entsprechendes Maximum der reduzierten Gewichtsfunktionen aus Gleichung C.3.7 der angegebenen Profilformen beim Torsionsstab. Bei den offenen Profilen entsprechen die Maxima einem Breiten-Höhenverhältnis von 0, 1

Profilform	δ_{opt_τ}	$\tilde{\Psi}_{T,\text{max}}(\delta_{\text{opt}_\tau})$	δ_{opt_ϕ}	$\tilde{\Phi}_{T,\text{max}}(\delta_{\text{opt}_\phi})$	δ_{optBS}	$\tilde{\Phi}_{T,\text{max}}(\delta_{\text{optBS}})$
Vierkantprofil	2	0,420	2	0,272	1	1,128
Doppel-T-Profil	0	0,539	0	0,601	0	1,53
T-Profil	0	0,502	0	0,583	0	0,356
U-Profil	0	0,161	0	0,211	0	0,114

C.3.3 Optimierte Tragwerksauslegung für den Torsionsstab für geschlossene Profilformen

Analog zur optimierten Auslegung des Biegeträgers können die Restriktionen in einen großen und kleinen Strukturkennwert aufgeteilt werden. Da die Gewichtsfunktionen Z_τ (Gleichung C.3.1), Z_ϑ (Gleichung C.3.3) und Z_{BS} (Gleichung C.3.5) geometrisch nur von der relativen Profildicke t/h und dem Breiten-Höhenverhältnis δ abhängig sind, kann mit diesen eine optimierte Auslegung berechnet werden.

Für große Strukturkennwerte $K > \tilde{K}$ gilt wie beim Biegeträger ein gleichzeitiges Versagen durch Festigkeit und lokalem Beulen. Daher können die Zielfunktionen der Festigkeit und des lokalen Beulens gleichgesetzt werden. Es ergibt sich beim geschlossenen Profil

$$Z_\tau \left(\frac{h}{t}, \delta \right) \stackrel{!}{=} Z_{BS} \left(\frac{h}{t}, \delta \right).$$

Durch Umstellen kann die relative Profilhöhe t/h gebildet werden, welche dann nur noch abhängig von δ ist. Für das geschlossene Profil lautet sie:

$$\frac{t}{h}(\delta) = \sqrt{\frac{1}{k_\tau(v, \delta)} \frac{\tau_{zul}}{E}}. \quad (C.3.8)$$

Gleichung C.3.8 kann nun entweder in Gleichung C.3.1 oder in Gleichung C.3.5 eingesetzt werden, wodurch $Z_g(\delta)$ gebildet wird. Diese lautet

$$Z_g(\delta) = \frac{1}{c_\tau^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{\Psi_T} (1 - \nu^2)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{K^4}{E \tau_{zul}^3} \right)^{\frac{1}{6}}$$

mit der Geometriefunktion

$$\Psi_T(\delta) = \left(\frac{\pi^2}{12} \right)^{\frac{1}{6}} \frac{c_{WT}^{\frac{2}{3}}}{c_A} \frac{f_{WT}(\delta)^{\frac{2}{3}}}{f_A(\delta)} \kappa_\tau(\delta)^{\frac{1}{6}}. \quad (C.3.9)$$

Das Ziel ist, dass Z_g minimal wird, womit das Breiten-Höhenverhältnis δ für einen großen Strukturkennwert dann optimal ist, wenn Ψ_T maximiert wird. Dies wird über die Ableitung der Geometriefunktion Ψ_T nach δ und anschließendem Nullsetzen erreicht. Es ist daher $d\Psi_T/d\delta = 0$ durchzuführen. Analog zum Vorgehen beim Profil-Biegeträger muss auch an dieser Stelle darauf geachtet werden, dass der Plattenbeulwert k_τ abhängig vom Breiten-Höhenverhältnis δ verschiedene Werte aufweist. Aus diesem Grund müssen zwei Ableitungen gebildet werden, wobei für den Abschnitt $\delta \leq \delta_{kritBS}$ $k_\tau(\delta) = K_S$ und für den Abschnitt $\delta \geq \delta_{kritBS}$ $k_\tau(\delta) = K_F/\delta^2$ gilt. Das Vorgehen zur Ermittlung der kritischen Breiten-Höhenverhältnisse δ_{kritBS} wird

wie beim Profil-Biegeträger bei der Herleitung der reduzierten Gewichtsfunktionen bei einer hypothetischen Existenz von immer nur einer der drei verwendeten Restriktionen vorgestellt. Dies ist in Anhang C.3.2 zu finden. Die dort aufgezeigte Tabelle C.4 listet die kritischen Breiten-Höhenverhältnisse für die jeweiligen Profilformen auf. Das optimale Breiten-Höhenverhältnis δ_{opt_g} und der Maximalwert der Geometriefunktion $\Psi_{T,\text{max}}$ für die verschiedenen Profilformen sind in Tabelle 5.18 wiedergegeben.

Bei einem kleinen Strukturkennwert $K < \tilde{K}$ setzt gleichzeitig das Versagen durch lokales Beulen und das Erreichen der maximal zulässigen Verdrehung ein. Daher werden die beiden Zielfunktionen Z_ϑ und Z_{BS} gleichgesetzt. Das restliche Vorgehen ist analog zu den Schritten beim großen Strukturkennwert. Die Ausgangsbedingung ist

$$Z_\vartheta\left(\frac{h}{t}, \delta\right) \stackrel{!}{=} Z_{\text{BS}}\left(\frac{h}{t}, \delta\right).$$

Durch Umstellen kann die relative Profilhöhe t/h gebildet werden, welche dann nur noch abhängig von δ ist. Für das geschlossene Profil lautet sie:

$$\frac{t}{h}(\delta) = \left(\frac{c_\vartheta^3 c_{\text{JT}}^3}{c_\tau^4 c_{\text{WT}}^4} \frac{f_{\text{JT}}(\delta)^3}{f_{\text{WT}}(\delta)^4 k_\tau(\nu, \delta)^4} \frac{(\vartheta_{\text{zul}} \frac{G}{E})^3 K}{E} \right)^{\frac{1}{9}}. \quad (\text{C.3.10})$$

Gleichung C.3.10 kann nun entweder in Gleichung C.3.3 oder in Gleichung C.3.5 eingesetzt werden, wodurch $Z_k(\delta)$ gebildet wird. Diese lautet

$$Z_k(\delta) = \frac{1}{c_\tau^{\frac{2}{9}} c_\vartheta^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{\Phi_T} \left(\frac{(1-\nu^2)^5}{(1-\nu)^3} \right)^{\frac{1}{9}} \left(\frac{K}{E \vartheta_{\text{zul}}^{\frac{3}{5}}} \right)^{\frac{5}{9}}$$

mit der Geometriefunktion

$$\Phi_T(\delta) = \left(\frac{\pi^2}{24 \sqrt{2}} \right)^{\frac{2}{9}} \frac{c_{\text{WT}}^{\frac{2}{9}} c_{\text{JT}}^{\frac{1}{3}}}{c_A} \frac{f_{\text{WT}}(\delta)^{\frac{2}{9}} f_{\text{JT}}(\delta)^{\frac{1}{3}}}{f_A(\delta)} k_\tau(\delta)^{\frac{2}{9}}. \quad (\text{C.3.11})$$

Auch an dieser Stelle gilt, für eine optimierte Auslegung muss Z_k minimal werden. Dann ist das Breiten-Höhenverhältnis für einen kleinen Strukturkennwert optimal, wenn Φ_T maximiert wird. Dies wird über die Ableitung der Geometriefunktion Φ nach δ und anschließendem Nullsetzen erreicht. Es ist daher $d\Phi_T/d\delta = 0$ durchzuführen. Analog zum Vorgehen beim großen Strukturkennwert muss auch an dieser Stelle darauf geachtet werden, dass der Plattenbeulwert k_τ abhängig vom Breiten-Höhenverhältnis verschiedene Werte aufweist. Aus diesem Grund müssen zwei Ableitungen gebildet werden, wobei für den Abschnitt $\delta \leq \delta_{\text{kritBS}}$ $k_\tau(\delta) = K_S$ und für den Abschnitt $\delta \geq \delta_{\text{kritBS}}$ $k_\tau(\delta) = K_F/\delta^2$ gilt. Die kritischen Breiten-Höhenverhältnisse

sind in Tabelle C.4 aufgeführt. Das optimale Breiten-Höhenverhältnis δ_{optk} und der Maximalwert der Geometriefunktion $\Phi_{T,\text{max}}$ für die verschiedenen Profilformen sind in Tabelle 5.18 wiedergegeben.

Nun fehlt nur noch die optimale relative Profilhöhe h/l . Die so genannte Stegslankheit wird gebildet, indem zunächst in die Restriktionen aus Gleichungen 5.3.5 und 5.3.8 in die Spannung aus Gleichung 5.3.3 eingesetzt werden und diese dann sowie auch Gleichung 5.3.6 nach der Stegslankheit h/l umgestellt werden. Auf diesem Weg können die Stegslankheiten für die drei Restriktionen Festigkeit, maximale Verdrehung und Beulen gebildet werden, die folgendermaßen lauten

$$\left(\frac{h}{l}\right)_{\tau} = \left(\frac{1}{c_{\tau}c_{W_T}f_{W_T}(\delta)} \frac{K}{\tau_{\text{zul}} \frac{t}{h}}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad (\text{C.3.12a})$$

$$\left(\frac{h}{l}\right)_{\vartheta} = \left(\frac{1}{c_{\vartheta}c_{J_T}f_{J_T}(\delta)} \frac{K}{\vartheta G \frac{t}{h}}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad (\text{C.3.12b})$$

$$\left(\frac{h}{l}\right)_{\text{BS}} = \left(\frac{1}{c_{\tau}c_{W_T}f_{W_T}(\delta)k_{\tau}(\delta)} \frac{K}{E \left(\frac{t}{h}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (\text{C.3.12c})$$

Um nun die optimale Stegslankheit für einen großen Strukturkennwert zu erhalten, kann die relative Profildicke t/h aus Gleichung C.3.8 in die Gleichungen C.3.12a oder C.3.12c eingesetzt werden. Analog verhält es sich für einen kleinen Strukturwert, bei dem die relative Profilhöhe t/h aus Gleichung C.3.10 in die Gleichungen C.3.12b oder C.3.12c eingesetzt werden muss. So können alle nötigen optimalen Profilgeometrien bestimmt werden, welche in Gleichung 5.3.10 zusammengefasst sind.

C.3.4 Optimierte Tragwerksauslegung für den Torsionsstab für offene Profilformen

Im Folgenden wird die optimierte Tragwerksauslegung für offene Profilformen für den Torsionsstab vorgestellt. Das Vorgehen weist nur unwesentlich von der im vorstehenden Kapitel beschriebenen optimierten Tragwerksauslegung für geschlossene Profilformen ab. Aufgrund der deutlich geringeren Drillsteifigkeit von offenen Profilformen kommen jedoch bei der optimierten Tragwerksauslegung keine technisch sinnvollen Lösungen heraus. Der Vollständigkeit halber wird die Auslegung trotzdem an dieser Stelle kurz vorgestellt.

Auch hier können die Restriktionen in einen großen und kleinen Strukturkennwert aufgeteilt werden. Für große Strukturkennwerte $K > \tilde{K}$ gilt wie bei den geschlossenen Profilformen ein gleichzeitiges Versagen durch Festigkeit und lokalem Beulen. Daher können die Zielfunktionen der Festigkeit und des lokalen Beulens gleichgesetzt werden. Es ergibt sich beim offenen Profil

$$Z_{\tau}^* \left(\frac{h}{t}, \delta \right) \stackrel{!}{=} Z_{\text{BS}}^* \left(\frac{h}{t}, \delta \right).$$

Durch Umstellen kann die relative Profildicke t/h gebildet werden, welche dann nur noch abhängig von δ ist. Für das offene Profil lautet sie:

$$\left(\frac{h}{t} \right)^* (\delta) = \sqrt{\frac{1}{k_{\tau}(\nu, \delta)} \frac{\tau_{\text{zul}}}{E}}. \quad (\text{C.3.13})$$

Gleichung C.3.13 kann nun entweder in Gleichung C.3.2 oder in Gleichung C.3.6 eingesetzt werden, wodurch $Z_{\text{g}}^*(\delta)$ gebildet wird. Diese lautet

$$Z_{\text{g}}^*(\delta) = \frac{1}{c_{\tau}^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{\Psi_{\text{T}}^*} \frac{1}{(1-\nu^2)^{\frac{1}{6}}} \left(\frac{EK^4}{\tau_{\text{zul}}^5} \right)^{\frac{1}{6}}$$

mit der Geometriefunktion

$$\Psi_{\text{T}}^*(\delta) = \left(\frac{12}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{6}} \frac{c_{\text{WT}}^{\frac{2}{3}} f_{\text{WT}}(\delta)^{\frac{2}{3}}}{c_{\text{A}} f_{\text{A}}(\delta)} \frac{1}{\kappa_{\tau}(\delta)^{\frac{1}{6}}}. \quad (\text{C.3.14})$$

Das Ziel ist, dass Z_{g}^* minimal wird, weswegen wie bei der geschlossenen Profilform die Geometriefunktion Ψ_{T}^* nach δ abgeleitet werden muss. Auch hier muss darauf geachtet werden, dass der Plattenbeulwert k_{τ} je nach Abschnitt einen unterschiedlichen Wert annimmt. Bei der Ableitung gilt daher für den Abschnitt $\delta \leq \delta_{\text{kritBS}}$ $k_{\tau}(\delta) = K_{\text{S}}$ und für den Abschnitt $\delta \geq \delta_{\text{kritBS}}$ $k_{\tau}(\delta) = K_{\text{F}}/\delta^2$. Tabelle C.4 listet die kritischen Breiten-Höhenverhältnisse δ_{kritBS} für die jeweiligen Profilformen auf. Das optimale Breiten-Höhenverhältnis δ_{optg} und der Maximalwert der Geometriefunktion $\Psi_{\text{T,max}}^*$ für die verschiedenen Profilformen sind in Tabelle C.6 wiedergegeben.

Bei einem kleinen Strukturkennwert $K < \tilde{K}$ setzt gleichzeitig das Versagen durch lokales Beulen und das Erreichen der maximal zulässigen Verdrehung ein. Daher werden die beiden Zielfunktionen Z_{ϑ} und Z_{BS} gleichgesetzt. Das restliche Vorgehen ist analog zu den Schritten beim großen Strukturkennwert. Die Ausgangsbedingung ist

$$Z_{\vartheta}^* \left(\frac{h}{t}, \delta \right) \stackrel{!}{=} Z_{\text{BS}}^* \left(\frac{h}{t}, \delta \right).$$

Durch Umstellen kann die relative Profilhöhe t/h gebildet werden, welche dann nur noch abhängig von δ ist. Für das offene Profil lautet sie:

$$\left(\frac{t}{h}\right)^*(\delta) = \frac{c_{\tau}^3 c_{W_T}^2 f_{W_T}(\delta)^2 k_{\tau}(\nu, \delta)^2}{c_{\vartheta}^{\frac{3}{2}} c_{J_T}^{\frac{3}{2}} f_{J_T}(\delta)^{\frac{3}{2}}} \frac{E^2}{(\vartheta_{zul} G)^{\frac{3}{2}} K^{\frac{1}{2}}}. \quad (C.3.15)$$

Gleichung C.3.15 kann nun entweder in Gleichung C.3.4 oder in Gleichung C.3.6 eingesetzt werden, wodurch $Z_k^*(\delta)$ gebildet wird. Diese lautet

$$Z_k^*(\delta) = \frac{c_{\vartheta}^{\frac{5}{2}}}{c_{\tau}^6} \frac{1}{\Phi_T^*} \frac{(1-\nu^2)^4 \vartheta_{zul}^3 K}{(1+\nu)^3 E}$$

mit der Geometriefunktion

$$\Phi_T^*(\delta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^4 \frac{c_{W_T}^4}{c_{J_T}^{\frac{5}{2}} c_A} \frac{f_{W_T}(\delta)^4}{f_{J_T}(\delta)^{\frac{5}{2}} f_A(\delta)} \kappa_{\tau}(\delta)^4.$$

Auch an dieser Stelle gilt, für eine optimierte Auslegung muss Z_k^* minimal werden. Dies wird über die Ableitung der Geometriefunktion Φ^* nach δ und anschließendem Nullsetzen erreicht. Analog zum Vorgehen beim großen Strukturkennwert muss auch an dieser Stelle darauf geachtet werden, dass der Plattenbeulwert k_{τ} abhängig vom Breiten-Höhenverhältnis δ_{kritBS} verschiedene Werte aufweist. Die kritischen Breiten-Höhenverhältnisse sind in Tabelle C.4 aufgeführt. Das optimale Breiten-Höhenverhältnis δ_{optk} und der Maximalwert der Geometriefunktion $\Phi_{T,max}^*$ für die verschiedenen Profilformen sind in Tabelle C.6 wiedergegeben.

Tab. C.6: Optimales Breiten-Höhenverhältnis für große und kleine Strukturkennwerte und entsprechende Maxima der Gewichtsfunktionen aus den Gleichungen C.3.14 und C.3.4 der angegebenen offenen Profilformen beim Torsionsstab. Die Maxima bei den Profilen mit einem optimalen Breiten-Höhenverhältnis $\delta_{optg} = 0$ wurden bei $\delta_{optg} = 0,1$ berechnet

Profilform	δ_{optg}	$\kappa_{\tau,g}$	$\Psi_{T,max}^*$	δ_{optk}	$\kappa_{\tau,k}$	$\Phi_{T,max}^*$
Doppel-T-Profil	0	5,3	0,422	0,7	5,3	1276
T-Profil	0	0,66	0,856	2	0,66	0,867
U-Profil	0	0,66	0,178	2,83	0,66	0,044

Nun fehlt nur noch die optimale relative Profilhöhe h/l . Die so genannte Stegslankheit wird gebildet, indem zunächst in die Restriktionen aus Gleichungen 5.3.5 und 5.3.8 in die Spannung nach 5.3.4 eingesetzt werden und diese dann sowie auch Gleichung 5.3.7 ebenfalls nach der Stegslankheit h/l umgestellt werden.

$$\left(\frac{h}{l}\right)_{\tau}^* = \left(\frac{1}{c_{\tau} c_{W_T} f_{W_T}(\delta)} \frac{K}{\tau_{zul} \left(\frac{t}{h}\right)^2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (\text{C.3.16a})$$

$$\left(\frac{h}{l}\right)_{\vartheta}^* = \left(\frac{1}{c_{\vartheta} c_{J_T} f_{J_T}(\delta)} \frac{K}{\vartheta_{zul} G \left(\frac{t}{h}\right)^3} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (\text{C.3.16b})$$

$$\left(\frac{h}{l}\right)_{BS}^* = \left(\frac{1}{c_{\tau} c_{W_T} f_{W_T}(\delta) k_{\tau}(\delta)} \frac{K}{E \left(\frac{t}{h}\right)^5} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (\text{C.3.16c})$$

Um nun die optimale Stegslankheit für einen großen Strukturkennwert zu erhalten, kann nun die relative Profildicke t/h aus Gleichung C.3.13 in die Gleichungen C.3.16a oder C.3.16c eingesetzt werden. Analog verhält es sich bei einem offenen Profil für einen kleinen Strukturwert, bei dem die relative Profildicke t/h aus Gleichung C.3.15 in die Gleichungen C.3.16b oder C.3.16c eingesetzt werden muss. So können alle nötigen optimalen Profilgeometrien für offene Profilformen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \left(\frac{t}{h}\right)_{\text{opt,g}}^* &= c_{\left(\frac{t}{h}\right),\text{g}}^* \sqrt{(1-\nu^2) \frac{\tau_{zul}}{E}}, \\ \left(\frac{h}{l}\right)_{\text{opt,g}}^* &= c_{\left(\frac{h}{l}\right),\text{g}}^* \left(\frac{1}{1-\nu^2} \frac{KE}{\tau_{zul}^2} \right)^{\frac{1}{3}}, \\ \left(\frac{t}{h}\right)_{\text{opt,k}}^* &= c_{\left(\frac{t}{h}\right),\text{k}}^* \frac{(1+\nu)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}}}{(1-\nu^2)^2 \vartheta_{zul}^{\frac{3}{2}} K^{\frac{1}{2}}}, \\ \left(\frac{h}{l}\right)_{\text{opt,k}}^* &= c_{\left(\frac{h}{l}\right),\text{k}}^* \left(\frac{(1-\nu^2)^{\frac{11}{5}}}{(1+\nu)^{\frac{3}{2}}} \frac{K^{\frac{7}{10}}}{\vartheta_{zul}^{\frac{3}{2}} E^{\frac{7}{10}}} \right)^{\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} c_{\left(\frac{t}{h}\right),\text{g}}^* &= \sqrt{\frac{12}{\pi^2} \frac{1}{\kappa_{\tau}(\delta_{\text{opt}})}}, \\ c_{\left(\frac{h}{l}\right),\text{g}}^* &= \left(\frac{\pi^2}{12} \frac{1}{c_{\tau} c_{W_T} f_{W_T}(\delta_{\text{opt}})} \kappa_{\tau}(\delta_{\text{opt}}) \right)^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

$$c_{\left(\frac{t}{h}\right),k}^* = \frac{\pi^4}{36\sqrt{2}} \frac{c_\tau^3 c_{W_T}^2}{c_\vartheta^{\frac{3}{2}} c_{J_T}^{\frac{3}{2}}} \frac{f_{W_T}(\delta_{\text{opt}})^2 \kappa_\tau(\nu, \delta_{\text{opt}})^2}{f_{J_T}(\delta_{\text{opt}})^{\frac{3}{2}}},$$

$$c_{\left(\frac{h}{l}\right),k}^* = \left(\frac{12^{\frac{6}{5}} \sqrt{18}}{\pi^{\frac{22}{5}}} \frac{c_\tau^{\frac{3}{2}} c_{J_T}^{\frac{3}{2}}}{c_\tau^{\frac{16}{5}} c_{W_T}^{\frac{11}{5}}} \frac{f_{J_T}(\delta_{\text{opt}})^{\frac{3}{2}}}{f_{W_T}(\delta_{\text{opt}})^{\frac{11}{5}} \kappa_\tau(\delta_{\text{opt}})^7} \right)^{\frac{5}{3}}.$$

Berechnete Werte für die c -Faktoren für die optimalen Profilgeometrien der betrachteten Profilformen sind in Tabelle C.7 zu finden.

Tab. C.7: Die Faktoren $c_{(t/h),k}^*$, $c_{(h/l),k}^*$, $c_{(t/h),g}^*$, $c_{(h/l),g}^*$ für das optimale Breiten-Höhenverhältnis der betrachteten offenen Profilformen beim Torsionsstab

Profilform	$c_{\left(\frac{t}{h}\right),k}^*$	$c_{\left(\frac{h}{l}\right),k}^*$	$c_{\left(\frac{t}{h}\right),g}^*$	$c_{\left(\frac{h}{l}\right),g}^*$
Doppel-T-Profil	54,81	$1,23 \times 10^{-7}$	0,479	2,03
T-Profil	1,57	14,07	1,357	0,885
U-Profil	0,560	116,86	1,357	1,404

Die optimalen Profilgeometrien können in Gleichung 5.3.4 zur Ermittlung der Spannung im Torsionsstab eingesetzt werden. Dadurch ergeben sich die maximalen Spannungen bei großem und kleinem Strukturkennwert. Diese lauten für das geschlossene Profil

$$\tau_{\text{max}}^* = \tau_{\text{zul}} \quad \text{für } K > \tilde{K}, \quad (\text{C.3.19a})$$

$$\tau_{\text{max}}^* = \left(\frac{\pi^{\frac{4}{3}}}{12^{\frac{4}{3}} \sqrt{18}} \frac{c_\tau^3 c_{W_T}^2}{c_\vartheta^{\frac{3}{2}} c_{J_T}^{\frac{3}{2}}} \frac{f_{W_T}(\delta_{\text{opt}})^2 \kappa_\tau(\delta_{\text{opt}})^{\frac{7}{3}}}{f_{J_T}(\delta_{\text{opt}})^{\frac{3}{2}}} \frac{(1+\nu)^{\frac{3}{2}}}{(1-\nu^2)^{\frac{7}{3}}} \frac{E^{\frac{5}{6}}}{\vartheta_{\text{zul}}^{\frac{3}{2}} K^{\frac{1}{2}}} \right)^3 \quad \text{für } K < \tilde{K} \quad (\text{C.3.19b})$$

Der kritische Strukturkennwert \tilde{K}^* und somit der Wechsel zwischen kleinem zu großem Strukturkennwert liegt dann vor, wenn die maximalen Spannungen aus Gleichungen C.3.19 gleich groß sind. Zur Bestimmung von \tilde{K}^* werden diese daher gleichgesetzt. Für offene Profile ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\tilde{K}^* = \frac{\pi^{\frac{8}{3}}}{12^{\frac{8}{3}} 18} \frac{c_\tau^6 c_{W_T}^4}{c_\vartheta^3 c_{J_T}^3} \frac{f_{W_T}(\delta_{\text{opt}})^4 \kappa_\tau(\delta_{\text{opt}})^{\frac{14}{3}}}{f_{J_T}(\delta_{\text{opt}})^3} \frac{(1+\nu)^3}{(1-\nu^2)^{\frac{14}{3}}} \frac{E^{\frac{5}{3}}}{\vartheta_{\text{zul}}^3 \tau_{\text{zul}}^{\frac{2}{3}}}.$$

Wie an den Ergebnissen insbesondere in Tabelle C.7 zu erkennen ist, bilden die Ausführungen für offene Profilformen keine technisch sinnvollen Lösungen. Dies liegt daran, dass die Drillsteifigkeit bei offenen Profilen um Größenordnungen kleiner als bei geschlossenen Profilen ist. Aus

diesem Grund ist die Betrachtung der Vierkantprofils für die Zielsetzung in dieser Arbeit einzig sinnvoll.